九州大学大学院数理学府
平成 29 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1)

$$
\begin{aligned}
detA &= (1+a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & b \\ b & b & a & 1 \\ b & 1 & b & a \end{vmatrix} \\
&= (1+a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & b-1 \\ 0 & 0 & a-b & 1-b \\ 0 & 1-b & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
&= (1+a+2b)\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & b-1 \\ 0 & a-b & 1-b \\ 1-b & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
&= (1+a+2b)\left((a-1)(a-b)^2-(1-b)^3+(a-b)(1-b)^2\right) \\
&= (1+a+2b)(a-1)\left((a-b)^2+(b-1)^2\right)
\end{aligned}
$$

従って, A が正則であるための必要十分条件は $1+a+2b \neq 0$ かつ $a \neq 1$ である. □

(2) $b \neq 1, -1$ のとき $\dim \mathrm{Ker} T_A = 1$ であり $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が基底となる.

$b = -1$ のとき $\dim \mathrm{Ker} T_A = 2$ であり $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が基底となる.

$b = 1$ のとき $\dim \mathrm{Ker} T_A = 3$ であり $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が基底となる. □

[2](1) $0=(0,0,\cdots,0,\cdots)$ は $0+a_10+a_20+a_30=0$ であるから, $0\in W$ より $W\neq\emptyset$ である.
また, $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots,y_k,\cdots)\in W$ と $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して
$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots,\alpha x_k+\beta y_k,\cdots)$ は

$$\begin{aligned}
&(\alpha x_{n+3}+\beta y_{n+3})+a_1(\alpha x_{n+2}+\beta y_{n+2})+a_2(\alpha x_{n+1}+\beta y_{n+1})+a_3(\alpha x_n+\beta y_n)\\
&=\alpha(x_{n+3}+a_1x_{n+2}+a_2x_{n+1}+a_3x_n)+\beta(y_{n+3}+a_1y_{n+2}+a_2y_{n+1}+a_3y_n)\\
&=0
\end{aligned}$$

であるから, $\alpha x+\beta y\in W$ である.
以上により, W は V 部分空間である. □
(2) $c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3=0$ とすると $(c_1,c_2,c_3,\cdots)=0$ より $c_1=c_2=c_3=0$ である.
よって, x^1,x^2,x^3 は1次独立である.
$\forall w=(w_1,w_2,\cdots,w_k,\cdots)\in W$ に対して $w=w_1x^1+w_2x^2+w_3x^3$ とかけるので
x^1,x^2,x^3 は W の基底である. □
(3)

$$\begin{aligned}
Tx^1&=0x^1+0x^2-a_3x^3\\
Tx^2&=1x^1+0x^2-a_2x^3\\
Tx^3&=0x^1+1x^2-a_1x^3
\end{aligned}$$

よって, 求める表現行列は $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix}$ である. □
(4)

$$\begin{aligned}
det\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)&=\begin{vmatrix}-t&1&0\\0&-t&1\\-a_3&-a_2&-a_1-t\end{vmatrix}\\
&=-(t+a_1)t^2-a_3-a_2t\\
&=-t^3-a_1t^2-a_2t-a_3
\end{aligned}$$

である.
固有値 λ に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\-a_3&-a_2&-a_1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0$
λ は固有値なので $-a_3-a_2\lambda-a_1\lambda^2-\lambda^3=0$ である.
よって, 求める固有空間 $W(\lambda)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}\right\rangle$ である. □

[3](1)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} &\le \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \left[\tan^{-1}x\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ は収束する. □

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ とすると

$$\begin{aligned}I_{n-1} &= \int_0^\infty (x)'(x^2+1)^{-n}dx \\ &= 2n\int_0^\infty x^2(x^2+1)^{-(n+1)}dx \\ &= 2n(I_{n-1}-I_n)\end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ である.

また $I_n = \dfrac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{2n\cdot 2(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}I_0$ つまり $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ であるので $I_n = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}\dbinom{2n}{n}$ である.

従って, $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{2^{2n+1}}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ である. □

(3) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\cos x\ (0 \le x \le \dfrac{\pi}{2})$ とすると $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\cos x(x-\sin x)$ である.

$g(x) = x - \sin x\ (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ とすると $g'(x) = -\cos x \le 0$ より g は単調減少かつ $g(x) \le g(0) = 0$ より $f'(x) \le 0$ となり f も単調減少である.

$f(x) \le f(0) = 1$ であるから $e^{\frac{1}{2}x^2}\cos x \le 1$ である.

両辺を $2n$ 乗して e^{-nx^2} をかけると

$$\cos^{2n}x \le e^{-nx^2}$$

である. □

(4) $x = \tan\theta$ とおくと (3) の結果より

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta \\ &\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\theta^2}d\theta \\ &\le \int_0^\infty e^{-n\theta^2}d\theta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\end{aligned}$$

従って,(2) の結果より $\dbinom{2n}{n} \le \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ である. □

[4] $P=(x,y,z)$ とおき $(-2,1,1)$ との距離を $d(x,y,z)$ とする.
$f(x,y,z)=d(x,y,z)^2$ の最小値を考える.
f を S の適当に有界な範囲に制限して Lagrange の未定乗数法を用いると
$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda(x^2+2yz-1)$ としたとき
f の極小値の候補は $F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ をみたす.

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+2=0\\ y-1+z\lambda=0\\ z-1+y\lambda=0\\ x^2+2yz-1=0\end{cases}$$

を解くと

$$(x,y,z,\lambda)=(-1,0,1,1),(-1,1,0,1),\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3},\pm\frac{\sqrt{6}}{6},\pm\frac{\sqrt{6}}{6},-1\pm\sqrt{6}\right)$$

$\sqrt{2}<\sqrt{6}-1$ より求める距離 $d(x,y,z)$ の最小値は $\sqrt{2}$ である. $\square$