九州大学大学院数理学府
平成 **24** 年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数理学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．
• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体を表す．

[1] 次の行列 A に対して以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A, A^2, A^3 の階数をそれぞれ求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ を次の条件 (i), (ii) を満たすベクトルとする．

(i) $A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(ii) $A^2\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は一次独立である．

このとき，4 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立であることを示せ．

[2]　xy 平面において，曲線 C を

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 1\}$$

で定まる楕円とする．また，平面上の点 $\mathrm{P} = (a, b)$ から曲線 C までの距離 $d(\mathrm{P}, C)$ を

$$d(\mathrm{P}, C) = \inf_{\mathrm{Q} \in C} |\,\mathrm{PQ}\,|$$

と定義する．ただし，$|\,\mathrm{PQ}\,|$ は線分 PQ の長さを表す．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け．

(2) $f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数とする．$f(x, y)$ を曲線 C へ制限した関数は最小値をもつことを示せ．

(3) $d(\mathrm{P}, C) = |\,\mathrm{PQ}\,|$ となる点 $\mathrm{Q} \in C$ が存在し，そのとき線分 PQ は曲線 C と直交することを示せ．

(4) $\mathrm{P} = (3, 1)$ のとき，$\mathrm{Q} = (1, 0)$ において $d(\mathrm{P}, C) = |\,\mathrm{PQ}\,|$ となることを示せ．

[3]　n を 2 以上の自然数，a, b は実数の定数 $(a \neq 0)$ とする．n 次正方行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

を考え，線形写像 $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $F(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $a = b$ のとき，核 $\mathrm{Ker}\ F$ の次元を求めよ．

(2) 行列式 $\det M$ を求めよ．

(3) 像 $\mathrm{Im}\ F$ の基底を一組求めよ．

[**4**]

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx$ を求めよ．ただし，α は正の定数とする．

(2) a, b を正の定数とするとき，積分 $\displaystyle\int_0^b\int_0^a \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dxdy$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dxdy$ は収束するかどうか調べよ．収束する場合はその値を求め，収束しない場合はその理由を述べよ．