東大数学2025大問4 o3-mini-high

以下の問に答えてください。日本の大学入試の問題で、TeX形式で与えられます。可能な限り慎重に、じっくり、よくよく考えて、くれぐれもミスや勘違いをしないようにお願いします。

\section*{問4}

この問いでは, 0以上の整数の2乗になる数を平方数と呼ぶ。
aを正の整数とし,
$f_a(x) = x^2 + x - a$
とおく。

(1) nを正の整数とする。
$f_a(n)$ が平方数ならば, $n \leq a$ であることを示せ。

(2) $f_a (n)$ が平方数となる正の整数nの個数をN_aとおく。
次の条件(i), (ii) が同値であることを示せ。

(i) $N_a = 1$ である。

(ii) $4a + 1$ は素数である。

以下、解答例の一つを示します。

---

(1) の解

n を正の整数、k を非負整数として

$$f_a(n) = n^2 + n - a = k^2$$

とおく．ここで $n > a$ であると仮定すると，$n - a \geq 1$ なので

$$n^2 + n - a \geq n^2 + 1.$$

また，明らかに

$$n^2 + n - a < n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

すなわち，

$$n^2 < f_a(n) < (n+1)^2.$$

しかし，n^2 と $(n+1)^2$ は連続する平方数であるため，その間に平方数は存在しません．
したがって，仮定 $n > a$ は矛盾し，必ず $n \leq a$ となります。

---

(2) の解

$f_a(n) = k^2$ すなわち

$$n^2 + n - a = k^2$$

とする．両辺を 4 倍し，さらに 1 を加えると，

$$4n^2 + 4n + 1 = 4k^2 + 4a + 1.$$

左辺は平方完成して

$$(2n+1)^2 = 4k^2 + 4a + 1$$

となるので，両辺を整理すると

$$(2n+1)^2 - (2k)^2 = 4a + 1.$$

左辺は因数分解でき，差の二乗の公式より

$$(2n+1-2k)(2n+1+2k) = 4a + 1.$$

ここで，$2n+1$ と $2k$ は整数であり，特に $2n+1$ は奇数であるから，$2n+1-2k$ と $2n+1+2k$ はともに奇数の正の整数です．

【逆の議論】
逆に，$4a+1$ を奇数の正の因数 d_1, d_2（ただし $d_1 \leq d_2$）の積

$$d_1 d_2 = 4a + 1$$

と分解できるとする．このとき，

$$2n+1 = \frac{d_1+d_2}{2}, \quad 2k = \frac{d_2-d_1}{2}$$

と定めれば，n, k は整数となり，

$$n = \frac{d_1 + d_2 - 2}{4}, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{4}$$

が得られ，これは $f_a(n) = k^2$ となる解に対応します．

なお，$d_1 = 1$, $d_2 = 4a + 1$ ととれば，

$$n = \frac{1 + (4a+1) - 2}{4} = a, \quad k = \frac{(4a+1) - 1}{4} = a$$

となるため，常に $n = a$ に対応する解が存在します．

このように，$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数 N_a は，$4a + 1$ の奇数因数分解の個数と1対1対応しています．
すなわち，

- $4a + 1$ が素数であれば，その因数分解は $1 \times (4a + 1)$ しかなく，対応する解は $n = a$ のみとなり，$N_a = 1$ です．
- 逆に，$N_a = 1$ であるならば，$4a + 1$ の因数分解が $1 \times (4a + 1)$ のみでなければならず，すなわち $4a + 1$ は素数であることと同値です．

以上より，

$$\text{(i) } N_a = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(ii) } 4a + 1 \text{ は素数}$$

が示されました。

このようにして、(1) および (2) の命題が証明されます。