

東大数学2025大問5 o3-mini-high

以下の問に答えてください。日本の大学入試の問題で、TeX形式で与えられます。可能な限り慎重に、じっくり、よくよく考えて、くれぐれもミスや勘違いをしないようにお願いします。

\section*{問5}

n を 2 以上の整数とする。 1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり、横一列におかれている。 1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して、次の操作(T_i)を考える。

(T_i) 左から i 番目の札の数字が、左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ、これら 2 枚の札の位置を入れかえる。

そうでなければ、札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から A_1, A_2, \dots, A_n であったとする。

この状態から $(n-1)$ 回の操作(T_1), (T_2), \dots , (T_{n-1})

を順に行った後、続けて $n-1$ 回の操作

(T_{n-1}), \dots , (T_2), (T_1)を順に行ったところ、札の数字は左から $1, 2, \dots, n$ と小さい順に並んだ。

以下の問いに答えよ。

(1) A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1, A_2, \dots, A_n の総数を c_n とする。

n が 4 以上の整数であるとき、 c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ

以下、解答例の一つを示します。

(1) の解

最終的にカードが昇順 $1, 2, \dots, n$ に並ぶためには、最小の数である 1 は必ず先頭に来なければなりません。しかし、操作 (T_i) では、各操作で左右の隣り合うカードのみが入れ替えられ、カードは1回の前進操作で左へ「1つ」しか移動できません。同様に、後退操作でも1回につき左へ1つだけ移動可能です。したがって、もし初期状態で

$$A_1 \geq 3 \quad \text{かつ} \quad A_2 \geq 3,$$

であれば、 $\{1, 2\}$ はいずれも初期位置が3番目以降にあることになります。すると、 1 は前進操作で最高でも2番目に、その後の後退操作で1番目に移すことができるものの、もう一方の 2 は最高でも3番目にとどまってしまいます。結果、最終状態で 1 と 2 が先頭2列に正しく配置されることはなく、昇順にはならないことになります。

よって、初期状態で A_1 と A_2 の少なくとも一方は 2 以下、すなわち 1 または 2 でなければならない、ということが示されました。

(2) の解

初期状態の並びで、前述の操作（前進で T_1, T_2, \dots, T_{n-1} ，後退で T_{n-1}, \dots, T_2, T_1 を施すと最終的に昇順になる）となるものの個数を c_n とします。ここで、 $n \geq 4$ のとき、次のように場合分けして考えます。

【場合1】 $A_1 = 1$ の場合

先頭がすでに 1 であるとき、残りのカードは $\{2, 3, \dots, n\}$ の順列となります。このとき、操作の性質から、残り $n - 1$ 枚に対して同様の操作を施したときに昇順となる並びの個数は c_{n-1} となります。

【場合2】 $A_1 \neq 1$ の場合

(1) の結果より、このときは $A_2 \leq 2$ とならざるをえません。さらに $A_1 \neq 1$ であることから、必ず

$$A_2 = 1$$

となります。

初期状態では A_1 は 1 以外の任意の数 $(2, 3, \dots, n \text{ のいずれか})$ でよいので、その選び方は $n - 1$ 通りあります。また、 A_1 と 1 の両方を除いた残りの $\{2, 3, \dots, n\} \setminus \{A_1\}$ の $n - 2$ 枚については、操作を施すと昇順になるという同じ条件が課せられており、その個数は c_{n-2} 通りです。

したがって、この場合の並びの総数は

$$(n-1)c_{n-2}$$

通りとなります。

【まとめ】

場合1と場合2とを合わせると、

$$c_n = c_{n-1} + (n-1)c_{n-2} \quad (n \geq 4)$$

が成立します。

【最終解答】

(1) 仮に $A_1 \geq 3$ かつ $A_2 \geq 3$ とすると、カード 1 と 2 は初期状態でともに3番目以降にあるため、前進操作でそれぞれ最高でも2番目・3番目にしか移動できず、後退操作でもさらに左へ1つしか動かせない。従って最終状態で 1 を1番目に、2 を2番目に配置することは不可能であり、矛盾となる。よって少なくとも一方は 2 以下である。

(2) 初期状態の有りうる並びの個数 c_n (ただし操作後に昇順になるもの) は、 $A_1 = 1$ の場合と $A_1 \neq 1$ (このとき $A_2 = 1$) の場合に分けて考えると、

$$c_n = c_{n-1} + (n-1)c_{n-2} \quad (n \geq 4)$$

となる。

以上が解答例です。