九州大学大学院数理学府
平成 26 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

により定義する．

(1) A は重複度 2 の固有値 λ と重複度 1 の固有値 μ をもつ．λ と μ を求め, その固有ベクトルもそれぞれ求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の内積を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$ で定める．固有値 μ の長さ 1 の固有ベクトルを $\mathbf{w}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{w})\mathbf{w}$$

により定義する．このとき $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ を満たす 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) f の像は固有値 λ の固有空間に一致することを示せ．

[2] $A=\{a_1,...,a_r\}$ と $B=\{b_1,...,b_s\}$ をそれぞれ独立なベクトルの集合とする. 各 $a_j(j=1,...,r)$ は B のベクトルの一次結合で表され, また各 $b_i(i=1,...,s)$ は A のベクトルの一次結合で表されるとする. このとき次の問に答えよ.

(1) $b\in B$ で次を満たすものが存在することを示せ. A で a_r と b を入れ替えたベクトルの集合 $A'=\{a_1,...,a_{r-1},b\}$ が独立で各 $b_i(i=1,...,s)$ は A' のベクトルの一次結合で表される.

(2) $r=s$ を示せ.

(3) 各 $a_j(j=1,...,r)$ はベクトルの集合 $C=\{c_1,...,c_t\}$ の元の一次結合で表されるとする. このとき $r\le t$ を示せ.

(4) (3) でさらに, $r=t$ のとき $C=\{c_1,...,c_t\}$ のベクトルは独立になることを示せ.

[3] 広義積分

$$I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx$$

について考える. このとき以下の問に答えよ.

(1) $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\dfrac{2}{\pi}x\le \sin x$ が成り立つことを示せ.

(2) 広義積分 I は収束することを示せ.

(3)

$$2I=\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

を示し, これを用いて I の値を求めよ.

[4] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$ となる点 (x,y) を全て求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}$ における $f(x,y)$ の最大値・最小値を求めよ．