九州大学大学院数理学府
平成 26 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1) E を単位行列とする.
$det(A-tE) = -(t-1)^2(t-4)$ であるから $\lambda = 1, \mu = 4$ である.
λ の固有空間 $W(\lambda) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である.
μ の固有空間 $W(\mu) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. □

(2) $w = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と表すと,

$$\begin{aligned} f(x) &= x - (x,w)w \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

従って, $B = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ である. □

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 - x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-x_1 + 2x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\in W(\lambda) \end{aligned}$$

より $\mathrm{Im} f \subset W(\lambda)$ である.

また, $\forall w \in W(\lambda)$ に対して $\exists u, v \in \mathbb{R}$ s.t $u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表せる.

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(u+v) \\ \frac{2}{3}v \\ -\frac{1}{3}u \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$$

より $W(\lambda) \subset \mathrm{Im} f$ である.

以上により, $W(\lambda) = \mathrm{Im} f$ である. $\square$

[2](1) $\forall b \in B$ に対して A' は一次従属であると仮定する.
このとき $b_i = c_1^{(i)} a_1 + \cdots + c_{r-1}^{(i)} a_{r-1}$ $(1 \leq i \leq s)$ と表せる.
各 a_j は B のベクトルの一次結合で表せるので a_r を $\{a_1, \cdots, a_{r-1}\}$ のベクトルの一次結合で表せる.
これは A が独立であることに矛盾する. 従って, $\exists b \in B$ s.t. A' は独立である.
b は A のベクトルの一次結合で表せるので $b = c_1 a_1 + \cdots + c_{r-1} a_{r-1} + c_r a_r$ $(1 \leq i \leq s)$ と表すと
A' は独立であるから $c_r \neq 0$ であるので $a_r = -\dfrac{c_1}{c_r} a_1 - \cdots - \dfrac{c_{r-1}}{c_r} a_{r-1} + \dfrac{1}{c_r} b$ と表せる.
従って, 各 b_i は A' のベクトルの一次結合で表せる. □
(2) $r < s$ と仮定する.
$b_i = d_1^{(i)} a_1 + \cdots + d_r^{(i)} a_r$ $(1 \leq i \leq s)$ と表せるので $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i b_i = 0$ としたとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i d_1^{(i)} a_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{s} c_i d_r^{(i)} a_r = 0$
であるので A の独立性より $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i d_1^{(i)} = \cdots = \sum_{i=1}^{s} c_i d_r^{(i)} = 0$ つまり $\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & \cdots & d_1^{(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_r^{(1)} & \cdots & d_r^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} = 0$ である.
$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} d_1^{(1)} & \cdots & d_1^{(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_r^{(1)} & \cdots & d_r^{(s)} \end{pmatrix} \leq r < s$ より $(c_1, \cdots, c_s)$ は非自明な解を持つ.
これは B が独立であることに矛盾する. 従って, $r \geq s$ である.
$r > s$ と仮定しても同様の議論により矛盾するので $r = s$ である. □
(3) $a_i = d_1^{(i)} c_1 + \cdots + d_t^{(i)} c_t$ $(1 \leq i \leq r)$ と表せるので
$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i = 0$ としたとき $\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & \cdots & d_1^{(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_t^{(1)} & \cdots & d_t^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$ である.
A は独立であるから $\mathrm{rank} \begin{pmatrix} d_1^{(1)} & \cdots & d_1^{(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_t^{(1)} & \cdots & d_t^{(r)} \end{pmatrix} \geq r$ より $r \leq t$ である. □
(4) $r = t$ のとき C のベクトルが一次従属であると仮定する.
このとき C から $t-1$ 個のベクトルを改めて取り直した $C' = \{c'_1, \cdots, c'_{t-1}\}$ の一次結合で各 a_j を表せる.
これは (3) の結果に矛盾するので $r = t$ のとき C のベクトルは独立になる. □

[3](1) $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$ とすると $f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$ なので増減表は
$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)=0$ となる x を α とおくと

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

であるから $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(x)\geq 0$ より $\dfrac{2}{\pi}x\leq\sin x$ が成り立つ. $\square$

(2) (1) より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{2}{\pi}x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\leq 0$$

であるから

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{2}{\pi}x\,dx=-\varepsilon\log\frac{2}{\pi}\varepsilon+\varepsilon-\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}\ (\varepsilon\to+0)$$

より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$ は収束する. $\square$

(3) I において $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ と置換すると $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos t)dt$ であるから

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x+\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

$u=2x$ と置換すると $2I=I-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となるので $I=-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ である. $\square$

[4](1) $\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases}$ を解けば良い.

$f_x - f_y = 4(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$ なので $x^2+xy+y^2 = \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2$ であるから $x = y$ である.
$4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$ より求める $(x,y) = (-1,-1),(0,0),(1,1)$ である. □

(2) $f_{xx} = 12x^2 - 2, f_{xy} = -2, f_{yy} = 12y^2 - 2$ であるから f のヘッセ行列式を $H(x,y)$ とすると

$$H(-1,-1) = 96 > 0,\ H(0,0) = 0,\ H(1,1) = 96 > 0$$

である.
$f_{xx}(-1,-1) = 10 > 0$ より $f(-1,-1) = -2$ は極小値である.
$f(x,0) = x^2(x-1)(x+1) < 0, f(x,-x) = 2x^4 > 0\ (0 < x < 1)$ より $f(0,0)$ は極値でない.
$f_{xx}(1,1) = 10 > 0$ より $f(1,1) = -2$ は極小値である. □

(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置換すると $D = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ である.
(2) の結果より $(x,y) = (0,0)$ は極値となりえないので $r \ne 0$ として考える.

$$f(r,\theta) = -\frac{1}{2}r^4\left(\sin 2\theta + \frac{1}{r^2}\right)^2 + r^4 - r^2 + \frac{1}{2}$$

であるから $u = \sin 2\theta$ として $[-1,1]$ 上で定義される二次関数

$$f(u) = -\frac{1}{2}r^4\left(u + \frac{1}{r^2}\right)^2 + r^4 - r^2 + \frac{1}{2}$$

の最大, 最小を考える.
(i) $1 < r \le 2$ のとき
最大値 $M(r) = r^4 - r^2 + \dfrac{1}{2}$ であり, 最小値 $m(r) = \dfrac{r^4}{2} - 2r^2$ である.
(ii) $0 < r \le 1$ のとき
最大値 $M(r) = \dfrac{r^4}{2}$ であり, 最小値 $m(r) = \dfrac{r^4}{2} - 2r^2$ である.
よって, $0 < r \le 2$ における最大値は $M(2) = \dfrac{25}{2}$ であり, 最小値は $m(\sqrt{2}) = -2$ である.
従って, D における f の最大値は $\dfrac{25}{2}$ であり, 最小値は -2 である. □