Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Лабораторна робота №3

«Обчислення визначеного інтегралу методом Монте-Карло»

виконала:
ст. 3 курсу гр. ІС-зп61
Шуміліна У.О.

перевірив:
Селін О.М.
доцент, к.т.н.

Київ – 2016

Сеня зібрав вже свій третій принтер. Нарешті він працює. Це ще більша за розмірами конструкція в порівнянні з попередніми і залишається назбирати грошей (або деталей) на четвертий такий агрегат і тоді процес друкування триватиме у кожному з куточків кімнати.

— О, у тебе знову щось друкується? — спитала я, як тільки ми зайшли в кімнату.

— Так, сьогодні зранку пішов політати і зламав на Гексі дві лапки. Довелося друкувати.

(Прим. авт.. Гекса – це як квадрокоптер, тільки з шістьма гвинтами, гексакоптер.)

— А на цьому принтері?

— То підставка під смартфон.

— А-а-а…

— Я от тільки дуже хочу ще ось такий повзунок надрукувати, але у мене лише два мотка пластику і обидва на працюючих принтерах. Є ще третій, але там дуже мало матеріалу залишилось і мені здається, його не вистачить.

— Лапки довго друкуватимуться?

— Так, ще годин 6-8.

— О, то давай порахуємо який там об’єм! І визначимо чи вистачить тобі його.

Мета роботи: допомогти Арсенію визначити об’єм пластику, необхідного для друку повзунка.

Хід роботи

1. Представити інтеграл у вигляді кратного інтегралу від функції f є 1 (у, можливо, багатовимірному просторі).

$$\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \cdot dx$$

2. Описати навколо тіла, що утворилося, прямокутний паралелепіпед Q1 більшого об'єму з гранями, паралельними координатним площинам ($x\epsilon[0;1], y\epsilon[0;1], z\epsilon[0;1]$), $V_1 = 1$.

Рис. 1. Зображення повзунка

3. Вписати всередину тіла S інше (Q2) меншого об'єму $V_2 = 0{,}207$.

4. Написати програму, яка б генерувала випадкові точки, що гарантовано потрапляють у Q1, а у S - з ймовірністю р.

5. Кількість точок оцінити за формулою

$$N^* = \frac{z^2}{m^2} \cdot \frac{1 - p_2}{p_2} = 147168$$

де m - припустиму відносну помилку оцінювання об'єму - узяти рівною 0,01; z - розв'язок рівняння

$$2\Phi_0(z) = \alpha$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0{,}95 \Rightarrow z \cong 1{,}96$$

α - надійна ймовірність.

6. Сформулювати відповідь:

Для обчислення довжини інтервалу виразимо m з формули для N*, підставивши у неї щойно обчислене $p = 0.288846$замість p_2:

$$m = z \cdot \sqrt{\frac{1 - p}{N^* \cdot p}} \cong 0.810487\ \%$$

Це буде оцінка реальної довжини надійного інтервалу, який одержано для обчислюваного інтеграла. Вона є меншою за $m = 0{,}01$, від якого ми починали.

7. Обчислити інтеграл аналітично та порівняти результати.

$$\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \cdot dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1-y^2} - 1 + y\right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \left(\sqrt{1-y^2}\right) dy = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cong 0.285398$$

Отже, в ході лабораторної роботи досліджено ймовірнісний метод обчислення, студентом отримані навички самостійного опрацювання цілої купи математичних формул та роботи з чужим кодом, а в результаті визначено скільки пластику знадобиться для друку об'ємної деталі.

Додатки

Додаток 1. Лістинг програми

```
#include "stdafx.h"
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <ctime>
#include <iostream>

using namespace std;

const double
h = 1,
x1 = 0, x2 = 1,
y11 = 0, y2 = 1,
z1 = 0, z2 = +h,

V1 = (x2 - x1)*(y2 - y11)*(z2 - z1),
V2 = 0.207,
Vexact = (M_PI - 2) / 4,

p2 = V2 / V1,

m = 0.01,
za = 1.96,      // za: Φ(z) = alpha = 0,95
N = (za*za) / (m*m)*(1 - p2) / p2;

double
p,
V,
x, y, z,
mnew;

unsigned long i, j,
Nx = 0;

int InBody(double x, double y, double z) {
    if (1 >= z && 0 <= z && x >= 1-y && x <=
sqrt(1-y*y))
        return 1;
    else return 0;
```

```
    }

    ofstream fout("MonteCar.txt");// , ios::app);

    int main() {

        //randomize();
        srand(time(0));

        for (i = 1; i <= N; i++) {
x = (x2 - x1) * (rand() % RAND_MAX) / RAND_MAX + x1;
y = (y2 - y11) * (rand() % RAND_MAX) / RAND_MAX + y11;
z = (z2 - z1) * (rand() % RAND_MAX) / RAND_MAX + z1;
            if (InBody(x, y, z)) Nx++;
        }

        p = Nx / N;
        V = V1 * p;
        mnew = za * sqrt((1 - p) / (N*p));

        fout  <<  "Half-sphere  volume  by  Monte-Carlo
method" << endl;
        fout << "V1 = " << V1 << endl;
        fout << "V2 = " << V2 << endl;
        fout << "p2 = " << p2 << endl;
        fout << "N  = " << (long)N << endl;
        fout << "Nx = " << Nx << endl;
        fout << "p  = " << p << endl;
        fout << "V  = " << V << endl;
        fout << "m  = " << mnew * 100 << "%" << endl;
        fout << "Volume is in [" << V*(1 - mnew) << ";
" << V*(1 + mnew) << "] with probability alpha = 0,95"
<< endl;
        fout << "Vexact  = " << Vexact << " is ";

        if  ((Vexact  <=  V*(1  -  mnew))  ||  (V*(1  +  mnew)
<= Vexact))
        {
            fout << endl << "NOT ";
            system("pause");
        }
        fout << "in. " << endl << endl;

        return 0;
    }
```

Додаток 2. Результат роботи програми

```
Half-sphere volume by Monte-Carlo method
V1 = 1
V2 = 0.207
p2 = 0.207
N  = 147168
Nx = 41851
p  = 0.284375
V  = 0.284375
m  = 0.810487%
Volume is in [0.28207; 0.286679] with probability alpha = 0,95
Vexact = 0.285398 is in.
```