九州大学大学院数理学府
平成 28 年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] n を 1 以上の整数とする．G を 2 元 σ, τ で生成され，関係式

$$\sigma^n = \tau^2 = 1, \qquad \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$$

で定義される群とする．また，H を σ で生成される G の部分群とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) G は位数 $2n$ の有限群であることを証明せよ．

(2) $\mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{C}$ の乗法群とする．群準同型 $\chi : H \to \mathbb{C}^\times$ に対し

$$V \ = \ \{\phi : G \to \mathbb{C} \mid \text{任意の } g \in G,\, h \in H \text{ に対し } \phi(hg) = \chi(h)\phi(g)\}$$

とおき，これを自然に $\mathbb{C}$-ベクトル空間とみなす．V の次元を求め，その基底を一組求めよ．

(3) $g \in G$ と $\phi \in V$ に対し $g\phi \in V$ を

$$(g\phi)(x) \ = \ \phi(xg) \qquad (x \in G)$$

により定義すると，写像

$$\rho_g : \ \phi \ \mapsto \ g\phi$$

は V の $\mathbb{C}$-線型自己同型であることを証明せよ．

(4) g がそれぞれ σ, τ, $\sigma\tau$ である場合に，線型写像 $\rho_g : V \to V$ を (2) で求めた V の基底に関し行列表示せよ．

[2] $\mathbb{Q}[x,y]$ を x,y を不定元とする有理数係数の多項式環とし，$\mathbb{Q}[t,1/t]$ を不定元 t およびその逆元 $1/t$ で有理数体上生成された環とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Q}[x,y]$ から $\mathbb{Q}[t,1/t]$ への環準同型 φ を $\varphi(x)=t,\ \varphi(y)=1/t$ によって定めるとき，φ は $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ から $\mathbb{Q}[t,1/t]$ への環同型を導くことを示せ.

(2) $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ の環自己同型群を求めよ.

(3) $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ と $\mathbb{Q}[x,y]/(x^2y^2-1)$ は環同型になるか判定せよ.

(4) $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ と $\mathbb{Q}[x,y]/(x^2y^3-1)$ は環同型になるか判定せよ.

[3] $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ とし，$K=\mathbb{Q}(\alpha)$ とする．このとき以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset K$ であることを示せ.

(2) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(3) K は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であることを示せ.

[4] D は $\mathbb{R}^2$ の領域とし，$X : D \to \mathbb{R}^3$ は単射で，滑らか（正則）な曲面 $M = X(D)$ を定めるとする．$\nu(Q)$ を M の点 Q における単位法ベクトルとする．

曲面 M 上の滑らかな曲線 $C(s)$ を考える．ただし，s は弧長パラメータとする．曲線 $C(s)$ の点 $C(0)$ における法曲率は,

$$k = \langle \nu(C(0)), C''(0) \rangle$$

で与えられる．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準内積である．

以下では，曲面 M 上の滑らかな曲線 C_1 と C_2 で，点 Q で直交するものを考える．曲線 C_i $(i = 1, 2)$ の点 Q における法曲率を k_i とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\alpha = k_1 + k_2$ は曲線 C_1, C_2 のとり方に依存せず，曲面 M とその上の点 Q のみによって定まることを証明せよ．

(2) $\beta = k_1 k_2$ は曲線 C_1, C_2 のとり方に依存することを，例を挙げることにより示せ．

[5]　単位円 S^1 上の 1 点 p を取る．このとき以下の問に答えよ．

(1) 直積空間 $S^1 \times S^1$ の整係数ホモロジー群 $H_k(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) 直積空間 $S^1 \times S^1$ の部分空間

$$S^1 \vee S^1 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x = p \text{ または } y = p\}$$

の整係数ホモロジー群 $H_k(S^1 \vee S^1; \mathbb{Z})$ を求めよ．

(3) 整係数相対ホモロジー群 $H_k(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1; \mathbb{Z})$ を求めよ．

[6]　直積空間 $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid x_i \in \{0,1,2\}\}$ の 2 点 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ に対して

$$d((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \begin{cases} \exp(-\min\{|i| \mid x_i \neq y_i\}), & (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \neq (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \text{ の場合} \\ 0, & (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \text{ の場合} \end{cases}$$

と定義する．以下の問に答えよ．

(1) $d(\cdot,\cdot)$ は $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 上の距離を定めることを示せ．

(2) 距離 $d(\cdot,\cdot)$ から定まる位相は，$\{0,1,2\}$ 上の離散位相の直積として得られる直積位相と同値であることを示せ．

(3) 直積空間 $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ の部分空間

$$A = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} \mid \text{全ての } i \in \mathbb{Z} \text{ について } x_i \neq x_{i+1}\}$$

は (2) で考えた位相についてコンパクトであることを示せ．

[7] 以下の問に答えよ．

(1) e^z は $\mathbb{C}$ 上正則であることを示せ．

(2) a_k $(k \in \mathbb{N})$ を正の実数とし，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz} \tag{S}$$

を考える．級数 (S) が点 $z = p$ $(p \in \mathbb{C})$ において収束するとする．このとき，$\lim_{k \to \infty} a_k e^{-kp} = 0$ を示せ．

(3) 問 (2) の状況で級数 (S) は領域 $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(p)$ においても収束することを示せ．さらに，この収束により定まる関数は領域 $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(p)$ 上で正則であることを示せ．

(4) 級数 (S) が原点 $z = 0$ において収束しているとし，問 (3) で示したように領域 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 上で定まる正則関数を f と定める．関数 f の $z = 1$ におけるテーラー展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$ とする．このとき，各係数 c_n を求めよ．さらにそのテーラー展開の収束半径は 1 以上であることを示せ．

(5) 問 (4) で定義された領域 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 上の正則関数 f が，原点のある開近傍まで解析接続されるとする．このとき，f が領域 $\mathrm{Re}(z) > -\varepsilon$ にまで解析接続されるような $\varepsilon > 0$ が存在することを示せ．

[8]　以下の問に答えよ.

(1) a, b を実定数とする．微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

の任意の解 $y(x)$ が無限個の零点を持つための必要十分条件を a, b を用いて表せ.

(2) $b_1(x), b_2(x)$ は開区間 I で連続であり，$b_1(x) > b_2(x)$ $(x \in I)$ をみたすものとする．$j = 1, 2$ に対して，$y_j(x)$ は微分方程式

$$y'' + b_j(x)y = 0 \qquad (\mathrm{E}_j)$$

の開区間 I 上の解であるとする．ある開区間 J $(J \subset I)$ 上で $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ をみたすとき，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ のロンスキーの行列式 $W[y_1, y_2](x)$ は J 上で狭義単調増加であることを示せ.

(3) $b_1(x)$ と $b_2(x)$ は (2) と同じものとし，$j = 1, 2$ に対して，$y_j(x)$ は微分方程式 (E_j) の解であるとする．α, β $(\alpha < \beta)$ が $y_2(x)$ の隣り合う零点ならば，$y_1(x)$ は α と β の間に少なくとも 1 つ零点を持つことを示せ.

(4) $b(x)$ は区間 $(0, \infty)$ で連続であり，ある定数 $m > 0$ があって $b(x) > m$ $(x \in (0, \infty))$ をみたすものとする．このとき，微分方程式 $y'' + b(x)y = 0$ の任意の解は区間 $(0, \infty)$ に無限個の零点を持つことを示せ.

[9] 以下の問に答えよ.

(1) μ は $\mathbb{R}$ 上のボレル測度で $\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = 1$ であるとする. $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mu(x)$$

とおく. このとき $G(t)$ は t の連続関数であり, 正の実数 T に対し

$$\int_{-T}^{T} G(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{2\sin Tx}{x}\ d\mu(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) ファトゥーの補題を述べ, 等式が成立しない例をあげよ.

(3) $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の非負ルベーグ可積分関数で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

とする. このとき, 任意のルベーグ可測集合 $E(\subset \mathbb{R})$ に対して

$$\int_E f(x)\, dx = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx$$

が成立することを示せ.

[10]　関数 $v(x)$ は閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間上で 4 回連続微分可能であるとする．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&h_i = x_i - x_{i-1}, \\
&h = \max\{h_i \ ; \ i = 1, \ldots, n\}, \\
&\delta = \max\{|h_{i+1} - h_i| \ ; \ i = 1, \ldots, n-1\}, \\
&w_i = \frac{2}{h_{i+1} + h_i}\left(\frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{v(x_i) - v(x_{i-1})}{h_i}\right), \\
&\varepsilon(\Delta) = \max\{|w_i - v''(x_i)| \ ; \ i = 1, \ldots, n-1\}
\end{aligned}
$$

と定める．このとき以下の問に答えよ．

(1) 条件 $h = h_1 = h_2 = \cdots = h_{n-1} = h_n$ をみたすとき，分割 Δ は一様であるという．ある定数 $c > 0$ が存在して，任意の一様な分割 Δ に対して，$\varepsilon(\Delta) \leq ch^2$ が成り立つことを示せ．

(2) ある定数 $c > 0$ が存在して，$h \leq 1$ をみたす任意の分割 Δ に対して，$\varepsilon(\Delta) \leq ch$ が成り立つことを示せ．

(3) ある定数 $c > 0$ が存在して，任意の分割 Δ に対して，$\varepsilon(\Delta) \leq c(h^2 + \delta)$ が成り立つことを示せ．

[11] $X_1, X_2, \ldots$ を互いに独立で同じ分布関数 $F(x) = P(X_1 \leq x)$ を持つ確率変数とする．ただし $F(x)$ は $f(-x) = f(x)$ をみたす密度関数 $f(x)$ を持つとする．このとき，統計量

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} I(X_i > 0)$$

を考える．ただし，$I(A)$ は事象 A の定義関数とする．以下の問に答えよ.

(1) $F(-x) = 1 - F(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) S_n の期待値 $E(S_n)$ および分散 $V(S_n)$ を求めて，これらは $F(x)$ に依存しないことを示せ.

(3) $n \geq 2$ に対して

$$p_n = P(S_n \leq 2)$$

と定義する．このとき p_n の値を n で表し，$p_n \geq p_{n+1}$ が成り立つことを示せ.