九州大学大学院数理学府
平成22年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数理学コース数学型)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体, $\mathbb{R}$ は実数の全体を表す.

[1] 数列 $\{a_n\}$ は $0 < a_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を満たすものとする. 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(1) $0 < x < 1$ のとき, 次の不等式がなりたつことを示せ：

$$|\log(1 - x)| \leq \frac{x}{1 - x}\ .$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{2n + 1}$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であることを示せ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, 数列 $\{\log b_n\}$ が収束することを示せ.

[2] 以下の問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して, $\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2n-1} e^{-u^2/2}\, du$ を求めよ.

(2) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して, $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} |x - y|^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ を求めよ.

[3]　b を実数とし，次の行列 A と B を考える：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

以下の問に答えよ．

(1) A の固有値と対応する固有空間を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P を一つ求めよ．また，その場合の $P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) $Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ が共に対角行列となるような 3 次正則行列 Q が存在するものとする．

(i) $AB = BA$ であることを示せ．

(ii) b の値を求めよ．

(iii) Q を一つ求めよ．また，その場合の $Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ を求めよ．

[4]　2 次の複素対称行列からなる複素ベクトル空間を V とし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする． V の元 X に対して $F(X) = AX - XA$ と定める．以下の問に答えよ．

(1) V の次元と基底を求めよ．また，F は V から V への線形写像であることを示せ．

(2) F の像 $\mathrm{Im}\, F$ および核 $\mathrm{Ker}\, F$ の次元と基底を，それぞれ求めよ．

(3) F の固有値および対応する固有空間を求めよ．

[5] a を実数の定数とし，なめらかな 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^3-axyz+2a(x+y)=4a+2 \\ f(1,1)=0 \end{cases}$$

を満たしているとする．関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(1,1)$ で極値をもつための a の条件を求め，そのとき $f(x,y)$ が極大値をとるか極小値をとるか判定せよ．