九州大学大学院数理学府
平成22年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース数学型)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] G を位数 8 の非可換群とし，e をその単位元とする．以下を証明せよ.

(1) G は位数 8 の元を持たない.

(2) G は位数 4 の元を持つ． 以下，位数 4 の元の一つを a とする.

(3) ある元 $b \in G$ が存在して， G は a, b で生成される.

(4) $bab^{-1} = a^3$.

(5) $b^2 = e$ または $b^2 = a^2$ がなりたつ.

[2] R を単項イデアル整域とする．R の元 r で生成された R のイデアルを (r) と表す．以下の問に答えよ．

(1) $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_m \subset \cdots$ を R のイデアルの増大列とする．このときある自然数 m_0 があって，任意の自然数 $n \geq m_0$ に対し $I_{m_0} = I_n$ が成立することを示せ．

R の元 $a\,(\neq 0)$ は，以下の (i), (ii) の両方をみたすとき，既約元という．(i) a は可逆元でない，(ii) $a = bc$ ならば b か c のどちらかは可逆元である．

(2) a を R の既約元とする．R のイデアル (a) は素イデアルであることを示せ．

(3) R の可逆元でない元 $a\,(\neq 0)$ は，既約元の有限個の積 $p_1 p_2 \cdots p_r$ に分解されること，及びその分解は次の意味で一意的であることを示せ：

$a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$ ならば $r = s$ である．さらに r 次の置換 σ があって，任意の i $(1 \leq i \leq r)$ に対し $(p_i) = (q_{\sigma(i)})$ が成立する．

(4) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は単項イデアル整域か，理由をつけて答えよ．

[3] F を可換体とする．以下の問に答えよ．

(1) F 係数の n 次多項式は F の中に高々 n 個しか根を持たないことを示せ．

(2) $F^\times$ を零元以外の F の元からなる乗法群とする．$F^\times$ の有限部分群は巡回群であることを示せ．

(3) F が標数 p の有限体のとき，その位数は p^d $(d \in \mathbb{N})$ であること，及び F は $x^{p^d} - x$ の根の集合であることを示せ．

(4) 特に F が有限体 $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ のとき，$f(x) = x^{16800} - 1 \in \mathbb{F}_7[x]$ の最小分解体を E とする．拡大次数 $[E : \mathbb{F}_7]$ を求めよ．