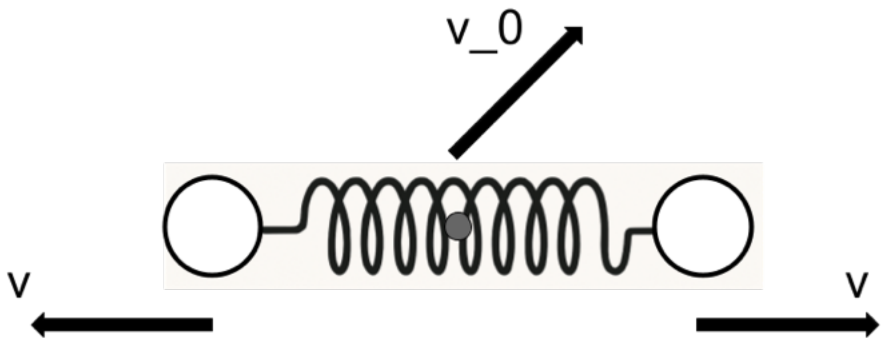
弾性エネルギー

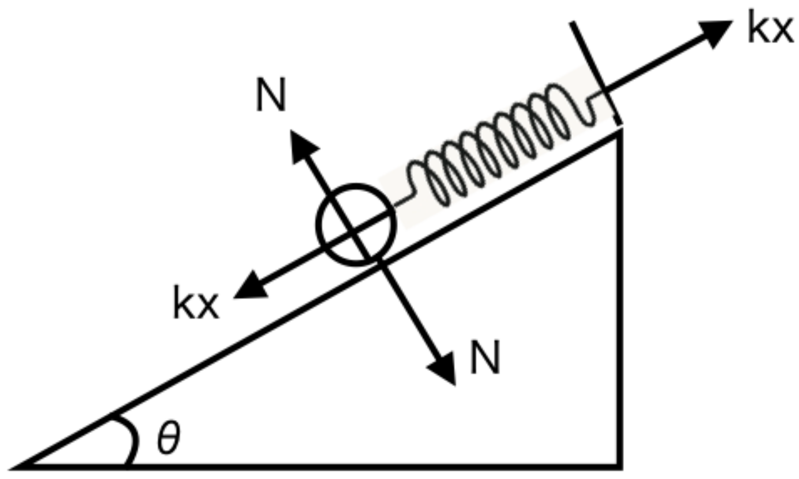


上図は空間内にバネ定数kのバネがあり、バネの中点が黒丸である。静止系から見て中点の速度はv_0ベクトルで、中点に対して両端の質点はバネの伸びる方向へ互いに等しい速さvで動いている。また、中点の系において自然長の時の質点の位置を原点とする（静止系の座標軸と中点系の座標軸は平行）。２物体の力と速度の内積を考える。

$$
\begin{aligned}
-2k\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{v})-2(-k\boldsymbol{x})\cdot\{\boldsymbol{v_0}+(-\boldsymbol{v})\} &= -4k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} = -4kx\cdot v \\
&= -4kx\cdot\frac{dx}{dt} = -4k\frac{d}{dt}(\frac{x^2}{2}) = -\frac{d}{dt}(2kx^2) \\
&= -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kx^2_{\text{バネの伸び}})
\end{aligned}
$$

壁に繋がれたバネであれば、壁は動かないので運動エネルギーの変化がなく、 バネに繋がった物体のみ着目すればよい。

例



最初、斜面台と球は静止しており、バネはx_0だけ自然長から縮んでいた。
球を離した後バネはどれほど伸びるかについて、

水平方向の運動量保存則より、

$$m\cdot 0+M\cdot 0=mu+Mu \Leftrightarrow u=0$$

エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}kx_0^2+mg(x_{max}+x_0)\sin\theta=\frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (x_{max}\text{は自然長に対して伸びている時、正で縮んでいる時、負})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k(x_{max}+x_0)(x_{max}-x_0)=mg(x_{max}+x_0)\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow x_{max}=-x_0, \frac{2mg\sin\theta}{k}+x_0$$

バネは最長 $\dfrac{2mg\sin\theta}{k}+x_0$ 伸びる。

戻る

重力による位置エネルギー

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,dt &= \int_{t_0}^{t_1} mg\cdot v_y\,dt = mg\int_{t_0}^{t_1} v_y\,dt \\
&= mg\int_{t_0}^{t_1}\frac{dy}{dt}\,dt = mg(y_1-y_0)
\end{aligned}
$$

重力は下向きにかかっているとして、y座標軸を上向きにとるか下向きにとるかを考えるが、 式では速度との内積を考えるので物体が下向きに進んでいるか上向きに進んでいるかに着目する。 下向きに進んでいる場合、内積正でy_1-y_0>0であり、仕事は正。仕事量を運動エネルギー側に移行 すると負になり、下向きに進んでいるので位置エネルギーは減少していると解釈できる。

戻る

運動エネルギー

直交座標系における質量mの物体の運動方程式について

$$
\begin{aligned}
m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\
(\text{左辺}) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} \\
= m(\frac{dv_x}{dt}v_x + \frac{dv_y}{dt}v_y + \frac{dv_z}{dt}v_z) = m\frac{d}{dt}(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}) = m\frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)
\end{aligned}
$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dt$$

(左辺)= $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

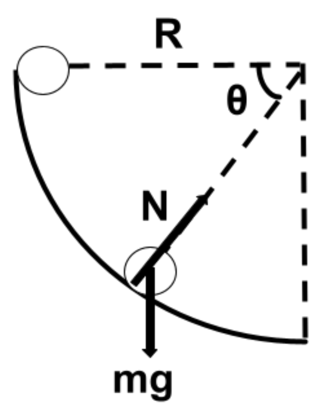
$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dt$ において重力や静電気力、バネの弾性力などの保存力は左辺に移行して力学的エネルギーとでき、

非保存力は右辺において仕事となる。

$\Delta E = \Delta W_{\text{非保存力}}$

($\Delta W_{\text{非保存力}} = 0$ の時、力学的エネルギー保存則が成立し、$E = \text{一定}$)

例.円形斜面を下る運動



質量mの物体が初速0で下る。

エネルギー保存則より、$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\sin\theta) \Leftrightarrow v = \sqrt{2gR\sin\theta}$

戻る

静電気力による位置エネルギー

1.電荷Qをもつ動かない物体を原点として、電荷qをもつ物体について

$$m\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}k\frac{qQ}{r^2}$$

$$(\frac{\boldsymbol{r}}{r}k\frac{qQ}{r^2})\cdot\boldsymbol{v} = (\frac{dx}{dt}x+\frac{dy}{dt}y+\frac{dz}{dt}z)k\frac{qQ}{r^3} = \frac{d}{dt}(\frac{r^2}{2})k\frac{qQ}{r^3} = \frac{dr}{dt}k\frac{qQ}{r^2} = \frac{d}{dt}(-k\frac{qQ}{r})$$

仕事率は力と速度の内積なので座標系の取り方によらない。よって複数の電荷が存在する場合でもエネルギー保存則は上記の式で成り立つ。

2.電荷Qの物体も動く場合

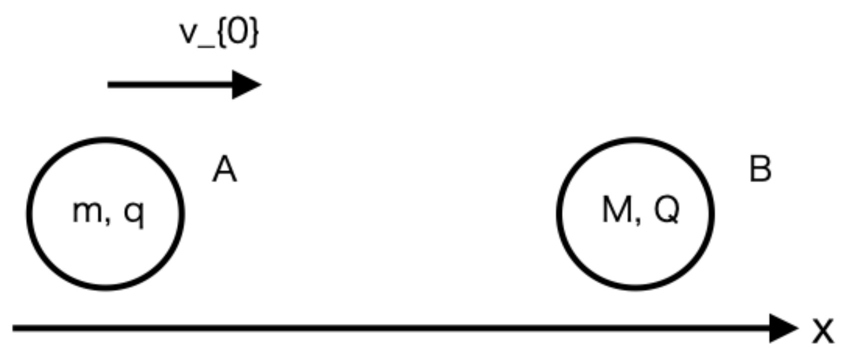
$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{f}_{\text{静電気力}} \\ M\boldsymbol{A} &= -\boldsymbol{f}_{\text{静電気力}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}_{\text{静電気力}}\cdot\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{f}_{\text{静電気力}})\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}_{\text{静電気力}}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}) \\ &= k\frac{qQ}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}) = \frac{d}{dt}(-k\frac{qQ}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|}) \end{aligned}$$

エネルギー保存則は２物体間において成り立つ。また、複数の物体間においても同様に成り立つ。

例

質量m、電荷qをもつ物体Aと質量M、電荷Qをもつ物体Bが同一直線上にある。無限遠から速さv_0でAが静止したBに 近づく。Bに到達しないとすると最も近づく距離はいくつか。



1.

A→Bの方向にx軸をとると運動方程式は

$$ma = -k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2}$$

$$MA = k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2}$$

$$\begin{aligned} MA = k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2} &\Leftrightarrow M(a + A_{A\to B}) = k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2} \\ &\Leftrightarrow MA_{A\to B} = k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2} - \frac{M}{m}(-k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2}) \\ &\Leftrightarrow MA_{A\to B} = k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2}(1+\frac{M}{m}) \\ \int_{\infty}^{r_{min}} MA_{A\to B}\,dr_{A\to B} &= \int_{\infty}^{r_{min}} k\frac{qQ}{r_{A\to B}^2}(1+\frac{M}{m})\,dr_{A\to B} \\ (\text{左辺}) = \int_{\infty}^{r_{min}} MA_{A\to B}\frac{dr_{A\to B}}{dt}\,dt &= \int_{t(r_{A\to B}=\infty)}^{t(r_{A\to B}=r_{min})} M\frac{d}{dt}(\frac{v_{A\to B}^2}{2})\,dt = 0 - \frac{1}{2}Mv_0^2 \\ (\text{右辺}) = \left[kqQ(-\frac{1}{r_{A\to B}})(1+\frac{M}{m})\right]_{\infty}^{r_{min}} &= -\frac{kqQ}{r_{min}}(1+\frac{M}{m}) + 0 \\ r_{min} &= \frac{2kqQ(m+M)}{mMv_0^2} \end{aligned}$$

2.

運動量保存則より

$$mv_0 = mu + Mu$$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mu^2 + k\frac{qQ}{r_{min}}$$

$$r_{min} = \frac{2kqQ(m+M)}{mMv_0^2}$$

戻る

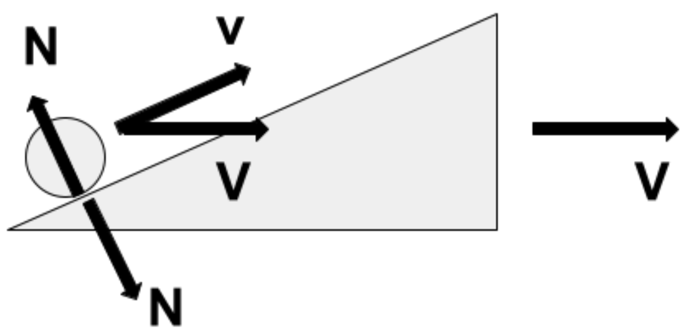
運動量

$$\text{運動方程式}\ m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} m\boldsymbol{a}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\,dt$$
$$\Leftrightarrow m\boldsymbol{v_1} - m\boldsymbol{v_0} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\,dt$$

運動量$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, 力積$\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\,dt$ より、$\Delta\boldsymbol{p} = \Delta\boldsymbol{I}$

作用反作用による力は逆向きに同じ時間かかるので２物体間において力積の足し合せにより 運動量保存則が成り立つことがある。

例.斜面台を上る物体



初速v_0で球が斜面の端を上り始めて斜面に対して静止するとき、斜面も球も同じ速度で水平に移動していている。
水平方向には球と斜面は垂直抗力の水平成分の力しかかかっていないので、

$\Delta p_{\text{球,水平方向}} = \Delta I_{\text{水平方向}}$, $\Delta p_{\text{斜面,水平方向}} = -\Delta I_{\text{水平方向}}$

足し合わせると、
$$\Delta p_{\text{球,水平方向}} + \Delta p_{\text{斜面,水平方向}} = 0 \Leftrightarrow mv_0 = mu + Mu \Leftrightarrow u = \frac{mv_0}{m+M}$$

角運動量保存則

物体の位置ベクトル$\boldsymbol{r} = r(\cos\theta, \sin\theta)$に関して、 $\boldsymbol{e}_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \boldsymbol{e}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ とする。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \frac{d}{dt}(r'\boldsymbol{e}_1 + r\boldsymbol{e}_2) = (r\prime\prime - r(\frac{d\theta}{dt})^2)\boldsymbol{e}_1 + (2r'\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2})\boldsymbol{e}_2$$

中心力しか働かない場合、$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$より、$2r'\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

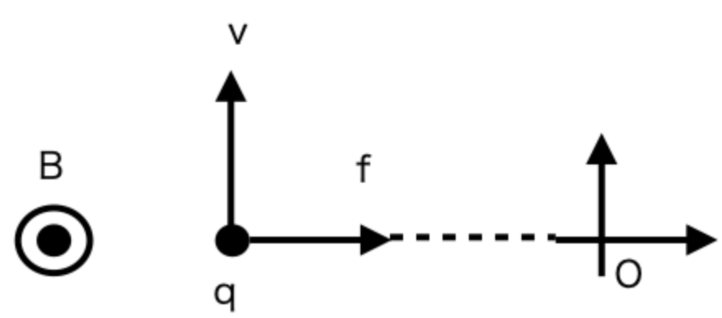
また、角運動量$mrv_{動系に対して垂直な方向の速度}$をtに関して微分すると、$v_{動系に対して垂直な方向の速度} = r\frac{d\theta}{dt}$より、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\frac{d\theta}{dt}) = m(2r\frac{d\theta}{dt}r' + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}) = mr(2\frac{d\theta}{dt}r' + r\frac{d^2\theta}{dt^2}) = 0$$

よって、角運動量は一定。

戻る

例.1



電荷qの点電荷に働くローレンツ力による運動について、$\boldsymbol{f} = q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ より、fは仕事をせず、速さは一定。角運動量保存則よりr一定で等速円運動をする。

s

記号	単位
ϕ, m	[Wb]
B	[T] = $[\mathrm{Wb/m^2}]$
H	[N/Wb]

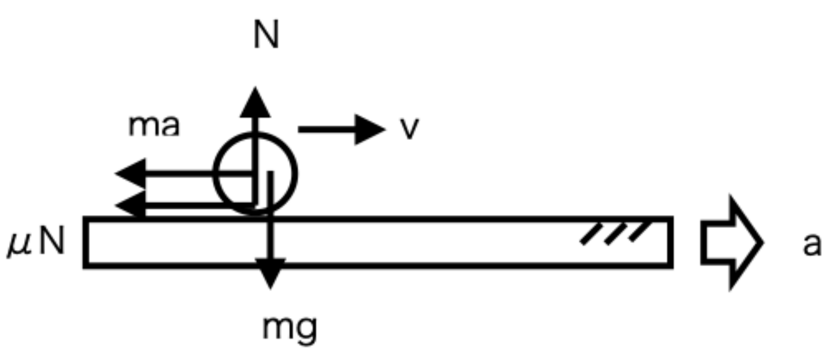
慣性系

慣性系とはその座標系での物理量を用いて運動方程式が成り立つ系のことで、 慣性系かは実験で測定して分かる。

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

例:地上や太陽系

例.慣性力



台に対する初速 v_0 で質量mの球が摩擦のある台上を動く。台は加速度aで移動しており、 球が台に対して静止するまでの台に対する移動距離を考える。 動摩擦係数は μ とする。

$$mA = -\mu N$$
$$N = mg$$

$$mA = -\mu N \Leftrightarrow mA = -\mu mg$$

$$\Leftrightarrow m(a + a_{台\to球}) = -\mu mg \Leftrightarrow ma_{台\to球} = -\mu mg - ma$$

台からみた時、球が運動方程式を満たすようにするには、 慣性力maが加速度aの逆向きに働かなくてはならないことを示している。
つまり、実際に働いているだけの力のみの方程式 $ma_{台\to球} = -\mu mg$ では実際に台から球の挙動を調べた時のものと矛盾すると思われる。 なぜなら台の座標系は慣性系ではないからで、実際の力のみでは運動を示すことはできない。

台とともに動く座標系で考えると、 $\Delta E = \Delta W_{非保存力}$ より、

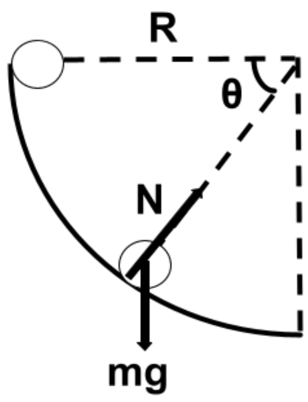
$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -m(\mu g + a)\Delta x_{台\to球}$$

$$\Delta x_{台\to球} = \frac{v_0^2}{2(\mu g + a)}$$

戻る

補足

1.円形斜面を下る運動



質量mの物体が初速0で下る。

エネルギー保存則より、$mgR=\frac{1}{2}mv^2+mgR(1-\sin\theta)\Leftrightarrow v=\sqrt{2gR\sin\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{R}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{R}}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{d\theta}{dt}dt=\int\sqrt{\frac{2g}{R}}dt\Leftrightarrow\int\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}d\theta=\sqrt{\frac{2g}{R}}t+C\quad(C\text{は積分定数})$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{2g}{R}}t\quad(t=0\text{の時、}\theta=0\text{で}C=0)$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{g}{4R}t^2$$

円運動をしているので、$m\frac{v^2}{R}=N-mg\sin\theta$

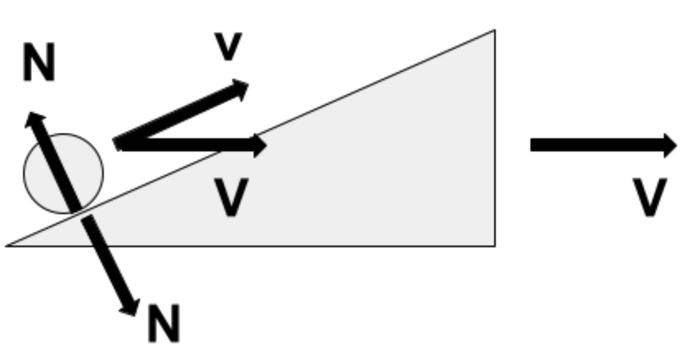
$$N=m\frac{v^2}{R}+mg\sin\theta=3mg\sin\theta$$

$$=3mg\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=6mg\sqrt{\frac{1}{(1+(\frac{gt^2}{4R})^2)(1+(\frac{4R}{gt^2})^2)}}$$

最下点に達する時刻は $T=2\sqrt{\frac{R}{g}}$

(最下点付近で離した場合、 $T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$)

2.斜面台を上る物体



$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}=0,\ \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{V}+(-\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{V}=0$ より、斜面台と物体の間でエネルギー保存則が成り立つ。

[戻る]

惑星

1.

$$\text{定数 } h = r^2\frac{d\theta}{dt} \text{ とする。}$$

$$m(\ddot{r} - r(\frac{d\theta}{dt})^2) = -G\frac{mM}{r^2}$$

$$\ddot{r} - r(\frac{d\theta}{dt})^2 = -G\frac{M}{r^2}$$

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2}$$

$$h = r^2\frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow h\frac{dt}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} \Leftrightarrow h\frac{dt}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dr} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dt}{d\theta} = -h\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dt}{d\theta} = -h\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow -h^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{h^2}{r} = -GM$$

$$\Leftrightarrow h^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{h^2}{r} = GM \Leftrightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{GM}{h^2}$$

$$u' = \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2} \text{ とする。}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{GM}{h^2} \Leftrightarrow \frac{d^2u'}{d\theta^2} = -u'$$

$$\Leftrightarrow u' = A\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{h^2A}{GM}\cos(\theta - \theta_0)}$$

2.

$$e=\frac{h^2A}{GM},\ p=\frac{h^2}{GM}$$とする。楕円の時、$0<e<1$

$$r=\frac{\dfrac{h^2}{GM}}{1+\dfrac{h^2A}{GM}\cos(\theta-\theta_0)}\Leftrightarrow r\left(1+\frac{h^2A}{GM}\cos(\theta-\theta_0)\right)=\frac{h^2}{GM}$$

$$\Leftrightarrow r+\frac{h^2A}{GM}r\cos(\theta-\theta_0)=\frac{h^2}{GM}\Leftrightarrow r+\frac{h^2A}{GM}x=\frac{h^2}{GM}\Leftrightarrow r=\frac{h^2}{GM}-\frac{h^2A}{GM}x$$

$$\Leftrightarrow r^2=\left(\frac{h^2}{GM}-\frac{h^2A}{GM}x\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=\left(\frac{h^2}{GM}-\frac{h^2A}{GM}x\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=(p-ex)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=p^2-2pex+(ex)^2\Leftrightarrow\left(1-e^2\right)x^2+2pex+y^2=p^2$$

$$\left(1-e^2\right)x^2+2pex+y^2=p^2\Leftrightarrow\left(1-e^2\right)\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2+y^2=p^2+\frac{(pe)^2}{1-e^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+\dfrac{pe}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2+\dfrac{(pe)^2}{1-e^2}}{1-e^2}}+\frac{y^2}{p^2+\dfrac{(pe)^2}{1-e^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+\dfrac{pe}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{p^2}{1-e^2}}=1$$

楕円の面積$S=\pi\cdot\dfrac{p}{1-e^2}\cdot\dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\dfrac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$

周期$T=\dfrac{S}{\frac{h}{2}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$

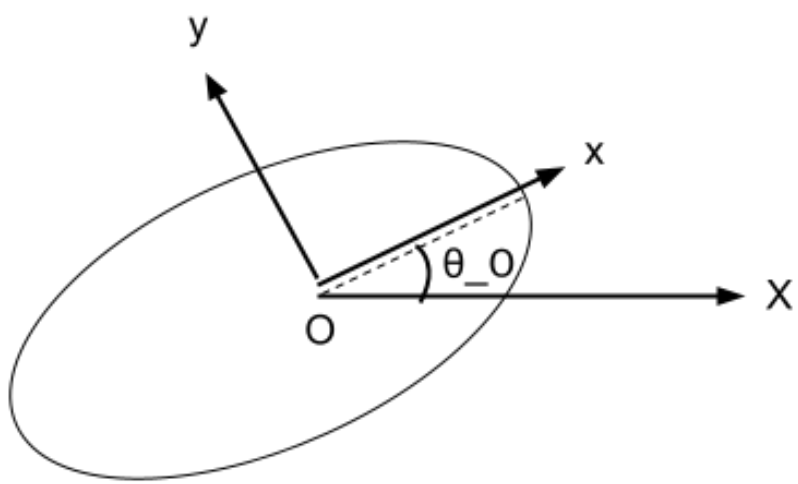
3.

$$\int_0^T \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}dt = 2\int_0^\pi \frac{1}{2}r^2 d\theta = S$$

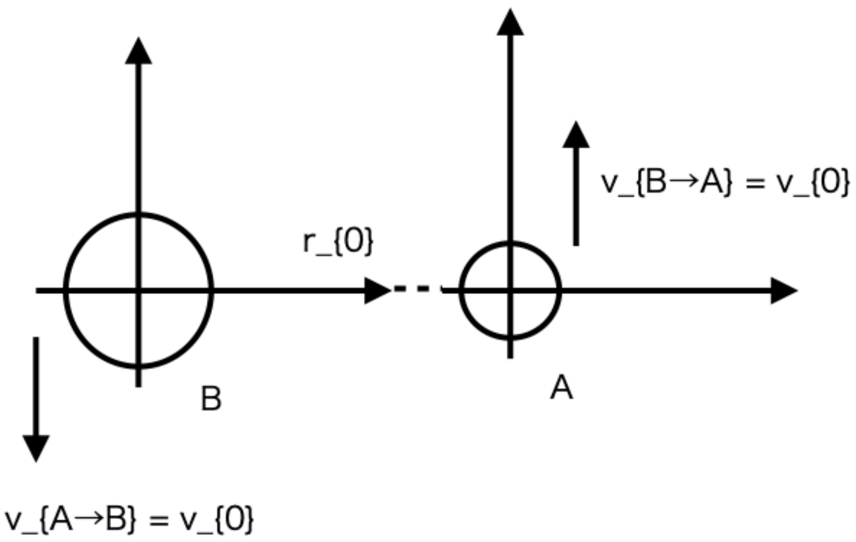
$$\int_0^T \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}dt = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\int_0^T dt = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}T = \frac{1}{2}hT$$

$$T = \frac{S}{\frac{h}{2}}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$



4.連星



$$ma = -G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A}$$
$$M\boldsymbol{A} = G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A}$$
$$m\boldsymbol{a} = -G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A} \Leftrightarrow m(\boldsymbol{a}_{B\to A} + \boldsymbol{A}) = -G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A}$$
$$\Leftrightarrow m\boldsymbol{a}_{B\to A} = -G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A} - \frac{m}{M}G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A}$$
$$\Leftrightarrow m\boldsymbol{a}_{B\to A} = -(1+\frac{m}{M})G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A}$$

Bに対してAはBを焦点とする楕円軌道を描く。

$$M\boldsymbol{A} = G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A} \Leftrightarrow M\boldsymbol{a}_{A\to B} = -(1+\frac{M}{m})G\frac{mM}{r_{A\to B}^3}\boldsymbol{r}_{A\to B}$$

Aに対してBはAを焦点とする楕円軌道を描く。
Bに対してAが最近点にいる時、速さが v_0 、距離がr_0の場合、

$$m\boldsymbol{a}_{B\to A} = -(1+\frac{m}{M})G\frac{mM}{r_{B\to A}^3}\boldsymbol{r}_{B\to A} \Leftrightarrow r_{B\to A} = \frac{\frac{h^2}{G(m+M)}}{1+\frac{h^2A}{G(m+M)}\cos(\theta-\theta_0)}$$

$\theta_0 = 0$ として、$h = r_0v_0,\ \theta = 0$ の時、$r_{B\to A} = r_0$より、 $A = \frac{1}{r_0} - \frac{G(m+M)}{h^2}$

$$r_{B\to A} = \frac{\frac{h^2}{G(m+M)}}{1+(\frac{h^2}{r_0G(m+M)}-1)\cos\theta}$$

$$r_{A\to B} = \frac{\frac{h^2}{G(m+M)}}{1+(\frac{h^2}{r_0G(m+M)}-1)\cos\theta}$$

剛体

運動方程式

以下平面的な剛体を考える。剛体を質点の集まりとみなす。剛体の内力は万有引力や接触力などの質点同士の相互的な力で、 質点の運動方程式を足し合わせると内力は消える。

$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_{外力}$

また、剛体の質量をMとすると

$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_{外力} \Leftrightarrow M \sum \dfrac{m_i \boldsymbol{a}_i}{M} = \boldsymbol{f}_{外力} \Leftrightarrow M \boldsymbol{a}_{重心} = \boldsymbol{f}_{外力}$

重力による位置エネルギー

基準面からの高さについて、

$\sum m_i g h_i = Mg \sum \dfrac{mih_i}{M} = Mgh_{重心}$

運動エネルギー

回転も含めた剛体の系上の任意の点と剛体上の質点との距離は変わらないので、剛体の運動は重心の運動と重心周りの剛体の回転によるものとみれる。

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{v}_g + \boldsymbol{v}_{g\to i}|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (|\boldsymbol{v}_g|^2 + 2\boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{v}_{g\to i} + |\boldsymbol{v}_{g\to i}|^2)$$

$$\sum m_i |\boldsymbol{v}_g|^2 = |\boldsymbol{v}_g|^2 \sum m_i = M |\boldsymbol{v}_g|^2$$

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{v}_{g\to i} = M \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{v}_{g\to i}}{M} = M \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_{g\to i}}{M} \cdot \boldsymbol{v}_g = M \sum \boldsymbol{v}_{g\to g} \cdot \boldsymbol{v}_g = 0$$

$$\sum m_i |\boldsymbol{v}_{g\to i}|^2 = \sum m_i (r_{g\to i}\omega)^2 = \omega^2 \sum m_i r_{g\to i}^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_{g\to i}^2$$

仕事

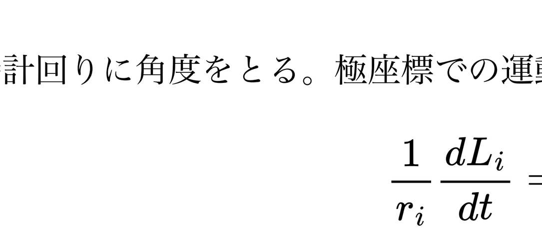
剛体に対して力が加わる時、加わった質点に対して力が仕事をしていなければ、その力のした仕事は０。

剛体の内力の仕事では、任意の２質点A_iとA_j間の相互的な力の仕事は、 A_iとA_jの中点M_{ij}に関する運動において考える。
A_iとA_jは中点M_{ij}に対して回転運動をする。

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_{m\to i}) \cdot \boldsymbol{f}_{ij} + (\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_{m\to j}) \cdot (-\boldsymbol{f}_{ij}) \\ &= (\boldsymbol{v}_{m\to j} - \boldsymbol{v}_{m\to j}) \cdot \boldsymbol{f}_{ij} \\ &= 0 \quad (\because \boldsymbol{v}_{m\to j}, \boldsymbol{v}_{m\to j} \perp \boldsymbol{f}_{ij}) \end{aligned}$$

つまり、剛体に関して $\Delta K + \Delta U = W_{外力}$ が成り立つ。

モーメントの釣り合い



半時計回りに角度をとる。極座標での運動方程式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i}\frac{dL_i}{dt} = f_{i\,動径に対して垂直} &\Leftrightarrow \frac{dL_i}{dt} = f_{i\,動径に対して垂直}\, r_i \\ &\Leftrightarrow \frac{dL_i}{dt} = f_i sin\phi_i \cdot r_i \\ &\Leftrightarrow \frac{dL_i}{dt} = f_{i\,符合付き} r_{i\,作用線と原点の距離} \end{aligned}$$

$\sum \dfrac{dL_i}{dt} = \sum f_i r_{i\,作用線と原点の距離}$ において相互的内力は作用線 が同じで原点からの距離が等しく、力は逆を向いているのでモーメントは０。
剛体の系上のある点が静止している時、その点を原点にとると上記の式から

$$L_i = m_i r_i^2 \omega \quad (\omega = \frac{d\theta}{dt})$$
$$\sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \sum m_i r_i^2$$
$$\frac{d\omega}{dt} \sum m_i r_i^2 = \sum f_{i\,\textbf{符合付き外力}} r_{i\,作用線と原点の距離} = モーメント和$$

剛体のモーメント和 $= 0$ のとき、 $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$ で 角速度一定。
剛体が静止している時、任意の点周りでモーメント和は０となる。

重心のモーメント

剛体の系上の静止している点を原点に水平に座標軸をとる。重力は鉛直下向きに働くので、

$\sum 重力のモーメント = \sum m_i g \cdot x_i = M \sum \dfrac{m_i g \cdot x_i}{M} = Mgx_G$

補足

剛体の系上のある点Aが等速度運動している時、その点を原点とする座標系をとる（その座標系の座標軸は静止系の座標軸と平行）。
剛体のある質点Bについて、

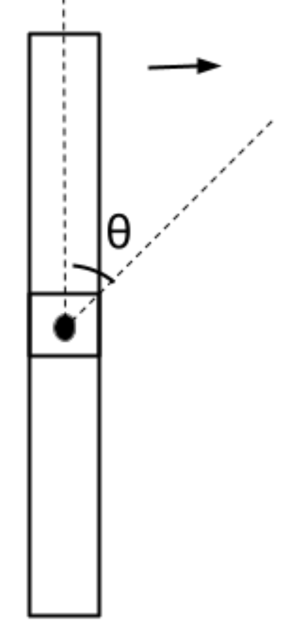
$\boldsymbol{r}_{A\to B} = \boldsymbol{r}_{(静止系の原点\to)B} - \boldsymbol{v}_A t - \boldsymbol{r}_{(静止系の原点\to)A(t=0)}$
$\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}_{A\to B} = \dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}_B$

また、極座標表示では
$\boldsymbol{a}_{A\to B} = (r''_{A\to B} - r_{A\to B}(\dfrac{d\theta}{dt})^2)\boldsymbol{e}_1 + (2r'_{A\to B}\dfrac{d\theta}{dt} + r_{A\to B}\dfrac{d^2\theta}{dt^2})\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{A\to B}$ より、$m_B \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow m_B \boldsymbol{a}_{A\to B} = \boldsymbol{f}$

よって、BのAの系における角運動量について

$\dfrac{dL_{A\to B}}{dt} = f_{符合付き} r_{作用線と原点Aの距離}$

例.1



長さl、質量Mの一様な棒について、線密度 $\sigma = \dfrac{M}{l}$ で、静止した状態から最下点での角速度を求める。

$$K = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_{g\to i}^2$$
$$\sum m_i r_{g\to i}^2 = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma r^2 dr = 2\sigma \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = 2\sigma \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{Ml^2}{12}$$

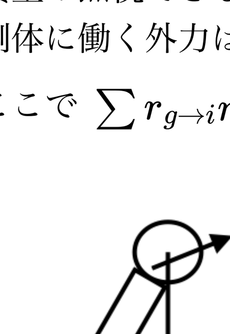
支点において仕事は０なので、エネルギー保存則が成り立ち、かつ $v_g = \dfrac{l\omega}{2}$ より、

$$Mgl = \frac{1}{2} M (\frac{l\omega}{2})^2 + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{Ml^2}{12}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

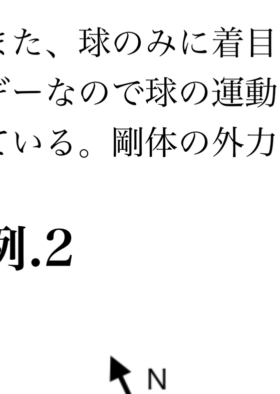
また、$\omega(t=0) = \omega_0$の初期条件では角度 θ の時、エネルギー保存則から、

$$Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{Ml^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{6}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l} + \omega_0^2} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l} + \omega_0^2}$$
$$\theta(t=0) = \frac{\pi}{2},\ \omega(t=0) = 0 \text{ の時、}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{3g}{l}} t + C\ (C\text{は積分定数}) \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} t + C$$
$$\theta(t=0) = \frac{\pi}{2} \text{ より、} C = -\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} t - \sqrt{2}\log(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{\frac{6g}{l}}t} - 1}{(1+\sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{\frac{6g}{l}}t} + 1}$$
$$\theta = \pi \text{ の時、} T = \log(1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

剛体棒について

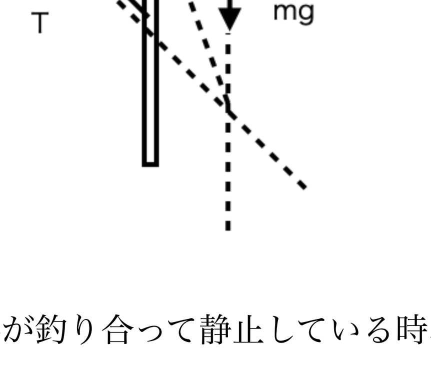


質量の無視できる剛体棒の先に質量mの球をつけ、他端を固定する。
剛体に働く外力はmg, NのみでNは仕事をせず、エネルギー保存則を満たしながら動く。
ここで $\sum r_{g\to i} m_i^2 = 0$ より、 $K = \dfrac{1}{2} m v_g^2$ で、 $K + U_g = 一定$



また、球のみに着目すると、働く力はmg, Nのみ。上記のKは球の運動エネルギーで U_{g}は球の重力による位置エネルギーなので球の運動を記述している。球の運動はエネルギー保存則を 満たしているのでNは仕事をせず棒方向に作用している。剛体の外力は重心の運動を決めるので、 固定点のNも棒方向に作用している。

例.2



棒が釣り合って静止している時、重心も静止しているので

$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} = 0$

任意の点回りでモーメント和は0なので、Tの作用線とmgの作用線の交点回りにおいてモーメント和は0。 Nの作用線はその交点を通る。