九州大学大学院数理学府
平成 26 年度修士課程入学試験
専門科目

[5](1) $f : S^2 \to S^2/S^0$ を商写像とする.
f は全射であり S^2 はコンパクトなので S^2/S^0 はコンパクトである.
$x, y \in S^2$ として $f(x), f(y) \in S^2/S^0$ を $f(x) \neq f(y)$ ととるとき
(i) $x = (0,0,1), (0,0,-1)$ の場合
$f^{-1}(f(x)) = \{(0,0,1), (0,0,-1)\}, f^{-1}(f(y)) = y$ である.
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ における ε 開近傍を $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\{d((0,0,1),y), d((0,0,-1),y)\}$ として互いに交わらないようにとる.
$U = (B_\varepsilon((0,0,1)) \bigcup B_\varepsilon((0,0,-1))) \bigcap S^2, V = B_\varepsilon(y) \bigcap S^2$ と定めると
$f(U), f(V)$ はそれぞれ $f(x), f(y)$ の開近傍であり $f(U) \bigcap f(V) = \emptyset$ である.
(ii) $x \neq (0,0,1), (0,0,-1)$ の場合
(i) より $f^{-1}(f(x)) = \{x\}, f^{-1}(f(y)) = \{y\}$ の場合を考えればよい.
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ における ε 開近傍を $\varepsilon = \dfrac{1}{2}d(x,y)$ として互いに交わらないようにとる.
$U = B_\varepsilon(x) \bigcap S^2, V = B_\varepsilon(y) \bigcap S^2$ と定めると
$f(U), f(V)$ はそれぞれ $f(x), f(y)$ の開近傍であり $f(U) \bigcap f(V) = \emptyset$ である.
以上により, S^2/S^0 はコンパクトハウスドルフ空間である. $\square$

(2) $H_n(S^2/S^0; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n = 0, 2) \\ \{0\} \ (n \neq 0, 2) \end{cases}$ である. $\square$

[6](1) E を単位行列とする.

$|A-\lambda E| = -\lambda^2(\lambda+6)$ であるので A の固有値は $0, -6$ である. $\square$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ を解くと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を解くと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

従って, $\mathrm{Ker}A$ と $\mathrm{Im}A$ の直交基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる. $\square$

(3) $x_0 \in \mathrm{Im}A$ のとき $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix}$ と表せる.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ である.

$x(t)$ の一般解を求めると $x(t) = CP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1} x(0)$ である.

従って, $x(t) = Ce^{6t} \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}A$ である. $\square$

(4) $x(0) = x_0$ より $C = 1$ なので求める解は $x(t) = e^{6t} x_0$ である. $\square$