九州大学大学院数理学府
平成 31 年度修士課程入学試験
専門科目

[5](1) $X \bigcap_\varphi Y = S^1$ であるから Mayer-Vietoris 完全系列は

$$\cdots \to H_{n+1}(X \bigcup_\varphi Y;\mathbb{Z}) \to H_n(S^1;\mathbb{Z}) \to H_n(X;\mathbb{Z}) \oplus H_n(Y;\mathbb{Z}) \to H_n(X \bigcup_\varphi Y;\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(S^1;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

である. $\square$

(2) $H_1(X \bigcup_\varphi Y;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である. $\square$

[11](1) $0 < r \leq \frac{1}{2}$ のとき $x = 1 + r, y = 1$
$\frac{1}{2} < r < 1$ のとき $x = 2 - r, y = 1$ をとると

$$|f(x) - f(y)| > r|x - y|$$

となるので f は縮小写像ではない. □

(2)

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{(x+1)(y+1)} \right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x - y| \end{aligned}$$

が成り立つので g は縮小写像である. □

(3) $m > n$ として $0 < \exists r < 1$ s.t.

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |g(a_{m-1}) - g(a_{n-1})| \\ &\leq r|a_{m-1} - a_{n-1}| \\ &\vdots \\ &\leq r^n|a_{m-n} - a_0| \\ &\to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

従って, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列なので収束する. □

(4) $x \geq 1$ において $f(x) = x$ をみたす x は $1 + \frac{1}{x} = x$ つまり $x^2 - x - 1 = 0$ より

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

よって, $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ であることを示せば良い. 実際に $0 < \exists r < 1$ s.t.

$$\begin{aligned} \left| g^n(a_0) - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right| &= \left| g^n(a_0) - g^n\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\right) \right| \\ &= r^n \left| a_0 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right| \\ &\to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

従って

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g^n(a_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

であるので, $f(a) = a$ が成立する. □