九州大学大学院数理学府
平成27年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] 群 G は元 a, b, c で生成され，$a^2 = b^2 = c^2 = abc = 1$ を満たすものとする．ただし，1 は G の単位元である．このとき以下の問に答えよ.

(1) G は可換群になることを示せ.

(2) G を決定せよ.

(3) G の位数が 4 のとき，G は 4 次対称群 S_4 のある正規部分群と同型であることを示せ.

[2] 以下の問に答えよ.

(1) 可換環のイデアルが素イデアル，極大イデアルであることの定義をそれぞれ述べよ.

(2) $\mathbb{Z}[x]$ は x を不定元とする整数係数の多項式全体のなす環とする．以下に述べる $\mathbb{Z}[x]$ の各イデアルが素イデアルかどうか判定せよ．さらに，素イデアルであるとき極大イデアルかどうか判定せよ.

(i) x^2+1 で生成されるイデアル (x^2+1) .

(ii) 5 と x^2+1 で生成されるイデアル $(5, x^2+1)$.

(iii) 5 と x^3-x^2-2x+1 で生成されるイデアル $(5, x^3-x^2-2x+1)$.

[3] $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{1-\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ を示せ．

(2) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

(3) $\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\beta)$ は $\mathbb{Q}$ 上の体として同型かどうか判定せよ．

[4] $\mathbb{R}^3$ の部分空間 A, B を次で定める．

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) A のオイラー数を求めよ．

(2) 整数係数のホモロジー群 $H_n(A;\mathbb{Z})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ．

(3) A と B は同相でないことを示せ．

[5] $f(x, y)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ を滑らかな関数とし，曲面

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

を考える．このとき以下の問に答えよ．

(1) 曲面 $\mathbf{p}$ の第一基本形式，第二基本形式，面積要素を求めよ．

(2) 曲面 $\mathbf{p}$ のガウス曲率 K を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ のとき，ガウス曲率 K に面積要素をかけて全曲面で積分した値を求めよ．