九州大学大学院数理学府
平成20年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数学コース)

注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体, $\mathbb{R}$ は実数の全体, $\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1]

(I) 空間内の領域 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$ 上の次の 3 重積分 I を計算しなさい:

$$I = \iiint_D xy\, dxdydz.$$

(II) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) 3 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ で張られる平行六面体の体積 $V(\mathbf{x})$ を x, y, z を用いて表しなさい.

(2) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3;\ |\mathbf{x}| = 1\}$ を単位球面とする. $\mathbf{x}$ が S 上を動くとき $V(\mathbf{x})$ の最大値, および最大値をあたえる点 $\mathbf{x}$ をすべて求めなさい.

[2]

次の行列 A, B について以下の問に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A, B が直交行列で対角化できるかどうか判定しなさい. また, できるときには, 対角化する直交行列を求めなさい.

(2) A, B のうち直交行列で対角化不可能なものがあるときには, その行列が正則行列で対角化できるかどうか判定しなさい. また, できるときには対角化する正則行列を求めなさい.

[3]

(1) $a < b$ とし,

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & (a \leq x \leq b \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

とする. このとき, $f(x)$ は C^1-級関数であることを証明しなさい.

(2) 閉区間 $[c, d]$ 上の連続関数 $F(x)$ は次の性質を持つとする:

$$g(c) = g(d) = 0 \text{ をみたす任意の } C^1\text{-級関数 } g(x) \text{ に対して}$$
$$\int_c^d g(x)F(x)dx = 0.$$

このとき, $F(x)$ は (c, d) 上で恒等的に 0 であることを証明しなさい.

[4]

(1) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ からグラム・シュミット直交化法によりえられる正規直交基底とする. このとき, 内積 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{u}_j)$ は

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_i, \mathbf{u}_i) > 0\,, \\ (\mathbf{a}_i, \mathbf{u}_j) = 0 \quad (i < j \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたすことを示しなさい.

(2) n 次正則行列 A に対して, 直交行列 S と対角成分がすべて正である上三角行列 P が存在して, $A = SP$ と表せることを示しなさい.

(3) 上三角行列 Q が直交行列であるならば, Q は対角行列でありその対角成分は ± 1 であることを示しなさい.

(4) n 次正則行列 A に対する (2) の形での分解 $A = SP$ は一意的であることを示しなさい.

[5]

(1) 以下で定義される $\mathbb{R}$ 上の二つの関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$, $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ の収束は一様収束かどうか調べなさい:

$$f_n(x) = xe^{-nx^2}, \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq n \text{ のとき}), \\ x - n & (n < x \leq n+1 \text{ のとき}), \\ 1 & (x > n+1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{h_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ が $h(x)$ に一様収束するとき, 極限関数 $h(x)$ は連続関数であることを示しなさい.

(3) $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{h_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ が $h(x)$ に一様収束するとき, 次を示しなさい:

$(*)$ $\mathbb{R}$ の任意の収束列 $\{t_n\}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} h_n(t_n) = h\bigl(\lim_{n\to\infty} t_n\bigr)$.

(4) 逆に条件 $(*)$ がみたされているならば, 連続関数列 $\{h_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ は $h(x)$ に一様収束するか. 一様収束するならば証明をあたえ, そうでなければ反例をあげなさい.