九州大学大学院数理学府
平成23年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数理学コース数学型)

注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体を表す.

[1] 実2変数関数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2+2xy-y^2$ を考える．f の偏導関数を f_x, f_y で表す．以下の問に答えよ.

(1) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $z=f(x,y)$ の，平面 $y=0$ による切口 C，及び平面 $y=x$ による切口 D の概形を描け.

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

[2] 以下の広義積分 A,B,C を考える.

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\cos(x^2)\cos(y^2)\,dxdy,$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\sin(x^2)\cos(y^2)\,dxdy,$$

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\sin(x^2)\sin(y^2)\,dxdy.$$

以下の問に答えよ.

(1) 広義積分 A,B,C が収束することを示せ.

(2) $A-C$ を求めよ.

(3) $2B$ を求めよ.

(4) A,C を求めよ.

[3] 実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ を考える．ただし $a \neq c$ または $b \neq 0$ とする．このとき $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ とおく．A の固有値を λ_1, λ_2 とするとき，以下の問に答えよ．

(1) λ_1, λ_2 は相異なる実数であることを示せ．

(2) λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とするとき，$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積に関して直交することを示せ．

(3) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を，(2) の固有ベクトルを $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$ となるように正規化したものとする．$\mathbf{x} = \xi\mathbf{u}_1 + \eta\mathbf{u}_2$ とするとき $f(\mathbf{x})$ を ξ, η で表せ．

(4) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ の場合に (3) で正規化した $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に対し $\mathbf{x} = \dfrac{\xi'}{\sqrt{|\lambda_1|}}\mathbf{u}_1 + \dfrac{\eta'}{\sqrt{|\lambda_2|}}\mathbf{u}_2$ とするとき，$f(\mathbf{x})$ を ξ', η' で表せ．

[4] $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を有界な実数列とし，各自然数 n に対して

$$A_n = \{a_m \in \mathbb{R} \mid m \geq n\}, \quad s_n = \sup\, A_n$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\{s_n\}_{n\geq 1}$ は (広義) 単調減少列となり，その極限が存在すること，すなわち

$$\text{各自然数}\, n\, \text{に対して}\, s_n \geq s_{n+1}, \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{が存在する}$$

ことを示せ．以下ではこの極限を $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と書く．

(2) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{無限個の}\, m\, \text{に対して}\, a_m > x\}$ とおく．このとき

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup X$$

となることを示せ．

(3) 有界な実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

となることを示せ．

(4) (3) の不等式において等号は一般には成立しない．反例を具体的に挙げよ．

[5]　$n \in \mathbb{N}$ に対し n 次以下の x の実係数多項式の全体を V_n とする．V_n の元 f, g と実数 c に対して，f と g の「和」および c による「スカラー倍」を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x)$$

によって定義して，V_n を実線形空間とみなす．また，V_n の元のうち，$x = \pm 1$ でゼロになるものの全体を W_n とする：

$$W_n = \{ f \in V_n \mid f(-1) = f(1) = 0 \}$$

以下の問に答えよ．

(1) V_n の基底を一組与えよ．
(2) W_n は V_n の線形部分空間となることを示せ．
(3) W_n の基底を一組与えよ．また，W_n の次元を求めよ．
(4) $f, g \in V_n$ に対して

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

と定義するとき，$(\cdot, \cdot)$ は V_n の内積となることを示せ．
(5) V_3 の上の内積に関する直交基底を一組与えよ．