九州大学大学院数理学府
平成23年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数理学コース数学型)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ.

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] 以下の問に答えよ.

(1) 位数 4 の群はアーベル群であることを証明せよ.

(2) 4 次対称群 S_4 の位数 4 の部分群をすべて求めよ.

(3) 4 次対称群 S_4 の位数 4 の正規部分群をすべて求めよ.

[2] 可換環 A（$A \ni 1$）と，A の非零因子 d に対し，環 B を $B = A[X]/(dX-1)$（すなわち A 上の多項式環 $A[X]$ を多項式 $dX-1$ の生成するイデアル $(dX-1)$ で割った剰余環）と定義する．以下の問に答えよ.

(1) 自然な環準同型 $A \to B$ は単射であることを示せ．(以降，これにより A は B の部分環とみなす．)

(2) 剰余環 A/dA は 0 以外の巾零元を持たないと仮定する．このとき，もし B の元 b が A 上整（すなわち，ある A 係数のモニック多項式 $f(X)$ に対し $f(b) = 0$ となる）ならば $b \in A$ であることを示せ.

[3] $\mathbb{Q}$ の拡大体 $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L_2 = \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$, $L_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \zeta_3, \sqrt[3]{2})$ を考える．ここで ζ_3 は 1 の原始 3 乗根，$\sqrt{2}$ は $X^2 = 2$ の１つの根，$\sqrt[3]{2}$ は $X^3 = 2$ の１つの根である．以下の問に答えよ．

(1) 体 L_1, L_2 の $\mathbb{Q}$ 自己同型群をそれぞれ求めよ．

(2) $L_2/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

(3) 体の拡大 $L_3/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるかどうか，理由をつけて答えよ．

[4] σ を 3 単体とし，その 1 次元以下のすべての辺単体からなる複体を K とする．以下の問に答えよ．

(1) K のオイラー数を求めよ．

(2) K の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ．

(3) 連続写像 $r : \sigma \to |K|$ で，

$$r(a) = a \qquad (\forall a \in |K|)$$

となるものが存在しないことを示せ．ここで $|K| = \bigcup_{\tau \in K} \tau$ は複体 K の定める多面体である．

[5] $R > r > 0$ とする．輪環面 (torus)

$$X(\xi, \eta) = ((R + r\cos\xi)\cos\eta,\ (R + r\cos\xi)\sin\eta,\ r\sin\xi), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 写像 $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が正則な曲面を定義することを示せ．

(2) 曲面 X のガウス曲率 K を求め，K が正，零，負である部分を図で表せ．

(3) 曲面 X の面積要素を $dA = \left| \dfrac{\partial X}{\partial \xi} \times \dfrac{\partial X}{\partial \eta} \right| d\xi\, d\eta$ とし，
$D = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 2\pi,\ 0 \leq \eta \leq 2\pi\}$ とおく．
$\displaystyle\iint_D K\ dA = 0$ を示せ．

(4) 曲面 X 上の曲線

$$\gamma(t) = X(t, 0) = (R + r\cos t,\ 0,\ r\sin t), \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

を弧長パラメータ s を用いて表示せよ．

(5) 曲線 γ が曲面 X 上の測地線であることを示せ．

[6]　M を n 次元 C^∞ 級多様体とし ($n \geq 1$)，$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．以下の問に答えよ．

(1) $p \in M$ のまわりの局所座標系 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{$*$}$$

が成り立つとき，p は f の臨界点であるという．この定義は p のまわりの局所座標系の取り方によらないことを示せ．すなわち，$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ を p のまわりのもう 1 つの局所座標系としたとき，$(*)$ が成り立つならば，

$$\frac{\partial f}{\partial v_j}(p) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

も成り立つことを示せ．

(2) M がコンパクトならば，f は臨界点を 2 つ以上持つことを示せ．

(3) $S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ 上の C^∞ 級関数 $h : S^n \to \mathbb{R}$ を

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}$$

で定める．このとき h はちょうど 2 つの臨界点を持つことを示せ．

[7]　実数値関数 $f(x)$ についての微分方程式

$$f''(x) + \lambda f'(x) + f(x) = A \cos x \tag{☆}$$

について，以下の問に答えよ．ただし λ, A は実定数である．

(1) $\lambda = 1$, $A = 0$ の場合，(☆) の一般解を求めよ．

(2) $\lambda = 0$, $A = 1$ の場合，(☆) の一般解を求めよ．

(3) $\lambda = A = 1$ の場合，(☆) の任意の 2 つの解 $f_1(x), f_2(x)$ に対し

$$\limsup_{x \to \infty} f_1(x) = \limsup_{x \to \infty} f_2(x) < \infty$$

が成り立つことを示せ．

[8] f を単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$ 上の正則関数とする．Δ 内にある f の相異なる零点を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とする．このとき，各零点 a_k（$k = 1, 2, \ldots, n$）について，次をみたす $m_k \in \mathbb{N}$ が存在する：

$$\begin{cases} f^{(m)}(a_k) = 0 & (m = 0, 1, 2, \ldots, m_k - 1) \\ f^{(m_k)}(a_k) \neq 0 \end{cases}$$

ここで $f^{(m)}$ は f の m 階微分を表す．ただし，$f^{(0)} = f$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 各 a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ について，ある開近傍 U_k が存在して，その上で f は次のように表されることを示せ．

$$f(z) = (z - a_k)^{m_k} g_k(z)$$

ここで，g_k は零点を持たない U_k 上の正則関数である．

(2) C を，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ をその内側に含む Δ 内の C^1 級単純閉曲線とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

ただし，C の向きは正とする．

(3) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ は，Δ 上で f に広義一様収束する正則関数の列とする．このとき，十分大きな j に対しては，f_j は Δ 内に少なくとも n 個の相異なる零点をもつことを示せ．

[9] 数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数列

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

について，以下の問に答えよ．

(1) (i) 各 x について，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ を求めよ．
(ii) $0 \leq x \leq n$ において，$e^x f_n(x) \leq 1$ であることを示せ．

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n f_n(x) \cos x \, dx$$