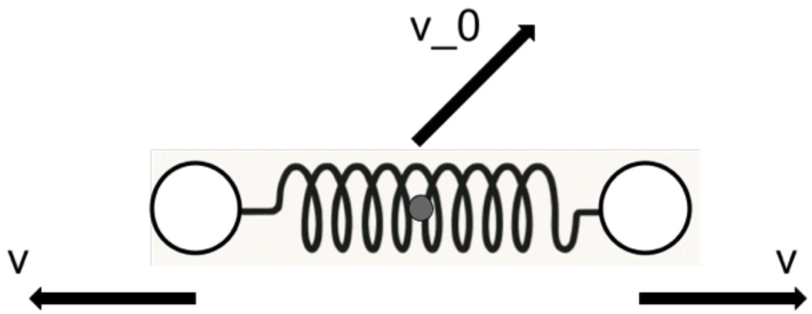
弾性エネルギー



上図は空間内にバネ定数kのバネがあり、バネの中点が黒丸である。静止系から見て中点の速度はv_0ベクトルで、中点に対して両端の質点はバネの伸びる方向へ互いに等しい速さvで動いている。また、中点の系において自然長の時の質点の位置を原点とする（静止系の座標軸と中点系の座標軸は平行）。２物体の力と速度の内積を考える。

$$
\begin{aligned}
-2k\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{v})-2(-k\boldsymbol{x})\cdot\{\boldsymbol{v_0}+(-\boldsymbol{v})\} &= -4k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} = -4kx\cdot v \\
&= -4kx\cdot\frac{dx}{dt} = -4k\frac{d}{dt}(\frac{x^2}{2}) = -\frac{d}{dt}(2kx^2) \\
&= -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kx^2_{\text{バネの伸び}})
\end{aligned}
$$

壁に繋がれたバネであれば、壁は動かないので運動エネルギーの変化がなく、 バネに繋がった物体のみ着目すればよい。

戻る

運動エネルギー

直交座標系における質量mの物体の運動方程式について

$$
\begin{aligned}
m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\
(\text{左辺}) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} \\
= m(\frac{dv_x}{dt}v_x + \frac{dv_y}{dt}v_y + \frac{dv_z}{dt}v_z) = m\frac{d}{dt}(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}) = m\frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{t_0}^{t_1} m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dt
$$

(左辺)= $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

[戻る]

重力による位置エネルギー

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} mg\cdot v_y\,dt = mg\int_{t_0}^{t_1} v_y\,dt \\
= mg\int_{t_0}^{t_1} \frac{dy}{dt}\,dt = mg(y_1 - y_0)
\end{aligned}
$$

重力は下向きにかかっているとして、y座標軸を上向きにとるか下向きにとるかを考えるが、 式では速度との内積を考えるので物体が下向きに進んでいるか上向きに進んでいるかに着目する。 下向きに進んでいる場合、内積正でy_1-y_0>0であり、仕事は正。仕事量を運動エネルギー側に移行 すると負になり、下向きに進んでいるので位置エネルギーは減少していると解釈できる。

[戻る]

静電気力による位置エネルギー

1.電荷Qをもつ動かない物体を原点として、電荷qをもつ物体について

$$m\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}k\frac{qQ}{r^2}$$

$$(\frac{\boldsymbol{r}}{r}k\frac{qQ}{r^2})\cdot\boldsymbol{v} = (\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y + \frac{dz}{dt}z)k\frac{qQ}{r^3} = \frac{d}{dt}(\frac{r^2}{2})k\frac{qQ}{r^3} = \frac{dr}{dt}k\frac{qQ}{r^2} = \frac{d}{dt}(-k\frac{qQ}{r})$$

仕事率は力と速度の内積なので座標系の取り方によらない。よって複数の電荷が存在する場合でもエネルギー保存則は上記の式で成り立つ。

2.電荷Qの物体も動く場合

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}_{\text{静電気力}}$$
$$M\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{f}_{\text{静電気力}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{\text{静電気力}}\cdot\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{f}_{\text{静電気力}})\cdot\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{f}_{\text{静電気力}}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\\ = k\frac{qQ}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}) &= \frac{d}{dt}(-k\frac{qQ}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|})\end{aligned}$$

エネルギー保存則は２物体間において成り立つ。また、複数の物体間においても同様に成り立つ。

戻る

角運動量保存則

物体の位置ベクトル$\boldsymbol{r} = r(\cos\theta, \sin\theta)$に関して、 $\boldsymbol{e}_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \boldsymbol{e}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ とする。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \frac{d}{dt}(r'\boldsymbol{e}_1 + r\boldsymbol{e}_2) = (r'' - r(\frac{d\theta}{dt})^2)\boldsymbol{e}_1 + (2r'\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2})\boldsymbol{e}_2$$

中心力しか働かない場合、$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$より、$2r'\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

また、角運動量$mrv_{動系に対して垂直な方向の速度}$をtに関して微分すると、$v_{動系に対して垂直な方向の速度} = r\dfrac{d\theta}{dt}$より、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\frac{d\theta}{dt}) = m(2r\frac{d\theta}{dt}r' + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}) = mr(2\frac{d\theta}{dt}r' + r\frac{d^2\theta}{dt^2}) = 0$$

よって、角運動量は一定。

[戻る]

慣性系

１:どの物体の系が慣性系かは、慣性系に対して等速度運動をしているかを確かめる、または 実験で測定して分かる。
スケールとサイズによる。
２:慣性力により慣性系となった系ではその系の物理量を用いてエネルギー保存則が成り立つ。

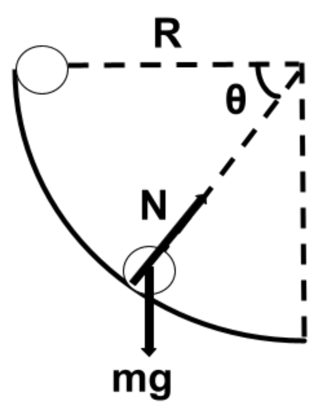
戻る

座標系

平行に座標系を取れば、動いていてもベクトルの足し算ができる。

補足

1.円形斜面を下る運動



質量mの物体が初速0で下る。

エネルギー保存則より、$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\sin\theta) \Leftrightarrow v = \sqrt{2gR\sin\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{R}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{d\theta}{dt}dt = \int \sqrt{\frac{2g}{R}}dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}d\theta = \sqrt{\frac{2g}{R}}t + C \quad (C\text{は積分定数})$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2\tan\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{2g}{R}}t \quad (t=0\text{の時、}\theta=0\text{で}C=0)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{g}{4R}t^2$$

円運動をしているので、$m\frac{v^2}{R} = N - mg\sin\theta$

$$N = m\frac{v^2}{R} + mg\sin\theta = 3mg\sin\theta$$

$$= 3mg\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 6mg\sqrt{\frac{1}{(1+(\frac{gt^2}{4R})^2)(1+(\frac{4R}{gt^2})^2)}}$$

最下点に達する時刻は $T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$

(最下点付近で離した場合、 $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$)

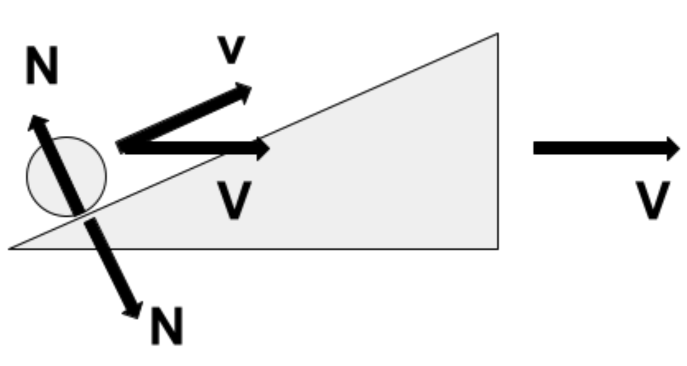
2.運動量

$$\text{運動方程式 } m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m\boldsymbol{a}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\,dt$$

$$\Leftrightarrow m\boldsymbol{v_1} - m\boldsymbol{v_0} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\,dt$$

3.斜面台を上る物体



$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{V} + (-\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{V} = 0$ より、斜面台と物体の間でエネルギー保存則が成り立つ。

戻る

定数 $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ とする。

$$m(\ddot{r} - r(\frac{d\theta}{dt})^2) = -G\frac{mM}{r^2}$$

$$\ddot{r} - r(\frac{d\theta}{dt})^2 = -G\frac{M}{r^2}$$

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2}$$

$$h = r^2\frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow h\frac{dt}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} \Leftrightarrow h\frac{dt}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dr} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dt}{d\theta} = -h\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dt}{d\theta} = -h\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow -h^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{h^2}{r} = -GM$$

$$\Leftrightarrow h^2\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{h^2}{r} = GM \Leftrightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{GM}{h^2}$$

$u' = \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2}$ とする。

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{GM}{h^2} \Leftrightarrow \frac{d^2u'}{d\theta^2} = -u'$$

$$\Leftrightarrow u' = A\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{h^2A}{GM}\cos(\theta - \theta_0)}$$

$$e=\frac{h^2A}{GM},\ p=\frac{h^2}{GM}$$とする。楕円の時、$0<e<1$

$$r=\frac{\frac{h^2}{GM}}{1+\frac{h^2A}{GM}\cos(\theta-\theta_0)}\Leftrightarrow r\left(1+\frac{h^2A}{GM}\cos(\theta-\theta_0)\right)=\frac{h^2}{GM}$$

$$\Leftrightarrow r+\frac{h^2A}{GM}r\cos(\theta-\theta_0)=\frac{h^2}{GM}\Leftrightarrow r+\frac{h^2A}{GM}x=\frac{h^2}{GM}\Leftrightarrow r=\frac{h^2}{GM}-\frac{h^2A}{GM}x$$

$$\Leftrightarrow r^2=\left(\frac{h^2}{GM}-\frac{h^2A}{GM}x\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=\left(\frac{h^2}{GM}-\frac{h^2A}{GM}x\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=(p-ex)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=p^2-2pex+(ex)^2\Leftrightarrow\left(1-e^2\right)x^2+2pex+y^2=p^2$$

$$\left(1-e^2\right)x^2+2pex+y^2=p^2\Leftrightarrow\left(1-e^2\right)\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2+y^2=p^2+\frac{(pe)^2}{1-e^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2+\frac{(pe)^2}{1-e^2}}{1-e^2}}+\frac{y^2}{p^2+\frac{(pe)^2}{1-e^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}}=1$$

楕円の面積$S=\pi\cdot\frac{p}{1-e^2}\cdot\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$

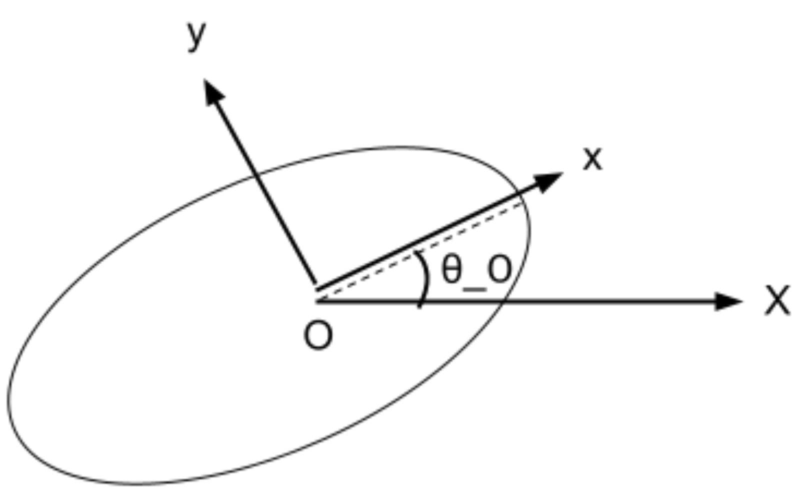
周期$T=\frac{S}{\frac{h}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$

$$\int_0^T \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta = S$$

$$\int_0^T \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \int_0^T dt = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} T = \frac{1}{2} hT$$

$$T = \frac{S}{\frac{h}{2}}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$



剛体

運動方程式

以下平面的な剛体を考える。剛体を質点の集まりとみなす。剛体の内力は万有引力や接触力などの質点同士の相互的な力で、 質点の運動方程式を足し合わせると内力は消える。

$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_{外力}$

また、剛体の質量をMとすると

$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_{外力} \Leftrightarrow M \sum \frac{m_i \boldsymbol{a}_i}{M} = \boldsymbol{f}_{外力} \Leftrightarrow M \boldsymbol{a}_{重心} = \boldsymbol{f}_{外力}$

重力による位置エネルギー

基準面からの高さについて、

$\sum m_i g h_i = Mg \sum \frac{mih_i}{M} = Mgh_{重心}$

運動エネルギー

剛体の系上の任意の点と剛体上の質点との距離は変わらないので、剛体の運動は重心の運動と重心周りの剛体の回転によるものとみれる。

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{v}_g + \boldsymbol{v}_{g\to i}|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (|\boldsymbol{v}_g|^2 + 2\boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{v}_{g\to i} + |\boldsymbol{v}_{g\to i}|^2)$$

$$\sum m_i |\boldsymbol{v}_g|^2 = |\boldsymbol{v}_g|^2 \sum m_i = M|\boldsymbol{v}_g|^2$$

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{v}_{g\to i} = M \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{v}_{g\to i}}{M} = M \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_{g\to i}}{M} \cdot \boldsymbol{v}_g = M \sum \boldsymbol{v}_{g\to g} \cdot \boldsymbol{v}_g = 0$$

$$\sum m_i |\boldsymbol{v}_{g\to i}|^2 = \sum m_i (r_{g\to i}\omega)^2 = \omega^2 \sum m_i r_{g\to i}^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_{g\to i}^2$$

仕事

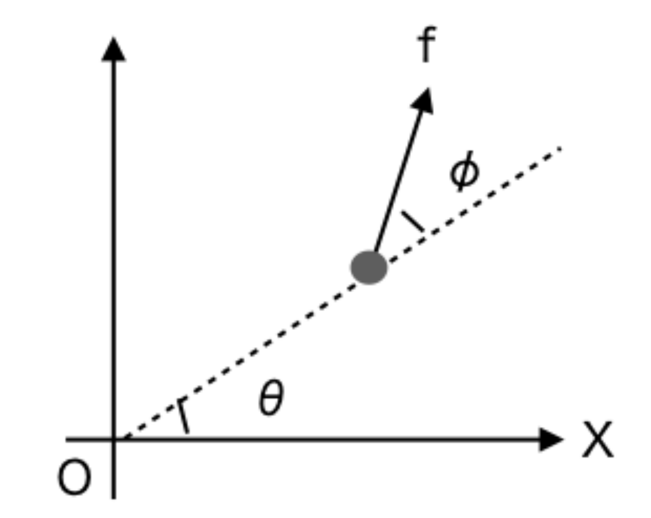
剛体に対して力が加わる時、加わった質点に対して力が仕事をしていなければ、その力のした仕事は０。

剛体の内力の仕事では、任意の２質点A_iとA_j間の相互的な力の仕事は、 A_iとA_jの中点M_{ij}に関する運動において考える。
A_iとA_jは中点M_{ij}に対して回転運動をする。

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_{m\to i}) \cdot \boldsymbol{f}_{ij} + (\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_{m\to j}) \cdot (-\boldsymbol{f}_{ij}) \\ &= (\boldsymbol{v}_{m\to j} - \boldsymbol{v}_{m\to j}) \cdot \boldsymbol{f}_{ij} \\ &= 0 \quad (\because \boldsymbol{v}_{m\to j}, \boldsymbol{v}_{m\to j} \perp \boldsymbol{f}_{ij}) \end{aligned}$$

つまり、剛体に関して $\Delta K + \Delta U = W_{外力}$ が成り立つ。

モーメントの釣り合い



半時計回りに角度をとる。極座標での運動方程式から

$$\frac{1}{r_i}\frac{dL_i}{dt} = f_{i\,動径に対して垂直} \Leftrightarrow \frac{dL_i}{dt} = f_{i\,動径に対して垂直}\, r_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL_i}{dt} = f_i sin\phi_i \cdot r_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL_i}{dt} = f_{i\,符合付き} r_{i\,作用線と原点の距離}$$

$\sum \frac{dL_i}{dt} = \sum f_i r_{i\,作用線と原点の距離}$ において相互的内力は作用線 が同じで原点からの距離が等しく、力は逆を向いているのでモーメントは０。
剛体の系上のある点が静止している時、その点を原点にとると上記の式から

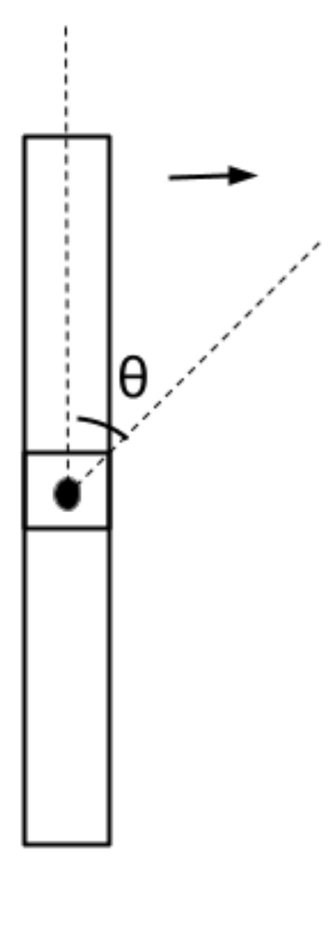
$$L_i = m_i r_i^2 \omega \quad (\omega = \frac{d\theta}{dt})$$

$$\sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \sum m_i r_i^2$$

$$\frac{d\omega}{dt} \sum m_i r_i^2 = \sum f_{i\,\textbf{符合付き外力}} r_{i\,作用線と原点の距離} = \text{モーメント和}$$

剛体のモーメント和 $= 0$ のとき、 $\frac{d\omega}{dt} = 0$ で 角速度一定。
剛体が静止している時、任意の点周りでモーメント和は０となる。

例



長さl、質量Mの一様な棒について、線密度 $\sigma = \frac{M}{l}$ で、静止した状態から最下点での角速度を求める。

$$K = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_{g\to i}^2$$

$$\sum m_i r_{g\to i}^2 = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma r^2 dr = 2\sigma \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = 2\sigma \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{Ml^2}{12}$$

支点において仕事は０なので、エネルギー保存則が成り立ち、かつ $v_g = \frac{l\omega}{2}$ より、

$$Mgl = \frac{1}{2} M (\frac{l\omega}{2})^2 + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{Ml^2}{12}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

また、$\omega(t=0) = \omega_0$の初期条件では角度θの時、エネルギー保存則から、

$$Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{Ml^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l} + \omega_0^2} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l} + \omega_0^2}$$

$$\theta(t=0) = \frac{\pi}{2},\ \omega(t=0) = 0 \text{ の時、}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{3g}{l}} t + C\ (C\text{は積分定数}) \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} t + C$$

$$\theta(t=0) = \frac{\pi}{2} \text{ より、} C = -\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} t - \sqrt{2}\log(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{\frac{6g}{l}}t} - 1}{(1+\sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{\frac{6g}{l}}t} + 1}$$

$$\theta = \pi \text{ の時、} T = \log(1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$