九州大学大学院数理学府
平成24年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から１題を選択して解答せよ．

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず１題分提出すること．

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] 整数係数の２次正方行列

$$g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．$\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ により有理数係数の２次正方行列全体のなす環を表す．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ により有理数係数の２次正則行列全体のなす群を表す．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の中で g が生成する部分群を G とする．$\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ の中で g が生成する $\mathbb{Q}$-代数を R とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 群 G の位数を求めよ．

(2) 行列 g の特性多項式を求めよ．

(3) R は可換体であることを示せ．

(4) G は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の部分群であるから，包含写像

$$\rho\colon\ G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$$

は G の $\mathbb{Q}$-線型表現とみなせる．このとき，ρ の表現としての自己準同型環

$$\mathrm{End}(\rho) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}) \mid A\rho(h) = \rho(h)A,\ {}^{\forall}h \in G\}$$

は R に一致することを示せ．

[2] $\mathbb{Z}$ を有理整数環とし，p を素数とする．また，$\mathbb{Z}$ 係数の一変数多項式環を $\mathbb{Z}[x]$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルの例を一つあげて，それが極大イデアルであることを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[x]$ の多項式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が

$$a_i \equiv 0 \mod p \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

かつ

$$a_0 \not\equiv 0 \mod p^2$$

を満たすとする．このとき $f(x)$ は $\mathbb{Z}[x]$ の既約な多項式であることを示せ．

(3) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ は $\mathbb{Z}[x]$ の既約な多項式であることを示せ．

[3] X をハウスドルフ空間とする．以下の問に答えよ．

(1) X の相異なる n 個の元 $x_1, \cdots, x_n$（$n \geq 2$）に対し，各 x_k の近傍 U_k で $U_i \cap U_j = \emptyset$（$1 \leq i < j \leq n$）を満たすものが存在することを示せ．

(2) C を X のコンパクトな部分集合とする．このとき C は X の閉集合であることを示せ．

(3) A, B が X のコンパクトな部分集合ならば，$A \cap B$ も X のコンパクトな部分集合であることを示せ．

[4]　(u,v) をパラメータとする空間内の曲面 $\mathbf{p}(u,v)$ を次式で定義する．

$$\mathbf{p}(u,v) = \mathbf{q}(u) + v\mathbf{e}(u)$$

ここで，$\mathbf{q}(u)$ は u を弧長パラメータとする空間曲線であり，$\mathbf{e}(u)$ は u のみに依存する単位ベクトルで，$\mathbf{q}'(u)$ と $\mathbf{e}(u)$ は一次独立であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 曲面 $\mathbf{p}(u,v)$ のガウス曲率 K は $K \leq 0$ を満たすことを示せ．

(2) $K \equiv 0$ であるための必要十分条件は，$\mathbf{e}'(u)$ が $\mathbf{q}'(u)$ と $\mathbf{e}(u)$ の一次結合で表されることである．このことを示せ．

(3) xyz 空間において，

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0$$

と表される曲面を $\mathbf{q}(u) + v\mathbf{e}(u)$ の形に表せ．

[5]　円周 S^1 と 2 次元閉円板 D^2 の直積空間 $M = S^1 \times D^2$ について，以下の問に答えよ．

(1) M の整係数ホモロジー群 $H_*(M;\mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) M の部分空間 $\partial M = S^1 \times \partial D^2$ の整係数ホモロジー群 $H_*(\partial M;\mathbb{Z})$ を求めよ．ただし，∂D^2 は D^2 の境界である．

(3) 整係数相対ホモロジー群 $H_*(M, \partial M;\mathbb{Z})$ を求めよ．

[6] a を正の定数とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) R_0 を正数とする. 複素平面内の領域 $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| > R_0\}$ 上の正則関数 f を考える. 次を満たす連続関数 $F : [R_0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在すると仮定する.

$$|f(z)| \leq F(|z|) \quad (z \in D), \qquad \lim_{R\to\infty} F(R) = 0$$

複素平面内で原点を中心にもつ半径 $R\ (> R_0)$ の上半円を反時計回りにまわる路を $C_R^+ = \{z = Re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ とする. この時 C_R^+ に沿う線積分について

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z)\, dz = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx$$

(3) 実軸上の区間 $[-R, R]$ を I_R とする. 区間 I_R 上を $-R$ から R に向かう路に沿う線積分の極限

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I_R} \frac{e^{iaz}}{\sqrt{z-i}}\, dz$$

を計算せよ. ここで $\sqrt{z-i}$ は次のように決めたものである. $z-i$ の偏角 $\arg(z-i)$ を $-3\pi/2 \leq \arg(z-i) < \pi/2$ にとり, $\log(z-i) = \log|z-i| + i\arg(z-i)$ とおき, $\sqrt{z-i} = e^{\frac{1}{2}\log(z-i)}$ とする. 必要なら

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を用いてもよい.

[7] 以下の問に答えよ．

(1) 次の初期値問題の解 $y(x)$ を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \cos 2x \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

(2) $r(t)$ を $\int_0^\infty |r(t)|dt < \infty$ を満たす連続関数とする．

(i) $u(t)$ は $[0,\infty)$ 上の有界な連続関数で，関係式

$$u(t) = \cos t - \int_t^\infty \sin(t-s)r(s)u(s)\,ds$$

を満たすものとする．このとき

$$u''(t) + u(t) = r(t)u(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - \cos t| = 0$$

が成り立つことを示せ．

(ii) $[0,\infty)$ 上の関数 $g_n(t)$ と $u_n(t)$ $(n = 0,\, 1, \cdots)$ を

$$\begin{aligned} &g_0(t) = \cos t \\ &g_n(t) = -\int_t^\infty \sin(t-s)r(s)g_{n-1}(s)\,ds \quad (n \geq 1) \\ &u_n(t) = g_0(t) + \cdots + g_n(t) \end{aligned}$$

によって定める．数学的帰納法を用いて，すべての $t \geq 0$ に対して

$$|g_n(t)| \leq \frac{1}{n!}\left(\int_t^\infty |r(s)|\,ds\right)^n$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 上の関数列 $\{u_n(t)\}$ は区間 $[0,\infty)$ 上で一様収束することを示せ．さらに，$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$ は $[0,\infty)$ 上で有界な連続関数で，

$$u(t) = \cos t - \int_t^\infty \sin(t-s)r(s)u(s)\,ds$$

を満たすことを示せ．

[8]　次の命題がもし正しいなら○を書いて証明を与えよ．もし誤りなら×を書いて反例をあげよ．

(1) 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は $\mu(X) = 1$ を満たすとする．X の可測集合の列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ について，もし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(A_n) = 1$ ならば，

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 1$$

(2) 実数全体 $\mathbb{R}$ の部分集合の列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ について，もし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が $\mathbb{R}$ で稠密ならば，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathbb{R}$ で稠密になる．

(3) 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ において，X 上の可測関数の列 $f_1, f_2, f_3, \ldots$ が可測関数 f に各点収束しているとする．もしある定数 $K > 0$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f_n(x) \leq K$, $0 \leq f(x) \leq K$ となっているならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

(4) 実数全体 $\mathbb{R}$ 上で通常のルベーグ測度空間を考える．可測関数 $K(x) \geq 0$ は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$ を満たすとする．実数 a を固定し，正の数 ε に対し $K_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}K\left(\dfrac{x-a}{\varepsilon}\right)$ とおく．もし f が有界な連続関数ならば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x) f(x) dx = f(a)$$

(5) 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が $\mu(X) < \infty$ を満たすとする．X 上の可測関数 f と可測関数の列 $f_1, f_2, f_3, \ldots$ を考える．もし f_n が f に概収束するならば，f_n が f に測度収束する．ここで，f_n が f に概収束するとは，測度 0 の集合を除いて $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ のことであり，f_n が f に測度収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mu(\{x \in X \,;\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることである．

[9] X を $\{1, 2, \ldots, m\}$ に値をとる確率変数とし,

$$p(k;\theta) = P(X = k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m, \quad \theta \in \Theta)$$

とおく. ここで $\Theta \subset \mathbb{R}$ は空でない開集合とする. $p(k;\theta) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m,$ $\theta \in \Theta)$ とし, 各 $k = 1, 2, \ldots, m$ について $p(k;\theta)$ は θ について微分可能とする. また, $\mathrm{E}_\theta\{\cdot\}$, $\mathrm{V}_\theta\{\cdot\}$, $\mathrm{Cov}_\theta\{\cdot, \cdot\}$ はそれぞれ X の分布 $p(k;\theta)$ に関する期待値, 分散, 共分散とする. $h(k;\theta) = \dfrac{d}{d\theta} \log p(k;\theta)$ とおく．T を $\{1, \cdots, m\}$ 上の実数値関数とし，$g(\theta) = \mathrm{E}_\theta\{T(X)\}$ とおく．以下の問に答えよ.

(1) 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$\mathrm{E}_\theta\{h(X;\theta)\} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$\mathrm{Cov}_\theta\{T(X), h(X;\theta)\} = \frac{d}{d\theta} g(\theta)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 各 $\theta \in \Theta$ について $I(\theta) = \mathrm{V}_\theta\{h(X;\theta)\}$ とおく．$0 < I(\theta) < \infty$ とする. このとき,

$$\mathrm{V}_\theta\left\{T(X) - \frac{1}{I(\theta)}\left(\frac{d}{d\theta} g(\theta)\right) h(X;\theta)\right\}$$

を，$\mathrm{V}_\theta\{T(X)\}$, $\dfrac{d}{d\theta} g(\theta)$, $I(\theta)$ で表せ.

(4) $g(\theta) \equiv \theta$ のとき, (3) の $I(\theta)$ に対して

$$\mathrm{V}_\theta\{T(X)\} \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

が成り立つことを示せ.

[10]　N を自然数とする．$u = \{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が N 周期格子点関数であるとは, $u_j \in \mathbb{C}$ で,

$$u_{j+N} = u_j \quad (j \in \mathbb{Z})$$

を満たしているものをいう．N 周期格子点関数 u の離散フーリエ係数 $\hat{u} = \{\hat{u}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j e^{-2\pi i \frac{jk}{N}}$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき以下の問に答えよ．ただし，j, k, ℓ は整数を表すものとする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{jk}{N}} = \begin{cases} N & (j \equiv 0 \mod N) \\ 0 & (j \not\equiv 0 \mod N) \end{cases}$ を示せ.

(2) $\displaystyle u_\ell = \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k e^{2\pi i \frac{\ell k}{N}}$ を示せ.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |\hat{u}_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2$ を示せ.

(4) N 周期格子点関数 v に対し $-u_{j-1} + 3u_j - u_{j+1} = v_{j-1} - v_j + v_{j+1}$ を満たす N 周期格子点関数 u が一意に存在することを示せ．また, 不等式

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} |v_j|^2$$

が成り立つことを示せ.