

九州大学大学院数理学府
平成18年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数学コース)

- 注意
- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ.
 - 解答用紙は, 問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.
 - 以下 \mathbb{N} は自然数の全体, \mathbb{Z} は整数の全体, \mathbb{Q} は有理数の全体, \mathbb{R} は実数の全体, \mathbb{C} は複素数の全体を表す.

[1] $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ とおく.

- (1) G は行列の乗法に関して群をなすことを示せ.
- (2) G の中心 $Z = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$ を求めよ.
- (3) 商群 G/Z は加法群 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と同型であることを示せ.

[2] p を素数とし, $\mathbb{Z}[x]$ を \mathbb{Z} 係数の一変数多項式環とする.

- (1) $\mathbb{Z}[x]$ において p で生成されるイデアル (p) は素イデアルであることを示せ.
- (2) $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアル I で, $(p) \subset I$ であるものの例を一つあげよ.
- (3) $\mathbb{Z}[x]$ のモニックな元

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

(ただし, $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対し $a_i \in \mathbb{Z}$ である) が次の条件をみたすとする:

p^2 は a_0 を割らないが, p はすべての a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) を割る.

このとき $f(x)$ は既約であることを示せ.

- (4) $\mathbb{Z}[x]$ の元 $\sum_{i=0}^{p-1} x^i$ は既約であることを示せ.

[3] $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/7}$ とし,

$$\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4, \beta = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6, \gamma = \zeta + \zeta^6, \delta = \zeta^2 + \zeta^5, \varepsilon = \zeta^3 + \zeta^4$$

とおく.

- (1) $\alpha + \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Q}$ となることを示せ.
- (2) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.
- (3) $\gamma + \delta + \varepsilon, \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\gamma, \gamma\delta\varepsilon \in \mathbb{Q}$ となることを示せ.
- (4) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

[4] $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$$

により同値関係を定め, この同値関係による商空間を $T^2 = \mathbb{R}^2 / \sim$ とおく. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を含む同値類を $[x, y] \in T^2$ と書き, $p(x, y) = [x, y]$ で写像 $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ を定める.

次に, T^2 上に

$$[x, y] \simeq [x', y'] \Leftrightarrow [x, y] = [x', y'] \text{ あるいは } [x, y] = [-x', -y']$$

により同値関係を定め, この同値関係による商空間を $X = T^2 / \simeq$ とおく. $[x, y] \in T^2$ を含む同値類を $[[x, y]] \in X$ と書き, $\pi[x, y] = [[x, y]]$ で写像 $\pi : T^2 \rightarrow X$ を定める.

- (1) p を $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ に制限した写像は T^2 への連続な全射となり, $\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I}$ に制限した写像は単射となることを示せ. ただし, I は閉区間 $[0, 1]$ を表し, $\overset{\circ}{I}$ は開区間 $(0, 1)$ を表す.
- (2) $\pi \circ p : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$ を $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ に制限した写像は X への連続な全射となり, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ に制限した写像は単射となることを示せ.
- (3) $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1, x > 0, y > 0\}$ とする.

$$\pi[x, y] = \pi[x', y']$$

となるすべての $[x', y'] \in T^2$ を求めよ. 次に, このような点が自分自身 (すなわち $[x, y]$) に限るような T^2 の点をすべて求めよ.

- (4) X がコンパクトになることを示せ.
- (5) X が 2 次元球面と同相となることを示せ.

[5] n は 2 以上の自然数とする. n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内の 2 つのベクトル v_1, v_2 からなる組 (v_1, v_2) に対し, 条件

(i) 各 v_i の長さは 1,

(ii) v_1 と v_2 は直交する,

を考える. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^{2n} と自然に同一視し,

$$V = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \mid (v_1, v_2) \text{ は (i) と (ii) をみたす}\}$$

とおく. このとき, V は \mathbb{R}^{2n} の $2n - 3$ 次元 C^∞ 級部分多様体になることを示せ.

[6] xy 平面上の C^2 曲線

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (-a \leq s \leq a)$$

が与えられているとする. ただし, $y(s) > 0$ ($-a \leq s \leq a$), かつ s は弧長パラメータとする. すなわち

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

である. この曲線を x 軸のまわりに回転させて得られる回転面のガウス曲率が一定で -1 であるとき, 以下を示せ.

(1) $\frac{d^2y}{ds^2} = y$ が成り立つ.

(2) さらに $\frac{dy}{ds}(0) = 0$ とすると,

$$y(0) \leq \frac{1}{\sinh a}$$

が成り立つ.

[7] n を 2 以上の自然数, a_1, a_2, \dots, a_n を相異なる複素数,

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$$

とする.

(1) $\frac{1}{f(z)}$ の $z = a_j$ における留数を求めよ.

(2) $\sum_{j=1}^n \frac{1}{f'(a_j)} = 0$ であることを示せ.

(3) $0 \leq k \leq n-1$ に対して $\sum_{j=1}^n \frac{a_j^k}{f'(a_j)}$ を求めよ.

[8] $A(x)$ は n 次正方行列で, 各成分が x について开区間 (a, b) 上で連続であるとする. $Y(x)$ は n 次正方行列で, 开区間 (a, b) 上で

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) \quad (\text{E}_0)$$

をみたし, ある $x_0 \in (a, b)$ について $Y(x_0) = I$ が成り立つものとする. ただし I は n 次の単位行列である.

(1)

$$\frac{d}{dx} \det Y(x) = (\text{tr } A(x)) \det Y(x) \quad (\text{E}_1)$$

が成り立つことを示し, 任意の $x \in (a, b)$ に対して $\det Y(x) \neq 0$ であることを示せ.

(2) M_0 を $n \times n$ 定数行列とし, $M(x) = Y(x)M_0Y(x)^{-1}$ とおく. このとき $M(x)$ は

$$\frac{dM(x)}{dx} = A(x)M(x) - M(x)A(x) \quad (\text{E}_2)$$

をみたすことを示せ.

(3) 上の (E₂) を $M(x)$ に対する微分方程式とみなす. $N(x)$ を (E₂) の解とすると, 勝手な $x_1, x_2 \in (a, b)$ に対し, $N(x_1)$ と $N(x_2)$ とは相似な行列であることを示せ. なお, 2 つの正方行列 N_1, N_2 が相似であるとは, ある正則行列 P が存在して $N_1 = PN_2P^{-1}$ となることをいう.

[9] 測度空間 (X, \mathfrak{B}, μ) で考える. すなわち, X は集合, \mathfrak{B} は X の部分集合から成る一つの σ -加法族 (σ -algebra), μ は \mathfrak{B} を定義域とする測度である.

(1) $A_n \in \mathfrak{B}$ ($n = 1, 2, \dots$) とし, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ であると仮定する. このとき

$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ であることを示せ.

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに X 上の \mathfrak{B} 可測な関数の列で,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X \mid f_n(x) \neq g_n(x)\}) < \infty$$

をみたしていると仮定する. このとき, $\mu(A) = 0$ となる $A \in \mathfrak{B}$ を適当にとれば, 各 $x \notin A$ に対して, 番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ をみたすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = g_n(x)$ となることを示せ.