九州大学大学院数理学府
平成 25 年度修士課程入学試験
専門科目

[3](1) n を自然数とする. 複素係数の n 次方程式 $f(z)=0$ は複素数の中に解を持つ. $\square$

(2) $|f(z)|$ は連続関数なので円板 $|z| \leq R$ 上で最小値を持つ.
$|z| \to \infty$ のとき $|f(z)| \to \infty$ なので R を十分大きくとると, この最小値は複素数全体での最小値と一致する.
$z=z_0$ で最小値をとるとして $f(z_0)=m$ とおく.
(i) $m=0$ のとき $z=z_0$ が方程式の解である.
(ii) $m \neq 0$ のとき $\frac{1}{m}f(z+z_0)$ を改めて $f(z)$ と思うことにより $z=0$ で最小値 $f(0)=1$ をとるとして議論してよい.
このとき,

$$f(z)=1+az^k+bz^{k+1}+cz^{k+2}+\cdots \ (a \neq 0)$$

とおける.
z を定数倍することによって $a=-1$ とできるので $a=-1$ として議論してよい.
$|z| \to +0$ のとき $|bz+cz^2+\cdots| \to +0$ なので $|z|$ が十分小さければ, $|bz+cz^2+\cdots| < \frac{1}{2}$ となる.
よって,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |1-z^k+bz^{k+1}+cz^{k+2}+\cdots| \\
&\leq |1-z^k|+|bz^{k+1}+cz^{k+2}+\cdots| \\
&= |1-z^k|+z^k|bz+cz^2+\cdots| \\
&< |1-z^k|+\frac{z^k}{2}
\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ を十分小さく選び, $z=\varepsilon$ とおくと, この値は, $1-\varepsilon^k+\frac{\varepsilon^k}{2}=1-\frac{\varepsilon^k}{2}<1$ となり最小値が 1 であることに矛盾する. 従って $m \neq 0$ となることはない.
以上により, 代数学の基本定理が示せた. $\square$

[5](1) $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間として R は有界閉集合なのでコンパクトである.
射影 $R \to S$ は連続写像なので S もコンパクトである. $\square$
(2) S は実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ なので

$$H_n(S;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=0) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ (n=1) \\ \{0\}\ (n \neq 0,1) \end{cases}$$

$$\chi(S) = 1$$

である. $\square$
(3) $3\rho_2(K) = 2\rho_1(K)$ とオイラー数の定義式 $\chi(M) = \rho_0(K) - \rho_1(K) + \rho_2(K)$ より

$$\chi(M) = \rho_0(K) - \rho_1(K) + \frac{2}{3}\rho_1(K)$$

であるから

$$\rho_1(K) = 3(\rho_0(K) - \chi(M))$$

頂点数が $\rho_0(K)$ 個のときの辺の数の最大値は $\binom{\rho_0(K)}{2}$ なので

$$\frac{\rho_0(K)(\rho_0(K)-1)}{2} \geq \rho_1(K) = 3(\rho_0(K) - \chi(M))$$

である.
よって, $\rho_0(K)^2 - 7\rho(K) + 6\chi(M) \geq 0$ であるので $\rho_0(K) \geq 4$ より

$$\rho_0(K) \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)})$$

である. $\square$
(4) $\chi(S) = 1$ を (3) の 2 番目の式に代入して $\rho_0(L) \geq 6$ を得る.
(3) の 1 番目の式より $\rho_1(L) = 3(\rho_0(L) - 1) \geq 15$ となるので

$$\rho_2(L) = \frac{2}{3}\rho_1(L) \geq 10$$

である. $\square$