# 九州大学大学院数理学府
# 平成23年度修士課程入学試験
# 数学専門科目問題 (数理学コース数学型)

**注意** ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ．

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

**[1]** 以下の問に答えよ．

(1) 位数 4 の群はアーベル群であることを証明せよ．

(2) 4 次対称群 $S_4$ の位数 4 の部分群をすべて求めよ．

(3) 4 次対称群 $S_4$ の位数 4 の正規部分群をすべて求めよ．

**[2]** 可換環 $A$（$A \ni 1$）と，$A$ の非零因子 $d$ に対し，環 $B$ を $B = A[X]/(dX-1)$（すなわち $A$ 上の多項式環 $A[X]$ を多項式 $dX-1$ の生成するイデアル $(dX-1)$ で割った剰余環）と定義する．以下の問に答えよ．

(1) 自然な環準同型 $A \to B$ は単射であることを示せ．(以降，これにより $A$ は $B$ の部分環とみなす．)

(2) 剰余環 $A/dA$ は 0 以外の巾零元を持たないと仮定する．このとき，もし $B$ の元 $b$ が $A$ 上整（すなわち，ある $A$ 係数のモニック多項式 $f(X)$ に対し $f(b)=0$ となる）ならば $b \in A$ であることを示せ．

**[3]**　$\mathbb{Q}$ の拡大体 $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$，$L_2 = \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$，$L_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \zeta_3, \sqrt[3]{2})$ を考える．ここで $\zeta_3$ は 1 の原始 3 乗根，$\sqrt{2}$ は $X^2 = 2$ の 1 つの根，$\sqrt[3]{2}$ は $X^3 = 2$ の 1 つの根である．以下の問に答えよ．

(1) 体 $L_1, L_2$ の $\mathbb{Q}$ 自己同型群をそれぞれ求めよ．

(2) $L_2/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

(3) 体の拡大 $L_3/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるかどうか，理由をつけて答えよ．

**[4]**　$\sigma$ を 3 単体とし，その 1 次元以下のすべての辺単体からなる複体を $K$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $K$ のオイラー数を求めよ．

(2) $K$ の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ．

(3) 連続写像 $r : \sigma \to |K|$ で，

$$r(a) = a \qquad (\forall a \in |K|)$$

となるものが存在しないことを示せ．ここで $|K| = \bigcup_{\tau \in K} \tau$ は複体 $K$ の定める多面体である．