九州大学大学院数理学府
平成29年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から 2 題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] p を素数とする．以下の問に答えよ．

(1) 位数が p の群は巡回群であることを証明せよ．

(2) $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ を和を演算とするアーベル群とする．このとき G の部分群がいくつあるかを答えよ．

(3) n を自然数とする．位数 p^n の群 G の極大部分群は位数が p^{n-1} であることを示せ．ここで極大部分群とは，G でない部分群の中で包含関係に関して極大なもののことである．この (3) においては p-群の中心は非自明であることを証明なしに用いてよい．

[2] $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し，その複素共役を $\overline{\alpha}$ と書く．また虚数単位を i と書く．一意分解整域 $\mathbb{Z}[i]$ について，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}[i]$ の単元 (積に関する可逆元) 全体がなす集合を $\mathbb{Z}[i]^\times$ と書く．$\mathbb{Z}[i]^\times$ を具体的に決定せよ．

(2) 次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) $p \in \mathbb{Z}$ を素数とする．p が $\mathbb{Z}[i]$ の素元となるための必要十分条件は，$x^2 + y^2 = p$ を満たす整数の組 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ が存在しないことである．

(ii) $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ は，$\alpha\overline{\alpha}$ が $\mathbb{Z}$ の素数になるならば，$\mathbb{Z}[i]$ の素元である．また α が $\mathbb{Z}[i]$ の素元でかつ zu ($z \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{Z}[i]^\times$) の形でないならば，$\alpha\overline{\alpha}$ は $\mathbb{Z}$ の素数である．

(3) 2016 を $\mathbb{Z}[i]$ の中で素元分解せよ．

[3] p を 2 でない素数とし，$\mathbb{F}_p$ を位数 p の有限体とする．また α を巡回群 $\mathbb{F}_p^\times$ の生成元とする．以下の問に答えよ．

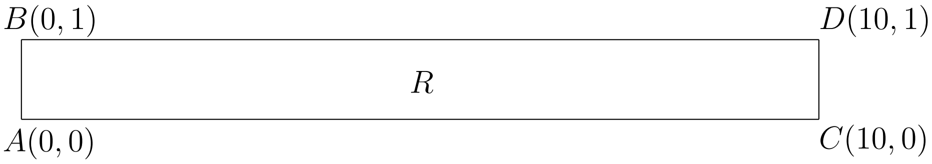
(1) $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = -1$ を示せ．

(2) -1 が $\mathbb{F}_p^\times$ の平方元 (α の偶数べき) となるための必要十分条件は，「p は 4 で割って余り 1」であることを示せ．

(3) $R = \{t \in \mathbb{F}_p : t^2 = -1\}$ とする．写像 $f : \mathbb{F}_p \setminus R \to \mathbb{F}_p^2$ を $t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ で定義する．このとき f の像は $\{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 : x^2 + y^2 = 1,\ (x, y) \neq (-1, 0)\}$ であることを示せ．

(4) $S = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ の元の数を求めよ．

[4] 下図のような図形 $R = [0, 10] \times [0, 1]$ を用意する．



以下の問に答えよ．

(1) 図形 R の辺 $AB = \{0\} \times [0, 1]$ と辺 $CD = \{10\} \times [0, 1]$ とを，すべての $t \in [0, 1]$ に対して点 $(0, t) \in AB$ と点 $(10, t) \in CD$ とを同一視することで貼り合せてできる図形を X とする．このとき整係数ホモロジー群 $H_*(X, \mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) 図形 R の辺 $AB = \{0\} \times [0, 1]$ と辺 $CD = \{10\} \times [0, 1]$ とを，すべての $t \in [0, 1]$ に対して点 $(0, t) \in AB$ と点 $(10, 1-t) \in CD$ とを同一視することで貼り合せてできる図形を Y とする．また Y の中で開円板と同相な近傍をもたない点の全体を Y の境界 ∂Y とする．このとき整係数ホモロジー群 $H_*(\partial Y, \mathbb{Z})$ を求めよ．

(3) (1) の図形 X と (2) の図形 Y とが同相となるかならないかを判定し，その証明を与えよ．

[5]　3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S のパラメータ表示

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

に対し，S の点 $\mathbf{p}$ での u-方向の接ベクトルを $\mathbf{p}_u$，v-方向の接ベクトルを $\mathbf{p}_v$，単位法ベクトルを $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}$ とする．ただし，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のベクトル積を，$|\mathbf{a}|$ は $\mathbf{a}$ の長さを表す．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{n}$ の u-方向の微分 $\mathbf{n}_u$ および v-方向の微分 $\mathbf{n}_v$ を第一基本形式，第二基本形式の係数を用いて，$\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{n}$ の一次結合で表せ．

(2) 曲面 S のガウス曲率を K とするとき，次を示せ．

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$$

(3) xz-平面の円 $(x-2)^2 + z^2 = 1$ を z-軸の周りに回転して得られるトーラス T のガウス曲率を K， 面積要素を dA とするとき，$\displaystyle\int_T K dA = 0$ を示せ．

[6]　以下の問に答えよ．

(1) $y = y(t)$ についての線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)$$

をある区間 I 上で考える．$A(t), B(t)$ は I 上の連続関数とする．初期条件 $y(t_0) = C$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．ただし，$t_0 \in I$ とし，C は実数とする．

(2) $n \neq 0, 1$ を整数とする．$x = x(t)$ についての微分方程式

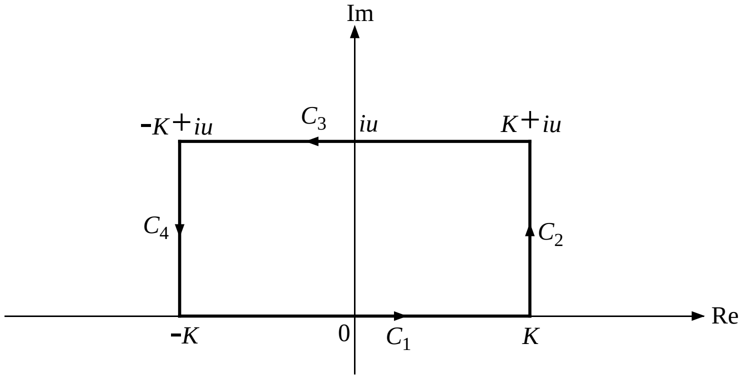
$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^n$$

を区間 $(0, \infty)$ 上で考える．$a(t), b(t)$ は $(0, \infty)$ 上の連続関数とする．$X = x^{1-n}$ と変数変換することで，$X = X(t)$ が満たす微分方程式を導出せよ．

(3) (2) において $a(t) = 1/t, b(t) = 1$ のとき，初期条件 $x(1) = C$ を満たす解 $x(t)$ を求めよ．ただし，C は 0 でない実数とする．

(4) (3) で求めた解 $x(t)$ が区間 $[1, \infty)$ 上で有界になるための n と C に対する必要十分条件を求めよ．

[7]　u を正の実数とする．正の実数 K に対し複素数平面上で下図のように向きづけられた線分 C_1, C_2, C_3, C_4 について $\gamma = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ とする．



以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_\gamma e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{K\to+\infty}\int_{C_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-iux}dx$ を求めよ．必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

[8]　$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数の列とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はほとんどいたるところ 0 に収束するものとする．以下の問に答えよ．

(1) ある正の定数 K に対して $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dx \le K\ (n=1,2,\ldots)$ が成り立つとする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 0$ が成り立つかどうか判定せよ．

(2) ある正の定数 K に対して $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\log(1+|f_n(x)|)\,dx \le K\ (n=1,2,\ldots)$ が成り立つとする．このとき次を示せ．

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{n\ge1}\int_0^1 |f_n(x)|I_{\{|f_n|>\alpha\}}(x)\,dx = 0$$

ただし，$I_{\{|f_n|>\alpha\}}$ は部分集合 $\{x\in[0,1] : |f_n(x)|>\alpha\}$ の定義関数である．

(3) (2) の仮定の下で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 0$ を示せ．

[9] a, b を $a < b$ を満たす実数とし，$n \in \mathbb{N}$ とする．f を閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間で定義された C^{n+1} 級の実数値関数とし，$x_0, \ldots, x_n$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を満たす実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 次数が n 以下の多項式 $P(x)$ で，すべての $j = 0, \ldots, n$ に対して $f(x_j) = P(x_j)$ が成立するようなものがただ一つ存在することを証明せよ．

(2) (1) の $P(x)$ について，任意の $x \in [a,b]$ に対して，ある $\xi \in (a,b)$ が存在して，

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

が成立することを証明せよ．必要があれば，関数

$$g(t) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)(f(t) - P(t)) - (t - x_0)\cdots(t - x_n)(f(x) - P(x))$$

を利用せよ．

(3) $h = \max\limits_{1 \leq j \leq n}(x_j - x_{j-1})$ とおく．このとき，(1) の $P(x)$ について，

$$\|f - P\| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}\|f^{(n+1)}\|$$

が成立することを証明せよ．ただし，$[a,b]$ 上の連続関数 φ に対して

$$\|\varphi\| = \max_{a \leq x \leq b}|\varphi(x)|$$

と定義する．

[10] 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立であり，各 X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ は

$$f_{X_k}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\theta}\exp\left(-\dfrac{x}{k\theta}\right) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

という確率密度関数をもつ分布にしたがっているとする．ただし，$\theta > 0$ とする．以下の問に答えよ．

(1) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ．

(2) (1) の $\hat{\theta}$ が不偏性をもつことを示せ．

(3) (1) の $\hat{\theta}$ の分散を求め，チェビシェフの不等式を用いて $\hat{\theta}$ が一致性をもつことを示せ．