رباتیک

پاییز ۱۴۰۴

تمرین سوم

مرتضی ملکی‌نژاد شوشتری - ۸۱۰۱۰۴۲۵۶

---

۱ ژاکوبین ربات چهار درجه آزادی اسکارا

باید مقادیر $\vec{e}$ و $\vec{r}$ را یافت.

$$\vec{e_1} = -\vec{k}, \vec{e_2} = -\vec{k}, \vec{e_3} = -\vec{k}, \vec{e_4} = 0$$
$$\vec{r_3} = -d_4\vec{k}, \vec{r_2} = l_2\vec{j} + \vec{r_3}, \vec{r_1} = -sin(\theta_2)l_1\vec{i} + cos(\theta_2)l_1\vec{j} + \vec{r_2}$$

$$\Rightarrow e_1 = e_2 = e_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_4 \end{bmatrix} r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ -d_4 \end{bmatrix} r_1 = \begin{bmatrix} -sin(\theta_2)l_1 \\ cos(\theta_2)l_1 + l_2 \\ -d_4 \end{bmatrix}$$

پس برای ژاکوبین داریم: (دو سطر اول صفر هستند و با توجه به فرمول ϕ در ربات SCARA چون ربات چهار درجه آزادی دارد،ژاکوبین چهار در چهار برای آن درست تر است. برای همین و طبق فرمول اثبات شده در جزوه دو سطر اول حذف شدند.)

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -l2 - l1cos\theta_2 & -l_2 & 0 & 0 \\ l1sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

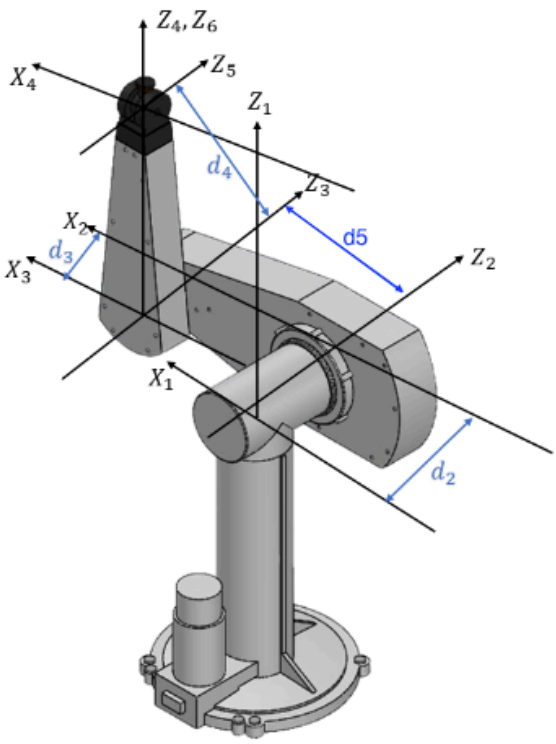
باتوجه به تنظیمات داده شده،مقدار ژاکوبین برابر است با:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه سرعت برداری داریم:

$$\vec{t} = J\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = J^{-1}\vec{t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3 \\ -1.15 \\ \frac{\sqrt{3}}{20} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲ تکینگی Puma 560



شکل ۱: محورهای ربات. در تصویر سوال مقدار d_5 ذکر نشده است.

در شکل مقدار طول بازوها (فاصله محورهای دوران بازو) به ترتیب l_1 و l_2 درنظر گرفته شد. همچنین محورهای x_5, x_6, z_7 و x_7 رسم نشده‌اند. که z_7 برابر با راستای موجود x_4 درنظر گرفته شد و به این ترتیب x_5 برابر با راستای موجود x_4 و x_6 برابر با راستای موجود z_5 می‌شود. مقدار x_7 نیز برابر با راستای موجود x_4 درنظر گرفته شد. برای ژاکوبین داریم:

جدول ۱: پارامترهای DH ربات Puma 560

number	a	b	α	θ
1	0	d_2	$\frac{\pi}{2}$	θ_1
2	l_1	0	0	θ_2
3	0	l_2	$-\frac{\pi}{2}$	θ_3
4	0	0	$\frac{\pi}{2}$	θ_4
5	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\theta_5$
6	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\theta_6-\frac{\pi}{2}$

$$e_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} e_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} e_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} e_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} e_5=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} e_6=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

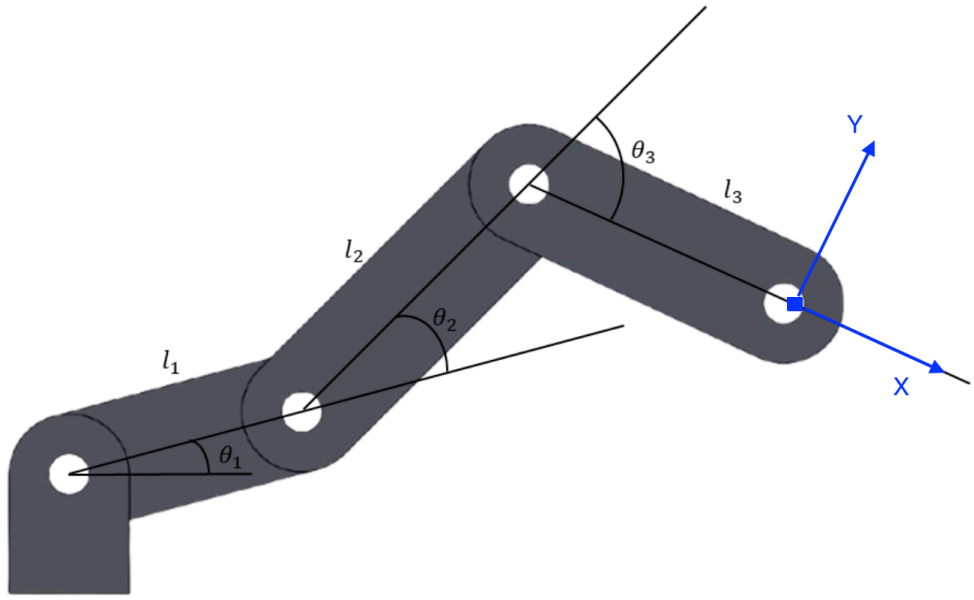
$$r_6 = r_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; r_3 = r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \; r_2 = r_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \; r_1 = r_2 + \begin{bmatrix} d_3 - d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_2 & -l-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بخش تکینگی حل نشده است.

۳ حساسیت سینماتیکی



شکل ۲: ربات مورد نظر همراه با محورهای مختصات مجری نهایی

◇ محورها همه در جهت Z هستند. همچنین برای محاسبه بردار های r باید بتوان زاویه را با افق حساب کرد. برای هر محور داریم:

$$\theta_1' = \theta_1 \qquad \theta_2' = \theta_1 + \theta_2 \qquad \theta_3' = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = \vec{k}$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} -l_3 cos\theta_3' \\ -l_3 sin\theta_3' \\ 0 \end{bmatrix} \; r_2 = r_3 + \begin{bmatrix} -l_2 cos\theta_2' \\ -l_2 sin\theta_2' \\ 0 \end{bmatrix} \; r_1 = r_2 + \begin{bmatrix} -l_1 cos\theta_1' \\ -l_1 sin\theta_1' \\ 0 \end{bmatrix}$$

با جلو رفتن طبق فرمول مرسوم ژاکوبین یک ماتریس شش در شش بدست می‌آید منتها این یک ربات با سه درجه آزادی است و شش درجه نیست. با نگاه به شکل ربات می‌توان دید که متغیرهای آزاد این ربات x, y و ϕ می‌باشد. یعنی در ماتریس ژاکوبین دو سطر اول (زوایای دیگر راستاها) و سطر آخر (برای راستای z همواره صفر است و می‌توان آن را ننوشت)

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l3sin\theta_3' + l2sin\theta_2' + l1sin\theta_1' & l3sin\theta_3' + l2sin\theta_3' & l3sin\theta_3' \\ l3cos\theta_3' + l2cos\theta_2' + l1cos\theta_1' & l3cos\theta_3' + l2cos\theta_2' & l3cos\theta_3' \end{bmatrix}$$

◇ $$\theta_1' = 75 \quad \theta_2' = 105 \quad \theta_3' = 35 \Rightarrow J \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 175 & 117 & 40 \\ 93 & 78 & 57 \end{bmatrix} \Rightarrow JJ^T = \begin{bmatrix} 3 & 332 & 228 \\ 332 & 45914 & 27681 \\ 228 & 27681 & 17982 \end{bmatrix}$$

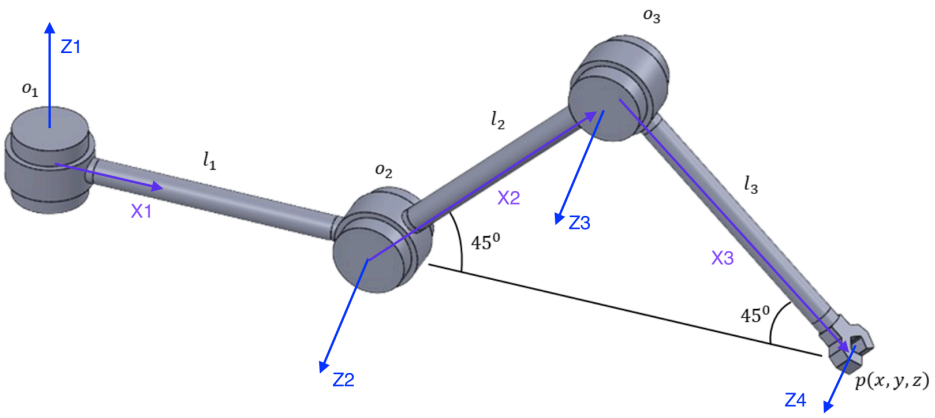
می‌توان دید که مقادیر ویژه این ماتریس برابر است با:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 6.29551976e+04 & 6.67987690e-05 & 9.43802339e+02 \end{pmatrix}$$

پس مقدار κ برابر است با:

$$\kappa = \sqrt{\frac{6.29551976e+04}{6.67987690e-05}} \approx 30,700$$

۴ ربات سه درجه آزادی



شکل ۳: محورهای ربات

جدول ۲: پارامترهای DH ربات سه درجه آزادی سوال چهار

number	a	b	α	θ
1	l_1	0	$\frac{\pi}{2}$	0
2	l_2	0	0	$\frac{\pi}{4}$
3	l_3	0	0	$-\frac{\pi}{2}$

◇ پارامترهای DH ربات در جدول ۲ آمده‌اند.

جدول ۳: پارامترهای DH ربات سه درجه آزادی سوال چهار در حالت کلی

number	a	b	α	θ
1	l_1	0	$\frac{\pi}{2}$	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

◇ برای حل FKP باید ماتریس transpose هر مفصل را یافت و سپس درهم ضرب کرد.

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}l_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا باید این سه ماتریس را درهم ضرب کرد:

$$T = T_1T_2T_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * T_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}l_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(l_2 - l_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که در این ماتریس، زیر ماتریس سه در سه اول ماتریس دوران است و قسمت سه در یک بعدی مکان مجری نهایی می‌باشد.پس:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}l_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}l_2 + l_1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(l_2 - l_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که با شکل ربات منطبق است. (چون ربات سه درجه آزادی دارد، سه متغیر آزاد دارد و سه متغیر دیگر وابسته اند و عملا در معادلات نقشی ندارند برای همین سه متغیر کافی است.)

فرم پارامتری معادلات FKP برابر است با:

$$x = cos\theta_1(l_1 + l_2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 - \theta_2))$$
$$y = l2sin\theta_2 + l_3cos(\theta_3 - \theta_2)$$
$$z = sin\theta_1(l_1 + l_2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 - \theta_2))$$

◇ ابتدا معادله مستقیم ربات بصورت پارامتری محاسبه می‌شود.

$$x = cos\theta_1(l_1 + l_2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 + \theta_2))$$

$$y = l2sin\theta_2 + l_3sin(\theta_2 + \theta_3) = 2l(sin(\theta_2 + \frac{\theta_3}{2})cos(\frac{\theta_3}{2}))$$

$$z = sin\theta_1(l_1 + l_2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 + \theta_2)) = lsin\theta_1(1 + 2(cos(\theta_2 + \frac{\theta_3}{3}))cos(\frac{\theta_3}{2}))$$

$$\Rightarrow \theta_1 = arctan(\frac{z}{x})$$

$$\Rightarrow \theta_2 + \frac{\theta_3}{2} = arctan(\frac{y}{\frac{z}{lsin\theta_1} - 1})$$

$$\Rightarrow y^2 + (\frac{z}{lsin\theta_1} - 1)^2 = 4cos(\frac{\theta_3}{2})^2 \Rightarrow \theta_3 = 2arccos(\frac{\sqrt{y^2 + (\frac{z}{lsin\theta_1} - 1)^2}}{2})$$

یعنی فرمول‌های نهایی برابرند با:

$$\theta_1 = arctan(\frac{z}{x})$$

$$\theta_3 = 2arccos(\frac{\sqrt{y^2 + (\frac{z}{lsin\theta_1} - 1)^2}}{2})$$

$$\theta_2 = arctan(\frac{y}{\frac{z}{lsin\theta_1} - 1}) - \frac{\theta_3}{2}$$

◇ چون در اینجا معادله FKP بدست آمده است، می‌توان مستقیم از آن مشتق جزئی گرفت و ماتریس ژاکوبین را پر کرد.

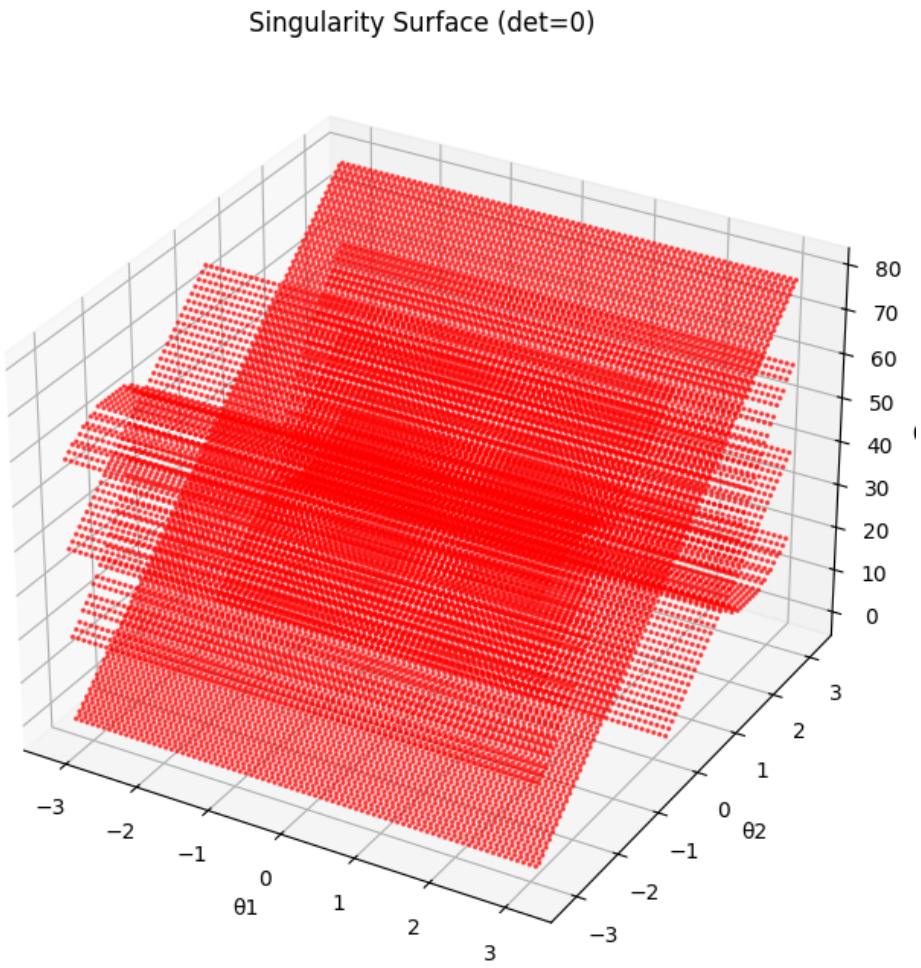
$$J = \begin{bmatrix} -sin\theta_1(l_1 + l_2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 + \theta_2)) & cos\theta_1(-l_2sin\theta_2 + l_3sin(\theta_3 - \theta_2)) & cos\theta_1(-l_3sin(\theta_3 + \theta_2)) \\ 0 & l2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 + \theta_2) & l_3cos(\theta_3 + \theta_2) \\ cos\theta_1(l_1 + l_2cos\theta_2 + l_3cos(\theta_3 + \theta_2)) & sin\theta_1(-l_2sin\theta_2 + l_3sin(\theta_3 + \theta_2)) & sin\theta_1(-l_3sin(\theta_3 + \theta_2)) \end{bmatrix}$$

◇ باتوجه به متغیرهای داده‌شده داریم:

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} \quad \theta_3 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}l \\ l & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇ در نوتبوک q_4.ipynb رسم نمودار امده است (برای استفاده از توابع خاص matplotlib از هوش مصنوعی کمک گرفته شده است.).

نقاطی که دترمینان کمتر از 0.1 می‌باشد به عنوان نقاط تکین درنظر گرفته شده‌اند.



شکل ۴: نقاط تکین ربات سوال ۴

- برای فضای کاری، می‌توان بصورت هندسی مسئله را حل کرد. اگر مفصل اول در نظر گرفته نشود، دو مفصل باقی مانده شبیه ربات انگشت است که در کلاس حل شد و فضای کاری آن بصورت یک دایره با شعاع 3l است که وسط آن یک دایره به شعاع l خالی می‌باشد. حال با درنظر گرفتن مفصل اول، این دایره حول محور z دوران پیدا میکند. یعنی شکل نهایی فضای کار یک شکل دونات طور با شعاع بیرونی 3r و شعاع داخلی r است که بیش‌ترین طول این دونات در 2.5r اتفاق می‌افتد.

۵ استاتیک ربات RRPRRR

این سوال حل نشده است.