九州大学大学院数理学府
平成28年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] n を 1 以上の整数とする．G を 2 元 σ, τ で生成され，関係式

$$\sigma^n = \tau^2 = 1, \qquad \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$$

で定義される群とする．また，H を σ で生成される G の部分群とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) G は位数 $2n$ の有限群であることを証明せよ．

(2) $\mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{C}$ の乗法群とする．群準同型 $\chi : H \to \mathbb{C}^\times$ に対し

$$V \ = \ \{\phi : G \to \mathbb{C} \mid \text{任意の } g \in G,\ h \in H \text{ に対し } \phi(hg) = \chi(h)\phi(g)\}$$

とおき，これを自然に $\mathbb{C}$-ベクトル空間とみなす．V の次元を求め，その基底を一組求めよ．

(3) $g \in G$ と $\phi \in V$ に対し $g\phi \in V$ を

$$(g\phi)(x) \ = \ \phi(xg) \qquad (x \in G)$$

により定義すると，写像

$$\rho_g : \ \phi \ \mapsto \ g\phi$$

は V の $\mathbb{C}$-線型自己同型であることを証明せよ．

(4) g がそれぞれ $\sigma,\ \tau,\ \sigma\tau$ である場合に，線型写像 $\rho_g : V \to V$ を (2) で求めた V の基底に関し行列表示せよ．

[2]　$\mathbb{Q}[x,y]$ を x,y を不定元とする有理数係数の多項式環とし，$\mathbb{Q}[t,1/t]$ を不定元 t およびその逆元 $1/t$ で有理数体上生成された環とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Q}[x,y]$ から $\mathbb{Q}[t,1/t]$ への環準同型 φ を $\varphi(x)=t,\ \varphi(y)=1/t$ によって定めるとき，φ は $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ から $\mathbb{Q}[t,1/t]$ への環同型を導くことを示せ．

(2) $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ の環自己同型群を求めよ．

(3) $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ と $\mathbb{Q}[x,y]/(x^2y^2-1)$ は環同型になるか判定せよ．

(4) $\mathbb{Q}[x,y]/(xy-1)$ と $\mathbb{Q}[x,y]/(x^2y^3-1)$ は環同型になるか判定せよ．

[3]　$\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ とし，$K=\mathbb{Q}(\alpha)$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset K$ であることを示せ．

(2) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

(3) K は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であることを示せ．