九州大学大学院数理学府
平成29年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．

• 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　定数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & b \\ 1 & a & b & b \\ b & b & a & 1 \\ b & 1 & b & a \end{pmatrix}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) A の各行（および各列）の成分の和が等しいことに注意し，A の行列式を求めよ．また A が正則であるための必要十分条件を a, b を用いて表せ．

(2) T_A を A によって定まる $\mathbb{R}^4$ の線形変換，つまり，$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ とする．$a = 1$ のとき，T_A の核 $\mathrm{Ker}\,(T_A)$ の次元と一組の基底を求めよ．

[2]　実数列全体を

$$V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) : x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \in \mathbb{R}\}$$

とする．V の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ とスカラー倍 $c\boldsymbol{x}$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_k+y_k, \ldots) \\ c\boldsymbol{x} &= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_k, \ldots) \end{aligned}$$

と定めて，V にベクトル空間の構造を入れる．

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ に対し，漸化式

$$(*) \qquad x_{n+3} + a_1 x_{n+2} + a_2 x_{n+1} + a_3 x_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たす実数列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ 全体を W とする．以下の問に答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3 \in W$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^1 &= (1, 0, 0, \ldots\ldots) \\ \boldsymbol{x}^2 &= (0, 1, 0, \ldots\ldots) \\ \boldsymbol{x}^3 &= (0, 0, 1, \ldots\ldots) \end{aligned}$$

とするとき，$\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3$ は W の基底であることを示せ．

(3) 線形変換 $T\colon W \to W$ を

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$$

によって定めるとき，基底 $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(4) 実数 λ が T の固有値であるとき，λ に対する固有空間を λ を用いて表せ．

[3] $\dbinom{m}{k}$ は二項係数 ${}_mC_k$ を表すものとする．n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ は収束することを示せ．

(2)
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$
を示せ．また
$$\binom{2n}{n} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$
を示せ．

(3) 任意の $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ に対し $e^{\frac{1}{2}x^2}\cos x \leq 1$ を示せ．また $\cos^{2n} x \leq e^{-nx^2}$ を示せ．

(4) 次の不等式
$$\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$
を示せ．必要ならば $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

[4]　$\mathbb{R}^3$ の点 P が集合 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2yz = 1\}$ を動くとき，点 P と点 $(-2, 1, 1)$ との距離の最小値を求めよ．