九州大学大学院数理学府
平成17年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数学コース)

注意 ● 問題[1][2][3][4][5][6][7][8][9]の中から2題を選択して解答せよ．

● 以下$\mathbb{N}$は自然数の全体，$\mathbb{R}$は実数の全体，$\mathbb{C}$は複素数の全体を表す．

[1] 5文字$\{1,2,3,4,5\}$上の置換全体からなる5次対称群S_5を考える．

(1) 任意の群Gに対してその中心を$Z(G)=\{z\in G|xz=zx,\forall x\in G\}$と定義する．$Z(G)$は$G$の正規部分群であることを示せ．

(2) S_5の中心$Z(S_5)$を求めよ．

(3) S_5の位数2の元の個数を求めよ．

(4) S_5の位数3の元の個数を求めよ．また，位数3の部分群の個数を求めよ．

(5) S_5の位数6の部分群の個数を求めよ．

[2] Xを有限集合とし，AをXから実数体$\mathbb{R}$への写像全体のなす集合とする．

(1) $f,g\in A$に対して$f+g,fg\in A$を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

で定義すると，Aは単位元をもつ可換環になることを示せ．

(2) $y\in X$に対し，$\chi_y\in A$を

$$\chi_y(x)=\begin{cases}1, & x=y,\\ 0, & x\neq y\end{cases}$$

で定義される写像とする．$\mathfrak{a}$を，A自身とは一致しないAのイデアルとする．このとき，$f(z)\neq 0$を満たす$f\in\mathfrak{a}$と$z\in X$が存在するならば，$\chi_z\in\mathfrak{a}$となることを示せ．

(3) Aの任意の極大イデアルは，ある$z\in X$によって

$$\{f\in A\,|\,f(z)=0\}$$

と表されることを示せ．

[3] 以下では $\mathbb{F}_3$ を 3 元体とし，そのある代数閉包を $\overline{\mathbb{F}}_3$ とする．

(1) 3 元体 $\mathbb{F}_3$ 上のモニックな 2 次既約多項式をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた多項式の内の一つを選び，その $\overline{\mathbb{F}}_3$ における根を α とする．このとき，$\dfrac{1}{2\alpha+1}$ を α の整式として表せ．

(3) $\overline{\mathbb{F}}_3$ の 0 以外の元がつくる乗法群を $\overline{\mathbb{F}}_3^{\times}$ とする．(1) で求めた多項式の根が $\overline{\mathbb{F}}_3^{\times}$ の中で生成する部分群の位数をそれぞれ求めよ．

[4] 閉区間 $[0,1]$ を I と表す．正方形 $I \times I$ に対して，関係

$$(0,t) \sim (1,t) \qquad (\forall t \in I),$$
$$(s,0) \sim (s,1) \qquad (\forall s \in I)$$

で生成される同値関係 $\sim$ を考え，$X = (I \times I)/\sim$ をその同値関係による商空間（等化空間）とする.（すなわち，正方形の対辺 $\{0\} \times I$ と $\{1\} \times I$，$I \times \{0\}$ と $I \times \{1\}$ を，それぞれ向きを合わせて同一視して得られる商空間を X とする.）

(1) X はコンパクトであることを示せ．

(2) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ を単位円周としたとき，積空間 $T^2 = S^1 \times S^1$ はハウスドルフであることを示せ．

(3) 写像 $f : I \times I \to T^2$ を,

$$f(s,t) = ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$$

で定める．このとき，連続写像 $F : X \to T^2$ で，$f = F \circ \pi$ となるものが一意的に存在することを示せ．ここで，$\pi : I \times I \to X$ は自然な射影（商写像，等化写像）である．

(4) $F : X \to T^2$ は同相写像となることを示せ．

(5) $I \times I$ に対して，関係

$$(0,t) \sim' (1,1-t) \qquad (\forall t \in I),$$
$$(s,0) \sim' (1-s,1) \qquad (\forall s \in I)$$

によって生成される同値関係 $\sim'$ を新たに考え，$Y = (I \times I)/\sim'$ を商空間とする．X と Y は同相となるかを理由と共に答えよ．