東大数学2025大問6 o3-mini-high

以下の問に答えてください。日本の大学入試の問題で、TeX形式で与えられます。可能な限り慎重に、じっくり、よくよく考えて、くれぐれもミスや勘違いをしないようにお願いします。

\section*{問6}

複素数平面上の点$\frac{1}{2}$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円の周から原点を除いた曲線をCとする。

(1) 曲線C上の複素数zに対し, $\frac{1}{z}$の実部は1であることを示せ。

(2) α, β を曲線C上の相異なる複素数とするとき,
$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$
が取りうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3)
γ を(2)で求めた範囲に属さない複素数とするとき,
$\frac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

以下、解答例を示します。

---

(1) の解

C 上の任意の複素数 z は,

$$z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) \quad (\theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} \neq -1)$$

と表せます。よって

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{1 + e^{i\theta}}.$$

ここで分子・分母に $e^{-i\theta/2}$ を掛けると

$$\frac{1}{z}=\frac{2e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}(1+e^{i\theta})}=\frac{2e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}=\frac{2e^{-i\theta/2}}{2\cos(\theta/2)}=\frac{e^{-i\theta/2}}{\cos(\theta/2)}.$$

この式を

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}=1-i\tan(\theta/2)$$

と書けるので、明らかに実部は 1 です。

---

(2) の解

α,β を C 上の相異なる複素数とする。先ほど (1) で示したように，

$$\frac{1}{\alpha}=1-iu,\quad \frac{1}{\beta}=1-iv,\qquad (u,v\in\mathbb{R})$$

と書けます。したがって

$$\frac{1}{\alpha^2}=(1-iu)^2=1-2iu-u^2,\quad \frac{1}{\beta^2}=(1-iv)^2=1-2iv-v^2.$$

これらの和は

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=2-(u^2+v^2)-2i(u+v).$$

ここで、$s=u+v$ および $d=u-v$ と置くと、

$$u^2+v^2=\frac{(u+v)^2+(u-v)^2}{2}=\frac{s^2+d^2}{2}.$$

よって

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=2-\frac{s^2+d^2}{2}-2is.$$

実部と虚部を分けると、

- 実部：$x=2-\frac{s^2+d^2}{2}$
- 虚部：$y=-2s$

固定された s（すなわち $y=-2s$）に対して，d は $d\neq 0$（α,β が相異なるため）で任意の実数（正の値として考えてよい）を取り得るため，d^2 は任意の正の実数となり，x は

$$x = 2 - \frac{s^2}{2} - \frac{d^2}{2}$$

と表され，$\frac{d^2}{2} > 0$ であることから，

$$x < 2 - \frac{s^2}{2}.$$

また $s = -\frac{y}{2}$ と置き換えると，境界となる値は

$$x = 2 - \frac{y^2}{8}.$$

つまり，$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ が取りうる値の集合は，複素平面上で

$$\{\, x + iy \mid x < 2 - \frac{y^2}{8} \,\}$$

となります。なお，相異なる α, β の場合，$d \neq 0$ のため境界 $x = 2 - \frac{y^2}{8}$ は実現しませんが，極限的にその近くの値を取り得ます。

【図示】
この集合は，右側の境界が放物線

$$x = 2 - \frac{y^2}{8}$$

である開領域となります。右側（x の大きい側）は含まず，左側全体（x の小さい側）は無限に広がる領域です。

---

(3) の解

(2) の値の範囲に属さない複素数 $\gamma = x + iy$（ただし $\gamma \neq 0$）は，制約

$$x \geq 2 - \frac{y^2}{8}$$

を満たします。これに対して

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

なので，その実部は

$$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

となります。ここで，y 固定のとき，$f(x,y)$ を x に関して考えると，$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ は $x>0$ の場合は x が小さいほど大きく，また $x<0$ の場合は x が大きい（すなわち絶対値が小さい）ほど大きくなります。すなわち，最大・最小は境界 $x=2-\frac{y^2}{8}$ 上で現れると考えられます。

境界上で $x=2-\frac{y^2}{8}$ と置くと，

$$f(y)=\frac{2-\frac{y^2}{8}}{\left(2-\frac{y^2}{8}\right)^2+y^2}.$$

具体に代表的な y の値を考えます。

- **$y=0$ の場合：**
  $x=2$ となり，
  $$f(0)=\frac{2}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$
- **$y^2=48$ の場合：**
  $x=2-\frac{48}{8}=2-6=-4$ となり，
  $x^2+y^2=(-4)^2+48=16+48=64$ より，
  $$f=\frac{-4}{64}=-\frac{1}{16}.$$

また，$y^2>48$ のとき，$x=2-\frac{y^2}{8}$ はさらに小さくなりますが，分母も大きくなるため，$f(x,y)$ は 0 に近づきます。さらに $x>2-\frac{y^2}{8}$ ととれば $f(x,y)$ は境界での値よりは大きくなります（x が増加すると分子が増すが分母も増加しますが，極値は境界で現れることが解析できます）。

したがって，$\frac{1}{\gamma}$ の実部が取りうる値は，

$$\max f(x,y)=\frac{1}{2}\quad(y=0\ \text{で}\ \gamma=2\ \text{のとき})$$

および

$$\min f(x,y)=-\frac{1}{16}\quad(y^2=48,x=-4\ \text{のとき})$$

となります。

最終解答

1. $z \in C$ に対して $\frac{1}{z} = 1 - i\tan(\theta/2)$ と表せるので，実部は 1.
2. $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = 2 - (u^2+v^2) - 2i(u+v)$ と変形でき，$u, v \in \mathbb{R}$ の変数変換により，
   その取りうる値の集合は
   $\{\, x+iy \in \mathbb{C} \mid x < 2 - \frac{y^2}{8} \,\}$ であり，右側境界は放物線 $x = 2 - \frac{y^2}{8}$
   である.
3. $\gamma \notin \{\, w \in \mathbb{C} \mid \Re w < 2 - \frac{(\Im w)^2}{8} \,\}$ とするとき，$\frac{1}{\gamma}$ の実部は
   $\max \Re\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}$ ， $\min \Re\frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{16}$.

以上です。