# 九州大学大学院数理学府
# 平成18年度修士課程入学試験
# 数学専門科目問題(数学コース)

**注意**
- 問題[1][2][3][4][5][6][7][8][9]の中から2題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること.
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

**[1]** $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ とおく.

(1) $G$ は行列の乗法に関して群をなすことを示せ.

(2) $G$ の中心 $Z = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$ を求めよ.

(3) 商群 $G/Z$ は加法群 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と同型であることを示せ.

**[2]** $p$ を素数とし，$\mathbb{Z}[x]$ を $\mathbb{Z}$ 係数の一変数多項式環とする.

(1) $\mathbb{Z}[x]$ において $p$ で生成されるイデアル $(p)$ は素イデアルであることを示せ.

(2) $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアル $I$ で，$(p) \subset I$ であるものの例を一つあげよ.

(3) $\mathbb{Z}[x]$ のモニックな元

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

（ただし，$i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し $a_i \in \mathbb{Z}$ である）が次の条件をみたすとする：

$p^2$ は $a_0$ を割らないが，$p$ はすべての $a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ を割る.

このとき $f(x)$ は既約であることを示せ.

(4) $\mathbb{Z}[x]$ の元 $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} x^i$ は既約であることを示せ.

**[3]** $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/7}$ とし,

$$\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4,\ \beta = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6,\ \gamma = \zeta + \zeta^6,\ \delta = \zeta^2 + \zeta^5,\ \varepsilon = \zeta^3 + \zeta^4$$

とおく.

(1) $\alpha + \beta,\ \alpha\beta \in \mathbb{Q}$ となることを示せ.

(2) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(3) $\gamma + \delta + \varepsilon,\ \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\gamma,\ \gamma\delta\varepsilon \in \mathbb{Q}$ となることを示せ.

(4) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

**[4]** $(x, y),\ (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$$

により同値関係を定め，この同値関係による商空間を $T^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ とおく．$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を含む同値類を $[x, y] \in T^2$ と書き，$p(x, y) = [x, y]$ で写像 $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ を定める.

次に，$T^2$ 上に

$$[x, y] \simeq [x', y'] \Leftrightarrow [x, y] = [x', y'] \text{ あるいは } [x, y] = [-x', -y']$$

により同値関係を定め，この同値関係による商空間を $X = T^2/\simeq$ とおく．$[x, y] \in T^2$ を含む同値類を $[[x, y]] \in X$ と書き，$\pi[x, y] = [[x, y]]$ で写像 $\pi : T^2 \to X$ を定める.

(1) $p$ を $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ に制限した写像は $T^2$ への連続な全射となり，$\mathring{I} \times \mathring{I}$ に制限した写像は単射となることを示せ．ただし，$I$ は閉区間 $[0, 1]$ を表し，$\mathring{I}$ は開区間 $(0, 1)$ を表す.

(2) $\pi \circ p : \mathbb{R}^2 \to X$ を $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ に制限した写像は $X$ への連続な全射となり，$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$ に制限した写像は単射となることを示せ.

(3) $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ とする.

$$\pi[x, y] = \pi[x', y']$$

となるすべての $[x', y'] \in T^2$ を求めよ．次に，このような点が自分自身（すなわち $[x, y]$）に限るような $T^2$ の点をすべて求めよ.

(4) $X$ がコンパクトになることを示せ.

(5) $X$ が 2 次元球面と同相となることを示せ.