

九州大学大学院数理学府
平成 27 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] の全てに解答せよ .

• 以下 \mathbb{N} は自然数の全体 , \mathbb{Z} は整数の全体 , \mathbb{Q} は有理数の全体 ,
 \mathbb{R} は実数の全体 , \mathbb{C} は複素数の全体を表す .

[1] a, b を $b < 0 < a$ となる実数とし , 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

を考える . 以下の問に答えよ .

- (1) A の固有値を求め , 各固有値ごとに固有空間を求めよ .
- (2) A の固有値の中で絶対値が最大になるものを求めよ .
- (3) (2) で求めた固有値を λ_0 とおき ,

$$B = \lambda_0^{-1} A$$

とおく . B^n ($n \in \mathbb{N}$) の $n \rightarrow \infty$ での極限を求めよ .

[2] A, B を $A + B = E$ を満たす n 次実正方行列とする．ただし, E は n 次単位行列を表す． \mathbb{R}^n の部分空間 V, W を

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = A\mathbf{y} \text{ を満たす } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \}$$

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = B\mathbf{y} \text{ を満たす } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \}$$

とする．このとき以下の問に答えよ．

- (1) $AB = O$ と $A^2 = A$ が同値であることを示せ．ただし, O は n 次零行列を表す．
- (2) $AB = O$ であれば $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ となることを示せ．
- (3) $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ であれば $AB = O$ となることを示せ．

[3] $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき以下の問に答えよ．

- (1) 定積分 $\iint_D x^{2n} dx dy$ の値を求めよ．
- (2) 実数 a, b が $a^2 + b^2 = 1$ を満たすとき, 定積分 $\iint_D (ax + by)^{2n} dx dy$ の値は a, b によらないことを示せ．
- (3) 定積分 $\iint_D (2x - 3y)^{2n} dx dy$ の値を求めよ．

[4] a, b を $0 < a < b$ となる実数とする．連続関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

が収束しているとする．このとき以下の問に答えよ．

- (1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx = 0$ を示せ．
- (2) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1/R}^R \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ の値を求めよ．
- (3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ の値を求めよ．