九州大学大学院数理学府
平成 30 年度修士課程入学試験
専門科目

[5](1) Y' は $\mathbb{R}P^2$ から開円板 $\mathring{D}^2$ を取り除いたものであるからメビウスの帯 MB とホモトピー同値なので

$$\begin{aligned} H_n(Y';\mathbb{Z}) &\cong H_n(MB;\mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0,1) \\ \{0\} \ (n \neq 0,1) \end{cases} \end{aligned}$$

である. $\square$

(2) $f_{*n} : H_n(X;\mathbb{Z}) \to H_n(Y';\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像と考えると

$$f_{*n}\left(H_n(X;\mathbb{Z})\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0) \\ 2\mathbb{Z} \ (n=1) \\ \{0\} \ (n \neq 0,1) \end{cases}$$

である. $\square$

(3) Z' は 2 つのメビウスの帯の境界同士を貼り合わせた図形つまりクラインのつぼ KB とホモトピー同値なので

$$\begin{aligned} H_n(Z';\mathbb{Z}) &\cong H_n(KB;\mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0) \\ \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ (n=1) \\ \{0\} \ (n \neq 0,1) \end{cases} \end{aligned}$$

である. $\square$

[7](1) f は正則関数なので a の近傍でべき級数展開可能であるから

$$g(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^{m-n}$$

とすると

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

とかける. $\square$

(2) a の任意の近傍で f が恒等的に 0 でないと仮定する.
f は a のある近傍で正則なので a のある近傍 U 上でべき級数展開可能であるから
$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $f^{(n)}(a) \neq 0$ である.
(1) の結果から $g(a) \neq 0$ をみたす a のある近傍 U 上の正則関数 g を用いて

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

とかける.
このとき, $f(z_j) = 0$ より $g(z_j) = 0$ であるが $z_j \to a$ と g の連続性より $g(a) = 0$ となり矛盾する.
従って, a のある近傍で f は恒等的に 0 である. $\square$

(3) $A = \{z \in D | f(z) = 0\}$ とすると f は (2) の条件をみたすので A は内点を持つ.
$A^i \neq \emptyset$ であり (2) より $\partial A^i \subset A^i$ であるので A^i は開かつ閉集合である.
D の連結性より $A = D$ であるから f は D 上で恒等的に 0 である. $\square$

(4) $x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して $\sin(x+iy) = 0$ をみたすとき $x = 0, y = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ であるから
$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin(h(x)) = 0$ のとき $h(x) \in \{2\pi ni | n \in \mathbb{Z}\}$ である.
よって, h の連続性より $\exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $h(x) = 2\pi ni$ である.
今, $g(z) = h(z) - 2\pi ni$ と定めて (2),(3) の結果を $D = \mathbb{C}$ として用いると $g(z) = 0$ を得る.
従って, h は定数関数である. $\square$