九州大学大学院数理学府
平成17年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ．

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $a,\ b$ を実数，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を実数列とする．

(1) 命題「数列 $\{a_n\}$ は a に収束する．」とその否定命題を ε-N 論法で述べよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ を証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$ を証明せよ．

[2] 単位行列を I とする．n 次の直交行列のうち，行列式の値が 1 となるもの全体の集合を $\mathrm{SO}(n)$ と書く：

$\mathrm{SO}(n) = \{A \,|\, A$ は実数を成分とする n 次の正方行列で ${}^tAA = A\,{}^tA = I, \det A = 1\,\}$.

(1) どんな行列 $T \in \mathrm{SO}(2)$ に対しても，ある実数 θ が存在して

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．

(2) 行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ で，その成分に 0 となるものが一つもないものを，具体的に一つあげよ．

(3) 行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ の固有値の絶対値は 1 であることを示せ．さらにその固有値の少なくとも一つは 1 であることを証明せよ．

(4) 行列 $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ が，固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているならば $AB = BA$ を満たすことを証明せよ．

(5) 逆に行列 $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ が，$AB = BA$ を満たすならば，固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているか？ 正しければ証明をし，誤りであるならば反例をあげよ．

[3]

(1) (i) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数を計算せよ．

(ii) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して不等式

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \sqrt{1 - x^n + x^{2n}}\, dx < \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 次の重積分

$$\iiiint_V xw \; dxdydzdw$$

の値を求めよ．ただし

$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ 0 \leq w \leq 1\}$

とする．

[4] 二つの n 次複素正方行列 $A,\ B$ が相似であるとは，$P^{-1}AP = B$ となる n 次複素正方正則行列 P が存在することと定義し，$A \sim B$ と書く．

(1) $\sim$ は n 次複素正方行列全体の集合の上の同値関係であることを証明せよ．

(2) 各 A_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ を次で定義される 5 次正方行列とする．どの A_i とどの A_j が相似になるかを決定せよ．また相似になるときはそれぞれの場合に $P^{-1}A_iP = A_j$ となる正則行列 P を具体的に与えよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0\\ 0&0&2&1&0\\ 0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&2 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 2&1&1&1&1\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0\\ 0&0&2&2&0\\ 0&0&0&2&3\\ 0&0&0&0&2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 0&0&2&1&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{bmatrix},\quad A_5 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 1&0&0&0&2 \end{bmatrix}.$$

[5] 次の楕円の周の長さを小数点以下第二位まで（切捨てで）求めよ．

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a = 1.02,\ b = 1).$$