九州大学大学院数理学府
平成 26 年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意
- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{C}$ 上 2 次の一般線形群 $GL(2, \mathbb{C})$ の部分群を G とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $B^{-1}AB = A^{-1}$ を示せ．

(2) G の位数を求めよ．

(3) G の元で位数 2 のものをすべて求めよ．

(4) G から位数 3 の群への全射準同型写像が存在するかどうか答えよ．

[2] p を素数とする. $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は位数 p の有限体とし, 0 以外の $\mathbb{F}_p$ の元全体が乗法によりなす群を $\mathbb{F}_p^\times$ で表す. $M_r(\mathbb{F}_p)$ は成分が $\mathbb{F}_p$ の元からなる $r \times r$-行列全体の集合とする. さらに $A \in M_r(\mathbb{F}_p)$ に対して $|A|$ は A の行列式を表す. 行列の乗法に関して, 以下の問に答えよ.

(1) $GL_r(\mathbb{F}_p) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_p) : |A| \neq 0\}$ は群であることを示せ.

(2) $SL_r(\mathbb{F}_p) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_p) : |A| = 1\}$ は $GL_r(\mathbb{F}_q)$ の正規部分群であることを示せ.

(3) $GL_r^{(2)}(\mathbb{F}_p) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_p) : |A| \in \mathbb{F}_p^{*,2}\}$ は $GL_r(\mathbb{F}_p)$ の正規部分群であることを示せ. ただし, $\mathbb{F}_p^{*,2} = \{x^2 : x \in \mathbb{F}_p^*\}$ とする.

(4) $GL_r(\mathbb{F}_p)$ と $SL_r(\mathbb{F}_p)$ の位数を決めよ.

(5) $GL_r^{(2)}(\mathbb{F}_p)$ の位数を決めよ.

[3] $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ を位数 11 の有限体とする. 0 以外の $\mathbb{F}_{11}$ の元全体が乗法によりなす群を $\mathbb{F}_{11}^\times$ で表し, $\mathbb{F}_{11}[T]$ は 1 変数 T の $\mathbb{F}_{11}$ 上の多項式環を表す. このとき以下の問に答えよ.

(1) $2 \in \mathbb{F}_{11}^\times$ の位数を求めよ.

(2) 多項式 T^2-2 で生成されるイデアル (T^2-2) に対し商環 $K = \mathbb{F}_{11}[T]/(T^2-2)$ は体になることを示せ.

(3) K 係数の多項式 X^3-1 は K 上で 1 次式の積に因数分解できることを示せ.

(4) $\alpha \in K$ を T で代表される元とするとき, K に含まれる 1 の原始 3 乗根を $k\alpha + l$ （ただし k, l は $\mathbb{F}_{11}$ の元）の形で表せ.

[4]　2 次元単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ と長さ 2 の円筒 $p(u,v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$ を考える．$(u,v) \in (0,1] \times (-1,1)$ に対し，$\mathbb{R}^3$ 内の 2 点 $p(u,v)$ と $(0,0,v)$ を結ぶ線分と S^2 との交点を (x_p, y_p, z_p) とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) (u,v) を用いて (x_p, y_p, z_p) を表せ．

(2) 写像 $(0,1] \times (-1,1) \ni (u,v) \mapsto (x_p, y_p, z_p) \in S^2$ の第一基本形式 $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ を求めよ．

(3) (2) を用いて S^2 の面積が 4π になることを示せ．

[5]　2 次元単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ と，2 点からなる部分集合 $S^0 = \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ を考える．S^0 の 2 点を同一視して得られる S^2 の商空間を S^2/S^0 で表す．このとき以下の問に答えよ．

(1) S^2/S^0 はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) S^2/S^0 の整係数ホモロジー群 $H_n(S^2/S^0, \mathbb{Z})$ $(n \geq 0)$ を求めよ．

[6]　連立線形微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

を考える．ただし $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$x_0 \in \mathbb{R}^3$．このとき以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\ A$ と $\mathrm{Im}\ A$ の直交基底を求めよ．

(3) $x_0 \in \mathrm{Im}\ A$ のとき，解は $x(t) \in \mathrm{Im}\ A$ を満たすことを示せ．

(4) $x_0 \in \mathrm{Im}\ A$ のときの解 $x(t)$ を求めよ．

[7]　複素関数 $f(z)$，$g(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0, \end{cases} \qquad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{z-n}$$

で定める．ただし，$\{c_n\}$ は複素数列で，級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n}{n}$ は絶対収束するものとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上で正則であることを示せ．

(2) 複素平面から整数点を除いた領域を $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で表わす．$g(z)$ は D の任意のコンパクト集合上で一様収束することを示せ．

(3) 任意の整数点 $z = m \in \mathbb{Z}$ は複素関数 $h(z) = \dfrac{\sin \pi z}{\pi} g(z)$ の除去可能特異点であり，$\displaystyle\lim_{z \to m} h(z) = c_m$ が成り立つことを示せ．

[8]　積分

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

について考える．ただし, $t > 0$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $F(t)$ は $t > 0$ の連続関数で，$\lim_{t \to \infty} F(t) = 0$ を満たすことを示せ．

(2) $F(t)$ は $t > 0$ において微分可能であることを示せ．また，その導関数は

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

で与えられることを示せ．

(3) $F(t)$ を求めよ．また，$\lim_{t \to 0+} F(t)$ を求めよ．

[9]　次の問に答えよ.

(1) X を連続型確率変数とする. $u(x)$ が非負関数 $(u(x) \geq 0)$ であるとき, 任意の $c > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

(2) X の確率密度関数 $f(x;\theta)$ が次で与えられるとき, X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ. ただし, θ は正の定数である.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(3) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を互いに独立で同じ分布に従う確率変数とする．ただし分布の確率密度関数は(2)の $f(x;\theta)$ とする．また $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の実現値とする．このとき尤度関数 $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ を最大にする θ は $\overline{x}_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ であることを示せ.

(4) (3) で得られた θ の最尤推定量 $\overline{X}_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

となることを示せ.

[10] 正整数 k，有限集合 E および以下を満たす関数 $\rho\colon 2^E \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．

$$\begin{aligned}
&\rho(\emptyset) = 0,\\
&X \subseteq Y \subseteq E \quad \Longrightarrow \quad \rho(X) \le \rho(Y),\\
&X, Y \subseteq E \quad \Longrightarrow \quad \rho(X) + \rho(Y) \ge \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y).
\end{aligned}$$

このとき，要素の個数が k である集合 X ($X \subseteq E$) の中で $\rho(X)$ を最大化するものを求める問題を P とし，問題 P に対して以下のような算法を考える．

ステップ 1： X_0 を $\emptyset$，i を 1 とする．

ステップ 2： $i < k$ を満たす限り以下の **(2-a)** と **(2-b)** を繰り返す．

(2-a) $\rho(X_{i-1} \cup \{e\}) - \rho(X_{i-1})$ を最大化する $e \in E \setminus X_{i-1}$ を e_i とする．

(2-b) X_i を $X_{i-1} \cup \{e_i\}$ とし，i を 1 増やす．

ステップ 3： X_k を出力する．

このとき以下の問に答えよ．

(1) $X \subseteq Y$ を満たす任意の $X, Y \subseteq E$ および $e \in E \setminus Y$ に対して

$$\rho(X \cup \{e\}) - \rho(X) \ge \rho(Y \cup \{e\}) - \rho(Y)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 問題 P の最適解の一つを Z としたとき，(1) の結果を用いて，任意の i ($i = 0, 1, \ldots, k$) に対して

$$\rho(Z) - \rho(X_i) \le k\Big(\rho(X_{i+1}) - \rho(X_i)\Big)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 問題 P の最適解の一つを Z としたとき，(2) の結果を用いて，

$$\left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)\rho(Z) \le \rho(X_k)$$

が成り立つことを証明せよ．