九州大学大学院数理学府
平成31年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から2題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ を正則な 2 次複素行列全体のなす群とする．次の 2 つの行列

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (i=\sqrt{-1}), \qquad \beta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の部分群を G とする．また， H を α で生成される G の部分群，K を β で生成される G の部分群とする．以下の問に答えよ．

(1) H と K が G の正規部分群になるかどうか，理由とともに答えよ．

(2) 群 G の位数を求めよ．

(3) G の H に関する左完全代表系を求めよ．すなわち，G における H の左剰余類の個数を n とするとき，G の部分集合 $\{g_1,\ldots,g_n\}$ で，

$$\begin{cases} G = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} g_j H \\ j \neq k \text{ ならば，} g_j H \cap g_k H \text{ は空集合} \end{cases}$$

となるものを求めよ．

[2] R を零元と異なる単位元をもつ可換環とし， I を R のイデアルとする．以下の問に答えよ．

(1) $\sqrt{I} = \{a \in R :$ ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $a^n \in I\}$ とおくと，$\sqrt{I}$ は I を含む R のイデアルになることを示せ．

(2) J を $I \subset J$ をみたす R の素イデアルとするとき，$\sqrt{I} \subset J$ が成り立つことを示せ．

(3) R を x, y を変数とする $\mathbb{C}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ とし，$I = (xy, y^2)$ とする．このとき, $\sqrt{I}$ は単項イデアルになることを示し，$\sqrt{I}$ を生成する一つの元を求めよ．

[3] $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を 2 元からなる体とし，$\overline{\mathbb{F}_2}$ を $\mathbb{F}_2$ の代数的閉包とする．$\mathbb{F}_2[x]$ を $\mathbb{F}_2$ 上の変数 x の多項式環とし，$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ とおく．θ を $f(\theta) = 0$ を満たす $\overline{\mathbb{F}_2}$ の元とし，$\mathbb{F}_2$ に θ を添加してできる体を K と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ は $\mathbb{F}_2[x]$ の既約元であることを示せ．

(2) K は商環 $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ と同型であることを示せ．また，体の拡大次数 $[K : \mathbb{F}_2]$ を求めよ．ただし，$(f(x))$ は $f(x)$ で生成される $\mathbb{F}_2[x]$ のイデアルを表す．

(3) 写像 $\sigma : K \to K$ を $\sigma(\alpha) = \alpha^2 \ \ (\alpha \in K)$ と定義する．σ は体 K の自己同型写像であることを示せ．

(4) (3) で定義した σ の位数，すなわち，σ^n が恒等写像となるような最小の自然数 n を求めよ．また，体 K の自己同型群を求めよ．

[4] 3次実対称行列の全体の集合を X とおく．対応

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R}^6 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} & \mapsto & (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}) \end{array}$$

により，X を $\mathbb{R}^6$ と同一視して，X を C^∞ 級多様体と考える．以下の問に答えよ．

(1) Y を次で定義する．

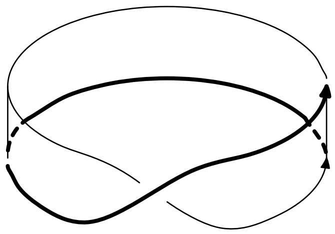
$$Y = \{A \in X \,:\, \det(A) = 1\}$$

Y は X の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

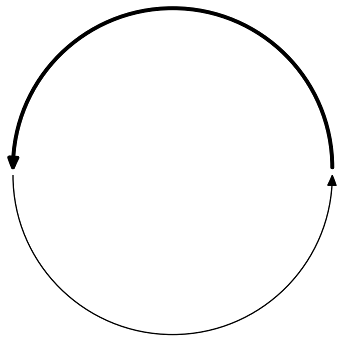
(2) Y 上の関数 $f : Y \to \mathbb{R}$ を $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ で定義する．f は C^∞ 級関数であることを示せ．

(3) f の臨界値をすべて求めよ．

[5] 単位正方形 $[0,1]^2$ の境界の点同士を $(0,t) \sim (1,1-t)$ と同一視して得られる位相空間 $X = [0,1]^2/_\sim$ はメビウスの帯になる． $Y = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ を閉単位円板とする． X の部分集合 $\partial X = ([0,1] \times \{0,1\})/_\sim$ から $\partial Y = \{z \in Y : |z| = 1\}$ への写像 φ を $\varphi(s,0) = e^{\pi i s}$, $\varphi(s,1) = e^{\pi i(s+1)}$ と定め，この写像によって X と Y を貼り合わせた空間を $X \cup_\varphi Y$ とする (下図参照)．ただし，i は虚数単位を表す．



X



Y

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 三つ組 $(X \cup_\varphi Y, X, Y)$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を書け．

(2) 1 次の整係数ホモロジー群 $H_1(X \cup_\varphi Y; \mathbb{Z})$ を求めよ．

[6] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 f が定める曲面 $S = \{(x, y, f(x, y)) \;:\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ の第一基本形式，第二基本形式，ガウス曲率を求めよ．

(2) 関数 f を

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

とするとき，f が定める曲面 S のガウス曲率を求めよ．

(3) (2) の曲面 S のガウス曲率を面積要素に掛けたものを曲面全体で積分した値を求めよ．

[7] c_n（$n = 0, 1, 2, \ldots$）を複素数とし，$\triangle_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(R > 0)$ とする．ベキ級数

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

が $z = -1$ において収束するとき，以下の問に答えよ．

(1) $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$ となることを示せ．

(2) 任意の $R \in (0, 1)$ に対して，$S(z)$ は $\triangle_R$ 上一様収束することを示せ．

(3) $S(z)$ は $\triangle_1$ 上の連続関数になることを示せ．

(4) $S(z)$ は $\triangle_1$ 上の正則関数になることを示せ．

[8] $t \geq 0$ における連立常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c^2 y - bcz \\ \dfrac{dy}{dt} = -c^2 x + acz \\ \dfrac{dz}{dt} = bcx - acy \\ (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える．ここで，初期値 x_0, y_0, z_0 は実数とし，係数 a, b, c は 0 でない実数で $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たすものとする．以下の問に答えよ．

(1) $x(t), y(t), z(t)$ を $(*)$ の解とする．このとき，任意の $t \geq 0$ に対して

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

が成り立つことを示せ．

(2) 初期条件 $(x_0, y_0, z_0) = (a, b, c)$ を満たす $(*)$ の解を求めよ．

(3) 初期値 (x_0, y_0, z_0) が条件 $ax_0 + by_0 + cz_0 = 0$ を満たすとき，$(*)$ の解を求めよ．

[9] 以下の問に答えよ．

(1) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$f(x)$ を非負値可測関数とする．可測集合 $E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\nu(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

と $\nu(E)$ を定めると，ν は $(X, \mathcal{B})$ 上の完全加法的測度となることを示せ． ただし，完全加法的測度は，可算加法的測度，σ-加法的測度ともいう．

(2) $E \subset \mathbb{R}$ に対して，$\delta(E)$ を

$$\delta(E) = \begin{cases} 1 & 0 \in E \\ 0 & 0 \notin E \end{cases}$$

と定める．このとき δ は $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ 上の完全加法的測度となることを示せ．

(3) m を $\mathbb{R}$ のルベーグ測度，δ を (2) で与えた測度とする．このとき

$$\delta((a,b)) = \int_{(a,b)} g(x)\, dm(x)$$

が任意の有界開区間 (a,b) で成立するような可積分関数 $g(x)$ は存在しないことを示せ．

[10] X_1, X_2, X_3 を互いに独立で同じ分布 $F(x)$ に従う連続型確率変数とする．密度関数 $f(x) = F'(x)$ は $f(-x) = f(x)$ を満たす対称な分布とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) X_1 と $-X_1$ は同じ分布に従うことを示せ．

(2) 符号関数を

$$\mathrm{sign}\,(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

とするとき，$Y = |X_1|$ と $Z = \mathrm{sign}\,(X_1)$ は独立な確率変数であることを示せ．

(3) 確率 $P(X_1 + X_2 > 0,\ X_1 + X_3 > 0)$ の値を求めよ．

[11] 関数 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $(x \geq 1)$ と合成関数 $g = f \circ f$ について，以下の問に答えよ．ただし，関数 $h : [1, \infty) \to [1, \infty)$ が縮小写像であるとは，ある $0 < r < 1$ が存在して，任意の $x,\, y \in [1, \infty)$ に対して $|h(x) - h(y)| \leq r|x - y|$ が成立することである．

(1) f は縮小写像ではないことを示せ．

(2) g は縮小写像であることを示せ．

(3) $a_0 \geq 1$ を定数として，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = g(a_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$ で定義するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(4) (3) の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を a とすると，$f(a) = a$ が成立することを示せ．