

東大数学2025大問2 o3-mini-high

以下の問に答えてください。日本の大学入試の問題で、TeX形式で与えられます。可能な限り慎重に、じっくり、よくよく考えて、くれぐれもミスや勘違いをしないようにお願いします。

\section*{問2}

(1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log x \leq x - 1$ を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

\begin{eqnarray*}

\lim_{n \rightarrow \infty}

\int_1^{n^2} \log \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx

\end{eqnarray*}

以下、解答例を示します。

(1) の解答

$x > 0$ に対して

$$\log x \leq x - 1$$

を示します。

証明のために関数

$$f(x) = x - 1 - \log x$$

を考えます。

このとき、 $f(1) = 1 - 1 - \log 1 = 0$ です。また、 $f(x)$ の微分を求めると

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$$

となります。

- $x > 1$ のとき、 $f'(x) > 0$ であるため $f(x)$ は単調増加です。
- $0 < x < 1$ のとき、 $f'(x) < 0$ であるため $f(x)$ は単調減少です。

したがって、どちらの場合も $x = 1$ で最小値 $f(1) = 0$ をとるので、すべての $x > 0$ に対して

$$f(x) = x - 1 - \log x \geq 0 \implies \log x \leq x - 1$$

が成立します。

(2) の解答

次の極限を求めます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx.$$

(a) $x^{1/n}$ の近似

n が十分大きいとき、指数関数のテイラー展開より

$$x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log x}{n}} = 1 + \frac{\log x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

と書けます。したがって、

$$\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1 + \left(1 + \frac{\log x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{2} = 1 + \frac{\log x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) 対数の展開

$\log(1 + u) \approx u$ (u が小さいとき) の近似より、

$$\log \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) = \log \left(1 + \frac{\log x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{\log x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(c) 積分と極限の評価

よって、被積分関数は

$$n \log \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) = \frac{\log x}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

と近似できます。 $n \rightarrow \infty$ で $O(1/n)$ の項は消えるので、被積分関数は一様に

$$\frac{\log x}{2}$$

に収束します。よって、被積分関数の極限と積分の交換が正当化でき（例えば優収束定理を用いることができます）、極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx = \int_1^2 \frac{\log x}{2} dx.$$

この積分は、

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C$$

であることから、

$$\int_1^2 \log x \, dx = \left[x \log x - x \right]_{x=1}^{x=2} = (2 \log 2 - 2) - (1 \cdot 0 - 1) = 2 \log 2 - 2 + 1 = 2 \log 2 - 1.$$

したがって、

$$\int_1^2 \frac{\log x}{2} dx = \frac{1}{2}(2 \log 2 - 1) = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

最終解答

(1) $\log x \leq x - 1$ （ただし、 $x > 0$ ）

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx = \log 2 - \frac{1}{2}.$

以上です。