東大数学2025大問3 o3-mini-high

以下の問に答えてください。日本の大学入試の問題で、TeX形式で与えられます。可能な限り慎重に、じっくり、よくよく考えて、くれぐれもミスや勘違いをしないようにお願いします。

\section*{問3}

平行四辺形$ABCD$において, $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$,
$AB = a$,
$BC = b$,
$a \leq b$
とする。次の条件を満たす長方形 $EFGH$を考え, その面積をSとする。

条件: 点A, B, C, D はそれぞれ辺EF, FG, GH, HE上にある。
ただし, 辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle BCG = \theta$ とするとき, Sをa, b, θ を用いて表せ。

(2) Sのとりうる値の最大値をa, b を用いて表せ。

以下の解答例は，求める面積Sをa, b, θを用いて表し，さらにその最大値を求めたものです。以下，解答の経過とともに示します。

問題設定の整理

平行四辺形$ABCD$は

- $\angle ABC = \pi/6$
- $AB = a,\ BC = b\ (a \leq b)$

とし，また，長方形$EFGH$の各辺上に，

$$A \in EF, \quad B \in FG, \quad C \in GH, \quad D \in HE$$

となるように$ABCD$を内接させる．このとき，長方形の面積をSとし，さらに点Gを頂点とする角$\angle BCG = \theta$とする．

長方形の座標表示と点の位置

長方形$EFGH$を座標平面上に配置するため，

$$E = (0,0), \quad F = (L,0), \quad G = (L,M), \quad H = (0,M)$$

ととります．すると，各点は以下のように表せます：

- $A \in EF$なので，$A = (x_A, 0)$
- $B \in FG$なので，$B = (L, y_B)$
- $C \in GH$なので，$C = (x_C, M)$
- $D \in HE$なので，$D = (0, y_D)$

また，平行四辺形の対角線の中点が一致することより，

$$x_A + x_C = L, \quad y_B + y_D = M.$$

平行四辺形の辺と角の条件

1. $AB = a$
   $AB = B - A = (L - x_A,\ y_B - 0) = (L - x_A, y_B)$より，

$$(L - x_A)^2 + y_B^2 = a^2.$$

2. $BC = b$
   $BC = C - B = (x_C - L,\ M - y_B)$より，

$$(x_C - L)^2 + (M - y_B)^2 = b^2.$$

   ※ただし$(x_C - L)^2 = (L - x_C)^2$です． 3. $\angle ABC = \pi/6$
 角ABCは，BAとBCのなす角． $BA = A - B = (x_A - L,\ -y_B)$と$BC = C - B = (x_C - L,\ M - y_B)$とすると，

$$\frac{(x_A - L)(x_C - L) - y_B(M - y_B)}{a\,b} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   （この関係は後ほど用います.）

4. $\theta = \angle BCG$
   $B = (L, y_B),\ C = (x_C, M),\ G = (L, M)$なので，

$$\vec{CB} = B - C = (L - x_C,\ y_B - M), \quad \vec{CG} = G - C = (L - x_C,\ 0).$$

よって，

$$\tan\theta = \frac{|y_B - M|}{L - x_C}.$$

（$M \geq y_B$なので，$M - y_B = L - x_C\ \tan\theta$と書けます.）

この関係から，式

$$(x_C - L)^2 + (M - y_B)^2 = (L - x_C)^2\left(1 + \tan^2\theta\right) = (L - x_C)^2\sec^2\theta$$

とおき，$b^2 = (L - x_C)^2\sec^2\theta$より，

$$L - x_C = b\cos\theta, \quad \text{すなわち} \quad x_C = L - b\cos\theta.$$

また，$M - y_B = b\sin\theta$となり，

$$y_B = M - b\sin\theta.$$

平行四辺形の辺ABの方向

AとBの座標は

$$A = (x_A, 0), \quad B = (L, M - b\sin\theta).$$

また，平行四辺形の対辺条件から$x_A + x_C = L$より，

$$x_A = L - x_C = L - (L - b\cos\theta) = b\cos\theta.$$

よって，

$$A = (b\cos\theta,\ 0).$$

また，

$$AB = B - A = (L - b\cos\theta,\ M - b\sin\theta).$$

その大きさがaであるので，

$$(L - b\cos\theta)^2 + (M - b\sin\theta)^2 = a^2.$$

ここで，ABの向きについて，水平成分$L - b\cos\theta$と鉛直成分$M - b\sin\theta$を考え，

$$L - b\cos\theta = a\cos\varphi, \quad M - b\sin\theta = a\sin\varphi,$$

と書くと，φはABのなす角です．

---

dot積からの関係式とφの決定

先に，$\angle ABC = \pi/6$より，

$$\frac{(x_A - L)(x_C - L) - y_B(M - y_B)}{a\,b} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

実際に$x_A = L - b\cos\theta$および$x_C = L - b\cos\theta$、$y_B = M - b\sin\theta$を代入すると，

$$(L\cos\theta - M\sin\theta) - b\cos 2\theta = \frac{a\sqrt{3}}{b}\,,$$

あるいは

$$L\cos\theta - M\sin\theta = a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\cos 2\theta.$$

一方，LとMは

$$L = b\cos\theta + a\cos\varphi, \quad M = b\sin\theta + a\sin\varphi.$$

よって，

$$L\cos\theta - M\sin\theta = b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + a(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = b\cos 2\theta + a\cos(\varphi + \theta).$$

これが先の式と一致するので，

$$b\cos 2\theta + a\cos(\varphi + \theta) = a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\cos 2\theta,$$

すなわち

$$a\cos(\varphi + \theta) = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

（$a \neq 0$より）$\cos(\varphi + \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$となり，

$$\varphi + \theta = \frac{\pi}{6} \quad (\text{ただし } \varphi + \theta \in [0, \pi] \text{ と考えれば}).$$

よって，

$$\varphi = \frac{\pi}{6} - \theta.$$

長方形の辺L, Mの決定と面積Sの表示

先ほどの関係より，

$$L = b\cos\theta + a\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right), \quad M = b\sin\theta + a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right).$$

したがって，長方形の面積は

$$S = L \cdot M = \left(b\cos\theta + a\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right)\left(b\sin\theta + a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right).$$

これは (1) の答えとして求める形です．

また，この積を展開すると

$$\begin{aligned} S &= b^2\cos\theta\sin\theta + a\,b\left[\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right] + a^2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \\ &= \frac{b^2}{2}\sin 2\theta + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right), \end{aligned}$$

すなわち

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left\{ab + b^2\sin 2\theta + a^2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)\right\}.}$$

これが (1) の解答例です。

Sの最大値の決定

Sはθに依存するので，Sを最大にするθを考えます．上記の式から

$$S = \frac{1}{2}\left\{ab + f(\theta)\right\}, \quad \text{ただし} \quad f(\theta) = b^2\sin 2\theta + a^2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right).$$

変数$x = 2\theta$と置くと，

$$f(x) = b^2\sin x + a^2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

展開すると，

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x,$$

よって

$$f(x) = \left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)\sin x + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cos x.$$

この形は $A\sin x + B\cos x$ と書け，最大値は

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

実際に計算すると

$$\begin{aligned}\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= b^4 - \ a^2b^2 + \frac{a^4}{4} + \frac{3a^4}{4} \\ &= b^4 - a^2b^2 + a^4.\end{aligned}$$

すなわち，

$$\max_x f(x) = \sqrt{b^4 - a^2b^2 + a^4}.$$

したがって，Sの最大値は

$$S_{\max} = \frac{1}{2}\left\{ab + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}\right\}.$$

よって，(2) の解答は

$$\boxed{S_{\max} = \frac{ab + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}.}$$

最終解答

(1)　Sをa, b, θを用いて表すと

$$\boxed{S = \left(b\cos\theta + a\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right)\left(b\sin\theta + a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right) = \frac{1}{2}\left\{ab + b^2\sin 2\theta + a^2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)\right\}.}$$

(2)　Sのとりうる値の最大値は

$$\boxed{S_{\max} = \frac{ab + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}.}$$

※　この解答例は，幾何学的な考察と座標表示による解析から導かれる一例であり，同値変形や別の考え方による解答も認められます。