九州大学大学院数理学府
平成25年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース)

注意 ● 問題[1][2][3][4][5][6][7][8][9][10]の中から2題を選択して解答せよ．

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること．

● 以下$\mathbb{N}$は自然数の全体，$\mathbb{Z}$は整数の全体，$\mathbb{Q}$は有理数の全体，$\mathbb{R}$は実数の全体，$\mathbb{C}$は複素数の全体を表す．

[1] pを奇素数とする．

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p \\ 2 & 3 & \cdots & p & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p \\ p & p-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

をp次対称群S_pの元とする．a, bで生成されるS_pの部分群をGとおく．以下の問に答えよ．

(1) a, bの位数を求めよ．

(2) $bab^{-1} = a^{-1}$を示せ．

(3) Gの位数を求めよ．

(4) Gの部分群をすべて求めよ．また，正規部分群であるかどうか調べよ．

(5) Gの自己同型群$\mathrm{Aut}(G)$の位数を求めよ．

[2] F を体とする．また，複素数体 $\mathbb{C}$ 内の x^2+x+1 の一つの根を ω と書き，環 $R=\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega \mid a,\, b\in\mathbb{Z}\}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) F 係数の n 次多項式は，F の中に根を高々 n 個しか持たないことを示せ．

(2) 単元群 $F^\times$ の有限部分群は巡回群であることを示せ．

(3) $p\ (p>3)$ を素数とする． x^2+x+1 が有限体 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の中に根を持つためには，$p\equiv 1 \pmod 3$ であることが必要十分であることを示せ．

(4) 素数 $p\ (p>3)$ が R の素元であるためには，$p\equiv -1 \pmod 3$ であることが必要十分であることを示せ．

[3] 以下の問に答えよ．

(1) 代数学の基本定理を述べよ．

(2) 代数学の基本定理を証明せよ．