九州大学大学院数理学府
平成26年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から 2 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1]　2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{C}$ 上 2 次の一般線形群 $GL(2, \mathbb{C})$ の部分群を G とする．このとき以下の問に答えよ.

(1) $B^{-1}AB = A^{-1}$ を示せ.

(2) G の位数を求めよ.

(3) G の元で位数 2 のものをすべて求めよ.

(4) G から位数 3 の群への全射準同型写像が存在するかどうか答えよ.

[2] pを素数とする．$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は位数 p の有限体とし，0 以外の $\mathbb{F}_p$ の元全体が乗法によりなす群を $\mathbb{F}_p^\times$ で表す．$M_r(\mathbb{F}_p)$ は成分が $\mathbb{F}_p$ の元からなる $r \times r$-行列全体の集合とする．さらに $A \in M_r(\mathbb{F}_p)$ に対して $|A|$ は A の行列式を表す．行列の乗法に関して，以下の問に答えよ．

(1) $GL_r(\mathbb{F}_p) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_p) : |A| \neq 0\}$ は群であることを示せ．

(2) $SL_r(\mathbb{F}_p) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_p) : |A| = 1\}$ は $GL_r(\mathbb{F}_q)$ の正規部分群であることを示せ．

(3) $GL_r^{(2)}(\mathbb{F}_p) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_p) : |A| \in \mathbb{F}_p^{*,2}\}$ は $GL_r(\mathbb{F}_p)$ の正規部分群であることを示せ．ただし，$\mathbb{F}_p^{*,2} = \{x^2 : x \in \mathbb{F}_p^*\}$ とする．

(4) $GL_r(\mathbb{F}_p)$ と $SL_r(\mathbb{F}_p)$ の位数を決めよ．

(5) $GL_r^{(2)}(\mathbb{F}_p)$ の位数を決めよ．

[3] $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ を位数 11 の有限体とする．0 以外の $\mathbb{F}_{11}$ の元全体が乗法によりなす群を $\mathbb{F}_{11}^\times$ で表し，$\mathbb{F}_{11}[T]$ は 1 変数 T の $\mathbb{F}_{11}$ 上の多項式環を表す．このとき以下の問に答えよ．

(1) $2 \in \mathbb{F}_{11}^\times$ の位数を求めよ．

(2) 多項式 $T^2 - 2$ で生成されるイデアル $(T^2 - 2)$ に対し商環 $K = \mathbb{F}_{11}[T]/(T^2 - 2)$ は体になることを示せ．

(3) K 係数の多項式 $X^3 - 1$ は K 上で 1 次式の積に因数分解できることを示せ．

(4) $\alpha \in K$ を T で代表される元とするとき，K に含まれる 1 の原始 3 乗根を $k\alpha + l$ （ただし k, l は $\mathbb{F}_{11}$ の元）の形で表せ．