九州大学大学院数理学府
平成 25 年度修士課程入学試験
数学専門科目問題 (数理学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から 2 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] p を奇素数とする.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p \\ 2 & 3 & \cdots & p & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p \\ p & p-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を p 次対称群 S_p の元とする. a, b で生成される S_p の部分群を G とおく. 以下の問に答えよ.

(1) a, b の位数を求めよ.

(2) $bab^{-1} = a^{-1}$ を示せ.

(3) G の位数を求めよ.

(4) G の部分群をすべて求めよ. また，正規部分群であるかどうか調べよ.

(5) G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の位数を求めよ.

[2] F を体とする．また，複素数体 $\mathbb{C}$ 内の x^2+x+1 の一つの根を ω と書き，環 $R=\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega \mid a,\, b\in\mathbb{Z}\}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) F 係数の n 次多項式は，F の中に根を高々 n 個しか持たないことを示せ．

(2) 単元群 $F^\times$ の有限部分群は巡回群であることを示せ．

(3) p $(p>3)$ を素数とする． x^2+x+1 が有限体 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の中に根を持つためには，$p\equiv 1 \pmod 3$ であることが必要十分であることを示せ．

(4) 素数 p $(p>3)$ が R の素元であるためには，$p\equiv -1 \pmod 3$ であることが必要十分であることを示せ．

[3] 以下の問に答えよ．

(1) 代数学の基本定理を述べよ．

(2) 代数学の基本定理を証明せよ．

[4] 3次元ユークリッド空間内の正則曲面 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u,v)$ に対し，その平行曲面 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(u,v)$ を

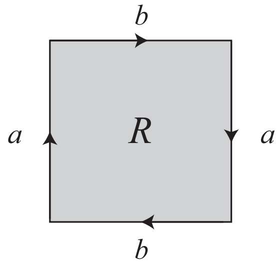
$$\boldsymbol{q}(u,v) = \boldsymbol{p}(u,v) + a\,\boldsymbol{n}(u,v)$$

で定義する．ここで，a は定数であり，また $\boldsymbol{n}(u,v)$ は $\boldsymbol{p}(u,v)$ の単位法ベクトルである．$\boldsymbol{q}(u,v)$ が正則曲面の場合に，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{q}(u,v)$ の第一基本形式の $dudu$ に関する係数を，$\boldsymbol{p}(u,v)$ の第一基本形式および第二基本形式の係数を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{p}(u,v)$ の平均曲率が 0 でない定数 c であり，ガウス曲率が 0 でないとする．このとき，$a = 1/(2c)$ に対する $\boldsymbol{q}(u,v)$ のガウス曲率は $4c^2$ であることを示せ．

[5]　下図の正方形 R の 2 組の辺の対 a, b を矢印の向きにしたがって同一視することによって得られる閉曲面 S を考える．以下の問に答えよ．



(1) S はコンパクトであることを示せ．

(2) S の整係数ホモロジー群 $H_*(S, \mathbb{Z})$ とオイラー標数 $\chi(S)$ を求めよ．

(3) 閉曲面 M に対して，K を M の単体分割，$\rho_i(K)$ を K の i-単体の個数とする．また，$\chi(M)$ を M のオイラー標数とする．

(i) 等式

$$\rho_1(K) = 3\,(\,\rho_0(K) - \chi(M)\,)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 不等式

$$\rho_0(K) \geq \frac{1}{2}\,(\,7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}\,)$$

が成り立つことを示せ．

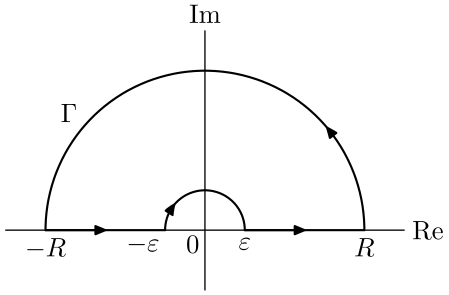
(4) S の単体分割 L において，$\rho_2(L) \geq 10$ が成り立つことを示せ．

[6] R と ε を正の実数とする．以下の問に答えよ．

(1) $C_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$ を反時計回りの曲線とする． $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$ を示せ．

(2) $C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$ を反時計回りの曲線とする． $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ を求めよ．

(3) 下図の閉曲線 Γ 上の複素積分 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ を用いて，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．



(4) $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = 1\}$ 上の複素積分 $\displaystyle\int_L \frac{e^z}{z}\,dz$ は収束することを示せ．

[7] 以下の問に答えよ．

(1) 常微分方程式 $u''(x) - u(x) = \sin x$ の一般解を求めよ．

(2) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数とするとき，常微分方程式

$$u''(x) - u(x) = f(x)$$

の一般解を求めよ．

(3) (2) で求めた解の中に，$\mathbb{R}$ 上有界なものがただ一つ存在することを示せ．

[8] $\varepsilon > 0$ とし，$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$, $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\,\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ とおく．$\mathbb{R}$ 上有界な連続関数 $f(x)$ に対し，関数 $f_\varepsilon(x)$ を

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

と定義する．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ を示せ．

(2) $f_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(x - \varepsilon t)\, dt$ を示せ．また，$f_\varepsilon(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続で，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

を満たすことを示せ．

(3) すべての実数 x に対して，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) $f_\varepsilon(x)$ は C^1級で

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(x) \right| \le \frac{C}{\varepsilon} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

を満たすことを示せ． ただし， C は ε と $f(x)$ によらない定数である．

[9]　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を互いに独立で同じ分布関数 $F(x) = P(X_1 \leq x)$ に従う確率変数とする．このとき，経験分布関数

$$F_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq a) \quad a \in \mathbb{R}$$

に対して以下の問に答えよ．ここで，I は定義関数，すなわち，

$$I(x \leq a) = \begin{cases} 1 & (x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

である．

(1) $F_n(a)$ の平均と分散を求めよ．

(2) $nF_n(a)$ の従う分布を求めよ．

(3) $n \geq 3$ のとき，$P\Big(nF_n(a) \leq n-3\Big)$ を n と $p = F(a)$ のべき乗 p^n, p^{n-1}, p^{n-2} を使って表せ．

[10]　アッケルマン関数 $A(m,n)$ (m, n は非負整数) を，次の (i), (ii), (iii) により再帰的に定義する．

(i) $A(0,n) = n+1$

(ii) $m \neq 0$ のとき $A(m,0) = A(m-1,1)$

(iii) $m \neq 0$ かつ $n \neq 0$ のとき $A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1))$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A(2,1)$ を計算せよ．

(2) 非負整数を成分とする 2 次元ベクトルに対して, 順序 $\gg$ を次のように定義する．

$$(h_1, k_1) \gg (h_2, k_2) \Longleftrightarrow (h_1 > h_2) \text{ または } (h_1 = h_2 \text{ かつ } k_1 > k_2)$$

非負整数 m_1, n_1 を固定するとき，条件 $(m_1, n_1) \gg (m_2, n_2) \gg \cdots$ を満たすベクトル列 $\{(m_i, n_i)\}$ は必ず有限列であることを示せ．

(3) (2) を利用して，任意の非負整数 m, n を引数にもつ $A(m,n)$ の計算が必ず有限ステップで終了することを示せ．ただし，計算は定義 (i), (ii), (iii) のみを用いて実行するものとする．