Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра обчислювальної техніки

Методи оптимізації та планування експерименту

Лабораторна робота №2

«ПРОВЕДЕННЯ ДВОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ»

Виконала:
студентка групи ІО-92
Шолотюк Ганна Сергіївна
Номер залікової книжки № 9229
Номер у списку – 21

Перевірив:
Регіда Павло Геннадійович

Київ 2021

Мета: провести двофакторний експеримент, перевірити однорідність дисперсії за критерієм Романовського, отримати коефіцієнти рівняння регресії, провести натуралізацію рівняння регресії.

Завдання на лабораторну роботу

1. Записати лінійне рівняння регресії.

2. Обрати тип двофакторного експерименту і скласти матрицю планування для нього з використанням додаткового нульового фактору (xo=1).

3. Провести експеримент в усіх точках повного факторного простору (знайти значення функції відгуку y). Значення функції відгуку задати випадковим чином у відповідності до варіанту у діапазоні ymin ÷ ymax

ymax = (30 - Nваріанту)*10,
ymin = (20 - Nваріанту)*10.

221	10	40	10	60

Код програми:

```
from random import randint
import math
import numpy as np
from prettytable import PrettyTable

N_var = 21
Y_max = (30 - N_var) * 10
Y_min = (20 - N_var) * 10
X1_min = 10
X1_max = 40
X2_min = 10
X2_max = 60
N = 5
matrix = []
# Значення критерію Романовського за різних довірчих ймовірностей p кількостях
дослідів m
p_list = (0.99, 0.98, 0.95, 0.90)
rkr_table = {2: (1.73, 1.72, 1.71, 1.69),
             6: (2.16, 2.13, 2.10, 2.00),
             8: (2.43, 4.37, 2.27, 2.17),
             10: (2.62, 2.54, 2.41, 2.29),
             12: (2.75, 2.66, 2.52, 2.39),
             15: (2.9, 2.8, 2.64, 2.49),
             20: (3.08, 2.96, 2.78, 2.62)}

# Заповнимо матрицю планування для m=5
matrix = [[randint(Y_min, Y_max) for n in range(N)] for k in range(3)]
x_norm = [[-1, 1, -1], [-1, -1, 1]]
print("Дано: Y_max = {}  Y_min = {}  X1_min = {}  X1_max = {}  X2_min = {}  X2_max
```

```
= {}".format(Y_max, Y_min, X1_min,

X1_max, X2_min, X2_max))
print("Матриця планування для m = {}".format(N))

# ---Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського---
# 1.Знайдемо середнє значення функції відгуку в рядку:
average_Y1 = sum(matrix[0][j] for j in range(N)) / N
average_Y2 = sum(matrix[1][j] for j in range(N)) / N
average_Y3 = sum(matrix[2][j] for j in range(N)) / N
# 2.Знайдемо дисперсії по рядках:
D_Y1 = sum([(j - average_Y1) ** 2 for j in matrix[0]]) / N
D_Y2 = sum([(j - average_Y2) ** 2 for j in matrix[1]]) / N
D_Y3 = sum([(j - average_Y3) ** 2 for j in matrix[2]]) / N
# 3.Обчислимо основне відхилення:
main_deviation = math.sqrt((2 * (2 * N - 2)) / (N * (N - 4)))
# 4.Обчислимо Fuv:
Fuv_1 = D_Y1 / D_Y2
Fuv_2 = D_Y3 / D_Y1
Fuv_3 = D_Y3 / D_Y2
# 4.Обчислимо TETAuv:
TETAuv_1 = ((N - 2) / N) * Fuv_1
TETAuv_2 = ((N - 2) / N) * Fuv_2
TETAuv_3 = ((N - 2) / N) * Fuv_3
# 6.Обчислимо Ruv:
Ruv_1 = abs(TETAuv_1 - 1) / main_deviation
Ruv_2 = abs(TETAuv_2 - 1) / main_deviation
Ruv_3 = abs(TETAuv_3 - 1) / main_deviation

# ---Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського---

m = min(rkr_table, key=lambda x: abs(x - N))
p = 0
for ruv in (Ruv_1, Ruv_2, Ruv_3):
    if ruv > rkr_table[m][0]:
        print(f'\n Дисперсія неоднорідна! Змінимо m={N} to m={N + 1}\n')
        N += 1
for rkr in range(len(rkr_table[m])):
    if ruv < rkr_table[m][rkr]:
        p = rkr
temp = rkr_table[m][p]
p2 = p_list[p]
item_table = temp

for i in range(3):
    matrix[i].append(randint(Y_min, Y_max))

# Розрахуємо нормованих коефіцієнтів рівняння регресії.
mx1 = sum(x_norm[0]) / 3
mx2 = sum(x_norm[1]) / 3

my = (average_Y1 + average_Y2 + average_Y3) / 3

a1 = sum([i ** 2 for i in x_norm[0]]) / 3
a2 = sum(x_norm[0][i] * x_norm[1][i] for i in range(3)) / 3
a3 = sum([i ** 2 for i in x_norm[1]]) / 3
a11 = (x_norm[0][0] * average_Y1 + x_norm[0][1] * average_Y2 + x_norm[0][2] *
average_Y3) / 3
a22 = (x_norm[1][0] * average_Y1 + x_norm[1][1] * average_Y2 + x_norm[1][2] *
average_Y3) / 3

B0 = np.linalg.det(
```

```
    [[my, mx1, mx2], [a11, a1, a2], [a22, a2, a3]]) / (np.linalg.det([[1, mx1,
mx2], [mx1, a1, a2], [mx2, a2, a3]]))
B1 = np.linalg.det(
    [[1, my, mx2], [mx1, a11, a2], [mx2, a22, a3]]) / (np.linalg.det([[1, mx1,
mx2], [mx1, a1, a2], [mx2, a2, a3]]))
B2 = np.linalg.det(
    [[1, mx1, my], [mx1, a1, a11], [mx2, a2, a22]]) / (np.linalg.det([[1, mx1,
mx2], [mx1, a1, a2], [mx2, a2, a3]]))

# Проводимо натуралізацію коефіцієнтів:
delta_x1 = math.fabs(X1_max - X1_min) / 2
delta_x2 = math.fabs(X2_max - X2_min) / 2
x10 = (X1_max + X1_min) / 2
x20 = (X2_max + X2_min) / 2
a2_0 = B0 - (B1 * (x10 / delta_x1)) - (B2 * (x20 / delta_x2))
a2_1 = B1 / delta_x1
a2_2 = B2 / delta_x2

table_1 = PrettyTable()
table_1.add_column("X1", x_norm[0])
table_1.add_column("X2", x_norm[1])
table_1.add_column("Y1", [matrix[i][0] for i in range(3)])
table_1.add_column("Y2", [matrix[i][1] for i in range(3)])
table_1.add_column("Y3", [matrix[i][2] for i in range(3)])
table_1.add_column("Y4", [matrix[i][3] for i in range(3)])
table_1.add_column("Y5", [matrix[i][4] for i in range(3)])
print(table_1)

print("1) Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського:")
print(
    "1. Середнє значення функції відгуку в рядку: Y1 = {}  Y2 = {}  Y3 =
{}".format(average_Y1, average_Y2, average_Y3))
print("2. Значення дисперсії по рядках: σ²(Y1) = {}  σ²(Y2) = {}  σ²(Y3) =
{}".format("%.2f" % D_Y1, "%.2f" % D_Y2,

"%.2f" % D_Y3))
print("3. Основне відхилення σθ: {}".format("%.2f" % main_deviation))
print("4. Обчислюємо Fuv: Fuv_1 = {}  Fuv_2 = {}  Fuv_3 = {}".format("%.2f" %
Fuv_1, "%.2f" % Fuv_2, "%.2f" % Fuv_3))
print("5. Обчислюємо θuv: θ_uv1 = {}  θ_uv2 = {}  θ_uv3 = {}".format("%.2f" %
TETAuv_1, "%.2f" % TETAuv_2,
                                                                     "%.2f" %
TETAuv_3))
print("6. Обчислюємо Ruv: Ruv_1 = {}  Ruv_2 = {}  Ruv_3 = {}".format("%.2f" %
Ruv_1, "%.2f" % Ruv_2, "%.2f" % Ruv_3))
print("Ruv1 = {} < Rкр = {}".format("%.2f" % Ruv_1, item_table))
print("Ruv2 = {} < Rкр = {}".format("%.2f" % Ruv_2, item_table))
print("Ruv3 = {} < Rкр = {}".format("%.2f" % Ruv_3, item_table))
print("Однорідність дисперсій підтверджується з ймовірністю p = {} !".format(p2))
print("2) Розрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії:")
print("mx1 = {}  mx2 = {}  my = {}".format("%.2f" % mx1, "%.2f" % mx2, "%.2f" %
my))
print("a1 = {}  a2 = {}  a3 = {}".format("%.2f" % a1, "%.2f" % a2, "%.2f" % a3))
print("a11 = {}  a22 = {}     =>    B0 = {}  B1 = {}  B2 = {}".format("%.2f" % a11,
"%.2f" % a22, "%.2f" % B0,
                                                                      "%.2f" % B1,
"%.2f" % B2))
print("Нормоване рівняння регресії : y = {} + ({})*x1 + ({})*x2 ".format("%.2f" %
B0, "%.2f" % B1, "%.2f" % B2))
print("B0 - B1 - B2 = {} = Y1 = {}".format("%.2f" % (B0 - B1 - B2), average_Y1))
print("B0 + B1 - B2 = {} = Y2 = {}".format("%.2f" % (B0 + B1 - B2), average_Y2))
print("B0 - B1 + B2 = {} = Y3 = {}".format("%.2f" % (B0 - B1 + B2), average_Y3))
```

```
print("Результати збігається з середніми значеннями Yj !")
print("3) Натуралізація коефіцієнтів")
print("Δx1 = {}  Δx2 = {}  X10 = {}  X20 = {}".format(delta_x1, delta_x2, x10,
x20))
print("a0 = {}  a1 = {}  a2 = {}".format("%.2f" % a2_0, "%.2f" % a2_1, "%.2f" %
a2_2))
print(
    "Натуралізоване рівняння регресії: y = {} + ({})*x1 + ({})*x2 ".format("%.2f" %
a2_0, "%.2f" % a2_1, "%.2f" % a2_2))
print("Перевірка по рядках:")
print("a2_0 + a2_1*X1_min + a2_2*X2_min = {} = Y1 = {}".format("%.2f" % (a2_0 +
a2_1 * X1_min + a2_2 * X2_min),
                                                              average_Y1))
print("a2_0 + a2_1*X1_max + a2_2*X2_min = {} = Y2 = {}".format("%.2f" % (a2_0 +
a2_1 * X1_max + a2_2 * X2_min),
                                                              average_Y2))
print("a2_0 + a2_1*X1_min + a2_2*X2_max = {} = Y3 = {}".format("%.2f" % (a2_0 +
a2_1 * X1_min + a2_2 * X2_max),
                                                              average_Y3))
print("Отже, коефіцієнти натуралізованого рівняння регресії обчислені правильно")
```

Результати тестування:

```
Дано: Y_max = 90  Y_min = -10  X1_min = 10  X1_max = 40  X2_min = 10  X2_max = 60
Матриця планування для m = 5
+----+----+----+----+----+----+----+
| X1 | X2 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
+----+----+----+----+----+----+----+
| -1 | -1 | 68 | 81 | 73 | 54 | 15 |
| 1  | -1 | 54 | 18 | 74 | 53 | 11 |
| -1 | 1  | 20 | -1 | 80 | -5 | 67 |
+----+----+----+----+----+----+----+
1) Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського:
1. Середнє значення функції відгуку в рядку: Y1 = 58.2  Y2 = 42.0  Y3 = 32.2
2. Значення дисперсії по рядках: σ²(Y1) = 543.76  σ²(Y2) = 565.20  σ²(Y3) = 1226.16
3. Основне відхилення σθ: 1.79
4. Обчислюємо Fuv: Fuv_1 = 0.96  Fuv_2 = 2.25  Fuv_3 = 2.17
5. Обчислюємо θuv: θ_uv1 = 0.58  θ_uv2 = 1.35  θ_uv3 = 1.30
6. Обчислюємо Ruv: Ruv_1 = 0.24  Ruv_2 = 0.20  Ruv_3 = 0.17
Ruv1 = 0.24 < Rкр = 2.0
Ruv2 = 0.20 < Rкр = 2.0
Ruv3 = 0.17 < Rкр = 2.0
Однорідність дисперсій підтверджується з ймовірністю p = 0.9 !
```

```
2) Розрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії:
mx1 = -0.33  mx2 = -0.33  my = 44.13
a1 = 1.00  a2 = -0.33  a3 = 1.00
a11 = -16.13  a22 = -22.67     =>    B0 = 37.10  B1 = -8.10  B2 = -13.00
Нормоване рівняння регресії : y = 37.10 + (-8.10)*x1 + (-13.00)*x2
B0 - B1 - B2 = 58.20 = Y1 = 58.2
B0 + B1 - B2 = 42.00 = Y2 = 42.0
B0 - B1 + B2 = 32.20 = Y3 = 32.2
Результати збігається з середніми значеннями Yj !
3) Натуралізація коефіцієнтів
Δx1 = 15.0  Δx2 = 25.0  X10 = 25.0  X20 = 35.0
a0 = 68.80  a1 = -0.54  a2 = -0.52
Натуралізоване рівняння регресії: y = 68.80 + (-0.54)*x1 + (-0.52)*x2
Перевірка по рядках:
a2_0 + a2_1*X1_min + a2_2*X2_min = 58.20 = Y1 = 58.2
a2_0 + a2_1*X1_max + a2_2*X2_min = 42.00 = Y2 = 42.0
a2_0 + a2_1*X1_min + a2_2*X2_max = 32.20 = Y3 = 32.2
Отже, коефіцієнти натуралізованого рівняння регресії вірні
```

Відповіді на контрольні питання:

1. Регресійні поліноми та їх застосування

Регресійні поліноми використовують в теорії планування експерименту для оцінки результатів вимірів. З їх допомогою також можна описати функцію для подальшого аналізу.

Поліноміальна регресія є однією з форм регресійного аналізу в якому залежність між незалежною змінною *x* і залежною змінною *y* моделюється як поліном від *x* ступеню *n*.

2. Дисперсії реалізацій (вимірювань функції відгуку) $\boldsymbol{\sigma^2_j}$ ($j=\overline{1,N}$) для нормально розподіленої випадкової величини однакові для усіх комбінації, тобто не залежать від абсолют-ного значення функції відгуку для кожної комбінації. Ця властивість нормально розподі-леної випадкової величини має назву однорідність дисперсії.

3. Повний факторний експеримент - це такий факторний експеримент, коли використовуються усі можливі комбінації рівнів факторів, при ПФЕ кількість комбінацій $\mathbf{N_п=r^k}$. Матриця планування повного факторного експерименту для одного фактору (**k=1**) використовує два рівня факторів (**r=2**), кодовані значення яких - **-1** та **+1**; кількість комбінацій – дві ($\mathbf{N_п=2^1=2}$).

Висновки:

В ході виконання лабораторної роботи було проведено двофакторний експеримент з використанням лінійного рівняння регресії. Також було перевірено однорідність дисперсії за критерієм Романовського, отримано коефіцієнти рівняння регресії та проведено натуралізацію рівняння регресії. Отримані теоретичні знання закріплено практичними, а саме: написано програму, що реалізує дане завдання лабораторної роботи. Успішне виконання програми продемонстровано скріншотами тестування, тобто, кінцеву мету досягнуто.