九州大学大学院数理学府
平成30年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．

• 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] V を実数を係数とする高々2次の多項式からなるベクトル空間とする．写像 $T : V \to V$ を

$$T(f(x)) = f(2x+3) + f'(x)$$

で定めるとき，以下の問に答えよ．

(1) T は線形変換であることを示せ．

(2) T の固有値をすべて求めよ．

(3) T の各固有値についてそれぞれの固有空間を求めよ．

[2]　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ と A により定まる $\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ の恒等変換とし，$T_A - I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の核空間と像空間をそれぞれ V, W とおく：

$$V = \mathrm{Ker}(T_A - I), \quad W = \mathrm{Im}(T_A - I).$$

このとき V と W の次元を求めよ．

(2) 直和分解 $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ を示せ．

(3) T_A の W への制限は W の線形変換になることを示せ．また W の適当な基底をとって，T_A の W への制限のその基底による表現行列を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U が $T_A(U) \subset U$ と $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$ を満たすならば，$U = W$ となることを示せ．

[3] 実数 $a \geq b \geq c > 0$ に対し

$$A(a,b,c) = \frac{a+b+c}{3} \quad (\text{相加平均})$$
$$B(a,b,c) = \sqrt[3]{abc} \quad (\text{相乗平均})$$
$$C(a,b,c) = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \quad (\text{調和平均})$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$A(a,b,c) \geq B(a,b,c)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$B(a,b,c) \geq C(a,b,c)$$

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c$$
$$a_{n+1} = A(a_n, b_n, c_n),\ b_{n+1} = B(a_n, b_n, c_n),\ c_{n+1} = C(a_n, b_n, c_n) \quad (n \geq 1)$$

によって定義する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示せ．また $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であることを示せ．

(4) (3) の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ極限値に収束することを示せ．

[4] $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする．以下の問に答えよ．

(1)

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty, \ \int_0^\infty |f'(x)|dx < \infty$$

を満たしているとする．このとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

を示せ．

(2)

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty, \ \int_0^\infty |f'(x)|^2 dx < \infty$$

を満たしているとする． このとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

を示せ．