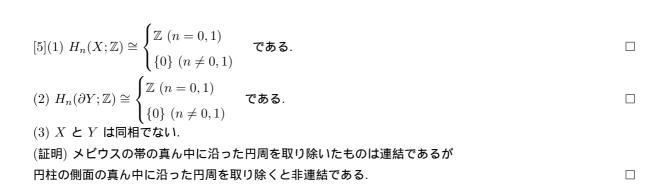
九州大学大学院数理学府 平成 29 年度修士課程入学試験 専門科目



[7](1) $e^{-rac{1}{2}z^2}$ は γ 上正則なので Cauchy の積分定理より

$$\int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$$

である.

(2)

$$\begin{split} \left| \int_{C_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| &= \left| \int_0^u e^{-\frac{1}{2}(K^2 + 2iKt - t^2)} i dt \right| \\ &\leq \int_0^u e^{-\frac{1}{2}K^2} e^{\frac{1}{2}t^2} dt \\ &\to 0 \ (K \to \infty) \end{split}$$

従って

$$\lim_{k \to \infty} \int_{C_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$$

である.

(3)

$$\int_{C_3} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = -\int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2iux - u^2)} dx$$
$$= -e^{\frac{1}{2}u^2} \int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{iux} dx$$

$$\begin{split} \left| \int_{C_4} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| &= \left| \int_0^u e^{-\frac{1}{2}(K^2 - 2iKt - t^2)} i dt \right| \\ &\leq \int_0^u e^{-\frac{1}{2}K^2} e^{\frac{1}{2}t^2} dt \\ &\to 0 \ (K \to \infty) \end{split}$$

(1),(2) の結果を用いると $K \to \infty$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = e^{\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-iux} dx$$

従って

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$
$$= e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

である.