九州大学大学院数理学府
平成 27 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1) E を単位行列とする.

$det(A - xE) = -(x-a)(x-a+b)(x-a-b)$ であるから A の固有値は $a, a-b, a+b$ である.

a の固有空間は $W(a) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である.

$a-b$ の固有空間は $W(a-b) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である.

$a+b$ の固有空間は $W(a+b) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. $\square$

(2) $b < 0 < a$ より $0 < a < a-b$ であり $|a+b| < |a| + |b| = a-b$ なので

A の固有値の中で絶対値が最大となるものは $a-b$ である. $\square$

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$ であるので

$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$

従って, $B^n = \lambda_0^{-n} P \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} P^{-1} \to P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad (n \to \infty)$

よって, 求める極限は $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である. $\square$

[2](1) $A+B=E$ より $B=E-A$ だから $AB=O \Leftrightarrow A(E-A)=O$ なので
$AB=O$ と $A^2=A$ は同値である. $\square$

(2) $AB=O$ のとき $\mathbb{R}^n=V+W$ であることと $V\cap W=\{0\}$ を示せばよい.
$\forall x\in\mathbb{R}^n$ に対して $x=(A+B)x=Ax+Bx$ であるので $\mathbb{R}^n=V+W$ である.
$0\in V$ かつ $0\in W$ より $\{0\}\subset V\cap W$ である.
また,$\forall x\in V\cap W$ に対して $\exists y,z\in\mathbb{R}^n$ s.t. $x=Ay=Bz$ であるので

$$x=Ay=A^2y=ABz=0$$

従って, $V\cap W\subset\{0\}$ である.
以上により, $AB=O$ であれば $\mathbb{R}^n=V\oplus W$ となる. $\square$

(3) $AB\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=A(E-A)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=(E-A)A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

よって, $AB\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in V\cap W$ であるから, $AB\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0$ である.

同様にして $AB\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\cdots=AB\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0$ である.

以上により, $\mathbb{R}^n=V\oplus W$ であれば $AB=O$ となる. $\square$

[3](1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと
$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ であり $dxdy = rdrd\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
\iint_D x^{2n} dxdy &= \left(\int_0^1 r^{2n+1} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta\right) \\
&= \frac{4}{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta \\
&= \frac{4}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \\
&= 2\pi\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}
\end{aligned}$$

である. □

(2) $a^2 + b^2 = 1$ より $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ s.t. $\cos\alpha = a, \sin\alpha = b$ とかけるので

$$\begin{aligned}
\iint_D (ax+by)^{2n} dxdy &= \left(\int_0^1 r^{2n+1} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta-\alpha) d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2n+2}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \cos^{2n}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2n+2}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta \\
&= 2\pi\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}
\end{aligned}$$

であるので $\iint_D (ax+by)^{2n} dxdy$ の値は a, b によらない □

(3)

$$\begin{aligned}
\iint_D (2x-3by)^{2n} dxdy &= 13^n \iint_D \left(\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}by\right)^{2n} dxdy \\
&= 2\pi\cdot 13^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}
\end{aligned}$$

である. □

[4](1) $0 < \forall\varepsilon < 1$ をとるとき $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続で $[\varepsilon a, \varepsilon b]$ はコンパクトなので $|f(x) - f(0)|$ の $[\varepsilon a, \varepsilon b]$ における像もコンパクトである．従って, $\exists c \in [a, b]$ s.t. $|f(x) - f(0)|$ の $[\varepsilon a, \varepsilon b]$ における最大値は $|f(\varepsilon c) - f(0)|$ とかけるので

$$\begin{aligned}\left|\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx\right| &\leq \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{|f(\varepsilon c) - f(0)|}{\varepsilon a} dx \\ &= \frac{b-a}{a}|f(\varepsilon c) - f(0)| \\ &\to 0 \quad (\varepsilon \to +0)\end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx = 0$ である． □

(2) $R > 0$ とするとき

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{\frac{a}{R}}^{aR} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\frac{b}{R}}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{1}^{aR} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{1}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\frac{a}{R}}^{\frac{b}{R}} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + f(0) \log \frac{b}{a} \\ &\to f(0) \log \frac{b}{a} \quad (R \to \infty)\end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$ である． □

(3) $R > 0$ とするとき

$$\begin{aligned}\left|\int_{1}^{R} \frac{\cos x}{x} dx\right| &\leq \left|\int_{1}^{R} \cos x dx\right| \\ &\leq 1 - \sin R \\ &\leq 1\end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ は収束するので (2) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx &= \lim_{R \to \infty} \left(\int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\cos(ax)}{x} dx - \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\cos(bx)}{x} dx\right) \\ &= \cos(0) \log \frac{b}{a} \\ &= \log \frac{b}{a}\end{aligned}$$

である． □