九州大学大学院数理学府
平成24年度修士課程入学試験
数学専門科目問題 (数理学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から１題を選択して解答せよ．

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず１題分提出すること．

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] 整数係数の２次正方行列

$$g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．$\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ により有理数係数の２次正方行列全体のなす環を表す．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ により有理数係数の２次正則行列全体のなす群を表す．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の中で g が生成する部分群を G とする．$\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ の中で g が生成する $\mathbb{Q}$-代数を R とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 群 G の位数を求めよ．

(2) 行列 g の特性多項式を求めよ．

(3) R は可換体であることを示せ．

(4) G は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の部分群であるから，包含写像

$$\rho\colon\ G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$$

は G の $\mathbb{Q}$-線型表現とみなせる．このとき，ρ の表現としての自己準同型環

$$\mathrm{End}(\rho) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}) \mid A\rho(h) = \rho(h)A,\ {}^{\forall} h \in G\}$$

は R に一致することを示せ．

[2] $\mathbb{Z}$ を有理整数環とし，p を素数とする．また，$\mathbb{Z}$ 係数の一変数多項式環を $\mathbb{Z}[x]$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルの例を一つあげて，それが極大イデアルであることを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[x]$ の多項式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ が

$$a_i \equiv 0 \mod p \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

かつ

$$a_0 \not\equiv 0 \mod p^2$$

を満たすとする．このとき $f(x)$ は $\mathbb{Z}[x]$ の既約な多項式であることを示せ．

(3) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ は $\mathbb{Z}[x]$ の既約な多項式であることを示せ．

[3] X をハウスドルフ空間とする．以下の問に答えよ．

(1) X の相異なる n 個の元 $x_1, \cdots, x_n$（$n \geq 2$）に対し，各 x_k の近傍 U_k で $U_i \cap U_j = \emptyset$（$1 \leq i < j \leq n$）を満たすものが存在することを示せ．

(2) C を X のコンパクトな部分集合とする．このとき C は X の閉集合であることを示せ．

(3) A, B が X のコンパクトな部分集合ならば，$A \cap B$ も X のコンパクトな部分集合であることを示せ．