

دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر



رباتیک

تمرین شماره ۲

نام و نام خانوادگی
مرتضی ملکی نژاد شوشتری

شماره دانشجویی
۸۱۰۱۰۴۲۵۶

۶ آذر ۱۴۰۴

فهرست مطالب

۱	سوال ۱	۱
۱	بخش ۱	۱.۱
۱	بخش ۲	۲.۱
۱	بخش ۳	۳.۱
۳	سوال ۲	۲
۵	سوال ۳	۳
۷	سوال ۴	۴
۷	بخش ۱	۱.۴
۸	بخش ۲	۲.۴
۸	بخش ۳	۳.۴
۹	بخش ۴	۴.۴

فهرست تصاویر

۳	۱	محورهای ربات نوا
۵	۲	بردارهای ربات
۷	۳	تصویر ربات سوال

فهرست جداول

۴	پارامترهای DH ربات نوا	۱
۵	robot of parameters DH	۲
۷	robot of parameters DH	۳

سوال ۱

۱.۱ بخش ۱

چون از R_{si} به R_{sf} رفتیم داریم:

$$R_{sf} = QR_{si} \Rightarrow Q = R_{sf}R_{si}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۲.۱ بخش ۲

سوال درواقع پارامترهای e و ϕ را می‌خواهد:

$$\phi = \arccos\left(\frac{\text{trace}(Q) - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \arccos(-0.5) = \frac{2\pi}{3}$$
$$e = \frac{\text{vect}(Q)}{\sin\phi} = \frac{\text{vect}(Q)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

۳.۱ بخش ۳

چون مرجع (s) ثابت است، دستگاه مختصات جهانی است و باید از آخر به اول ضرب انجام شود.

$$Q = Q_x(\gamma)Q_y(\beta)Q_z(\alpha) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\gamma\sin\beta & \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\beta \\ -\cos\gamma\sin\beta & \sin\gamma & \cos\gamma\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

نیازی به محاسبه دقیق این مورد نیست بلکه می‌توان صرفاً خانه‌های خاصی از آن را حساب کرد:

$$\begin{aligned}
Q_{13} = \sin\beta = 1 &\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha = 1 \\ -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha + \gamma) = 1 \\ \cos(\alpha - \gamma) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0
\end{aligned}$$

یعنی درنهایت داریم:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

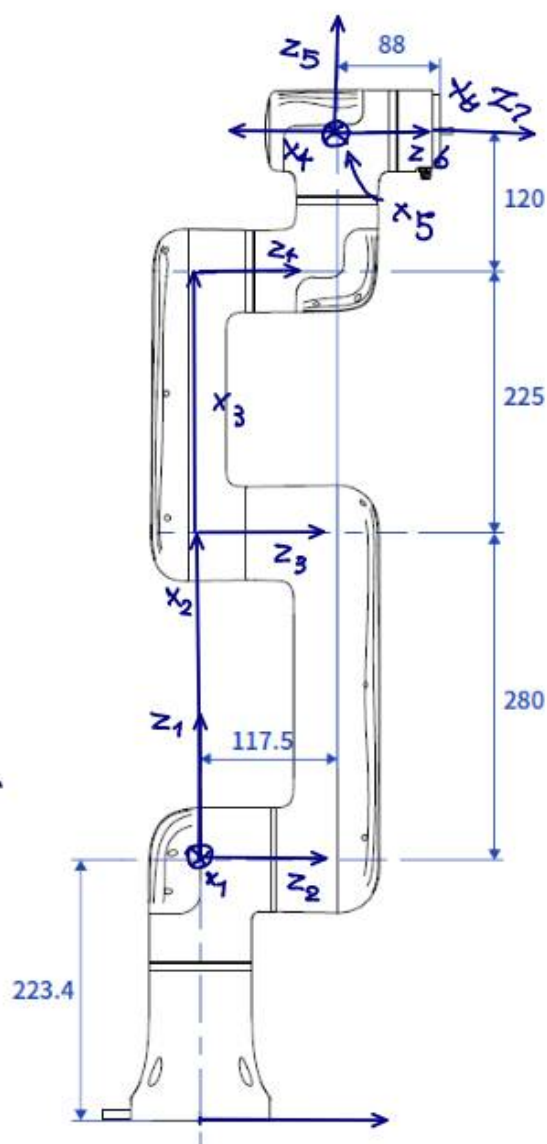
$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma = 0$$

که البته این یک جواب است (برای مثال در همین جا α می‌تواند برابر با $\frac{-\pi}{2}$ باشد و معادله‌ها صدق کنند.)

سوال ۲

محورها با استفاده از توزیع مفاصل ربات با استفاده از Figure 4.1 رسم شدند.



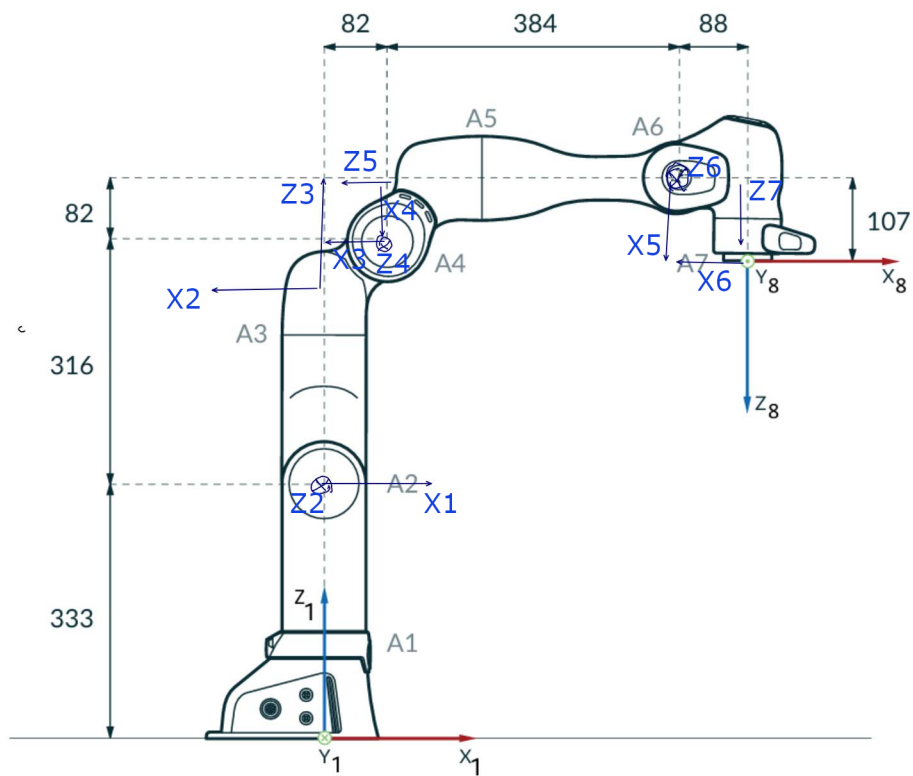
شکل ۱: محورهای ربات نوا

جدول ۱: پارامترهای DH ربات نوا

i	a	b	α	θ
1	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\theta_1 + \frac{\pi}{2}$
2	280	0	0	θ_2
3	225	0	0	θ_3
4	0	120	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \theta_4$
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \theta_5$
6	0	0	0	$\frac{\pi}{2} - \theta_6$

در سه مفصل آخر تعدادی از راستاها اشتباه انتخاب شدند (برای مثال x_6) ولی سعی شد پارامترها مطابق چیزی که رسم شده نوشته شوند. همچنین در اینجا برخلاف رسم درس و کتاب گونزالس که X_i را بین Z_i و Z_{i-1} در نظر می‌گیرند، اینجا مشابه کتاب Craig بین Z_i و $Z_i + 1$ در نظر گرفته شده که البته تاثیری در پارامترها ندارد.

اینجا نیز راستاها طبق تعریف کتاب Craig تعریف شده‌اند.

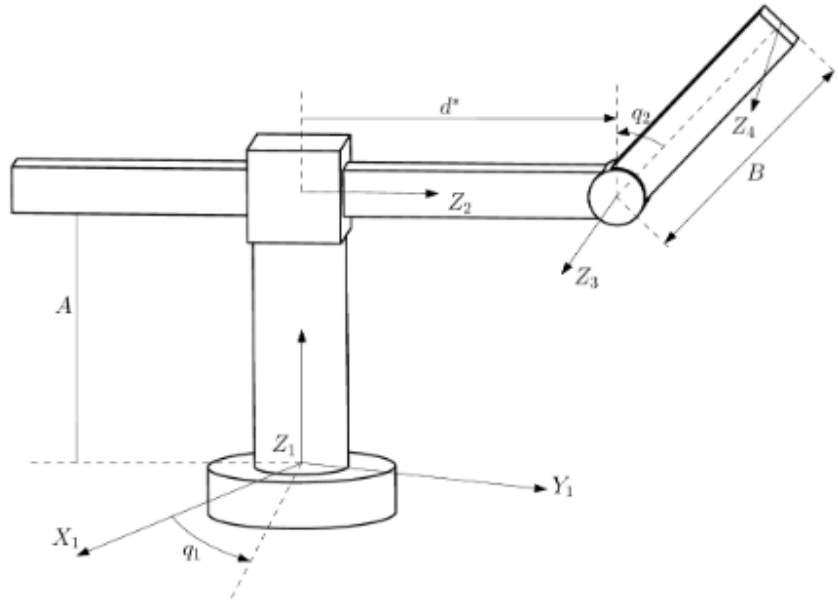


شکل ۲: بردارهای ربات

Table 2: DH parameters of robot

i	a	b	α	θ
1	0	333	$\frac{\pi}{2}$	θ_1
2	~ 316	~ 316	$\frac{\pi}{2}$	$\theta_2 + \pi$
3	82	82	$\frac{\pi}{2}$	θ_3
4	82	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \theta_4$
5	0	384	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \theta_5$
6	88	107	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \theta_6$
7	0	0	0	$\pi - \theta_6$

سوال ۴



شکل ۳: تصویر ربات سوال

۱.۴ بخش ۱

Table 3: DH parameters of robot

i	a	b	α	θ
1	0	A	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - q_1$
2	0	d	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
3	B	0	0	q_2

$$Q_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \sin\theta_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -\cos q_1 & 0 & \sin q_1 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} B \cos q_2 \\ B \sin q_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3$$

$$\vec{p} = \vec{a}_1 + Q_1 \vec{a}_2 + Q_1 Q_2 \vec{a}_3$$

$$Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sin q_1 & -\cos q_1 \\ 0 & \cos q_1 & \sin q_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \\ \cos q_1 \sin q_2 & \cos q_1 \cos q_2 & \sin q_1 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 + d \sin q_1 + B \sin q_1 \cos q_2 \\ 0 + d \cos q_1 + B \cos q_1 \sin q_2 \\ A + 0 + B \cos q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \sin q_1 + B \sin q_1 \cos q_2 \\ d \cos q_1 + B \cos q_1 \sin q_2 \\ A + B \cos q_2 \end{pmatrix}$$

۴.۴ بخش ۴

هدف یافتن مقادیر d, q_1 و q_2 با داشتن \vec{p} می باشد. داریم:

$$p_3 = A + B \cos q_2 \Rightarrow \cos q_2 = \frac{p_3 - A}{B} \Rightarrow q_2 = \arccos\left(\frac{p_3 - A}{B}\right)$$

که به دوجواب برای q_2 می رسد. با استفاده از معادله اول داریم:

$$\sin q_1 = \frac{p_1}{d + B \cos q_2}$$

از معادله دوم نیز داریم:

$$\cos q_1 = \frac{p_2}{d + B \sin q_2}$$

با جمع مربع طرفین می توان q_1 را حذف کرد و به یک معادله درجه ۴ بر حسب d رسید.

همچنین با معلوم شدن d چون سینوس و کسینوس q_1 بر حسب d ثابت هستند، می توان با استفاده از atan2 مقدار q_1 را بطور یکتا بدست آورد.

تعداد جواب ها در نهایت برابر می شود با دو مورد برای q_2 و چهار مورد برای d که یعنی در

بیشترین حالت، معادله معکوس این ربات هشت جواب دارد.