九州大学大学院数理学府
平成17年度修士課程入学試験
数学専門科目問題 (数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から2題を選択して解答せよ．
• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] 5文字 $\{1,2,3,4,5\}$ 上の置換全体からなる5次対称群 S_5 を考える．

(1) 任意の群 G に対してその中心を $Z(G) = \{z \in G | xz = zx, \forall x \in G\}$ と定義する．$Z(G)$ は G の正規部分群であることを示せ．

(2) S_5 の中心 $Z(S_5)$ を求めよ．

(3) S_5 の位数2の元の個数を求めよ．

(4) S_5 の位数3の元の個数を求めよ．また，位数3の部分群の個数を求めよ．

(5) S_5 の位数6の部分群の個数を求めよ．

[2] X を有限集合とし，A を X から実数体 $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合とする．

(1) $f, g \in A$ に対して $f+g, fg \in A$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

で定義すると，A は単位元をもつ可換環になることを示せ．

(2) $y \in X$ に対し，$\chi_y \in A$ を

$$\chi_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

で定義される写像とする．$\mathfrak{a}$ を，A 自身とは一致しない A のイデアルとする．このとき，$f(z) \neq 0$ を満たす $f \in \mathfrak{a}$ と $z \in X$ が存在するならば，$\chi_z \in \mathfrak{a}$ となることを示せ．

(3) A の任意の極大イデアルは，ある $z \in X$ によって

$$\{f \in A \,|\, f(z) = 0\}$$

と表されることを示せ．

[3] 以下では $\mathbb{F}_3$ を 3 元体とし，そのある代数閉包を $\overline{\mathbb{F}}_3$ とする．

(1) 3 元体 $\mathbb{F}_3$ 上のモニックな 2 次既約多項式をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた多項式の内の一つを選び，その $\overline{\mathbb{F}}_3$ における根を α とする．このとき，$\dfrac{1}{2\alpha+1}$ を α の整式として表せ．

(3) $\overline{\mathbb{F}}_3$ の 0 以外の元がつくる乗法群を $\overline{\mathbb{F}}_3^{\times}$ とする．(1) で求めた多項式の根が $\overline{\mathbb{F}}_3^{\times}$ の中で生成する部分群の位数をそれぞれ求めよ．

[4] 閉区間 $[0,1]$ を I と表す．正方形 $I\times I$ に対して，関係

$$(0,t)\sim(1,t) \qquad (\forall t\in I),$$
$$(s,0)\sim(s,1) \qquad (\forall s\in I)$$

で生成される同値関係 $\sim$ を考え，$X=(I\times I)/\sim$ をその同値関係による商空間（等化空間）とする．（すなわち，正方形の対辺 $\{0\}\times I$ と $\{1\}\times I$，$I\times\{0\}$ と $I\times\{1\}$ を，それぞれ向きを合わせて同一視して得られる商空間を X とする．）

(1) X はコンパクトであることを示せ．

(2) $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ を単位円周としたとき，積空間 $T^2=S^1\times S^1$ はハウスドルフであることを示せ．

(3) 写像 $f: I\times I\to T^2$ を，

$$f(s,t)=((\cos 2\pi s,\sin 2\pi s),(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t))$$

で定める．このとき，連続写像 $F: X\to T^2$ で，$f=F\circ\pi$ となるものが一意的に存在することを示せ．ここで，$\pi: I\times I\to X$ は自然な射影（商写像，等化写像）である．

(4) $F: X\to T^2$ は同相写像となることを示せ．

(5) $I\times I$ に対して，関係

$$(0,t)\sim'(1,1-t) \qquad (\forall t\in I),$$
$$(s,0)\sim'(1-s,1) \qquad (\forall s\in I)$$

によって生成される同値関係 $\sim'$ を新たに考え，$Y=(I\times I)/\sim'$ を商空間とする．X と Y は同相となるかを理由と共に答えよ．

[5]　与えられた正の定数 a, b $(a > b > 0)$ に対して，写像

$$p\colon D = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

を

$$p(u, v) = \big((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u\big)$$

によって定めると，p は3次元ユークリッド空間内の曲面のパラメータ表示を与えている．

(1) p の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) p のガウス曲率 K を u, v の式で表せ．

(3) p の像を図示し，ガウス曲率が負となる部分を指摘せよ．

(4) 曲面 $\tilde{p}(\tilde{u}, \tilde{v})$ の第一基本形式 ds^2 が

$$ds^2 = \widetilde{E}\big(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2\big), \qquad \widetilde{E} = \widetilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v})$$

と表されているとき，パラメータ $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を等温パラメータという．最初に与えられた曲面 p のパラメータを等温パラメータに変換せよ．

[6]　実定数 k に対して，3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 M_k を

$$M_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = k\}$$

と定義する．

(1) $k \neq 0$ ならば，M_k は多様体の構造を持つことを示せ．

(2) $k = -1$ とし，$U = \{(x, y, z) \in M_{-1} \mid z > 0\}$ に次のように座標を与える：
$\varphi\colon U \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$\psi\colon U \ni (x, y, z) \mapsto (u, v) \in D$. ただし $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ で

$$(u, v) = \frac{1}{1 + z}(x, y).$$

このとき，座標変換 $(u, v) \mapsto (x, y)$ を求めよ．

(3) (2) の座標系 (u, v) を用いて U 上のベクトル場

$$X = \frac{\partial}{\partial u}$$

を定義する．このベクトル場を座標系 (x, y) から定まる $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ を用いて表せ．

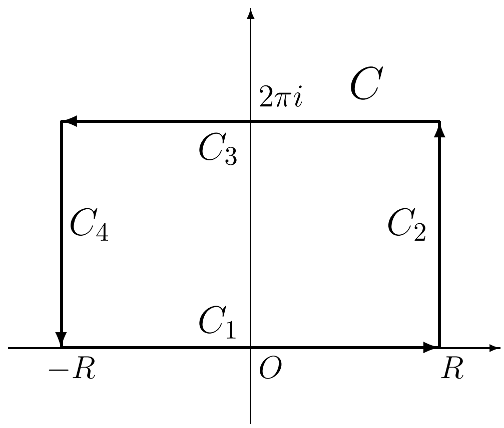
[7]　p を $0 < p < 1$ なる実数とするとき，関数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{pz}}{1+\mathrm{e}^{z}}$ を考える．

(1) f の複素平面 $\mathbb{C}$ におけるすべての極の位置，位数および留数を求めよ．

(2) 正の数 R に対して，C_1, C_2, C_3, C_4 からなる 下図のような閉曲線を C とするとき，積分 $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz$ を求めよ．

(3) $R \to \infty$ とすると $\left|\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \to 0$, $\left|\displaystyle\int_{C_4} f(z)\,dz\right| \to 0$ となることを示せ．

(4) 実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{px}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,dx$ を求めよ．



[8]　実数全体 $\mathbb{R}$ で定義された連続関数 $q_1(x), q_2(x)$ は，$q_1(x) < q_2(x)$ を満たすものとする．$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ はそれぞれ微分方程式

$$\begin{cases} \varphi_1'' + q_1(x)\varphi_1 = 0 \\ \varphi_2'' + q_2(x)\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

を満たすものとする．ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\quad(\alpha < \beta)$ に対して $\varphi_1(\alpha) = \varphi_1(\beta) = 0$ であり，さらに任意の $x \in (\alpha, \beta)$ について $\varphi_1(x) > 0$ であるとする．

(1) $\varphi_1'(\beta) < 0 < \varphi_1'(\alpha)$ であることを示せ．

(2) 次の等式

$$\int_\alpha^\beta (q_2(x) - q_1(x))\,\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \varphi_1'(\beta)\varphi_2(\beta) - \varphi_1'(\alpha)\varphi_2(\alpha)$$

が成り立つことを示せ．

(3) φ_2 は零点を (α, β) 内に持つことを示せ．ここで φ_2 の零点とは，

$\varphi_2(x) = 0$ となる x のことである.

(4) 実数全体 $\mathbb{R}$ で定義された連続関数 $q(x)$ とある $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ に対して, $[a, b]$ における実数 λ をパラメータとする常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$$

を考える. 二つの パラメータ値 $\lambda_1 < \lambda_2$ で $\varphi(x) \not\equiv 0$ である解が存在するとする. このとき λ_1 に対応する解 φ_1 より λ_2 に対応する解 φ_2 の方が多くの零点を (a, b) 内に持つことを示せ.

[9] $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする. 以下の問に答えるのに, ルベーグ積分論の基本的な定理を用いてもよいが, その際には, どのような定理をどのように用いたかを明確に説明せよ.

(1) 可測集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ を満たすとする. このとき $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと, 各 $x \in X$ に対して

$$\chi_{A_n}(x) \to \chi_A(x) \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことを示せ. ただし, χ_B は集合 B の定義関数

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

とする.

(2) 可測集合の列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mu(E_n) < 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ を満たすとする. このとき $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$, $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ とおくと, $\mu(F) = 0$ となることを示せ.

(3) f を X 上の可積分関数とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mu(E) < \delta \quad ならば \quad \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ.

(4) f, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ を X 上の可積分関数とし, $\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$ が成立しているとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して任意の n と任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mu(E) < \delta \quad ならば \quad \int_E |f_n| \, d\mu < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ.