九州大学大学院数理学府
平成22年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース数学型)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から2題を選択して解答せよ.

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること.

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] G を位数8の非可換群とし，e をその単位元とする．以下を証明せよ.

(1) G は位数 8 の元を持たない.

(2) G は位数 4 の元を持つ． 以下，位数 4 の元の一つを a とする.

(3) ある元 $b \in G$ が存在して， G は a, b で生成される.

(4) $bab^{-1} = a^3$.

(5) $b^2 = e$ または $b^2 = a^2$ がなりたつ.

[2] R を単項イデアル整域とする．R の元 r で生成された R のイデアルを (r) と表す．以下の問に答えよ．

(1) $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_m \subset \cdots$ を R のイデアルの増大列とする．このときある自然数 m_0 があって，任意の自然数 $n \geq m_0$ に対し $I_{m_0} = I_n$ が成立することを示せ．

R の元 $a\,(\neq 0)$ は，以下の (i), (ii) の両方をみたすとき，既約元という．(i) a は可逆元でない，(ii) $a = bc$ ならば b か c のどちらかは可逆元である．

(2) a を R の既約元とする．R のイデアル (a) は素イデアルであることを示せ．

(3) R の可逆元でない元 $a\,(\neq 0)$ は，既約元の有限個の積 $p_1 p_2 \cdots p_r$ に分解されること，及びその分解は次の意味で一意的であることを示せ：

$a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$ ならば $r = s$ である．さらに r 次の置換 σ があって，任意の $i \quad (1 \leq i \leq r)$ に対し $(p_i) = (q_{\sigma(i)})$ が成立する．

(4) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は単項イデアル整域か，理由をつけて答えよ．

[3] F を可換体とする．以下の問に答えよ．

(1) F 係数の n 次多項式は F の中に高々 n 個しか根を持たないことを示せ．

(2) $F^\times$ を零元以外の F の元からなる乗法群とする．$F^\times$ の有限部分群は巡回群であることを示せ．

(3) F が標数 p の有限体のとき，その位数は $p^d \ (d \in \mathbb{N})$ であること，及び F は $x^{p^d} - x$ の根の集合であることを示せ．

(4) 特に F が有限体 $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ のとき，$f(x) = x^{16800} - 1 \in \mathbb{F}_7[x]$ の最小分解体を E とする．拡大次数 $[E : \mathbb{F}_7]$ を求めよ．

[4]　単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分多様体とみなし，点

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \in S^2 \tag{$*$}$$

を含む 2 つの開集合

$$U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \qquad V = \{(x, y, z) \in S^2 \mid (x, y, z) \neq (0, 0, -1)\}$$

上でそれぞれ定義された S^2 の 2 つの局所座標系 (U, φ), (V, ψ) を

$$\varphi\colon U \ni (x, y, z) \longmapsto (u, v) = (y, z) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\psi\colon V \ni (x, y, z) \longmapsto (\xi, \eta) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \in \mathbb{R}^2$$

で与える．a を実数の定数とし，S^2 上の実数値関数 f を

$$f\colon S^2 \ni (x, y, z) \longmapsto x^2 + ay \in \mathbb{R}$$

と定義する．以下の問に答えよ．

(1) $(df)_p$ を $(du)_p$, $(dv)_p$ の線形結合で表せ．ただし p は $(*)$ で与えられる S^2 上の点であり，$(du)_p$, $(dv)_p$ はそれぞれ局所座標系 (U, φ) の座標関数 u, v の p における微分である．

(2) $(df)_p \neq 0$ となるとき，$(df)_p(X) = 0$ となるような接ベクトル $X \in T_pS^2$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p$$

の線形結合で表せ.

(3) $(df)_p \neq 0$ となるとき，$(df)_p(X) = 0$ となるような接ベクトル $X \in T_pS^2$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_p$$

の線形結合で表せ.

[5] $\mathbb{R}^2$ のなめらかな単純閉曲線 $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，弧長パラメーター t を用いて

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$$

と表す．以下の問に答えよ．ただし，ドット ($\dot{}$) は $\dfrac{d}{dt}$ を表し，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積を表す．

(1) $\tilde{\mathbf{n}}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ とおく．このとき

$$\langle \tilde{\mathbf{n}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{n}}}(t) \rangle = 0$$

であることを示し，$\dot{\tilde{\mathbf{n}}}(t)$ は $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ と平行であることを示せ．次に，この曲線の曲率 $\kappa(t)$ を $x(t)$, $y(t)$ の微分を用いて表せ．

(2) この曲線を $\mathbb{R}^3$ の曲線として

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0), \quad \mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t), 0)$$

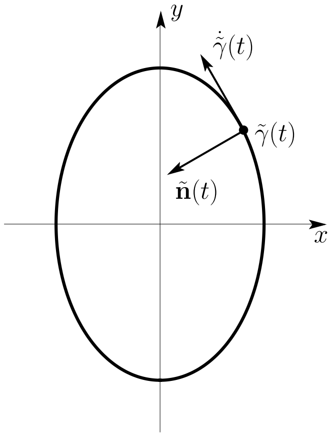
と表す．定数 $\varepsilon > 0$ に対して，写像 $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

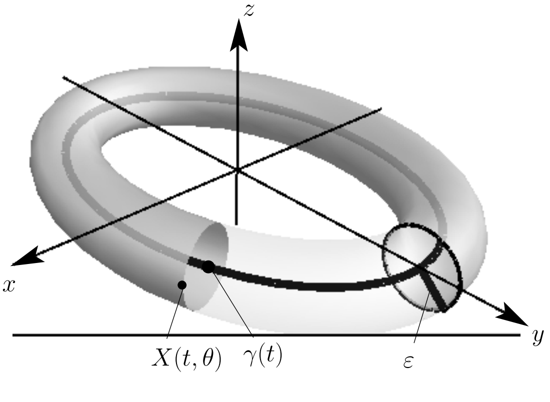
$$X(t, \theta) = \gamma(t) + \varepsilon(\cos\theta)\,\mathbf{n}(t) + \varepsilon(\sin\theta)\,\mathbf{e}_3$$

で定める．ただし，$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ とする．第一基本形式（誘導計量）を求め，X がはめ込みになるための ε の条件を求めよ．(このとき X は曲面である．)

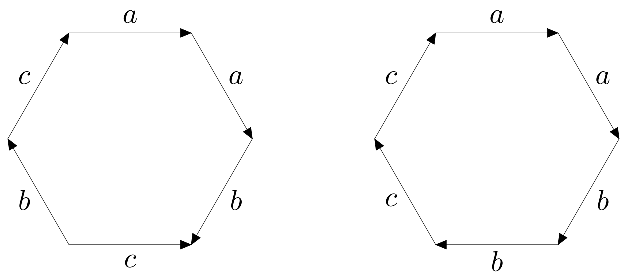
(3) この曲面 X の単位法ベクトルを求め，第二基本形式を求めよ．

(4) この曲面 X の平均曲率とガウス曲率を求めよ．





[6]　下の左の六角形に対して，a から c まで三つの辺の対を，矢印の向きをあわせて貼りあわせることにより得られる閉曲面を M_0 とし，右の六角形に対して同様のことを行うことにより得られる閉曲面を M_1 とする．以下の問に答えよ．



(1) M_0 と M_1 は位相同型になることを示せ．

(2) M_0 が向きづけ可能かどうか，理由とともに述べよ．

(3) M_0 のオイラー数を求めよ．

(4) M_0 の $\mathbb{Z}$ 係数の 1 次元ホモロジー群を求めよ．

[7]　ε を 0 に十分近い実パラメーターとする．$\lambda(\varepsilon)$ は ε のなめらかな実関数で，そのマクローリン展開を $\lambda(\varepsilon) = 1 + a\varepsilon + \cdots$ とする．ただし a は実数とする．さて，微分方程式の初期値・境界値問題

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda(\varepsilon)\, y(x) = \varepsilon\, y^2(x) \qquad (0 < x < \pi), \\ y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

が，パラメーター ε になめらかに依存する解 $y(x;\varepsilon)$ を持つと仮定する．このとき，$y(x;\varepsilon)$ の ε に関するマクローリン展開を $y(x;\varepsilon) = f(x) + g(x)\varepsilon + \cdots$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ が満たす微分方程式と初期条件，境界条件を求めよ．

(3) a の値を求めよ．

[8] 以下の問に答えよ．

(1) $w = 1 - z^3$ は複素平面の開円板 $|z| < 1$ から開円板 $|w-1| < 1$ への全射であることを示せ．

(2) $\operatorname{Log} z$ $(|\arg z| < \pi)$ は対数関数の主値を表すとし，$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$ とおく．このとき，$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^3}}$ の原点におけるテイラー展開を求め，さらにその収束半径を求めよ．

(3) 開円板 $|z| < 1$ で正則な関数 $F(z)$ で，$F'(z) = f(z)$, $F(0) = 0$ を満たすものが存在することを示し，原点における $F(z)$ のテイラー展開を求めよ．

(4) 原点の近傍における $F(z)$ の逆関数を $g(z)$ とする．$g(z)$ の原点におけるテイラー展開を z^4 の項まで求めよ．

[9] 閉集合

$$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le 1\right\}$$

において関数 $f(x,y) = ye^{-xy}\sin x$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ は D でルベーグ可積分であることを示せ．

(2) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\log 2$ であることを示せ．

(3) 次の等式を示せ：

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\log 2.$$