九州大学大学院数理学府
平成20年度修士課程入学試験
数学専門科目問題 (数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1]

(I) 次の命題が正しければ証明し, 間違っているならば反例をあたえなさい.

(1) 群 G の指数 2 の部分群は正規部分群である.

(2) N を群 G の正規部分群とする. もし剰余群 G/N が巡回群であれば, G は可換群である.

(3) 群 G の 2 つの元 a, b に対して $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$ が成り立つならば, a と b は可換である. ただし e は単位元とする.

(II) G を

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{と} \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

により行列の積で生成される群として, 次の問に答えなさい.

(1) G の位数を求めなさい.

(2) G の位数 8 の元をすべて求めなさい.

(3) G の位数 8 の部分群をすべて求めなさい.

(4) 6 次対称群 S_6 の部分群で G と同型なものが存在するかどうか判定しなさい.

[2] 可換環 R の 2 つのイデアル $I,\ J$ が互いに素であるとは, $I+J=R$ が成り立つことを意味する. $I_1, I_2, \cdots, I_n$ は R のイデアルであり, どの 2 つも互いに素であるとする.

(1) 任意の $i\ (\in \{1,...,n\})$ に対し, I_i と $\bigcap_{j\neq i} I_j$ は互いに素であることを示せ.

(2) R の任意の n 個の元 $a_1, \cdots, a_n$ に対し,

$$a \equiv a_i \mod I_i \quad (i=1,...,n)$$

をみたす R の元 a が存在することを示せ.

(3) 環同型

$$R/\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} I_i\Big) \cong (R/I_1)\oplus(R/I_2)\oplus\cdots\oplus(R/I_n)$$

が成立することを示せ.

(4) ガウスの整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ のイデアル (15) による剰余環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(15)$ において単元の個数を求めよ.

[3] p を素数とする. また, F を標数 p の体とする.

(1) $\varphi : x \in F \mapsto x^p \in F$ は F の単射自己準同型であることを示せ. さらに F が有限体ならば, φ は F の自己同型であることを示せ.

(2) E を多項式 $f(X)=X^p-X-a \in F[X]$ の最小分解体とする. $f(X)$ の任意の根 $\alpha \in E$ に対して, $F(\alpha)$ は E に一致することを示せ.

(3) (2) の $f(X)$ が $F[X]$ で可約ならば $f(X)$ は F 上で一次式の積に分解することを示せ.

(4) X^p-X-1 は $\mathbb{Q}[X]$ の元として既約であることを示せ.