九州大学大学院数理学府
平成21年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース数学型)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から2題を選択して解答せよ．

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること．

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　群 $GL(2,\mathbb{C})$ の元 A, B を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ただし i は虚数単位である．このとき次の問に答えよ．

(1) A, B を含む群 $GL(2,\mathbb{C})$ の最小の部分群 G が存在することを示せ．またこの群 G の位数を求めよ．

(2) 4 次対称群 S_4 は G と同型な部分群を含まないことを示せ．

(3) 8 次対称群 S_8 は G と同型な部分群を含むことを示せ．

(4) 6 次対称群 S_6 は G と同型な部分群を含むかどうか答えよ．

[2]　R を零元および零元と異なる単位元をもつ可換環とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 素イデアルの定義を述べよ．

(2) I, J を R のイデアル，P を R の素イデアルとするとき，次の (a), (b), (c) は同値であることを示せ．

(a) $I \subset P$ または $J \subset P$.

(b) $I \cap J \subset P$.

(c) $IJ \subset P$.

(3) I, J, K を R のイデアルとする．$I \subset J \cup K$ ならば $I \subset J$ または $I \subset K$ が成り立つことを示せ．

(4) I, J, K を R のイデアル，P を R の素イデアルとする．$I \subset J \cup K \cup P$ ならば, I は J, K, P のいずれかに含まれることを示せ．

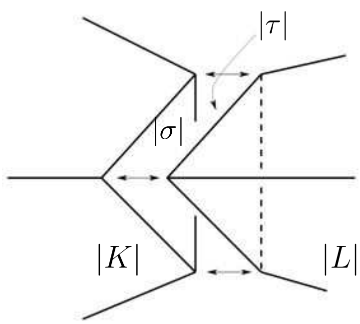
[3]

(1) 有限体 $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ に対し, 二次方程式 $x^2 - 2 = 0$ は $\mathbb{F}_5$ の中で解けないことを証明せよ.

(2) $\mathbb{F}_5$ の拡大体の中より, $f(x) = x^2 - 2$ の解 α を取り，体 $F = \mathbb{F}_5(\alpha) = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ とおく. $\xi := 1 + 2\alpha$ のとき, ξ^n, $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, を計算せよ.

(3) F の乗法群 F^* は巡回群であることを証明せよ.

[4] K と L を二つの連結 2 次元複体とし，$|K|$ と $|L|$ をそれらの幾何学的実現とする. K の 2 単体 σ と L の 2 単体 τ をとり，多面体 $|K|$ と $|L|$ において $|\sigma| \subset |K|$ と $|\tau| \subset |L|$ を図の様に貼り合わせてできる位相空間を M とする.



さらに $|K|$ と $|L|$ の部分多面体 $|K - \{\sigma\}|$ と $|L - \{\tau\}|$ において $|\sigma|$ の境界 $\partial|\sigma| \subset |K - \{\sigma\}|$ と $|\tau|$ の境界 $\partial|\tau| \subset |L - \{\tau\}|$ を同様に貼り合わせてできる M の部分位相空間 を M_0 とする.

次の問に答えよ. ただし，H_q は整係数 q 次元ホモロジー群とする.

(1) 包含写像 $|\sigma| \hookrightarrow |K|$ が整係数 0 次元ホモロジー群の同型を誘導することを証明せよ.

(2) $H_q(M) \cong H_q(|K|) \oplus H_q(|L|)$ $(q > 0)$ を証明せよ.

(3) $|K|$ が向きづけ可能閉曲面に同相のとき，$H_1(M_0) \cong H_1(|K|) \oplus H_1(|L|)$ を証明せよ.

[5] 次の方程式で定義される $\mathbb{R}^4$ の部分位相空間を M とする．

$$x^2+y^2+z^2+w^2=1, \qquad xy+zw=0.$$

(1) M は $\mathbb{R}^4$ の部分多様体であることを示せ．

(2) 次の式で与えられる M 上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$ の微分が 0 になる M の点の個数を求めよ．

$$f(x,y,z,w)=x^2+y^2.$$

[6] 次のようにパラメータ表示された曲面を考える．

$$p(u,v)=\big(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)\big) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \le u < \pi, -\pi \le v \le \pi\right)$$

$$\text{ただし} \qquad x(u)=\sin u, \quad z(u)=\cos u+\log\tan\frac{u}{2}.$$

(1) この曲面のガウス曲率を求めよ．

(2) 正数 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対して，uv 平面上の閉集合

$$V_\varepsilon=\left\{(u,v)\,\middle|\,\frac{\pi}{2} \le u \le \pi-\varepsilon,\ -\pi \le v \le \pi\right\}$$

に対応する曲面の部分集合の面積を A_ε とするとき，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} A_\varepsilon$$

を求めよ．

(3) 曲面の第一基本形式 I, 第二基本形式 II が

$$\begin{aligned} I &= d\xi^2+2\cos\theta\, d\xi\, d\eta+d\eta^2 \\ II &= 2\sin\theta\, d\xi\, d\eta \end{aligned} \qquad \big(\theta=\theta(\xi,\eta) \text{ は滑らかな関数}\big)$$

の形になるようなパラメータ変換 $(u,v) \mapsto (\xi,\eta)$ と関数 $\theta(\xi,\eta)$ を求めよ．

[7] Ω を複素平面内の領域とし，$f(z)$ をその上の正則関数とする．

(1) $|f(z)|$ が Ω 内の空でない開集合上で定数ならば，$f(z)$ は Ω 上定数となることを示せ．

(2) 中心 a，半径 $r > 0$ の円板が Ω に含まれるとする．このとき，$\rho \in [0, r)$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

(3) $f(z)$ が Ω 上定数でないとき，$|f(z)|$ は Ω 内で最大値を持たないことを示せ．

(4) $f(z)$ が Ω 上定数でないとき，$f(z)$ の実部は Ω 内で最小値を持たないことを示せ．

[8] f を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測な関数, G, f_n, G_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分な関数とする. 次を仮定する.

仮定 (i) $0 \leq f_n(x) \leq G_n(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.

仮定 (ii) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

仮定 (iii) $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |G(x) - G_n(x)| dx = 0$.

以下関数 F に対して $F_+(x) = \max\{F(x), 0\}$, $F_-(x) = \max\{-F(x), 0\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) $G - f$ は可積分で $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} (G - f_n)_+(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (G(x) - f(x)) dx$ が成立することを示せ.

(2) $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} (G - f_n)_-(x) dx = 0$ を示せ.

(3) f は可積分で

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

が成立することを示せ.

[9]

(1) 微分方程式

$$(*) \qquad f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 0$$

の基本解系を一つ求めよ.

(2) $t \in \mathbb{R}$ を任意に固定する. このとき, 微分方程式 $(*)$ の解で初期条件 $f(t) = 0$, $f'(t) = 1$ を満たすものを求めよ.

(3) 微分方程式 $f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = e^{-x}$ の一般解を求めよ.

(4) $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で有界な連続関数とする. このとき, 微分方程式

$$f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = g(x)$$

の任意の解 $f(x)$ は $x \geq 0$ で有界であることを示せ.