九州大学大学院数理学府
平成 27 年度修士課程入学試験
専門科目

[5](1) $\chi(A) = 3$ である. $\square$

(2) $H_n(A;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ (n=2) \\ \{0\} \ (n \neq 0, 2) \end{cases}$ である. $\square$

(3) $H_n(B;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0,1,2) \\ \{0\} \ (n \neq 0,1,2) \end{cases}$ である.

従って, $H_2(A;\mathbb{Z})$ と $H_2(B;\mathbb{Z})$ は同型でないので A と B は同相でない. $\square$

[7](1) $f(z)=\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ とおく.
f は $z\neq i\pi$ 正則であり, $z=i\pi$ で 1 位の極を持つ.
留数定理より

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(R)}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz&=2\pi i\mathrm{Res}(f;i\pi)\\&=-2\pi ie^{ia\pi}\end{aligned}$$

である. □

(2) $I_3(R)$ において $z=x+2\pi i$ であるから

$$\begin{aligned}I_3(R)&=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax+2a\pi i}}{1+e^{x+2\pi i}}dx\\&=-e^{i2a\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx\\&=-e^{i2a\pi}I_1(R)\end{aligned}$$

である. □

(3) $R\to\infty$ のとき $\left|\displaystyle\int_{\gamma_2}f(z)dz\right|\to 0,\left|\displaystyle\int_{\gamma_4}f(z)dz\right|\to 0$ である.
(1),(2) の結果を用いると $R\to\infty$ のとき $(1-e^{i2a\pi})I_1(R)=-2\pi ie^{ia\pi}$ であるので

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx&=2\pi i\frac{e^{ia\pi}}{e^{i2a\pi}-1}\\&=\pi\frac{2i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}\\&=\frac{\pi}{\sin a\pi}\end{aligned}$$

である. □