九州大学大学院数理学府
平成30年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から2題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．整数 k と $\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$ に対して，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 $f_{k,\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_{k,\vec{u}}(\vec{x}) = A^k \vec{x} + \vec{u} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2)$$

により定義して，このように表される $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像全体のなす集合を G とする．

$$G = \left\{ f_{k,\vec{u}} \mid k \in \mathbb{Z},\ \vec{u} \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 写像の合成により G は群になることを示せ．

(2) G の部分集合

$$H = \{ f_{0,\vec{u}} \in G \mid \vec{u} \in \mathbb{Z}^2 \}$$

は，G の正規部分群になることを示せ．

(3) 剰余群 G/H の位数を求めよ．ただし H は (2) で定義したものとする．

[2] 実 2 次正方行列全体のなす集合の部分集合 R を

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) R は行列の和と積に関して単位元を持つ可換環であることを示せ．

(2) R の元 $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して $AB = O$ を満たす R の零元でない元 B が存在するための必要十分条件を a, b を用いて求めよ．ただし O は零行列とする．

(3) R から $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ への環同型が存在することを示せ．ただし，$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ は二つの $\mathbb{R}$ の環としての直和とする．

[3] $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を位数 3 の有限体，$\overline{\mathbb{F}}_3$ を $\mathbb{F}_3$ の代数閉包とする．以下の問に答えよ．

(1) $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ は既約であることを示せ．

(2) $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ の $\overline{\mathbb{F}}_3$ における根のひとつを α とおく．$\alpha + 1, \alpha - 1 \in \overline{\mathbb{F}}_3$ それぞれの $\mathbb{F}_3$ 上の最小多項式を求めよ．

(3) $X^9 - X \in \mathbb{F}_3[X]$ の $\mathbb{F}_3$ 上の最小分解体を K とおく．$K = \mathbb{F}_3(\alpha)$ となることを示せ．ただし α は (2) のものとする．

[4] $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が次のようにパラメータ表示されているとする．

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{q}(u) + v\mathbf{t}(u) \quad (u, v) \in (-1, 1) \times (-1, 1).$$

ただし，二つの写像 $\mathbf{q}, \mathbf{t} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ はそれぞれ滑らかで，各 (u, v) に対して，$\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$ とする．以下，K を S のガウス曲率とし，点 $\mathbf{p}(u, v)$ での S の単位法線ベクトルを $\mathbf{e} = \mathbf{e}(u, v)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) S のすべての点で $K \leq 0$ となることを示せ．

(2) S の単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ が v に依存しないとき，各 (u, v) に対して，$\mathbf{t}'(u)$ が $\mathbf{q}'(u)$ と $\mathbf{p}_v(u, v)$ の一次結合で表されることを示せ．

(3) (2) と同じ条件の下で，K は恒等的に 0 になることを示せ．