九州大学大学院数理学府
平成 31 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1) E を単位行列とする.

$$
\begin{aligned}
det(A-xE) &= \begin{vmatrix} a-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-x & 0 & a \\ a & 0 & a-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-x \end{vmatrix} \\
&= (a-x)\begin{vmatrix} a-x & 0 & a \\ 0 & a-x & 0 \\ 1 & 0 & a-x \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-x & 0 & a \\ 1 & 0 & a-x \end{vmatrix} \\
&= (x-a)^4 - (x-a)^2 + a^2 - (x-a)^2 a \\
&= (x-a)^4 - 2(x-a)^2 + a^2 \\
&= ((x-a)^2)^2 - 2(x-a)^2 + a^2 \\
&= ((x-a)^2 - a)^2
\end{aligned}
$$

よって, $(x-a)^2 = a$ のとき x は A の固有値であるから, 求める A の固有値は $a+\sqrt{a}, a-\sqrt{a}$ である. □

(2) A の固有ベクトルを $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ とすると, $(A-(a\pm\sqrt{a})E)p = O$ であるから

$$
\begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{a} & 0 & a \\ a & 0 & \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = O
$$

(i) $a = 0$ のとき

$p_2 = p_3 = 0$ となり $p_1 = s, p_4 = t$ $(s, t \in \mathbb{C})$ である. このときの固有空間は

$$
W(0) = \left\langle s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

であり, 一次独立なベクトルは 2 つしかとれないので対角化できない.

(ii) $a > 0$ のとき

$p_1 = s, p_2 = t, p_3 = \pm\sqrt{a}s, p_4 = \pm\sqrt{a}t$ $(s, t \in \mathbb{C})$ である. このときの固有空間は

$$W(a+\sqrt{a}) = \left\langle s\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{a}\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-\sqrt{a}\end{pmatrix}\right\rangle \quad W(a-\sqrt{a}) = \left\langle s\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{a}\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix}\right\rangle$$

であり, 一次独立なベクトルが 4 つとれるので対角化できる.

(i),(ii) より, 求める a の条件は $a > 0$ である. $\square$

(3) (i) $a = 0$ のとき

$$A = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$
$$A^2 = O$$

なので, A^n は収束する.

(ii) $a > 0$ のとき

ある正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}a+\sqrt{a}&0&0&0\\0&a+\sqrt{a}&0&0\\0&0&a-\sqrt{a}&0\\0&0&0&a-\sqrt{a}\end{pmatrix}$$
$$A^n = P\begin{pmatrix}(a+\sqrt{a})^n&0&0&0\\0&(a+\sqrt{a})^n&0&0\\0&0&(a-\sqrt{a})^n&0\\0&0&0&(a-\sqrt{a})^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

となるので, $\lim_{n\to\infty}(a+\sqrt{a})^n$ と $\lim_{n\to\infty}(a-\sqrt{a})^n$ が収束するとき A^n は収束する.

つまり $-1 < a+\sqrt{a} < 1$ かつ $-1 < a-\sqrt{a} < 1$ となる a の値の範囲を求めれば良い.

$a > 0$ より $0 < |a-\sqrt{a}| < a+\sqrt{a}$ であるので $0 < a+\sqrt{a} \leq 1$ のときを考えれば良い.

よって, $0 < a \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき A^n は収束する.

(i),(ii) より, 求める a の条件は $0 \leq a \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ である. $\square$

[2](1) $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall X,Y\in M(n,\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}f_A(\alpha X+\beta Y)&=A(\alpha X+\beta Y)-(\alpha X+\beta Y)A\\&=\alpha AX+\beta AY-\alpha XA-\beta YA\\&=\alpha(AX-XA)+\beta(AY-YA)\\&=\alpha f_A(X)+\beta f_A(Y)\end{aligned}$$

であるので, f_A は線型写像である. $\square$

(2) $X=(x_{ij})$ と表す.

(i) $n=1$ のとき

$\dim\mathrm{Ker}f_{E_{ij}}=1,\dim\mathrm{Im}f_{E_{ij}}=0$ である.

(ii) $n=2$ のとき

$\dim\mathrm{Ker}f_{E_{ij}}=2,\dim\mathrm{Im}f_{E_{ij}}=2$ である.

(iii) $n\geq 3\wedge i\neq j$ のとき

$$f_{E_{ij}}(X)=\begin{pmatrix}\huge O & & -x_{1i} & & \huge O\\ & & \vdots & & \\ x_{j1} & \cdots & -x_{ii}+x_{jj} & \cdots & x_{jn}\\ & & \vdots & & \\ \huge O & & -x_{ni} & & \huge O\end{pmatrix}$$

なので $X\in\mathrm{Ker}f_{E_{ij}}$ であるとき

$$\begin{cases}x_{j1}=\cdots=x_{j(j-1)}=x_{j(j+1)}=\cdots=x_{jn}=0\\x_{1i}=\cdots=x_{(i-1)i}=x_{(i+1)i}=\cdots=x_{ni}=0\\x_{ii}=x_{jj}\end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{Ker}f_{E_{ij}}&=n^2-(2n-2)-1\\&=n^2-2n+1\end{aligned}$$

であり, 線型写像の次元に関する基本定理より

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{Im}f_{E_{ij}}&=n^2-\dim\mathrm{Ker}f_{E_{ij}}\\&=2n-1\end{aligned}$$

である.

(iv) $n\geq 3\wedge i=j$ のとき

$\dim\mathrm{Ker}f_{E_{ij}}=n^2-2n+2,\dim\mathrm{Im}f_{E_{ij}}=2n-2$ である. $\square$

(3) $X = (x_{ij})$ と表すとき

$$X = \sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} E_{ij}$$

であるので, 任意の線型写像 $g : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ に対して $g(E_{ij}) = (g_{ij})$ とかくと

$$\begin{aligned} g(X) &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} g(E_{ij}) \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} g_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} g_{ij} \right) \end{aligned}$$

このとき

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1} g_{i1} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{i=1}^{n} x_{in} g_{in} \end{pmatrix}$$

従って

$$g(X) = tr(AX)$$

となる. $\square$

[3] $[a,b]$ 上で $|f(X)| \leq M$ なので

$$\int_a^b |f(x)|^n dx \leq M^n(b-a)$$
$$\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$$

であり, $\lim_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}} = 1$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

また, $f(x)$ は連続関数であるから $\forall\varepsilon > 0$ に対して $[a,b]$ 上のある閉区間 $[\alpha,\beta](\alpha < \beta)$ が存在して

$$(M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha) \leq \int_a^b |f(x)|^n dx$$
$$(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^n\right)^{\frac{1}{n}} dx$$

であるので, $\lim_{n\to\infty}(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} = 1$ より

$$M-\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

よって, $\varepsilon \to 0$ とすると

$$M \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

以上により

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

である. □

[4](1)

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x\log a} \\ &= a + \frac{x\log a}{1!} + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(\log a + \frac{1}{2}(\log a)^2 x + \cdots\right) \\ \lim_{x\to+0} f(x) &= -\log a \end{aligned}$$

である.
また $0<a<1, x>0$ のとき $0<a^x<1$ なので $0<1-a^x<1$ となるから

$$\begin{aligned} |f(x)| &< \frac{1}{|x|} \to 0 \ (x\to+\infty) \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

である. □

(2)

$$f(x) = -\log a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{(k+1)!} x^k$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= -\log a \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-n+1)k}{(k+1)!}(\log a)^k x^{k-n} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^{k+n+1}}{k+n+1}\frac{x^k}{k!} \\ \lim_{x\to+0} \frac{d^n f}{dx^n}(x) &= \frac{-(\log a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

である.
また $x^{n+1}f^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^{k+n+1}}{k+n+1}\frac{x^{k+n+1}}{k!}$ であるから

$$\begin{aligned} \left(x^{n+1}f^{(n)}(x)\right)' &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^{k+n+1}}{k!} x^{k+n+1} \\ &= -x^n(\log a)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\log a)^k}{k!}\right) \\ &= -x^n(\log a)^{n+1}a^x \end{aligned}$$

両辺を積分すると

$$\begin{aligned} x^{n+1}f^{(n)}(x) &= -(\log a)^{n+1}\left(\int_0^x t^n a^t dt\right) \\ &= -\log a \int_0^x (t\log a)^n e^{t\log a} dt \end{aligned}$$

(右辺) において $s = -t\log a$ と置換すると

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (-1)^n \int_0^{x\log\frac{1}{a}} s^n e^{-s} ds \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \int_0^{x\log\frac{1}{a}} s^n e^{-s} ds
\end{aligned}
$$

$x \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_0^{x\log\frac{1}{a}} s^n e^{-s} ds \to \int_0^{\infty} s^n e^{-s} ds = n!$ なので

$x \to \infty$ のとき $|f^{(n)}(x)| < \dfrac{n!}{x^{n+1}} \to 0$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0$ である. □

(3)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a^x - 1 - a^x(x\log a)}{x^2} \\
&= \frac{a^x}{x^2}(1 + \log a^{-x} - a^{-x})
\end{aligned}
$$

$0 < a < 1$ かつ $x > 0$ のとき $1 < a^{-x}$ であるから $1 < t$ のとき $1 + \log t < t$ より

$1 + \log a^{-x} - a^{-x} < 0$ であり $0 < \dfrac{a^x}{x^2}$ なので $x > 0$ で $f'(x) < 0$ である.

よって, $x > 0$ において $f(x)$ は単調減少である. □

(4) $0 < \dfrac{1}{e} < 1$ より $a = \dfrac{1}{e}$ として (1),(2),(3) の結果を用いると

$$
x^{-b}(1 - e^{-\frac{1}{x}}) = x^{-b-1}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)
$$

(i) $R > 1$ として

$$
\begin{aligned}
\int_1^R \left|\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}}\right| dx &< \int_1^R \frac{1}{x^{1+b}} dx \\
&= -\frac{1}{b}\left[\frac{1}{x^b}\right]_1^R \\
&= \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{R^b}\right)
\end{aligned}
$$

$0 < b < 1$ より $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{R^b}\right) = \frac{1}{b}$ なので $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_1^R \left|\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}}\right| dx$ は収束し $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}} dx$ も収束する.

(ii) $\varepsilon > 0$ として

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{1}{x}\right) \right| &= \left| \frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right| \\ &< \left| \frac{1}{\frac{1}{x}} \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \left| \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}} \right| dx &< \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^b} dx \\ &= \frac{1}{1-b} \left[x^{1-b} \right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1-\varepsilon^{1-b}}{1-b} \\ \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \left| \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}} \right| dx &\leq \frac{1}{1-b} \end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\int_0^1 \left| \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}} \right| dx$ は収束し $\displaystyle\int_0^1 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}} dx$ も収束する.

(i),(ii) より, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1+b}} dx$ が収束するので $\displaystyle\int_0^\infty x^{-b} \left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$ が収束することが示せた. □