九州大学大学院数理学府
平成 31 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意
- 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] $a \geq 0$とし，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が対角化できるような a の条件を求めよ．

(3) $n \to \infty$ のとき A^n が収束するための a の条件を求めよ．ただし，行列の列が収束するとは，各成分のなす数列が成分ごとに収束することとする．

[2]　n を自然数とし，$M(n,\mathbb{R})$ を n 次実正方行列全体の集合とする．行列の和と実数によるスカラー倍により，$M(n,\mathbb{R})$ を実ベクトル空間とみる．以下の問に答えよ．

(1) $A \in M(n,\mathbb{R})$ をとり，写像 $f_A : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ を

$$f_A(X) = AX - XA$$

と定義する．f_A は線形写像であることを示せ．

(2) E_{ij} を (i,j) 成分が 1 でその他の成分が 0 であるような n 次正方行列とする．このとき， 核空間 $\mathrm{Ker}\, f_{E_{ij}}$ の次元と，像空間 $\mathrm{Im}\, f_{E_{ij}}$ の次元を求めよ．

(3) 任意の線形写像 $g : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ に対して，ある $A \in M(n,\mathbb{R})$ が存在し

$$g(X) = \mathrm{tr}(AX) \quad (X \in M(n,\mathbb{R}))$$

となることを示せ．

[3] f を区間 $[a,b]$ 上で連続な実数値関数とする．$[a,b]$ 上での $|f(x)|$ の最大値を M としたとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

を示せ．ただし，$a<b$ とする．

[4] $a \in (0,1)$ とするとき，$x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{1 - a^x}{x}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{d^n f}{dx^n}(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ は $x > 0$ において単調減少であることを示せ．

(4) 次の広義積分が収束することを示せ．ただし，$b \in (0,1)$ とする．

$$\int_0^\infty x^{-b}(1 - e^{-1/x})\,dx$$