九州大学大学院数理学府
平成21年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース数学型)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から2題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] 群 $GL(2,\mathbb{C})$ の元 A, B を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ただし i は虚数単位である. このとき次の問に答えよ.

(1) A, B を含む群 $GL(2,\mathbb{C})$ の最小の部分群 G が存在することを示せ. またこの群 G の位数を求めよ.

(2) 4 次対称群 S_4 は G と同型な部分群を含まないことを示せ.

(3) 8 次対称群 S_8 は G と同型な部分群を含むことを示せ.

(4) 6 次対称群 S_6 は G と同型な部分群を含むかどうか答えよ.

[2] R を零元および零元と異なる単位元をもつ可換環とするとき，以下の問に答えよ.

(1) 素イデアルの定義を述べよ.

(2) I, J を R のイデアル，P を R の素イデアルとするとき，次の (a), (b), (c) は同値であることを示せ.

(a) $I \subset P$ または $J \subset P$.

(b) $I \cap J \subset P$.

(c) $IJ \subset P$.

(3) I, J, K を R のイデアルとする. $I \subset J \cup K$ ならば$I \subset J$ または $I \subset K$ が成り立つことを示せ.

(4) I, J, K を R のイデアル，P を R の素イデアルとする. $I \subset J \cup K \cup P$ ならば, I は J, K, P のいずれかに含まれることを示せ.

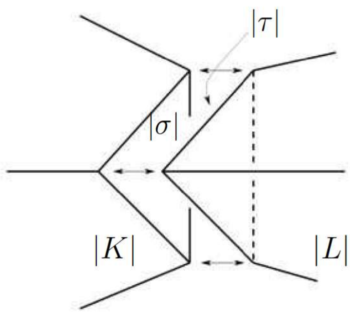
[3]

(1) 有限体 $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ に対し，二次方程式 $x^2 - 2 = 0$ は $\mathbb{F}_5$ の中で解けないことを証明せよ．

(2) $\mathbb{F}_5$ の拡大体の中より，$f(x) = x^2 - 2$ の解 α を取り，体 $F = \mathbb{F}_5(\alpha) = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ とおく．$\xi := 1 + 2\alpha$ のとき，ξ^n, $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, を計算せよ．

(3) F の乗法群 F^* は巡回群であることを証明せよ．

[4] K と L を二つの連結 2 次元複体とし，$|K|$ と $|L|$ をそれらの幾何学的実現とする．K の 2 単体 σ と L の 2 単体 τ をとり，多面体 $|K|$ と $|L|$ において $|\sigma| \subset |K|$ と $|\tau| \subset |L|$ を図の様に貼り合わせてできる位相空間を M とする．



さらに $|K|$ と $|L|$ の部分多面体 $|K - \{\sigma\}|$ と $|L - \{\tau\}|$ において $|\sigma|$ の境界 $\partial|\sigma| \subset |K - \{\sigma\}|$ と $|\tau|$ の境界 $\partial|\tau| \subset |L - \{\tau\}|$ を同様に貼り合わせてできる M の部分位相空間 を M_0 とする．

次の問に答えよ．ただし，H_q は整係数 q 次元ホモロジー群とする．

(1) 包含写像 $|\sigma| \hookrightarrow |K|$ が整係数 0 次元ホモロジー群の同型を誘導することを証明せよ．

(2) $H_q(M) \cong H_q(|K|) \oplus H_q(|L|)$ $(q > 0)$ を証明せよ．

(3) $|K|$ が向きづけ可能閉曲面に同相のとき，$H_1(M_0) \cong H_1(|K|) \oplus H_1(|L|)$ を証明せよ．