

九州大学大学院数理学府
平成 28 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ .
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ は自然数の全体 , \mathbb{Z} は整数の全体 , \mathbb{Q} は有理数の全体 , \mathbb{R} は実数の全体 , \mathbb{C} は複素数の全体を表す .

[1] a を実数とする．3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

- (1) 行列 A の固有値と，各固有値に対する固有空間を求めよ．
- (2) $B = P^{-1}AP$ をみたす正則行列 P が存在するための a の条件を求めよ．

[2] m を 0 でない整数とし, 関数 $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を,

$$f_1(x) = \cos 2mx,$$

$$f_2(x) = \sin 2mx,$$

$$f_3(x) = \cos(2m-1)x,$$

$$f_4(x) = \sin(2m-1)x$$

と定める. \mathbb{R} 上の実数値連続関数全体のなす実線形空間において,

$$S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

が生成する部分空間を V とする. このとき以下の問に答えよ.

(1) S は V の基底であることを示せ.

(2) V の線形変換 $D: h \mapsto Dh$ および $T: h \mapsto Th$ を以下のように定める.

$$(Dh)(x) = \frac{dh}{dx}(x),$$

$$(Th)(x) = h(x + \pi/2).$$

このとき, 基底 S に関する D および T の表現行列をそれぞれ求めよ.

(3) $(Dh)(x) - (Th)(x) = \cos 2mx$ となる $h \in V$ をすべて求めよ.

[3] 正の数 $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ が $a_1 \leq a_2 \leq a_3, c_1 + c_2 + c_3 = 1$ をみたしているとする．0 でない実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (c_1 a_1^x + c_2 a_2^x + c_3 a_3^x)^{1/x}$$

と定める．このとき以下の問に答えよ．

(1) 0 でない実数 x に対して， $a_1 \leq f(x) \leq a_3$ が成り立つことを示せ．

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めよ．

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めよ．

[4] 以下の問に答えよ .

(1) c を実数とするととき , 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+cx} dx$$

が収束することを示せ .

(2) a, b を実数とする . $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$ 上の広義重積分

$$\iint_D e^{-x^2+2xy-y^2+ax+by} dx dy$$

が収束するための必要十分条件を a, b を用いて表せ .