

東大数学2025大問1 o3-mini-high

以下の問に答えてください。日本の大学入試の問題で、TeX形式で与えられます。可能な限り慎重に、じっくり、よくよく考えて、くれぐれもミスや勘違いをしないようにお願いします。

\section*{問1}

座標平面上の点

$A(0,0)$,

$B(0,1)$,

$C(1,1)$,

$D(1,0)$

を考える。

実数 $0 < t < 1$ に対して、線分 AB , BC , CD を

$t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t , Q_t , R_t とし、線分 $P_t Q_t$, $Q_t R_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t , T_t とする。

さらに、線分 $S_t T_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を U_t とする。

また、点 A を U_0 , 点 D を U_1 とする。

(1) 点 U_t の座標を求めよ。

(2) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と、線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。

t が $0 \leq t \leq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを、 a の多項式の形で求めよ。

以下、各問に対する解答とその詳細な説明を示します。

(1) U_t の座標

まず、各中間点を内分点の公式を用いて求めます。

- 点 P_t : 線分 AB ($A(0,0)$, $B(0,1)$) を $t : (1-t)$ に内分するので

$$P_t = ((1-t) \cdot (0,0) + t \cdot (0,1)) = (0, t).$$

- 点 Q_t : 線分 BC ($B(0,1)$, $C(1,1)$) より

$$Q_t = ((1-t) \cdot (0, 1) + t \cdot (1, 1)) = (t, 1).$$

- 点 R_t : 線分 CD ($C(1, 1), D(1, 0)$) より

$$R_t = ((1-t) \cdot (1, 1) + t \cdot (1, 0)) = (1, 1-t).$$

次に、

- 点 S_t : 線分 P_tQ_t を $t : (1-t)$ に内分するので

$$S_t = ((1-t)P_t + tQ_t) = ((1-t)(0, t) + t(t, 1)) = (t^2, t(1-t) + t) = (t^2, t(2-t)).$$

- 点 T_t : 線分 Q_tR_t を同様に内分して

$$T_t = ((1-t)Q_t + tR_t) = ((1-t)(t, 1) + t(1, 1-t)) = (t(2-t), 1-t^2).$$

そして、最後に

- 点 U_t : 線分 S_tT_t を $t : (1-t)$ に内分するので

$$U_t = (1-t)S_t + tT_t.$$

座標ごとに計算すると、

$$\begin{aligned} x(U_t) &= (1-t) \cdot t^2 + t \cdot (t(2-t)) = t^2(1-t) + t^2(2-t) = t^2[(1-t) + (2-t)] \\ &= t^2(3-2t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(U_t) &= (1-t) \cdot t(2-t) + t \cdot (1-t^2) = t(2-t)(1-t) + t(1-t^2) \\ &= t[(2-t)(1-t) + (1-t^2)]. \end{aligned}$$

注意すべきは $(2-t)(1-t) = 2 - 3t + t^2$ であり、これに $1 - t^2$ を加えると

$$(2-t)(1-t) + (1-t^2) = (2 - 3t + t^2) + (1 - t^2) = 3 - 3t.$$

よって、

$$y(U_t) = t(3 - 3t) = 3t(1-t).$$

したがって、

$$\boxed{U_t = (t^2(3-2t), 3t(1-t)).}$$

(2) 面積の計算

ここで、 $t \in [0, 1]$ のときに U_t が描く曲線と線分 AD ($A(0, 0)$ と $D(1, 0)$ を結ぶ) で囲まれる領域の面積を求めます。

曲線はパラメトリック表示

$$x(t) = t^2(3 - 2t), \quad y(t) = 3t(1 - t)$$

で表され、 $x(t)$ は $t = 0$ で 0、 $t = 1$ で 1 となり、単調増加するため、領域は x 軸との間の面積となります。

パラメトリック曲線の下での面積は

$$\text{面積} = \int_{t=0}^1 y(t) x'(t) dt.$$

まず $x(t) = t^2(3 - 2t)$ の微分を求めます。

$$x'(t) = \frac{d}{dt} [t^2(3 - 2t)] = 2t(3 - 2t) + t^2(-2) = 6t - 4t^2 - 2t^2 = 6t(1 - t).$$

また、 $y(t) = 3t(1 - t)$ ですから、

$$y(t)x'(t) = 3t(1 - t) \cdot 6t(1 - t) = 18t^2(1 - t)^2.$$

したがって、面積 A は

$$A = 18 \int_0^1 t^2(1 - t)^2 dt.$$

この積分は展開して求めます。

まず、

$$t^2(1 - t)^2 = t^2(1 - 2t + t^2) = t^2 - 2t^3 + t^4.$$

よって、

$$\int_0^1 t^2(1 - t)^2 dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^3 + t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1.$$

計算すると、

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{10 - 15 + 6}{30} = \frac{1}{30}.$$

従って、

$$A = 18 \cdot \frac{1}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

よって、

$$\text{面積} = \frac{3}{5}.$$

(3) 曲線の長さの計算

$t \in [0, a]$ ($0 < a < 1$) において、曲線 $U_t = (t^2(3 - 2t), 3t(1 - t))$ の長さ $L(a)$ は、

$$L(a) = \int_0^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

すでに $x'(t) = 6t(1 - t)$ と計算しました。

次に $y(t) = 3t(1 - t)$ から、

$$y'(t) = \frac{d}{dt}[3t(1 - t)] = 3(1 - t) - 3t = 3 - 6t.$$

よって、

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = [6t(1 - t)]^2 + [3 - 6t]^2.$$

計算すると、

$$\begin{aligned} (6t(1 - t))^2 &= 36t^2(1 - t)^2, \\ (3 - 6t)^2 &= 9 - 36t + 36t^2. \end{aligned}$$

したがって、

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 36t^2(1 - t)^2 + 9 - 36t + 36t^2.$$

まず $36t^2(1 - t)^2$ を展開すると、

$$36t^2(1 - t)^2 = 36t^2(1 - 2t + t^2) = 36t^2 - 72t^3 + 36t^4.$$

これと他の項を合わせると、

$$36t^4 - 72t^3 + 36t^2 + 36t^2 - 36t + 9 = 36t^4 - 72t^3 + 72t^2 - 36t + 9.$$

実はこの4次式は平方数になっていることが確認できます。

具体的には、

$$(2t^2 - 2t + 1)^2 = 4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1.$$

これに9倍すると、

$$9(2t^2 - 2t + 1)^2 = 9(4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1) = 36t^4 - 72t^3 + 72t^2 - 36t + 9,$$

となり一致します。よって、

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{9(2t^2 - 2t + 1)^2} = 3(2t^2 - 2t + 1),$$

$(2t^2 - 2t + 1 > 0$ は $t \in [0, 1]$ で成り立ちます)。

よって曲線の長さは

$$L(a) = \int_0^a 3(2t^2 - 2t + 1) dt = 3 \int_0^a (2t^2 - 2t + 1) dt.$$

積分すると、

$$\int (2t^2 - 2t + 1) dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + t,$$

よって

$$L(a) = 3 \left[\frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \right]_0^a = 3 \left(\frac{2}{3}a^3 - a^2 + a \right) = 2a^3 - 3a^2 + 3a.$$

したがって、

$$L(a) = 2a^3 - 3a^2 + 3a.$$

最終解答

1. $U_t = (t^2(3 - 2t), 3t(1 - t))$.
2. 面積は $\frac{3}{5}$.
3. 曲線の長さは $2a^3 - 3a^2 + 3a$.

以上となります。