九州大学大学院数理学府
平成 25 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1) C を積分定数とする．

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-x^4} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C
\end{aligned}
$$

である． □

(2) $f_n(x) = x^{4n}$ は $0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で一様収束するので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f_n(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1-x^4} \\
&= \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

である． □

[2](1) E を単位行列とする.
$det(A-xE)=-(x-2)^2(x+4)$ であるから求める A の固有値は 2,-4 である.

固有値 2 の固有空間 $W(2)=\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ である.

固有値-4 の固有空間 $W(-4)=\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ である. □

(2)Gram-Schmidt の直交化法を用いる.
$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ を直交化すると $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ となる.

$P=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1\\ -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2\\ \sqrt{5} & 0 & 5\end{pmatrix}$ と定めると P は直交行列であり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ となる. □

(3) $det(B-xE)=-(x-3)^3$ であるから Cayley-Hamilton の定理より $(B-3E)^3=O$ を得る. □

(4) (3) の結果より

$$\begin{aligned}exp(t(B-3E)) &= \sum_{n=0}^{2}\frac{t^n}{n!}(B-3E)^n\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2+2t+2t^2 & -2t & 2t+t^2\\ t^2 & 2-4t+3t^2 & 2t-t^2\\ 2t+2t^2 & -2t & 2+t^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}exp(t(B-3E)) &= exp(tB)exp(-3tE)\\ &= e^{-3t}exp(tB)\end{aligned}$$

である.

従って, $exp(tB)=\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}2+2t+2t^2 & -2t & 2t+t^2\\ t^2 & 2-4t+3t^2 & 2t-t^2\\ 2t+2t^2 & -2t & 2+t^2\end{pmatrix}$ である. □

[3](1) $a \leq \forall y \leq b$ について

$$e^{-xy}\cos x \leq e^{-ax}$$
$$e^{-xy}\sin x \leq e^{-ax}$$

であり $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-ax}dx = \frac{1}{a} < \infty$ であるから
Weierstrass の M 判定法より $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx$ 及び $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\sin xdx$ は一様収束する. □

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xy}\sin xdx &= -\int_0^\infty e^{-xy}(\cos x)'dx \\ &= 1 - y\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx\end{aligned}$$

であるから $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx = \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-xy}\sin xdx$ を得る.
さらに

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx &= -\int_0^\infty e^{-xy}(\sin x)'dx \\ &= y\int_0^\infty e^{-xy}\sin xdx\end{aligned}$$

であるから $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\sin xdx = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx$ を得る.
以上により, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx$
であるから $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdx = \frac{y}{y^2+1}$ である. □

(3)

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdxdy &= \int_a^b \frac{y}{y^2+1}dy \\ &= \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_a^b \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+b^2}{1+a^2}\end{aligned}$$

となり収束するので (1) の結果より

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_0^\infty e^{-xy}\cos xdxdy &= \int_0^\infty\int_a^b e^{-xy}\cos xdydx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx\end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx = \frac{1}{2}\log\frac{1+b^2}{1+a^2}$ である. □

[4](1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ と $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned}
T_a(\lambda x + \mu y) &= \lambda x + \mu y - 2\frac{(a, \lambda x + \mu y)}{(a,a)}a \\
&= \lambda x + \mu y - 2\frac{\lambda(a,x) + \mu(a,y)}{(a,a)}a \\
&= \lambda\left(x - 2\frac{(a,x)}{(a,a)}a\right) + \mu\left(x - 2\frac{(a,y)}{(a,a)}a\right) \\
&= \lambda T_a(x) + \mu T_a(y)
\end{aligned}$$

従って, T_a は線型写像である. $\square$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ について

$$\begin{aligned}
(T_a(x), T_a(x)) &= (x,x) - 2\frac{(a,x)}{(a,a)}(a,x) - 2\frac{(a,x)}{(a,a)}(a,x) + 4\frac{(a,x)(a,x)}{(a,a)} \\
&= (x,x)
\end{aligned}$$

従って, T_a は内積を保つ. $\square$

(3) T_a の固有値を t として T_a の固有ベクトルを $x \in \mathbb{R}^n$ とすると (2) の結果より

$$(T_a(x), T_a(x)) = t^2(x,x) = (x,x)$$

従って, $t = \pm 1$ である.
固有値 1 の固有空間 $W(1) = \{x \in \mathbb{R}^n | (a,x) = 0\}$ である.
固有値 -1 の固有空間 $W(-1) = \{ka \in \mathbb{R}^n | k \in \mathbb{R}\}$ である. $\square$

(4) T_a の固有空間を用いて

$$\mathbb{R}^n = W(1) \oplus W(-1)$$

と表せる.
また T_b の固有空間を用いて

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | (b,x) = 0\} \oplus \{kb \in \mathbb{R}^n | k \in \mathbb{R}\}$$

と表せる.
b と a は直交しているので

$$\mathbb{R}^n = W(-1) \oplus \{kb \in \mathbb{R}^n | k \in \mathbb{R}\} \oplus (W(1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | (b,x) = 0\})$$

である.
従って, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\exists c \in W(1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | (b,x) = 0\}, \exists p, q \in \mathbb{R}$ s.t. $x = pa + qb + c$ と表せる.
$(x,a) = p(a,a), (x,b) = q(b,b)$ であるから

$$\begin{aligned}
T_b \circ T_a(x) &= T_b(x - 2pa) \\
&= x - 2pa - 2qb \\
&= -pa - qb + c
\end{aligned}$$

従って, $T_b \circ T_a$ は $\mathbb{R}^n$ の点 $x = pa + qb + c$ を a, b で張られる平面と平行な平面上で c を中心に π 回転した位置に移す写像である. $\square$