応用数学
ラプラス変換

Sho tsukamoto

ラプラス変換とは

- **制御工学**における重要な道具！
- 伝達関数や回路の解析等で使われる
- マスターすると微分方程式を**代数的**に解くことが出来る

微分方程式は物体の運動・化学反応・電気回路などあらゆる現象を説明するのに重要な方程式
※ 世の中の自然現象はほぼ全て微分方程式で表現できるといっても過言ではない

↓ ↓ ↓

もともと，**ラプラス変換**は線形微分方程式を解くテクニックとして発達し
後から理論体系が出来あがったという経緯を持っている．

線形微分方程式を解くということ

- 微分方程式を解くのは非常に**面倒**である(3年生で習ったよね？)

  変数分離形，同次形，特性方程式…

微分がない簡単な方程式!!

- 微分方程式を**代数方程式**に置き換えて解ければなぁ…とみんな思う

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 2t + 5$$

よくある微分方程式(解きづらい)

transform

$$x + 5 = 12$$

$$x^2 + 5x + 7 = 0$$

代数方程式の例(めっちゃ簡単)

ラプラス変換の効果

微分方程式が
足し算引き算等の式に変わる！

- 実はラプラス変換を用いることで，複雑な微分方程式を代数方程式に**変換できる！**
  つまり，3年生のときに苦しめられた微分方程式が簡単に解けるということ！

- ラプラス変換をすると，時間に関する関数が周波数に関する関数に変換される！

時間の関数(t)

e^{2t} t $\cos\omega t$ $\sin\omega t$ $\boldsymbol{x(t)}$

ラプラス変換 →

← 逆ラプラス変換

周波数の関数(s)

$\frac{1}{s-2}$ $\frac{1}{s^2}$ $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\boldsymbol{X(s)}$

ラプラス変換の式

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

tに関する関数がsに関する関数へ変わった

- 時間に関する関数を $f(t)$ ，ラプラス変換された関数を$F(s)$とすると $f(t)$ のラプラス変換は上式のように表される．

ラプラス変換の公式

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

- $f(t) \to \mathcal{L}[f(t)]$, つまり，表の青い欄から緑の欄に行くとラプラス変換されて e^{-at}や $\sin\omega t$ が sに関する代数式に変わっていることがわかると思います

ラプラス変換の定義式

$f(t)$にe^{-st}をかけて，
0から∞までtで積分する!!

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

- ラプラス変換の公式は全て記憶しないとダメ！ という訳ではなく，積分を用いた定義式で導出をする．
- 応用数学Ⅱや制御工学の前期中間試験では，「定義式を用いて導出しなさい．」という試験問題が出るので，基本公式は導出できるようにしておく．

$f(t) = 1$ のラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1]$$

$$= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty$$

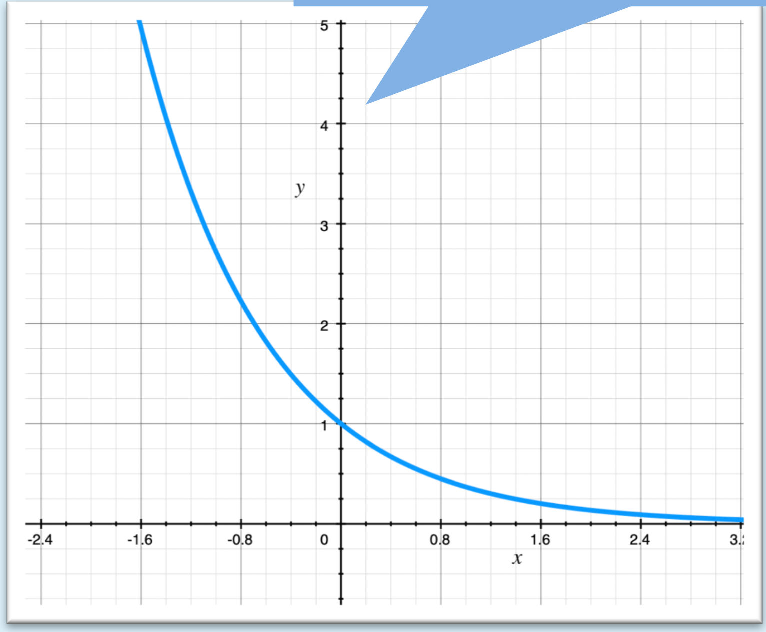
???

$$= \boxed{\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-\infty}\right)} - \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{o}\right)$$

ここで， $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$

したがって， $F(s) = 0 - (-\frac{1}{s} \cdot e^{0}) = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

tが∞に近づくとyの値は0に近づく!!



$y = e^{-t}$のグラフ

$f(t)=t$ のラプラス変換

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[t]$$

$$=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty t\cdot(-\frac{1}{s}e^{-st})'dt$$

$$=\boxed{\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty}-\int_0^\infty -\frac{1}{s}\cdot e^{-st}dt$$

$$=0+\int_0^\infty \frac{1}{s}\cdot e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s}\mathcal{L}[1]$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{s^2}}}$$

$f(t) =$ 　　　のラプラス変換

- 時間があるときに随時追加していきます

逆ラプラス変換の式

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

- ラプラス変換の逆操作
- sに関する関数をtに関する関数を戻す操作を上式のように表す

逆ラプラス変換の公式？

$f(t)$ ←	$\mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$ ←	$\mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

- 6ページのラプラス変換の公式の表 の 矢印の向き が変わるだけです.

$\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ の部分分数分解①

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

右辺を通分すると，

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

したがって，$\dfrac{1}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

両辺の分子を比較すると，

$0 = A + B, 1 = 3A + 2B$ となるので $A = 1, B = -1$

- 1年生の基礎数学で習った「部分分数分解」を思い出しましょう！

なぜ，今になって部分分数分解を紹介するかというと，

微分方程式をラプラス変換を用いて解くときに必須になるテクニックだからです．

$\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ の部分分数分解②

もっと難しい部分分数分解は
授業で解説しています！

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

両辺に $(x+2)$ をかけると，$\frac{1}{(x+3)} = A + \frac{(x+2)}{(x+3)}B$

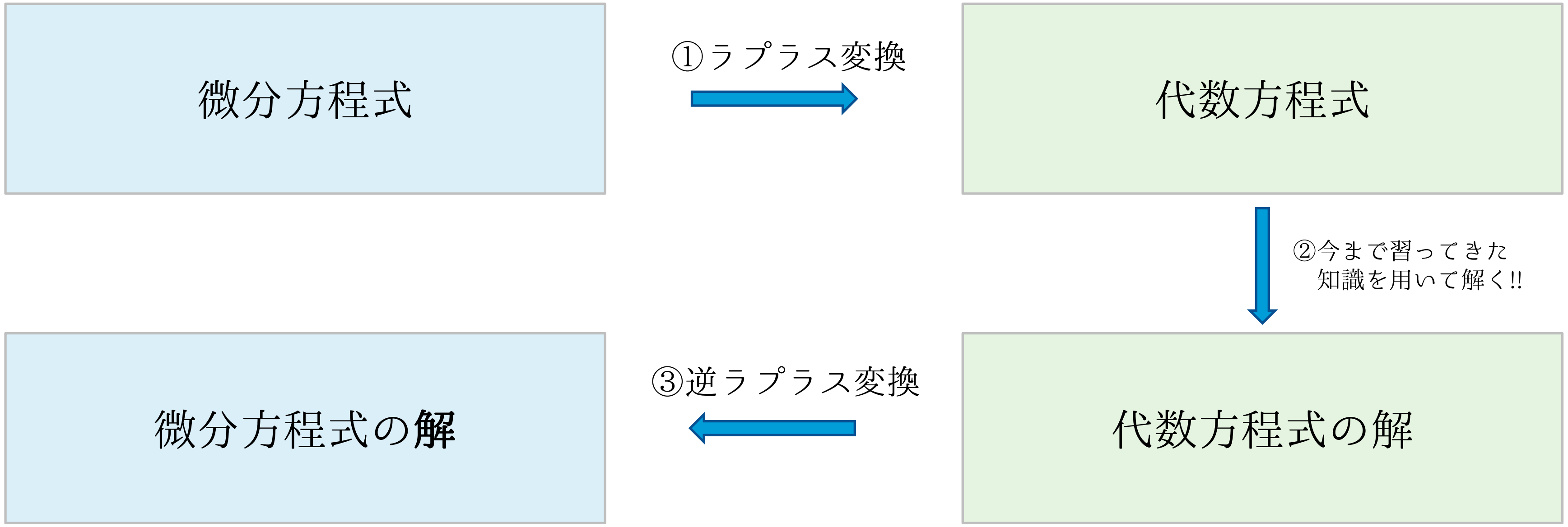
両辺に $x=-2$ を代入すると，$\frac{1}{1} = A + \frac{0}{1}B$，つまり $A=1$

また，両辺に $(x+3)$ をかけると，$\frac{1}{(x+2)} = \frac{(x+3)}{(x+2)}A + B$

両辺に $x=-3$ を代入すると，$-\frac{1}{1} = \frac{0}{-1}A + B$，つまり $B=-1$

- 「ヘビサイドの展開定理」を用いた方法を紹介します．
  もしかすると授業では習わないかもしれません．
  僕は情報系の専門科目において，フーリエ変換を習うときにやりました．
  制御工学や応用数学では①の方法で逆ラプラス変換をしました．

ラプラス変換の使い方(微分方程式)



- 上の図のような流れで，微分方程式を解いていくことが出来ます！
  みんなを苦しめた変数分離や特性方程式なんて使いません!!

実際に微分方程式を解いてみる

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

- 微分方程式を解くために，上の２つの公式を紹介しておきます．
  他の公式も重要なので，授業ではしっかりと聞くように！

実際に微分方程式を解いてみる

$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^{2t}$ を解け．　ただし，$x(0) = 0$ とする

$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると，

$$\mathcal{L}[\tfrac{dx(t)}{dt}] - \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] - \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$sX(s) - x(0) - X(s) = \tfrac{1}{s-2}$$

①ラプラス変換

$$(s-1)X(s) = \tfrac{1}{s-2}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

②今まで習ってきた
知識を用いて解く!! (部分分数分解)

$$X(s) = -\tfrac{1}{s-1} + \tfrac{1}{s-2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[-\tfrac{1}{s-1} + \tfrac{1}{s-2}]$$

③逆ラプラス変換

$$= \underline{\underline{-e^{t} + e^{2t}}}$$

④微分方程式の解が出ています!!

どうですか？

- 15ページのラプラス変換の使い方で示した図や番号通りの順番で，
実際に微分方程式が代数的に解けることが分かったでしょうか？

- 今後は，電気回路や制御工学における伝達関数の問題
単位ステップ関数やインパルス応答のラプラス変換等細かい部分も載せていきます．