به نام خداوند خورشید و ماه
که دل را به دانش خرد داد راه
(حکیم ابولقاسم فردوسي)

این پایان نامه به اساتید زندگي

پدر و مادرم

و به اساتید علم و اخلاق که در طول تحصیل بیشترین نقش را در زندگي علمي ام داشته اند

دکتر علیرضا فتوحي

و

دکتر سید محمد مهدي طباطبایي

تقدیم مي شود.

امیدوارم این ناقابل را از حقیر پذیرا باشند

پایان نامه جهت اخذ درجه ي کارشناسي ارشد آمار ریاضي

عنوان :

تحلیل سیستمهاي اندازه گیري کیفي به کمك

مدلهاي اثرات تصادفي دوتايي[1]

استاد راهنما

دكتر غلامحسين شاهكار

استاد مشاور

دكتر سيد محمد مهدي طباطبايي

اساتيد داور

دكتر ناصر رضا ارقامي

دكتر ابوالقاسم بزرگنيا

تهيه و تنظيم

وحيد پرتوي نيا

قدرداني

من لم يشكر المخلوق، لم يشكر الخالق

خداوند را شاكرم كه پس از 4 سال تحصيل در دوره ي كارشناسي و 2 سال در دوره ي كارشناسي ارشد در گروه آمار دانشگاه فردوسي در شهريور 1383 موفق به كسب افتخار دانش آموختگي در دوره كارشناسي ارشد آمار رياضي از دانشگاه فردوسي مشهد گرديدم.

قبل از آغاز پايان نامه بر خود واجب مي دانم از زحمات دوستاني كه به نوعي در اين پايان نامه نقش داشته اند تشكر و قدرداني كنم چرا كه اگر كمك دوستانه ي آنان وجود نداشت اين پايان نامه

---

[1] باعث مباهات و افتخار بنده است كه اين پايان نامه پس از دفاع موفق به اخذ نمره ي كامل (20) شده است.

در سطحي كه هم اكنون در دستان شماست بوجود نمي آمد. نقاط قوت اين پايان نامه را در مساعدت اين عزيزان مي دانم و به همين جهت از آنها در ابتداي پايان نامه قدرداني مي كنم. اميدوارم خوانندگان عزيز اشكالات احتمالي اين پايان نامه را به بزرگواري خود بر حقير ببخشايند و بنده را از نظرات سازنده ي خود بي نصيب نفرمايند[1].

از دوست عزيزم، همكلاسي دوره ي كارشناسي و كارشناسي ارشد آقاي محمد مهدي غلامرضايي متشكرم كه در دو فصل اول همكار بنده در اين تحقيق بوده اند و در برنامه نويسي مقايسه ي دو روش تعييني و راهنماي MSA كمك شاياني داشته اند و در خلال فصول بعدي نيز بنده را از نظرات سازنده ي خود بي نصيب نگذاشته اند.

از استاد عزيز و دوست صميمي دكتر عليرضا فتوحي (كه در كانادا به سر مي برند) متشكرم كه به عنوان راهنما در گامهاي اوليه ي تحقيق مخصوصاً در دو فصل اول حضور فعال داشته اند. تحقيقات دو فصل اول در اتاق شخصي ايشان در دانشكده انجام شده است، از صميم قلب آرزو دارم در هر جاي دنيا كه باشند، همواره موفق و پيروز باشند.

از استاد ارجمند دكتر شاهكار متشكرم كه در ادامه ي تحقيق انجام شده با دكتر فتوحي استاد راهنماي بنده بوده اند و مخصوصاً در فصول 3 تا 5 از نظرات ارزنده ي شان استفاده كرده ام.

از استاد عزيزم ((دكتر طباطبايي)) كه سمت استاد مشاور اين پايان نامه را داشته اند ((بسيار)) متشكرم زيرا هر چند استاد راهنماي بنده در اين پايان نامه نبوده اند ولي به راستي زمان بيشتري براي اين تحقيق با بنده صرف نموده اند. تصميم گيري به كمك بازه هاي اطمينان بوت استرپ و اثبات سازگاري روش تعييني مديون راهنمايي هاي ايشان است. به علاوه شبيه سازي ها و برنامه هاي

---

1 http://vahidpartovinia.tripod.com

vahidpartovinia@yahoo.com

فصول 3 تا 5 و تایپ تمامي اين پايان نامه در اتاق ايشان در دانشكده انجام شده است و در طول قريب به 1 سال بهره هاي بسياري از اين فداكاري و اعتماد برده ام و حقيقتاً معتقدم بدون لطف بي شائبه ي ايشان، اين پايان نامه در اين سطح، آماده نمي شد.

از استاد عزيزم دكتر ارقامي متشكرم زيرا هرچند در طول انجام اين تحقيق سمت رسمي و اداري در پايان نامه نداشتند ولي همواره از مشاوره ي مفيد علميشان بهره برده ام و مدل اثرات متقابل نتيجه ي اين همكاري است. به علاوه بر بنده منت نهادند و زحمت داوري اين پايان نامه را نيز متقبل شدند.

از استاد بزرگ آمار ايران، دكتر بزرگنيا متشكرم كه پذيرفتند اين پايان نامه را داوري كنند. اين افتخار شگرف كه توانستم تا لحظات پاياني نيز شاگرد كوچك ايشان باشم، هرگز از خاطر نخواهم برد.

از شركت طلايه گستران كيفيت و مديران لايق آن، آقايان مهندس صادقيان و مهندس شيخ رودي متشكرم كه پس از گذراندن دوره كارشناسي آمار موقعيت كاري اي در صنعت براي بنده در نظر گرفتند. همين موقعيت، جرقه هاي اين پايان نامه را بوجود آورد.

از همكلاسي دوره ي كارشناسي و دوست گرامي خانم محبوبه مبرا متخصص آمار شركت طلايه گستران به خاطر بحثهاي اوليه و مفيدشان در زمينه ي تحليل سيستمهاي اندازه گيري متشكرم.

از كارمندان دلسوز كتابخانه ي پروفسور فاطمي، خانم ها حسيني ، صادقي، آقاي داودنژاد و مخصوصاً آقاي رسول اتحاد متشكرم كه زحمت تهيه ي قريب به 250 مقاله (قريب به 100 تاي آنها در پايان نامه بطور مستقيم استفاده شده است) را متحمل شدند و با خشرويي پذيراي بنده بودند و همواره پذيراي ديگر پژوهشگران هستند.

از خواهر بزرگترم راحله دانشجوي كارشناسي ارشد

شيمي تجزيه متشكرم زيرا مقالاتي كه در مشهد قابل تهيه نبود از دانشگاه شيراز تهيه مي كردند و به سرعت ارسال مي فرمودند.

از دوست گرامي آقاي مجتبي شاكري دانشجوي كارشناسي ارشد صنايع متشكرم كه مقالات كليدي اين تحقيق را از دانشگاه علم و صنعت تهيه كردند و در مدت كمي در اختيارم قرار دادند.

از دكتر داسكالاكيس [1] عضو هيئت علمي گروه آمار زيستي دانشگاه توماس جفرسون متشكرم كه وقايع 11 سپتامبر مانع از اين نشد علم دوستي ايشان تضعيف شود. ايشان تمامي تحقيقات خود را در زمينه ي آماره ي كاپا مخصوصاً يادداشتها و ماكروي نوشته شده در SAS كه توسط خودشان تهيه شده بود بدون هيچگونه چشمداشتي در اختيارم قرار دادند.

از دانشجوي دكتري بيومتري در دانمارك آقاي مهدي شريعتي متشكرم كه جزوه ي درسي پروفسور سورنسن [2] را در اختيارم قرار دادند و مروري بر BIC نتيجه ي اين سخاوت است، همينجا از پروفسور سورنسن نيز متشكرم كه بسيار زيبا مطلب را باز كرده بودند.

از پروفسور ديويسن [3] استاد برجسته ي دانشگاه EPFL و آمار جهان متشكرم زيرا ايده ي P-مقدار تجربي مديون كمك ايشان است.

از استاد گروه رياضي خانم دكتر توتونيان متشكرم كه همواره با روي گشاده پذيراي سئوالات حقير در موضوع تقريب عددي انتگرالها بودند. منابع مفيدي كه ايشان در زمينه ي تربيع گاوس-هرميتي به بنده معرفي كردند، فهم اين مفهوم را بسيار ساده نمود.

از دكتر صابري عضو هيئت علمي گروه رياضي كه علاوه بر تبديلات انتگرالي، در آمار نيز صاحب نظر هستند و واژه ي تربيع را به جاي Quadrature به

---

[1] Constantine Daskalakis

[2] Daniel Sorensen

[3] Anthony Davison

حقير پيشنهاد دادند، متشكرم.
از دكتر تقي زاده عضو هيئت علمي گروه رياضي كه قفل نظريه ي بهينه سازي بدون مشتق مخصوصاً روش شبه نيوتن را كه اساس ماكزيمم سازي عددي توابع درستنمايي بوده است با ديدي شهودي بر بنده گشودند متشكرم.
از خانم حيدري همكلاسي دوره ي كارشناسي و كارشناسي ارشد و دوست گرامي كه زمانهايي را به بحثهاي مفيد در زمينه ي محك AIC با بنده اختصاص دادند متشكرم.
از خانم رقيه حاجي زاده كارشناس ارشد شهرسازي، خانم شهرزاد اسدي كارشناسي برنامه ريزي شهري و آقاي شهاب بهشتي، همكاران بنده در واحد آمار اطلاعات شهرداري مشهد به خاطر همكاري و دوستي خالصانه شان متشكرم
از آقايان حسين باغيشني و مهدي مودي دانشجويان كارشناسي ارشد آمارزياضي كه در ويرايش علمي و ادبي مقاله ي انگليسي استخراج شده از پايان نامه كمكم كرده اند متشكرم.
از خواهر كوچكترم الهه دانشجوي طراحي به خاطر لطيفه هاي با ذوقش كه شوق ادامه ي تحقيق را در من بيشتر مي كرد متشكرم.
از خانم فاطمه روحي دانشجوي كارشناسي آمار به خاطر همراهيشان، از خانم شروين عسگري دانشجوي كارشناسي ارشد آمارزياضي به خاطر تهيه ي منابعي در اثبات سازگاري آزمونهاي نسبت درستنمايي تعميم يافته و مخصوصاً از خانم سميه باصري دانشجوي كارشناسي آمار به خاطر تاثيرشان متشكرم.
از خانم سحر حسينيان دانشجوي دكتري آمار دانشگاه EPFL به خاطر تشويقشان به ادامه تحصيلم در سوئيس متشكرم.
از دكتر فتوحي، دكتر طباطبايي، دكتر شاهكار، دكتر ارقامي و دكتر بزرگنيا كه با توصيه نامه هاي مثبت خود، زمينه ي رشد آتي را در دانشگاه EPFL برايم فراهم كردند دوباره متشكرم.

از پروفسور ديويسن كه پذيرفتند افتخار شاگردي
ايشان در سوئيس در دوره ي دكتري نصيب حقير شود
و با فراهم كردن پشتيباني مالي گام بزرگي در
تسهيل اين مهم برداشتند، دوباره متشكرم.
از تك تك اعضاي گروه آمار دانشگاه فردوسي مشهد
كه افتخار شاگرديشان را در دوره ي كارشناسي و
كارشناسي ارشد داشته ام، نيز متشكرم.
بيشتر از همه از خانواده ام كه در طول يك سال
تحقيق پذيراي مشكلات و متحمل نگراني ها و تاخير
هاي شبانه ام بوده اند متشكرم.

فهرست

فصل 1
مقدمه

1-1 تاریخچه و مقدمات

يكي از پايه هاي مهم علوم مخصوصاً علوم تجربي اندازه گيري است . در اولين نگاه ، اندازه كميتي پيوسته به نظر مي رسد ولي در واقع همواره كميتي پيوسته نيست و در بسياري از اوقات يا جنبه ي كمي ندارد و يا جهت سهولت انجام اندازه گيري به كميتي كيفي تبديل مي گردد. به هر حال اندازه هم جنبه ي كمي و هم جنبه ي كيفي دارد . مسلماً هر اندازه گيري نياز به ابزار اندازه گيري دارد و هر ابزار اندازه گيري بايد خواصي داشته باشد كه بتوان آن اندازه گيري را قابل اعتماد و به بيان علمي تر دقيق دانست. وسيله اندازه گيري زمان ، طول ، جهت و .... از قديم الايام فكر انسانها را به خود مشغول داشته است و پس از گذشت زمانهاي بسيار ابزارهاي مناسبي براي اندازه گيري اين اقلام كشف گرديده است : ساعت ، خط كش ، قطب نما و ... نتايج سالها تفكر و تحقيق در اين مقوله ها بوده است.

تحليل سيتمهاي اندازه گيري به فرآيندي اطلاق مي شود كه بررسي مي كند آيا ابزار اندازه گيري داراي خواص مطلوب مورد نظر هست يا خير . اين موضوع به خصوص در صنعت خودرو سازي مورد توجه قرار گرفته است تا جايي كه راهنماي روش تحليل سيستمهاي اندازه گيري در سال 1995 ويرايش دوم و 2002 ويرايش سوم خود را به چاپ رساند. هم اكنون كارخانه هاي مهم قطعه سازي خودرو مانند Daimler-Chrysler ، General Motors و Ford كه تهيه كنندگان اين راهنما هستند ، تمامي زير مجموعه هاي خود را ملزم به رعايت اين استانداردها و پياده سازي

تحليل سيستمهاي اندازه گيري براي تمامي مراحل اندازه گيري و تعيين كيفيت جهت دست يافتن به استاندارد QS[1] كردند. هم كنون ايران خودرو و تقريباً تمامي شركتهاي سازنده ي قطعات خودرو ملزم به داشتن استاندارد QS هستند و مطمئناً سيستمهاي اندازه گيري آنها توسط راهنماي ذكر شده مورد تحليل و بررسي قرار مي گيرد.

در آخرين ويرايش راهنماي تحليل سيستمهاي اندازه گيري (راهنماي MSA[2]) تغييرات اساسي در روش تحليل بوجود آمد كه اين روش را در فصل 2 تشريح مي كنيم و سپس نارسايي‌هاي آن را مورد بررسي قرار خواهيم داد و روش تعييني را در 2 - 2 معرفي مي كنيم و اين دو را به كمك شبيه سازي با هم مقايسه خواهيم كرد.

در فصل 3 مدل مزدوج بيزي و در 3 - 4 مدلهاي آميخته را بررسي مي كنيم و فصل 5 به پياده سازي اين مدلها اختصاص خواهد يافت و در ضمايم داده ها و برنامه هاي مهم بكار برده شده در اين تحقيق ارائه خواهند گرديد.

تحليل سيستمهاي اندازه گيري كمي بطور وسيع مورد بررسي قرار گرفته اند و در بسياري از نرم افزارهاي آماري مانند Minitab ، Statistica و SAS نيز پياده سازي شده اند و خود اين موضوع بيانگر اهميت تحليل سيستمهاي اندازه گيري است ولي تحليل سيستمهاي اندازه گيري كيفي[3] در نرم افزارهاي همه منظوره ي آماري پياده سازي نشده اند و تنها در برخي نرم افزارهاي تجاري مانند PQ-Systems و JMP كه نرم افزارهاي مخصوص ابزار كيفيت هستند برنامه نويسي گرديده اند . اين موضوع مي تواند نشانگر كم بودن تقاضا براي وجود اين گونه نرم افزارها يا نو بودن اين زمينه ي تحقيقاتي باشد كه مورد دوم با توجه به تعداد

---

[1] Quality System Requirements

[2] Measurement Systems Analysis Reference Manual

[3] Attribute Measurement Systems Analysis

مقالات چاپ شده در اين زمينه و با توجه به اينكه از 220 صفحه ي راهنماي MSA تنها 15 صفحه به تحليل سيتمهاي اندازه گيري كيفي اختصاص داده شده است، محتمل تر است.

		
نمودار (1 1) ولت متر – آمپر متر – اهم متر، سيستم اندازه گيري پيوسته	نمودار (1 2) خط كش و متر، سيستمهاي اندازه گيري پيوسته	نمودار (1 3) كوليس، سيستم اندازه گيري پيوسته
		
نمودار (1 4) گيج برو[1]، سيستم اندازه گيري گسسته	نمودار (1 5) گيج برو-نرو[2]، سيستم اندازه گيري گسسته	نمودار (1 6) : انواع گيجهاي برو-نرو، سيستمهاي اندازه گيري گسسته

[1] Go Gage

[2] Go-NoGo Gage

1 -2 تعاريف بنيادين

مفاهيم پايه اي در تحليل سيستمهاي اندازه گيري به شرح زير است :

تكرار پذيري[1] : بدين معنا است كه تكرار اندازه گيري توسط يك فرد تغييري در نتيجه ي اندازه گيري نداشته باشد يا به بيان ديگر سيستم اندازه گيري مستقل از تكرار توسط فرد باشد.

تكثير پذيري[2] : بدين معنا است كه تعويض اپراتور اندازه گيرنده تغييري در نتيجه ي اندازه گيري نداشته باشد ، به بيان ديگر سيستم اندازه گيري مستقل از افراد باشد.

اريبي : وقتي به طور متوسط ، مقدار اندازه گيري شده با مقدار واقعي برابر نباشد مي گوييم سيستم اريب است . در حقيقت اگر μ_i اندازه ي واقعي قطعه و M_i متغير تصادفي اندازه گيري آن توسط سيستم اندازه گيري باشد ، $E(M_i) \neq \mu_i$.

خطي بودن (خطيت) [3] : زماني كه اندازه گيري ها با تغيير اندازه ي واقعي قطعه روند خطي داشته باشد مي گوييم سيستم خطي است.

به سيستمهاي اندازه گيري كه داراي خاصيت 1 و 2 باشند ، سيستمهاي اندازه گيري R&R گفته مي شود و به سيستم اندازه گيري كه تمامي خواص را دارا باشد ، سيستم اندازه گيري قابل[4] اطلاق مي گردد.

در تحليل سيستمهاي اندازه گيري كمي ، تمامي تعاريف فوق به كمك معيار هاي كمي قابل بررسي اند، اين در حالي است كه براي حالت كيفي اين فقدان محسوس است. محكهايي براي R&R بودن سيستم اندازه گيري به خصوص مد نظر است كه متاسفانه در راهنماي MSA تعريف نشده اند ولي خواهيم ديد با

---

[1] Repeatability

[2] Reproducibility

[3] Linearity

[4] Capable

ديدگاه مدلبندي مي توان اين موضوع را مرتفع كرد و معيارهاي مناسبي براي ميزان R&R بودن سيستم اندازه گيري كيفي و قابليت سيستم و همچنين روشي مناسب براي رد يا قبول سيستم اندازه گيري يافت.

1 -3 تحليل سيستمهاي اندازه گيري

همانطور كه اشاره شد در اين پايان نامه تنها سيستمهاي اندازه گيري كيفي دو حالته بررسي مي شوند ولي تمام مسائل مطرح شده با كمي تأمل به وضعيتهاي بيش از دو حالت نيز قابل تعميم است. تمامي سيستمهاي كنترل فرآيند آماري [1] يا سيستمهاي كنترل كيفيت آماري [2] (چه كمي و چه كيفي) بر اساس اندازه گيري ها بنا شده اند كه يكي از فرضيات پياده سازي اين قبيل سيستمها آن است كه تغييرات مشاهده شده مربوط به فرآيند توليد قطعه باشد نه سيستم اندازه گيري آن. اين موضوع روشن مي كند كه تحليل سيستم اندازه گيري بايد قبل از پياده سازي سيستم كنترل فرآيند يا سيستم كنترل كيفيت باشد، به علاوه زماني كه قرار است روي سيستم اندازه گيري ، يك سيستم كنترل فرآيند يا يك سيستم كنترل كيفيت آماري پياده سازي شود ، لازم است سيستم اندازه گيري از دقت بالايي برخوردار باشد. اين ديدگاه نشان مي دهد اهميت تحليل سيستمهاي اندازه گيري به اندازه ي پياده سازي يك سيستم كنترلي مهم است. در مورد اهميت تحليل سيستمهاي اندازه گيري كيفي بايد اذعان كرد كه با توجه به سهولت و سرعت به كار بري اين قبيل سيستمها حداقل به اندازه ي سيتمهاي اندازه گيري كمي مهم است و شايد به اين علت كمتر مورد توجه قرار گرفته است كه تحليل سيستمهاي اندازه گيري خود نيازمند داشتن پيش

---

[1] Statistical Process Control

[2] Statistical Quality Control

زمینه ي کافي در علم آمار است که کمتر افرادي
که در این زمینه فعالیت مي کنند داراي این پیش
زمینه ها هستند.

فصل 2
تحليل سيستمهاي اندازه گيري كيفي

2 -1 مقدمه

كتب فارسي نوشته شده در زمينه ي تحليل سيستم هاي اندازه گيري محدود است و به جز رضا مهربان (1377) نشر پيكان ((تجزيه و تحليل سيستمهاي اندازه گيري ، كنترل و صلاحيت ابزار دقيق)) كه در اين زمينه تاليف شده است ، بقيه ي كتابها ترجمه هاي كتاب راهنماي MSA [1]هستند كه اكثراً به صورت جزوه يا كتاب در دسترس هستند.

روش راهنماي MSA ويرايش دوم (سال 1995) كه در كتاب دكتر مهربان نيز توضيح داده شده است در ويرايش سوم (سال 2002) به كلي تغيير يافته است. در اين پايان نامه تنها روش آماري ارائه شده در ويرايش سوم مورد نقد و بررسي قرار مي گيرد.

راهنماي MSA، مراحل زير را جهت پذيرش يا رد سيستم اندازه گيري پيشنهاد مي دهد :

بررسي توافق[2] بازرسان با همديگر به كمك آماره ي كاپا[3]

بررسي توافق هر بازرس با وضعيت واقعي قطعه به كمك آماره ي كاپا

بررسي امتياز[4] بازرسان

بررسي تاثيرپذيري[5] سيستم اندازه گيري

با توجه به اينكه تمامي توافقها به كمك آماره ي كاپا انجام مي پذيرد در بخش بعد به بررسي تفصيلي آماره ي كاپا و ضرايب همبستگي گسسته مي

---

1 Measurement Systems Analysis

2 Agreement

3 Kappa Statistic

4 Score

5 Effectiveness

پردازيم و مفاهيم پايه اي آن را مرور مي كنيم.

2 -1 -1 ضرايب همبستگي گسسته و آماره ي كاپا

فرض كنيد علاقمند به بررسي هماهنگي در تصميم گيري دو بازرس در مورد قطعات خراب و درست هستيم ، اولين چيزي كه براي بررسي اين توافق به ذهن مي رسد ، تشكيل يک جدول توافقي است.

به عنوان مثال براي بررسي نظريات دو بازرس 1 و 2 و قضاوت در مورد درست يا خراب بودن تعدادي اقلام خواهيم داشت :

		بازرس 1		
بازرس 2		درست	خراب	جمع
	درست	A	B	B_1
	خراب	C	D	B_2
	جمع	A_1	A_2	N

مسلماً به هر اندازه كه B و C اعداد كمتر و به طور معادل فراواني هاي روي قطر اصلي اعداد بزرگتري باشند، توافق بين دو بازرس بيشتر است كه N تعداد كل قطعات هستند.

يک معيار توافق منطقي به صورت $ICC = \frac{A+D}{N}$ [1] تعريف مي شود.بديهي است كه $ICC \le 1$ و بزرگ بودن ICC نمايانگر بيشتر بودن توافق است و صفر بودن آن نشانگر عدم توافق خواهد بود.

مثال زير روشن كننده ي اين موضوع است كه محک ICC محک مناسبي براي تشخيص توافق نيست :

		بازرس 1		
بازرس 2		درست	خراب	جمع
	درست	25	25	50
	خراب	25	25	50
	جمع	50	50	100

[1] Intuitive Correlation Coefficient

در نگاه اول به نظر مي آيد با توجه به اينكه $ICC = 0.5$ است ، دو بازرس در 50 درصد از حالات با هم توافق دارند . اين در حالي است كه واقعاً توافقي بين اين دو بازرس وجود ندارد و عدد 0.5 گمراه كننده مي نمايد .

در حقيقت دو بازرس كاملاً روي قطعات به طور تصادفي تصميم مي گيرند.

براي از بين بردن اينچنين اشكالات ، معيار توافق بر اساس تصادف بيان مي شود. يكي از اين محكها، آماره ي پيرسن است.

$$\chi^2 = \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{2}\frac{\left(O_{i,j} - E_{i,j}\right)^2}{E_{i,j}}, \chi^2 \geq 0 \qquad (1\text{–}2)$$

كه $O_{i,j}$ فراواني مشاهده شده و $E_{i,j}$ فراواني برآورد شده تحت فرض تصادفي بودن است در حقيقت اگر دو بازرس 1 و 2 مستقل از هم تصميم گيري كنند، سيستم اندازه گيري نا مناسب است .

هر چه عدد χ^2 بزرگتري باشد بيانگر توافق يا عدم توافق بيشتر در مقايسه با تصميم بر اساس تصادف است . بطور مشابه همبستگي اسمي كرامر بر اساس آماره ي پيرسن به صورت زير تعريف مي شود.

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} \qquad 0 \leq \varphi \leq 1 \qquad (2\text{–}2)$$

اين محک شبيه ICC كران پايين صفر و كران بالاي يک دارد ، زماني صفر مي شود كه توافق كاملاً بر اساس تصادف باشد و زماني 1 مي گردد كه توافق يا عدم توافق حداكثر ممكن با تصادف فاصله بگيرد.

ضريب همبستگي مشابه ديگري توسط كندال و استوارت[1] در سال 1979 به نام ضريب توافق [2] به صورت زير تعريف شده است :

$$P = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} \qquad 0 \leq P \leq 1 \qquad (3\text{–}2)$$

---

[1] Kendall and Stuart

[2] Contingency Coefficient

فلیس[1] در سال 1981 تحت عنوان اندازه ي في[2]، معيار ديگري را به صورت زير معرفي كرده است:

$$\varphi = \frac{A \times D - B \times C}{A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2} \quad -1 \le \varphi \le 1 \qquad (4\ 2)$$

اسكات[3] در سال 1955 نيز معيار ديگري با نام اندازه ي پي[4] تعريف كرده است:

$$\pi = \frac{p_O - p_E}{1 - p_E} \qquad (5\ 2)$$

$$p_O = \frac{A}{N} \qquad p_E = \left(\frac{A_1 + B_1}{2N}\right)^2 + \left(\frac{A_2 + B_2}{2N}\right)^2$$

آنچه در راهنماي MSA مورد استفاده قرار گرفته است محک كاپا است كه توسط كوهن [5] در سال 1960 به صورت زير تعريف شده است:

$$\kappa = \frac{p_O - p_E}{1 - p_E} \quad -1 \le \kappa \le 1 \qquad (6\ 2)$$

اندازه ي في ، پي و كاپا داراي خواصي هستند كه آنها را از ديگر معيارها مجزا مي كند:
همانند χ^2 و ضريب همبستگي اسمي كرامر [6] ، زماني صفر مي شوند كه توافق بر اساس تصادف باشد به علاوه زماني به كران بالاي خود نزديک مي شوند كه توافق از تصادف بيشترين فاصله را داشته باشد و زماني به كران پايين خود نزديک مي شوند كه عدم توافق از تصادف حداكثر فاصله را بگيرد.
در حقيقت سه معيار اخير براي عدم توافق (بر اساس تصادف) مقدار منفي و براي توافق (بر اساس تصادف) مقدار مثبت ارائه مي كنند.

قضيه 1.2 : $\kappa \le 1$
اثبات :

---

[1] Fleiss
[2] Phi Measure
[3] Scott
[4] Pi Measure
[5] Cohen
[6] Cramer V Nominal Correlation

$$
\begin{aligned}
& A \le N \\
& \Rightarrow \frac{A}{N} \le 1 \\
& \Rightarrow \frac{AN-(A+B)(A+C)}{N^2} \le \frac{N^2-(A+B)(A+C)}{N^2} \qquad (7\ \ 2) \\
& \Rightarrow \frac{\frac{A}{N}-\frac{(A+B)(A+C)}{N^2}}{1-\frac{(A+B)(A+C)}{N^2}} = \frac{p_O - p_E}{1-p_E} \le 1
\end{aligned}
$$

قضيه 2.2 : $\kappa \ge -1$

اثبات :

$$
\begin{aligned}
& A(B+C+D)+2D(A+B+C)+\left(B^2+C^2+D^2\right) \ge 0 \\
& \Rightarrow A(A+B+C+D)+\left(B^2+C^2+D^2+A^2\right)+ \\
& (2AB+2AC+2AD+2BC+2BD+2CD) \ge 2\left(A^2+AC+AB+BC\right) \\
& \Rightarrow AN+N^2-(A+B)(A+C) \ge (A+B)(A+C) \\
& \Rightarrow AN-(A+B)(A+C) \ge (A+B)(A+C)-N^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{A}{N}-\frac{(A+B)(A+C)}{N^2} \ge \frac{(A+B)(A+C)}{N^2}-1 \\
& \Rightarrow \frac{\frac{A}{N}-\frac{(A+B)(A+C)}{N^2}}{\frac{(A+B)(A+C)-1}{N^2}} \ge -1 \qquad (8\ \ 2) \\
& \Rightarrow \frac{p_O - p_E}{1-p_E} \le -1
\end{aligned}
$$

و اثبات تمام است.

اکنون جهت بررسي عميق تر خواص معيار کاپا آن را در چندمثال محاسبه مي کنيم :

مثال 1.2 توافق :

		بازرس 1		
بازرس 2		درست	خراب	جمع
	درست	99	0	99
	خراب	0	1	1
	جمع	99	1	100

$\kappa = 0.99$ (9 2)

مثال 2.2: عدم توافق

بازرس 2		درست	خراب	جمع
		بازرس 1		
	درست	0	99	99
	خراب	1	0	1
	جمع	1	99	100

$\kappa = -0.99$ (10-2)

مثال 3.2: توافق بر اساس تصادف :

بازرس 2		درست	خراب	جمع
		بازرس 1		
	درست	25	25	50
	خراب	25	25	50
	جمع	50	50	100

$\kappa = 0.00$ (11-2)

جهت پذيرش توافق لازم است آماره ي كاپا عدد بزرگي باشد ، نظرات در مورد اينكه آماره ي كاپا چقدر بزرگ باشد تا توافق را بين بازرسان بپذيريم متفاوت است، لانديس و كخ [1] در سال 1977 جدول زير را پيشنهاد مي دهند:

توافق ضعيف	<0
توافق كم	0.2–0
توافق متعادل	0.4–0.2
توافق متوسط	0.6–0.4
توافق قوي	0.8–0.6
توافق تقريباً كامل	1–0.8

راهنماي MSA مقادير بزرگتر از 0.75 را براي پذيرش توافق قبول مي كند. با توجه به اينكه اعتماد به آماره ي كاپا به حجم نمونه بستگي دارد ، شايد بهتر باشد به جاي تصميم با خود آماره ي كاپا آن را آزمون كنيم :

[1] Landis and Koch

$$\begin{cases} H_0 : \kappa \geq 0.75 \\ H_1 : \kappa < 0.75 \end{cases} \quad (2-12)$$

يا به جاي پذيرش توافق ، توافق معني دار (بر اساس تصادف) را بپذيريم :

$$\begin{cases} H_0 : \kappa \geq 0 \\ H_1 : \kappa < 0 \end{cases} \quad (2-13)$$

متاسفانه حتي تحت فرضيه H_0 نيز توزيع آماره ي كاپا ناشناخته است.

و جهت آزمون اين فرضيه ها راه حل هاي جايگزين متفاوتي ارائه شده است : فليس [1] در سال 1981 به عنوان مثال استنباط بر اساس تقريب نرمال را پيشنهاد مي دهد، افرن و تيبشيراني [2] روشهاي بنا شده بر باز نمونه گيري را توصيه مي كنند، لانديس و كخ[3] در سال 1977 روش حداقل مربعات تعميم يافته ، ليانگ و زگر [4] در سال 1986 روش معادلات برآورد تعميم يافته، اگرستي [5] در سال 1990 روشهاي بنا شده بر مدلهاي لگ خطي ، اگرستي و لنگ [6] در سال 1993 روشهاي مدل دسته هاي مخفي را پيشنهاد مي دهند.

استنباط بر اساس تقريب نرمال تنها براي آزمون فرضيه ي :

$$\begin{cases} H0 : \kappa = 0 \\ H1 : \kappa \neq 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

بررسي شده است ، اوريت [7] در سال 1968 گشتاورهاي آماره ي كاپا را توسط خواص توزيع فوق هندسي محاسبه كرده است :

$$\mathrm{k} \sim Normal\left(\kappa, \mathrm{Var}(\mathrm{k})\right) \quad (2-15)$$

---

1 Fleiss

2 Efron and Tibshirani

3 Landis and Koch

4 Liang and Zeger

5 Agresti

6 Agresti and Lang

7 Everitt

$$\mathrm{Var}(k) = V\left(\kappa, \pi_{i+}, \pi_{+j}, \pi_{ij}\right) = \frac{-A\,(1-\kappa)^2 + 2A\,(1-\kappa)}{N\left(1 - \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} \pi_{i+}\,\pi_{+j}\right)^2} \quad (16\ \ 2)$$

$$A = \left(1 + \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} \pi_{i+}\,\pi_{+j}\right)^2 \quad (17\ \ 2)$$

$$\pi_{1+} = \frac{A+B}{N}, \pi_{2+} = \frac{C+D}{N}$$
$$\pi_{+1} = \frac{A+C}{N}, \pi_{+2} = \frac{B+D}{N} \quad (18\ \ 2)$$

2-1-2 عدم کفايت آماره ي کاپا به عنوان محک توافق

با اينکه محک کاپا خواص مناسب ذکر شده را دارد در همه ي حالات محک مناسبي براي توافق نيست ، حساسيت اين محک به فراواني هاي حاشيه اي بيشترين مشکل اين محک است که به همين جهت در اکثر استنباط ها که در بخش قبل به آن اشاره شد (مخصوصاً استنباط با تقريب نرمال) تعادل تقريبي در فراواني هاي حاشيه اي را فرض کرده اند.

اين عدم کفايت در دو مثال زير خود را بيشتر نشان مي دهد :

مثال4.2:

		بازرس 1		
بازرس 2		درست	خراب	جمع
	درست	40	9	49
	خراب	6	45	50
	جمع	46	54	100

$$\kappa = 0.32 \quad (19\ \ 2)$$

		بازرس 1		
بازرس 2		درست	خراب	جمع
	درست	80	10	90
	خراب	5	5	10

	جمع	85	15	100

$\kappa = 0.7$ (2θ 2)

با توجه به اینکه بحثهاي لازم در مورد محکهاي توافق به اندازه ي کافي در بخش قبل صورت گرفته است ، و با توجه به مفهوم توافق و برابر بودن ICC در هر دو جدول ($ICC = 0.85$) انتظار مي رود محک توافق براي این دو جدول مقادیر نزدیک به هم باشند در صورتي که آماره ي کاپا براي جدول دوم که عدم تعادل در فراواني حاشیه اي وجود دارد بیش از دو برابر جدول اول است.

جدول توافقي زیر حساسیت آماره ي کاپا را به فراواني هاي حاشیه اي، روشن تر مي کند:

مثال5.2 :

		بازرس 1		
بازرس 2		درست	خراب	جمع
	درست	90	1	91
	خراب	8	1	9
	جمع	98	2	100

$\kappa = 0.154$ (21 2)

این در حالي است که $ICC = 0.91$ (که معیاري براي توافق شهودي است) عدد بزرگي را نشان مي دهد و این در حالي است که $\kappa = 0.154$ نشان دهنده ي توافق بسیار ضعیف است.

اکنون این سؤال پیش مي آید که : ((آیا مي توان محک توافقي (بر اساس تصادف) تعریف کرد که نسبت به عدم تعادل فراواني هاي حاشیه اي حساس نباشد و به علاوه همخواني بیشتري با محک توافق شهودي داشته باشد ؟)) .گوت[1] در سال 2001 محک AC1 را اخیراً معرفي کرده است که جواب مثبت به این سؤال است و دلایل برتري این محک بر محک کاپا در گوت در سال 2002 به تفصیل بررسي شده است.

[1] Gwett

2 -1 -3 مراحل تصميم گيري در روش راهنماي MSA

چند عامل مهم در تصميم گيري درباره ي سيستم اندازه گيري كيفي به روش راهنماي MSA نقش اساسي را بازي مي كنند

آماره هاي توافق

امتياز بازرسان و بازه ي اطمينان آنها

قابليت سيستم اندازه گيري

مفهوم اول در بخشهاي قبل مورد بررسي واقع شده اند در مورد امتياز و قابليت در خلال توضيح مراحل تصميم گيري ، بحث خواهد شد.جهت سادگي توضيحات فرض كنيد سه بازرس در سه تكرار و روي 50 قطعه كه تعدادي از آنها قطعه ي خراب و تعدادي قطعه ي صحيح است توسط سيستم اندازه گيري گسسته اي تصميم مي گيرند و آنها را به يكي از دو دسته ي درست و خراب نسبت مي دهند ولي در هر بار تصميم گيري نمي دانند روي كدام قطعات چه تصميمي گرفته اند. داده هاي مورد استفاده داده هايي است كه در راهنماي MSA گزارش شده است كه 1 نشان دهنده ي پذيرش قطعه و 0 نشان دهنده ي رد قطعه در مجموع سه تكرار انجام گرفته توسط هر بازرس است، جدول توافق بازرس ان و آماره هاي كاپا به صورت زير محاسبه شده اند:

		بازرس 1		
		درست	خراب	جمع
بازرس 2	درست	44	3	47
	خراب	6	97	113
	جمع	50	100	150

$\kappa = 0.863$ (22 2)

		بازرس 1		
		درست	خراب	جمع
بازرس 3	درست	43	8	51
	خراب	7	92	99
	جمع	50	100	150

$\kappa = 0.776$ (23 2)

		بازرس 2		
بازرس 3		درست	خراب	جمع
	درست	42	9	51
	خراب	5	94	99
	جمع	47	103	150

$\kappa = 0.788$ (24 2)

اين سه جدول توافقي در حقيقت تكثيرپذيري سيستم اندازه گيري را بررسي مي كنند . در راهنماي MSA بيان مي شود آماره ي كاپا ي بزرگتر از 0.75 براي توافق بين بازرسان كافي است ولي به هر حال امكان دارد همه ي بازرسان در مورد درست بودن يا خراب بودن قطعات توافق داشته باشند و همه نادرست تصميم بگيرند. بنابراين توافق تك تك بازرسان با وضعيت واقعي قطعه نيز بايد مد نظر قرار گيرد و به اين منظور سه جدول توافقي ديگر تشكيل مي گردد :

		بازرس 1		
وضعيت واقعي		درست	خراب	جمع
	درست	45	3	48
	خراب	5	97	102
	جمع	50	100	150

$\kappa = 0.879$ (25 2)

		بازرس 2		
وضعيت واقعي		درست	خراب	جمع
	درست	45	3	48
	خراب	2	100	102
	جمع	47	103	150

$\kappa = 0.923$ (26 2)

		بازرس 2		
وضعيت واقعي		درست	خراب	جمع
	درست	42	6	48
	خراب	9	93	102

	جمع	51	99	150

$\kappa = 0.774$ (2-27)

همانطور که مشاهده مي شود، تمامي آماره هاي کاپا بزرگتر از عدد 0.75 است و توافق تمامي بازرسان با همديگر و وضعيت واقعي ، تاييد مي شود.

مرحله ي بعد محاسبه ي امتياز بازرسان و بازه ي اطمينان امتيازهاي آنها است.

امتياز هر بازرس روي هر قطعه عدد 1 يا 0 است:
اگر هر بازرس در هر تکرار ، قطعه اي را همانند تکرارهاي ديگر و درست تشخيص داده بود عدد 1 و در غير اينصورت عدد 0 مي گيرد و امتياز بازرس ميانگين امتيازهاي او روي قطعات مختلف است، در حقيقت ميزان برابري امتياز کاربران درجه ي تکرار پذيري سيستم اندازه گيري است. بازه ي اطمينان امتياز بازرسان هم به کمک تقريب نرمال بدست مي آيد و انتظار مي رود در يک سيستم R&R امتياز بازرسان نيز با هم همخواني داشته باشد بدين منظور راهنماي MSA پيشنهاد مي دهد که امتياز هر بازرس بايد در بازه ي اطمينان امتيازات بازرسان ديگر قرار بگيرد.

نتايج محاسبه ي امتياز بازرسان به صورت زير است :

	بازرس 1	بازرس 2	بازرس 3
حد بالا	0.94	0.98	0.91
امتياز	0.84	0.90	0.80
حد پايين	0.74	0.82	0.69

البته بعضي از جوابهاي بدست آمده در اين جدول با جوابهاي راهنماي MSA متفاوت است، غلط نامه ي راهنماي MSA که در آدرس اينترنتي :
https://www.carwin.co.uk/qs/english/msaamend.htm
موجود است محاسبات ما را تاييد مي کند.

بنابراين مرحله ي پاياني بررسي کردن وضعيت امتياز بازرسان است. همانطور که مشاهده مي شود

، امتياز بازرس 3 (0.80) در بازه اطمينان بازرس 2 قرار نمي گيرد، با توجه به نزديک بودن امتياز بازرس 3 به حد پايين بازه ي اطمينان بازرس 2 ، سيستم اندازه گيري مورد قبول واقع مي شود ولي پيشنهاد مي شود در اولين فرصت تعويض گردد .
در پايان اشاره مي شود در راهنماي MSA به معيارهاي ديگري مانند تاثير سيستم اندازه گيري بر بازرسان که نسبت کل تمامي تصميمهاي صحيح بر تعداد کل تصميم هاي گرفته شده است براي هر بازرس است نيز تعريف شده است و تاثير کل سيستم اندازه گيري که تعداد کل تصميم هاي گرفته شده است که در تصميم گيري در قبول يا رد سيستم اندازه گيري ، نقش اساسي را بازي نمي کنند ولي پيشنهاد مي شود مقادير تاثير پذيري با 0.8 براي قبول سيستم اندازه گيري و 0.9 براي تفکيک سيستمهاي اندازه گري تاثير پذير مناسب مورد بررسي واقع شود بديهي است هر چه مقدار تاثير پذيري به 1 نزديک تر باشد ، سيستم اندازه گيري بهتر است. در مجموع قبول يا رد سيستم اندازه گيري نياز به انجام مراحل متفاوتي دارد که به ترتيب آنها را ذکر مي کنيم :
بررسي توافق بازرسان به کمک آماره ي کاپا
بررسي توافق بازرسان با وضعيت واقعي قطعات به کمک آماره ي کاپا
بررسي امتياز بازرسان و محاسبه ي بازه ي اطمينان 95 درصدي آنها
انتظار مي رود تاثير سيستم اندازه گيري براي سيستمهاي اندازه گيري مطلوب بزرگتر از 0.8 باشد و اين ادعا به کمک بازه ي اطمينان 95 درصد تاثير سيستم اندازه گيري قابل بررسي است.

2 -1 -4 انتقادهاي وارد بر روش راهنماي MSA

اولين مشکلي که در اجراي روش راهنما به نظر مي رسد روشن نبودن پذيرش و يا رد قطعي سيستم

اندازه گيري است.
دومين مشكل استفاده از آماره ي كاپا (توافق با وضعيت واقعي) و بازه اطمينان امتياز بازرسان است ، اگر سيستم اندازه گيري صحيح عمل كند ، هر دو قاعدتاً به يک نتيجه منجر مي شوند حال آنكه راهنما اين موضوع را از دو روش مختلف و از دو ديدگاه مجزا (توافق و امتياز) بررسي كرده است ، اين اضافه كردن مراحل تصميم گيري همانطور كه خواهيم ديد خطاي كل نوع اول آزمون سيستم اندازه گيري را افزايش خواهد داد .
سومين مشكل ، استفاده از آماره ي كاپا است.
همانطور كه بحث شد آماره ي مناسبي براي توافق مخصوصاً زماني كه فراواني هاي حاشيه اي نامتعادل هستند ، نيست.
چهارمين مشكل ، عدم كنترل روي خطا هاي تصميم گيري در هر مرحله است .
اگر حتي فرض كنيم در هر مرحله خطاي نوع اول (α) را تحت كنترل قرار دهيم و براي هر مرحله ي آزمون α خطاي نوع اول در نظر بگيريم ، حداكثر 3α خطاي نوع اول در مرحله توافق بازرسان با هم (به كمک آماره ي كاپا) ، حداكثر 3α خطا در مرحله ي توافق بازرسان با وضعيت واقعي ، حداكثر 3α خطا در مرحله ي آزمون به كمک بازه هاي اطمينان امتياز بازرسان خواهيم داشت كه در مجموع حداكثر 9α خطاي نوع اول براي كل آزمون پديد مي آورد.
اين در حالي است كه هيچكدام از خطا ها كنترل نمي شوند و به علاوه حتي اگر بتوان آنها را تحت كنترل قرار داد، آيا مي توان ادعا كرد اين روش آزمون با زياد كردن حجم نمونه قادر است سيستم اندازه گيري مطلوب را از سيستم اندازه گيري نامطلوب با احتمال مناسبي تميز دهد ؟ شبيه سازي هاي ارائه شده در 2 - 3 نشان مي دهد اين موضوع درست نيست بدين معنا كه اين روش آزمون سيستم اندازه گيري با زياد شدن حجم نمونه احتمال تشخيص صحيح سيستمهاي اندازه گيري مطلوب از

نامطلوب بيشتر نمي شود.
پنجمين مشكل ، نامناسب بودن تعريف امتياز كاربران است: با زياد كردن تكرارها بر روي قطعات ، سيستم اندازه گيري مطلوب امتياز صفر براي كاربران نشان خواهند داد.
و ششمين مشكل اين است كه بر عكس تحليل سيستمها اندازه گيري كمي ، محكي براي R&R بودن سيستم اندازه گيري تعريف نمي كند.
براي تصحيح اين روش شايد به نظر برسد ، بهتر است به جاي بررسي توافق بر اساس آماره ي كاپا ، از آماره ي AC1 يا AC2 استفاده كرد و برخي مراحل را تغييرات مختصري داد ، مانند اينكه آزمون فرضيه بر اساس بازه ي اطمينان امتياز بازرسان را تصحيح كرد و يا تاثير سيستم اندازه گيري را براي هر بازرس به جاي امتياز آن در نظر گرفت . به هر حال پس از بررسي هاي اوليه مشخص شد ، بهبود روش تصميم گيري نياز به تغيير اساسي در مراحل انجام اين روش دارد و به اين منظور روش ساده ي ديگري طراحي شد كه هر چند تمام مشكلات اشاره شده را حل نكرده است ولي علاوه بر كوتاه بودن و روشن بودن مراحل انجام آن ، داراي خواص مناسب مجانبي است.

2 -2 روش تعييني

در تعيين نحوه ي آزمون کردن در روش تعييني سعي شده است شفافيت نحوه پذيرش يا رد سيستم اندازه گيري کيفي کاملاً مشخص باشد و از طرف ديگر بتوان با خطاي نوع اول به نسبت پايين در هر مرحله، آزموني طراحي کرد که علاوه بر خطاي نوع اول کم، خواص مجانبي مطلوبي داشته باشد و يا به بيان ديگر آزموني با خطاي نوع اول کم و سازگار باشد. در پيشنهاد اين روش ، طرح آزمايشي ذکر شده در راهنما (3 بازرس با 3 تکرار بر روي 50 قطعه ي مختلف) مد نظر قرار گرفته است. اين روش اساساً بر سه مرحله استوار است :

آزمون همساني بازرسها

آزمون اريبي سيستم اندازه گيري

آزمون ((ترکيبي)) يا ((جدا)) با توجه به آزمون اريبي

در تمام اين مراحل سعي شده است از آزمونهاي سازگار استفاده شود و ساختار تصميم گيري طوري طراحي شده است که تصميم گيري نهايي، سازگار باشد.

2 -2 -1 آزمون همساني بازرسها

مي توان جدول زير را در مورد فراوانيهاي مشاهده شده تنظيم کرد که درآن به طور مثال $O_{F,11}$ نشانگر تعداد قطعات خرابي است که در توسط بازرس اول بار در اولين بازرسي به درستي به دسته هاي درست و خراب نسبت داده شده اند. براي هر بار بازرسي انجام شده توسط هر بازرس يک ستون جداگانه در نظر گرفته شده است :

	نتايج اجراهاي مختلف براي هر بازرس				
قطعات	بازرسان در اجراهاي مختلف تعداد قطعات	بازرس اول در اجراي اول	بازرس اول در اجراي دوم	...	بازرس سوم در اجراي سوم
خراب	n_F	$O_{F,11}$	$O_{F,12}$	...	$O_{F,33}$
سالم	n_C	$O_{C,11}$	$O_{C,12}$	...	$O_{C,33}$
خطا	0	$O_{E,11} = n - O_{F,11} - O_{C,11}$	$O_{E,12} = n - O_{F,12} - O_{C,12}$		$O_{E,33} = n - O_{F,33} - O_{C,33}$
جمع	n	n	n	...	n

بنابراين فراواني هاي مشاهده شده $\left(O_{F,ij}, O_{C,ij}, O_{E,ij}\right)$ آماره هاي بسنده ي متغير هاي تصادفي

$$\left(X_{F,ij,1}, X_{C,ij,1}, X_{E,ij,1}\right), \left(X_{F,ij,2}, X_{C,ij,2}, X_{E,ij,2}\right), \cdots, \left(X_{F,ij,n}, X_{C,ij,n}, X_{E,ij,n}\right) \quad (28\ 2)$$

هستند كه هر كدام، مستقلاً داراي توزيع سه جمله اي با پارامترهاي مستقل خطي $\left(\theta_{F,ij}, \theta_{C,ij}\right)$ اند و آزمون همساني بازرسها بدين معنا كه ((آيا بازرسها در تكرارهاي مختلف مانند يكديگر و تكرارهاي قبل خود قطعات درست را از قطعات خراب تشخيص مي دهند)) معادل آزمون فرضيه ي :

$$\begin{cases} H_0 : \left(\theta_{F,ij}, \theta_{C,ij}\right) = \left(\theta_{F,i'j'}, \theta_{C,i'j'}\right) \\ H_1 : \left(\theta_{F,ij}, \theta_{C,ij}\right) \neq \left(\theta_{F,i'j'}, \theta_{C,i'j'}\right) \end{cases} \quad (29\ 2)$$

با فرض اينكه زوجهاي $\left(O_{F,ij}, O_{C,ij}, O_{E,ij}\right)$ از هم مستقل اند يعني بازرسان در تكرارهاي مختلف خود مستقل از هم تصميم مي گيرند، مي توان فرضيه ي فوق را توسط آزمون نسبت درستنمايي تعميم يافته آزمون كرد:

قضيه : آماره ي درستنمايي آزمون فرضيه ي

$$\begin{cases} H_0 : \left(\theta_{F,ij}, \theta_{C,ij}\right) = \left(\theta_{F,i'j'}, \theta_{C,i'j'}\right) \\ H_1 : \left(\theta_{F,ij}, \theta_{C,ij}\right) \neq \left(\theta_{F,i'j'}, \theta_{C,i'j'}\right) \end{cases} \quad (30\ 2)$$

به صورت :

$$G^2 = -2\log\frac{Sup_{\Omega_0}L}{Sup_{\Omega_1}L}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\begin{pmatrix} O_{F,ij}\left(\log\left(O_{F,ij}\right)-\log\left(n\hat{\theta}_{F,ij}\right)\right) \\ +O_{C,ij}\left(\log\left(O_{C,ij}\right)-\log\left(n\hat{\theta}_{C,ij}\right)\right)+O_{E,ij}\left(\log\left(O_{E,ij}\right)-\log\left(n\hat{\theta}_{E,ij}\right)\right)\end{pmatrix}$$

اثبات این موضوع به علت حجیم بودن ارائه نشده است ولي در اکثر کتب چند متغیره ي گسسته موجود است اندرسن[1] در سال 1991 با فرض اینکه تحت فرضیه ي H_0، پارامترها در مرز نباشند یعني $0<\theta_C<1$ ، $0<\theta_F<1$ و $0<\theta_C+\theta_F<1$ ، آماره ي $-2\log(LR)$ به طور مجانبي داراي توزیع کي دو با 16 درجه ي آزادي است ، اثبات این موضوع در ویلکس[2] در سال 1963 به تفصیل آمده است. آماره ي پیرسن این آزمون، فرم زیر است که مشابه آماره ي G^2 داراي توزیع تقریبي کي-دو با 16 درجه آزادي است.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\left(O_{F,ij}-n\hat{\theta}_{0F}\right)^2}{n\hat{\theta}_{0F}}+\frac{\left(O_{C,ij}-n\hat{\theta}_{0C}\right)^2}{n\hat{\theta}_{0C}}+\frac{\left(O_{E,ij}-n\hat{\theta}_{0E}\right)^2}{n\hat{\theta}_{0E}}\right) \quad (31\text{–}2)$$

اثبات اینکه آماره ي پیرسن داراي توزیع χ^2_{16} است با توجه به این حقیقت که $\left|\chi^2-G^2\right|\xrightarrow{P}0$ (مراجعه کنید به اندرسن)، کار ساده اي است :

لم 1: اگر $X_n\xrightarrow{D}X$ و $Y_n\xrightarrow{D}0$ آنگاه $X_n+Y_n\xrightarrow{D}X$ Chung (1974)

لم 2 : اگر $X_n\xrightarrow{P}X$ آنگاه $X_n\xrightarrow{D}X$ Chung (1974)

قضیه 1.3 نشان دهید $\chi^2\sim\chi^2_{16}$:

اثبات : چون $\left|\chi^2_n-G^2_n\right|\xrightarrow{P}0$ پس $\chi^2_n-G^2_n\xrightarrow{P}0$ ، از طرفي مي دانیم $G^2_n\xrightarrow{D}\chi^2_{16}$ ،

بنابراین $\chi^2_n-G^2_n+G^2_n\xrightarrow{D}\chi^2_{16}$ و اثبات تمام است.

در واقع این دو آماره، برابري فراواني قضاوتهاي درست را براي بازرسان در هر اجرا به طور

---

[1] Andersen

[2] Wilks

جداگانه در مورد قطعات سالم و خراب مورد آزمون قرار مي دهند.
اگر آماره ي آزمون از چندك $1-\alpha$ ي توزيع كي دو ($\chi^2_{16,1-\alpha_1}$) بيشتر شود، فرضيه ي صفر را كه بيانگر عدم وجود تفاوت بين قضاوتهاي بازرسان در هر اجرا است، رد مي‌كنيم. در اين صورت سيستم اندازه‌گيري مورد بحث بي اعتبارخواهد بود.
همچنين P-مقدار آزمون نيز به صورت تقريبي با استفاده از توزيع كي-دو قابل محاسبه است.
دو آماره ي G^2 و χ^2 ، تفاوت اساسي با هم ندارند و در اكثر مواقع به نتايج يكساني منجر مي شوند. در شرايطي نيز كه تفاوتي بين دو آزمون وجود دارد، ترجيحاً از آماره آزمون پيرسن استفاده مي‌كنيم، چرا كه نسبت به آماره درستنمايي همگرايي سريعتري به توزيع كي دو دارد كرسي و ريد[1] در 1963. همگرايي توزيع آماره پيرسن به توزيع كي دو در شرايطي كه تعداد مشاهدات كمتر از پنج برابر تعداد خانه ها باشد ضعيف است (مراجعه منيد به اگرستي[2] 1996). البته با توجه به حجم نمونه(50 قطعه)، اين حالت در شرايط آزمايشي طراحي شده توسط راهنماي MSA پيش نخواهد آمد. بنابراين مي توان از آماره درستنمايي نيز استفاده كرد.

2 -2 -2 آزمون اريبي

آزمون اريبي در حقيقت بيان مي كند كه آيا سيستم اندازه گيري براي قطعات خراب به همان خوبي قطعات صحيح تصميم مي گيرد يا خير . در حقيقت اريبي سيستم اندازه گيري در بعضي مواقع خاصيت نامناسب به حساب نمي آيد مخصوصاً زماني كه اندازه گيري تنها براي تشخيص قطعات خراب (يا درست) طراحي شده باشد. در اين مرحله علاوه بر تعيين اريب بودن سيستم اندازه گيري ، كارايي

---

[1] Cressie and Read

[2] Agresti

آزمون کلي نيز افزايش پيدا مي کند.

در اين مرحله نيز از آزمون نسبت درستنمايي تعميم يافته استفاده مي کنيم.

اگر θ_C را احتمال تشخيص صحيح براي قطعات درست و θ_F را احتمال تشخيص صحيح براي قطعات خراب در نظر بگيريم ، داريم

$O_C \sim Bin(N_C,\theta_C)$ و مستقلاً $O_F \sim Bin(N_F,\theta_F)$ است که O_C تعداد تصميم گيري هاي صحيح کاربران در $N_C = 9\times n_C$ آزمايش روي قطعات درست و O_F تعداد تصميم گيري هاي صحيح کاربران بر روي $N_C = 9\times n_F$ آزمايش بر روي قطعات خراب است.

علاقمنديم آزمون کنيم :

$$\begin{cases} H_0 : \theta_C = \theta_F \\ H_1 : \theta_C \neq \theta_F \end{cases} \quad (32\text{-}2)$$

براي انجام اين آزمون از آزمون تقريب نرمال به صورت زير استفاده مي کنيم :

اگر $\hat{\theta}_{1C}$ نسبت تصميم هاي صحيح کاربران براي قطعات درست و $\hat{\theta}_{1F}$ نسبت تصميم هاي صحيح کاربران براي قطعات خراب باشد ، مشخص است که $\hat{\theta}_{1C}$ و $\hat{\theta}_{1F}$ برآوردگرهاي درستنمايي ماکزيمم θ_C و θ_F تحت فرضيه ي H_1 و $\hat{\theta}_G$ برآوردگر درستنمايي تحت فرضيه ي H_0 آنگاه به کمک آماره ي آزمون زير

$$Z_1 = \frac{\hat{\theta}_{1C} - \hat{\theta}_{1F}}{\sqrt{\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)\left(\frac{1}{9\times n_C}+\frac{1}{9\times n_F}\right)}} \quad (33\text{-}2)$$

$$\hat{\theta}_G = \frac{N_c\hat{\theta}_{1C} + N_F\hat{\theta}_{1F}}{N_C + N_F} = \frac{n_c\hat{\theta}_{1C} + n_F\hat{\theta}_{1F}}{n_C + n_F} \quad (34\text{-}2)$$

فرضيه ي H_0 را رد مي کنيم اگر $Z_1 > Z_{1-\alpha_2/2}$ يا $Z_1 < Z_{\alpha_2/2}$ يا بطور معادل $Z_1^2 > \chi^2_{1,1-\alpha}$ که $Z_{1-\alpha_2/2}$ و $\chi^2_{1,1-\alpha_2}$ به ترتيب چندکهاي توزيع نرمال و توزيع کي دو با يک درجه ي آزادي اند.

قضيه2.3: آماره ي آزمون Z_1^2 آماره ي پيرسن آزمون نسبت درستنمايي تعميم يافته براي آزمون فرضيه ي مربوطه است.

اثبات :بنابر تعریف آماره ي پیرسن داریم :

$$\chi^2=\frac{\left(O_C-N_C\hat{\theta}_G\right)^2}{N_C\hat{\theta}_G}+\frac{\left(\left(N_C-O_C\right)-N_C\left(1-\hat{\theta}_G\right)\right)^2}{N_C\left(1-\hat{\theta}_G\right)}+\frac{\left(O_F-N_F\hat{\theta}_G\right)^2}{N_F\hat{\theta}_G}+\frac{\left(\left(N_F-O_F\right)-N_F\left(1-\hat{\theta}_G\right)\right)^2}{N_F\left(1-\hat{\theta}_G\right)}$$

با ساده کردن جملات داریم :

$$=\frac{\left(O_C-N_C\hat{\theta}_G\right)^2}{N_C\hat{\theta}_G}+\frac{\left(N_C\hat{\theta}_G-O_C\right)^2}{N_C\left(1-\hat{\theta}_G\right)}+\frac{\left(O_F-N_F\hat{\theta}_G\right)^2}{N_F\hat{\theta}_G}+\frac{\left(N_F\hat{\theta}_G-O_F\right)^2}{N_F\left(1-\hat{\theta}_G\right)} \qquad (35\ \ 2)$$

با گرفتن مخرج مشترک داریم :

$$=\frac{N_F\left(1-\hat{\theta}_G\right)\left(O_C-N_C\hat{\theta}_G\right)^2+N_F\hat{\theta}_G\left(N_C\hat{\theta}_G-O_C\right)^2+N_C\left(1-\hat{\theta}_G\right)\left(O_F-N_F\hat{\theta}_G\right)^2+N_C\hat{\theta}_G\left(N_F\hat{\theta}_G-O_F\right)^2}{N_CN_F\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)}$$

با بسط توان دوم هاي صورت داریم :

$$=\left\{\begin{array}{l}\left(N_F-N_F\hat{\theta}_G\right)\left(O_C^2+N_C^2\hat{\theta}_G^2-2N_CO_C\hat{\theta}_G\right)+N_F\hat{\theta}_G\left(N_C^2\hat{\theta}_G^2+O_C^2-2N_CO_C\hat{\theta}_G\right)\\+\left(N_C-N_C\hat{\theta}_G\right)\left(O_F^2+N_F^2\hat{\theta}_G^2-2N_FO_F\hat{\theta}_G\right)+N_C\hat{\theta}_G\left(N_F^2\hat{\theta}_G^2+O_F^2-2N_FO_F\hat{\theta}_G\right)\end{array}\right\}\Big/N_CN_F\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)$$

پس از ساده کردن و حذف بسیاري از جملات داریم :

$$=\frac{\hat{\theta}_G^2\left(N_C^2N_F+N_CN_F^2\right)+\hat{\theta}_G\left(-2N_CN_FO_C-2N_CN_FO_F\right)+N_FO_C^2+N_CO_F^2}{N_CN_F\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)} \qquad (36\ \ 2)$$

با توجه به اینکه :

$$\hat{\theta}_G=\frac{N_C\hat{\theta}_C+N_F\hat{\theta}_F}{N_C+N_F}=\frac{O_C+O_F}{N_C+N_F}$$
$$\rightarrow\hat{\theta}_G^2=\left(\frac{O_C+O_F}{N_C+N_F}\right)^2=\frac{\left(O_C^2+O_F^2+2O_CO_F\right)}{\left(N_C+N_F\right)^2} \qquad (37\ \ 2)$$

بنابراین داریم :

$$\frac{\left(O_C^2+O_F^2+2O_CO_F-2O_C^2-2O_F^2-4O_CO_F+O_C^2+O_F^2+\frac{N_C}{N_F}O_F^2+-\frac{N_F}{N_C}O_C^2\right)}{N_CN_F\left(N_C+N_F\right)\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)} \qquad (38\ \ 2)$$

$$=\frac{\frac{N_C}{N_F}O_F^2+\frac{N_F}{N_C}O_C^2-2O_CO_F}{\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)\left(N_C+N_F\right)}=\frac{\frac{1}{N_F^2}O_F^2+\frac{1}{N_C^2}O_C^2-\frac{2O_CO_F}{N_CN_F}}{\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)\left(\frac{N_C+N_F}{N_CN_F}\right)}=\frac{\left(\frac{O_F}{N_F}-\frac{O_C}{N_C}\right)^2}{\hat{\theta}_G\left(1-\hat{\theta}_G\right)\left(\frac{1}{N_C}+\frac{1}{N_F}\right)}$$

$$= \left(\frac{\hat{\theta}_{1C} - \hat{\theta}_{1F}}{\sqrt{\hat{\theta}_G \left(1 - \hat{\theta}_G\right) \left(\frac{1}{9 \times n_C} + \frac{1}{9 \times n_F} \right)}} \right)^2 \quad (39\ 2)$$

و اثبات تمام است.

2 -2 -3 آزمون تاثيرپذيري سيستم اندازه گيري

آزمون قابليت در دوقسمت بررسي مي شود : با فرض اريب بودن يا نااريب بودن سيستم اندازه گيري.
در ابتدا فرض مي كنيم سيستم اندازه گيري يک سيستم نااريب باشد ، در حقيقت در بخش قبل آزمون فرضيه ي

$$\begin{cases} H_0 : \theta_C = \theta_F \\ H_1 : \theta_C \neq \theta_F \end{cases} \quad (40\ 2)$$

رد نشده باشد. در اين صورت نمونه هاي قطعات خراب را با نمونه هاي قطعات درست با هم ادغام كرد و آزمون :

$$\begin{cases} H_0 : \theta_G \geq \theta_{G0} \\ H_1 : \theta_G < \theta_{G0} \end{cases} \quad (41\ 2)$$

را انجام داد كه θ_G تاثيرپذيري سيستم اندازه گيري بدون در نظر گرفتن وضعيت قطعات است و θ_{G0} حداقل تاثيرپذيري است كه سيستم اندازه گيري بايد دارا باشد . اين حداقل براي سيستم هاي اندازه گيري قابل قبول 0.8 و براي سيستم هاي اندازه گيري خوب 0.9 در راهنماي MSA گزارش شده است.
آزمون اين فرضيه به كمک آماره ي آزمون زير انجام مي شود :

$$Z_2 = \frac{\hat{\theta}_G - \theta_{G0}}{\sqrt{\hat{\theta}_G \left(1 - \hat{\theta}_G\right) \frac{1}{9\left(n_C + n_F\right)}}} \quad (42\ 2)$$

فرضيه ي H_0 رد مي شود اگر $Z_2 < Z_{1-\alpha_3}$.
و اگر سيستم اندازه گيري يک سيستم اندازه گيري

اريب باشد ، تاثير پذيري سيستم براي قطعات خراب و درست مانند هم نيست و بنابراين لازم است جداگانه آزمون شود .

براي آزمون فرضيه ي تاثيرپذيري سيستم اندازه گيري بر روي قطعات درست :

$$\begin{cases} H_0 : \theta_C > \theta_{C0} \\ H_1 : \theta_C \le \theta_{C0} \end{cases} \quad (43\ 2)$$

از آماره ي آزمون

$$Z_3 = \frac{\hat{\theta}_{1C} - \theta_{C0}}{\sqrt{\hat{\theta}_{1C}\left(1-\hat{\theta}_{1C}\right)\frac{1}{9n_C}}} \quad (44\ 2)$$

فرضيه ي H_0 را رد مي کنيم اگر $Z_3 < Z_{1-\alpha_4}$.

براي آزمون فرضيه ي تاثيرپذيري سيستم اندازه گيري بر روي قطعات خراب :

$$\begin{cases} H_0 : \theta_F > \theta_{F0} \\ H_1 : \theta_F \le \theta_{F0} \end{cases} \quad (45\ 2)$$

توسط آماره ي آزمون

$$Z_3 = \frac{\hat{\theta}_{1F} - \theta_{F0}}{\sqrt{\hat{\theta}_{1F}\left(1-\hat{\theta}_{1F}\right)\frac{1}{9n_F}}} \quad (46\ 2)$$

استفاده مي کنيم و فرضيه ي H_0 را رد مي کنيم اگر $Z_4 < Z_{1-\alpha_5}$.

2 -2 -4 ساختار تصميم گيري

در بخشهاي قبل آزمونهاي متفاوتي جهت بررسي خواص مناسب يک سيستم اندازه گيري بررسي شد و در اين بخش ساختار ترتيب انجام آزمونها را سعي مي کنيم طوري بنا کنيم تا اين روش ،خواص مجانبي مطلوبي داشته باشد.

ساختار تصميم گيري به صورت زير طراحي شده است:

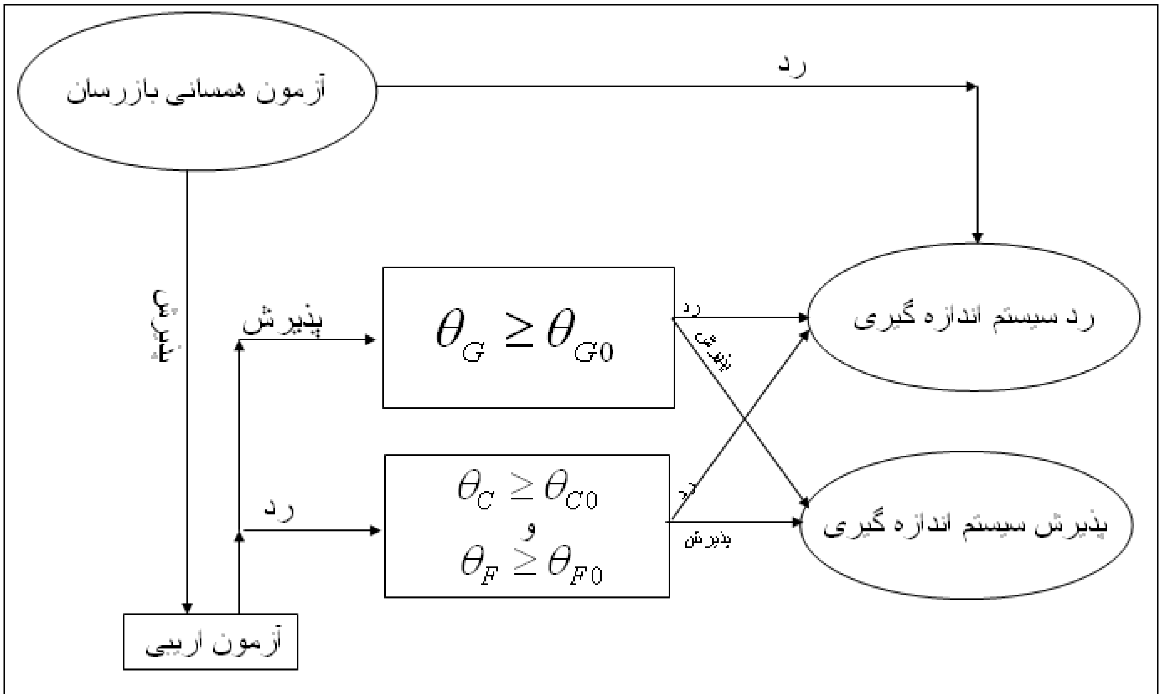
آزمون همساني بازرسها

آزمون اريبي

آزمون تاثير پذيري

با توجه به مطالب گفته شده در فصل قبل ، نمودار زير ساختار تصميم گيري روش تعييني را دقيقتر

روشن مي كند :



نمودار (2 1) ساختار تصميم گيري براي روش تعييني

2 -2 -5 خاصيت سازگاري

همانطور كه در ابتدا اشاره شد طراحي روش تعييني با ديدگاه ساختن روشي با خواص مجانبي مطلوب انجام شده است.
لذا در ابتدا لازم است تعريف سازگاري آزمون و مفهوم سازگار بودن روش تعييني روشن گردد.
تعريف :
سازگاري آزمون [1] : اگر Ω_0 فضاي پارامتر تحت فرضيه ي H_0 و Ω_1 فضاي پارامتر تحت فرضيه ي H_1

[1] Test Consistency

باشد، آزمون را سازگار گوييم اگر $\forall\theta\in\Omega_1$ داشته باشيم :

$$\lim_{n\to\infty}\pi_n(\theta)=1 \quad (47-2)$$

كه در آن $\pi_n(\theta)$ توان آزمون در حجم نمونه ي n است.

به بيان ساده تر ، آزموني سازگار است اگر $\forall\theta\in\Omega_1$ آن آزمون بتواند آن را بطور مجانبي با احتمال 1 رد كند (تصميم درست را بگيرد).

مشابه همين مفهوم مي تواند براي تعيين سيستم اندازه گيري مورد استفاده قرار گيرد:

روش تصميم گيري در تعيين سيستم اندازه گيري ، سازگار است اگر هر سيستم اندازه گيري غير قابل قبول ، بطور مجانبي با احتمال 1 آن را رد كند.

اين تعريف مي تواند از جهت ديگري نيز بررسي شود با اين مفهوم كه هر سيستم اندازه گيري قابل قبول با احتمال 1 پذيرفته شود.

مفهوم اول از لحاظ عملي در حيطه ي تحليل سيستم هاي اندازه گيري بيشتر مد نظر است.

براي اينكه نشان دهيم روش تعييني يک روش سازگار (با مفهوم اول) است لازم است ذكر كنيم تمامي آزمون فرضيه هايي كه در روش تعييني مورد استفاده قرار گرفته اند ، آزمونهايي سازگار هستند :

آزمون همساني بازرسها و آزمون اريبي ، آزمونهاي نسبت درستنمايي تعميم يافته اند كه در شرايط لهمن[1] 1986 صدق مي كند به علاوه برفكوف[2] 1998 نشان داده است آزمونهاي نسبت درستنمايي تحت شرايط لهمن 1986 بطور مجانبي آزمون بهينه است بدين معنا كه بطور مجانبي توزيع پيشيني براي H_0 و H_1 وجود دارد بطوريكه تحت آن توزيع پيشين ، آزمون نسبت درستنمايي يک آزمون بيز باشد.

سازگاري آزمونهاي يكطرفه از جمله آزمونهاي

---

[1] Lehman

[2] Brovkov

تاثير پذيري نيز نتيجه اي از لم نيمن پيرسن است (مراجعه کنيد به روهاتگي و صالح[1] 2000).
اکنون در پي ثابت کردن سازگاري روش تعييني با استفاده از سازگاري آزمونهاي استفاده شده هستيم.

در حقيقت مي خواهيم ثابت کنيم اگر يک سيستم اندازه گيري نادرست باشد (R&R نباشد يا تاثير پذيري کمي داشته باشد) ، آنگاه روش تعييني با زياد شدن حجم نمونه ($n_C \to \infty$ و $n_F \to \infty$) با احتمال 1 آن را رد مي کند.

قضيه 3.3 : روش تعييني يک روش تصميم گيري سازگار است.

اثبات : اثبات اين موضوع به طور مستقيم به علت پيچيدگي مراحل، تقريباً غير ممکن است، بنابراين در سه مرحله آن را ثابت مي کنيم پيشامد نادرست بودن سيستم اندازه گيري را A در نظر بگيريد.

--در ابتدا فرض کنيد سيستم اندازه گيري R&R نباشد يعني حداقل بتوان بازرسي را پيدا کرد که با احتمال نابرابر در مقايسه با تکرارهاي خود (يا در مقايسه با تکرارهاي ديگران) بر روي قطعات درست يا خراب تصميم بگيرد اين وضعيت را A_1 بناميد:

يعني حداقل وجود دارد i,j بطوريکه $(\theta_{F,ij},\theta_{C,ij}) \neq (\theta_{F,i'j'},\theta_{C,i'j'})$ و اين يعني در مرحله ي آزمون بازرسها در فضاي Ω_1 واقع هستيم ، اگر R را عمل رد کردن سيستم اندازه گيري نشان دهيم

$$\Pr(R \mid A_1) \geq \Pr(R \text{ in 1st Step} \mid A_1) = \Pr\left(\chi_n^2 > \chi_{16,1-\alpha_1}^2 \mid \theta \in \Omega_1\right) \quad (48\ 2)$$

بنابراين با توجه به سازگار بودن آزمون همساني بازرسان داريم :

$$\lim_{\substack{n_C \to \infty \\ n_F \to \infty}} \Pr(R \mid A_1) \geq \lim_{\substack{n_C \to \infty \\ n_F \to \infty}} \Pr\left(\chi_n^2 > \chi_{16,1-\alpha_1}^2 \mid \theta \in \Omega_1\right) = 1 \quad (49\ 2)$$

-- فرض کنيد سيستم اندازه گيري R&R و نااريب باشد ،به علاوه فرض کنيد چنين سيستم اندازه گيري داراي تاثير پذيري لازم نيز نباشد، اين وضعيت را

[1] Rohatgi and Saleh

A_2 بنامید.

چون سیستم اندازه گیري R&R است ، بنابراین در مرحله ي آزمون همساني بازرسها و همچنین در مرحله ي آزمون اریبي در Ω_0 قرار دارد و در بقیه ي مراحل در Ω_1، بنابراین:

$$
\begin{aligned}
&\Pr(R \mid A_2)\\
&=\alpha_1+(1-\alpha_1)\Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2}\mid A_2\right)\\
&\alpha_1+(1-\alpha_1)\left[\alpha_2\Pr\left(Z_3<Z_{1-\alpha_4} or Z_4<Z_{1-\alpha_5}\mid A_2\right)+(1-\alpha_2)\Pr\left(Z_2<Z_{1-\alpha_3}\mid A_2\right)\right]\\
&\geq\alpha_1+(1-\alpha_1)\left[\alpha_2\Pr\left(Z_3<Z_{1-\alpha_4}\mid A_2\right)+(1-\alpha_2)\Pr\left(Z_2<Z_{1-\alpha_3}\mid A_2\right)\right]
\end{aligned}
$$

علاوه بر این

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1+(1-\alpha_1)\left[\alpha_2\Pr\left(Z_3<Z_{1-\alpha_4} or Z_4<Z_{1-\alpha_5}\mid A_2\right)+(1-\alpha_2)\Pr\left(Z_2<Z_{1-\alpha_3}\mid A_2\right)\right]\\
&\geq\alpha_1+(1-\alpha_1)\left[\alpha_2\Pr\left(Z_4<Z_{1-\alpha_5}\mid A_2\right)+(1-\alpha_2)\Pr\left(Z_2<Z_{1-\alpha_3}\mid A_2\right)\right]
\end{aligned}
$$

از طرفي بنا بر فرض، سیستم اندازه گیري تاثیر پذیر نیست بنابراین چون سیستم اندازه گیري ناریب هم هست ، در مرحله ي آزمون به کمک آماره ي Z_3 و Z_4 در فضاي Ω_1 قرار دارد و چون این آزمونها همگي سازگارند داریم :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr(R\mid A_2)\geq\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\left\{\alpha_1+(1-\alpha_1)\left[\alpha_2\Pr\left(Z_3<Z_{1-\alpha_4}\mid A_2\right)+(1-\alpha_2)\Pr\left(Z_2<Z_{1-\alpha_3}\mid A_2\right)\right]\right\}\\
&=\alpha_1+(1-\alpha_1)\left[\alpha_2\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr\left(Z_3<Z_{1-\alpha_4}\mid\theta\in\Omega_1\right)+(1-\alpha_2)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr\left(Z_2<Z_{1-\alpha_3}\mid\theta\in\Omega_1\right)\right]\\
&=1
\end{aligned}
$$

-- اکنون فرض کنید سیستم اندازه گیري R&R و اریب باشد. همانطور که اشاره شد اریب بودن سیستم اندازه گیري همواره یک خاصیت نامناسب براي سیستم هاي اندازه گیري نیست و بنابراین سیستم اندازه گیري اریبي را فرض کنید که تاثیر پذیري آن کمتر از حد استاندارد باشد، چنین وضعیتي را A_3 مي نامیم.

بنابراین داریم :

$$
\begin{aligned}
&\Pr(R\mid A_3)\\
&=\alpha_1+(1-\alpha_1)\Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2}\mid A_3\right)+\alpha_1+(1-\alpha_1)\Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2}\mid\theta\in\Omega_1\right)
\end{aligned}
$$

با توجه به ساختار تصميم گيري و اين نكته كه آزمون اريبي ، آزموني سازگار است داريم :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(R \mid A_3\right)\\
&=\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2} \mid \theta\in\Omega_1\right)\\
&=\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2} \mid \theta\in\Omega_1\right)\\
&=\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2} \mid \theta\in\Omega_1\right) \qquad (50\ 2)\\
&=\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_1^2>\chi^2_{1,1-\alpha_2} \mid \theta\in\Omega_1\right)\\
&=\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_3<Z_{\alpha_4}\,\text{or}\,Z_3<Z_{\alpha_4} \mid \theta\in\Omega_1\right)
\end{aligned}$$

$$\geq\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_3<Z_{\alpha_4} \mid \theta\in\Omega_1\right) \qquad (51\ 2)$$

و همچنين

$$\begin{aligned}
&\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_3<Z_{\alpha_4}\,\text{or}\,Z_3<Z_{\alpha_4} \mid \theta\in\Omega_1\right)\\
&\geq\alpha_1+\left(1-\alpha_1\right)\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_3<Z_{\alpha_4} \mid \theta\in\Omega_1\right) \qquad (52\ 2)
\end{aligned}$$

و چون بنا بر فرض سيستم تاثير پذير استاندارد نيست حداقل براي يكي از دو وضعيت فوق داريم $\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_3<Z_{\alpha_4} \mid \theta\in\Omega_1\right)=1$ يا $\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(Z_3<Z_{\alpha_4} \mid \theta\in\Omega_1\right)$ بنابراين داريم :

$$\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}} \Pr\left(R \mid A_3\right)=1 \qquad (53\ 2)$$

و اكنون كه بطور شرطي در تمام شرايط ثابت كرديم روش تعييني يك روش سازگار است ، لازم است سازگاري را در حالت كلي نشان دهيم :

فرض كنيد سيستم اندازه گيري ، يك سيستم اندازه گيري نامناسب است (اين وضعيت را با A نشان مي دهيم) ، بنابراين يكي از سه حالت فوق با احتمالي (نه لزوماً معلوم) برقرار است.

فرض كنيد يك سيستم نامناسب كه به روش تعييني قرار است تحليل شود با احتمال p_1 در وضعيت A_1 ،

با احتمال p_2 در وضعیت A_2 و با احتمال $p_3=1-p_1-p_2$ در وضعیت A_3 باشد.

بنابراین:

$$\Pr(R\mid A)\geq \Pr(R\mid A\cap A_1)\Pr(A_1\mid A)+\Pr(R\mid A\cap A_2)\Pr(A_2\mid A)+\Pr(R\mid A\cap A_3)\Pr(A_3\mid A)$$

از طرفي چون داريم:

$$\begin{cases} A_1\subseteq A \\ A_2\subseteq A \\ A_3\subseteq A \end{cases} \quad (54\ \ 2)$$

مي توان آن را به صورت زير نوشت:

$$\Pr(R\mid A)\geq \Pr(R\mid A_1)\Pr(A_1\mid A)+\Pr(R\mid A_2)\Pr(A_2\mid A)+\Pr(R\mid A_3)\Pr(A_3\mid A)$$

بنابراين:

$$\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr(R\mid A)\geq \lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr(R\mid A_1)p_1+\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr(R\mid A_2)p_2+\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr(R\mid A_3)p_3$$

و در تمام حالات نشان داديم حد احتمالات فوق برابر 1 است، بنابراين:

$$\lim_{\substack{n_F\to\infty\\ n_C\to\infty}}\Pr(R\mid A)\geq 1 \quad (55\ \ 2)$$

و اثبات تمام است.

متاسفانه چنين بررسي هايي براي روش راهنماي MSA انجام نشده است و بررسي كردن آن از لحاظ نظري به علت عدم استفاده از روشهاي بنا شده بر آزمون هاي فرضيه كاري دشوار است از طرفي شايد در حجم نمونه ي پايين هر دو روش مانند هم عمل كنند و اين بحث كه حجم نمونه ي قطعات چقدر باشد تا خواص مجانبي روش تعييني در حد قابل قبولي برقرار باشد ، خود موضوع جالب و قابل بحثي است. لازم به ذكر است روش تعييني (طبق ساختار طراحي شده) داراي حداكثر خطاي نوع اول برابر با $\max(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)$ است.

2 -3 مقايسه ي روش تعييني با روش راهنماي MSA

اگر با طرح آزمايشي پيشنهاد شده در راهنماي MSA تصميم گيري كنيم ($n_C + n_F = 50$) ، اين طرح منجر به انجام 450 آزمايش مي گردد و زياد كردن حجم نمونه به عدد 500 (به عنوان مثال) هر چند ممكن است از لحاظ آماري به نسبت روش راهنماي MSA بسيار دقيقتر باشد ولي نياز به انجام 4500 آزمايش دارد كه از لحاظ عملي به خصوص در صنعت، غير ممكن است.

بنابراين لازم است تحقيقاتي نيز در مورد مقايسه ي كارايي هاي دو روش در شرايط مختلف در حجم هاي نمونه ي مختلف (مخصوصاً $n_C + n_F = 50$) انجام شود.

با توجه به اينكه بررسي تفاوتهاي اين دو روش در حجم نمونه هاي پايين از لحاظ نظري بسيار دشوار است جهت مقايسه از شبيه سازي مونت كارلو استفاده مي كنيم.

2 -3 -1 روش شبيه سازي

خلاصه ي روش شبيه سازي به اين صورت است كه سيستم اندازه گيري فرض مي شود و تكرارهاي مختلف كاربران مستقل از هم از توزيع دو جمله اي با تاثير پذيري انتخاب شده از قبل توليد، مي شود سپس هر دو روش تصميم گيري راهنماي MSA و روش تعييني بر روش آنها پياده سازي مي گردد. چون وضعيت واقعي سيستم اندازه گيري معلوم است، مي توان دريافت درشرايط فرض شده ، كدام روش بهتر از ديگري عمل مي كند.

با توجه به اينكه در روش راهنماي MSA ، به ترتيب خاصي براي تصميم گيري ، اشاره نشده است ، به ترتيب اهميت آزمونها ، تصميم گيري صورت گرفته است.

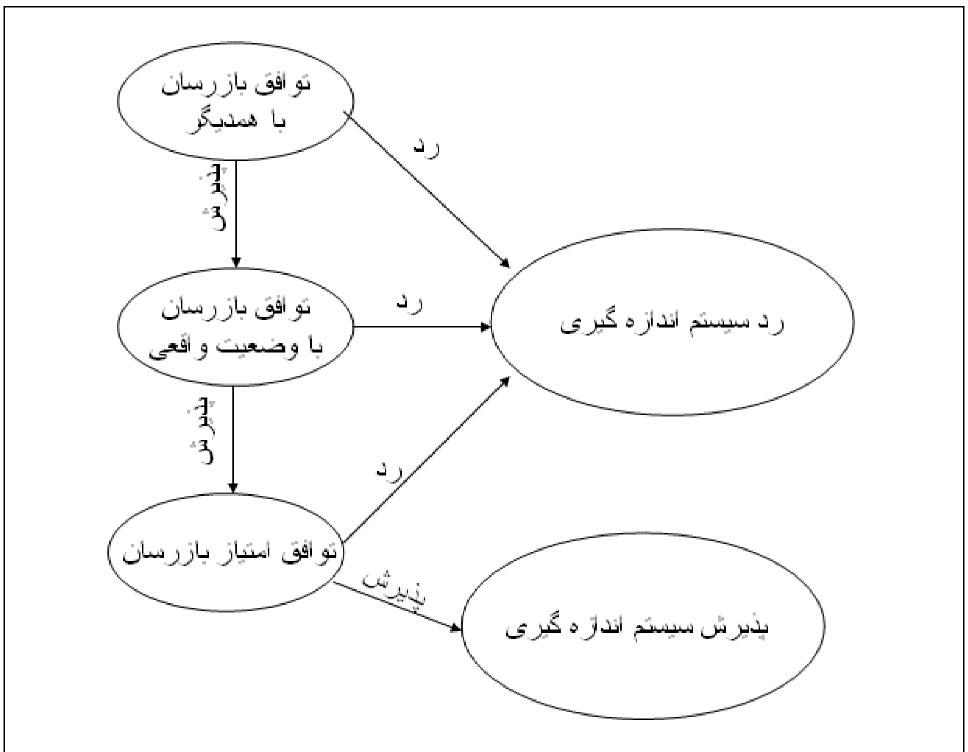
اين ترتيب براي تصميم گيري به روش راهنماي MSA به قرار زير است:

آزمون توافق بازرسها به کمک آماره ي کاپا
آزمون توافق بازرسها با وضعيت واقعي قطعه
آزمون همساني تصميم گيري بازرسها به کمک بازه ي اطمينان امتيازهاي آنها

و ترتيب تصميم گيري براي روش تعييني نيز مشخص بوده است و دقيقاً همان ترتيبي است که در بخش ((ساختار تصميم گيري)) ذکر گرديد .

لازم به ذکر است در روش تعييني ، خطاي نوع اول تمامي آزمونها به جز آزمون اريبي که 0.05 انتخاب شده است 0.01 در نظر گرفته شده است.

ساختار تصميم گيري براي روش راهنماي MSA به صورت زير بوده است، معيار رد آماره هاي کاپا عدد 0.7 (بنا بر پيشنهاد راهنماي MSA) انتخاب شده است:



نمودار (2 2) ساختار تصميم گيري در شبيه سازي براي روش راهنماي MSA

براي حجم نمونه هاي کم $(n_C + n_F = 50)$ ساختار هاي زير با تکرار مونت کارلوي 1000 شبيه سازي شده

اند. دانه[1] ي شبيه سازي بطور تصادفي انتخاب گرديده است و براي هر ساختار نتيجه ي بدست آمده طي نمودار نمايش داده شده است. تمامي برنامه ي شبيه سازي از مرحله ي توليد داده تا تصميم گيري و رسم نمودارها در نرم افزار SPLUS انجام شده است و براي هر ساختار شبيه سازي با رايانه ي Pentium III 700 MHz با 256 مگا بايت RAM و تحت سيستم عامل Windows XP ، 5 ساعت زمان صرف شده است.

هر ساختار داراي نسبتي متغير که از 0.5 تا 1 طي 20 مرحله صعود مي کند ، اين روش مي تواند وضعيت حساسيت دو روش را نسبت به هم طي تغيير تاثير پذيري نشان دهد.

به عنوان مثال

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعيت قطعات	حجم نمونه	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3
خراب	25	p	p	p	p	p	p	p	p	p
درست	25	p	p	p	p	p	p	p	p	p

اين ساختار متشکل از 20 سيستم اندازه گيري مختلف است که از

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعيت قطعات	حجم نمونه	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار 3
خراب	25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
درست	25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

شروع مي شود و تا

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعيت قطعات	حجم نمونه	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3
خراب	25	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975
درست	25	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975

صعود مي کند.

---

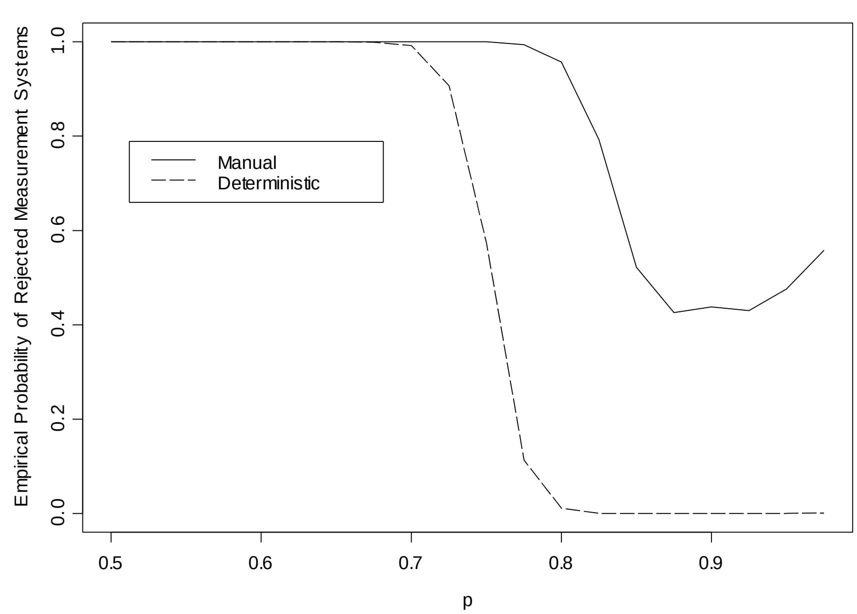
[1] Seed

ساختار 1

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعیت قطعات	حجم نمونه	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3
خراب	25	p	p	p	p	p	p	p	p	p
درست	25	p	p	p	p	p	p	p	p	p

همانطور كه مشاهده مي شود اين سيستم به ازاي تمامي مقادير p سيستم اندازه گيري R&R است و به ازاي مقادير $p<0.8$ سيستم اندازه گيري با تاثير پذيري كمتر از استاندارد است بنابراين بايد اين سيستم به ازاي $p<0.8$ رد و به ازاي $p\geq 0.8$ پذيرفته گردد.

نمودار احتمال تجربي رد سيستم اندازه گيري (تعداد سيستم هاي رد شده توسط روش راهنماي MSA يا روش تعييني تقسيم بر تعداد تكرار مونت كارلو) در برابر تغيير تاثير پذيري سيستم اندازه گيري در زير رسم شده است :



نمودار (3 2) احتمال تجربي رد سيستم اندازه گيري در برابر تغيير تاثير پذيري در ساختار1

همانطور كه مشاهده مي شود روش تعييني از $p=0.7$

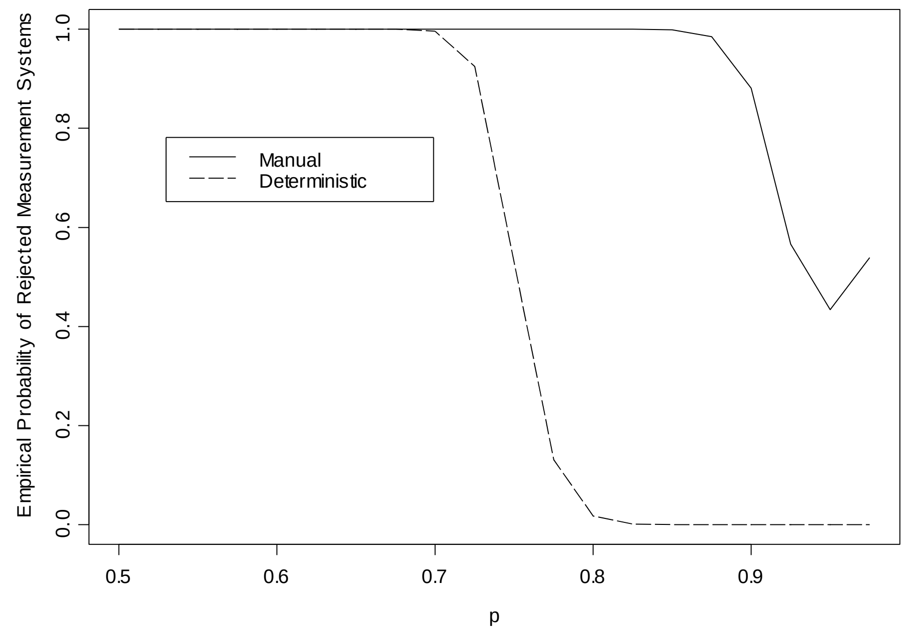
شروع به پذيرفتن سيستم ها مي كند و در نقطه ي مرزي $p=0.8$ داراي احتمال نظري (و تجربي) خطاي نوع اول برابر با 0.08 است. اين در حالي است كه روش راهنماي MSA سيستم هاي اندازه گيري بسيار كارا $p>0.95$ را با احتمال بزرگتر از 0.5 رد مي كند. با زياد شدن تاثير پذيري سيستم اندازه گيري ، امتياز بازرسان نيز به سمت 1 افزايش مي يابد و همين موضوع باعث كوتاه شدن بازه ي اطمينان امتياز بازرسان مي شود و بنابراين بازه ي اطمينان امتياز بازرسان شامل امتياز همديگر نمي شود و همين موضوع باعث رد شدن به اشتباه بسياري از سيستم هاي اندازه گيري مي شود.

ساختار 2

براي بررسي كردن حساسيت دو روش نسبت به عدم تعادل در نمونه هاي قطعات خراب و درست ساختار 2 كاملا شبيه ساختار 1 است با اين تفاوت كه مجموع حجم نمونه هاي قطعات خراب و درست $(n_C+n_F=50)$ به جاي $n_C+n_F=25$ بطور نامتعادل $n_C=45$ و $n_F=5$ انتخاب شده است.

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعيت قطعات	حجم نمونه	تكرار1	تكرار2	تكرار3	تكرار1	تكرار2	تكرار3	تكرار1	تكرار2	تكرار3
خراب	5	p	p	p	p	p	p	p	p	p
درست	45	p	p	p	p	p	p	p	p	p

نتيجه ي تصميم گيري به دو روش در نمودار زير پياده سازي شده است:



نمودار (2 4)   احتمال تجربي رد سيستم اندازه گيري در برابر تغيير تاثير پذيري در ساختار2

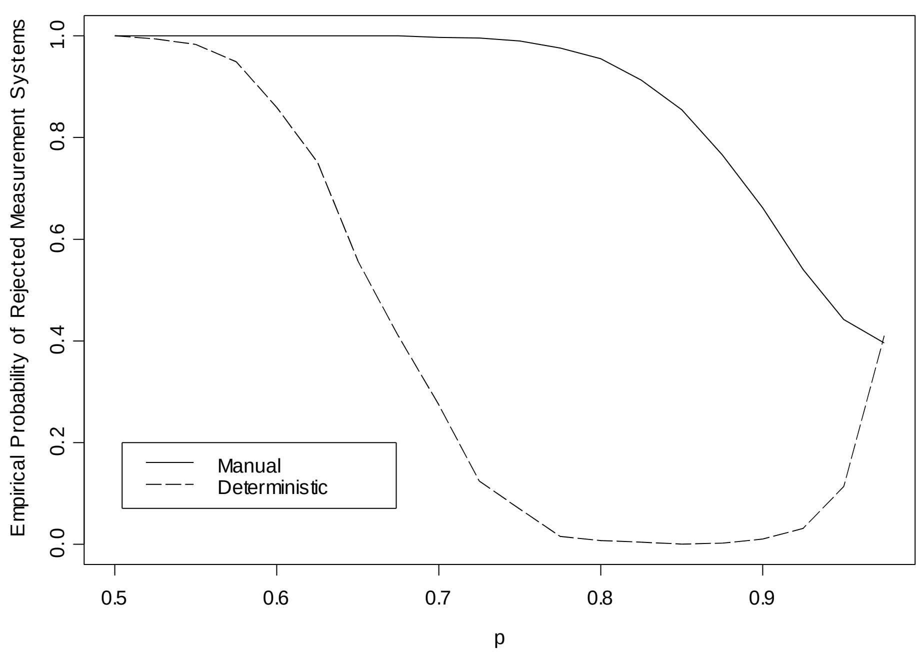
همانطور كه مشاهده مي شود، روش راهنماي MSA در اين ساختار ديرتر نزول مي كند اين در حالي است كه روش تعييني حساسيت چنداني به اين عدم تعادل نشان نمي دهد.
علت حساسيت روش راهنماي MSA به اين عدم تعادل استفاده از آماره ي كاپا است كه همانطور كه در فصل هاي قبل اشاره كرديم ، نسبت به عدم تعادل فراواني هاي حاشيه اي حساس است و اين عدم تعادل در فراواني هاي حاشيه اي در 6 جدول توافقي دو طرفه ي آماره ي كاپا اتفاق خواهد افتاد.

ساختار 3

در دو ساختار قبل حساسيت دو روش را در برابر تاثير پذيري سيستم اندازه گيري بررسي كرديم و در اين ساختار حساسيت اين دو روش را نسبت به R&R بودن سيستم انداه گيري بررسي مي كنيم

وضعیت قطعات	حجم نمونه	بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
		تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3	تکرار1	تکرار2	تکرار3
خراب	25	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8
درست	25	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8

طبق ساختار فوق سیستم اندازه گیري تنها به ازاي $p=0.8$ هم R&R است و هم داراي حداقل تاثیر پذیري است و بنابراین قابل قبول است ولي به ازاي مقادیر $p<0.8$ سیستم اندازه گیري R&R و تاثیر پذیر به میزان حداقل استاندارد نیست و به ازاي $p>0.8$ تاثیر پذیر به میزان حداقل استاندارد است ولي R&R نیست ، بنابراین قابل قبول نیست.



نمودار (2 5) احتمال تجربي رد سیستم اندازه گیري در برابر تغییر تاثیر پذیري در ساختار3

این نمودار نشان مي دهد روش تعییني حساسیت بیشتري نسبت به روش راهنماي MSA به R&R بودن سیستم اندازه گیري نشان مي دهد، این در حالي است که روش راهنماي MSA در نقطه ي قابل قبول سیستم اندازه گیري $p=0.8$ بیش از 80 درصد سیستم

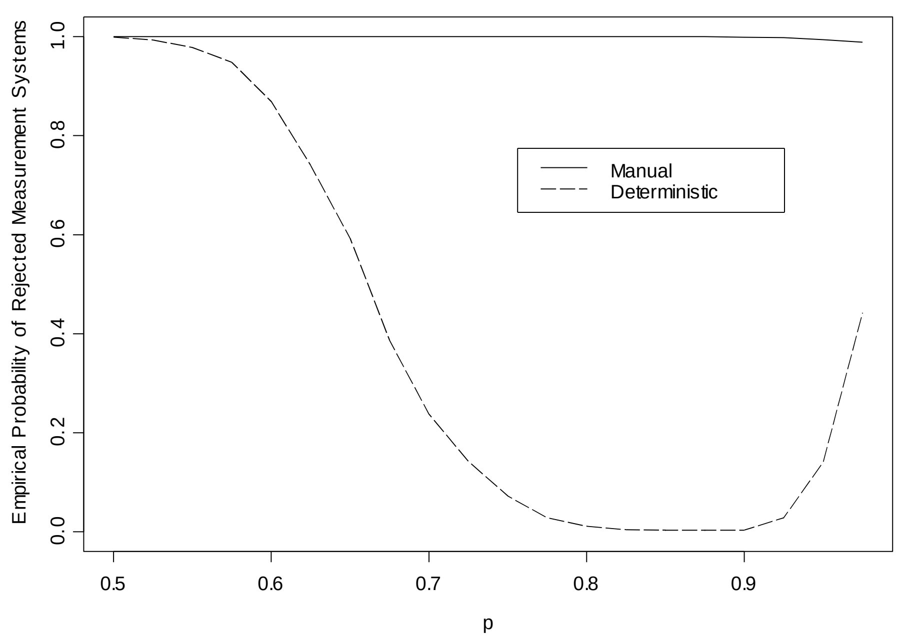
هاي اندازه گيري را رد مي كند.

ساختار 4

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعيت قطعات	حجم نمونه	تكرار1	تكرار2	تكرار3	تكرار1	تكرار2	تكرار3	تكرار1	تكرار2	تكرار3
خراب	5	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8
درست	45	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8	p	0.8	0.8

طي اين ساختار حساسيت دو روش نسبت به R&R بودن سيستم در شرايط نامتعادل بودن فراواني هاي حاشيه اي بررسي مي شود .

همانطور كه در نمودار زير مشاهده مي شود ، روش راهنماي MSA به هيچ وجه نمي تواند سيستمهاي R&R را تشخيص دهد ، اين در حالي است كه روش تعييني كماكان كارايي خود را حفظ مي كند.



نمودار (2 6) احتمال تجربي رد سيستم اندازه گيري در برابر تغيير تاثير پذيري در ساختار4

ساختار 5

در چهار ساختار قبل حساسيت نسبت به دو خاصيت تاثير پذيري و R&R طي حجم هاي نمونه ي متعادل

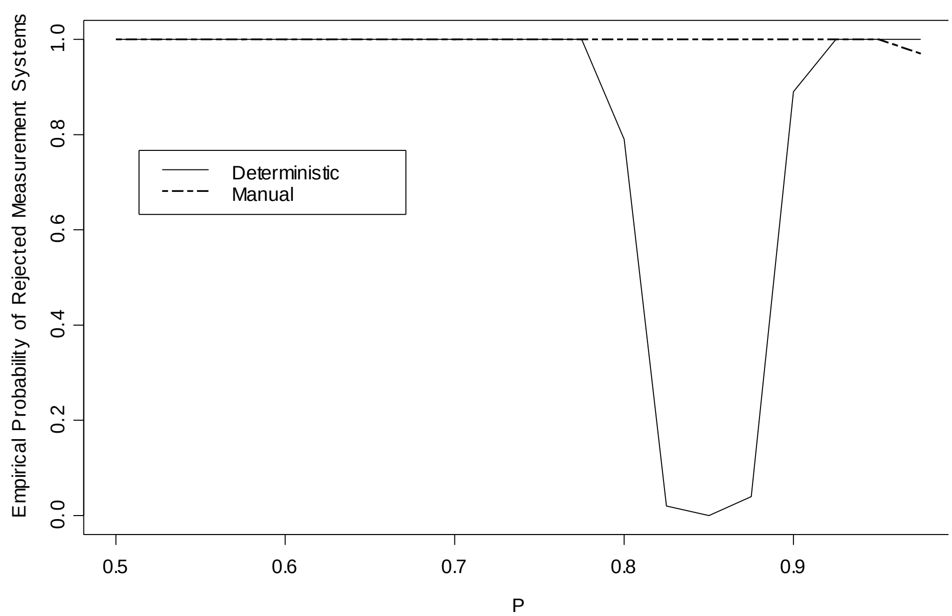
و نامتعادل بررسي گرديد. در فصل قبل خواص مجانبي روش تعييني بررسي شد ولي همانطور كه اشاره شد ، بررسي خواص مجانبي روش راهنما از لحاظ نظري كمي مشكل است. بدين منظور اين دو روش طي ساختار شبيه سازي زير در حجم هاي نمونه ي نامتعادل در مجموع 1000 نمونه (به جاي 50 نمونه) طي ساختار زير بررسي شده اند:

		بازرس 1			بازرس 2			بازرس 3		
وضعيت قطعات	حجم نمونه	تكرار1	تكرار2	تكرار3	تكرار1	تكرار2	تكرار3	تكرار1	تكرار2	تكرار3
خراب	100	p	0.85	0.85	p	0.85	0.85	p	0.85	0.85
درست	900	p	0.85	0.85	p	0.85	0.85	p	0.85	0.85

ميزان تاثير پذيري از 0.8 به 0.85 تغيير يافته است تا با كاراتر كردن سيستم اندازه گيري روش راهنما در وضعيت بهتري قرار بگيرد از طرفي با 20 برابر كردن حجم نمونه از هر دو روش انتظار مي رود بهبود قابل توجهي داشته باشند.

با توجه به اينكه به ازاي $p \neq 0.85$ سيستم اندازه گيري R&R نيست و به ازاي $p = 0.85$ سيستم اندازه گيري داراي خاصيت R&R و حداقل تاثيرپذيري استاندارد است ، سيستم هاي اندازه گيري در ساختار 5 به ازاي $p \neq 0.85$ غير قابل قبول و به ازاي $p = 0.85$ پذيرفته است.

ولي نمودار زير نشان مي دهد تنها روش تعييني بهبود قابل توجهي يافته است و روش راهنماي MSA حتي در حجم هاي نمونه ي بالا نيز قادر به تشخيص سيستم هاي R&R و كارا نيست و تمامي سيستمهاي اندازه گيري را رد مي كند :



نمودار (2 7) احتمال تجربي رد سيستم اندازه گيري در برابر تغيير تاثير پذيري در ساختار5

2 -3 -2 نتيجه گيري

شبيه سازي هاي بررسي شده در اين فصل نشان مي دهند روش راهنماي MSA
داراي خطاي نوع اول و نوع دوم بالايي است.
هيچ كدام از اين دو نوع خطا در اين روش كنترل نشده است.
نسبت به عدم تعادل در حجم نمونه براي قطعات خراب و درست بسيار حساس است و كارايي اين روش شديدا به اين عدم تعادل بستگي دارد. اين در حالي است كه در راهنماي MSA هيچگونه اشاره اي به اين مطلب نشده است كساني كه هم اكنون از اين روش در صنعت استفاده مي كنند از اين موضوع آگاه نيستند.
با زياد شدن حجم نمونه كارايي آن لزوما افزايش نمي يابد يا به بيان رياضي تر روشي سازگار نيست.
با زياد كردن تكرار ها براي هر بازرس ، اين

روش سیستم اندازه گیري را بدتر از قبل ارزیابي مي کند (علت آن نحوه ي تعریف امتیاز بازرسان است) به بیان دیگر یک سیستم اندازه گیري کارا با تکرار هاي به اندازه ي کافي بالا ، مقدار نزدیک به صفر را به عنوان امتیاز بازرس نتیجه مي دهد که خلاف واقعیت است.

به ضرر کارخانه ها عمل مي کند بدین معنا که ممکن است بسیاري از کارخانه ها سیستم اندازه گیري استاندارد در سطح معرفي شده در راهنماي MSA رسیده باشند ولي روش تصمیم گیري راهنماي MSA آنها را به اشتباه رد مي کند ، این اشتباه نیز کنترل نشده است ، برخي از موارد احتمالي بیش از 0.9 دارد.

در مقابل روش تعییني

در هر مرحله خطاي نوع اول را تحت کنترل قرار مي دهد و به این وسیله خطاي نوع اول کل آزمون تحت کنترل قرار گرفته است. نتیجه ي این کنترل در جمله ي زیر خلاصه مي شود که ((اگر سیستم اندازه گیري درست باشد حداکثر با احتمال $\max(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)$ به اشتباه رد خواهد شد.

این در حالي است که روش راهنماي MSA این احتمال را ممکن است حتي با حجم نمونه ي بسیار بالا به 1 (ساختار 5) برساند.

یک روش تصمیم گیري سازگار (با احتمال خطاي نوع اول $\max(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)$ است و این سازگاري علاوه بر اثبات ریاضي در شبیه سازي نیز نشان داده شده است و به علاوه روش راهنماي MSA داراي این خاصیت مهم نیست.

نسبت به تعادل حجم نمونه در قطعات خراب و درست حساس نیست و این برتري دیگري در برابر روش راهنماي MSA است.

تصمیم گیري در مورد رد کردن یا پذیرفتن سیستم اندازه گیري با قاطعیت صورت مي گیرد.

براي سیستم هاي بیش از دو حالت و یا استفاده از بیش از 3 بازرس یا بیش از 3 تکرار براي هر بازرس نیز به راحتي قابل تعمیم است و به علاوه

تحت شرايط ذكر شده كماكان داراي خاصيت سازگاري است.

روش تعييني نيز مشكلاتي دارد كه سعي مي كنيم با ارائه كردن روش هاي مدلبندي ، آنها را از بين ببريم :
معرفي محک R&R معياري مورد نظر در سيستم هاي اندازه گيري است و اين محک در هيچکدام از روشهاي تعييني و روش راهنماي MSA تعريف نشده اند و اصولا تعريف آن چندان ساده نيست.
سازگاري روش تعييني در حالتي بررسي شده است كه بازرسان در تكرارهاي مختلف خود مستقل از هم تصميم بگيرند حال آنكه تكرار هاي مختلف هر بازرس ممكن است به هم همبسته باشد و اين موضوع نبايد دور از نظر انگاشته شود . با استفاده از رابطه ي نزديک برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم و برآوردگرهاي معادلات برآورد تعميم يافته [1] (GEE) و استفاده از خاصيت سازگاري برآوردگرهاي GEE حتي در شرايطي كه ماتريس همبستگي نادرست فرض شده باشد (مراجعه كنيد به ليانگ و زگر[2] 1986) مي توان با فرض كردن ماتريس همبستگي كه به صورت ماتريس هماني فرض شده است نيز سازگاري روش تعييني را در اين حالت ثابت كرد ولي مشكل عمده اي كه در اين ديدگاه وجود دارد عدم وجود ماتريس همبستگي مناسب براي داده هاي دوتايي (به علت نحوه ي وابستگي ماتريس واريانس ، كوواريانس با ميانگين) است كه در بسياري از اوقات (بر خلاف داده هاي نرمال) نمي توان آنها را بطور حاشيه اي مدل كرد ديگل[3] و همكاران 1994 و استفاده از مدل هاي آميخته (مدلهاي مؤلفه هاي واريانس) جهت توصيف نحوه ي وابستگي داده هاي دوتايي پيشنهاد مي دهد.

---

[1] Generalized Estimating Equations

[2] Liang and Zeger

[3] Diggle

2-3-3 پياده سازي در مثال عملي

با توجه به اينکه داده هاي معتبر و قابل استنادي براي پياده سازي اين دو روش در مثال عملي امکان پذير نبود از داده هاي گزارش شده در راهنماي MSA براي مقايسه ي دو روش در يک مثال عملي استفاده گرديد.

روش راهنماي MSA

بررسي توافق بازرسان با همديگر :

	بازرس 1	بازرس 2	بازرس 1	وضعيت واقعي
بازرس 1		0.863	0.776	0.879
بازرس 2	0.863		0.788	0.923
بازرس 3	0.776	0.788		0.774
وضعيت واقعي	0.879	0.923	0.774	

همانطور که مشاهده مي شود تمامي آماره هاي کاپا بزرگتر از 0.75 است ، امتياز بازرسان و بازه ي اطمينان آن به صورت زير است:

	بازرس 1	بازرس 2	بازرس 3
حد بالاي 95 درصد	0.94	0.98	0.91
امتياز	0.84	0.9	0.8
حدپايين 95 درصد	0.74	0.82	0.69

همانطور که مشاهده مي شود امتياز بازرس 3 در بازه ي اطمينان 95 درصد بازرس 2 قرار نمي گيرد بنابراين راهنماي MSA پيشنهاد مي کند سيستم اندازه گيري در اولين فرصت تعويض گردد.

روش تعييني

آزمون توافق بازرسان و p-مقدار تقريبي به صورت زير است :

آماره ي کي دو	p-مقدار تقريبي
18.9	0.273

آزمون اريبي :

آماره ي کي دو	p-مقدار تقريبي
1.61	0.203

بنابراين سيستم اندازه گيري مورد نظر ، نااريب تشخيص داده مي شود و چون حد پايين 95 درصد تاثيرپذيري آميخته عدد 0.91 است نه تنها سيستم

اندازه گيري قابل قبولي است بلکه تاثير پذيري
آن نسبت سيستم هاي اندادزه گيري خوب (تاثير
پذيري 0.9) تفاوت معني دار دارد و بنابراين در
سيستم هاي اندازه گيري خوب قرار مي گيرد و
نيازي به تعويض آن نيست

فصل 3
ديدگاه هاي مدلبندي

3 -1 مقدمه

بررسي مدلهاي مزدوج دوتايي به دلايل زير در اين بخش ارائه شده است :

ديدگاه مدلبندي بر تحليل سيستم هاي اندازه گيري را نشان مي دهد.

برآوردگرها و استنباط ها از پيچيدگي كمتري نسبت به مدلهاي اثرات تصادفي برخوردارند.

رابطه ي نزديكي با روش تعييني دارد.

استفاده از محک BIC[1] را در انتخاب مدلهاي اثرات تصادفي ، توجيه مي کند و درحقيقت نشان مي دهد مي توان مدلهاي اثرات تصادفي را مدلهايي نيمه بيزي انگاشت.

در اين مدلها علاقمند به مدل سازي تاثير پذيري سيستم اندازه گيري هستيم و قاعدتاً متغير پاسخ y_{ijk} تصميم بازرس i ام در تکرار j ام بر روي k امين قطعه است و مقدار 1 ميگيرد اگر اين تصميم با وضعيت واقعي قطعه سازگاري داشته باشد و در غير اين صورت مقدار 0 را اختيار مي کند.

در اين صورت تاثير پذيري سيستم اندازه گيري مدل مي شود نه اندازه گيري. اين موضوع چند برتري به نسبت مدل سازي اندازه گيري دارد:

1. بسيار شبيه روش تعييني ولي با ديدگاه بيزي است.
2. آزمون R&R بودن سيستم اندازه گيري به آساني ممکن است.
3. بررسي تاثير پذيري و R&R بودن سيستم اندازه گيري در يک مدل قابل انجام است

---

[1] Bayesian Information Criterion

بررسي وجود و يكتايي توريع هاي پيشين مزدوج در خانواده هاي نمايي و فرمول كلي آن در موريس[1] 1983 ارائه شده است كه در حالت خاص تابع درستنمايي دو جمله اي ، پيشين بتا فرم مزدوج آن است.

3 -2 مدل هاي مزدوج دوتايي و انتخاب توزيع پيشين

مي توان فرض كرد كه تاثير پذيري سيستم اندازه گيري در هر تكرار بازرس متغيري تصادفي است. با توجه به اينكه بازرسان بطور تصادفي انتخاب مي شوند و ترتيب انجام آزمايشات نيز تصادفي است، تصادفي بودن تاثير پذيري كاملاً منطقي است ، اين در حالي است كه دو روش تعييني تاثيرپذيري ، پارامتر ثابت فرض شده بود.با توجه به دامنه ي تاثير پذيري (كه نسبت تصميم هاي درست بازرسان در تكرارهاي مختلف است) به نظر مي سد پيشين بتا ، پيشين مناسبي براي تاثير پذيري باشد. اگر تعداد بازرسها را با n_O ، تعداد تكرارها را با n_R و تعداد قطعات را با n_P نشان دهيم داريم :

$$y_{ijk} \mid p_{ij} \overset{iid}{\sim} Bin\left(1, p_{ij}\right) \quad i = 1,\cdots,n_O \ , \quad j = 1,\cdots,n_R \quad , \quad k = 1,\cdots,n_P \qquad (1\ 3)$$
$$p_{ij} \sim Beta\left(\alpha, \beta\right)$$

مشكل اساسي استفاده از اين مدل انتخاب تابع توزيع پيشين است. با اعتقاد به اينكه قبل از مشاهده ي داده ها احتمالاً نظري در مورد اينكه توزيع پيشين تاثير پذيري چه بايد باشد وجود ندارد. چند توزيع مختلف بدون اطلاع را در نظر مي گيريم ، هر چند بحث هاي زيادي در مورد عدم وجود توزيع پيشين بي اطلاع وجود دارد (مراجعه كنيد به برناردو[2] 1997).

---

[1] Morris

[2] Bernardo

3 -2 -2 پيشين لاپلاس

پيشين لاپلاس توزيع هم احتمال (يکنواخت) را به عنوان توزيع پيشين بي اطلاع پارامتر ها در نظر مي گيرد و دليل نام گذاري آن مقاله ي تاريخي لاپلاس در تحليل جمعيت بوده است به دليل اينکه خوشبختانه در فرم توزيع بتا قرار مي گيرد براي مسئله ي تحليل سيستم هاي اندازه گيري جالب توجه است به علاوه برآوردگرهاي بيز درستنمايي ماکزيمم با پيشين يکنواخت با برآوردگرهاي درستنمايي ماکزيمم بدست آمده با فلسفه ي فراواني گرايي ، يکسان است. بيشترين مشکلي که مي توان بر پيشين لاپلاس گرفت اين است که اگر اطلاعي در مورد پارامتر وجود نداشته باشد ، در مورد تابعي از آن نيز وجود نخواهد داشت بنابراين بجاست که توزيعي براي پارامتر در نظر گرفته شود که لااقل براي کلاسي از تبديلها ، داراي خاصيت پايايي باشد. اين دسته از پيشين ها با نام پيشين جفريز مطرح مي شوند.

3 -2 -3 پيشين مرجع و جفريز

پيشين مرجع که به عنوان تعميمي از پيشين جفريز توسط برناردو[1] در سال 1979 ارائه شد. تفاوت اساسي پيشين مرجع با پيشين جفريز (مراجعه کنيد به جفريز[2] 1961) تمايز بين پارامتر مزاحم و پارامتر مورد نظر براي استنباط و نقش آن در تعيين توزيع پيشين است. بنابراين حالت تک پارامتري هر دو روش به يک پيشين منجر مي شوند : $f(\theta)\propto\sqrt{I(\theta)}$ که $I(\theta)$ اطلاع فيشر تک نمونه اي θ بدست آمده از مشاهدات است. متاسفانه اين روش همواره توزيع احتمال پيشين براي θ انتخاب نمي کند به بيان ديگر اگر فضاي θ يک فضاي غير فشرده باشد ممکن است $f(\theta)$ تابعي باشد که $\int f(\theta)d\theta=\infty$ همين

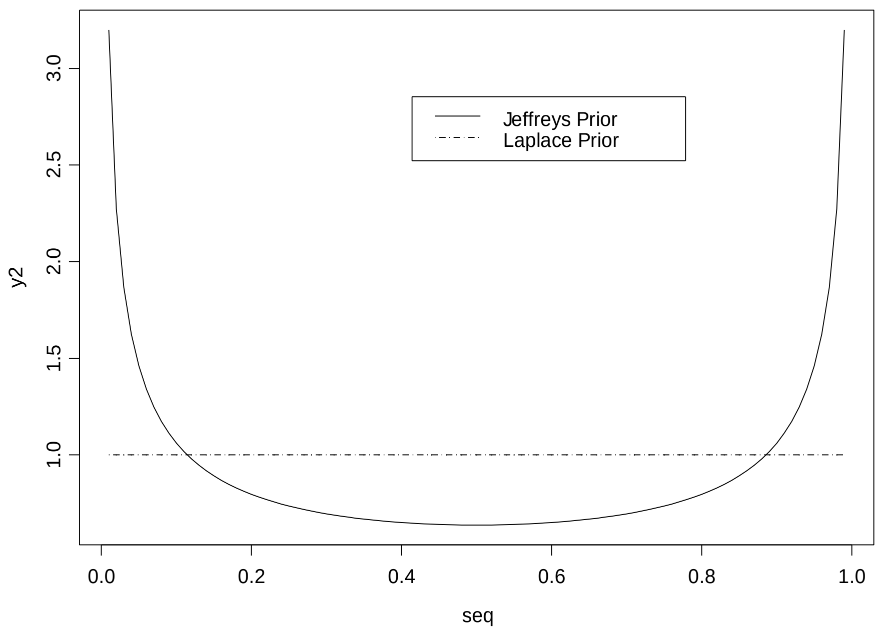
---

[1] Bernardo

[2] Jeffreys

موضوع استفاده از این دسته توزیع هاي پیشین را در مسائل عملي محدود مي كند. خوشبختانه در مسئله ي توزیع دو جمله اي ، پیشین جفریز (و مرجع) در فرم بتا مي گنجد :

$$p(\theta) \propto \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} = Beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad (2\ 3)$$



نمودار (1 3) مقایسه ي پیشین هاي بي اطلاع جفریز و لاپلاس

3 -2 -4 بیز تجربي

در این روش كلاس خاصي از توابع توزیع احتمال پیشین مانند $Beta(\alpha,\beta)$ فرض مي شود و پارامترهاي آن از توریع حاشیه اي مشاهدات به روش درستنمایي ماكزیمم برآورد مي شود. با توجه به اینكه y_{ijk} از $y_{ijk'}$ به ازاي $k \neq k'$ مستقل است. مي توان توزیع حاشیه اي را به صورت زیر نوشت

$$L(\alpha,\beta) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{k=1}^{n_P} f\left(y_{ijk} \mid p_{ij}\right) f\left(p_{ij}\right) dp_{ij} \quad (3\ 3)$$

و چون روي پارامترها p_{ij} با توجه به توزیع احتمالي آنها یعني $Beta(\alpha,\beta)$ انتگرال گرفته شده

است ، حاصل تنها تابعي از مشاهدات و پارامترهاي توزيع پيشين است كه خوشبختانه چون توزيع بتا با توزيع دو جمله اي تشكيل فرم مزدوج مي دهد ، اين انتگرالها به صورت تحليلي قابل محاسبه اند.

اگر $\sum_{k=1}^{n_P} y_{ijk} = y_{ij.}$ نشان دهيم داريم :

$$L(\alpha,\beta)=\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{k=1}^{n_P} f\left(y_{ijk}\mid p_{ij}\right)f\left(p_{ij}\right)dp_{ij}$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{k=1}^{n_P}\left[p_{ij}^{y_{ijk}}\left(1-p_{ij}\right)^{1-y_{ijk}}\right]\frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}p_{ij}^{\alpha-1}\left(1-p_{ij}\right)^{\beta-1}dp_{ij}$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1 p_{ij}^{y_{ij.}}\left(1-p_{ij}\right)^{n_P-y_{ij.}}\frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}p_{ij}^{\alpha-1}\left(1-p_{ij}\right)^{\beta-1}dp_{ij} \qquad (4\ 3)$$

$$=\prod_{i=1}^{n_O}\prod_{j=1}^{n_P}\frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}\int_0^1 p_{ij}^{y_{ij.}+\alpha-1}\left(1-p_{ij}\right)^{n_P-y_{ij.}+\beta-1}dp_{ij}$$

$$=\prod_{i=1}^{n_O}\prod_{j=1}^{n_P}\frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}Beta\left(y_{ij.}+\alpha,n_P-y_{ij.}+\beta\right)$$

با توجه به اينكه

$$Beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (5\ 3)$$

مي توان نوشت :

$$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n_O}\prod_{j=1}^{n_P}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times\frac{\Gamma\left(y_{ij.}+\alpha\right)\Gamma\left(n_P-y_{ij.}+\beta\right)}{\Gamma\left(n_P+\alpha+\beta\right)} \qquad (6\ 3)$$

$$\ell(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n_O}\sum_{j=1}^{n_R}\left\{\begin{array}{l}\log(\Gamma(\alpha+\beta))+\log\left(\Gamma\left(y_{ij.}+\alpha\right)\right)+\log\left(\Gamma\left(n_P-y_{ij.}+\beta\right)\right)\\-\log(\Gamma(\alpha))-\log(\Gamma(\beta))-\log\left(\Gamma\left(n_P+\alpha+\beta\right)\right)\end{array}\right\} \qquad (7\ 3)$$

با توجه به اينكه تابع گاما به ازاي تمام α و β ها فرم بسته ندارد از طرفي مشتق گيري $L(\alpha,\beta)$ يا $\ell(\alpha,\beta)$نسبت به α و β جهت ماكزيمم سازي تابع درستنمايي حاشيه اي منجر به فرم بسيار پيچيده اي مي شود دو راه براي غلبه بر اين مشكل پيشنهاد مي شود.

اولين راه ماكزيمم سازي تابع درستنمايي حاشيه اي با روشهاي عددي كه نياز به مشتق نداشته باشد مانند روش شبه نيوتن براي محاسبه ي ماتريس مشتقات درجه ي دو و استفاده از روش نلدر و ميد

براي محاسبه ي مشتقات درجه ي اول (مراجعه كنيد به بازارا[1] و همكاران 1993 و دومين راه استفاده از روش گشتاوري به جاي روش درستنمايي ماكزيمم است.

استفاده از روش گشتاوري در زير آمده است:

با تغيير پارامتر $\mu = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ به عنوان پارامتر مركزيت و $\sigma^{-1} = \alpha + \beta$ به عنوان پارامتر دقت توزيع پيشين p_{ij} خواهيم داشت (مراجعه كنيد به كارلين و لويس[2] 2000):

$$V\left(p_{ij} \mid \mu, \sigma^{-1}\right) = \frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^{-1}+1} \quad \text{و} \quad E\left(p_{ij} \mid \mu, \sigma^{-1}\right) = \mu \qquad (3-8)$$

و از طرفي $y_{ij.} \mid p_{ij} \sim Bin\left(n_P, p_{ij}\right)$ كه $y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n_P} y_{ijk}$ خواهيم داشت :

$$f\left(y_{ij.} \mid \mu, \sigma^{-1}\right) = \binom{n_P}{y_{ij.}} \frac{\Gamma\left(y_{ij.} + \sigma^{-1}\mu\right)\Gamma\left(n - y_{ij.} + \sigma^{-1}(1-\mu)\right)}{\Gamma\left(n+\sigma^{-1}\right)} \qquad (3-9)$$

كه با آنچه كه در تابع درستنمايي حاشيه اي قرار دارد ، با ضريب ثابت $\binom{n_P}{y_{ij.}}$ اختلاف دارد.

داريم :

$$E\left(\frac{y_{ij.}}{n_P}\right) = E\left(E\left(\frac{y_{ij.}}{n_P} \mid p_{ij}\right)\right) = E\left(p_{ij}\right) = \mu \qquad (3-10)$$

و

$$\begin{aligned} V\left(\frac{y_{ij.}}{n_P}\right) &= E\left(V\left(\frac{y_{ij.}}{n_P} \mid p_{ij}\right)\right) + V\left(E\left(\frac{y_{ij.}}{n_P} \mid p_{ij}\right)\right) \\ &= E\left(\frac{p_{ij}\left(1-p_{ij}\right)}{n_P}\right) + V\left(p_{ij}\right) \\ &= \frac{\mu(1-\mu)}{n}\left(1 + \frac{n_P - 1}{\sigma^{-1}+1}\right) \end{aligned} \qquad (3-11)$$

برآورد معمول گشتاوري براي μ :

1 Bazaraa

2 Carlin and Louis

$$\hat{\mu} = \frac{y_{\dots}}{n_O \times n_R \times n_P} \quad (12-3)$$

و برآورد گشتاوري براي σ^{-1} :

$$\hat{\sigma}^{-1} = \frac{\hat{\mu}(1-\hat{\mu}) - s^2}{s^2 - \frac{\hat{\mu}(1-\hat{\mu})}{n}} \quad (13-3)$$

خواهد بود. كه در آن :

$$s^2 = \frac{1}{n_O \times n_R} \sum_{i=1}^{n_O} \sum_{j=1}^{n_R} \left(\frac{y_{ij.}}{n_P} - \hat{\mu} \right)^2 \quad (14-3)$$

البته برآوردگرهاي متفاوت ديگري براي حجم هاي نمونه ي غير متعادل در لويس و درسيمونيان[1] 1982 ارائه شده است.

3-2-5- برآورد و استنباط

برآورد

برآورد پارامترها (p_{ij}) در مدلهاي دو تايي مزدوج و بطور كلي در مدلهاي بيزي معمولاً به دو روش حداقل اميدرياضي مربع خطا يا روش حداكثر پسين[2] (درستنمايي ماكزيمم بيز) انجام مي شود.

برآورد هاي پارامترها در مسئله ي تحليل سيستم هاي اندازه گيري چندان مد نظر نيست ، هر چند خوشبختانه در فرم فرض شده ، توزيع پسين بطور تحليلي قابل محاسبه است و در خانواده ي توزيع بتا است.

$$\begin{aligned} f(p_{ij} \mid \mathbf{y}) &\propto f(\mathbf{y} \mid p_{ij}) f(p_{ij}) \\ &= p_{ij}^{y_{ij.}} (1-p_{ij})^{n_P - y_{ij.}} \, p_{ij}^{\alpha-1} (1-p_{ij})^{\beta-1} \quad (15-3) \\ &= p_{ij}^{y_{ij.}+\alpha-1} (1-p_{ij})^{n_P - y_{ij.}+\beta-1} \end{aligned}$$

كه هسته ي توزيع $Beta(y_{ij.}+\alpha-1, n_P - y_{ij.}+\beta-1)$ است و بنابراين برآوردگرهاي برآوردگرهاي اميدرياضي حداقل مربعات خطا (ميانگين توزيع پسين) و درستنمايي ماكزيمم بيز و آن فرم بسته دارد.

برآوردگر درستنمايي ماكزيمم بيز :

---

[1] Louis and DerSimonian

[2] Maximum Posterior

$$L\left(p_{ij}\right)=p_{ij}^{\,y_{ij.}+\alpha-1}\left(1-p_{ij}\right)^{n-y_{ij.}+\beta-1}$$

$$\ell\left(p_{ij}\right)=\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)\log\left(p_{ij}\right)+\left(n-y_{ij.}+\beta-1\right)\log\left(1-p_{ij}\right) \qquad (16\text{-}3)$$

$$\frac{d\ell}{dp_{ij}}=0\rightarrow\frac{\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)}{p_{ij}}-\frac{\left(n_p-y_{ij.}+\beta-1\right)}{\left(1-p_{ij}\right)}=0$$

$$\rightarrow\left(1-p_{ij}\right)\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)-p_{ij}\left(n_P-y_{ij.}+\beta-1\right)=0$$

$$\rightarrow\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)-p_{ij}\left[\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)+\left(n_P-y_{ij.}+\beta-1\right)\right]=0 \qquad (17\text{-}3)$$

$$\rightarrow p_{ij}=\frac{\left(y_{ij}+\alpha-1\right)}{\left(y_{ij}+\alpha-1\right)+\left(n_P-y_{ij.}+\beta-1\right)}$$

توجه داریم که حاصل بدست آمده در (17–3) همواره ماکزیمم کننده ي توزيع پسین نیست ، زماني ماکزیمم کننده است که $\frac{d^2\ell}{dp_{ij}^2}<0$ باشد:

$$\frac{d^2\ell}{dp_{ij}^2}=\frac{-\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)}{p_{ij}^2}+\frac{-\left(n_P-y_{ij.}+\beta-1\right)}{\left(1-p_{ij}\right)^2}<0$$

$$\rightarrow\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)\left(1-p_{ij}\right)^2+\left(n_P-y_{ij.}+\beta-1\right)p_{ij}^2>0 \qquad (18\text{-}3)$$

$$\rightarrow\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)\left(1-2p_{ij}+p_{ij}^2\right)+\left(n_P-y_{ij.}+\beta-1\right)p_{ij}^2>0$$

$$\rightarrow\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)-2\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)p_{ij}+\left(n_P+\beta+\alpha-2\right)p_{ij}^2>0$$

عبارت بدست آمده در (18–3) زماني بزرگتر از صفر است که عبارت فرم درجه ي دو آن ريشه ي حقيقي نداشته باشد يعني $\Delta'<0$ باشد.

$$\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)^2-\left(y_{ij.}+\alpha-1\right)\left(n_P+\alpha+\beta-2\right)<0 \qquad (19\text{-}3)$$

متاسفانه در حالت کلي نمي توان نشان داد ولي با توجه به اينکه $n_P\geq 2$ است، حداقل براي توزيع هاي پيشين لاپلاس و جفريز (مرجع) عبارت (17–3) ماکزیمم کننده است و البته براي توزيع ها پيشين با ($\alpha\geq 1$ و $\alpha+\beta\geq 2$) نيز چنين است.

استنباط

استنباط در مدلهاي بيزي توسط عامل بيز انجام مي شود و در حقيقت فرضيه اي ترجيح داده مي شود که تحت آن فرضيه (بطور متوسط) پسين بيشتري داشته باشد.

استفاده از عامل بيز به عنوان معيار پشتيباني

از داده ها در مدلهاي بيزي توسط جفريز[1] 1961 ارائه شده است و تعايبر و خواص جالبي دارد كه در كاس و رفتري[2] 1995 به تفصيل مورد بررسي قرار گرفته است.
يكي از خواص مناسب عامل بيز، خاصيت سازگاري آن و انتخاب فرضيه ي درست بصورت مجانبي است كه آزمونهاي معني داري فاقد آن است و يكي از دلايل مهم ما براي استفاده ي آن در انتخاب مدل و آزمون فرضيه ها به همين دليل است.
عامل بيز براي آزمون فرضيه به صورت زير تعريف مي شود :

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Omega_0 \\ H_1 : \theta \in \Omega_1 \end{cases} \qquad (20\text{-}3)$$

تحت زيان برابر (براي هر دو نوع خطا) فرضيه اي انتخاب مي شود كه $\Pr(\theta|\mathbf{y})$ بيشتر باشد يا به بيان بهتر فرضيه ي 0 بر فرضيه ي 1 ارجح است اگر : يعني $\int_{\theta\in\Omega_0} f(\theta|\mathbf{y})d\theta > \int_{\theta\in\Omega_1} f(\theta|\mathbf{y})d\theta$

$$B_{01} = \frac{\int_{\theta\in\Omega_0} f(\theta|\mathbf{y})d\theta}{\int_{\theta\in\Omega_1} f(\theta|\mathbf{y})d\theta} = \frac{\int_{\theta\in\Omega_0} f(\mathbf{y}|\theta) f(\theta)d\theta}{\int_{\theta\in\Omega_1} f(\mathbf{y}|\theta) f(\theta)d\theta} > 1 \qquad (21\text{-}3)$$

براي انتخاب مدل نيز تعريف عامل بيز تحت زيان برابر (براي هر دو نوع خطا) بطور مشابه انجام مي شود:
مدل 1 بر مدل 2 ارجح است اگر پسين بيشتري داشته باشد:

$$B_{12} = \frac{f(M_1|\mathbf{y})}{f(M_2|\mathbf{y})} = \frac{f(\mathbf{y}|M_1)}{f(\mathbf{y}|M_2)} \times \frac{\Pr(M_2)}{\Pr(M_1)} > 1 \qquad (22\text{-}3)$$

همانطور كه مشاهده مي شود عامل بيز تابعي بر حسب توزيع پيشين است، در مسئله تحليل سيستم هاي اندازه گيري انتخاب توزيع پيشين براي مدلها برابر 0.5 و در آزمون فرضيه از توزيع هاي پيشين

---

[1] Jeffreys

[2] Kass and Raftery

ذکر شده در (3 - 2) استفاده خواهیم کرد.

شوارتز[1] 1978 با بسط مجانبي عامل بيز محک BIC معرفي شده است که تابعي از توزيع پيشين نيست و در (4 - 2 - 2) به تفصيل بررسي خواهد شد.

3 -2 -6 آزمون R&R

در آزمون R&R بودن سيستم اندازه گيري مي خواهيم آزمون کنيم آيا تاثير پذيري سيستم اندازه گيري براي افراد در تکرارهاي مختلف متفاوت است يا خير، در حقيقت مي خواهيم يکي از دو مدل M_1 يا M_2 را انتخاب کنيم.

$$\begin{cases} H_0 : M_1 : y_{ijk} \overset{iid}{\sim} Bin\left(\left(n_O \times n_R \times n_P\right), p\right) \\ H_1 : M_2 : y_{ijk} \overset{iid}{\sim} Bin\left(n_P, p_{ij}\right) \end{cases} \quad (3\text{-}23)$$

براي محاسبه ي عامل بيز داريم :

$$f\left(M_1 \mid \mathbf{y}\right) = f\left(\mathbf{y} \mid M_1\right)\Pr\left(M_1\right) \quad (3\text{-}24)$$

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{y} \mid M_1\right) &= \int_0^1 f\left(\mathbf{y} \mid M_1, p\right) f(p)\,dp \\ &= \int_0^1 p^{y_{...}+\alpha-1}(1-p)^{\left(n_O\times n_R\times n_P\right)-y_{...}+\beta-1}\,dp \quad (3\text{-}25) \\ &= Beta\left(\left(y_{...}+\alpha\right), \left(\left(n_O \times n_R \times n_P\right) - y_{...} + \beta\right)\right) \end{aligned}$$

$$f\left(M_2 \mid \mathbf{y}\right) = f\left(\mathbf{y} \mid M_2\right)\Pr\left(M_2\right) \quad (3\text{-}26)$$

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{y} \mid M_2\right) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\mathbf{y} \mid M_2, p_{ij}\right) f\left(p_{ij}\right) dp_{ij} \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 p_{ij}^{y_{ij.}+\alpha-1}\left(1-p_{ij}\right)^{n_P - y_{ij.}+\beta-1}\,dp_{ij} \quad (3\text{-}27) \\ &= \prod_{i=1}^{n_O}\prod_{j=1}^{n_R} Beta\left(\left(y_{ij.}+\alpha\right), \left(n_P - y_{ij.} + \beta\right)\right) \end{aligned}$$

با فرض برابر بودن احتمالهاي پيشين براي دو مدل M_1 و M_2 :

$$\Pr\left(M_1\right) = \Pr\left(M_2\right) = 0.5 \quad (3\text{-}28)$$

خواهيم داشت.

$$B_{12} = \frac{f\left(\mathbf{y} \mid M_1\right)}{f\left(\mathbf{y} \mid M_2\right)} = \frac{Beta\left(\left(y_{...}+\alpha\right), \left(\left(n_O \times n_R \times n_P\right) - y_{...} + \beta\right)\right)}{\prod_{i=1}^{n_O}\prod_{j=1}^{n_R} Beta\left(\left(y_{ij.}+\alpha\right), \left(n_P - y_{ij.} + \beta\right)\right)} \quad (3\text{-}29)$$

اگر پس از مشاهده کردن داده ها مدل M_2 انتخاب

[1] Schwarz

شد ، بدین معنا است که سیستم اندازه گیري مورد نظر داراي خاصیت R&R نیست واگر مدل M_1 انتخاب شد بیانگر این حقیقت است که داده ها R&R بودن سیستم اندازه گیري را تایید مي کنند. B_{12} یا $\log(B_{12})$ معمولاً معیار مناسبي براي میزان R&R بودن سیستم اندازه گیري است. جفریز[1] 1961 میزان پشتیباني داده ها از فرضیه ي صفر بر اساس عامل بیز را بصورت زیر بیان مي کند :

$\log(B_{10}) = -\log(B_{01})$	$B_{10} = \frac{1}{B_{01}}$	تعبیر
$0-0.5$	$1-3.2$	نه چندان قابل توجه
$1-2$	$10-100$	قوي
>2	>100	قاطع

توجه به این نکته ضروري است که با حجم نمونه ي زیاد، توزیع پیشین در استنباط چندان مؤثر نیست ولي در حجم نمونه ي کم مي تواند باعث تغییر نتیجه ي استنباط شود و این موضوع یکي از نقاط ضعف استفاده از عامل بیز براي استنباط در حجم نمونه هاي کم است.

3 -2 -7 آزمون تاثیر پذیري

با توجه به اینکه سیستم اندازه گیري مطلوب باید در ابتدا داراي خاصیت R&R باشد، آزمون تاثیر پذیري را تنها براي مدل M_1 بخش (3 - 2 - 6) بررسي مي کنیم:

$$y_{ijk} \mid p \overset{iid}{\sim} Bin((n_O \times n_R \times n_P), p) \quad (3\text{θ} \ 3)$$
$$p \sim Beta(\alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.8 \\ H_1 : p < 0.8 \end{cases} \quad (3\text{1} \ 3)$$

---

[1] Jeffreys

$$B_{01}=\frac{\int_{0.8}^{1} p^{y_{...}+\alpha-1}(1-p)^{(n_O\times n_R\times n_O)-y_{...}+\beta-1}}{\int_{0}^{0.8} p^{y_{...}+\alpha-1}(1-p)^{(n_O\times n_R\times n_O)-y_{...}+\beta-1}} =\frac{1-Beta_{(0,0.8)}((y_{...}+\alpha),(n_O\times n_R\times n_P)-y_{...}+\beta)}{Beta_{(0,0.8)}((y_{...}+\alpha),(n_O\times n_R\times n_P)-y_{...}+\beta)} \quad (3-32)$$

كه در آن $Beta_{(0,p)}(\alpha,\beta)$ انتگرال ناقص بتا با پارامترهاي α و β است .

3 -3 روشهاي برآورد و استنباط در مدلهاي خطي تعميم يافته ي آميخته

مدلهاي خطي تعميم يافته به جاي مدل كردن ميانگين توزيع نرمال به صورت شرطي ، خواص ديگري (معمولاً ميانگين) از توزيعي از دسته ي خانواده ي نمايي را مدل مي كند و در اين مسير نياز به تعريف مفاهيم ديگري مانند تابع وصل به وجود مي آيد كه دانستن آنها قبل از ورود به مدلهاي خطي تعميم يافته ي آميخته ، ضروري است. بنابراين ابتدا مروري كلي بر مدلهاي خطي آميخته و سپس مدلهاي خطي تعميم يافته خواهيم داشت و از تركيب اين دو ، مدلهاي خطي تعميم يافته ي آميخته را معرفي مي كنيم.

3 -3 -1 مروري بر تاريخچه و پيشرفتها در مدلهاي خطي تعميم يافته

مدلهاي خطي تعميم يافته به عنوان تعميم مدلهاي خطي توسط نلدر و ودربرن[1] در سال 1972 معرفي شد كه در زير چكيده اي از آن را مي خوانيد.

بررسي نظري بصورت دقيقتر در مك كولا و نلدر[2] 1989 آمده است و مير[3] و همكاران 2002 منبع خوبي براي ديدگاههاي شهودي است. مك كولا 2000 در بر

---

[1] Nelder and Wedderburn

[2] McCullagh and Nelder

[3] Myers

گيرنده ي آخرين پيشرفتها و كاربردهاي اين دسته از مدلها تا سال 2000 ميلادي است.
لازم به ذكر است كه بيشترين استفاده از اين دسته مدلها به عنوان رقيبي قوي در برابر مدلهاي لگ خطي در تحليل داده هاي گسسته گسترش يافته است.
اطلاعات بيشتر در اين مورد و ارتباط آن با مدلهاي لگ خطي به اگرستي[1] 1996 مراجعه كنيد.
فرض مي شود خاصيتي از اين توزيع متغير پاسخ (ميانگين)، بطور شرطي توسط مدلي (نه لزوماً خطي) با متغير توضيحي (نه لزوماً متغيري تصادفي) در ارتباط است. به علاوه نوع متغير توضيحي در كل مسئله مشكلي ايجاد نمي كند (مراجعه كنيد به مونتگمري[2] و همكاران 2001) . علاقمند به بررسي ميزان تاثير متغيرهاي توضيحي يا به بيان آماري تر برآورد و استنباط پارامترهاي مدل هستيم.
روش معمول براي برآورد استفاده از برآوردگر هاي درستنمايي ماكزيمم است. روش حداقل مربعات بطور تكراري وزن داده شده نيز روش ديگري است كه چارنز و يو [3] 1976 نشان داده اند تحت شرايط معقولي با روش درستنمايي ماكزيمم معادل است.
ودربرن[4] 1974 نشان داد معادلات برآورد در مدلهاي خطي تعميم يافته تنها تابعي از ميانگين و واريانس است به بيان ديگر برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم در مدلهاي خطي تعميم يافته تنها با مدل كردن ميانگين و فرض ارتباط بين ميانگين و واريانس قابل محاسبه است. اين برآوردگرها تحت عنوان برآوردگرهاي شبه درستنمايي بررسي شده اند. برآوردگرهاي شبه درستنمايي تنومند با مدل كردن ميانه به جاي

---

[1] Agresti

[2] Montgomery

[3] Charnes and Yu

[4] Wedderburn

میانگین آن در جونگ[1] 1996 بدست آمده اند.گودمب و هید[2] 1987 نشان دادند برآوردگرهاي شبه درستنمايي با تعریف گودمب و تامپسون [3] 1984 معادلات برآورد بهینه است و گودمب [4] 2002 برآوردگرهاي شبه درستنمايي تنومند را در چاچوب معادلات برآورد بهینه تعمیم داد.

زگر و لیانگ[5] 1986 برآوردگرهاي شبه درستنمايي را براي حالت متغیر هاي پاسخ وابسته تعمیم دادند و لیانگ و زگر [6] 1986 نشان دادند این برآوردگرها حتي تحت ساختار همبستگي غلط نیز سازگارند.

کانتوني و رکچتي [7] 2001 و کانتوني [8] 2003 برآوردگرهاي معادلات برآورد تعمیم یافته ي تنومند را در کلاس برآوردگرهاي M بدست آوردند و چارچوبي براي تحلیل دویانس تنومند [9] ارائه نمودند.

3 -3 -2 مدلهاي خطي تعمیم یافته

فرض کنید $y_1, y_2, \cdots y_n$ مشاهداتي مستقل از توزیعي متعلق به دسته ي خانواده ي نمايي تعریف شده بصورت است

$$f(y_i) \overset{iid}{\sim} \exp\left(a(\theta)b(y_i)+c(\theta)+d(y_i)\right) \quad (33\ 3)$$

که به $a(\theta)$ پارامتر متعارف توزیع اطلاق مي شود. این خانواده در برگیرنده ي کلاس به نسبت وسیعي از توزیع هاي احتمالي استفاده شده در تحلیل هاي آماري است : توزیع هاي دو جمله اي ، پواسن، دو

---

1 Jung
2 Godambe and Heyde
3 Godambe and Thompson
4 Godambe
5 Zeger and Liang
6 Liang and Zeger
7 Cantoni and Rocchetti
8 Cantoni
9 Robust Analysis of Deviance

جمله اي منفي ، پارتو ، گاما، بتا، نرمال و ... در اين كلاس قرار مي گيرند .

اكنون فرض كنيد ميانگين ، يا پارامتر توزيع احتمالي فرض شده براي متغير پاسخ توسط تابع وصل g با متغير هاي توضيحي $\mathbf{x}$ در ارتباط است :

$$\mu_i = E(y_i \mid \mathbf{x_i}) = g^{-1}(\mathbf{x_i}\boldsymbol{\beta}) = g^{-1}(\eta_i) \quad (34\ 3)$$

كه به η_i پيشگوي خطي اطلاق مي شود .

با توجه به اينكه در خانواده ي نمايي معمولاً ميانگين تابعي از واريانس است :

$$V_i(y_i) = h(\mu_i) = h(\boldsymbol{\beta}) \quad (35\ 3)$$

و در ودربرن [1] 1974 نيز اشاره شده است ، برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم پارامترها ($\boldsymbol{\beta}$) از حل معادلات :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_1} V_i(\mu_i)(y_i - \mu_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_2} V_i(\mu_i)(y_i - \mu_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_k} V_i(\mu_i)(y_i - \mu_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36\ 3)$$

بدست خواهد آمد ، اين معادلات از روش هاي عددي مانند نيوتن قابل حل است.

3 -3 -3 مشكل فراپراشي در مدلهاي خطي تعميم يافته

با توجه به اينكه در مدلهاي خطي تعميم يافته، با تعيين توزيع متغير پاسخ از خانواده نمايي، واريانس توزيع ، معمولاً تابعي مشخص از ميانگين است و بنابر دلايل زيادي كه مهمترين آن در نظر نگرفتن متغير هاي توضيحي مهم يا در نظر نگرفتن نوعي وابستگي بين مشاهدات است، واريانس بدست آمده از مدل با واريانس بدست آمده از داده ها متفاوت است. معمولاً واريانس بدست آمده از داده

---

[1] Wedderburn

ها بیشتر از واریانس مدل است که فراپراشي [1] اطلاق مي شود البته ممکن است عکس این مطلب نیز اتفاق بیافتد که فروپراشي [2] نامیده شده است . به هر حال عدم تطابق این دو، دلیلي بر نامناسب بودن مدل است که معمولاً به دو روش این مشکل رفع مي شود استفاده از پارامتر مقیاس در مدل خطي تعمیم یافته و یا استفاده از مدلهاي خطي تعمیم یافته ي آمیخته. با توجه به اینکه استفاده از پارامتر مقیاس هر چند باعث زیاد شدن طول بازه هاي اطمینان براي پارامترهاي ثابت مدل مي شود (و تاثیري در برآوردنقطه اي آنها ندارد) ولي چندان مورد توجه قرار نگرفته است و بیشترین دلیل آن تفاسیري است که مي توان از مدلهاي خطي تعمیم یافته ي آمیخته استخراج نمود.

استفاده از پارامتر مقیاس بصورت زیر است: با توزیع متغیر پاسخ از خانواده ي نمایي ، تنها رابطه ي بین میانگین و واریانس با ایده گرفتن از توزیع مورد نظر به صورت

$$V_i(\boldsymbol{\beta}) = \phi h(\boldsymbol{\beta}) \quad (37\ \ 3)$$

فرض مي شود. نتیجه ي مقاله ي ودربرن [3] 1974 نشان مي دهد اگر خانوده ي توزیع فرض شده براي متغیر پاسخ خانواده نمایي باشد ، تنها در نظر گرفتن این رابطه و استفاده از برآوردگرهاي شبه درستنمایي با برآوردگرهاي درستنمایي ماکزیمم آن یکسان خواهد بود.

3 -3 -4 مدلهاي خطي آمیخته

میانگین متغیر پاسخ در این دسته مدلها به صورت

$$E(\mathbf{y} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{u}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Zu} \quad (38\ \ 3)$$

مدل مي شود که $\mathbf{u} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ، که معمولاً در طرح آزمایشها با اثرات آمیخته ، داده هاي طولي و اندازه هاي تکرار شده کاربرد وسیعي دارد. به $\mathbf{X}$

---

[1] Overdispersion

[2] Underdispersion

[3] Wedderburn

، ماتریس طرح[1] اثرات ثابت و به **Z** ماتریس طرح اثرات تصادفي اطلاق مي شود.
بسته به نوع مدل (بر اساس اثرات تصادفي) مانند مدلهاي با اثرات متقابل و يا مدلهاي با اثرات آشيانه اي ماتريس طرح **Z** متفاوت خواهد بود.
براي آشنايي با نحوه ي تعيين **Z** در طرح هاي آزمايشي به پي اس آر اس رائو[2] 1997 و در داده هاي طولي به وربكو مولنبرقز[3] 1997 مراجعه كنيد.
برآوردگرهاي اثرات ثابت (**β**) به روش درستنمايي ماكزيمم حاشيه اي[4] (ML) و برآوردگرهاي مؤلفه هاي واريانس (**Σ**) معمولاً به روش درستنمايي حاشيه اي باقيمانده[5] (REML) انجام مي شود. تمايز، مزايا و معايب برآوردگرهاي ML و REML ي مؤلفه هاي واريانس به تفصيل در سرل و همكاران[6] 1992 آمده است و در فرم بسته ي برآوردگرهاي ML و REML مؤلفه هاي واريانس براي طرح هاي آزمايشي متعادل در پي اس آر اس رائو[7] 1997 بصورت تحليلي بدست آمده است، تكنيك ديگري نيز براي برآوردگردن پارامترهاي ثابت و مؤلفه هاي واريانس با نام روش حداقل مربعات تكراري تعميم يافته (IGLS[8]) و حداقل مربعات تكراري تعميم يافته ي محدود (RIGLS[9]) نيز پيشنهاد شده است، گلدشتين[10] 1986 و گلدشتين 1989 به ترتيب نشان داده اند اين دو روش هر چند از تكنيك متفاوتي براي برازش استفاده مي كند ولي معادل روش ML و REML اند.

---

[1] Design Matrix
[2] P.S.R.S. Rao
[3] Verbeke and Molenberghs
[4] Marginal Maximum Likelihood
[5] Residual Maximum Likelihood
[6] Searle
[7] P.S.R.S. Rao
[8] Iterative Generalized Least Squares
[9] Restricted Iterative Generalized Least Squares
[10] Goldstein

پس از مشاهده ي داده ها معمولاً به روش، (**u**) بهترين پيشگويي خطي (BLUP[1]) پيشگويي مي شود ، مي توان نشان داد بهترين پيشگوي خطي به فرم $E(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{y})$ است ، (براي بحث هاي مفيد در اين زمينه به رابينسون[2] 1991 مراجعه كنيد).

الگوريتم EM ، پيشنهاد شده توسط دمپستر[3] و همكاران 1977 روش عملي و مناسبي براي بدست آوردن برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم است، اين روش در لايرد و ور[4] 1982 پيشنهاد شد و توسط لانگفورد[5] 1987 با در نظر گرفتن اثرات تصادفي به عنوان داده هاي گمشده، توسعه يافت. با توجه به اينكه توزيع حاشيه اي متغير پاسخ در (توزيع نرمال چند متغيره) در فرم خانواده نمايي است، شرايط همگرايي الگوريتم EM نيز برقرار است.

3 -3 -5 مدلهاي خطي تعميم يافته ي آميخته

اين مدلها تركيبي از دو مدل ((خطي آميخته)) و ((تعميم يافته ي خطي)) است كه به صورت زير تعميم داده شده است.

$$\mu_i = g\big(E(y_i \,|\, \mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{u})\big) = \mathbf{x_i}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z_i}\mathbf{u} \qquad (39\ 3)$$

و معمولاً فرض مي شود $\mathbf{u} \sim F_{\mathbf{u}}$, $y_i \,|\, \mathbf{u} \overset{iid}{\sim} F_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{u}}$ كه $F_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{u}}$ توزيع خانواده ي نمايي است. به g تابع وصل، $F_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{u}}$ توزيع پاسخ و به $F_{\mathbf{u}}$ توزيع آميخته[6] اطلاق مي شود. بيشترين مشكلي كه در راه برازش اين مدلها وجود دارد ، فرم بسته نداشتن تابع درستنمايي است. در حقيقت يكي از شرايطي كه تحت آن تابع درستنمايي فرم بسته دارد ، مزدوج بودن توزيع پاسخ و توزيع

---

[1] Best Linear Unbiased Predictor

[2] Robinson

[3] Dempster

[4] Laird and Ware

[5] Longford

[6] Mixing Distribution

آميخته است.
با توجه به اينكه در بيشتر مواقع اين حالت وجود ندارد براي بدست آوردن تابع درستنمايي مجبور به استفاده از روشهاي عددي و يا تقريب تيلور هستيم.

3 -3 -6 برآورد در مدلهاي غير خطي آميخته

تقريب تيلور

همانطور كه اشاره شد مدلهاي خطي آميخته مشكلات چنداني براي برآورد پارامترها (به خاطر الگوريتم EM) ندارند ولي در همين مدلها اگر اثرات تصادفي به صورت غير خطي وارد مدل شوند نمي توان فرم بسته براي مرحله ي E در الگوريتم EM پيدا كرد. استفاده اززنجيرهاي ماركف مونت كارلويي[1] (MCMC) اشاره شده در هستينگس[2] 1970 يک راه غلبه بر اين مشكل است و با توجه به اينكه در هر مرحله، مرحله ي E نياز به حجم نمونه ي كافي براي تقريب مناسب ميانگين دارد ، اين دسته از الگوريتمها يا بسيار (از لحاظ زماني) دير همگرا مي شوند و يا از لحاظ محاسباتي (لااقل با كامپيوتر هاي امروزي) تقريباً غير عملي اند.
يكي ديگر از روشهاي معمول حل اين مشكل استفاده از بسط تيلور تابع درستنمايي است.
جهت روشن تر شدن موضوع مثال ساده ي زير را در نظر بگيريد :
مثال 1.6: مدل خطي آميخته ي

$$y_{ij} = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + b_i + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right) \qquad (4\theta\ 3)$$

$$b_i \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_b^2\right)$$

را در نظر بگيريد ، اين مدل مي تواند تعداد چند گروه در رگرسيون باشد كه متغير هاي توضيحي آنها

---

[1] Markov Chain Monte Carlo

[2] Hastings

اندازه گيري نشده اند و براي خنثي سازي چنين تاثيرات آنها بر استنباط روي پارامترهاي در نظر گرفته شده باشد. بررسي مشكلات در نظر نگرفتن اثرات تصادفي در اينگونه مدلها در وربك و لزافر[1] 1997 بررسي شده است. در مدل (40-3)

فرض كنيد متغير پاسخ در $i=1,\cdots n$ گروه بررسي و در هر گروه $j=1,\cdots n_i$ آزمودني مورد بررسي واقع شده اند.

در داده هاي چند سطحي، اين مدل به مدل اثرات تصادفي دو سطحي مشهور است، كاربردهاي زيادي براي اين مدل در داده هاي پزشكي و آموزشي وجود دارد (مراجعه كنيد به گلدشتين[2] 1995).

در حقيقت مي توان مدل فوق را به صورت زير نيز نوشت:

$$\begin{aligned} y_{ij} \mid b_i &\overset{iid}{\sim} N\left(\mathbf{x_i'\beta} + b_i, \sigma^2\right) \\ b_i &\overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_b^2\right) \end{aligned} \qquad (41-3)$$

براي بدست آوردن توزيع حاشيه اي داريم:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \int \cdots \int f\left(\mathbf{y} \mid b_i\right) f\left(b_i\right) db_i \qquad (42-3)$$

با توجه به اينكه $f\left(\mathbf{y} \mid b_i\right)$ و $f\left(b_i\right)$ هر دو توزيع نرمال هستند و در فرم مزدوج قرار دارند، تابع درستنمايي به صورت تحليلي قابل محاسبه است و در فرم توزيع نرمال چند متغيره قرار دارد (مراجعه كنيد به گلدشتين 1995).

اكنون فرض كنيد ميانگين توزيع شرطي به صورت غير خطي با تابع g با پيشگوي خطي در ارتباط باشد.

اين دسته از مدلها بيشتر در شيمي فيزيک مورد استفاده قرار مي گيرد مانند مدل Michaelis-Menten (مراجعه كنيد به ميرس[3] و همكاران 2002) برخي كاربردهاي ديگر از اين دسته مدلها نيز در سنيتيک دارويي وجود دارد (مراجعه كنيد به

---

[1] Verbeke and Lesaffre

[2] Goldstein

[3] Myers

هارتفورد و ديويديان[1] 2000)

مثال1.6: مدل غير خطي مشابه (3–41) را به صورت زير فرض كنيد :

$$\begin{aligned} y_{ij} &= g\left(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + b_i\right) + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &\sim N\left(0, \sigma^2\right) \\ b_i &\sim N\left(0, \sigma_b^2\right) \end{aligned} \qquad (3\text{–}43)$$

واضح است در اين مثال حتي در صورتي كه تابع درستنمايي شرطي و تابع توزيع آميخته در فرم مزدوج باشند، تابع درستنمايي فرم بسته ندارد:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \int \cdots \int f\left(\mathbf{y} \mid b_i\right) f\left(b_i\right) db_i \\ &= \int \cdots \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_{ij} - g\left(x_i'\beta + b_i\right)}{\sigma}\right)^2\right) f\left(b_i\right) db_i \end{aligned} \qquad (3\text{–}44)$$

، اكنون با استفاده از بسط تيلور مرتبه ي اول، تابع درستنمايي را بطور تقريبي محاسبه مي كنيم :

$$\begin{aligned} &L\left(\beta, \sigma^2, \sigma_b^2\right) \\ &= \int \cdots \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_i - g\left(\boldsymbol{\beta}, b_i\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_b^2} b_i\right) db_i \\ &= \prod_{i=1}^{n_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_i - g\left(\boldsymbol{\beta}, b_i\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_b^2} b_i\right) db_i \\ &= \prod_{i=1}^{n_i} L_i\left(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}\right) \end{aligned} \qquad (3\text{–}45)$$

اين انتگرالها زماني همگي از لحاظ تحليل قابل حل هستند كه g تابعي چند جمله اي از b_i ها باشد به همين دليل از بسط تيلور (و براي سادگي مرتبه ي 1 آن) استفاده مي كنيم.

(ايده ي اين روش مشابه روشهايي است كه برسلو و كلايتون[2] 1993، گلدشتين[3] 1991 و ليندستورم و بيتس[1]

---

[1] Hartford and Davidian

[2] Breslow and Clyton

[3] Goldstein

1991 ارائه داده اند.

$$(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y})\propto\left(\sigma_b^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n_i}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_i\right)\right)^2-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i \qquad (46\ \ 3)$$

با بسط تابع g حول مقدار ثابت b_{i0} داریم :

$$g\left(\boldsymbol{\beta},b_i\right)\cong g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)+\frac{dg}{db_i}\Big|_{b_i=b_{i0}}\left(b_i-b_{i0}\right) \qquad (47\ \ 3)$$

براي ساده نويسي $\frac{dg}{db_i}\Big|_{b_i=b_{i0}}$ را به صورت g' مي نويسيم :

با فرض

$c_1=\left(\sigma_b^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n_i}{2}}$ خواهيم داشت :

$$\begin{aligned}L_i(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y})&\propto c_1\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)-g'\left(b_i-b_{i0}\right)\right)^2-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i\\&\propto c_1\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\begin{matrix}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)^2+\left(g'\left(b_i-b_{i0}\right)\right)^2\\-2g'\left(b_i-b_{i0}\right)\left(y_i-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\end{matrix}\right]-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i\end{aligned} \qquad (48\ \ 3)$$

$$\begin{aligned}L_i(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y})&\propto c_1\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\begin{matrix}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)^2\right)\\\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\begin{matrix}g'^2\left(b_i-b_{i0}\right)^2+2g'b_i\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\\-2g'b_{i0}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\end{matrix}\right]-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)\end{matrix}\right]db_i\\&=c_1\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)^2-2g'b_{i0}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]\right\}\\&\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[g'^2\left(b_i^2+b_{i0}^2-2b_ib_{i0}\right)+2g'b_i\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i\\&=c_1\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)^2-2g'b_{i0}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)+g'^2b_{i0}^2\right]\right\}\\&\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[b_i\left\{g'^2-2b_{i0}+2g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right\}+g'^2b_i^2\right]-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i\end{aligned}$$

با فرض :

---

[1] Lindstorm and Bates

$$c_2 = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)^2 - 2g'b_{i0}\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]\right\}$$

داريم :

$$L_i(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y}) \propto c_1c_2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_b^2}\left[\begin{array}{l}\left\{b_i\left[2g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]-2b_{i0}g'^2\right\}\sigma_b^2\\ +b_i^2g'^2\sigma_b^2+b_i^2\dfrac{\sigma^2}{n_i}\end{array}\right]-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i$$

$$= c_1c_2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_b^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\left[\begin{array}{l}b_i\sigma_b^2\left[2g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)-2b_{i0}g'^2\right]\\ +b_i^2\left[g'^2\sigma_b^2+\dfrac{\sigma^2}{n_i}\right]\end{array}\right]-\frac{1}{2n_i\sigma_b^2}b_i^2\right)\right)db_i$$

$$\Rightarrow L_i(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y}) \propto c_1c_2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_b^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(b_i^2-2b_i\frac{\sigma_b^2\left[b_{i0}g'^2-g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]}{g'^2\sigma_b^2+\dfrac{\sigma^2}{n_i}}\right)\right)db_i$$

اكنون براي بدست آوردن مربع بر حسب b_i و حل انتگرال فوق بصورت تحليل با اضافه و كم كردن جمله ي لازم خواهيم داشت :

$$\Rightarrow L_i(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y}) \propto c_1c_2\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_b^2}\left\{-\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\sigma_b^2\left[b_{i0}g'^2-g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]}{g'^2\sigma_b^2+\dfrac{\sigma^2}{n_i}}\right)\right\}\right)$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_b^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(b_i^2-2b_i\frac{\sigma_b^2\left[b_{i0}g'^2-g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]}{g'^2\sigma_b^2+\dfrac{\sigma^2}{n_i}}\right)\right)db_i$$

با در نظر گرفتن

$$c_3 = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_b^2}\left\{-\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\sigma_b^2\left[b_{i0}g'^2-g'\left(y_{ij}-g\left(\boldsymbol{\beta},b_{i0}\right)\right)\right]}{g'^2\sigma_b^2+\dfrac{\sigma^2}{n_i}}\right)\right\}\right)$$

خواهيم داشت:

$$L_i(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto c_1 c_2 c_3 \sqrt{2\pi\sigma_b^2\sigma^2} \propto c_2 c_3 \left(\sigma_b^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sigma_b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n_i}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (49\ 3)$$
$$\Rightarrow L_i(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto c_2 c_3 \left(\sigma^2\right)^{\frac{1-n_i}{2}}$$

بنابراین ، با توجه به (45-3) تابع درستنمايي با ضرب کردن تک تک درستنمايي هاي حساب شده بصورت تحليلي در فوق، بدست خواهد آمد. اين روش بصورت کلي تحت نام تقريب لاپلاس محاسبه مي شود توجه به چند نکته در اين ميان ضروري است:

چنانچه تابع وصل يک تابع خطي باشد ، برآوردگرهاي حاصل از ماکزيمم سازي تابع درستنمايي فوق، جوابهاي دقيقند.

همانطور که مشاهده مي شود بسط حول هر مقدار دلخواه مانند b_{i0} تابع درستنمايي تقريب زده شده را پيچيده مي کند ، در حاليکه بسط حول مقدار اميد رياضي b_i ،عدد ثابت صفر (استفاده از بسط ماکلورن) بسيار فرم تابع تقريب زده شده را ساده تر مي کند. گلدشتين [1] 1991 با بسط تيلور از درجه ي دو حول صفر، مسئله را حل کرده است و همچنين نشان داده است برآوردگرهاي حاصل از درستنمايي تقريب زده شده به صورت مجانبي برآوردگرهاي درستنمايي ماکزيمم اند.

اگر بتوان تابع وصل را با بسط حول b_{i0} بصورت قابل قبولي ، تقريب زد ، برآوردگرهاي درستنمايي ماکزيمم، نيز جوابهاي قابل قبولي است.

ولفينگر و لين [2] 1997 بسط را حول EBLUP[3] تکرار قبل نوشته اند و شبيه سازي هاي آنها نشان مي دهد با آنکه جوابها کاراتر شده اند ولي تفاوت محسوسي با بسط حول صفر ندارند ، اين موضوع نشان مي دهد نقطه اي که بسط حول آن نوشته مي شود چندان تاثيري بر برآورد پارامترها نمي کند.

چنانچه تابع درستنمايي شرطي، نرمال نباشد،

---

[1] Goldstein

[2] Wolfinger and Lin

[3] Empirical Best Linear Unbiased Predictor

جوابهاي معقولي از ماكزيمم سازي تابع بدست آمده در فوق حاصل نمي شود.
چنانچه حجم نمونه ي سطوح بالا (n در مثال فوق) زياد شود تقريب به علت فرم حاصلضربي خطاهاي احتمالي ، به جوابهاي مطلوبي منجر نخواهد شد.

3 -3 -7 بحث ها :

ردرگز و گلدمن[1] 1995 نشان دادند استفاده از روش گلدشتين[2] 1991 براي مدلهاي آميخته ي دو تايي،(كه اتفاقاً هدف اين پايان نامه است) جوابهاي فوق العاده اريبي براي مؤلفه هاي واريانس مي دهد.
طي اين بحث ها گلدشتين و رازباش[3] 1996 برآوردگرهاي تصحيح شده ي خود را معرفي كردند ،برسلو و لين[4] 1995 برآوردگرهاي تصحيح شده ي ديگري را معرفي كردند و طي شبيه سازي هاي خود در لين و برسلو[5] 1996 قابل اعتماد بودن برآوردگرهاي خود را نشان دادند. به هر حال استفاده از روش تربيع گاوس هرميتي از بسط تيلور قابل اعتماد تر است ولي مشكلات محاسباتي آن نيز بيشتر است. همين موضوع استفاده از آنها را در حجم نمونه ي بالا محدود مي كند.
به هر حال اگر تابع درستنمايي هر توزيع دلخواه انتخاب شده باشد (معمولاً خانواده ي نمايي) و فرض توزيع آميخته ي نرمال صحيح باشد (با توجه به فرم مدلهاي تعميم يافته ي خطي آميخته و نحوه ي وارد كردن اثرات تصادفي، فرض نرمال بودن آن كاملاً منطقي است) آنگاه جوابهاي تربيع گاوس هرميتي به شرط انتخاب تعداد گره به اندازه ي كافي زياد ، جوابهاي درستنمايي واقعي را نتيجه مي دهد.

---

[1] Rodriguez and Goldman

[2] Goldstein

[3] Goldstein and Rasbash

[4] Breslow and Lin

[5] Lin and Breslow

با توجه به اینکه استفاده از تعداد نقاط بیشتر در تربیع گاوس هرمیتي تنها هزینه ي محاسباتي دارد ، مدلهاي مؤلفه ي واریانس دوتایي که در این پایان نامه بحث خواهد شد ، به این روش برازش خواهند گردید.

3 -3 -8 درونیابي هرمیتي[1]

درونیابي یکي از موارد مورد توجه در آنالیز عددي و ریاضیات محاسباتي است که شاید واژه ي مناسب آن در آمار رگرسیون (مخصوصاً رگرسیون ناپارامتري) باشد. مسئله این است : مقادیري از تابع مانند $(x_i, f(x_i))$ را مشاهده کرده ایم به دنبال پیدا کردن تابع مجهول f و یا تقریب آن در حد قابل قبولي هستیم. به بیان دیگر به دنبال روشي هستیم که بتواند تابع f را خوب تقریب بزند.

یکي از روشهاي معمول استفاده از روش حداقل مربعات است، به این معنا که اگر تعداد مشاهدات $i=1,\cdots,n$ باشد ، یک معادله ي حداکثر از درجه ي $n-1$ (با احتساب عرض از مبداء) به آن قابل برازش است ، توجه داشته باشید به علت اینکه در چنین شرایطي ، مدل اشباع شده خواهیم داشت ، مجموع مربعات خطاي چنین رگرسیوني همواره صفر است. مدلهاي اشباع شده از دیدگاه مدلبندي آماري ، چندان مورد توجه نیستند زیرا به تعداد مشاهدات در مدل ، پارامتر وجود دارد.

مسلم است با مطالب گفته شده ، مدل برازش شده به این روش از هر n نقطه ي مشاهدات مي گذرد.

$$y_i = f(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \cdots + \beta_{n-1} x_i^{n-1} \quad (5θ\ 3)$$

البته ممکن است تابع چند جمله اي فوق، تابع واقعي f نباشد ، اما اگر فرض کنیم تابع f در شرایط قضیه ي تیلور صدق مي کند، حتي اگر این تابع چند جمله اي نباشد، با زیاد کردن مشاهدات (زیاد کردن جملات چند جمله اي) مي توانیم خطا را تا هر میزان مورد نظر ، کم کنیم.

---

[1] Hermit Interpolation

براي فرار از فرمولهاي پيچيده جهت برازش مدلهاي چند جمله اي اشباع شده، از فرمولهاي چند جمله اي خاص كه مشابه آنها در طرح آزمايشها و رگرسيون با نام تحت نام چند جمله اي هاي متعامد ديده شده است استفاده مي شود.

اكنون به نحوه ي درونيابي به كمك اين چند جمله اي ها مي پردازيم كه راهگشاي كار در قسمتهاي بعدي است.

تابع $\pi(x)$ را به صورت زير در نظر بگيريد كه m نقطه ي (x_i, y_i) مشاهده شده است.

$$\pi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m) \quad (51\text{–}3)$$

و تابع $l_i(x)$ را به صورت

$$l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_m)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_m)} \quad (52\text{–}3)$$

$i = 1, \cdots, m$

در نظر بگيريد.

تابع $\pi(x)$ داراي اين خاصيت مهم است كه

$$\forall i = 1, \cdots, m \quad \pi(x_i) = 0 \quad (53\text{–}3)$$

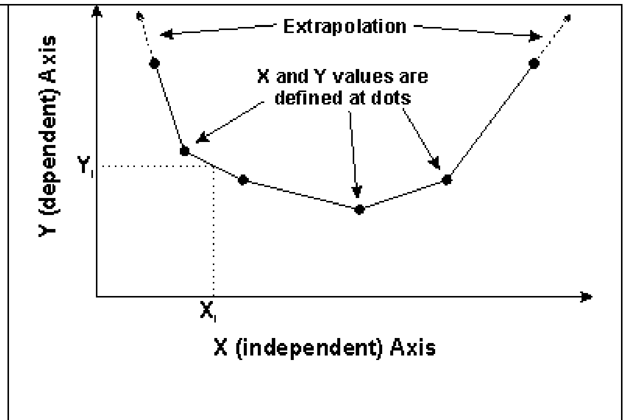
و $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ كه δ_{ij} ، دلتاي كرونكر است به اين معنا كه

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases} \quad (54\text{–}3)$$

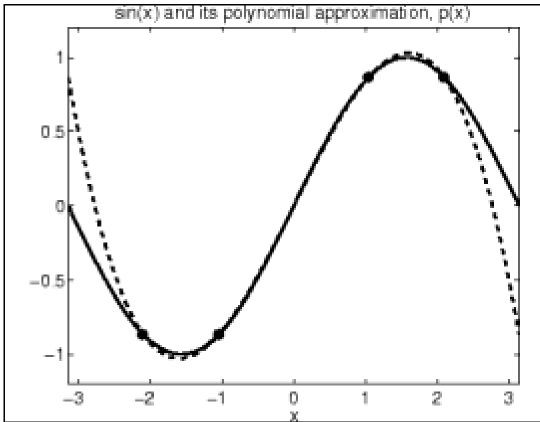
اكنون تابع f را كه نقاط (x_i, y_i) را از آن مشاهده كرده ايم به صورت زير درونيابي مي كنيم :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} l_i(x) y_i \quad (55\text{–}3)$$

كه تابع f تقريب زده شده در (55-3) داراي اين خاصيت مهم است كه از تمامي نقاط (x_i, y_i) $i = 1, \cdots, m$ مي گذرد به عبارت ديگر $\forall i,\ f(x_i) = y_i$.



نمودار (2 3) : مفهوم درون يابي و برون يابي توابع



نمودار (3 3) : درون يابي تابع سينوس به کمک تابع چند جمله اي در چهار نقطه

براي برازش يک چندجمله اي از درجه ي $2m-1$ نياز به داشتن $2m$ اطلاع (مشاهده) داريم اين $2m$ اطلاع مي تواند با $2m$ زوج (x_i,y_i) و يا m زوج (x_i,y_i) با داشتن m مشتق در آن نقاط يعني سه تايي (x_i,y_i,y_i') بدست آيد.

در اين شرايط فرض کنيد m مشاهده از تابع f يعني m تا از سه تايي هاي (x_i,y_i,y_i') ، در اختيار داريم انتظار داريم بتوانيم يک چند جمله اي از درجه ي $2m-1$ي بر داده ها برازش دهيم.

تابع f بصورت زير در اين شرايط تقريب زده مي شود :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}h_i(x)y_i+\sum_{i=1}^{m}\bar{h}_i(x)y_i' \quad (56\ 3)$$

که $h_i(x)$ و $\bar{h}_i(x)$ چندجمله اي هايي حداکثر از درجه ي $2m-1$ اند.

براي اينکه تابع درونيابي شده به اين روش ، از هر m نقطه ي (x_i,y_i) بگذرد ، لازم است :

$$h_i(x_j)=\delta_{ij} \quad (57\ 3)$$

و به علاوه براي اينکه مشتق تابع درونيابي شده از (x_i,y_i') بگذرد ، لازم است

$$h_i'(x_j)=0 \qquad (58-3)$$
$$\bar{h}_i'(x_j)=\delta_{ij}$$

تابع l_i ذکر شده در (52-3) به نظر شرایط لازم برای قرار گرفتن به جای تابع h (57-3) را دارد و تنها این مشکل وجود دارد که تابع l از درجه ی $m-1$ است و بنابراین تابع $[l_i(x)]^2$ از درجه ی $2m-2$ است و می تواند جایگزین مناسبی برای h_i باشد. با تمام این تفاسیر و برای اینکه درجه ی چند جمله ای به $2m-1$ برسد تعریف می کنیم :

$$h_i(x)=r_i(x)[l_i(x)]^2 \qquad (59-3)$$
$$\bar{h}_i(x)=s_i(x)[l_i(x)]^2$$

که توابع r_i و s_i توابعی حداکثر خطی از x هستند و آنها را طوری تعیین می کنیم که شرایط (3-57) و (58-3) برقرار باشند. بنابراین خواهیم داشت :

$$r_i(x_i)=1 \qquad (60-3)$$
$$s_i(x_i)=0$$

و به علاوه

$$r_i'(x_i)+2l_i'(x_i)=0 \qquad (61-3)$$
$$s_i'(x_i)=1$$

که دو تابع

$$s_i(x)=x-x_i \qquad (62-3)$$

و

$$r_i(x_i)=1-2l_i'(x_i)(x-x_i) \qquad (63-3)$$

دارای دو خاصیت (60-3) و (61-3) هستند.

با جایگذاری در (59-3) ، خواهیم داشت :

$$h_i(x)=[1-2l_i'(x_i)(x-x_i)][l_i(x)]^2 \qquad (64-3)$$
$$\bar{h}_i(x)=(x-x_i)[l_i(x)]^2 \qquad (65-3)$$

که با جایگذاری آن در (56-3) ، تابع درونیابی مشخص خواهد شد. به فرمول بدست آمده ی اخیر ، فرمول درونیابی هرمیتی گفته می شود.

برای شرایط بیشتر و فرمول کلی با داشتن مشتق مراتب بالاتر به Fort(1948) مراجعه کنید.

3 -3 -9 تربيع هرميتي[1]

$\int_a^b w(x)f(x)dx$ كه محاسبه ي آن به كمك تابع اوليه يا مشكل است و يا دست نيافتني است را در نظر مي گيريم.

اين در حالي است كه $\int_a^b w(x)P_n(x)dx$ ، كه P_n يك تابع چند جمله اي از درجه ي n است داراي تابع اوليه ساده است و يا محاسبه ي آن كار ساده اي است. مي توان انتظار داشت كه اگر بتوان تابع f را با چند جمله اي P_n خوب تقريب زد ، $\int_a^b w(x)P_n(x)dx$ تقريب خوبي براي $\int_a^b w(x)f(x)dx$ باشد.

با فرض اينكه در m نقطه ، مشتق تابع f در نقاط مورد نظر معلوم است ، f را به روش هرميت ، تقريب مي زنيم :

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{m} H_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \overline{H}_i y_i' \quad (3-66)$$

$$H_i = \int_a^b w(x)h_i(x)dx = \int_a^b w(x)\left[l - 2l_i'(x_i)(x - x_i)\right]\left[l_i(x)\right]^2 dx \quad (3-67)$$

$$\overline{H}_i = \int_a^b w(x)\overline{h}_i(x)dx = \int_a^b w(x)(x - x_i)\left[l_i(x)\right]^2 dx \quad (3-68)$$

بديهي است كه مي توان m نقطه را به صورت دلخواه انتخاب كرد. ضمناً خطاي اين تقريب را مي توان توسط تابعي از $f^{(2m)}$ (مشتق مرتبه ي $2m$ از تابع f) و $\int_a^b w(x)[\pi(x)]^2 dx$ محاسبه كرد و تعداد نقاط را طوري در نظر گرفت كه تقريب مورد نظر قابل قبول باشد.

ولي مي توان نشان داد انتخاب نقاط با استفاده از يك فرآيند تصادفي در بازه ي (a,b) معمولاً جوابهاي قابل اعتماد تري را نتيجه مي دهد. اين روش معمولاً به تربيع تصادفي[2] معروف است (مراجعه كنيد به تامپسون[3] 2001).

---

[1] Hermit Quadrature

[2] Random Quadrature

[3] Thompson

3-3-10 تربيع گاوسي[1]

روش تربيع گاوسي بسيار شبيه تربيع هرميتي است $\overline{H}_i$ را به صورت ديگري نشان مي دهيم:

$\overline{H}_i = \frac{1}{\pi(x_i)}\int_a^b w(x)\pi(x)l_i(x)dx$ كه $\pi(x)l_i(x)$ از درجه ي $2m-1$ است. بنابراين $\overline{H}_i$ به ازاي $i=1,\cdots,m$ مقدار صفر مي گيرد و اين در حالي است كه دقت تقريب كه برازش يک چند جمله اي از $2m-1$ است كماكان حفظ شده است. اگر تابع $\pi(x)$ بر تابع $i=1,\cdots,m$ $l_i(x)$ بر بازه ي $[a,b]$ با تابع وزني $w(x)$ ، عمود باشد يعني :

$$\int_a^b \pi(x)l_i(x)w(x)dx = 0 \quad (69\ \ 3)$$

آنگاه مي توان فرمول هرميت (3–66) را به

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \cong \sum_{i=1}^{m} H_i y_i$$

ساده كرد، به علاوه اگر بتوان تابع π تحت شرط (3–69) را به انتگرالهاي نامتناهي نيز تعميم داد و كماكان تقريب مورد نظر با چند جمله اي از درجه ي $2m-1$ است.

فرم اين چند جمله اي ها به ازاي $w(x)$ هاي خاصي تعيين شده است ، به عنوان مثال چند جمله اي هاي متعامد بر $l_i(x)$ ها با تابع وزني $w(x)=e^{-x^2}$ به چند جمله اي هاي هرميت مشهورند.

قضيه 1.6 : با فرض $w(x)=e^{-\alpha^2x^2}$ ، چند جمله اي هاي $H_r(x)$ ، با وزن $w(x)$ بر $l_i(x)$ ها عمودند:

$$H_r(x) = (-1)^r e^{x^2} \frac{d\left(e^{-x^2}\right)}{dx^r} \quad (70\ \ 3)$$

به بيان ديگر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_r(x)l_i(x)e^{-\alpha^2x^2}dx = 0 \quad (71\ \ 3)$$

3-3-11 تربيع گاوس هرميتي[2]

در اين بخش تنها انتگرالهاي به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx$

---

1 Gaussian Quadrature

2 Gauss-Hermit Quadrature

در نظر گرفته مي شود ، اين فرم انتگرالها در مدلهاي خطي تعميم يافته ي آميخته بسيار مورد توجه است و براي محاسبه ي درستنمايي حاشيه اي لازم است بتوان چنين فرم كلي را به ازاي f هاي دلخواه محاسبه كرد. مطالب اين بخش بدون اثبات ذكر شده اند و براي مطالعه ي دقيقتر و بررسي اثباتها لازم است به كتب آناليز عددي مراجعه كنيد.

$\pi(x) = \frac{1}{A_m} H_m(x)$ كه در آن $A_m = 2^m$ است ضريب A_m به اين علت انتخاب شده است كه ضريب بالاترين درجه ي $H_m(x)$ را به يك ، تقليل دهد.

از طرفي داريم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \left[H_r(\alpha x)\right]^2 dx = \frac{2^r r!}{\alpha}\sqrt{\pi} \quad (72-3)$$

و براي حالت خاص :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left[H_r(x)\right]^2 dx = 2^r r! \sqrt{\pi} \quad (73-3)$$

كه در آن :

$$H_r(x) = (-1)^r e^{x^2} \frac{d\left(e^{-x^2}\right)}{dx^r} \quad (74-3)$$

با فرمول اخير ، چند جمله اي هاي اول هرميت بصورت زير بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1 && H_1(x) = 2x && H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ &H_3(x) = 8x^3 - 12x && H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 && H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned} \quad (75-3)$$

علاوه بر اين با داشتن چند جمله ي اول به كمك اتحاد هرميت ، مي توان چند جمله اي هاي درجات بعد را به كمك درجات قبل توسط رابطه ي بازگشتي زير ساخت :

$$H_r(x) = 2xH_{r-1}(x) - 2(r-1)H_{r-2}(x) \quad (76-3)$$

با توجه به آنچه قبلاً ذكر گرديد، اگر $H_m(x)$ را به جاي $\pi(x)$ انتخاب كنيم، گره هاي تربيع گاوسي ($x_1, \cdots, x_m$) ديگر دلخواه نخواهند بود، و اين گره ها ريشه هاي $H_m(x)$ هستند. بنابراين خواهيم داشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx = \sum_{i=1}^{m} H_i y_i = \sum_{i=1}^{m} H_i f(x_i) \quad (77-3)$$

پس از انجام محاسبات خواهیم داشت :

$$H_i = \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{H_{m+1}(x_i)} \quad (78\ 3)$$

که x_i ها ريشه هاي $H_m(x)$ هستند و H_{m+1} چند جمله اي مرتبه ي بعد است.

به عنوان مثال خواهیم داشت :

$$H_3(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad (79\ 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \\ H_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \\ H_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \end{cases} \quad (80\ 3)$$

بنابراين داريم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx \cong \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 4f(0) + f\left(+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] \quad (81\ 3)$$

با ايده گرفتن از تقريب انتگرالهاي فوق به روش گاوس هرميت و محاسبه ي گره ها و وزنها طوري كه تابع درستنمايي حاشيه اي ماكزيمم شود ، مي توان به برآوردگرهاي NPML[1] دست يافت. لايرد[2] 1978 نحوه ي برآورد درستنمايي ناپارامتري را به كمك الگوريتم EM ، براي توزيع آميخته، تشريح كرده است و ايتكين[3] 1999 آن را براي مدل دوتايي آميخته به كار برده است.

استفاده از برآوردگرهاي NPML از اين جهت اهميت دارد كه هكمن و سينگر[4] 1984 طي شبيه سازي نشان

---

1 Non-Parametric Maximum Likelihood

2 Laird

3 Aitkin

4 Heckman and Singer

داده اند اگر فرض نرمال بودن اثرات تصادفي نادرست باشد، برآوردگرهاي بدست آمده از تقريب هاي ديگر نامناسب است و در مقابل روش NPML ، برآوردگرهاي مناسبي ارائه مي دهد . ديويس[1] 1987 نيز نشان داد برآورد مؤلفه هاي واريانس نسبت به انتخاب توزيع آميخته ، حساس است كه نتايج هكمن و سينگر[2] 1984 را تاييد مي كرد.

طي شبيه سازي هاي انجام شده در ردريگز و گلدمن[3] 1995 برآوردهاي مؤلفه ي واريانس در توزيع دو جمله اي به روش بسط تيلور ، جوابهاي نامناسبي گزارش مي دهد زيرا برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم با بسط تيلور، زماني بدست مي آيد كه توزيع شرطي نرمال باشد، اگر توزيع دو جمله اي با توزيع نرمال خوب تقريب نخورد (مخصوصاً در حجم نمونه ي كم در داخلي ترين سطح داده ها و يا نسبت بسيار بالا و يا بسيار پايين در سطوح مختلف داده ها).

در چنين شرايطي مي توان از تربيع گاوس هرميتي با تعداد گره هاي كافي استفاده كرد. تنها مشكل استفاده از تربيع گاوس هرميتي كه در ورمونت[4] 2003 نيز اشاره شده است اين است كه تعداد محاسبات براي بدست آوردن درستنمايي حاشيه اي با زياد شدن گره ها و يا به زياد شدن سطوح بالاتر از 1 ، به صورت نمايي افزايش مي يابد و اين موضوع ممكن است روش تربيع گاوس هرميتي و يا روش NPML را براي برازش داده ها دچار مشكل كند.

تربيع گاوس هرميتي با 5 و يا 10 نقطه معمولاً جوابهاي قابل قبولي ارائه مي دهند ولي با توجه به اينكه گره ها را نميتوان انتخاب كرد و ريشه هاي چند جمله اي هاي هرميت هستند، گاهي اوقات براي پوشاندن تمام دامنه ي تابع شرطي لازم است

---

[1] Davies

[2] Heckman and Singer

[3] Rodriguez and Goldman

[4] Vermunt

تعداد گره ها بسيار افزايش پيدا كند در چنين مواقعي پيشنهاد مي شود تابع درستنمايي شرطي حول ماكزيمم خود مركزيت داده شود. در اين صورت مي توان با تعداد گره هاي كم ، نتيجه ي قابل قبولي گرفت.. ليو و پيرس [1] 1994 اين روش را با نام تربيع گاوس هرميتي وفقي [2] معرفي كردند. گاهي اوقات ماكزيمم سازي تابع درستنمايي شرطي جهت مركزيت سازي تابع درستنمايي شرطي ، خود يک معضل است. رابه [3] و همكاران 2000 تقريب تابع درستنمايي شرطي را توسط تقريب لاپلاس پيشنهاد مي دهد ،لزافر و اسپينس [4] 2000 نشان دادند استفاده از روش گاوس هرميت معمولي با تعداد نقاط زياد با روش گاوس هرميت وفقي با تعداد نقاط كم در داده هاي دوتايي نتيجه ي تقريباً يكساني نشان مي دهد.

با توجه به اينكه در مسئله ي تحليل سيستمهاي اندازه گيري كيفي، داده ها دوتايي اند و از طرفي مشكلات استفاده از روش گاوس هرميت وفقي ، از لحاظ زماني (به علت ماكزيمم سازي عددي تابع درستنمايي شرطي) مقرون به صرفه نيست ترجيح مي دهيم از روش گاوس هرميت معمولي با تعداد نقاط زياد استفاده كنيم .

از طرفي در آبراموويتز و استگون [5] 1965، جدول حداكثر تعداد 20 گره و وزن براي تقريب گاوس هرميتي گزارش شده است.

با توجه به آنچه توضيح داده شده است برنامه ي نوشته شده در اين پايان نامه، اين قابليت را دارد كه تا انتخاب هر تعداد گره دلخواه نتايج را گزارش دهد.

چند جمله اي هاي هرميت به كمك معادله ي بازگشتي

---

[1] Liu and Pierce

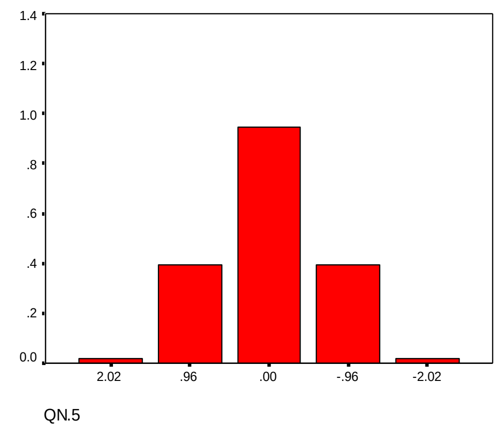
[2] Adaptive Gauss-Hermit Quadrature

[3] Rabe

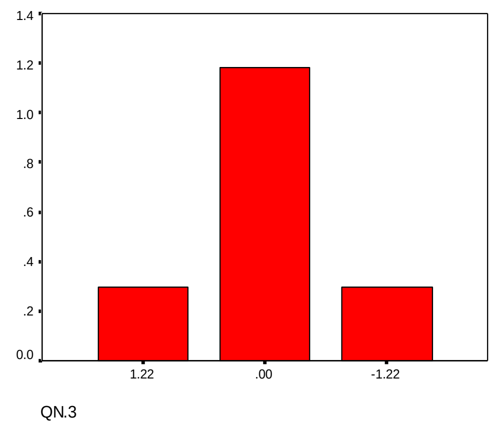
[4] Lesaffre and Spiessens

[5] Abramowitz and Stegun

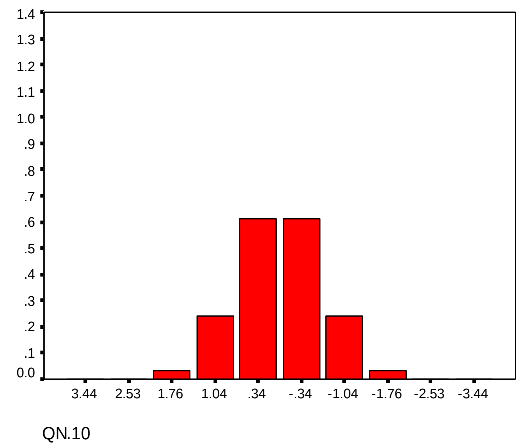
(76-3) در نرم افزار Maple بدست آمده است و ریشه هاي آن به کمک تابع polyroot در Splus محاسبه شده اند. جوابهاي بدست آمده تا 20 گره با جدول آبراموويتز و استگون 1965 مطابقت داشته است.



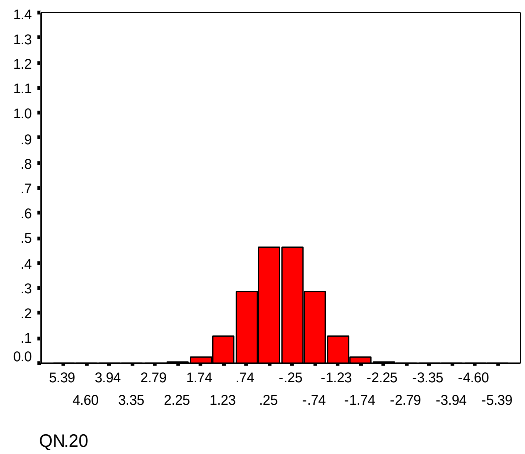
نمودار (3-4) : گره ها در برابر وزنهاي گاوس هرميت با 5 نقطه



نمودار (3-5) : گره ها در برابر وزنهاي گاوس هرميت با 3 نقطه



نمودار (3-6) : گره ها در برابر وزنهاي گاوس هرميت با 10 نقطه



نمودار (3-7) : گره ها در برابر وزنهاي گاوس هرميت با 20 نقطه

همانطور که مشاهده مي شود دامنه ي گره ها به سرعت افزايش نمي يابد و با توجه به وزن بسيار کم گره هاي فرين ، تنها در صورتي جوابهاي درستنمايي با گره هاي بالا جوابهاي متفاوتي خواهند داشت که تابع درستنمايي شرطي در مقادير

دور از صفر ، مقدار تابع بالايي داشته باشند.

3 -4 مدلبندي با اثرات تصادفي و محاسبه ي تابع درستنمايي حاشيه اي

در فصل 2 ، 2 - 2 و فصل 3 سه ديدگاه مختلف بر تحليل سيستم هاي اندازه گيري كيفي را مرور كرديم و تنها در فصل 3 ديدگاه مدلبندي آماري را بر مسئله ي تحليل سيستمهاي اندازه گيري داشته ايم.

يكي از اشكالاتي كه بر ديدگاه هاي قبل مي توان گرفت ، اين موضوع است كه در فصول قبل ، فرض شده است كه افراد در تكرار هاي خود روي قطعات، مستقل از همديگر تصميم مي گيرند حال آنكه اگر سيستم اندازه گيري داراي شرايط نامطلوبي باشد ، به افراد و يا به تكرارهاي تك تك بازرسان وابسته است و در نظر گرفتن اين وابستگي به قابل اعتماد تر شدن نتايج بيشتر كمك مي كند. به علاوه در نظر نگرفتن چنين وابستگي هايي ممكن است به نتايج نادرستي منجر شود.

3 -4 -1 مدلبندي اندازه گيري (مدل با اثرات متقابل)

همانند مدل ارائه شده در بورديك[1] و همكاران 2003 و مونتگمري[2] 1991، استقلال حاشيه اي را به استقلال شرطي تقليل مي دهيم :

در مدل خطي ارائه شده در مونتگمري 1993 :

$$y_{ijk} \mid O_i, P_j, OP_{ij} = \mu + O_i + P_j + OP_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$i = 1, \cdots, n_O \qquad (3\text{-}82)$$
$$j = 1, \cdots, n_P$$
$$k = 1, \cdots, n_R$$

كه y_{ijk} تصميم فرد i ام روي قطعه ي j ام در تكرار

---

[1] Burdick

[2] Montgomery

k ام روي آن قطعه است که μ اثر ثابت است و اثرات تصادفي O_i ، P_j و OP_{ij} مستقل از خطا و مستقل از همديگر داراي توزيع نرمال هستند:

$$O_i \sim N\left(0,\sigma_O^2\right) \quad P_j \sim N\left(0,\sigma_P^2\right) \quad OP_{ij} \sim N\left(0,\sigma_{OP}^2\right) \qquad (83\text{-}3)$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

تعميم اين مدل ، به مدلي که بتواند در قالب مدل خطي تعميم يافته قرار بگيرد به صورت زير خواهد بود :

$$y_{ijk} \mid O_i, P_j, OP_{ij} \sim N\left(\mu_{ij},\sigma^2\right) \qquad (84\text{-}3)$$
$$\mu_{ij} = O_i + P_j + OP_{ij}$$

جهت نوشتن تابع درستنمايي و با توجه به شرايط آزمايشي، فرض هاي زير ضروري و منطقي است:

$$y_{ijk} \mid O_i, P_j, OP_{ij} \perp y_{ijk'} \mid O_i, P_j, OP_{ij} \qquad (85\text{-}3)$$

$$y_{ij*} \mid O_i \perp y_{ij'*} \mid O_i \qquad (86\text{-}3)$$

$$y_{i**} \perp y_{i'**} \qquad (87\text{-}3)$$

که علامت $\perp$ به معناي استقلال و * به معناي دلخواه بودن انديس است.

با بازنويسي مناسب مدل براي توزيع شرطي دو جمله اي خواهيم داشت:

$$y_{ijk} \mid O_i, P_j, OP_{ij} \sim Bin\left(1,\mu_{ij}\right) \qquad (88\text{-}3)$$
$$\mu_{ij} = g^{-1}\left(\mu + O_i + P_j + OP_{ij}\right)$$

که g تابع وصل (ترجيحاً تابع وصل متعارف) است که در مسئله ي توزيع دوجمله اي :

$$g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad (89\text{-}3)$$

با توجه به فرضهاي گفته شده در (85-3) ، (86-3) و (87-3) ، براي نوشتن تابع درستنمايي حاشيه اي داريم :

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n_O}\int\prod_{j=1}^{n_P}\int \int\prod_{k=1}^{n_R} f\left(y_{ijk} \mid O_i, P_j, OP_{ij}\right) dF_{OP_{ij}}\, dF_{P_j}\, dF_{O_i} \qquad (90\text{-}3)$$

که در آن $\boldsymbol{\theta} = \left(\mu, \sigma_O, \sigma_P, \sigma_{OP}\right)$ است.

با توجه به اينکه توزيع شرطي ، توزيع برنولي است ، داريم :

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n_O}\int\prod_{j=1}^{n_P}\int\int\prod_{k=1}^{n_R}\mu_{ij}^{y_{ijk}}\left(1-\mu_{ij}\right)^{y_{ijk}}dF_{OP_{ij}}dF_{P_j}dF_{O_i}\quad(91-3)$$

که در آن $F_{OP_{ij}}$ تابع توزیع $N(0,\sigma_{OP}^2)$ ، F_{P_j} تابع توزیع $N(0,\sigma_P^2)$ و F_{O_i} تابع توزیع $N(0,\sigma_O^2)$ است.

با جایگذاري $\eta_{ij}=\mu+O_i+P_j+OP_{ij}$ که η_{ij} پیشگوي خطي است و

$$\mu_{ij}=\frac{\exp(\eta_{ij})}{1+\exp(\eta_{ij})}\quad(92-3)$$

و ساده کردن عبارات داریم :

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n_O}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n_P}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n_R}\frac{\exp\left(\eta_{ij}\sum_{k=1}^{n_R}y_{ijk}\right)}{\left(1+\exp\left(\eta_{ij}\sum_{k=1}^{n_R}y_{ijk}\right)\right)^{n_R}}dF_{OP_{ij}}dF_{P_j}dF_{O_i}\quad(93-3)$$

جهت سهولت و یکسان سازي توابع توزیعي که در انتگرال لبگ - اشتیلیس بالا حضور دارند ، پیشگوي خطي را با کمي تغییر در نظر مي گیریم :

$$\eta_{ij}=\mu+\sigma_O^2O_i+\sigma_P^2P_j+\sigma_{OP}^2OP_{ij}\quad(94-3)$$

با این تغییر متغیر ، تابع درستنمایي (93-3) به فرم زیر قابل نوشتن است :

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n_O}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n_P}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n_R}\frac{\exp(\eta_{ij}y_{ij.})}{\left(1+\exp\left(\eta_{ij}\sum_{k=1}^{n_R}y_{ijk}\right)\right)^{n_R}}d\Phi_{OP_{ij}}d\Phi_{P_j}d\Phi_{O_i}\quad(95-3)$$

که در آن Φ تابع توزیع نرمال استاندارد و $y_{ij.}=\sum_{k=1}^{n_R}y_{ijk}$ است.

با توجه به آنچه در 3 - 3 - 6 بیان شد ، قابل حل نیست زیرا تابع وصل ، یک تابع غیر خطي از اثرات تصادفي O_i ، P_j و OP_{ij} است.

حتي اگر تابع وصل نیز خطي مي بود ، به علت اینکه توزیع نرمال با توزیع دو جمله اي مزدوج نیست و با توجه به منحصر به فرد بودن توزیع هاي مزدوج در خانواده هاي نمایي ، نمي توان با بسط

تيلور اثرات تصادفي نيز مسئله را حل كرد مگر اينكه فرض كرد اين توزيع با توزيع مزدوج (نرمال) خوب تقريب بخورد كه در حجم نمونه ي كم در داخلي ترين سطح (n_R كم) مقدور نيست.

بايد توجه داشت كه تابع nlme در نرم افزار SPlus كه جهت برازش مدلهاي غير خطي آميخته به روش لينداستورم و بيتس[1] 1990 نوشته شده است از روش بسط تيلور بهره مي برد كه تنها زماني جواب درستنمايي ماكزيمم است كه توزيع شرطي نرمال باشد و يا با نرمال ، خوب تقريب بخورد.

اين در حالي است كه تعداد تكرارها $n_R = 3$ است و تابع توزيع داخلي ترين انتگرال ، $Bin(3, \mu_{ij})$ است كه تاييد مي كند جوابهاي نامناسبي براي پارامترها خواهد داشت.

جزئيات برازش تابع nlme و نحوه ي كاربرد آن در مدلهاي غير خطي (مخصوصاً مدلهاي سنيتيک دارويي) در پينهيرو و بيتس[2] 2000 آمده است.

ناچاراً انتگرال (3–95) را به روش تربيع گاوس هرميتي تقريب عددي مي زنيم.

از طرفي چون تابع وزن ، به صورت $e^{-\frac{x^2}{2}}$ است نه e^{-x^2} كه جداول گاوس هرميت بر اساس آن طرح شده اند نياز داريم بتوانيم از طريق جدول گاوس هرميت ، انتگرالهاي به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ را تقريب بزنيم در حالي كه گره ها و وزنهاي گاوس هرميت براي انتگرالهاي به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{x^2} dx$ است.

اين مشكل با تغيير متغير $z = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ، به راحتي قابل حل است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\sqrt{2} z\right) e^{-z^2} dz \quad (96\ 3)$$

با تمام اين تفاسير ، پس از تقريب داخلي ترين

---

[1] Lindstorm and Bates

[2] Pinheiro and Bates

انتگرال (95-3) ، داريم :

$$L(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\propto} \prod_{i=1}^{n_O} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n_P} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{t=1}^{nqn_{OP}} w_{OP}^{0}(t) \left[\frac{\exp\left(\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O_i+\sqrt{2}\sigma_P P_j+\sqrt{2}\sigma_{OP} OP^0(t)\right)y_{ij.}\right)}{\left(1+\exp\left(\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O_i+\sqrt{2}\sigma_P P_j+\sqrt{2}\sigma_{OP} OP^0(t)\right)y_{ij.}\right)\right)^{n_R}}\right] d\Phi_{P_j}\, d\Phi_{O_i} \qquad (97-3)$$

كه در آن $OP^0(t)$ و $w_{OP}^0(t)$ به ترتيب گره ها (نقاط قطع) و وزنهاي تقريب گاوس هرميت هستند كه با nqn_{OP} نقطه ي تربيع ، تقريب شده اند كه از جداول آبراموويتز و استگون[1] 1965 قابل استخراج و يا توجه به توضيحات 3 - 3 - 11 قابل محاسبه اند.
از طرفي باقي انتگرالها (97-3) نيز از لحاظ تحليلي غير قابل محاسبه اند و بطور مشابه به روش تربيع گاوس هرميتي تقريب زده مي شوند.
لذا خواهيم داشت :

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\propto} \sum_{i=1}^{n_O} \log \left\{ \sum_{v=1}^{nqn_O} w_O^0(v) \prod_{j=1}^{n_P} \sum_{u=1}^{nqn_P} w_P^0(u) \sum_{t=1}^{nqn_{OP}} w_{OP}^0(t) \left[\frac{\exp\left(\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O^0(v)+\sqrt{2}\sigma_P P^0(u)+\sqrt{2}\sigma_{OP} OP^0(t)\right)y_{ij.}\right)}{\left(1+\exp\left(\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O^0(v)+\sqrt{2}\sigma_P P^0(u)+\sqrt{2}\sigma_{OP} OP^0(t)\right)y_{ij.}\right)\right)^{n_R}}\right] \right\} \qquad (98-3)$$

با معلوم بودن nqn_{OP} ، nqn_P و nqn_O ، مي توان تابع درستنمايي را بصورت تقريبي محاسبه كرد و دقت محاسبات با افزايش تعداد نقاط قطع ، افزايش مي يابد.
تابع تقريب زده شده به كمك روش شبه نيوتن و با استفاده از تابع nlminb در نرم افزار SPlus با محدوديتهاي $\sigma_O > 0$ ، $\sigma_P > 0$ و $\sigma_{OP} > 0$ ، ماكزيمم خواهد شد و برآوردگرهاي درستنمايي حاشيه اي پارامترها يعني $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_O, \hat{\sigma}_P, \hat{\sigma}_{OP})$ محاسبه خواهند گرديد.

---

[1] Abromowitz and Stegun

3 -4 -2 مدلبندي تاثير پذيري (مدل آشيانه اي)

در بخش 3 - 4 - 1 فرض شده است تصميم فرد بر روي قطعه (به كمک سيستم اندازه گيري) به شرط افراد و قطعات از هم مستقلند. استقلال تكرارها به شرط افراد و قطعات همانطور كه اشاره شد ، يک مدل با اثرات متقابل پيشنهاد داد. اكنون معناي صفر و يک بودن را از (خراب و درست) تشخيص دادن قطعه به تشخيص صحيح تغيير مي دهيم .

منطقي است كه فرض كنيم قدرت تشخيص صحيح قطعات براي سيستم اندازه گيري به شرط تكرار و افراد مستقل از هم روي قطعات مختلف ، مستقل از هم تغيير مي كند. با اين توصيفات مدل زير براي داده ها پيشنهاد مي شود :

$y_{ijk}=1$ اگر تصميم با واقعيت قطعه تطابق داشته باشد.

$y_{ijk}=0$ اگر تصميم با واقعيت قطعه تطابق نداشته باشد.

كه y_{ijk} تصميم كاربر i ام در تكرار j ام روي قطعه ي k ام است.

مدل پيشنهادي به صورت :

$$\begin{aligned} y_{ijk} \mid \mu_{ij} &\sim Bin(1,\mu_{ij}) \\ \mu_{ij} \mid O_i, R_{ij} &= g^{-1}(\mu + O_i + R_{ij}) \end{aligned} \qquad (3\text{–}99)$$

اين مدل شبيه مدل اندازه هاي تكرارشده اندرسون و ايتكين[1] 1985 است.

فرضهاي زير براي نوشتن تابع درستنمايي حاشيه اي ضروري و منطقي است:

$$y_{ijk} \mid O_i, R_{ij} \perp y_{ijk'} \mid O_i, R_{ij} \qquad (3\text{–}100)$$

$$y_{ij*} \mid O_i \perp y_{ij'*} \mid O_i \qquad (3\text{–}101)$$

$$y_{i**} \perp y_{i'**} \qquad (3\text{–}102)$$

بنابراين تابع درستنمايي حاشيه اي به صورت زير گزارش محاسبه مي شود:

---

[1] Anderson and Aitkin

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n_O}\int\prod_{j=1}^{n_R}\int\frac{\exp\left[\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)y_{ij.}\right]}{\left(1+\exp\left[\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)y_{ij.}\right]\right)^{n_P}}dF_{R_{ij}}\,dF_{O_i} \quad (103\ 3)$$

با توجه به اینکه $F_{R_{ij}}$ تابع توزیع $N(0,\sigma_R^2)$ و F_{O_i} تابع توزیع $N(0,\sigma_O^2)$ است ، انتگرالهاي فوق از لحاظ تحليلي غير قابل محاسبه اند.

با استفاده از تقريب گاوس هرميتي براي انتگرالها ، لگاريتم تابع درستنمايي حاشيه اي، به صورت زير خواهد بود:

$$\ell(\boldsymbol{\theta})\,\tilde{\propto}\sum_{i=1}^{n_O}\log\left\{\sum_{v=1}^{nqn_O} w_O^0(v)\prod_{j=1}^{n_R}\sum_{u=1}^{nqn_R} w_R^0(u)\frac{\exp\left[\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O^0(v)+\sqrt{2}\sigma_R R^0(u)\right)y_{ij.}\right]}{\left(1+\exp\left[\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O^0(v)+\sqrt{2}\sigma_R R^0(u)\right)y_{ij.}\right]\right)^{n_P}}\right\} \quad (104\ 3)$$

که در آن $\left(R^0(u),O^0(v)\right)$ و $\left(w_R^0(u),w_O^0(v)\right)$ ، به ترتيب، نقاط قطع و وزنهاي گاوس هرميت هستند.

3 -4 -3 مدل آستانه اي دوتايي[1] و تعبير آن در تحليل سيستمهاي اندازه گيري كيفي

مدلهاي دو تايي از كيفي سازي يک متغير کمي نيز بدست مي آيد که تعابير مناسبي در تحليل سيستمهاي اندازه گيري کيفي و بالاخص سيستمهاي اندازه گيري كمي كيفي شده (مانند گيج هاي برو – نرو) دارند .

فرض کنيد $z_{ijk}\,|\,O_i,R_{ij}\overset{iid}{\sim}F$ متغير پيوسته ي از توزيع هموار و پيوسته اي F با ميانگين $\mu_{ij}=\mu+O_i+R_{ij}$ توليد شود يا به بيان بهتر :

$$z_{ijk}\,|\,O_i,R_{ij}=\mu+O_i+R_{ij}+\varepsilon_{ijk} \quad (105\ 3)$$

که در آن ε_{ijk} داراي توزيعي هموار با ميانگين صفر مانند F است.

در حالت خاص ، فرض کنيد F توزيع لجستيک با پارامتر مقياس 1 است. داده ي پيوسته ي z_{ijk} در

[1] Binary Threshold Model

نقطه ي نامعلومي مانند t_{ij} قطع مي شود و متغير جديد y_{ijk} را مي سازد . بدون از دست دادن كليت مسئله و جهت قابل تشخيص بودن [1] پارامترها فرض مي كنيم $t_{ij}=0$.

$y_{ijk}=1$ اگر $z_{ijk}>t_{ij}$ و $y_{ijk}=0$ اگر $z_{ijk}\le t_{ij}$ با توجه به فرض لجستيک بودن توزيع z_{ijk} ، داريم :

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(y_{ijk}=1\,|\,O_i,R_{ij}\right)=\Pr\left(z_{ijk}>0\,|\,O_i,R_{ij}\right)\\
&=\Pr\left(\mu+O_i+R_{ij}+\varepsilon_{ijk}>0\,|\,O_i,R_{ij}\right)\\
&=\Pr\left(\varepsilon_{ijk}>-\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)|\,O_i,R_{ij}\right)=\Pr\left(-\varepsilon_{ijk}\le\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)|\,O_i,R_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

از طرفي توزيع لجستيک استاندارد حول صفر متقارن است بنابراين $-\varepsilon_{ijk}$ نيز داراي توزيع لجستيک استاندارد است بنابراين داريم :

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(-\varepsilon_{ijk}\le\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)|\,O_i,R_{ij}\right)=\Pr\left(\varepsilon_{ijk}\le\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)|\,O_i,R_{ij}\right)\\
&=\frac{\exp\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)}{1+\exp\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)}
\end{aligned}
$$

كه با مدل (99-3) با فرض $g(x)=\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (وصل لجيت) معادل است .

مدل دوتايي آستانه اي را مي توان به اين صورت تعبير كرد سيستم اندازه گيري قطعه را زماني درست تشخيص مي دهد كه شباهت آن به قطعه ي صحيح ايده آل از آستانه ي نامعلومي تجاوز كند.

3 -5 آزمون R&R در مدلهاي اثرات تصادفي

در مدلهاي مزدوج استفاده از عامل بيز كار را براي انتخاب مدل ساده نمود در اين فصل روشي شهودي براي آزمون R&R معرفي مي كنيم و نشان مي دهيم به كمک ديدگاه بيزي مي توان مسئله را به كمک عامل بيز نيز حل كرد.

همانطور كه از نحوه ي مدلبندي در 1 - 4 - 3 مي توان فهيمد ، يک سيستم اندازه گيري R&R

[1] Identifiability

سيستمي است كه $\sigma_O^2 = \sigma_{OP}^2 = 0$ باشد ، آزمونهاي معمول مؤلفه هاي واريانس در مدلهاي خطي توسط آناليز واريانس قابل حل است كه در مدلهاي خطي تعميم يافته ، فرضهاي لازم براي آزمون آن به روش آناليز واريانس وجود ندارد. يكي از راهكارهاي ممكن استفاده از آزمون نسبت درستنمايي تعميم يافته است. متاسفانه زماني كه پارامترها در مرز قرار داشته باشند قضيه ي ويلكس (مراجعه كنيد به ويلكس[1] 1963) به علت استفاده از بسط تيلور براي تقريب $-2\log(lik)$ ديگر برقرار نيست زيرا در اثبات آن از بسط تيلور مرتبه ي 2 استفاده شده است و زماني كه پارامتر در مرز باشد ، تابع درستنمايي تنها از يک طرف مشتق دارد و بنابراين شرايط قضيه ي ويلكس برقرار نيست.

مشكل آزمون درستنمايي تعميم يافته ي مؤلفه هاي واريانس تنها محدود به مدل هاي گسسته نيست ، در مدلهاي مؤلفه ي واريانس نرمال با صفر نيز در $-2\log(lik)$ داراي مشكل مشابه است (مراجعه كنيد به ميلر[2] 1977) .

اگر مدل تحت بررسي تنها داراي يک مؤلفه ي واريانس (σ_b^2) باشد، آماره ي ويلكس براي آزمون مؤلفه ي واريانس

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_b^2 = 0 \\ H_1 : \sigma_b^2 > 0 \end{cases} \qquad (106\text{-}3)$$

آميزه اي از توزيع كي دو و تباهيده است (مراجعه كنيد به سلف و ليانگ[3] 1987) .

لين[4] 1997 اخيراً آزمونهاي امتياز كارا ي مؤلفه هاي واريانس را در حالت كلي بدست آورده است و نيز نشان داده است اين دسته از آزمونها، بطور مجانبي دقيقترين آزمون موضعي است. بهات و

---

[1] Wilks

[2] Miller

[3] Self and Liang

[4] Lin

ناگنور[1] 1965 نشان داده اند براي آزمون بيش از يک مؤلفه ي واريانس با صفر، بطور مجانبي و پرتوان ترين آزمون موضعي [2] وجود ندارد و بطور مجانبي و دقيقترين آزمون موضعي [3] را معرفي كردند.

مشكل استفاده از روش لين 1997 خاصيت مجانبي آن است ، زيرا براي اينكه آماره ي تحت بررسي داراي توزيع كي دو باشد، لازم است سطوح معادل مؤلفه ي واريانس به سمت بينهايت ميل كند ، اين در حالي است كه طبق طراحي راهنماي MSA تعداد سطوح معادل مؤلفه هاي واريانس برابر 3 است كه نتايج قابل قبولي ارائه نخواهد داد. مدل مؤلفه ي واريانس دوتايي بررسي شده در لين 1997 كه در شبيه سازي ها جوابهاي قابل قبولي براي اين چنين آزمونها ارائه داده اند داراي حداقل حجم نمونه ي 15 در سطوح مرتبط با مؤلفه ي واريانس بوده است.

راه مناسب ديگر ، استفاده از روش خودگردان افرن[4] 1979 براي تعيين توزيع آماره ي نسبت درستنمايي است. راه ساده ي ديگر بدون استفاده از آماره ي نسبت درستنمايي ، استفاده از P-مقدار تجربي [5] به كمک روش خود گردان است. استفاده از بازه هاي اطمينان مؤلفه هاي واريانس براي آزمون آنها نيز روش ديگري است.

3 -5 -2 روش P-مقدار تجربي

اين روش اساساً به دو مرحله تقسيم مي شود: مرحله ي برازش و مرحله ي شبيه سازي كه P-مقدار بدست آمده از اين روش حتي براي حجم هاي نمونه ي پايين در سطوح مؤلفه هاي واريانس نيز قابل

---

[1] Bhatt and Nagnur

[2] Asymptotically Locally Most Powerful Test

[3] Asymptotically Locally Most Stringent Test

[4] Efron

[5] Empirical P-Value

اعتماد است.

مرحله ي برازش

اگر مؤلفه هاي واريانس موجود در فرضيه ي صفر را با $\boldsymbol{\theta}_1$ و باقي پارامترها را با $\boldsymbol{\theta}_2$ نشان دهيم

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (107\ 3)$$

علاقمند به آزمون :

$$\begin{cases} H_0 : \boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{0} \\ H_1 : \boldsymbol{\theta}_1 \succ \mathbf{0} \end{cases} \quad (108\ 3)$$

هستيم. در ابتدا بايد مدل واريانس مناسب بر مجموعه داده ي مورد نظر (D) برازش شود

برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم تمامي پارامترها محاسبه شوند

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{ML}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1ML}} \\ \cdots \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{2ML}} \end{pmatrix} \quad (109\ 3)$$

مرحله ي شبيه سازي

مجموعه داده ي $D_m, m=1\cdots B$ كه B تكرار بوت استرپ است، تحت فرضيه ي صفر توليد مي شود :

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{0} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\theta}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{2ML}} \end{pmatrix} \quad (110\ 3)$$

برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم براي مجموعه داده ي D_m

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{m})}_{\mathbf{ML}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{m})}_{\mathbf{1ML}} \\ \cdots \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{m})}_{\mathbf{2ML}} \end{pmatrix} \quad (111\ 3)$$

محاسبه مي شود.

P-مقدار تجربي به روش بوت استرپ، به صورت زير بدست خواهد آمد:

$$P - Value = \frac{\#\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{m})}_{\mathbf{1ML}} \succ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1ML}}\right)}{B} \quad (112\ 3)$$

كه $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{m})}_{\mathbf{1ML}} \succ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1ML}}$ است اگر حداقل يكي از اعضاي بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{m})}_{\mathbf{1ML}}$ از $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1ML}}$ بزرگتر باشد.

مزيت استفاده از اين روش ، عدم استفاده از آزمونهاي نسبت درستنمايي تعميم يافته و بدست آوردن P-مقدار آزمون بدون استفاده از كميت محوري است.

3 -5 -3 روش بازه هاي اطمينان بوت استرپ

با استفاده از اين روش ، بازه هاي اطمينان براي تك تك مؤلفه هاي واريانس بدست خواهد آمد ، فرضيه ي H_0 رد مي شود اگر مقدار صفر در حداقل يكي از بازه هاي اطمينان مؤلفه هاي واريانس بردار $\boldsymbol{\theta}_1$ وجود نداشته باشد.

براي بدست آوردن بازه ي اطمينان بوت استرپ براي مؤلفه هاي واريانس، پس از برازش مدل مورد نظر بر مجموعه ي داده ي اصلي D و محاسبه ي (3-109)

مجموعه ي داده ي D_m با پارامترهاي (3-109) توليد مي كنيم

بعد از برازش همان مدل ، برآورد درستنمايي ماكزيمم (3-111) را محاسبه مي كنيم .

بازه ي اطمينان بوت استرپ $1-\alpha$ درصدي ، چندك مرتبه ي $\alpha/2$ و $1-\alpha/2$ مؤلفه هاي واريانس محاسبه شده در (3-111) است.

فصل 4
محکهاي R&R

4 -1 مقدمه

در سه فصل اخير سه مدل مختلف پيشنهاد شده است که هر کدام مزايا و معايبي دارند.
مدل مزدوج ، تاثير پذيري را مدل مي کند و مي تواند R&R بودن سيستم اندازه گيري را به کمک عامل بيز آزمون کند، به علاوه در همين مدل مي توان تاثير پذيري سيستم اندازه گيري را که يکي از مراجع تصميم گيري در راهنماي MSA است را به کمک عامل بيز بررسي کرد. با توجه به اينکه اگر آماردان توزيع پيشين مشخصي مد نظر نداشته باشد، با چند ديدگاه متفاوت مي توان توزيع هاي پيشين متفاوتي از فرم توزيع بتا براي آن در نظر گرفت که لزوماً منجر به تصميم هاي يکساني نخواهد شد واين يک ضعف محسوب مي شود. تعريف محک R&R متناسب با تغييرات سيستم اندازه گيري در مدل اثرات متقابل از نقاط قوت آن است ولي اين مدل قادر نيست تاثير پذيري را نيز لحاظ کند و مانند مدل کمي بورديك[1] و همکاران 2003 در اين مدل قادر به تعريف محک قابليت نيستيم.
در مدل ذکر شده ي فوق مي توان محک R&R را به صورت زير تعريف کرد :

4 -1 -1 محک R&R براي مدل مزدوج

عامل بيز بدست آمده در (3-29) که انتخاب کننده ي يکي از دو مدل (3-23) است، محک R&R مناسبي است. $RR_1 = B_{12} \in (0,\infty)$ که مقادير بزرگتر از 1 ، نشان دهنده ي R&R بودن سيستم است يا به طور معادل $RR_1 = \log(B_{12}) \in (-\infty,\infty)$. مقادير بزرگتر از 0

[1] Burdick

نشان دهنده ي R&R بودن سيستم است.

4 -1 -2 محک R&R براي مدل اثرات متقابل

نسبت تغييرات متوسط پاسخ تحت فرض R&R بودن سيستم ($\sigma_{OP}^2=\sigma_O^2=0$) بر تغييرات کل تحت عدم فرض R&R بودن سيستم است.

تحت فرض R&R بودن سيستم :

$$Var\left(g\left(E\left[y_{ijk}\right]\right)\right)=Var\left(\mu+P_j\right)=\sigma_P^2 \quad (1\ 4)$$

تحت عدم فرض R&R بودن سيستم :

$$Var\left(g\left(E\left(y_{ijk}\right)\right)\right)=Var\left(\mu+O_i+P_j+OP_{ij}\right)=\sigma_O^2+\sigma_P^2+\sigma_{OP}^2 \quad (2\ 4)$$

بنابراين :

$$RR_2=\frac{\sigma_P^2}{\sigma_O^2+\sigma_P^2+\sigma_{OP}^2} \quad (3\ 4)$$

$0\leq RR_2\leq 1$ يک محک مناسب براي R&R بودن سيستم اندازه گيري است ، هر چه اين محک به 1 نزديکتر باشد خاصيت R&R بودن سيستم بيشتر است.

4 -1 -3 محک R&R براي مدل آشيانه اي

يکي از مزاياي مدل آشيانه اي تعبير مدل آستانه اي براي آن است و اين تعبير کمک مي کند بتوان محک R&R با تعبير متفاوت با آنچه گفته شد بيان کرد :

$$Var\left(z_{ijk}\right)=Var\left(\mu+O_i+R_{ij}+\varepsilon_{ijk}\right)=\sigma_O^2+\sigma_R^2+\frac{\pi^2}{3} \quad (4\ 4)$$

تحت فرض R&R بودن سيستم اندازه گيري :

$$Var\left(z_{ijk}\right)=\frac{\pi^2}{3} \quad (5\ 4)$$

بنابراين يک محک مناسب R&R ، به فرم زير قابل تعريف است.

$$RR_3=\frac{\frac{\pi^2}{3}}{\sigma_O^2+\sigma_R^2+\frac{\pi^2}{3}} \quad (6\ 4)$$

$0\leq RR_3\leq 1$ محک مناسبي براي تعيين R&R بودن سيستم

اندازه گیری است.

4 -2 استفاده از محک BIC در مدلهاي اثرات تصادفي

استفاده از محکهاي انتخاب مدل يکي از روشهاي مناسب براي تصميم گيري در نياز به حضور يا عدم حضور اثر تصادفي در مدل است .

آکائيك[1] 1973 با تعميم اصل درستنمايي استفاده از محک آکائيک را براي انتخاب مدل، پيشنهاد مي دهد که در حقيقت مدلي را انتخاب مي کند که به طور مجانبي نزديکترين مدل را با فاصله ي کولبك لايبلر[2] باشد. از رابطه ي نزديک بين آزمونهاي نسبت درستنمايي تعميم يافته و محک آکائيک ، ميتوان دريافت که حتي در حجم هاي نمونه ي بالا (بطور مجانبي) همواره مدل صحيح با احتمالي مثبت ، انتخاب نخواهد شد اين در حالي است که عامل بيز و BIC داراي اين مشکل نيستند. خاصيت نامناسب ذکر شده براي محک AIC[3]، استفاده کنندگان از اين محک را محدود کرده است بطوريکه همکنون در اکثر نرم افزارهاي آماري ، محک AIC و BIC هر دو با هم گزارش مي شوند.

محک BIC از تقريب لاپلاس لگاريتم عامل بيز ، بطور مجانبي بدست مي آيد و با توجه به اينکه عامل بيز در حجم نمونه ي بالا (و حتي با توزيع پيشين نادرست) مدل صحيح را با احتمال 1 مشخص مي کند براي انتخاب مدل ، محک مناسبتري به نظر مي رسد. استفاده از آزمونهاي نيمن پيرسني نيز مانند محک آکائيک داراي مشکل مشابه هستند زيرا زياد کردن حجم نمونه تاثيري در کم شدن α (احتمال خطاي نوع اول) ندارد . در حقيقت در فلسفه ي نيمن پيرسني ، احتمال خطاي نوع اول قبل از مشاهده ي

---

[1] Akaike

[2] Kullback-Liebler

[3] Akaike Information Criterion

داده ها و محاسبه ي آماره ي آزمون ، تعيين مي گردد و بنابراين ربطي به حجم نمونه ندارد و آزمونهاي سازگار در فلسفه ي نيمن پيرسني ، آزمونهايي اند كه β (احتمال خطاي نوع دوم) با زياد شدن حجم نمونه به صفر ميل كند. اين درحالي است كه در تصميم گيري با عامل بيز، با زياد شدن حجم نمونه ، هر دو نوع خطا به سمت صفر ميل مي كند.شايد به همين دليل است كه آزمونهاي بهينه در كلاس آزمونهاي بيز تعريف مي شوند (آزموني بهينه است كه بتوان توزيع پيشيني پيدا كرد كه تحت آن توزيع پيشين ، آزمون مورد نظر يک آزمون بيز باشد). لازم به ذكر است كه آزمونهاي نيمن پيرسني (فرضيه ي ساده در مقابل فرضيه ي ساده) در كلاس آزمونهاي بيز هستند (مراجعه كنيد به برگر[1] 1989).

4 -2 -1 مروري بر BIC

همانطور كه قبلاً نيز اشاره شده است، بسط تيلور مجانبي لگاريتم عامل بيز BIC است (مراجعه كنيد به شوارز[2] 1978). اكنون تلاش مي كنيم تعبيري ساده و شهودي از آنچه در شوارز 1978 اشاره شده است نشان دهيم.

همانطور كه در مورد عامل بيز گفته شد :

$$\log(B_{12}) = \log(f(M_1 \mid \mathbf{y})) - \log(f(M_2 \mid \mathbf{y})) \quad (7\ 4)$$

اكنون بسط تيلور $\log(f(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_i))$ را حول مقدار $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ (كه $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ ماكزيمم كننده ي نسبي و مطلق تابع $\log(f(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_i))$ يعني برآوردگر درستنمايي ماكزيمم است) مي نويسيم :

$$\log(f(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_i)) = \log(f(\mathbf{y} \mid M_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) + \left.\frac{\partial \log(f(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}_i}\right|_{\boldsymbol{\theta}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i} (\boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)$$
$$+ \frac{1}{2} \times (\boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)' \left.\frac{\partial^2 \log(f(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_i'}\right|_{\boldsymbol{\theta}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i} (\boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \quad (8\ 4)$$

---

[1] Berger

[2] Schwarz

بنابر فرض :

$$\left.\frac{\partial \log\left(f\left(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}}\right|_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}} = 0 \quad (9\text{-}4)$$

پس عبارت (8-4) به با بکارگيري :

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i} \mid \mathbf{y}\right) = -\left.\frac{\partial^2 \log\left(f\left(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \boldsymbol{\theta}'_\mathbf{i}}\right|_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}} \quad (10\text{-}4)$$

كه **I** ماتريس اطلاع فيشر پارامترها است و بنابراين عبارت (8-4) به صورت زير ساده مي شود:

$$\log\left(f\left(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\right)\right) \cong \log\left(f\left(\mathbf{y} \mid M_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right)' \left.\frac{\partial^2 \log\left(f\left(\mathbf{y} \mid M_i, \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \boldsymbol{\theta}'_\mathbf{i}}\right|_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}} \left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right) \quad (11\text{-}4)$$

بنابراين :

$$f\left(\mathbf{y} \mid M_i\right) \cong \int f\left(\mathbf{y} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}, M_i\right) f\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \mid M_i\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right)' \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i} \mid \mathbf{y}\right)\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right)\right) d\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \quad (12\text{-}4)$$

اكنون در توزيع پيشين را نرمال p_i متغيره فرض مي كنيم كه p_i بعد $\boldsymbol{\theta}_i$ تحت مدل M_i است. بنابراين

$$f\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \mid M_i\right) = N_{p_i}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}, \mathbf{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \mid y_1\right)\right) \quad (13\text{-}4)$$

كه $\mathbf{I}\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \mid y_1\right)$ اطلاع فيشر با 1 نمونه است (نوعي توزيع پيشين كم اطلاع براي پارامترها در نظر گرفته شده است) . اكنون به جاي $\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}$ برآوردگر درستنمايي آن را قرار مي دهيم :

$$f\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i} \mid M_i\right) = (2\pi)^{-\frac{p_i}{2}} \left|\mathbf{I}\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \mid y_1\right)\right|^{\frac{1}{2}} \quad (14\text{-}4)$$

تا انتگرال (12-4) از لحاظ تحليلي قابل محاسبه باشد، از طرفي زماني كه حجم نمونه بالا مي رود ، نقش توزيع پيشين در استنباط كم رنگ تر مي شود و بنابراين قرار دادن تابع ثابت به جاي توزيع پيشين، استنباط يكساني بطور مجانبي نتيجه خواهد داد :

$$f\left(\mathbf{y} \mid M_i\right) \cong f\left(\mathbf{y} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}, M_i\right) f\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i} \mid M_i\right) \int \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right)' \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i} \mid \mathbf{y}\right)\left(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{i}\right)\right) d\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} \quad (15\text{-}4)$$

انتگرال (15-4) یک انتگرال گاوسي است با فرض اینکه مشاهدات از هم مستقلند ، $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}} | \mathbf{y}) = n\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}} | y_1)$ که n بعد بردار $\mathbf{y}$ است و بنابراین :

$$f(\mathbf{y} | M_i) \cong f(\mathbf{y} | \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}}, M_i)(2\pi)^{-\frac{p_i}{2}} \left|\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}} | y_1)\right|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{p_i}{2}} \left|\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}} | \mathbf{y})\right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= f(\mathbf{y} | \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}}, M_i)(2\pi)^{-\frac{p_i}{2}} \left|\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}} | y_1)\right|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{p_i}{2}} \left(n^{p_i} \left|\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}} | y_1)\right|\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (16\ 4)$$

$$= f(\mathbf{y} | \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}}, M_i) n^{-\frac{p_i}{2}}$$

.

بنابراین خواهیم داشت :

$$-2\log(f(\mathbf{y} | M_i)) \cong -2\log\left(f(y | \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{i}}, M_i)\right) + p_i \log(n) \qquad (17\ 4)$$

عبارت (17-4) به محک BIC_i (محک BIC براي مدل i ام) معروف است. مانند محک آکائیک ، مدلي بهتر است که BIC کمتري داشته باشد.

بنابراین :

$$2\log(B_{12}) = 2\log\left(\frac{f(y | \boldsymbol{\theta}_1, M_1)}{f(y | \boldsymbol{\theta}_2, M_2)}\right) - (p_1 - p_2)\log(n) \qquad (18\ 4)$$

4-2-2 AIC یا BIC ؟

با توجه به اینکه محک AIC از روش کاملاً متفاوتي به صورت

$$AIC_i = -2\log(lik) + 2p_i \qquad (19\ 4)$$

بدست آمده است ولي هر دو روش تابع درستنمایي را با تعداد پارامترها جریمه مي کنند. در یک مدل ثابت، هر چه پارامترها بیشتر باشند ، تابع درستنمایي افزایش مي یابد ولي AIC و BIC اینطور نیستند و به بیان ساده تر در دو مدل با درستنمایي هاي برابر ، مدلي ترجیح داده مي شود که پارامترهاي کمتري داشته باشد در محک BIC ، جریمه ي انتخاب مدل پیچیده تر با افزایش حجم نمونه ، افزایش مي یابد که محکي منطقي تر به نظر مي رسد.

شاید بتوان اینطور برداشت کرد که مي توان به جاي استفاده از این گونه محکها، به کمک آزمون درستنمایي یکي از دو مدل را انتخاب کرد مثلاً

آزمون کرد که آيا مدل M_1 با مدل M_2 تفاوت معني داري دارد يا خير ، اگر دو مدل تفاوت معني داري نداشتند ، مدلي انتخاب شود که پارامترهاي کمتري داشته باشد. محدوديت استفاده از آزمونهاي درستنمايي (و مخصوصاً مجانبي) همانطور که قبلاً نيز اشاره گرديد شرايط استفاده از آماره ي ويلکس[1] است به علاوه آزمون درستنمايي تنها در شرايطي قابل انجام است که مدلهاي تو در تو باشند به اين معنا که $\boldsymbol{\theta}|M_1 \subset \boldsymbol{\theta}|M_2$ مانند حضور يا عدم حضور يک متغير توضيحي در رگرسيون. يکي از مزاياي مهم استفاده از AIC و BIC اين است که حتي در مدلهاي غير تو در تو نيز قابل استفاده هستند مانند مدل پواسني با مدل دو جمله اي منفي. شيباتا[2] 1976 و کاتز[3] 1981 نشان دادند حتي بطور مجانبي نيز محک AIC بُعد مدل[4] را بيش برآورد مي کند (برابري AIC با آزمون نسبت درستنمايي نيز اين موضوع را به صورت شهودي نشان مي دهد). يک تصحيح مناسب AIC در آکائيك[5] 1981 با ديدگاه بيزي انجام گرفته است که طي آن نشان داده شده است انتخاب مدل با AIC و عامل بيز بطور مجانبي يکسان است و از طرفي چون داريم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\log\left(B_{12}\right)-2\log BIC}{\log\left(B_{12}\right)}=0 \quad (2\theta\ 4)$$

که در Kass and Raftery (1995) به آن اشاره شده است. انتظار مي رود که BIC تحت شرايطي با AIC معادل باشد که البته اين شرايط معمولاً وجود ندارد. در حقيقت برابري انتخاب مدل با استفاده از AIC با عامل بيز بطور مجانبي تنها زماني اتفاق مي افتد که اطلاع موجود در توزيع پيشين همسطح با تابع درستنمايي باشد که معمولاً در عمل کم اتفاق مي

---

[1] Wilks

[2] Shibata

[3] Katz

[4] Model Dimension

[5] Akaike

افتد، به بیان دیگر معمولاً اطلاع توزیع پیشین کمتر از آن چیزي است که از تابع درستنمایي (داده ها) بدست مي آید. آکائیك 1977 تصحیح دیگري از محک AIC ارائه مي دهد که در مدلهاي خطي نرمال به طور مجانبي مدل صحیح را انتخاب مي کند، این محک بطور مجانبي با BIC معادل است.
لینهارت و زوکچیني[1] 1986 تعمیم محک آکائیك 1973 را براي کلاسي از فاصله ها از جمله کولبك لایبلر[2] محاسبه کردند و نشان دادند با تعویض تعریف فاصله مي توان ضریب 2 را در (4–19) به 4 نیز تغییر داد.
نتیجه گیري انتهایي این است که محک AIC تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$AIC_i = -2\log(lik) + kp_i \qquad k > 0 \quad (21\text{–}4)$$

این محك، لزوماً مدل مناسب را (حتي به طور مجانبي) انتخاب نمیکند ولي BIC از این لحاظ قابل اعتماد است. با این حال فیندلي[3] 1991 شرایطي را پیدا کرده است که AIC بر خلاف BIC مدل را به طور مجانبي صحیح انتخاب مي کند، بدیهي است که تحت شرایط فیندلي 1991، شرایط شوارز[4] 1978 براي تقریب تیلور لگاریتم عامل بیز، برقرار نیست.
اشاره به این نکته ضروري است که در رگرسیون، استفاده از محک MSE براي انتخاب مدل معادل استفاده از محک آکائیک تعمیم یافته (4–21) با $k = 1$ است. این نکته جالب توجه است که محک مالو یا C_p براي انتخاب مدل در رگرسیون نیز با همین استدلال، معادل محک آکائیک است. بسط تیلور مرتبه ي 1 اعتبار سنجي متقابل[5] نیز معادل روش

---

[1] Linhart and Zucchini

[2] Kullback-Leibler

[3] Findly

[4] Schwarz

[5] Cross Validation

محک مالو [1] C_p است مراجعه کنيد به افرن و تيبشيراني[2] (1993).

4 -3 استفاده از عامل بيز و BIC در مدلهاي آميخته

همانطور که از ابتداي اين فصل نيز مشخص است استفاده از عامل بيز و BIC با ديدگاه هاي بيزي بوجود آمده اند حال آنکه مدلهاي آميخته به نظر مي رسد در فلسفه ي درستنمايي بررسي مي شوند آناليز واريانس براي آزمون وجود و يا عدم وجود اثرات تصادفي در مدل نمونه ي بارز اين تفکر است.

لازم است بتوان مشابهت نزديکي بين ديدگاه مدلبندي آميخته و ديدگاه بيزي برقرار کرد. براي ايجاد کردن اين مشابهت لازم است ديدگاه مدلبندي بيزي تجربي مزدوج را مرور کنيم.

در مدلهاي بيز تجربي، ابتدا مدل به شرط پارامترها نوشته مي شود و سپس از تابع توزيع حاشيه اي داده ها براي برآورد پارامترهاي توزيع پيشين استفاده مي شود.

عامل بيز نيز که نسبت پسين مدلها پس از مشاهده ي داده ها است براي انتخاب مدل ، استفاده مي شود.

در مدل مزدوج ابتدا مدل و تابع درستنمايي براي $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ نوشته شد، سپس توزيع مناسبي (مانند بتا) براي پارامترها ($\boldsymbol{\theta}$) فرض شد و پارامترهاي توزيع پيشين فرض شده توسط تابع درستنمايي حاشيه اي زير محاسبه مي شود

$$L(\boldsymbol{\omega}) = f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\omega}) = \int f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\theta} \quad (22\text{-}4)$$

در مدلهاي آميخته تفاوت اساسي ، در نحوه ي وارد کردن توزيع پيشين است به علاوه براي بعضي از پارامترها (مانند پارامترهاي ثابت) توزيع پيشين

[1] Mallow's C_p

[2] Efron and Tibshirani

فرض نمي شود. به اين ديدگاه گاهي از اوقات ديدگاه نيمه بيزي [1] اطلاق مي شود. با فرض توزيع پيشين براي تمامي پارامترها (از جمله پارامترهاي ثابت) مي توان ديدگاه نيمه بيزي را بر ديدگاه تمام بيزي منطبق كرد.

در مدلهاي آميخته ابتدا مدل و تابع درستنمايي براي $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2)$ نوشته مي شود كه $\boldsymbol{\theta}_1$ اثرات تصادفي و $\boldsymbol{\theta}_2$ اثرات ثابت هستند. سپس توزيع پيشين (معمولاً نرمال) براي اثرات تصادفي فرض مي گردد و در انتها با توجه به ساختار وابستگي مشاهدات، تابع درستنمايي حاشيه اي داده ها بدست مي آيد:

$$L(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}_1)= f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}_2)=\int f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2)f(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\theta}_1 \quad (23\text{-}4)$$

برآورد اثرات ثابت و پارامترهاي توزيع پيشين $(\boldsymbol{\omega})$ (در مسئله ي ما ، مؤلفه هاي واريانس) از ماكزيمم كردن تابع (4-23) بدست مي آيد. بنابراين تك تك اثرات تصادفي در اين ديدگاه خود يک پارامتر هستند و تعداد پارامترها در BIC با اين ديدگاه ، تعداد سطوح عوامل تصادفي موجود در مدل است.

استفاده از BIC و مدل مزدوج از اين ديدگاه نيز مناسب به نظر نمي رسد زيرا براي بدست آوردن تابع درستنمايي حاشيه اي ، مشاهدات از هم مستقل فرض شده اند كه در مسئله ي تحليل سيستمهاي اندازه گيري نامناسب ، لزوماً اينطور نيست.

بنابراين عامل بيز (نيمه بيز) براي آزمون R&R در مدل اثرات تصادفي به صورت زير محاسبه مي شود. اگر فرض كنيم تحت مدل 1 سيستم اندازه گيري R&R است و تحت مدل 2 اينطور نيست ، در مدل 2 ، اثرات تصادفي وجود ندارند و بنابراين

$$B_{12}=\frac{Sup_{\boldsymbol{\theta}_2}\left(f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_2,M_1)\right)}{Sup_{\boldsymbol{\theta}_2,\boldsymbol{\omega}}\left(f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_2,\boldsymbol{\omega},M_2)\right)} \quad (24\text{-}4)$$

البته اين آزمون زماني قابل انجام است كه هيچكدام از مؤلفه هاي واريانس $(\boldsymbol{\omega})$، صفر برآورد

---

[1] Semi Bayesian Approach

نشده باشند.

فصل 5
پياده سازي مدلهاي مختلف
بر روي داده ها

5 -1 مقدمه

طي دو فصل اول روش راهنما و روش تعييني مورد بحث قرار گرفت و در 2 - 3 - 3 بر روي داده هاي گزارش شده در راهنما ، پياده شد .

در اين فصل با استفاده از همان داده ها و همچنين مطالب گفته شده، مدلهاي مختلف را بر روي داده ها برازش مي دهيم و نتايج را با هم مقايسه مي كنيم.

5 -2 مدل مزدوج

جدول داده ها براي برازش مدل مزدوج به صورت زير است :

OPER * REP Crosstabulation

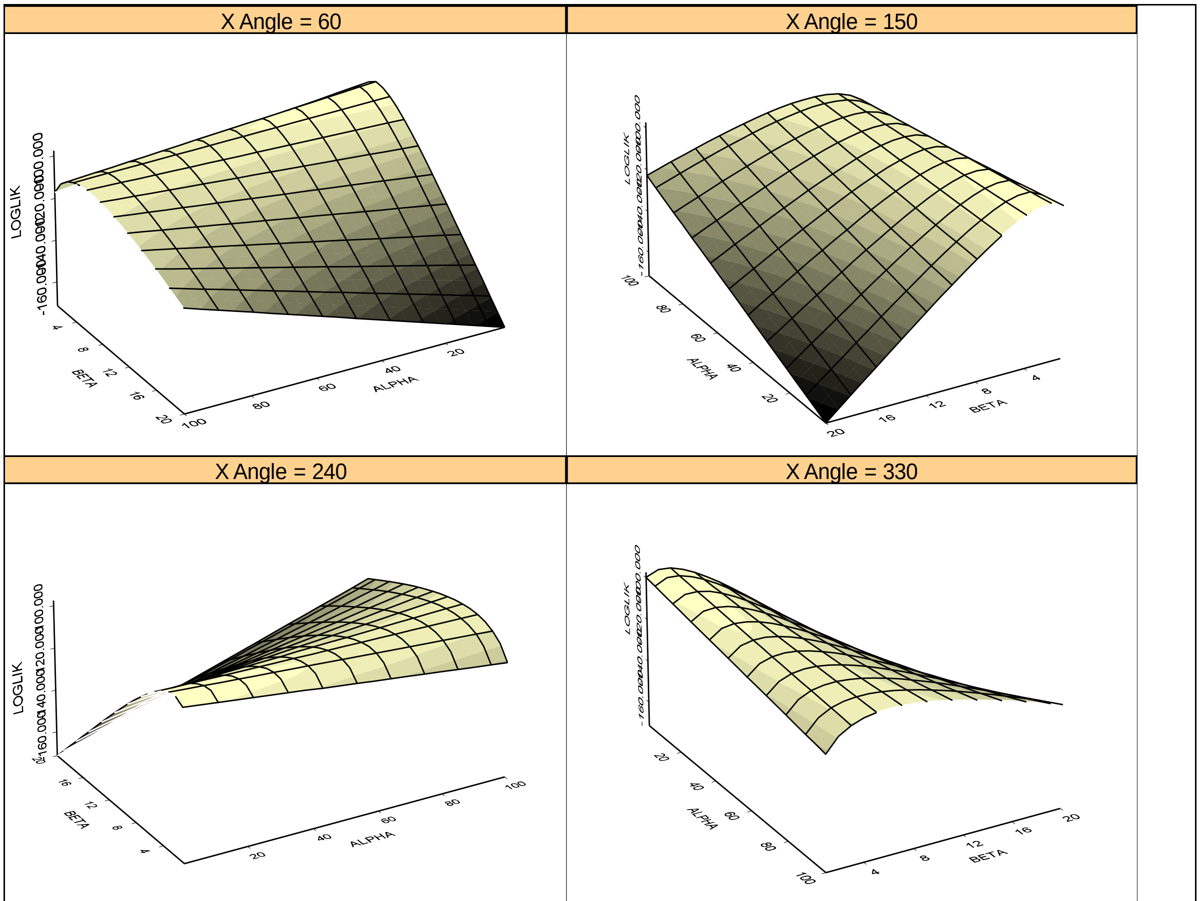
Count

		REP			
		1	2	3	Total
OPER	1	50	48	44	142
	2	50	48	47	145
	3	48	43	44	135
Total		148	139	135	422

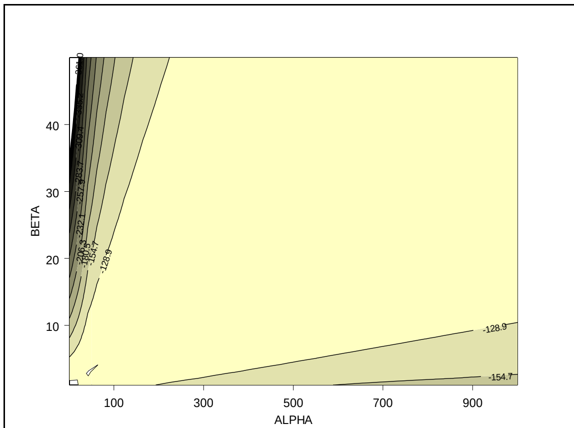
جدول 1.11: جدول متقاطع تعداد تصميم گيري هاي درست به تفكيك بازرس و تكرار

برازش مدل مزدوج ، به روش بيز تجربي (ماكزيمم سازي عددي) برآوردهاي پارامترهاي توزيع پيشين $\alpha = 28.90$ و $\beta = 1.91$ بدست آمده است، اين در حالي است كه روش گشتاوري $\alpha = 41.20$ و $\beta = 2.73$ محاسبه شده

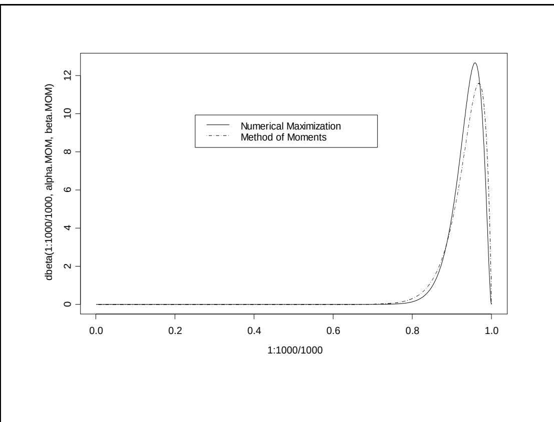
است:



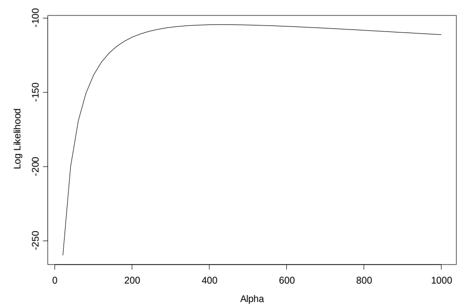
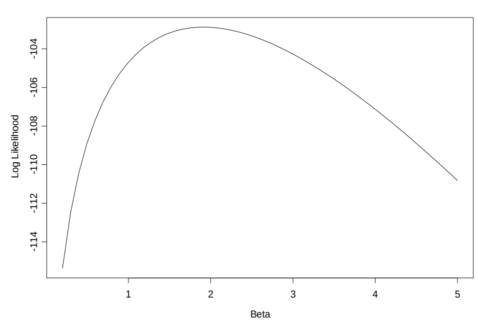
نمودار (5 1) رویه ي تابع درستنمایي حاشیه اي بر حسب α و β .



نمودار (5 3) نمودار کانتور لگاریتم



نمودار (5 2) نمودارهاي توزیعهاي

پیشین بدست آمده از دو روش ماکزیمم سازي عددي و گشتاوري	درستنمايي حاشيه اي بر حسب پارامترهاي توزيع پيشين
	
نمودار (5 4) تصوير لگاريتم درستنمايي در فضاي يک بعدي	نمودار (5 5) تصوير لگاريتم درستنمايي در فضاي يک بعدي

نمودار (5-3) نشان مي دهد برآوردهاي روش گشتاوري ، از روش ماکزيمم سازي عددي چندان دور نيست.در نمودار (5-4) و نمودار (5-5) يکي از پارامترها (به ازاي مقدار ماکزيمم شده ي عددي) ثابت شده است و تنها يکي از پارامترها تغيير يافته است.

نمودارهاي اخير جهت تاييدي بر استفاده از هر دو روش ماکزيمم سازي عددي و روش گشتاوري ارائه شده است.

اکنون عامل بيز بر اساس توزيعهاي پيشين بدست آمده از دو روش بيز تجربي و پيشين هاي بي اطلاع جفريز و لاپلاس را محاسبه مي کنيم:

عامل بيز براي R&R بودن سيستم اندازه گيري در (3-29) اشاره شده است.

توزيع پيشين	(α,β)	$\log(B_{12})$
لاپلاس	$(1,1)$	9.76
جفريز	$(0.5,0.5)$	-3.38
بيز تجربي با ماکزيمم سازي عددي	$(28.90,1.91)$	48.54
بيز تجربي به روش گشتاوري	$(41.20,2.73)$	74.92

به جز توزیع پیشین جفریز باقي توزیعهاي پیشین تایید مي كنند سیستم اندازه گیري R&R است و هر دو روش بیز تجربي با ماكزیمم سازي عددي و روش گشتاوري مدرك قوي علیه مدل M_2 ارائه مي دهند.

محاسبه ي عامل بیز براي آزمون تاثیر پذیري در جدول زیر گزارش شده است :

توزیع پیشین	(α,β)	$\log(B_{12})$
لاپلاس	$(1,1)$	36.78
بیز تجربي با ماكزیمم سازي عددي	$(28.90,1.91)$	40.19
بیز تجربي به روش گشتاوري	$(41.20,2.73)$	41.20

كه در هر سه مدرك قوي علیه فرضیه ي H_1 وجود دارد.

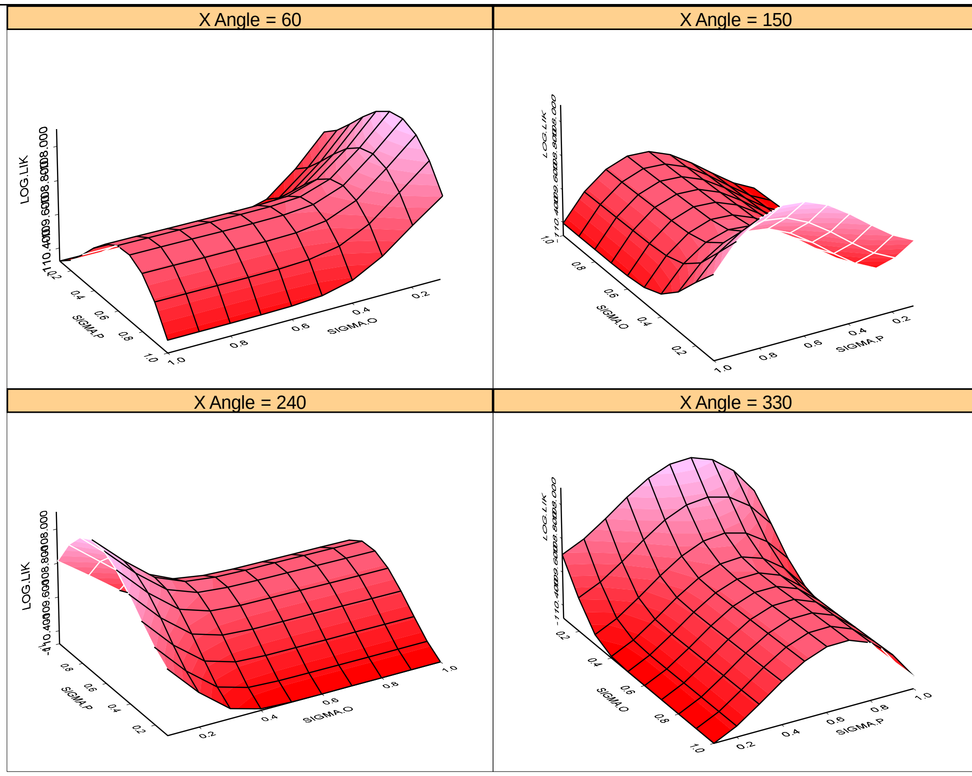
بنابراین سیستم اندازه گیري مناسب ارزیابي مي شود كه نتایج بدست آمده در روش تعییني را نیز تایید مي كند.

5 -3 مدلبندي با اثرات تصادفي

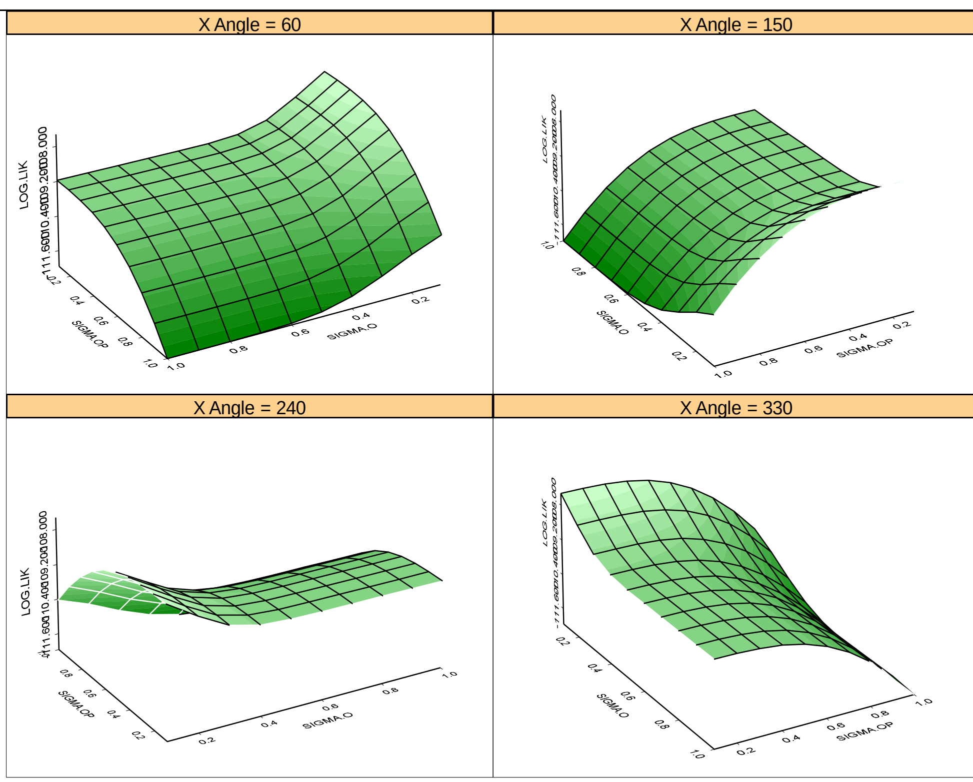
5 -3 -1 مدلبندي اندازه گیري

تابع درستنمایي حاشیه اي براي مدل بدست آمده در 3 - 4 - 1 براي داده هاي راهنماي MSA داراي 3 پارامتر σ_O ، σ_P ، σ_{OP} و μ است كه رسم آن در حالت كلي ممكن نیست ، تنها تصویر آن را به ازاي مقادیر ثابت شده مي توان در فضاي 3 بعدي و 2 بعدي رسم كرد..

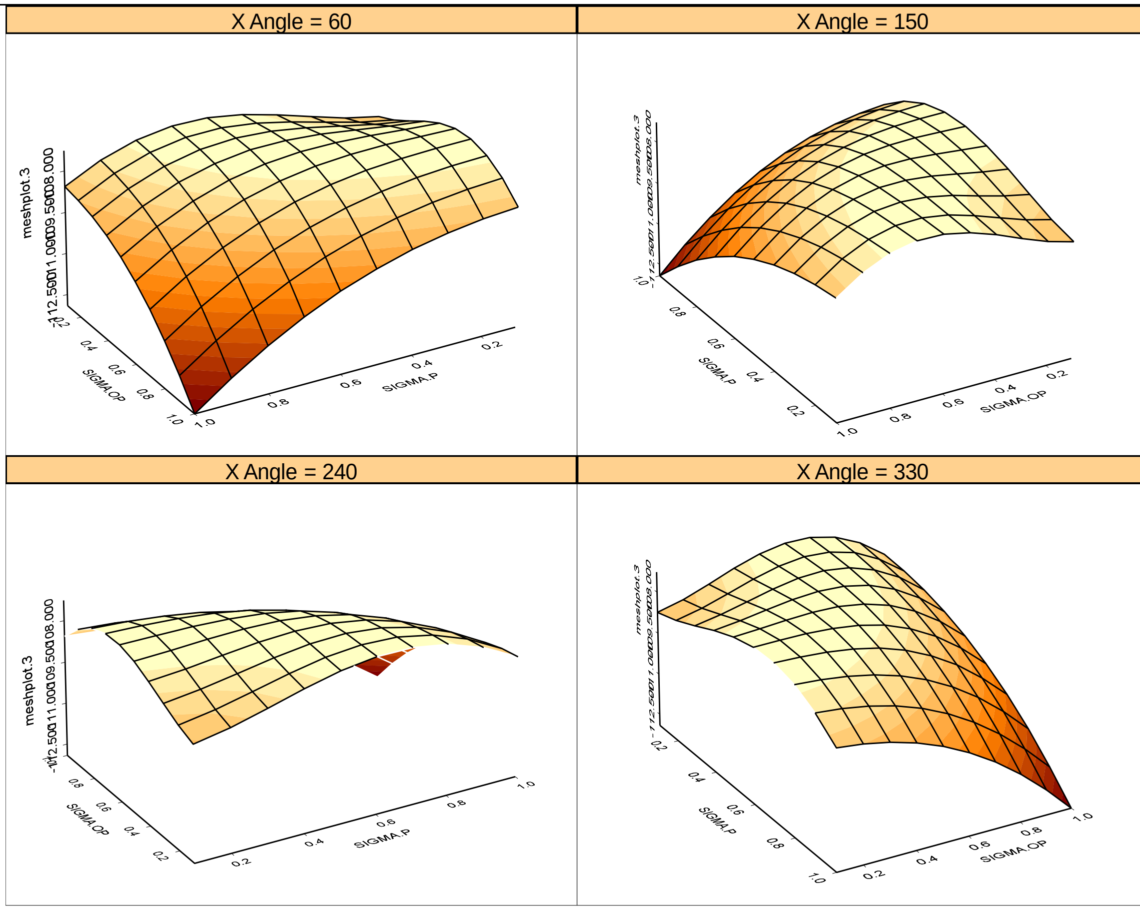
تعداد گره هاي گاوس هرمیت براي تقریب هر انتگرال	$-\log(lik)$ به ازاي مقادیر ماكزیمم بدست آمده
2	107.08
3	107.28
4	107.27
5	107.27



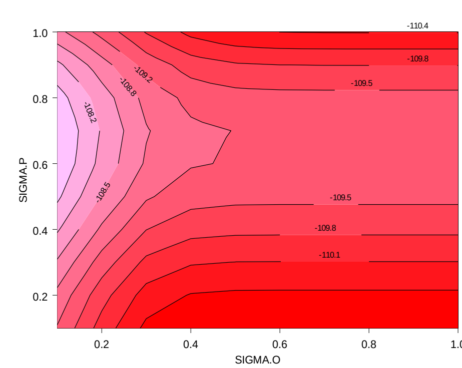
نمودار (6 5) تصوير لگاريتم درستنمايي حاشيه اي بر روي فضاي $\left(\sigma_O,\sigma_P\right)$



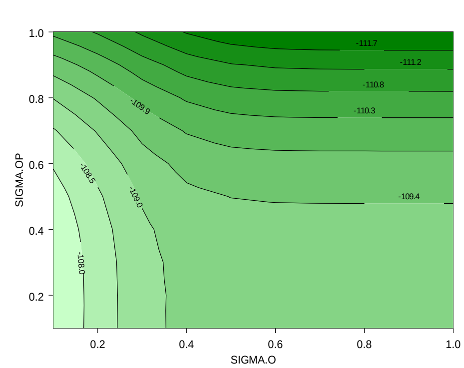
نمودار (5 7) تصوير لگاريتم درستنمايي حاشيه اي بر روي فضاي $\left(\sigma_O,\sigma_{OP}\right)$



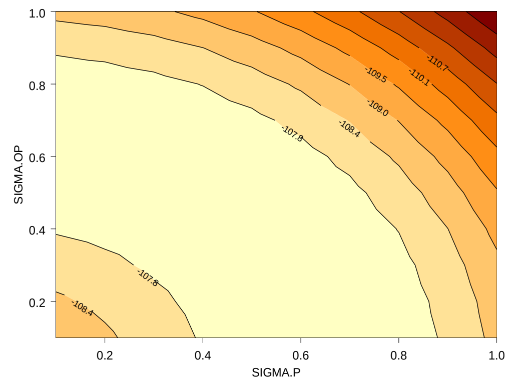
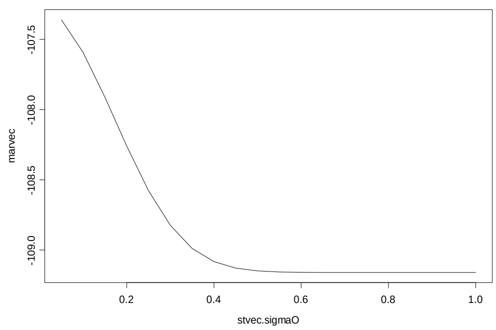
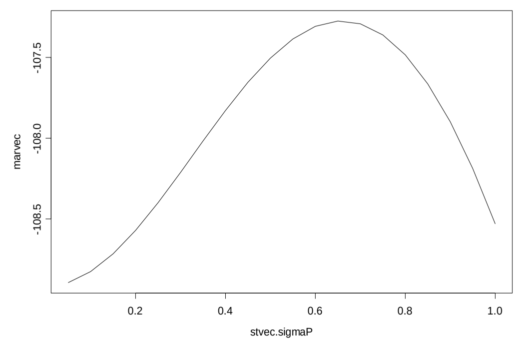
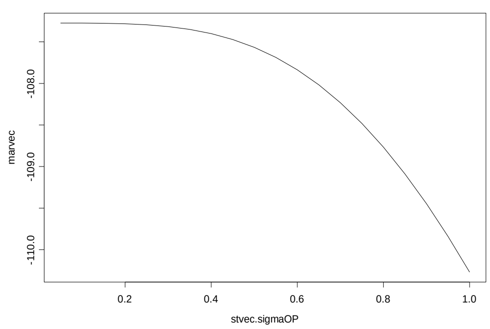
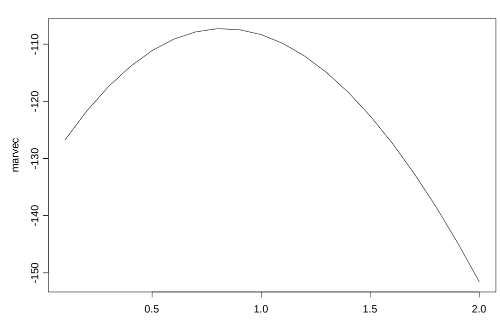
نمودار (5 8) تصوير لگاريتم درستنمايي حاشيه اي بر روي فضاي $\left(\sigma_P,\sigma_{OP}\right)$



نمودار (5 9) تصوير لگاريتم درستنمايي حاشيه



نمودار (5 10) تصوير لگاريتم درستنمايي

اي بر روي فضاي (σ_O,σ_P)	حاشيه اي بر روي فضاي (σ_O,σ_{OP})
	
نمودار (5 11) تصوير لگاريتم درستنمايي حاشيه اي بر روي فضاي (σ_P,σ_{OP})	نمودار (5 12) تصوير تابع درستنمايي حاشيه اي بر محور σ_O
	
نمودار (5 13) تصوير تابع درستنمايي حاشيه اي بر محور σ_P	نمودار (5 14) تصوير تابع درستنمايي حاشيه اي بر محور σ_{OP}
	
نمودار (5 15) تصوير	

تابع درستنمايي حاشيه اي بر محور μ

برآوردهاي بدست آمده حاصل از ماكزيمم سازي تابع درستنمايي حاشيه اي $\hat{\mu}=0.83$ ، $\sigma_O=0$ ، $\sigma_P=0.65$ و $\sigma_{OP}=0$ گزارش شده است كه تاييد مي كند سيستم اندازه گيري ، R&R است ، محک R&R بدست آمده از اين مدل $RR_2=1$ بدست مي آيد.

5 -3 -2 مدلبندي تاثير پذيري

تابع درستنمايي بدست آمده در 3 - 4 - 2 بر داده هاي راهنماي MSA محاسبه شده است و در زير تاثير انتخاب تعداد گره هاي گاوس هرميت را مشاهده مي كنيد:

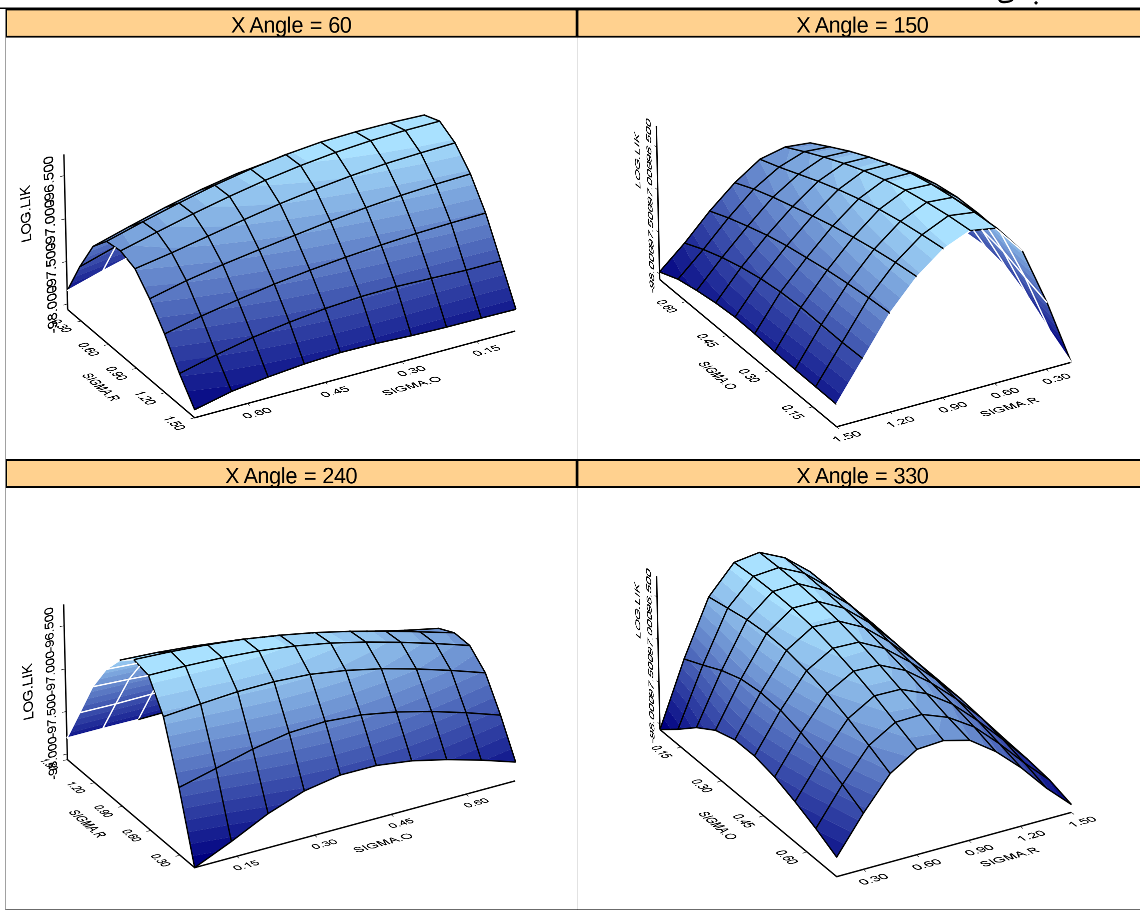
تعداد گره هاي گاوس هرميت براي تقريب هر انتگرال	$-\log(lik)$ به ازاي مقادير ماكزيمم بدست آمده
2	95.63
3	96.34
4	95.96
5	96.05
10	96.24
15	99.88
20	96.24

به نظر مي رسد ، زياد كردن تعداد گره ها تاثير به سزايي در ماكزيمم سازي عددي لگاريتم تابع درستنمايي ندارد . يكي از دليل مهم اين موضوع مي تواند به اين دليل باشد كه با توجه به اينكه پارامتر ثابت تقريبا $\mu<3$ است و نيز انتظار داريم مؤلفه هاي واريانس نزديک به صفر باشند متغيرهايي كه روي آنها انتگرال مي گيريم حدوداً در دامنه ي حدوداً $(-3,3)$ ، قرار مي گيرند كه تربيع گاوس هرميتي بيش از 3 نقطه براي آنها معمولاً تقريب مناسبي را نتيجه مي دهد.

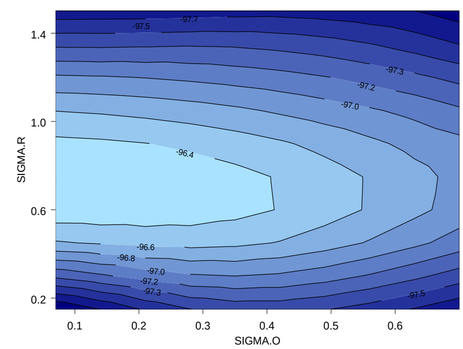
در هر حال در برآورد پارامترها و ادامه ي مطالب ، تابع درستنمايي هر انتگرال با 20 گره تقريب

زده شده است.پس از ماکزیمم سازي عددي لگاريتم تابع درستنمايي مقادير $\mu = 2.91$ ، $\sigma_O = 1.43\times10^{-6}$ و $\sigma_R = 0.71$ ماکزيمم کننده ي لگاريتم تابع درستنمايي اند .

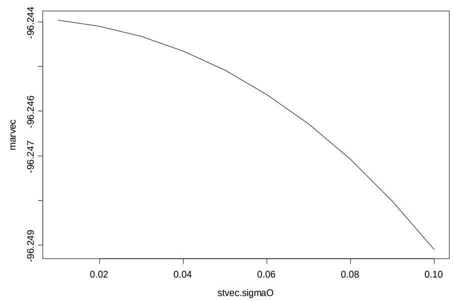
تصوير تابع درستنمايي روي فضاي مؤلفه هاي واريانس (σ_O,σ_R) نشان مي دهد ، ماکزيمم سازي عددي قابل اعتماد است.



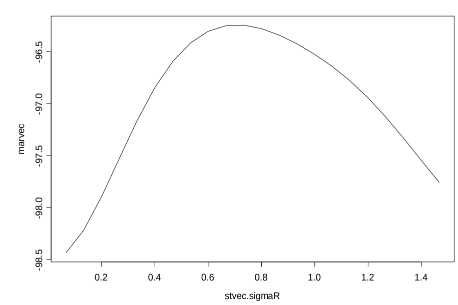
نمودار (5 16) تصوير تابع درستنمايي حاشيه اي روي فضاي مؤلفه هاي واريانس



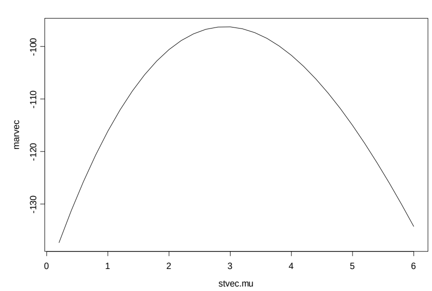
نمودار (5 17) نمودار کانتور تصویر تابع درستنمایي حاشیه اي بر روي فضاي مؤلفه هاي واریانس



نمودار (5 18) تصویر تابع درستنمایي حاشیه اي به ازاي تغییر پارامتر σ_O



نمودار (5 19) تصویر تابع درستنمایي حاشیه اي به ازاي تغییر پارامتر σ_R



نمودار (5 20) تصویر تابع درستنمایي حاشیه اي به ازاي تغییر پارامتر μ

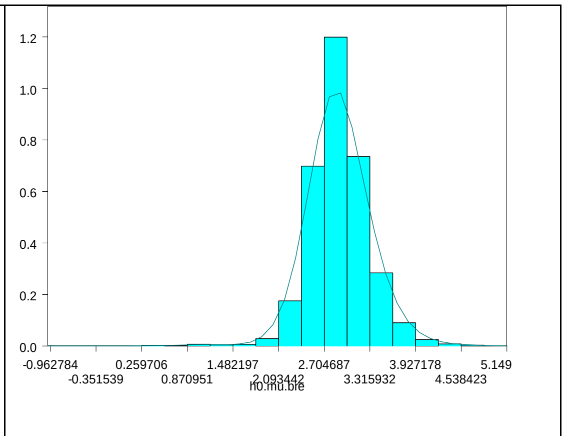
نمودارهاي (11-16) تا (11-20) همگي تایید مي کنند ، پارامتر ثابت و مؤلفه هاي واریانس بدست آمده از ماکزیمم سازي عددي ، قابل اعتمادند.
P - مقدار تجربي با 10.000 تکرار بوت استرپ و 10 گره گاوس هرمیت پس از 10 ساعت زمان ، عدد 0.1952 را گزارش مي دهد که کماکان نشان مي دهد آزمون فرضیه ي نیمن پیرسني R&R بودن سیستم اندازه گیري رد نمي شود.
عامل نیمه بیز که در (4-24) به آن اشاره شده است به صورت زیر قابل محاسبه است :

$$B_{12}=\frac{Sup_{\boldsymbol{\theta}_2}\left(f\left(\mathbf{y}\mid\boldsymbol{\theta}_2,M_1\right)\right)}{Sup_{\boldsymbol{\theta}_2,\boldsymbol{\omega}}\left(f\left(\mathbf{y}\mid\boldsymbol{\theta}_2,\boldsymbol{\omega},M_2\right)\right)}\qquad (1\ 5)$$

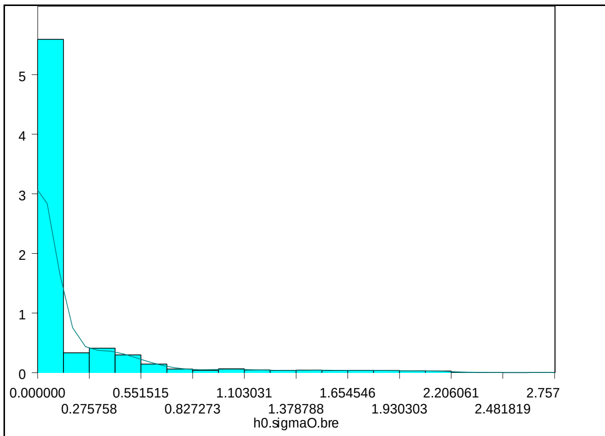
$$\begin{aligned}\log B_{12}&=Sup_{\mu}\log\left(f\left(\mathbf{y}\mid\boldsymbol{\theta}_2,M_1\right)\right)-Sup_{\mu}\log\left(f\left(\mathbf{y}\mid\boldsymbol{\theta}_2,\boldsymbol{\omega},M_2\right)\right)\\ &=Sup_{p}\log\left(\prod_{i=1}^{n_O}\prod_{j=1}^{n_R}\prod_{k=1}^{n_P}p^{y_{ijk}}\left(1-p\right)^{1-y_{ijk}}\right)\qquad (2\ 5)\\ &-Sup_{\mu}\log\left(\prod_{i=1}^{n_O}\int\prod_{j=1}^{n_R}\int\frac{\exp\left[\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)y_{ij.}\right]}{\left(1+\exp\left[\left(\mu+O_i+R_{ij}\right)y_{ij.}\right]\right)^{n_P}}dF_{R_{ij}}\,dF_{O_i}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cong Sup_{p}\sum_{i=1}^{n_O}\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{k=1}^{n_P}\left[y_{ijk}\log\left(\frac{p}{1-p}\right)+\log\left(1-p\right)\right]\\ &-Sup_{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n_O}\log\left\{\sum_{v=1}^{nqn_O}w_O^0(v)\prod_{j=1}^{n_R}\sum_{u=1}^{nqn_R}w_R^0(u)\frac{\exp\left[\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O^0(v)+\sqrt{2}\sigma_R R^0(u)\right)y_{ij.}\right]}{\left(1+\exp\left[\left(\mu+\sqrt{2}\sigma_O O^0(v)+\sqrt{2}\sigma_R R^0(u)\right)y_{ij.}\right]\right)^{n_P}}\right\}\right)\qquad (3\ 5)\\ &+\frac{\left(n_O+n_R\right)}{2}\log\left(\pi\right)\end{aligned}$$

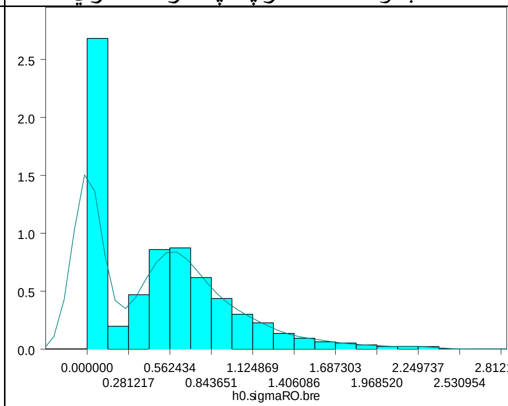
پس از محاسبه ي مقدار فوق براي داده ها ، عدد $\log\left(B_{12}\right)=-5.18$: است. محک R&R بدست آمده از اين مدل ، 0.82 بدست مي آيد.توزيع برآوردگرهاي درستنمايي بدست آمده به كمك روش بوت استرپ در زير آمده است:



نمودار (5 21) : توزيع $\hat{\mu}$ بدست آمده از روش



نمودار (5 22) : توزيع $\hat{\sigma}_O$ بدست آمده از روش بوت

بوت استرپ پارامتري	استرپ پارامتري
	
نمودار (5-23) : توزيع $\hat{\sigma}_R$ بدست آمده از روش بوت استرپ پارامتري	

بازه ي اطمينان 90 درصدي پارامترها از روش بوت استرپ پارامتري به صورت زير بدست آمده است:

بازه ي اطمينان	پارامتر
$(2.47,3.37)$	μ
$(0,0.48)$	σ_O
$(0,1.1)$	σ_R

كه نشان مي دهد سيستم اندازه گيري R&R است و به علاوه از تاثير پذيري لازم نيز برخوردار است.

5 -4 نتيجه گيري

R&R بودن سيستم اندازه گيري در تمامي مدلها تاييد مي شود و تاثير پذيري مناسب سيستم اندازه گيري در مدل مزدوج بالاتر از حد مورد انتظار راهنماي MSA است در نهايت همه ي مدلها تاييد مي كنند سيستم اندازه گيري مطلوب است كه نتايج بدست آمده در روش تعييني را تاييد مي كند.
لازم به ذكر است استفاده از عامل بيز براي تعيين R&R بودن سيستم اندازه گيري در مدل مزدوج و همچنين مدل اثرات تصادفي آشيانه اي داراي اين

خاصيت مهم است كه ((بدون در نظر گرفتن نوع توزيع پيشين فرض شده)) داراي خاصيت سازگاري براي هر دو نوع خطا است . از اين لحاظ استفاده از ديدگاه مدلبندي ، توصيه مي گردد. استفاده از BIC براي تعيين R&R بودن سيستم اندازه گيري استفاده نشده است. زيرا استفاده از توزيع هاي پيشين متفاوت تاثير به سزايي در مقدار بدست آمده در عامل بيز داشته اند و چون BIC تقريب مجانبي لگاريتم عامل بيز با فرض توزيع پيشين نرمال است . تغيير فرم توزيع پيشين از بتا به نرمال چندان منطقي به نظر نمي رسيد مخصوصاً اينكه حجم نمونه آنقدر بالا نبود كه بتوان فرض كرد نوع توزيع پيشين فرض شده تاثير زيادي بر استنباط ندارد ولي بحث هاي لازم در 4 - 2 - 2 شده است كه تاييد مي كند ، استفاده از BIC كماكان خاصيت سازگاري را براي R&R بودن سيستم اندازه گيري ، حفظ مي كند.

5 -4 -1 خلاصه و پيشنهادات

در اين پايان نامه دو ديدگاه نيمن پيرسني ، بيزي و نيمه بيزي براي تعيين سيستم اندازه گيري قابل ، بررسي شدند. تمامي برنامه ها به جز محاسبه ي چند جمله اي هاي هرميت كه در MAPLE نوشته شده بود بلا استثناء در نرم افزار SPLUS تهيه و اجرا شده اند. با توجه به اينكه نرم افزار هاي موجود براي تحليل سيستمهاي اندازه گيري كيفي بسيار محدود است يكي از كارهاي مهم مي تواند تبديل اين برنامه ها به نرم افزاري كاربردي براي استفاده در صنعت باشد. مخصوصاً اينكه روش هاي ابداع شده در اين پايان نامه هم در حجم نمونه ي پايين و هم در حجم نمونه ي بالا بر روش راهنماي MSA برتري دارد. طي شبيه سازي ، دو روش تعييني و راهنماي MSA با هم مقايسه شدند ولي چنين مقايسه اي براي ديدگاه هاي مدلبندي انجام نشده است زيرا سزعت كامپيوتر هاي امروزي هنوز به آن حد نرسيده است كه بتوان اين

ديدگاه ها را با هم مقايسه كرد.
برنامه ي كامپيوتري مقايسه مانند آنچه در 2 - 3 ارائه شد براي ديدگاه هاي مدلبندي نيز نوشته شده است كه طي محاسبات سرانگشتي با كامپيوتر Pentium III 700 MHz با 254MB RAM و سيستم عامل Windows XP قريب به 12 سال طول مي كشد. استفاده از P-مقدار تجربي بطور مشابه مدل آشيانه اي براي مدل با اثرات متقابل 4 ماه به طول مي انجامد و به اين دليل نتايج آن گزارش نشده است.
فتوحي[1] 2003 نشان داده است استفاده از روش تقريب گاوس هرميت اگر توزيع آميخته نرمال نباشد منجر به جوابهاي دور از واقعيت مي گردد. استفاده از روش ماكزيمم درستنمايي ناپارامتري ايتكين[2] 1999 راهگشاي اين مشكل است و براي چك كردن اثرات تصادفي با توزيع نرمال لازم است بتوان $E(O_i|\mathbf{y})$ ، $E(P_j|\mathbf{y})$ ، $E(OP_{ij}|\mathbf{y})$ و $E(R_{ij}|\mathbf{y})$ را محاسبه كرد كه از لحاظ تحليلي غير ممكن است و با استفاده از زنجيرهاي ماركف مونت كارلويي (MCMC) به روش نمونه گيري متروپوليس هستينگس[3] مي توان اين مقادير را بطور تقريبي محاسبه كرد.
در تقريب درستنمايي حاشيه اي در مدل آشيانه اي 9 انتگرال به روش عددي تقريب خورده اند حال آنكه در روش اثرات متقابل 150 انتگرال به صورت عددي محاسبه شده اند و با توجه به تو در تو بودن انتگرالها ، خطاي كل به همراه مشكلات محاسباتي به طور نمايي با تعداد سطوح داده زياد مي شود كه با استفاده از روش MCEM[4] و MCNR[5] كه در مك كولا[6] 1997 ارائه شده اند قابل حل است و برآوردگرهاي درستنمايي دقيق را با تكرارهاي

---

[1] Fotouhi

[2] Aitkin

[3] Metropolis-Hastings

[4] Markov Chain Expectation Maximization

[5] Markov Chain Newton Raphson

[6] McCullagh

مناسب البته با پيچيدگي محاسباتي بيشتر نتيجه مي دهد .در مدل آشيانه اي مي توان با وارد كردن همتغيير[1] اندازه ي واقعي قطعه در مدل ، علاوه بر اريبي ، خطيت و حتي روندهاي بالاتر را در سيستم اندازه گيري كيفي نيز بررسي كرد .

خلاصه اينكه : استفاده از مدلهاي ذكر شده قادر است تمامي خواص بررسي شده براي سيستمهاي اندازه گيري كمي را در سيستمهاي اندازه گيري كيفي، بررسي كند.

---

[1] Covariate

راهنماي موضوعي

Subject Index

راهنماي مؤلفين
Author Index

ضميمه

برنامه هاي كامپيوتري

مقـايـسه ي روش راهنماي MSA بـا روش تـعـيـيـنـي

```
options(object.size=370000000(
manual.rejected.no<-c() ##### vector to create final plot of decision
deter.rejected.no<-c()
p.vec<-c ()
for (iter in 1:19(
}
p<-0.475+iter/40
n.c<-25            #number of correct parts
n.f<-25             #number of failed parts
prob.c<-matrix(c(p،p،p،p،p،p،p،p،p)،ncol=3)#probs of correct decision rows=A1-B1-C1....،
prob.f<-matrix(c(p،p،p،p،p،p،p،p،p)،ncol=3(

################Created for Parameter Summary
pca1<-prob.c[1[
pca2<-prob.c[2[
pca3<-prob.c[3[
pcb1<-prob.c[4[
pcb2<-prob.c[5[
pcb3<-prob.c[6[
pcc1<-prob.c[7[
pcc2<-prob.c[8[
pcc3<-prob.c[9[

pfa1<-prob.f[1[
pfa2<-prob.f[2[
pfa3<-prob.f[3[
pfb1<-prob.f[4[
pfb2<-prob.f[5[
pfb3<-prob.f[6[
pfc1<-prob.f[7[
pfc2<-prob.f[8[
pfc3<-prob.f[9[
################Created for Parameter Summary


prop.ucl.c<-c()
prop.ucl.f<-c()
prop.ucl.g<-c()
r.agr.manual<-0 # Rejection of Operator's Agreement (Manual Approach(
r.agr.deter<-0  # Rejection of Operator's Agreement (Deterministic Approach(
alpha.agr<-0.01
alpha.equal.prop<-0.01
alpha.pc.cap<-0.01
alpha.pf.cap<-0.01
alpha.pg.cap<-0.01

k.m.agr<-0.4
k.m.cap<-0.4
pg.cap<-0.8
pc.cap<-0.8
pf.cap<-0.8

mc.iter<-1000
oper<-3
rep<-3

manual.kappa<-matrix(9،mc.iter،6(
```

```
decision.counter<-matrix(F،mc.iter،9) # True when a decision rejects null hypothosis

guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$1"،NewName = "Kappa.Agr("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$2"،NewName = "Kappa.Cap("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$3"،NewName = "Prop.Eq("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$4"،NewName = "Chisq.Agr("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$5"،NewName = "PropC.Cap("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$6"،NewName = "PropF.Cap("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$7"،NewName = "PropG.Cap("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$8"،NewName = "Manual.Decision("
guiModify( "logical"، Name = "decision.counter$9"،NewName = "Deter.Decision("


pearson.crstb<-matrix(0،3،9(
pearson.statistic<-c()
pearson.pval<-c()
pearson.df<-2*oper*rep

deter.crstb<-array(9،c(mc.iter،3،oper*rep((

guiModify( "double"، Name = "manual.kappa$1"،NewName = "A.B("
guiModify( "double"، Name = "manual.kappa$2"،NewName = "A.C("
guiModify( "double"، Name = "manual.kappa$3"،NewName = "B.C("
guiModify( "double"، Name = "manual.kappa$4"،NewName = "A.REF("
guiModify( "double"، Name = "manual.kappa$5"،NewName = "B.REF("
guiModify( "double"، Name = "manual.kappa$6"،NewName = "C.REF("

oper.decision<-array(9،c(mc.iter،oper،n.c+n.f،rep((


pop<-c()                                                                          #making   the
population
pop[1:n.c]<-0
pop[(n.c+1):(n.c+n.f)]<-1
pop.table<-rep(pop،3) # producing population for REF crosstabs
pc.ucl<-c()
pf.ucl<-c()

for(i in 1:mc.iter(
}
                                                       for(j in 1: oper(
                                                                                   }
                                                                                           for
(k in 1:n.c(
                                           }
                                                        for (l in 1:rep(
                                                                                   }

oper.decision[i،j،k،l]<-rbinom(1،1،1-prob.c[l،j([
                                                                                   {
                                           {
                                                                                   {
                                                       for (j in 1:oper(
                                                                                   }
                                                                                           for
(k in                      )n.c+1):(n.c+n.f((
                                           }
                                                        for (l in 1:rep(
                                                                                   }

oper.decision[i،j،k،l]<-rbinom(1،1،prob.f[l،j([
                                                                                   {
                                           {
                                                                                   {


                                                               table.ab<-
t(table(matrix(oper.decision[i،1،،]،ncol=1)،matrix(oper.decision[i،2،،]،ncol=1(((
                                                               table.ac<-
```

```
t(table(matrix(oper.decision[i.1..].ncol=1).matrix(oper.decision[i.3..].ncol=1(((
                                                            table.bc<-
t(table(matrix(oper.decision[i.2..].ncol=1).matrix(oper.decision[i.3..].ncol=1(((
                                                          table.aref<-
t(table(matrix(oper.decision[i.1..].ncol=1).matrix(pop.table(((
                                                          table.bref<-
t(table(matrix(oper.decision[i.2..].ncol=1).matrix(pop.table(((
                                                          table.cref<-
t(table(matrix(oper.decision[i.3..].ncol=1).matrix(pop.table(((

                                                                  p0<-
(table.ab[1.1]+table.ab[2.2])/length(pop.table(
                                                                  pe<-
((table.ab[1.1]+table.ab[2.1])*(table.ab[1.1]+table.ab[1.2])+(table.ab[1.2]+table.ab[2.2
])*(table.ab[2.1]+table.ab[2.2]))/length(pop.table)^2
،                                           manual.kappa[i 'A.B']<-(p0-pe)/(1-pe(

                                                                  p0<-
(table.ac[1.1]+table.ac[2.2])/length(pop.table(
                                                                  pe<-
((table.ac[1.1]+table.ac[2.1])*(table.ac[1.1]+table.ac[1.2])+(table.ac[1.2]+table.ac[2.2
])*(table.ac[2.1]+table.ac[2.2]))/length(pop.table)^2
،                                           manual.kappa[i 'A.C']<-(p0-pe)/(1-pe(

                                                                  p0<-
(table.bc[1.1]+table.bc[2.2])/length(pop.table(
                                                                  pe<-
((table.bc[1.1]+table.bc[2.1])*(table.bc[1.1]+table.bc[1.2])+(table.bc[1.2]+table.bc[2.2
])*(table.bc[2.1]+table.bc[2.2]))/length(pop.table)^2
،                                           manual.kappa[i 'B.C']<-(p0-pe)/(1-pe(

                                                                  p0<-
(table.aref[1.1]+table.aref[2.2])/length(pop.table(
                                                                  pe<-
((table.aref[1.1]+table.aref[2.1])*(table.aref[1.1]+table.aref[1.2])+(table.aref[1.2]+ta
ble.aref[2.2])*(table.aref[2.1]+table.aref[2.2]))/length(pop.table)^2
،                                           manual.kappa[i 'A.REF']<-(p0-pe)/(1-pe(

                                                                  p0<-
(table.bref[1.1]+table.bref[2.2])/length(pop.table(
                                                                  pe<-
((table.bref[1.1]+table.bref[2.1])*(table.bref[1.1]+table.bref[1.2])+(table.bref[1.2]+ta
ble.bref[2.2])*(table.bref[2.1]+table.bref[2.2]))/length(pop.table)^2
،                                           manual.kappa[i 'B.REF']<-(p0-pe)/(1-pe(

                                                                  p0<-
(table.cref[1.1]+table.cref[2.2])/length(pop.table(
                                                                  pe<-
((table.cref[1.1]+table.cref[2.1])*(table.cref[1.1]+table.cref[1.2])+(table.cref[1.2]+ta
ble.cref[2.2])*(table.cref[2.1]+table.cref[2.2]))/length(pop.table)^2
،                                           manual.kappa[i 'C.REF']<-(p0-pe)/(1-pe(

#                                            this expression counts no. of rejection

،                                           if    ((manual.kappa[i 'A.B']<k.m.agr)    |
(manual.kappa[i،'A.C']<k.m.agr) | (manual.kappa[i،'B.C']<k.m.agr((
                                                                        }

         decision.counter[i،'Kappa.Agr']<-T
                                                                        {
                                                                  else
                                                                        }
                                                                        if
((manual.kappa[i،'A.REF']<k.m.cap)     |     (manual.kappa[i،'B.REF']<k.m.cap)     |
(manual.kappa[i،'C.REF']<k.m.cap((
                                                                              }

         decision.counter[i،'Kappa.Cap']<-T
                                                                              {
                                                                        {

                                                      deter.crstb[i.1.1]<-
table(oper.decision[i.1..1].pop)[1.1] # A1 correct decision on correct parts
                                                      deter.crstb[i.1.2]<-
table(oper.decision[i.1..2].pop)[1.1] # A2 correct decision on correct parts
```

```
deter.crstb[i.1.3]<-table(oper.decision[i.1..3].pop)[1.1] # A3 correct decision on correct parts

deter.crstb[i.1.4]<-table(oper.decision[i.2..1].pop)[1.1] # B1 correct decision on correct parts
deter.crstb[i.1.5]<-table(oper.decision[i.2..2].pop)[1.1] # B2 correct decision on correct parts
deter.crstb[i.1.6]<-table(oper.decision[i.2..3].pop)[1.1] # B3 correct decision on correct parts

deter.crstb[i.1.7]<-table(oper.decision[i.3..1].pop)[1.1] # C1 correct decision on correct parts
deter.crstb[i.1.8]<-table(oper.decision[i.3..2].pop)[1.1] # C2 correct decision on correct parts
deter.crstb[i.1.9]<-table(oper.decision[i.3..3].pop)[1.1] # C3 correct decision on correct parts

deter.crstb[i.2.1]<-table(oper.decision[i.1..1].pop)[2.2] # A1 correct decision on failed parts
deter.crstb[i.2.2]<-table(oper.decision[i.1..2].pop)[2.2] # A2 correct decision on failed parts
deter.crstb[i.2.3]<-table(oper.decision[i.1..3].pop)[2.2] # A3 correct decision on failed parts

deter.crstb[i.2.4]<-table(oper.decision[i.2..1].pop)[2.2] # B1 correct decision on failed parts
deter.crstb[i.2.5]<-table(oper.decision[i.2..2].pop)[2.2] # B2 correct decision on failed parts
deter.crstb[i.2.6]<-table(oper.decision[i.2..3].pop)[2.2] # B3 correct decision on failed parts

deter.crstb[i.2.7]<-table(oper.decision[i.3..1].pop)[2.2] # C1 correct decision on failed parts
deter.crstb[i.2.8]<-table(oper.decision[i.3..2].pop)[2.2] # C2 correct decision on failed parts
deter.crstb[i.2.9]<-table(oper.decision[i.3..3].pop)[2.2] # C3 correct decision on failed parts

deter.crstb[i.3.1]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.1]+deter.crstb[i.2.1]) # A1 failed decision = all parts - corrected recognized
deter.crstb[i.3.2]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.2]+deter.crstb[i.2.2]) # A2 failed decision = all parts - corrected recognized
deter.crstb[i.3.3]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.3]+deter.crstb[i.2.3]) # A3 failed decision = all parts - corrected recognized

deter.crstb[i.3.4]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.4]+deter.crstb[i.2.4]) # B1 failed decision = all parts - corrected recognized
deter.crstb[i.3.5]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.5]+deter.crstb[i.2.5]) # B2 failed decision = all parts - corrected recognized
deter.crstb[i.3.6]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.6]+deter.crstb[i.2.6]) # B3 failed decision = all parts - corrected recognized

deter.crstb[i.3.7]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.7]+deter.crstb[i.2.7]) # C1 failed decision = all parts - corrected recognized
deter.crstb[i.3.8]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.8]+deter.crstb[i.2.8]) # C2 failed decision = all parts - corrected recognized
deter.crstb[i.3.9]<-n.c+n.f-(deter.crstb[i.1.9]+deter.crstb[i.2.9]) # C3 failed decision = all parts - corrected recognized

ec<-sum(deter.crstb[i.1.])/9
ef<-sum(deter.crstb[i.2.])/9
en<-n.c+n.f-(ef+ec(
for (j in 1:9(
}
```

```
pearson.crstb[1،j]<-(deter.crstb[i،1،j]-ec)^2/ec
pearson.crstb[2،j]<-(deter.crstb[i،2،j]-ef)^2/ef
pearson.crstb[3،j]<-(deter.crstb[i،3،j]-en)^2/en
                                                                 {
                                                pearson.statistic[i]<-
sum(pearson.crstb[1،])+sum(pearson.crstb[2،])+sum(pearson.crstb[3([،
                                                  pearson.pval[i]<-1-
pchisq(pearson.statistic[i]،pearson.df(

                                                        pc<-ec/n.c
                                                        pf<-ef/n.f
(                                           pg<-(n.c*pc+n.f*pf)/(n.c+n.f

                                             prop.ucl.c[i]<-pc+qnorm(1-
alpha.pc.cap)*sqrt(pc*(1-pc)/(rep*oper*n.c((
                                             prop.ucl.f[i]<-pf+qnorm(1-
alpha.pf.cap)*sqrt(pf*(1-pf)/(rep*oper*n.f((
                                             prop.ucl.g[i]<-pg+qnorm(1-
alpha.pg.cap)*sqrt(pg*(1-pg)/(rep*oper*(n.c+n.f(((

#                                           equality of pc and pf decision
(((                                         z.statistic<-(pc-pf)/sqrt(pg*(1-
pg)*(1/(rep*oper*n.c)+1/(rep*oper*n.f
                                            z.pval<-(1 - pnorm(abs(z.statistic)))*2

(                                           if (pearson.pval[i]<alpha.agr
                                                                 }
      decision.counter[i،'Chisq.Agr']<-T
                                                                 {
                                                            else
                                                                 }
                                                                       if
(z.pval<alpha.equal.prop) #pc=pf decision
                                            }
،                                           decision.counter[i 'Prop.Eq']<-T
                                                  pc.ucl<-pc+qnorm(1-
alpha.pc.cap)*sqrt(pc*(1-pc)/(rep*oper*n.c((

                                                  pf.ucl<-pf+qnorm(1-
alpha.pf.cap)*sqrt(pf*(1-pf)/(rep*oper*n.f((

                                                   if (pc.ucl<pc.cap(
                                                                 }

      decision.counter[i،'PropC.Cap']<-T

                                                                 {
                                                   if (pf.ucl<pf.cap(
                                                                 }

      decision.counter[i،'PropF.Cap']<-T
                                                                 {
                                            {
                                                                       else
                                            }
                                                  pg.ucl<-pg+qnorm(1-
alpha.pg.cap)*sqrt(pg*(1-pg)/(rep*oper*(n.c+n.f(((
                                                  if (pg.ucl<pg.cap (
                                                                 }

      decision.counter[i،'PropG.Cap']<-T
```

```
{
{
{
if
(decision.counter[i،'Kappa.Agr']|decision.counter[i،'Kappa.Cap'])
decision.counter[i،'Manual.Decision']<-T
، if (sum(decision.counter[i 4:7])!=0)
decision.counter[i،'Deter.Decision']<-T
print(' ')
print(iter(
print(i(
{

#######################Simulation Parameters Summary

par.sum<-matrix(0،2،12(
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$1"،NewName = "MC.Iter("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$2"،NewName = "Part("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$3"،NewName = "S.Size("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$4"،NewName = "A1("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$5"،NewName = "A2("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$6"،NewName = "A3("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$7"،NewName = "B1("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$8"،NewName = "B2("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$9"،NewName = "B3("
، guiModify( "double" Name =
"par.sum$10"،NewName = "C1("
guiModify( "double"، Name =
"par.sum$11"،NewName = "C2("
guiModify( "double"، Name =
"par.sum$12"،NewName = "C3("

، par.sum[1 'MC.Iter']<-mc.iter
par.sum[1،'Part']<-0
par.sum[1،'S.Size']<-n.c
par.sum[1،'A1']<-pca1
par.sum[1،'A2']<-pca2
par.sum[1،'A3']<-pca3
par.sum[1،'B1']<-pcb1
par.sum[1،'B2']<-pcb2
par.sum[1،'B3']<-pcb3
par.sum[1،'C1']<-pcc1
par.sum[1،'C2']<-pcc2
par.sum[1،'C3']<-pcc3
par.sum[2،'Part']<-1
par.sum[2،'S.Size']<-n.f
par.sum[2،'A1']<-pfa1
par.sum[2،'A2']<-pfa2
par.sum[2،'A3']<-pfa3
```

```
par.sum[2،'B1']<-pfb1
par.sum[2،'B2']<-pfb2
par.sum[2،'B3']<-pfb3
par.sum[2،'C1']<-pfc1
par.sum[2،'C2']<-pfc2
par.sum[2،'C3']<-pfc3

html.table(par.sum،"e:/Mehdi/msadecision.html"،append=T(

decision.sum<-matrix(0،1،9(
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$1"،NewName = "Kappa.Agr("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$2"،NewName = "Kappa.Cap("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$3"،NewName = "Prop.Eq("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$4"،NewName = "Chisq.Agr("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$5"،NewName = "PropC.Cap("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$6"،NewName = "PropF.Cap("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$7"،NewName = "PropG.Cap("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$8"،NewName = "Manual.Decision("
guiModify(   "double"   Name   =   ،"decision.sum$9"،NewName = "Deter.Decision("
for (k in (1:9
}
  decision.sum[k]<-sum(decision.counter[،k([
{
html.table(decision.sum،"e:/Mehdi/msadecision.html"،append=T(
p.vec[iter]<-p
manual.rejected.no[iter]<-decision.sum[1،'Manual.Decision['
deter.rejected.no[iter]<-decision.sum[1،'Deter.Decision['
{
```

برازش مدل مزدوج

```
#
set.seed(51(
lbeta<-function(theta){alpha<-theta[1];beta<-theta[2];
return(lgamma(alpha)+lgamma(beta)-lgamma(alpha+beta{((
nO<-3
nR<-3
nP<-50
prior.alpha<-2
prior.beta<-2
pij<-matrix(0،nO،nR(
yij<-matrix(c(50،50،48،48،48،43،44،47،44)،nO،nR(
exam<-matrix(0،nO،nR(
prior.alpha<-3
prior.beta<-1
minus.log.marg.lik<-function(theta(
}
                              alpha<-theta[1[
                               beta<-theta[2[
return    (-sum(lgamma(alpha+beta)+lgamma(yij+alpha)+lgamma(nP-yij+beta)-lgamma(alpha)-
```

```
lgamma(beta)-lgamma(nP+alpha+beta((   (
{

parameters.EB<-nlminb(start=c(1،1)،minus.log.marg.lik،lower=c(-Inf،-Inf))$parameters
#plot(1:1000/1000،dbeta(1:1000/1000،parameters.EB[1]،parameters.EB[2])،type='l('
print(parameters.EB[1]/(parameters.EB[1]+parameters.EB[2(([
mu.hat<-sum(yij)/(nP*nO*nR(
s2<-sum((yij/nP-mu.hat)^2)/(nO*nR(
sigma.inv.hat<-(mu.hat*(1-mu.hat)-s2)/(s2-mu.hat*(1-mu.hat)/nP(
alpha.MOM<-mu.hat*sigma.inv.hat
beta.MOM<-sigma.inv.hat-alpha.MOM
3 ###D PLOT

a.alpha<-1
b.alpha<-1000
n.alpha<-50

a.beta<-.1
b.beta<-50
n.beta<-50

marvec<-c()


stvec.alpha<-c()

stvec.beta<-c()

meshplot<-matrix(1،n.alpha*n.beta،3(

for (i in 1:n.alpha(
}

                         for(j in 1:n.beta(
                                 }

meshplot[(i-1)*n.alpha+j،1]<-i/n.alpha*(b.alpha-a.alpha)+a.alpha
meshplot[(i-1)*n.alpha+j،2]<-j/n.beta*(b.beta-a.beta)+a.beta
    meshplot[(i-1)*n.alpha+j،3]<--minus.log.
marg.lik(c(meshplot[(i-1)*n.alpha+j،1]،meshplot[(i-1)*n.alpha+j،2(([
                                 {
{



meshplot<-as.data.frame(meshplot(


2 ###D Plot 1

a.alpha<-1
b.alpha<-1000
n.alpha<-50

marvec<-c()
stvec.alpha<-c()

for (i in 1:n.alpha(
}

stvec.alpha[i]<-i/n.alpha*(b.alpha-a.alpha)+a.alpha
                     marvec[i]<--minus.log.
marg.lik(c(stvec.alpha[i]،parameters.EB[1(([
{

plot(stvec.alpha،marvec،xlab='Alpha'،ylab='Log Likelihood'،type='l('
a.beta<-.1
b.beta<-50
n.beta<-50

marvec<-c()
```

```
stvec.beta<-c()

for (i in 1:n.alpha(
}
stvec.beta[i]<-j/n.beta*(b.beta-a.beta)+a.beta
                      marvec[i]<--minus.log.
marg.lik(c(parameters.EB[1].stvec.beta[i(([
{



#plot(stvec.beta.marvec.xlab='Beta'.ylab='Log Likelihood'.type='l('



 ##########Bayes Factors

 ##Laplace

prior.
alpha<-parameters.EB[1[
prior.beta<-parameters.EB[2[


prior.
alpha<-1
prior.beta<-1

zij<-matrix(0.nO.nR(

for (i in 1:nO(
}
                             for(j in 1:nR(
                                          }
،                                          zij[i j]<-lbeta(c(yij[i.j]+prior.alpha.nP-
yij[i.j]+prior.beta((


                                          {
{
log.B1<-lbeta(c(sum(yij)+prior.alpha.nO*nP*nR-sum(yij)+prior.beta((


log.B2<-sum(zij(
log.B12<-log.B1-log.B2
beta.MOM parameters.EB


log(1-pbeta(0.8.(sum(yij)+prior.alpha).(nO*nP*nR-sum(yij)+prior.beta(((
-log(pbeta(0.8.(sum(yij)+prior.alpha).(nO*nP*nR-sum(yij)+prior.beta(((
```

توليد چند جمله اي هاي هرميت

```
hermitfunction[1]:=2*x;hermitfunction[2]:=4*x^2-2;
>
                       hermitfunction[1] := 2 x

                                                 2
                    hermitfunction[2] := 4 x  - 2

> for r from 3 to 31 do;
> hermitfunction[r]:=expand(2*x*hermitfunction[r-1]-2*(r-1)*hermitfunction[r-2]);
> hermitnodes[r]:=evalf(solve(hermitfunction[r]=0.{x}));
```

```
> end do;
```

برازش مدل با اثرات متقابل

```
set.seed(250)
options(object.size=370000000)
logitinv<-function (x){exp(x)/(1+exp(x))}
matdiag<- function (xvec،dim)
{
          w<-matrix(0،length(xvec)*dim،dim)
                      for (i in 0:(dim-1))
                                        {
                                            for (j in 1:length(xvec))
                                                                     {

       w[(i*length(xvec)+j)،(i+1)]<-xvec[j]
                                                                     }
                                        }
return(w)
}

indexfinder1<-function(r،n.O)
                                        {
                            if (r%%n.O==0)
                                                  {return(r%/%n.O)}
                                               {return (r%/%n.O+1)}
                                        }
indexfinder2<-function(r،n.O)
                                        {
                             if(r%%n.O==0)
                                                      {return(n.O)}
                                                  {return(r%%n.O)}
                                        }

ghqn<-matrix(0،30،30)
ghqw<-matrix(0،30،30)


n.O<-3
n.P<-50
n.R<-3

sigma.O0<-0.1
sigma.P0<-0.1
sigma.OP0<-0.1
mu0<-1


nvec<-c(n.O،n.P،n.R)

nqn.O<-5
nqn.P<-5
nqn.OP<-5
qw.O<-c()
qw.P<-c()
qw.OP<-c()
qn.O<-c()
qn.P<-c()
qn.OP<-c()
yij<-matrix(-1،n.O،n.P)

##### GHQ 2 point
ghqn[2،1]<- -0.707107
ghqn[2،2]<- +0.707107
ghqw[2،1]<- 0.886227
ghqw[2،2]<- 0.886227


##### GHQ 3 point
ghqn[3،1]<- -1.224745
```

```
ghqn[3،2]<- 0
ghqn[3،3]<- +1.224745
ghqw[3،1]<- 0.295409
ghqw[3،2]<- 1.181636
ghqw[3،3]<- 0.295409


##### GHQ 4 point
ghqn[4،1]<- -1.650680
ghqn[4،2]<- -0.524648
ghqn[4،3]<- +0.524648
ghqn[4،4]<- +1.650680
ghqw[4،1]<- 0.0813128
ghqw[4،2]<- 0.804914
ghqw[4،3]<- 0.804914
ghqw[4،4]<- 0.0813128


##### GHQ 5 point
ghqn[5،1]<- -2.020183
ghqn[5،2]<- -0.958572
ghqn[5،3]<- 0
ghqn[5،4]<- +0.958572
ghqn[5،5]<- +2.020183
ghqw[5،1]<- 0.0199532
ghqw[5،2]<- 0.393619
ghqw[5،3]<- 0.945309
ghqw[5،4]<- 0.393619
ghqw[5،5]<- 0.0199532


##### Substituting from reference quadrature


for (i in 1:nqn.O) ## for Operator
{
qn.O[i]<-ghqn[nqn.O،i]
qw.O[i]<-ghqw[nqn.O،i]
}

for (i in 1:nqn.P) ## for Parts
{
qn.P[i]<-ghqn[nqn.P،i]
qw.P[i]<-ghqw[nqn.P،i]
}


for (i in 1:nqn.OP) ## for Operator*Parts
{
qn.OP[i]<-ghqn[nqn.OP،i]
qw.OP[i]<-ghqw[nqn.OP،i]
}


n.O<-nvec[1]
n.P<-nvec[2]
n.OP<-nvec[3]
eta<-array(-1،c(nqn.O،nqn.P،nqn.OP،4))

for (i in 1:nqn.O)
                                           {
                         for (j in 1:nqn.P)
                                                                {
                                                    for (k in 1:nqn.OP)
                                                                   {

   eta[i،j،k،]<-c(1،qn.O[i]،qn.P[j]،qn.OP[k])

                                                                   }
                                                                }
                                           }
```

```
etavec<-c()
etamatrix<-matrix(-1,n.O*n.P,(4*nqn.O*nqn.P*nqn.OP))


for (i in 1:nqn.O)
                                          {
                         for (j in 1:nqn.P)
                                                                {
                                                      for (k in 1:nqn.OP)
                                                                    {
                                                                    etavec<-
cbind(etavec,t(eta[i,j,k,]))
                                                                    }
                                                                }
                                          }


for (i in 1:(n.O*n.P))
{
                      etamatrix[i,]<-etavec
}





######## DATA GENERATION SHOULD BE HERE ######


alldata<-array(0,c(n.O,n.R,n.P))

#### Data Generation ########

for (i in 1:n.O)
{
                           for (j in 1:n.R)

                                          {

                                                         for (k in 1:n.P)
                                                                {
                                           alldata[i,j,k]<-manualdata.correct2$RESP[(i-
1)*n.O+(j-1)*n.R+k]
                                                                }

                                          }
}

for (i in 1:n.O)
{
                           for (j in 1:n.P)
                                          {
                                            yij[i,j]<-sum(alldata[i,,j])
                                          }
}



#####   DEFINING MARGINAL LIKELIHOOD ###########


marginal.likelihood<-function (theta0)
{

theta<-c()
theta[1]<-theta0[1]
theta[2:4]<-sqrt(2)*theta0[2:4]


etacomp<-matrix(-1,n.O*n.P,n.O*n.P)
```

```
x<-matdiag(theta,(n.O*n.P))
etacomp<-etamatrix%*%matdiag(theta,(nqn.O*nqn.P*nqn.OP))

yijmatrix<-matrix(-1,(n.O*n.P),(nqn.O*nqn.P*nqn.OP))


for (r in 1:(n.O*n.P))
                                          {
                     j<-indexfinder1(r,n.O)
                     i<-indexfinder2(r,n.O)
#                           print(c(r,i,j))
#                   print(c(r,i,j,yij[i,j]))
yijmatrix[r,]<-rep(yij[i,j],times=(nqn.O*nqn.P*nqn.OP))
                                          }

etacompstar<-matrix(-1,(n.O*n.P),(nqn.O*nqn.P*nqn.OP))
etacompstar<-exp(etacomp*yijmatrix)/(1+exp(etacomp))^n.R
#print(etacompstar)

qw.P.vec<-c()
qw.OP.vec<-c()
qw.P.vec<-rep(qw.P,each=nqn.OP)
qw.OP.vec<-rep(qw.OP,times=nqn.P)

qw.P.OP.vec<-qw.P.vec*qw.OP.vec

etacompstar<-matrix(t(etacompstar),(n.O*n.P*nqn.O),(nqn.P*nqn.OP),byrow=T)


# etacomp 1,1,ut
# etacomp 1,2,ut
# ...
# etacomp 1,nqn.O,ut
# ...
# etacomp 2,1,ut
# etacomp 2,2,ut
# ...
# etacomp 2,nqn.O,ut
# ...
# etacomp n.O,nqn.O,ut

integ.lik.P.OP<-etacompstar%*%qw.P.OP.vec

# integ.lik.P.OP i=1 j=1 v=1
# integ.lik.P.OP i=1 j=1 v=2
# ...
# integ.lik.P.OP i=1 j=1 v=nqn.O

# integ.lik.P.OP i=2 j=1 v=1
# integ.lik.P.OP i=2 j=1 v=2
# ...
# integ.lik.P.OP i=2 j=1 v=nqn.O

# ...

# integ.lik.P.OP i=n.O j=1 v=1
# integ.lik.P.OP i=n.O j=1 v=2
# ...
# integ.lik.P.OP i=2 j=1 v=nqn.O

# integ.lik.P.OP i=1 j=2 v=1
# integ.lik.P.OP i=1 j=2 v=2
# ...
# integ.lik.P.OP i=1 j=2 v=nqn.O

# ...

# integ.lik.P.OP i=1 j=n.P v=1
# integ.lik.P.OP i=1 j=n.P v=2
# ...
# integ.lik.P.OP i=1 j=n.P v=nqn.O
```

```
# ...

# integ.lik.P.OP i=n.O j=n.P v=1
# integ.lik.P.OP i=n.O j=n.P v=2
# ...
# integ.lik.P.OP i=n.O j=n.P v=nqn.O

marg.lik.O<-c()
prod1<-1



#for (i in 1:n.O)
#{
#summation<-0
#                         for (v in 1:nqn.O)
#                                                                       {
#                                                                prod2<-1
#                                                        for (j in 1:n.P)
#                                                                            {
#
#
                         print(n.P*(j-1)+i)
#
       print(n.P*nqn.O*(i-1)+(j-1)*nqn.O+v)
#                                                                            prod2<-
prod2*integ.lik.P.OP[n.P*nqn.O*(i-1)+(j-1)*nqn.O+v]
#                                                                            }

#                                           summation<-summation+prod2*qw.O[v]

#                                                                       }
#prod2<-prod2*summation
# Delet it for fast algorithm
#marg.lik.O[i]<-summation
#}



for (i in 1:n.O)
{
summation<-0
                         for (v in 1:nqn.O)
                                                                        {
                                                                prod2<-1
                                                        for (j in 1:n.P)
                                                                            {
                                                                            prod2<-
prod2*integ.lik.P.OP[n.O*nqn.O*(j-1)+(i-1)*nqn.O+v]
                                                                            }

                                           summation<-summation+prod2*qw.O[v]

                                                                        }
 prod1<-prod1*summation
}
return(-log(prod1))
}

inter.max<-nlminb(start=c(2،0،0،0)،objective=marginal.likelihood،lower=c(-Inf،0،0،0))
mu.bre<-inter.max$parameters[1]
sigmaO.bre<-inter.max$parameters[2]
sigmaP.bre<-inter.max$parameters[3]

sigmaOP.bre<-inter.max$parameters[4]



marginal.likelihood(c(mu.bre،sigmaO.bre،sigmaP.bre،sigmaOP.bre))
```

```
### 3d Plot for sigmaO sigmaP
a.sigmaO<-0
b.sigmaO<-1
n.sigmaO<-10

a.sigmaP<-0
b.sigmaP<-1
n.sigmaP<-10

marvec<-c()


stvec.sigmaO<-c()

stvec.sigmaP<-c()

meshplot<-matrix(1,n.sigmaO*n.sigmaP,3)

for (i in 1:n.sigmaO)
{

print(i)




                        for(j in 1:n.sigmaP)
                                            {

meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1]<-i/n.sigmaO*(b.sigmaO-a.sigmaO)+a.sigmaO
meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2]<-j/n.sigmaP*(b.sigmaP-a.sigmaP)+a.sigmaP
              meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,3]<-
-marginal.likelihood(c(mu.bre,meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1],meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2],
sigmaOP.bre))
                                            }
}



meshplot<-as.data.frame(meshplot)







### 3d Plot for sigmaO sigmaOP
a.sigmaO<-0
```

```
b.sigmaO<-1
n.sigmaO<-10

a.sigmaOP<-0
b.sigmaOP<-1
n.sigmaOP<-10

marvec<-c()


stvec.sigmaO<-c()

stvec.sigmaOP<-c()

meshplot<-matrix(1,n.sigmaO*n.sigmaOP,3)

for (i in 1:n.sigmaO)
{

print(i)




                       for(j in 1:n.sigmaOP)
                                           {

meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1]<-i/n.sigmaO*(b.sigmaO-a.sigmaO)+a.sigmaO
meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2]<-j/n.sigmaOP*(b.sigmaOP-a.sigmaOP)+a.sigmaOP
              meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,3]<-
-marginal.likelihood(c(mu.bre,meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1],
sigmaP.bre,meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2]))
                                           }
}



meshplot<-as.data.frame(meshplot)






## 3d Plot for sigmaP sigmaOP
a.sigmaP<-0
b.sigmaP<-1
n.sigmaP<-10

a.sigmaOP<-0
b.sigmaOP<-1
n.sigmaOP<-10

marvec<-c()


stvec.sigmaP<-c()

stvec.sigmaOP<-c()

meshplot<-matrix(1,n.sigmaP*n.sigmaOP,3)

for (i in 1:n.sigmaP)
{

print(i)



                       for(j in 1:n.sigmaOP)
```

```
                                          {

meshplot[(i-1)*n.sigmaP+j,1]<-i/n.sigmaP*(b.sigmaP-a.sigmaP)+a.sigmaP
meshplot[(i-1)*n.sigmaP+j,2]<-j/n.sigmaOP*(b.sigmaOP-a.sigmaOP)+a.sigmaOP
             meshplot[(i-1)*n.sigmaP+j,3]<-
-marginal.likelihood(c(mu.bre,
sigmaO.bre,meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1],meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2]))
                                          }
}



meshplot<-as.data.frame(meshplot)






### 2D Plot for sigmaO
a.sigmaO<-0
b.sigmaO<-1
n.sigmaO<-20

marvec<-c()


stvec.sigmaO<-c()

meshplot<-matrix(1,n.sigmaO*n.sigmaP,3)

for (i in 1:n.sigmaO)
{

print(i)

stvec.sigmaO[i]<-i/n.sigmaO*(b.sigmaO-a.sigmaO)+a.sigmaO
                                marvec[i]<-
-marginal.likelihood(c(mu.bre,stvec.sigmaO[i],sigmaP.bre,
sigmaOP.bre))

}

plot(stvec.sigmaO,marvec,type='l')





### 2D Plot for sigmaP
a.sigmaP<-0
b.sigmaP<-1
n.sigmaP<-20

marvec<-c()


stvec.sigmaP<-c()

for (i in 1:n.sigmaO)
{

print(i)

stvec.sigmaP[i]<-i/n.sigmaP*(b.sigmaP-a.sigmaP)+a.sigmaP
                                marvec[i]<-
-marginal.likelihood(c(mu.bre,sigmaO.bre,stvec.sigmaP[i],
sigmaOP.bre))
}

plot(stvec.sigmaP,marvec,type='l')
```

```
### 2D Plot for sigmaOP
a.sigmaOP<-0
b.sigmaOP<-1
n.sigmaOP<-20

marvec<-c()


stvec.sigmaOP<-c()

for (i in 1:n.sigmaOP)
{

print(i)

stvec.sigmaOP[i]<-i/n.sigmaOP*(b.sigmaOP-a.sigmaOP)+a.sigmaOP
                                marvec[i]<-
-marginal.likelihood(c(mu.bre،sigmaO.bre،
sigmaP.bre،stvec.sigmaOP[i]))
}

plot(stvec.sigmaOP،marvec،type='l')




### 2D Plot for sigmaOP
a.mu<-0
b.mu<-2
n.mu<-20

marvec<-c()


stvec.mu<-c()

for (i in 1:n.mu)
{

print(i)

       stvec.mu[i]<-i/n.mu*(b.mu-a.mu)+a.mu
                                marvec[i]<-
-marginal.likelihood(c(stvec.mu[i]،sigmaO.bre،
sigmaP.bre،sigmaOP.bre))
}

plot(stvec.mu،marvec،type='l')
```

برازش مدل آشيانه اي و محاسبه ي P-مقدار تجربي

```
set.seed(250)
options(object.size=370000000)
logitinv<-function (x){exp(x)/(1+exp(x))}
matdiag<- function (xvec،dim)
{
          w<-matrix(0،length(xvec)*dim،dim)
                      for (i in 0:(dim-1))
                                         {
                                             for (j in 1:length(xvec))
                                                                     {
```

```
        w[(i*length(xvec)+j).(i+1)]<-xvec[j]
                                                                                  }
                                            }
return(w)
}

indexfinder1<-function(r.n.O)
                                            {
                              if (r%%n.O==0)
                                                    {return(r%/%n.O)}
                                                 {return (r%/%n.O+1)}
                                            }
indexfinder2<-function(r.n.O)
                                            {
                               if(r%%n.O==0)
                                                        {return(n.O)}
                                                     {return(r%%n.O)}
                                            }



###############Gauss-Hermit Quadrature Calculations###############



c.f1<-c();
c.f2<-c();
c.f3<-c();
c.f4<-c();
c.f5<-c();
c.f6<-c();
c.f7<-c();
c.f8<-c();
c.f9<-c();

c.f10<-c();
c.f11<-c();
c.f12<-c();
c.f13<-c();
c.f14<-c();
c.f15<-c();
c.f16<-c();
c.f17<-c();
c.f18<-c();
c.f19<-c();

c.f20<-c();
c.f21<-c();
c.f22<-c();
c.f23<-c();
c.f24<-c();
c.f25<-c();
c.f26<-c();
c.f27<-c();
c.f28<-c();
c.f29<-c();


c.f30<-c();
c.f31<-c();


f0<-function(x){1}
f1<-function(x){2*x}
f2<-function(x){4*x^2-2}

c.f2[3]<- 4
c.f2[2]<- 0
c.f2[1]<- -2
```

```
f3<-function(x){8*x^3-12*x}
c.f3[4]<- 8
c.f3[3]<- 0
c.f3[2]<- -12
c.f3[1]<- 0

f4<-function(x){16*x^4-48*x^2+12}
c.f4[5]<- 16
c.f4[4]<- 0
c.f4[3]<- -48
c.f4[2]<- 0
c.f4[1]<- +12

f5<-function(x){32*x^5-160*x^3+120*x}
c.f5[6]<- 32
c.f5[5]<- 0
c.f5[4]<- -160
c.f5[3]<- 0
c.f5[2]<- +120
c.f5[1]<- 0

f6<-function(x){64*x^6-480*x^4+720*x^2-120}
c.f6[7]<- 64
c.f6[6]<- 0
c.f6[5]<- -480
c.f6[4]<- 0
c.f6[3]<- +720
c.f6[2]<- 0
c.f6[1]<- -120

f7<-function(x){128*x^7-1344*x^5+3360*x^3-1680*x}
c.f7[8]<- 128
c.f7[7]<- 0
c.f7[6]<- -1344
c.f7[5]<- 0
c.f7[4]<- +3360
c.f7[3]<- 0
c.f7[2]<- -1680
c.f7[1]<- 0


f8<-function(x){256*x^8-3584*x^6+13440*x^4-13440*x^2+1680}
c.f8[9]<- 256
c.f8[8]<- 0
c.f8[7]<- -3584
c.f8[6]<- 0
c.f8[5]<- +13440
c.f8[4]<- 0
c.f8[3]<- -13440
c.f8[2]<- 0
c.f8[1]<- +1680


f9<-function(x){512*x^9-9216*x^7+48384*x^5-80640*x^3+30240*x}
c.f9[10]<- 512
c.f9[9] <- 0
c.f9[8] <- -9216
c.f9[7] <- 0
c.f9[6] <- +48384
c.f9[5] <- 0
c.f9[4] <- -80640
c.f9[3] <- 0
c.f9[2] <- +30240
c.f9[1] <- 0

f10<-function(x){1024*x^10-23040*x^8+161280*x^6-403200*x^4+302400*x^2-30240}
c.f10[11]<- 1024
c.f10[10]<- 0
c.f10[9] <- -23040
c.f10[8] <- 0
```

```
c.f10[7] <- +161280
c.f10[6] <- 0
c.f10[5] <- -403200
c.f10[4] <- 0
c.f10[3] <- +302400
c.f10[2] <- 0
c.f10[1] <- -30240

f11<-function(x){2048*x^11-56320*x^9+506880*x^7-1774080*x^5+2217600*x^3-665280*x}
c.f11[12]<- 2048
c.f11[11]<- 0
c.f11[10]<- -56320
c.f11[9] <- 0
c.f11[8] <- +506880
c.f11[7] <- 0
c.f11[6] <- -1774080
c.f11[5] <- 0
c.f11[4] <- +2217600
c.f11[3] <- 0
c.f11[2] <- -665280
c.f11[1] <- 0


f12<-function(x){4096*x^12-135168*x^10+1520640*x^8-7096320*x^6+13305600*x^4-
7983360*x^2+665280}
c.f12[13]<- 4096
c.f12[12]<- 0
c.f12[11]<- -135168
c.f12[10]<- 0
c.f12[9] <- +1520640
c.f12[8] <- 0
c.f12[7] <- -7096320
c.f12[6] <- 0
c.f12[5] <- 13305600
c.f12[4] <- 0
c.f12[3] <- -7983360
c.f12[2] <- 0
c.f12[1] <- +665280

f13<-function(x){8192*x^13-319488*x^11+4392960*x^9-26357760*x^7+69189120*x^5-
69189120*x^3+
17297280*x}
c.f13[14]<- 8192
c.f13[13]<- 0
c.f13[12]<- -139488
c.f13[11]<- 0
c.f13[10]<- +4392960
c.f13[9] <- 0
c.f13[8] <- -26357760
c.f13[7] <- 0
c.f13[6] <- +69189120
c.f13[5] <- 0
c.f13[4] <- -69189120
c.f13[3] <- 0
c.f13[2] <- 17297280
c.f13[1] <- 0


f14<-function(x){16384*x^14-745472*x^12+12300288*x^10-92252160*x^8+322882560*x^6-
484323840*x^4
+242161920*x^2-17297280}

c.f14[15]<- 16384
c.f14[14]<- 0
c.f14[13]<- -745472
c.f14[12]<- 0
c.f14[11]<- +12300288
c.f14[10]<- 0
c.f14[9] <- -92252160
c.f14[8] <- 0
c.f14[7] <- +322882560
```

```
c.f14[6] <- 0
c.f14[5] <- -484323840
c.f14[4] <- 0
c.f14[3] <- +242161920
c.f14[2] <- 0
c.f14[1] <- -17297280

f15<-function(x){32768*x^15-1720320*x^13+33546240*x^11-307507200*x^9+1383782400*x^7
-2905943040*x^5+2421619200*x^3-518918400*x}

c.f15[16]<- 32768
c.f15[15]<- 0
c.f15[14]<- -1720320
c.f15[13]<- 0
c.f15[12]<- +33546240
c.f15[11]<- 0
c.f15[10]<- -307507200
c.f15[9] <- 0
c.f15[8] <- +1383782400
c.f15[7] <- 0
c.f15[6] <- -2905943040
c.f15[5] <- 0
c.f15[4] <- +2421619200
c.f15[3] <- 0
c.f15[2] <- -518918400
c.f15[1] <- 0



f16<-function(x){65536*x^16-3932160*x^14+89456640*x^12-984023040*x^10+5535129600*x^8
-15498362880*x^6+19372953600*x^4-8302694400*x^2+518918400}
c.f16[17]<- 65536
c.f16[16]<- 0
c.f16[15]<- -3932160
c.f16[14]<- 0
c.f16[13]<- +89456640
c.f16[12]<- 0
c.f16[11]<- -984023040
c.f16[10]<- 0
c.f16[9] <- +5535129600
c.f16[8] <- 0
c.f16[7] <- -15498362880
c.f16[6] <- 0
c.f16[5] <- +19372953600
c.f16[4] <- 0
c.f16[3] <- -8302694400
c.f16[2] <- 0
c.f16[1] <- +518918400

f17<-function(x){131072*x^17-8912896*x^15+233963520*x^13-
3041525760*x^11+20910489600*x^9
-75277762560*x^7+131736084480*x^5-94097203200*x^3+17643225600*x}
c.f17[18]<- 131072
c.f17[17]<- 0
c.f17[16]<- -8912896
c.f17[15]<- 0
c.f17[14]<- +233963520
c.f17[13]<- 0
c.f17[12]<- -3041525760
c.f17[11]<- 0
c.f17[10]<- +20910489600
c.f17[9] <- 0
c.f17[8] <- -75277762560
c.f17[7] <- 0
c.f17[6] <- +131736084480
c.f17[5] <- 0
c.f17[4] <- -94097203200
c.f17[3] <- 0
c.f17[2] <- +17643225600
c.f17[1] <- 0
```

```
f18<-function(x){262144*x^18-20054016*x^16+601620480*x^14-
9124577280*x^12+75277762560*x^10
-338749931520*x^8+790416506880*x^6-846874828800*x^4+317578060800*x^2-17643225600}

c.f18[19]<- 262144
c.f18[18]<- 0
c.f18[17]<- -20054016
c.f18[16]<- 0
c.f18[15]<- +601620480
c.f18[14]<- 0
c.f18[13]<- -9124577280
c.f18[12]<- 0
c.f18[11]<- +75277762560
c.f18[10]<- 0
c.f18[9] <- -338749931520
c.f18[8] <- 0
c.f18[7] <- +790416506880
c.f18[6] <- 0
c.f18[5] <- -846874828800
c.f18[4] <- 0
c.f18[3] <- +317578060800
c.f18[2] <- 0
c.f18[1] <- -17643225600

f19<-function(x){524288*x^19-44826624*x^17+1524105216*x^15-
26671841280*x^13+260050452480*x^11
-1430277488640*x^9+4290832465920*x^7-6436248698880*x^5+4022655436800*x^3-
670442572800*x}

c.f19[20]<- 524288
c.f19[19]<- 0
c.f19[18]<- -44826624
c.f19[17]<- 0
c.f19[16]<- +1524105216
c.f19[15]<- 0
c.f19[14]<- -26671841280
c.f19[13]<- 0
c.f19[12]<- +260050452480
c.f19[11]<- 0
c.f19[10]<- -1430277488640
c.f19[9] <- 0
c.f19[8] <- +4290832465920
c.f19[7] <- 0
c.f19[6] <- -6436248698880
c.f19[5] <- 0
c.f19[4] <- +4022655436800
c.f19[3] <- 0
c.f19[2] <- -670442572800
c.f19[1] <- 0



f20<-function(x){1048576*x^20-99614720*x^18+3810263040*x^16-
76205260800*x^14+866834841600*x^12
-5721109954560*x^10+21454162329600*x^8-42908324659200*x^6+40226554368000*x^4-
13408851456000*x^2
+670442572800}

c.f20[21]<- 1048576
c.f20[20]<- 0
c.f20[19]<- -99614720
c.f20[18]<- 0
c.f20[17]<- +3810263040
c.f20[16]<- 0
c.f20[15]<- -76205260800
c.f20[14]<- 0
c.f20[13]<- +866834841600
```

```
c.f20[12]<- 0
c.f20[11]<- -5721109954560
c.f20[10]<- 0
c.f20[9] <- +21454162329600
c.f20[8] <- 0
c.f20[7] <- -42908324659200
c.f20[6] <- 0
c.f20[5] <- +40226554368000
c.f20[4] <- 0
c.f20[3] <- -13408851456000
c.f20[2] <- 0
c.f20[1] <- +670442572800


f21<-function(x){2097152*x^21-220200960*x^19+9413591040*x^17-
213374730240*x^15+2800543334400*x^13-21844238008320*x^11+100119424204800*x^9-
257449947955200*x^7+337903056691200*x^5-187723920384000*x^3+28158588057600*x}
f22<-function(x){4194304*x^22-484442112*x^20+23011000320*x^18-
586780508160*x^16+8801707622400*x^14-80095539363840*x^12+440525466501120*x^10-
1415974713753600*x^8+2477955749068800*x^6-2064963124224000*x^4+619488937267200*x^2-
28158588057600}
f23<-function(x){8388608*x^23-1061158912*x^21+55710842880*x^19-
1587759022080*x^17+26991903375360*x^15-283414985441280*x^13+1842197405368320*x^11-
7237204092518400*x^9+16283709208166400*x^7-18997660742860800*x^5+9498830371430400*x^3-
1295295050649600*x}
f24<-function(x){16777216*x^24-2315255808*x^22+133706022912*x^20-
4234024058880*x^18+80975710126080*x^16-971708521512960*x^14+7368789621473280*x^12-
34738579644088320*x^10+97702255248998400*x^8-
151981285942886400*x^6+113985964457164800*x^4-31087081215590400*x^2+1295295050649600}
f25<-function(x){64764752532480000*x-11142168576000*x^19+1139859644571648000*x^5-
518118020259840000*x^3+318347673600*x^21-157902634745856000*x^11-
3239028405043200*x^15+542790306938880000*x^9+28341498544128000*x^13-
1085580613877760000*x^7-5033164800*x^23+33554432*x^25+238163853312000*x^17}
f26<-function(x){-684244750565376000*x^12+688028909568000*x^18+752458137600*x^22-
28969638297600*x^20+1683883565844480000*x^2-7056273990205440000*x^8-
6735534263377920000*x^4+9878783586287616000*x^6+105268423163904000*x^14+28225095960821
76000*x^10-10526842316390400*x^16-64764752532480000+67108864*x^26-10905190400*x^24}
f27<-function(x){-3497296636753920000*x+1955450585088000*x^19-
7274377004448153600*x^5+30309904185200640000*x^3-
74493355622400*x^21+1385595619894886400*x^11+134217728*x^27+378966323390054400*x^15-
4233764394123264000*x^9-
28422474254254080000*x^13+7620775909421875200*x^7+1766640844800*x^23-23555211264*x^25-
33438205005004800*x^17}

f28<-function(x){6466112892842803200*x^12-10402997112668160*x^18-
189619450675200*x^22+547526163824640*x^20-
97924305829109760000*x^2+53345431365953126400*x^8+42433865859280896000*x^4-
67894185374849433600*x^6-113689897017016320*x^14-
23709080607090278400*x^10+132638213186519040*x^16-
50734301184*x^26+268435456*x^28+3497296636753920000+4122161971200*x^24}
f29<-function(x){202843204931727360000*x-
317565175018291200*x^19+49223284396765839360*x^5-
189320324602945536000*x^3+1512215119134720*x^21-12501151592829419520*x^11-
108984795136*x^27-
4396009351324631040*x^15+34378166880280903680*x^9+28848811368067891200*x^13-
56255182167732387840*x^7-
478170788659200*x^23+536870912*x^29+9563415773184*x^25+45253037440106496*x^17}

f30<-function(x){-
625057579641470976000*x^12+15084345813368832000*x^18+412422305218560*x^22-
9526955250548736000*x^20+6085296147951820800000*x^2-4219138662579929088000*x^8-
2839804869044183040000*x^4+4922328439676583936000*x^6+1236377630060052480000*x^14+20
626900128168542208000*x^10-16485035067467366400*x^16+22069421015040*x^26-
233538846720*x^28+1073741824*x^30-202843204931727360000-11954269716480*x^24}
f31<-function(x){-12576278705767096320000*x+492226021278351360000*x^19-
352135803761478696960000*x^5+125762787057670963200000*x^3-
28127201215905792000*x^21+1162607098133136015360000*x^11+50677929738240*x^27+51103608709
14883584000*x^15-2906517745332840038400*x^9-
29810438413670154240000*x^13+2147483648*x^31+435977661799926005760000*x^7+111174708363
264000*x^23-499289948160*x^29-2964658889687040*x^25-601218925989986304000*x^17}
```

```
###############Gauss-Hermit Quadrature Calculations###############



bootstrap.iter<-10000

mc.iter<-100
n.O<-3
n.R<-3

n.P<-50

sigma.O0<-0.4
sigma.RO0<-
0.4
mu0<-2



# for final html.table


sigma.O0.out<-sigma.O0
sigma.RO0.out<-sigma.RO0
mu0.out<-mu0

nqn.O<-20
nqn.R<-20

qw.O<-c()
qw.R<-c()
qn.O<-c()
qn.R<-c()

yik<-matrix(-1,n.O,n.R)


ghqn<-matrix(0,30,30)
ghqw<-matrix(0,30,30)


##### GHQ 2 point

m<-2
ghqn[2,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f2)))
ghqw[2,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f3(ghqn[2,m:1])^2

# GHQ 3 point

m<-3
ghqn[3,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f3)))
ghqw[3,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f4(ghqn[3,m:1])^2

##### GHQ 4 point

m<-4
ghqn[4,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f4)))
ghqw[4,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f5(ghqn[4,m:1])^2


##### GHQ 5 point

m<-5
ghqn[5,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f5)))
ghqw[5,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f6(ghqn[5,m:1])^2
```

```
##### GHQ 6 point

m<-6
ghqn[6.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f6)))
ghqw[6.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f7(ghqn[6.m:1])^2



##### GHQ 7 point

m<-7
ghqn[7.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f7)))
ghqw[7.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f8(ghqn[7.m:1])^2



##### GHQ 8 point

m<-8
ghqn[8.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f8)))
ghqw[8.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f9(ghqn[8.m:1])^2



##### GHQ 9 point

m<-9
ghqn[9.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f9)))
ghqw[9.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f10(ghqn[9.m:1])^2



##### GHQ 10 point

m<-10
ghqn[10.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f10)))
ghqw[10.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f11(ghqn[10.m:1])^2



##### GHQ 11 point

m<-11
ghqn[11.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f11)))
ghqw[11.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f12(ghqn[11.m:1])^2



##### GHQ 12 point

m<-12
ghqn[12.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f12)))
ghqw[12.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f13(ghqn[12.m:1])^2



##### GHQ 13 point

m<-13
ghqn[13.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f13)))
ghqw[13.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f14(ghqn[13.m:1])^2
```

```
##### GHQ 14 point

m<-14
ghqn[14,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f14)))
ghqw[14,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f15(ghqn[14,m:1])^2



##### GHQ 15 point

m<-15
ghqn[15,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f15)))
ghqw[15,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f16(ghqn[15,m:1])^2


##### GHQ 16 point

m<-16
ghqn[16,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f16)))
ghqw[16,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f17(ghqn[16,m:1])^2


##### GHQ 17 point

m<-17
ghqn[17,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f17)))
ghqw[17,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f18(ghqn[17,m:1])^2


##### GHQ 18 point

m<-18
ghqn[18,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f18)))
ghqw[18,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f19(ghqn[18,m:1])^2


##### GHQ 19 point

m<-19
ghqn[19,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f19)))
ghqw[19,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f20(ghqn[19,m:1])^2


##### GHQ 20 point

m<-20
ghqn[20,m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f20)))
ghqw[20,m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f21(ghqn[20,m:1])^2



##### Substituting from reference quadrature
```

```
for (i in 1:nqn.O) ## for Operator
{
qn.O[i]<-ghqn[nqn.O,i]
qw.O[i]<-ghqw[nqn.O,i]
}

for (i in 1:nqn.R) ## for Parts
{
qn.R[i]<-ghqn[nqn.R,i]
qw.R[i]<-ghqw[nqn.R,i]
}




######## DATA GENERATION SHOULD BE HERE ######



pvalue.vec<-c()
mu.bre.vec<-c()
mu.glm.vec<-c()
sigmaO.bre.vec<-c()
sigmaRO.bre.vec<-c()





html.table(date(),'d:/vahid/bootstrap.htm',append=T)


#### Data Generation ########
yik<-matrix(c(50,50,48,48,48,43,44,47,44),n.O,n.R)




#theta<-c(mu0,sigma.O0,sigma.RO0)
marg.lik.rr<-function(theta){

mu<-theta[1]

sigma.O<-theta[2]

sigma.RO<-theta[3]



#######   Creation eta i, k .
leftmat<-matrix(-1,nqn.O,3)


rightmat<-matrix(-1,3,nqn.R)


for (i in 1:nqn.O)
                                            {
                              for (j in 1:3)
                                                                            {
                                                                   leftmat[i,]<-
c(mu,sqrt(2)*sigma.O*qn.O[i],sqrt(2)*sigma.RO)
                                                                            }
                                            }



for (i in 1:3)
                                            {

                          for (j in 1:nqn.R)
```

```
                                                                                             {
                                                          rightmat[,j]<-c(1,1,qn.R[j])
                                                                                             }
                                                        }
etamat<-leftmat%*%rightmat




######## Defining Marginal Likelihood #####

unitmat<-matrix(1,n.O,n.R)

etacomp1<-
kronecker(yik,etamat,'*')
etacomp2<-kronecker(unitmat,etamat)

etacompstar<-exp(etacomp1)/(1+exp(etacomp2))^n.P

marg.R<-etacompstar%*%matdiag(qw.R,n.R)

product.k<-exp(log(marg.R)%*%rep(1,times=n.R))
product.k.mat<-t(matrix(product.k,nqn.O,n.O))


marg.O<-product.k.mat%*%qw.O
log.marg.lik<-rep(1,times=n.O)%*%

log(marg.O)
return(-1*log.marg.lik)
}







#bootstrap.pvalue<-function(yik)
#{


glm.data<-data.frame(rep(1:n.O,each=(n.R*n.P)),rep(rep(1:n.R,times=n.O),each=n.P),0)
names(glm.data)<-c('Oper','Rep','Resp')
for (i in 1:n.O)
                                                        {
                             for (j in 1:n.R)
                                                                                             {
                                                         indx<-(i-1)*n.R*n.P+(j-1)*n.P+1
                                                         glm.data$Resp[indx:(indx+yik[i,j]-1)]<-
rep(1,times=yik[i,j])
                                                        }
                                                        }

glm.fit.minimal<-summary(glm(Resp~1,family=binomial,data=glm.data))

mu0.glm<-glm.fit.minimal$coefficients[1,1]



marg.lik.max<-nlminb(start=c(2,0,0),objective=marg.lik.rr,lower=c(-Inf,0,0))

mu0.bre<-marg.lik.max$parameters[1]
sigmaO0.bre<-marg.lik.max$parameters[2]

sigma.RO0.bre<-marg.lik.max$parameters[3]

(
pi^2/3)/(pi^2/3+sigmaO0.bre+
```

```
sigma.RO0.bre)

p<-sum(yik)/(n.O*n.R*n.P)
sum(yik)*log(p/(1-p))+(n.O*n.R*n.P)*log(1-p)

print(sum(yik)*log(p/(1-p))+(n.O*n.R*n.P)*log(1-p)+marg.lik.rr(c(
mu0.bre,sigmaO0.bre,sigma.RO0.bre))-
0.5*6*log(4*pi^2*sigma.RO0.bre*sigmaO0.bre))



####
3D Plots (SigmaO, SigmaR)

a.sigmaO<-0
b.sigmaO<-0.7
n.sigmaO<-10

a.sigmaR<-0
b.sigmaR<-1.5
n.sigmaR<-10

marvec<-c()


stvec.sigmaO<-c()

stvec.sigmaR<-c()

meshplot<-matrix(1,n.sigmaO*n.sigmaR,3)

for (i in 1:n.sigmaO)
{

print(i)




                        for(j in 1:n.sigmaR)
                                            {

meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1]<-i/n.sigmaO*(b.sigmaO-a.sigmaO)+a.sigmaO
meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2]<-j/n.sigmaR*(b.sigmaR-a.sigmaR)+a.sigmaR
              meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,3]<-
-marg.lik.rr(c(mu0.bre,meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,1],meshplot[(i-1)*n.sigmaO+j,2]))
                                            }
}



meshplot<-as.data.frame(meshplot)





#### 2D Plots (SigmaO, SigmaR)



a.sigmaO<-0
b.sigmaO<-0.1
n.sigmaO<-10

marvec<-c()


stvec.sigmaO<-c()

meshplot<-matrix(1,n.sigmaO*n.sigmaR,3)
```

```
for (i in 1:n.sigmaO)
{

stvec.sigmaO[i]<-i/n.sigmaO*(b.sigmaO-a.sigmaO)+a.sigmaO
                                marvec[i]<-
-marg.lik.rr(c(mu0.bre,stvec.sigmaO[i],
sigma.RO0.bre))
}
#



plot(stvec.sigmaO,marvec,type='l')



stvec.sigmaR<-c()


marvec<-c()


a.sigmaR<-0
b.sigmaR<-2
n.sigmaR<-30

for (i in 1:n.sigmaO)
{

stvec.sigmaR[i]<-i/n.sigmaR*(b.sigmaR-a.sigmaR)+a.sigmaR
                                marvec[i]<-
-marg.lik.rr(c(mu0.bre,
sigmaO0.bre,stvec.sigmaR[i]))
}
#






plot(stvec.sigmaR,marvec,type='l')



##   MU

stvec.mu<-c()


marvec<-c()


a.mu<-0
b.mu<-6
n.mu<-30

for (i in 1:n.mu)
{

       stvec.mu[i]<-i/n.mu*(b.mu-a.mu)+a.mu
                                marvec[i]<-
-marg.lik.rr(c(stvec.mu[i],
sigmaO0.bre,
sigma.RO0.bre))
}
```

```
#plot(stvec.mu.marvec.type='l')



-marg.lik.rr(c(mu0.bre.sigmaO0.bre.sigma.RO0.bre))










####   BOOT STRAP TEST




h0.mu.bre<-c()
h0.sigmaO.bre<-c()
h0.sigmaRO.bre<-c()
bootstrap.decision<-c()



for (b in 1:bootstrap.iter)
{

                            for (i in 1:n.O)
                                           {

for (k in 1:n.R)
                                                                              {
                                                                              yik[i.k]<-
rbinom(1.n.P.logitinv(mu0.glm))
                                                                              }
                                           }




h0fit.bre<-nlminb(start=c(2.0.0).objective=marg.lik.rr.lower=c(-Inf.0.0))
h0.mu.bre[b]<-h0fit.bre$parameters[1]
h0.sigmaO.bre[b]<-h0fit.bre$parameters[2]
h0.sigmaRO.bre[b]<-h0fit.bre$parameters[3]



if ((h0.sigmaO.bre[b]>sigmaO0.bre) | (h0.sigmaRO.bre[b]>
sigma.RO0.bre))
                                              {bootstrap.decision[b]<-T}
                                                                      else
                                              {bootstrap.decision[b]<-F}

print(list(b.bootstrap.decision[b].(sum(bootstrap.decision)/b)))
}
# for i
```

برازش مدل آشيانه اي و بازه هاي اطمينان بوت استرپ

```
set.seed(250)
options(object.size=370000000)
logitinv<-function (x){exp(x)/(1+exp(x))}
matdiag<- function (xvec.dim)
{
          w<-matrix(0.length(xvec)*dim.dim)
                       for (i in 0:(dim-1))
                                          {
                                              for (j in 1:length(xvec))
                                                                         {

       w[(i*length(xvec)+j).(i+1)]<-xvec[j]
                                                                         }
                                          }
return(w)
}

indexfinder1<-function(r.n.O)
                                          {
                            if (r%%n.O==0)
                                                     {return(r%/%n.O)}
                                                  {return (r%/%n.O+1)}
                                          }
indexfinder2<-function(r.n.O)
                                          {
                             if(r%%n.O==0)
                                                         {return(n.O)}
                                                     {return(r%%n.O)}
                                          }



###############Gauss-Hermit Quadrature Calculations###############



c.f1<-c();
c.f2<-c();
c.f3<-c();
c.f4<-c();
c.f5<-c();
c.f6<-c();
c.f7<-c();
c.f8<-c();
c.f9<-c();

c.f10<-c();
c.f11<-c();
c.f12<-c();
c.f13<-c();
c.f14<-c();
c.f15<-c();
c.f16<-c();
c.f17<-c();
c.f18<-c();
c.f19<-c();

c.f20<-c();
c.f21<-c();
c.f22<-c();
c.f23<-c();
c.f24<-c();
c.f25<-c();
c.f26<-c();
c.f27<-c();
c.f28<-c();
```

```
c.f29<-c();


c.f30<-c();
c.f31<-c();


f0<-function(x){1}
f1<-function(x){2*x}
f2<-function(x){4*x^2-2}

c.f2[3]<- 4
c.f2[2]<- 0
c.f2[1]<- -2


f3<-function(x){8*x^3-12*x}
c.f3[4]<- 8
c.f3[3]<- 0
c.f3[2]<- -12
c.f3[1]<- 0

f4<-function(x){16*x^4-48*x^2+12}
c.f4[5]<- 16
c.f4[4]<- 0
c.f4[3]<- -48
c.f4[2]<- 0
c.f4[1]<- +12

f5<-function(x){32*x^5-160*x^3+120*x}
c.f5[6]<- 32
c.f5[5]<- 0
c.f5[4]<- -160
c.f5[3]<- 0
c.f5[2]<- +120
c.f5[1]<- 0

f6<-function(x){64*x^6-480*x^4+720*x^2-120}
c.f6[7]<- 64
c.f6[6]<- 0
c.f6[5]<- -480
c.f6[4]<- 0
c.f6[3]<- +720
c.f6[2]<- 0
c.f6[1]<- -120

f7<-function(x){128*x^7-1344*x^5+3360*x^3-1680*x}
c.f7[8]<- 128
c.f7[7]<- 0
c.f7[6]<- -1344
c.f7[5]<- 0
c.f7[4]<- +3360
c.f7[3]<- 0
c.f7[2]<- -1680
c.f7[1]<- 0


f8<-function(x){256*x^8-3584*x^6+13440*x^4-13440*x^2+1680}
c.f8[9]<- 256
c.f8[8]<- 0
c.f8[7]<- -3584
c.f8[6]<- 0
c.f8[5]<- +13440
c.f8[4]<- 0
c.f8[3]<- -13440
c.f8[2]<- 0
c.f8[1]<- +1680


f9<-function(x){512*x^9-9216*x^7+48384*x^5-80640*x^3+30240*x}
c.f9[10]<- 512
```

```
c.f9[9] <- 0
c.f9[8] <- -9216
c.f9[7] <- 0
c.f9[6] <- +48384
c.f9[5] <- 0
c.f9[4] <- -80640
c.f9[3] <- 0
c.f9[2] <- +30240
c.f9[1] <- 0

f10<-function(x){1024*x^10-23040*x^8+161280*x^6-403200*x^4+302400*x^2-30240}
c.f10[11]<- 1024
c.f10[10]<- 0
c.f10[9] <- -23040
c.f10[8] <- 0
c.f10[7] <- +161280
c.f10[6] <- 0
c.f10[5] <- -403200
c.f10[4] <- 0
c.f10[3] <- +302400
c.f10[2] <- 0
c.f10[1] <- -30240

f11<-function(x){2048*x^11-56320*x^9+506880*x^7-1774080*x^5+2217600*x^3-665280*x}
c.f11[12]<- 2048
c.f11[11]<- 0
c.f11[10]<- -56320
c.f11[9] <- 0
c.f11[8] <- +506880
c.f11[7] <- 0
c.f11[6] <- -1774080
c.f11[5] <- 0
c.f11[4] <- +2217600
c.f11[3] <- 0
c.f11[2] <- -665280
c.f11[1] <- 0


f12<-function(x){4096*x^12-135168*x^10+1520640*x^8-7096320*x^6+13305600*x^4-
7983360*x^2+665280}
c.f12[13]<- 4096
c.f12[12]<- 0
c.f12[11]<- -135168
c.f12[10]<- 0
c.f12[9] <- +1520640
c.f12[8] <- 0
c.f12[7] <- -7096320
c.f12[6] <- 0
c.f12[5] <- 13305600
c.f12[4] <- 0
c.f12[3] <- -7983360
c.f12[2] <- 0
c.f12[1] <- +665280

f13<-function(x){8192*x^13-319488*x^11+4392960*x^9-26357760*x^7+69189120*x^5-
69189120*x^3+
17297280*x}
c.f13[14]<- 8192
c.f13[13]<- 0
c.f13[12]<- -139488
c.f13[11]<- 0
c.f13[10]<- +4392960
c.f13[9] <- 0
c.f13[8] <- -26357760
c.f13[7] <- 0
c.f13[6] <- +69189120
c.f13[5] <- 0
c.f13[4] <- -69189120
c.f13[3] <- 0
c.f13[2] <- 17297280
c.f13[1] <- 0
```

```
f14<-function(x){16384*x^14-745472*x^12+12300288*x^10-92252160*x^8+322882560*x^6-
484323840*x^4
+242161920*x^2-17297280}

c.f14[15]<- 16384
c.f14[14]<- 0
c.f14[13]<- -745472
c.f14[12]<- 0
c.f14[11]<- +12300288
c.f14[10]<- 0
c.f14[9] <- -92252160
c.f14[8] <- 0
c.f14[7] <- +322882560
c.f14[6] <- 0
c.f14[5] <- -484323840
c.f14[4] <- 0
c.f14[3] <- +242161920
c.f14[2] <- 0
c.f14[1] <- -17297280

f15<-function(x){32768*x^15-1720320*x^13+33546240*x^11-307507200*x^9+1383782400*x^7
-2905943040*x^5+2421619200*x^3-518918400*x}

c.f15[16]<- 32768
c.f15[15]<- 0
c.f15[14]<- -1720320
c.f15[13]<- 0
c.f15[12]<- +33546240
c.f15[11]<- 0
c.f15[10]<- -307507200
c.f15[9] <- 0
c.f15[8] <- +1383782400
c.f15[7] <- 0
c.f15[6] <- -2905943040
c.f15[5] <- 0
c.f15[4] <- +2421619200
c.f15[3] <- 0
c.f15[2] <- -518918400
c.f15[1] <- 0



f16<-function(x){65536*x^16-3932160*x^14+89456640*x^12-984023040*x^10+5535129600*x^8
-15498362880*x^6+19372953600*x^4-8302694400*x^2+518918400}
c.f16[17]<- 65536
c.f16[16]<- 0
c.f16[15]<- -3932160
c.f16[14]<- 0
c.f16[13]<- +89456640
c.f16[12]<- 0
c.f16[11]<- -984023040
c.f16[10]<- 0
c.f16[9] <- +5535129600
c.f16[8] <- 0
c.f16[7] <- -15498362880
c.f16[6] <- 0
c.f16[5] <- +19372953600
c.f16[4] <- 0
c.f16[3] <- -8302694400
c.f16[2] <- 0
c.f16[1] <- +518918400

f17<-function(x){131072*x^17-8912896*x^15+233963520*x^13-
3041525760*x^11+20910489600*x^9
-75277762560*x^7+131736084480*x^5-94097203200*x^3+17643225600*x}
c.f17[18]<- 131072
c.f17[17]<- 0
c.f17[16]<- -8912896
c.f17[15]<- 0
```

```
c.f17[14]<- +233963520
c.f17[13]<- 0
c.f17[12]<- -3041525760
c.f17[11]<- 0
c.f17[10]<- +20910489600
c.f17[9] <- 0
c.f17[8] <- -75277762560
c.f17[7] <- 0
c.f17[6] <- +131736084480
c.f17[5] <- 0
c.f17[4] <- -94097203200
c.f17[3] <- 0
c.f17[2] <- +17643225600
c.f17[1] <- 0



f18<-function(x){262144*x^18-20054016*x^16+601620480*x^14-
9124577280*x^12+75277762560*x^10
-338749931520*x^8+790416506880*x^6-846874828800*x^4+317578060800*x^2-17643225600}

c.f18[19]<- 262144
c.f18[18]<- 0
c.f18[17]<- -20054016
c.f18[16]<- 0
c.f18[15]<- +601620480
c.f18[14]<- 0
c.f18[13]<- -9124577280
c.f18[12]<- 0
c.f18[11]<- +75277762560
c.f18[10]<- 0
c.f18[9] <- -338749931520
c.f18[8] <- 0
c.f18[7] <- +790416506880
c.f18[6] <- 0
c.f18[5] <- -846874828800
c.f18[4] <- 0
c.f18[3] <- +317578060800
c.f18[2] <- 0
c.f18[1] <- -17643225600

f19<-function(x){524288*x^19-44826624*x^17+1524105216*x^15-
26671841280*x^13+260050452480*x^11
-1430277488640*x^9+4290832465920*x^7-6436248698880*x^5+4022655436800*x^3-
670442572800*x}

c.f19[20]<- 524288
c.f19[19]<- 0
c.f19[18]<- -44826624
c.f19[17]<- 0
c.f19[16]<- +1524105216
c.f19[15]<- 0
c.f19[14]<- -26671841280
c.f19[13]<- 0
c.f19[12]<- +260050452480
c.f19[11]<- 0
c.f19[10]<- -1430277488640
c.f19[9] <- 0
c.f19[8] <- +4290832465920
c.f19[7] <- 0
c.f19[6] <- -6436248698880
c.f19[5] <- 0
c.f19[4] <- +4022655436800
c.f19[3] <- 0
c.f19[2] <- -670442572800
c.f19[1] <- 0
```

```
f20<-function(x){1048576*x^20-99614720*x^18+3810263040*x^16-
76205260800*x^14+866834841600*x^12
-5721109954560*x^10+21454162329600*x^8-42908324659200*x^6+40226554368000*x^4-
13408851456000*x^2
+670442572800}

c.f20[21]<- 1048576
c.f20[20]<- 0
c.f20[19]<- -99614720
c.f20[18]<- 0
c.f20[17]<- +3810263040
c.f20[16]<- 0
c.f20[15]<- -76205260800
c.f20[14]<- 0
c.f20[13]<- +866834841600
c.f20[12]<- 0
c.f20[11]<- -5721109954560
c.f20[10]<- 0
c.f20[9] <- +21454162329600
c.f20[8] <- 0
c.f20[7] <- -42908324659200
c.f20[6] <- 0
c.f20[5] <- +40226554368000
c.f20[4] <- 0
c.f20[3] <- -13408851456000
c.f20[2] <- 0
c.f20[1] <- +670442572800


f21<-function(x){2097152*x^21-220200960*x^19+9413591040*x^17-
213374730240*x^15+2800543334400*x^13-21844238008320*x^11+100119424204800*x^9-
257449947955200*x^7+337903056691200*x^5-187723920384000*x^3+28158588057600*x}
f22<-function(x){4194304*x^22-484442112*x^20+23011000320*x^18-
586780508160*x^16+8801707622400*x^14-80095539363840*x^12+440525466501120*x^10-
1415974713753600*x^8+2477955749068800*x^6-2064963124224000*x^4+619488937267200*x^2-
28158588057600}
f23<-function(x){8388608*x^23-1061158912*x^21+55710842880*x^19-
1587759022080*x^17+26991903375360*x^15-283414985441280*x^13+1842197405368320*x^11-
7237204092518400*x^9+16283709208166400*x^7-18997660742860800*x^5+9498830371430400*x^3-
1295295050649600*x}
f24<-function(x){16777216*x^24-2315255808*x^22+133706022912*x^20-
4234024058880*x^18+80975710126080*x^16-971708521512960*x^14+7368789621473280*x^12-
34738579644088320*x^10+97702255248998400*x^8-
151981285942886400*x^6+113985964457164800*x^4-31087081215590400*x^2+1295295050649600}
f25<-function(x){64764752532480000*x-11142168576000*x^19+1139859644571648000*x^5-
518118020259840000*x^3+318347673600*x^21-157902634745856000*x^11-
3239028405043200*x^15+542790306938880000*x^9+28341498544128000*x^13-
1085580613877760000*x^7-5033164800*x^23+33554432*x^25+238163853312000*x^17}
f26<-function(x){-684244750565376000*x^12+688028909568000*x^18+752458137600*x^22-
28969638297600*x^20+1683883565844480000*x^2-7056273990205440000*x^8-
6735534263377920000*x^4+9878783586287616000*x^6+10526842316390400*x^14+28225095960821
76000*x^10-10526842316390400*x^16-64764752532480000+67108864*x^26-10905190400*x^24}
f27<-function(x){-3497296636753920000*x+1955450585088000*x^19-
7274377004481536000*x^5+3030990418520064000*x^3-
74493355622400*x^21+13855956198948864000*x^11+134217728*x^27+378966323390054400*x^15-
4233764394123264000*x^9-
2842247425425408000*x^13+7620775909421875200*x^7+1766640844800*x^23-23555211264*x^25-
33438205005004800*x^17}

f28<-function(x){6466112892842803200*x^12-10402997112668160*x^18-
189619450675200*x^22+5475261638246400*x^20-
979243058291097600*x^2+533454313659531264000*x^8+424338658592808960000*x^4-
678941853748494336000*x^6-113689897017016320*x^14-
237090806070902784000*x^10+1326382131865190400*x^16-
50734301184*x^26+268435456*x^28+3497296636753920000+4122161971200*x^24}
f29<-function(x){202843204931727360000*x-
3175651750182912000*x^19+492232843967658393600*x^5-
189320324602945536000*x^3+151221511913472000*x^21-12501151592829419520*x^11-
108984795136*x^27-
4396009351324631040*x^15+343781668802809036800*x^9+288488113680678912000*x^13-
562551821677323878400*x^7-
```

```
478170788659200*x^23+536870912*x^29+9563415773184*x^25+4525303744010649600*x^17}

f30<-function(x){-
6250575796414709760000*x^12+15084345813368832000*x^18+41242230521856000*x^22-
952695525054873600*x^20+6085296147951820800000*x^2-42191386625799290880000*x^8-
28398048690441830400000*x^4+49223284396765839360000*x^6+1236377630060052480000*x^14+20
626900128168542208000*x^10-164850350674673664000*x^16+22069421015040*x^26-
233538846720*x^28+1073741824*x^30-202843204931727360000-1195426971648000*x^24}
f31<-function(x){-12576278705767096320000*x+49222602127835136000*x^19-
352135803761478696960000*x^5+125762787057670963200000*x^3-
2812720121590579200*x^21+116260709813313601536000*x^11+50677929738240*x^27+51103608709
14883584000*x^15-290651774533284003840000*x^9-
29810438413670154240000*x^13+2147483648*x^31+435977661799926005760000*x^7+111174708363
264000*x^23-499289948160*x^29-2964658889687040*x^25-601218925989986304000*x^17}

###############Gauss-Hermit Quadrature Calculations###############




bootstrap.iter<-10000
n.O<-3
n.R<-3

n.P<-50

sigma.O0<-0.5
sigma.RO0<-0.5
mu0<-2


nqn.O<-10
nqn.R<-10

qw.O<-c()
qw.R<-c()
qn.O<-c()
qn.R<-c()

yik<-matrix(-1،n.O،n.R)


ghqn<-matrix(0،30،30)
ghqw<-matrix(0،30،30)


##### GHQ 2 point

m<-2
ghqn[2،m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f2)))
ghqw[2،m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f3(ghqn[2،m:1])^2

# GHQ 3 point

m<-3
ghqn[3،m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f3)))
ghqw[3،m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f4(ghqn[3،m:1])^2

##### GHQ 4 point

m<-4
ghqn[4،m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f4)))
ghqw[4،m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f5(ghqn[4،m:1])^2


##### GHQ 5 point

m<-5
```

```
ghqn[5.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f5)))
ghqw[5.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f6(ghqn[5.m:1])^2



##### GHQ 6 point

m<-6
ghqn[6.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f6)))
ghqw[6.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f7(ghqn[6.m:1])^2



##### GHQ 7 point

m<-7
ghqn[7.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f7)))
ghqw[7.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f8(ghqn[7.m:1])^2



##### GHQ 8 point

m<-8
ghqn[8.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f8)))
ghqw[8.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f9(ghqn[8.m:1])^2



##### GHQ 9 point

m<-9
ghqn[9.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f9)))
ghqw[9.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f10(ghqn[9.m:1])^2



##### GHQ 10 point

m<-10
ghqn[10.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f10)))
ghqw[10.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f11(ghqn[10.m:1])^2



##### GHQ 11 point

m<-11
ghqn[11.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f11)))
ghqw[11.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f12(ghqn[11.m:1])^2



##### GHQ 12 point

m<-12
ghqn[12.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f12)))
ghqw[12.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f13(ghqn[12.m:1])^2



##### GHQ 13 point
```

```
m<-13
ghqn[13.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f13)))
ghqw[13.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f14(ghqn[13.m:1])^2


##### GHQ 14 point

m<-14
ghqn[14.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f14)))
ghqw[14.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f15(ghqn[14.m:1])^2



##### GHQ 15 point

m<-15
ghqn[15.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f15)))
ghqw[15.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f16(ghqn[15.m:1])^2


##### GHQ 16 point

m<-16
ghqn[16.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f16)))
ghqw[16.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f17(ghqn[16.m:1])^2


##### GHQ 17 point

m<-17
ghqn[17.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f17)))
ghqw[17.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f18(ghqn[17.m:1])^2


##### GHQ 18 point

m<-18
ghqn[18.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f18)))
ghqw[18.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f19(ghqn[18.m:1])^2


##### GHQ 19 point

m<-19
ghqn[19.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f19)))
ghqw[19.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f20(ghqn[19.m:1])^2


##### GHQ 20 point

m<-20
ghqn[20.m:1]<- sort(Re(
polyroot(c.f20)))
ghqw[20.m:1]<- 2^(m+1)*factorial(m)*sqrt(pi)/f21(ghqn[20.m:1])^2
```

```
##### Substituting from reference quadrature


for (i in 1:nqn.O) ## for Operator
{
qn.O[i]<-ghqn[nqn.O.i]
qw.O[i]<-ghqw[nqn.O.i]
}

for (i in 1:nqn.R) ## for Parts
{
qn.R[i]<-ghqn[nqn.R.i]
qw.R[i]<-ghqw[nqn.R.i]
}




######## DATA GENERATION SHOULD BE HERE ######





#### Data Generation ########

yik<-matrix(c(50.50.48.48.48.43.44.47.44).n.O.n.R)

#theta<-c(mu0.sigma.O0.sigma.RO0)
marg.lik.rr<-function(theta){

mu<-theta[1]

sigma.O<-theta[2]

sigma.RO<-theta[3]



#######   Creation eta i. k .
leftmat<-matrix(-1.nqn.O.3)


rightmat<-matrix(-1.3.nqn.R)


for (i in 1:nqn.O)
                                          {
                              for (j in 1:3)
                                                                            {
                                                              leftmat[i.]<-
c(mu.sqrt(2)*sigma.O*qn.O[i].sqrt(2)*sigma.RO)
                                                                            }
                                          }



for (i in 1:3)
                                          {

                          for (j in 1:nqn.R)
                                                                            {
                                            rightmat[.j]<-c(1.1.qn.R[j])
                                                                            }
                                          }
etamat<-leftmat%*%rightmat
```

```
######## Defining Marginal Likelihood #####

unitmat<-matrix(1,n.O,n.R)

etacomp1<-
kronecker(yik,etamat,'*')
etacomp2<-kronecker(unitmat,etamat)

etacompstar<-exp(etacomp1)/(1+exp(etacomp2))^n.P

marg.R<-etacompstar%*%matdiag(qw.R,n.R)

product.k<-exp(log(marg.R)%*%rep(1,times=n.R))
product.k.mat<-t(matrix(product.k,nqn.O,n.O))


marg.O<-product.k.mat%*%qw.O
log.marg.lik<-rep(1,times=n.O)%*%

log(marg.O)
return(-1*log.marg.lik)
}
```

```
# Bootstrap Confidence Intervals




h0.mu.bre<-c()
h0.sigmaO.bre<-c()
h0.sigmaRO.bre<-c()

marg.lik.max<-nlminb(start=c(2,0,0),objective=marg.lik.rr,lower=c(-Inf,0,0))

mu0.bre<-marg.lik.max$parameters[1]
sigmaO0.bre<-marg.lik.max$parameters[2]+1e-17

sigma.RO0.bre<-marg.lik.max$parameters[3]+1e-17


for (b in 1:bootstrap.iter)
{


for (i in 1:n.O)
                                           {

O<-rnorm(1,0,sigmaO0.bre)

for (k in 1:n.R)
                                                                     {
                                                        R<-rnorm(1,0,
sigma.RO0.bre)
                                             muij<-logitinv(mu0.bre+O+R)
                                             yik[i,k]<-rbinom(1,n.P,muij)
                                                                     }
                                           }



h0fit.bre<-nlminb(start=c(2,0,0),objective=marg.lik.rr,lower=c(-Inf,0,0))
h0.mu.bre[b]<-h0fit.bre$parameters[1]
```

```
h0.sigmaO.bre[b]<-h0fit.bre$parameters[2]
h0.sigmaRO.bre[b]<-h0fit.bre$parameters[3]


print(c(b,h0.mu.bre[b],h0.sigmaO.bre[b],h0.sigmaRO.bre[b]))
}
print(c(sort(h0.mu.bre)[trunc(bootstrap.iter*10/100)],sort(h0.mu.bre)[trunc(bootstrap.i
ter*90/100)]))

print(c(sort(h0.sigmaO.bre)[trunc(bootstrap.iter*10/100)],sort(h0.sigmaO.bre)[trunc(boo
tstrap.iter*90/100)]))

print(c(sort(h0.sigmaRO.bre)[trunc(bootstrap.iter*10/100)],sort(h0.sigmaRO.bre)[trunc(b
ootstrap.iter*90/100)]))
```

داده هاي راهنماي MSA

RowNames	OPER	REP	RESP	REF
1	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.00	1.00	1.00	1.00
3	1.00	1.00	0.00	0.00
4	1.00	1.00	0.00	0.00
5	1.00	1.00	0.00	0.00
6	1.00	1.00	1.00	1.00
7	1.00	1.00	1.00	1.00
8	1.00	1.00	1.00	1.00
9	1.00	1.00	0.00	0.00
10	1.00	1.00	1.00	1.00
11	1.00	1.00	1.00	1.00
12	1.00	1.00	0.00	0.00
13	1.00	1.00	1.00	1.00
14	1.00	1.00	1.00	1.00
15	1.00	1.00	1.00	1.00
16	1.00	1.00	1.00	1.00
17	1.00	1.00	1.00	1.00
18	1.00	1.00	1.00	1.00
19	1.00	1.00	1.00	1.00
20	1.00	1.00	1.00	1.00
21	1.00	1.00	1.00	1.00
22	1.00	1.00	0.00	0.00
23	1.00	1.00	1.00	1.00
24	1.00	1.00	1.00	1.00
25	1.00	1.00	0.00	0.00
26	1.00	1.00	0.00	0.00
27	1.00	1.00	1.00	1.00
28	1.00	1.00	1.00	1.00
29	1.00	1.00	1.00	1.00
30	1.00	1.00	0.00	0.00
31	1.00	1.00	1.00	1.00
32	1.00	1.00	1.00	1.00
33	1.00	1.00	1.00	1.00
34	1.00	1.00	0.00	0.00
35	1.00	1.00	1.00	1.00
36	1.00	1.00	1.00	1.00
37	1.00	1.00	0.00	0.00
38	1.00	1.00	1.00	1.00
39	1.00	1.00	0.00	0.00
40	1.00	1.00	1.00	1.00
41	1.00	1.00	1.00	1.00

42	1.00	1.00	0.00	0.00
43	1.00	1.00	1.00	1.00
44	1.00	1.00	1.00	1.00
45	1.00	1.00	0.00	0.00
46	1.00	1.00	1.00	1.00
47	1.00	1.00	1.00	1.00
48	1.00	1.00	0.00	0.00
49	1.00	1.00	1.00	1.00
50	1.00	1.00	0.00	0.00
51	1.00	2.00	1.00	1.00
52	1.00	2.00	1.00	1.00
53	1.00	2.00	0.00	0.00
54	1.00	2.00	0.00	0.00
55	1.00	2.00	0.00	0.00
56	1.00	2.00	1.00	1.00
57	1.00	2.00	1.00	1.00
58	1.00	2.00	1.00	1.00
59	1.00	2.00	0.00	0.00
60	1.00	2.00	1.00	1.00
61	1.00	2.00	1.00	1.00
62	1.00	2.00	0.00	0.00
63	1.00	2.00	1.00	1.00
64	1.00	2.00	1.00	1.00
65	1.00	2.00	1.00	1.00
66	1.00	2.00	1.00	1.00
67	1.00	2.00	1.00	1.00
68	1.00	2.00	1.00	1.00
69	1.00	2.00	1.00	1.00
70	1.00	2.00	1.00	1.00
71	1.00	2.00	1.00	1.00
72	1.00	2.00	0.00	0.00
73	1.00	2.00	1.00	1.00
74	1.00	2.00	1.00	1.00
75	1.00	2.00	0.00	0.00
76	1.00	2.00	1.00	0.00
77	1.00	2.00	1.00	1.00
78	1.00	2.00	1.00	1.00
79	1.00	2.00	1.00	1.00
80	1.00	2.00	0.00	0.00
81	1.00	2.00	1.00	1.00
82	1.00	2.00	1.00	1.00
83	1.00	2.00	1.00	1.00
84	1.00	2.00	0.00	0.00
85	1.00	2.00	1.00	1.00
86	1.00	2.00	1.00	1.00
87	1.00	2.00	0.00	0.00
88	1.00	2.00	1.00	1.00
89	1.00	2.00	0.00	0.00

90	1.00	2.00	1.00	1.00
91	1.00	2.00	1.00	1.00
92	1.00	2.00	0.00	0.00
93	1.00	2.00	0.00	1.00
94	1.00	2.00	1.00	1.00
95	1.00	2.00	0.00	0.00
96	1.00	2.00	1.00	1.00
97	1.00	2.00	1.00	1.00
98	1.00	2.00	0.00	0.00
99	1.00	2.00	1.00	1.00
100	1.00	2.00	0.00	0.00
101	1.00	3.00	1.00	1.00
102	1.00	3.00	1.00	1.00
103	1.00	3.00	0.00	0.00
104	1.00	3.00	0.00	0.00
105	1.00	3.00	0.00	0.00
106	1.00	3.00	0.00	1.00
107	1.00	3.00	1.00	1.00
108	1.00	3.00	1.00	1.00
109	1.00	3.00	0.00	0.00
110	1.00	3.00	1.00	1.00
111	1.00	3.00	1.00	1.00
112	1.00	3.00	0.00	0.00
113	1.00	3.00	1.00	1.00
114	1.00	3.00	0.00	1.00
115	1.00	3.00	1.00	1.00
116	1.00	3.00	1.00	1.00
117	1.00	3.00	1.00	1.00
118	1.00	3.00	1.00	1.00
119	1.00	3.00	1.00	1.00
120	1.00	3.00	1.00	1.00
121	1.00	3.00	0.00	1.00
122	1.00	3.00	1.00	0.00
123	1.00	3.00	1.00	1.00
124	1.00	3.00	1.00	1.00
125	1.00	3.00	0.00	0.00
126	1.00	3.00	0.00	0.00
127	1.00	3.00	1.00	1.00
128	1.00	3.00	1.00	1.00
129	1.00	3.00	1.00	1.00
130	1.00	3.00	0.00	0.00
131	1.00	3.00	1.00	1.00
132	1.00	3.00	1.00	1.00
133	1.00	3.00	1.00	1.00
134	1.00	3.00	1.00	0.00
135	1.00	3.00	1.00	1.00
136	1.00	3.00	0.00	1.00
137	1.00	3.00	0.00	0.00

138	1.00	3.00	1.00	1.00
139	1.00	3.00	0.00	0.00
140	1.00	3.00	1.00	1.00
141	1.00	3.00	1.00	1.00
142	1.00	3.00	0.00	0.00
143	1.00	3.00	1.00	1.00
144	1.00	3.00	1.00	1.00
145	1.00	3.00	0.00	0.00
146	1.00	3.00	1.00	1.00
147	1.00	3.00	1.00	1.00
148	1.00	3.00	0.00	0.00
149	1.00	3.00	1.00	1.00
150	1.00	3.00	0.00	0.00
151	2.00	1.00	1.00	1.00
152	2.00	1.00	1.00	1.00
153	2.00	1.00	0.00	0.00
154	2.00	1.00	0.00	0.00
155	2.00	1.00	0.00	0.00
156	2.00	1.00	1.00	1.00
157	2.00	1.00	1.00	1.00
158	2.00	1.00	1.00	1.00
159	2.00	1.00	0.00	0.00
160	2.00	1.00	1.00	1.00
161	2.00	1.00	1.00	1.00
162	2.00	1.00	0.00	0.00
163	2.00	1.00	1.00	1.00
164	2.00	1.00	1.00	1.00
165	2.00	1.00	1.00	1.00
166	2.00	1.00	1.00	1.00
167	2.00	1.00	1.00	1.00
168	2.00	1.00	1.00	1.00
169	2.00	1.00	1.00	1.00
170	2.00	1.00	1.00	1.00
171	2.00	1.00	1.00	1.00
172	2.00	1.00	0.00	0.00
173	2.00	1.00	1.00	1.00
174	2.00	1.00	1.00	1.00
175	2.00	1.00	0.00	0.00
176	2.00	1.00	0.00	0.00
177	2.00	1.00	1.00	1.00
178	2.00	1.00	1.00	1.00
179	2.00	1.00	1.00	1.00
180	2.00	1.00	0.00	0.00
181	2.00	1.00	1.00	1.00
182	2.00	1.00	1.00	1.00
183	2.00	1.00	1.00	1.00
184	2.00	1.00	0.00	0.00
185	2.00	1.00	1.00	1.00

186	2.00	1.00	1.00	1.00
187	2.00	1.00	0.00	0.00
188	2.00	1.00	1.00	1.00
189	2.00	1.00	0.00	0.00
190	2.00	1.00	1.00	1.00
191	2.00	1.00	1.00	1.00
192	2.00	1.00	0.00	0.00
193	2.00	1.00	1.00	1.00
194	2.00	1.00	1.00	1.00
195	2.00	1.00	0.00	0.00
196	2.00	1.00	1.00	1.00
197	2.00	1.00	1.00	1.00
198	2.00	1.00	0.00	0.00
199	2.00	1.00	1.00	1.00
200	2.00	1.00	0.00	0.00
201	2.00	2.00	1.00	1.00
202	2.00	2.00	1.00	1.00
203	2.00	2.00	0.00	0.00
204	2.00	2.00	0.00	0.00
205	2.00	2.00	0.00	0.00
206	2.00	2.00	1.00	1.00
207	2.00	2.00	1.00	1.00
208	2.00	2.00	1.00	1.00
209	2.00	2.00	0.00	0.00
210	2.00	2.00	1.00	1.00
211	2.00	2.00	1.00	1.00
212	2.00	2.00	0.00	0.00
213	2.00	2.00	1.00	1.00
214	2.00	2.00	1.00	1.00
215	2.00	2.00	1.00	1.00
216	2.00	2.00	1.00	1.00
217	2.00	2.00	1.00	1.00
218	2.00	2.00	1.00	1.00
219	2.00	2.00	1.00	1.00
220	2.00	2.00	1.00	1.00
221	2.00	2.00	0.00	1.00
222	2.00	2.00	1.00	0.00
223	2.00	2.00	1.00	1.00
224	2.00	2.00	1.00	1.00
225	2.00	2.00	0.00	0.00
226	2.00	2.00	0.00	0.00
227	2.00	2.00	1.00	1.00
228	2.00	2.00	1.00	1.00
229	2.00	2.00	1.00	1.00
230	2.00	2.00	0.00	0.00
231	2.00	2.00	1.00	1.00
232	2.00	2.00	1.00	1.00
233	2.00	2.00	1.00	1.00

234	2.00	2.00	0.00	0.00
235	2.00	2.00	1.00	1.00
236	2.00	2.00	1.00	1.00
237	2.00	2.00	0.00	0.00
238	2.00	2.00	1.00	1.00
239	2.00	2.00	0.00	0.00
240	2.00	2.00	1.00	1.00
241	2.00	2.00	1.00	1.00
242	2.00	2.00	0.00	0.00
243	2.00	2.00	1.00	1.00
244	2.00	2.00	1.00	1.00
245	2.00	2.00	0.00	0.00
246	2.00	2.00	1.00	1.00
247	2.00	2.00	1.00	1.00
248	2.00	2.00	0.00	0.00
249	2.00	2.00	1.00	1.00
250	2.00	2.00	0.00	0.00
251	2.00	3.00	1.00	1.00
252	2.00	3.00	1.00	1.00
253	2.00	3.00	0.00	0.00
254	2.00	3.00	0.00	0.00
255	2.00	3.00	0.00	0.00
256	2.00	3.00	0.00	1.00
257	2.00	3.00	1.00	1.00
258	2.00	3.00	1.00	1.00
259	2.00	3.00	0.00	0.00
260	2.00	3.00	1.00	1.00
261	2.00	3.00	1.00	1.00
262	2.00	3.00	0.00	0.00
263	2.00	3.00	1.00	1.00
264	2.00	3.00	1.00	1.00
265	2.00	3.00	1.00	1.00
266	2.00	3.00	1.00	1.00
267	2.00	3.00	1.00	1.00
268	2.00	3.00	1.00	1.00
269	2.00	3.00	1.00	1.00
270	2.00	3.00	1.00	1.00
271	2.00	3.00	1.00	1.00
272	2.00	3.00	0.00	0.00
273	2.00	3.00	1.00	1.00
274	2.00	3.00	1.00	1.00
275	2.00	3.00	0.00	0.00
276	2.00	3.00	0.00	0.00
277	2.00	3.00	1.00	1.00
278	2.00	3.00	1.00	1.00
279	2.00	3.00	1.00	1.00
280	2.00	3.00	1.00	0.00
281	2.00	3.00	1.00	1.00

282	2.00	3.00	1.00	1.00
283	2.00	3.00	1.00	1.00
284	2.00	3.00	1.00	0.00
285	2.00	3.00	1.00	1.00
286	2.00	3.00	1.00	1.00
287	2.00	3.00	0.00	0.00
288	2.00	3.00	1.00	1.00
289	2.00	3.00	0.00	0.00
290	2.00	3.00	1.00	1.00
291	2.00	3.00	1.00	1.00
292	2.00	3.00	0.00	0.00
293	2.00	3.00	1.00	1.00
294	2.00	3.00	1.00	1.00
295	2.00	3.00	0.00	0.00
296	2.00	3.00	1.00	1.00
297	2.00	3.00	1.00	1.00
298	2.00	3.00	0.00	0.00
299	2.00	3.00	1.00	1.00
300	2.00	3.00	0.00	0.00
301	3.00	1.00	1.00	1.00
302	3.00	1.00	1.00	1.00
303	3.00	1.00	0.00	0.00
304	3.00	1.00	0.00	0.00
305	3.00	1.00	0.00	0.00
306	3.00	1.00	1.00	1.00
307	3.00	1.00	1.00	1.00
308	3.00	1.00	1.00	1.00
309	3.00	1.00	0.00	0.00
310	3.00	1.00	1.00	1.00
311	3.00	1.00	1.00	1.00
312	3.00	1.00	0.00	0.00
313	3.00	1.00	1.00	1.00
314	3.00	1.00	1.00	1.00
315	3.00	1.00	1.00	1.00
316	3.00	1.00	1.00	1.00
317	3.00	1.00	1.00	1.00
318	3.00	1.00	1.00	1.00
319	3.00	1.00	1.00	1.00
320	3.00	1.00	1.00	1.00
321	3.00	1.00	0.00	1.00
322	3.00	1.00	1.00	0.00
323	3.00	1.00	1.00	1.00
324	3.00	1.00	1.00	1.00
325	3.00	1.00	0.00	0.00
326	3.00	1.00	0.00	0.00
327	3.00	1.00	1.00	1.00
328	3.00	1.00	1.00	1.00
329	3.00	1.00	1.00	1.00

330	3.00	1.00	0.00	0.00
331	3.00	1.00	1.00	1.00
332	3.00	1.00	1.00	1.00
333	3.00	1.00	1.00	1.00
334	3.00	1.00	0.00	0.00
335	3.00	1.00	1.00	1.00
336	3.00	1.00	1.00	1.00
337	3.00	1.00	0.00	0.00
338	3.00	1.00	1.00	1.00
339	3.00	1.00	0.00	0.00
340	3.00	1.00	1.00	1.00
341	3.00	1.00	1.00	1.00
342	3.00	1.00	0.00	0.00
343	3.00	1.00	1.00	1.00
344	3.00	1.00	1.00	1.00
345	3.00	1.00	0.00	0.00
346	3.00	1.00	1.00	1.00
347	3.00	1.00	1.00	1.00
348	3.00	1.00	0.00	0.00
349	3.00	1.00	1.00	1.00
350	3.00	1.00	0.00	0.00
351	3.00	2.00	1.00	1.00
352	3.00	2.00	1.00	1.00
353	3.00	2.00	0.00	0.00
354	3.00	2.00	0.00	0.00
355	3.00	2.00	0.00	0.00
356	3.00	2.00	0.00	1.00
357	3.00	2.00	0.00	1.00
358	3.00	2.00	1.00	1.00
359	3.00	2.00	0.00	0.00
360	3.00	2.00	1.00	1.00
361	3.00	2.00	1.00	1.00
362	3.00	2.00	1.00	0.00
363	3.00	2.00	1.00	1.00
364	3.00	2.00	0.00	1.00
365	3.00	2.00	1.00	1.00
366	3.00	2.00	1.00	1.00
367	3.00	2.00	1.00	1.00
368	3.00	2.00	1.00	1.00
369	3.00	2.00	1.00	1.00
370	3.00	2.00	1.00	1.00
371	3.00	2.00	1.00	1.00
372	3.00	2.00	1.00	0.00
373	3.00	2.00	1.00	1.00
374	3.00	2.00	1.00	1.00
375	3.00	2.00	0.00	0.00
376	3.00	2.00	0.00	0.00
377	3.00	2.00	1.00	1.00

378	3.00	2.00	1.00	1.00
379	3.00	2.00	1.00	1.00
380	3.00	2.00	0.00	0.00
381	3.00	2.00	1.00	1.00
382	3.00	2.00	1.00	1.00
383	3.00	2.00	1.00	1.00
384	3.00	2.00	1.00	0.00
385	3.00	2.00	1.00	1.00
386	3.00	2.00	0.00	1.00
387	3.00	2.00	0.00	0.00
388	3.00	2.00	1.00	1.00
389	3.00	2.00	0.00	0.00
390	3.00	2.00	1.00	1.00
391	3.00	2.00	1.00	1.00
392	3.00	2.00	0.00	0.00
393	3.00	2.00	1.00	1.00
394	3.00	2.00	1.00	1.00
395	3.00	2.00	0.00	0.00
396	3.00	2.00	1.00	1.00
397	3.00	2.00	1.00	1.00
398	3.00	2.00	0.00	0.00
399	3.00	2.00	1.00	1.00
400	3.00	2.00	0.00	0.00
401	3.00	3.00	1.00	1.00
402	3.00	3.00	1.00	1.00
403	3.00	3.00	0.00	0.00
404	3.00	3.00	0.00	0.00
405	3.00	3.00	0.00	0.00
406	3.00	3.00	0.00	1.00
407	3.00	3.00	1.00	1.00
408	3.00	3.00	1.00	1.00
409	3.00	3.00	0.00	0.00
410	3.00	3.00	1.00	1.00
411	3.00	3.00	1.00	1.00
412	3.00	3.00	0.00	0.00
413	3.00	3.00	1.00	1.00
414	3.00	3.00	0.00	1.00
415	3.00	3.00	1.00	1.00
416	3.00	3.00	1.00	1.00
417	3.00	3.00	1.00	1.00
418	3.00	3.00	1.00	1.00
419	3.00	3.00	1.00	1.00
420	3.00	3.00	1.00	1.00
421	3.00	3.00	0.00	1.00
422	3.00	3.00	0.00	0.00
423	3.00	3.00	1.00	1.00
424	3.00	3.00	1.00	1.00
425	3.00	3.00	0.00	0.00

426	3.00	3.00	1.00	0.00
427	3.00	3.00	1.00	1.00
428	3.00	3.00	1.00	1.00
429	3.00	3.00	1.00	1.00
430	3.00	3.00	0.00	0.00
431	3.00	3.00	1.00	1.00
432	3.00	3.00	1.00	1.00
433	3.00	3.00	1.00	1.00
434	3.00	3.00	1.00	0.00
435	3.00	3.00	1.00	1.00
436	3.00	3.00	1.00	1.00
437	3.00	3.00	0.00	0.00
438	3.00	3.00	1.00	1.00
439	3.00	3.00	0.00	0.00
440	3.00	3.00	1.00	1.00
441	3.00	3.00	1.00	1.00
442	3.00	3.00	0.00	0.00
443	3.00	3.00	0.00	1.00
444	3.00	3.00	1.00	1.00
445	3.00	3.00	0.00	0.00
446	3.00	3.00	1.00	1.00
447	3.00	3.00	1.00	1.00
448	3.00	3.00	0.00	0.00
449	3.00	3.00	1.00	1.00
450	3.00	3.00	0.00	0.00

منابع

1) Abramowitz، M. and Stegun Eds. (1965) “Handbook of Mathematical Functions” Dover، New York.

2) Agresti، A. (1990) “Categorical Data Analysis” Wiley، New York.

3) Agresti، A. and Lang، J.B. “Quasi Symmetry Latent Class Models with Application to Rater Agreement” Biometrics، 49، 131-139

4) Agresti، A. (1996) “An Introducation to Categorical Data Analysis” Wiley، New York.

5) Aitkin، M. (1999) “A General Maximum Likelihood Analysis of Variance Components in Generalized Linear Models” Biometrics، 55، 117-128.

6) Akaike M. (1973) “Information Theory and Extension of the Maximum Likelihood Priciple” in Second International Symposium on Information Theory، Eds. B.N.Petrox and F. Caski، Butapest، Akademia Kiado، 267.

7) Akaike، M. (1977) “On Entropy Maximization Principle” in Application of Statistics، Eds. P.R.Krishaiah، Amesterdam، North-Holland، 27-41.

8) Akaike، M. (1983) “Information Measures and Model Selection” Bulltain of the International Statistical Institute، 50، 277-290.

9) Andersen، E.B. (1991) “The Statistical Analysis of Categorical Data” Springer، Heidelberg، Germany.

10) Anderson، D.A. and Aitkin، M. (1985) “Variance

Componen Models with Binary Response: Interviewer Variability” Journal of Royal Statistical Association، B، 47، 2، 203-210.

11) Automitive Industry Action Group (2002) “Measurement Systems Analysis Reference Manual” 3rd Ed. Detroit، MI.

12) Bazarraa، M.S.، Hanif، D.S. and Shetty، C.M. (1993) “Nonlinear Programming : Theory and Algorithms” 2nd Ed.، Wiley، New York.

13) Berger، J.O. (1985) “Decision Thoery and Bayesian Analysis” Springer، New York.

14) Bernardo، J. (1979) “Reference Posterior Distributions for Bayesian Inference “، Journal of Royal Statistical Society، B، 41، 113-147.

15) Bernardo، J. (1997) “Noninformative Priors Do not Exist” Journal of Planning and Inference، 65، 159-189.

16) Bhatt، B.R. and Nagnur، B.N. (1965) “Locally Asymptotically Most Stringent Tests and Lagrangian Multiplier Tests for Linear Hypothesis” Biometrika 53، 459-468.

17) Boyles، R.A. (2001) “Gauge Capability for Pass-Fail Inspection” Technometrics، 29، 223-229.

18) Breslow، N. E. and Lin، X. (1995) “Bias Correction in Generalized Linear Mixed Models with a Signgle Comonent of Dispersion” Biometrika، 82، 81-91.

19) Breslow، N. E. and Clyton، D.G. (1993) “Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models” Journal of the American Statistical Association، 88، 9-25.

20) Brovkov، A.A. (1998) “Mathematical Statistics” Gordon and Breach، Australia.

21) Burdick، R.K.، Borror، C.M. and Montgomery، D.C. “A Review of Methods for Measurement Systems Capability Analysis” Journal of Quality Technology، 35، 4، 342-354.

22) Cantoni، E. and Rocchetti، E. (2001)“Robust Inference for Generalized Linear Models” Journal of the American Statistical Association، 96، 1022-1030.

23) Cantoni، E. (2003) “Robust Inference Based on Quasi Likelihoods for Generalized Linear Models and Longitudinal Data” in Developments in Robust Statistics، R.Dutter، P. Filzmoser، U. Gather and P.J. Rosseeuw Eds.، Springer، Heidelberg، Germany.

24) Carlin، B.P. and Louis، T.A. (2000) “Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis” 2nd Ed. CRC Press، New York.

25) Charnes، E.L.F. and Yu، P.L. (1976) “Equivalence of Generalized Least Squares and Maximum Likelihood Estimates in the Exponential Family” Journal of the American Statistical Association، 71، 169-171.

26) Chung، K.L. (1974) “Probability Theory” Academic Press، New York.

27) Cohen، J. (1960) “A Coefficient of Agreement for Nominal Scales” Educational Psychology Measurement، 20، 37-46.

28) Cressie، N.A.C. and Read، T.R.C. “Goodness of Fit Statistics for Discrete Multivariate Data” Springer، New York.

29) Davies، R.B. (1987) “Masspoint Method for Dealing with Nuisance Parameters in Longitudinal Studies” in Longitudinal Data Analysis، R. CrouchleyEd.، 88-109.

30) Dempster، A.P.، Laird، N.M. and Rubin، D.B. (1977)“Maximum Likelihood from Incomplete Data via EM

Algorithm" Journal of the American Statistical Association، 72، 1-38.

31) Diggle، P.K.، Liang، K.Y. and Zeger، S.L. "Analysis of Longitudinal Data" Oxford، UK.

32) Efron، B. and Tibshirani، R.J. (1993) "An Introducation to the Bootstrap" Chapman and Hall.

33) Efron، B. (1979) "Bootstrap: Another Look at the Jackknife" Annals of Statistics، 7، 1-26.

34) Everitt (1968) "Moments of Statistics Kappa and Weighted Kappa" British Journal of Mathematical Statistics Psychology، 21، 97-103.

35) Findly، D.F. (1991) "Counterexamples to Parsimony and BIC" Annals of the Institute of Mathematical Statistics، 43، 505-514.

36) Fleiss (1981) "Statistical Methods for Rates and Proportions" Wiley، New York.

37) Fort (1948) "Finite Differencesand Difference Equations in the Real Domain" Oxford University Press, Fair Lawn, W.E.

38) Fotouhi، A.R. (2003) "Comparison of Estimation Procedures for Nonlinear Multilevel Models" Journal of Statistical Software، 10، 8.

39) Godambe، V.P. and Heyde C.C. "Quasi Likelihood and Optimal Estimation" International Statistical Review، 55، 231-244.

40) Godambe، V.P. and Thompson، M.E. (1984) "Robust Estimation through Estimating Equations" Biometrika، 71، 115-125.

41) Godambe، V.P. (2002) “Estimation of Median: Quasi Likelihood and Optimum Estimating Functions” To Appear.

42) Goldstein، H.(1986) “Multilevel Mixed Linear Models Analysis using Iterative Generalized Least Squares” Biometrika، 78، 43-56.

43) Goldstein، H. (1989) “Restricted Unbiased Iterative Generalized Least Squares” Biometrika، 76، 622-623.

44) Goldstein، H. (1995) “Multilevel Statistical Models”

45) Goldstein، H. (1991) “Nonlinear Multilevel Models with an Application to Discrete Response Data” Biometrika، 78، 45-51

46) Goldstein، H. and Rasbash، J. (1996) “Improved Approximations for Multilevel Modes with Binary Responses” Journal of Royal Statistical Society، A، 3، 505-513.

47) Gwett، K.(2001) “Handbook of Interrater Agreement” Stataxis Consulting، Gaithersburg، MD.

48) Gwett، K. (2002) “Kappa Statistic is not Satisfactory for Assessting Extent of Agreement Between Raters” Statistical Methods for Interrater Reliability Assessment، No. 1، Stataxis Consulting،Gaithersburg، MD.

49) Hastings، W.K.(1970) “Monte Carlo Sampling Methods and Their Applications” Biometrika، 51، 1، 97-109.

50) Heartford، A. and Davidian، M. (2000)“Consequences of Misspecifying Assumptions in Nonlinear Mixed Effects Models” Computational Statistics and Data Analysis، 34، 139-164.

51) Heckman، J. and Singer، B. (1984) “A Method for Minimizing the Impact of Distributional Assumptions in Econometric Models for Duration Data” Econometrica 52، 2،

271-320.

52) Hildebrand, F.B. (1988) “Introduction to Numerical Analysis” McGraw Hill, India.

53) Jerffreys، H. (1961) “Theory of Probability” 3rd Ed.، Oxford، UK.

54) Jung، S.H. (1996) “Quasi Likelihood for Median Regression Models” Journal of the American Statistical Association، 91، 251-257.

55) Kass، R.E. and Raftery، A.E. (1995) “Bayes Factors” Journal of the American Statistical Asscociation، 90، 773-795.

56) Katz، R.W. (1981) “On Some Criteria for Estimating the Order of a Markov Chain” Technometrics، 23، 243-249.

57) Kendall، M. and Stuart، A. (1979) “Advanced Theory of Statistics” Vol. 2، Griffin، London.

58) Kendall، M. and Stuart، A. (1979) “Advanced Theory of Statistics” Vol. 1، Griffin، London.

59) Laird، N.M. and Ware، J.H. (1982) “Random Effects Models for Longitudinal Data” Biometrics، 38، 963-974.

60) Laird، N. (1978) “Nonparametric Maximum Likelihood Estimation of a Mixing Distribution” Journal of the American Statistical Association، 73، 805-811.

61) Landis، J.R. and Koch، G.G. (1977) “The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data” Biometrics، 33، 159-174.

62) Lehman، E.L. (1986) “Testing Statistical Hypotheses” Wiley، New York.

63) Lehman، E.L. (1984) “Theory of Point Estimation”

Springer، New York.

64) Lesaffre، E. and Spiessens، B. (2000) “On the Effect of Number of Quadrature Points in a Logistic Random Effects Model: An Example” Applied Statistics، 50، 3، 325-335.

65) Lin، X. (1997) “Variance Component Testing in Generalized Linear Modles with Random Effects” Biometrika، 84، 2، 309-326.

66) Lin، X. and Breslow، N.(1996) “Bias Correction in Generalized Linear Mixed Models with Multiple Components of Dispersion” Journal of the American Statistical Association، 91، 1007-1017.

67) Lindstorm، M.J. and Bates، D.M. (1990) “Nonlinear Mixed Effects Models for Repeated Measures Data” Biometrics، 46، 673-687.

68) Linhart، H. and Zuncchini (1986) “Model Selection” John Wiley، New York.

69) Liu، Q. and Pierce، D.A. (1994) “A Note on Gauss-Hermit Quadrature” Biometrika، 81، 3، 624-629.

70) Longford، N.T. (1987) “A Fast Scoring Algorithm for Maximum Likelihood Estimation in Unbalanced Mixed Models with Nested Random Effects” Biometrika، 74، 817-827.

71) Louis، T.A.، DerSimonian، R. (1982) “Health Statistics Based on Discrete Population Groups” in Regional Variations in Hospital Use، D. Rothberg Ed. Heath and Co، Boston.

72) McCullagh، G. (1997) “Maximum Likelihood Algorithms for Generalized Linear Mixed Models” Journal of the American Statistical Association، 92، 162-170.

73) McCullagh، C.E. and Nelder، J.A. (1989) “Generalized Linear Models” Chapman and Hall.

74) McCullagh، C.E. (2000) “Generalized Linear Models” Journal of the American Statistical Association، 95، 1320-1324.

75) Miller (1977) “Asymptotic Properties of Maximum Likelihood Estimates in the Mixed Model of Analysis of Variance” Annals of Statistics 5، 746-762.

76) Montgomery، D.C. and Runger، G.C. “Gauge Capability and Designed Experiments Part I ” Quality Engineering 6، 115-135.

77) Montgomery، D.C. and Runger، G.C. “Gauge Capability and Designed Experiments Part II ” Quality Engineering 6، 289-305.

78) Montgomery، D.C.، Peck، E. and Vining، G.G. (2001)“Introduction to Linear Regression Analysis” Wiley، New York.

79) Morris، C.N. (1983) “Parametric Empirical Bayes Inference : Theory and Applications” Journal of the American Statistical Association، 78، 47-65.

80) Myers، H. Montgomery، D.C. and Vining، G.G. (2002) “Generalized Linear Models with Applications in Engineering and Sciences” Wiley، New York.

81) Nelder، J.A. and Wedderburn، R.W.M. (1972) “Generalized Linear Models” Journal of Royal Statistical Society A، 135، 370-384.

82) Pinheiro، J.C. and Bates، D.M. (2000)“Mixed Effects Models in S and S-Plus” Springer، New York.

83) Rabe-Hesketh، S.، Skrondal، A. and Pickles، A. (2002) “Reliable Estimation of Generalised Linear Mixed Models using Adaptive Quadrature” The Stata Journal، 2، 1-21.

84) Rao، P.S.R.S. (1997) “Variance Components:Mixed Models، Methodologies and Applications” Chapman and Hall، London.

85) Robinson، G.K. (1991) “That BLUP is a Good Thing” Statistical Science، 6، 15-51.

86) Rodriguez، G. and Goldman، N. (1995) “An Assessment of Estimation Procedures for Multilevel Models with Binary Response” Journal of Royal Statistical Society A، 1، 73-89.

87) Rohatgi، V.K. and Saleh، E. (2000) “An Introducation to Probability and Statistics” Wiley، New York.

88) Schwarz، G. (1978) “Estimating the Dimension of the Model” The Anals of Statistics، 6، 461-464.

89) Scott، W.A. (1955) “Reliability of Content Analysis: The Case of Nominal Scale Coding” Public Opinion Quart، 19، 321-325.

90) Searle، S.R.، Casella، G. and McCullagh، C.E. “Variance Components” Wiley، New York.

91) Self، S.G. Liang K.Y. (1987) “Asymptotic Properties of Maximum Likelihood Estimators and Likelihood Raition Tests under Nonstandard Conditions” Journal of the American Statistical Association 82، 605-610.

92) Shibata، R. (1976) “Selection of the Order of an Autoregressive Model by Akaike’s Information Criterion” Biometrika، 63، 117-126.

93) Thompson، J.(2001) “Simulation: A Modeler’s Approach” Wiley، New York.

94) Verbeke، G. and Lesaffre، E. (1997) “The Effect of Misspecifying the Random Effects Distribution in Linear

Mixed Models for Longitudinal Data” 23، 541-556.

95) Verbeke، G.، and Molenberghs، G. “Linear Mixed Models in Practice” Lecture Notes in Statoistics، No. 126، Springer، New York.

96) Vermunt، J.K. (2003) “An Expectation-Maximization Algorithm for Generalised Linear Three Level Models” Multilevel Newsletter، 14، 2، 3-12.

97) Wedderburn، R.W.M. (1974) “Quasi Likelihood، Generalized Linear Models and Gauss-Newton Method” Biometrika، 61، 3، 439-447.

98) Wilks، S.S. (1963) “Mathematical Statistics” Wiley، New York.

99) Wolfinger، R.D. and Lin، X. “Two Taylor Series Approximation Methods for Nonlinear Mixed Models” Computational Statistics and Data Analysis، 25، 465-490.