九州大学大学院数理学府
平成 28 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1)

$$\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ -2 & -1 & -x \end{vmatrix} = -(4-x)(1-x)x + 1 + 2(1-x) - x$$
$$= (3-x)(1-x)^2$$

従って, A の固有値は 1,3 である.

また,1 の固有空間 $W(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, 3 の固有空間 $W(3) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. $\square$

(2) $B = P^{-1}AP$ をみたす正則行列 P が存在することは, A と B が同じジョルダン標準形を持つことと同値である.

E を単位行列とすると $\dim \mathrm{Ker}(A-E) = 1$ であるので, A のジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ である.

また, $B - E$ に行基本変形を施すと $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

$a = -2$ のとき $\dim \mathrm{Ker}(B-E) = 2$ であり B のジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となるので $B = P^{-1}AP$ をみたす正則行列 P は存在しない.

$a \neq -2$ のとき $\dim \mathrm{Ker}(B-E) = 1$ であり B のジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となるので $B = P^{-1}AP$ をみたす正則行列 P が存在する. 以上により, 求める a の条件は $a \neq -2$ である. $\square$

[2](1) V は S から生成されるので, S が一次独立であることを示せばよい.

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)+c_4f_4(x)=0 \ (*)$$

とすると $(*)$ において $x=0,\frac{\pi}{2}$ のときを考えると

$$\begin{aligned} c_1+c_3&=0 \\ (-1)^mc_1-(-1)^mc_3 \ &=0 \end{aligned}$$

従って, $c_1=c_3=0$ である.
また, $(*)$ の両辺を x で微分して

$$-2mc_1f_2(x)+2mc_2f_1(x)-(2m-1)c_3f_4(x)+(2m-1)c_4f_3(x)=0 \ (**)$$

$(**)$ において $x=0,\frac{\pi}{2}$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 2mc_2+(2m-1)c_4&=0 \\ 2m(-1)^mc_1-(2m-1)(-1)^mc_3&=0 \end{aligned}$$

従って, $c_2=c_4=0$ である.
よって, S は一次独立であり, V の基底である. $\square$
(2)

$$\begin{aligned} Df_1&=-2mf_2 \\ Df_2&=2mf_1 \\ Df_3&=-(2m-1)f_4 \\ Df_4&=(2m-1)f_3 \end{aligned}$$

であるから, D の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 2m & 0 & 0 \\ -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-1 \\ 0 & 0 & -2m+1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{aligned} Tf_1&=(-1)^mf_1 \\ Tf_2&=(-1)^mf_2 \\ Tf_3&=(-1)^mf_4 \\ Tf_4&=(-1)^{m-1}f_3 \end{aligned}$$

であるから, T の表現行列は $\begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{m-1} \\ 0 & 0 & (-1)^m & 0 \end{pmatrix}$ である. $\square$

(3) 与えられた式の左辺の線型写像の表現行列は

$$\begin{pmatrix} -(-1)^m & 2m & 0 & 0 \\ -2m & -(-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-1-(-1)^{m-1} \\ 0 & 0 & -2m+1-(-1)^m & 0 \end{pmatrix}$$

である.

(i) $m=1$ のとき, 求める $h \in V$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので, $h(x) = \dfrac{1}{5}\cos 2x + \dfrac{2}{5}\sin 2x + \alpha\cos x + \beta\sin x$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ である.

(ii) $m \neq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -(-1)^m & 2m & 0 & 0 \\ -2m & -(-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-1-(-1)^{m-1} \\ 0 & 0 & -2m+1-(-1)^m & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{m-1}}{1+4m^2} \\ \frac{2m}{1+4m^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, 求める $h \in V$ は $h(x) = \dfrac{(-1)^{m-1}}{1+4m^2}\cos 2mx + \dfrac{2m}{1+4m^2}\sin 2mx$ である. $\square$

[3](1) $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ より 0 でない実数 x に対して

$$\begin{aligned} f(x) &\leq (c_1 {a_3}^x + c_2 {a_3}^x + c_3 {a_3}^x)^{\frac{1}{x}} \\ &= a_3 \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (c_1 {a_1}^x + c_2 {a_1}^x + c_3 {a_1}^x)^{\frac{1}{x}} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

従って, $a_1 \leq f(x) \leq a_3$ が成り立つ. □

(2) $f(x) > 0$ であるから対数をとると

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \frac{\log(c_1 {a_1}^x + c_2 {a_2}^x + c_3 {a_3}^x)}{x} \\ &= \frac{\log(c_1 {a_1}^x + c_2 {a_2}^x + c_3 {a_3}^x) - \log(c_1 {a_1}^0 + c_2 {a_2}^0 + c_3 {a_3}^0)}{x - 0} \\ &\to \frac{d}{dx} \log(c_1 {a_1}^x + c_2 {a_2}^x + c_3 {a_3}^x)|_{x=0} \ (x \to 0) \\ &= \log {a_1}^{c_1} {a_2}^{c_2} {a_3}^{c_3} \end{aligned}$$

従って, $\lim_{x \to 0} f(x) = {a_1}^{c_1} {a_2}^{c_2} {a_3}^{c_3}$ である. □

(3) $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ より

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} a_3 \left(c_1 \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^x + c_2 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^x + c_3 x \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= a_3 \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} a_1 \left(c_1 + c_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^x + c_3 \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{a_1}{\left(c_1 + c_2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x + c_3 \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}}} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

である. □

[4](1) $R>1$ を定数として

$$\left|\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right| = 2\int_0^R e^{-x^2}dx = 2\int_0^1 e^{-x^2}dx + 2\int_1^R e^{-x^2}dx$$
$$\le 2\int_0^1 e^{-x^2}dx + 2\int_1^R xe^{-x^2}dx = 2\int_0^1 e^{-x^2}dx + \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{R^2}}\right)$$
$$< 2 + \frac{1}{e}$$

であるので, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ は収束する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+cx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{c}{2})^2+\frac{c^2}{4}}dx$$
$$= e^{\frac{c^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

であるので, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+cx}dx$ も収束する. □

(2) $u=x+y, v=x-y$ とおく.
変数変換の Jacobian を計算すると

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2$$

である.

$$D = \{(u,v)\in\mathbb{R}|v\ge 1\}$$

であるので

$$\iint_D e^{-x^2+2xy-y^2+ax+by}dxdy = \iint_D e^{-(x-y)^2+\frac{a-b}{2}(x-y)+\frac{a+b}{2}(x+y)}dxdy$$
$$= -2\left(\int_1^{\infty} e^{\frac{a+b}{2}u}du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2+\frac{a-b}{2}v}dv\right)$$

(1) の結果を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2+\frac{a-b}{2}v}dv$$

は収束するので

$$\int_1^{\infty} e^{\frac{a+b}{2}u}du$$

が収束する条件を求めればよい.
(i) $a+b=0$ のとき $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{\frac{a+b}{2}u}du$ は発散する.
(ii) $a+b\ne 0$ のとき

$$\int_1^R e^{\frac{a+b}{2}u}du = \frac{2}{a+b}\left(e^{\frac{a+b}{2}} - e^{\frac{a+b}{2}R}\right)$$

であるから, $a+b<0$ のとき $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{\frac{a+b}{2}u}du$ は収束する.
以上により, $a+b<0$ が求める条件である. □