九州大学大学院数理学府
平成 29 年度修士課程入学試験
専門科目

[5](1) $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0,1) \\ \{0\} \ (n \neq 0,1) \end{cases}$ である. $\square$

(2) $H_n(\partial Y;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \ (n=0,1) \\ \{0\} \ (n \neq 0,1) \end{cases}$ である. $\square$

(3) X と Y は同相でない.

(証明) メビウスの帯の真ん中に沿った円周を取り除いたものは連結であるが

円柱の側面の真ん中に沿った円周を取り除くと非連結である. $\square$

[7](1) $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ は γ 上正則なので Cauchy の積分定理より

$$\int_\gamma e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = 0$$

である. $\square$

(2)

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\right| &= \left|\int_0^u e^{-\frac{1}{2}(K^2+2iKt-t^2)}idt\right| \\ &\leq \int_0^u e^{-\frac{1}{2}K^2}e^{\frac{1}{2}t^2}dt \\ &\to 0 \ (K \to \infty)\end{aligned}$$

従って

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = 0$$

である. $\square$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{C_3} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz &= -\int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2iux-u^2)}dx \\ &= -e^{\frac{1}{2}u^2}\int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{iux}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_4} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\right| &= \left|\int_0^u e^{-\frac{1}{2}(K^2-2iKt-t^2)}idt\right| \\ &\leq \int_0^u e^{-\frac{1}{2}K^2}e^{\frac{1}{2}t^2}dt \\ &\to 0 \ (K \to \infty)\end{aligned}$$

(1),(2) の結果を用いると $K \to \infty$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = e^{\frac{1}{2}u^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-iux}dx$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-iux}dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &= e^{-\frac{1}{2}u^2}\end{aligned}$$

である. $\square$