九州大学大学院数理学府
平成20年度修士課程入学試験
数学専門科目問題 (数学コース)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から2題を選択して解答せよ.

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること.

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1]

(I) 次の命題が正しければ証明し, 間違っているならば反例をあたえなさい.

(1) 群 G の指数 2 の部分群は正規部分群である.

(2) N を群 G の正規部分群とする. もし剰余群 G/N が巡回群であれば, G は可換群である.

(3) 群 G の 2 つの元 a, b に対して $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$ が成り立つならば, a と b は可換である. ただし e は単位元とする.

(II) G を

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad と \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

により行列の積で生成される群として, 次の問に答えなさい.

(1) G の位数を求めなさい.

(2) G の位数 8 の元をすべて求めなさい.

(3) G の位数 8 の部分群をすべて求めなさい.

(4) 6 次対称群 S_6 の部分群で G と同型なものが存在するかどうか判定しなさい.

[2] 可換環 R の 2 つのイデアル $I,\ J$ が互いに素であるとは, $I + J = R$ が成り立つことを意味する. $I_1, I_2, \cdots, I_n$ は R のイデアルであり, どの 2 つも互いに素であるとする.

(1) 任意の $i\ (\in \{1, ..., n\})$ に対し, I_i と $\bigcap_{j \neq i} I_j$ は互いに素であることを示せ.

(2) R の任意の n 個の元 $a_1, \cdots, a_n$ に対し,

$$a \equiv a_i \mod I_i \quad (i = 1, ..., n)$$

をみたす R の元 a が存在することを示せ.

(3) 環同型

$$R/\Big(\bigcap_{1 \leq i \leq n} I_i\Big) \cong (R/I_1) \oplus (R/I_2) \oplus \cdots \oplus (R/I_n)$$

が成立することを示せ.

(4) ガウスの整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ のイデアル (15) による剰余環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(15)$ において単元の個数を求めよ.

[3] p を素数とする. また, F を標数 p の体とする.

(1) $\varphi : x \in F \mapsto x^p \in F$ は F の単射自己準同型であることを示せ. さらに F が有限体ならば, φ は F の自己同型であることを示せ.

(2) E を多項式 $f(X) = X^p - X - a \in F[X]$ の最小分解体とする. $f(X)$ の任意の根 $\alpha \in E$ に対して, $F(\alpha)$ は E に一致することを示せ.

(3) (2) の $f(X)$ が $F[X]$ で可約ならば $f(X)$ は F 上で一次式の積に分解することを示せ.

(4) $X^p - X - 1$ は $\mathbb{Q}[X]$ の元として既約であることを示せ.

[4] 2 次実正方行列全体のなす集合 $M(2;\mathbb{R})$ を, その要素 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2;\mathbb{R})$ と $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ を同一視することにより, ユークリッド空間とみなす.

(1) 一般線形群

$$GL(2;\mathbb{R}) = \{g \in M(2;\mathbb{R});\ \det g \neq 0\}$$

は $M(2;\mathbb{R})$ の部分多様体であることを示しなさい.

(2) 2 次実対称行列全体のなす集合を $S(2;\mathbb{R})$ とおく:

$$S(2;\mathbb{R}) = \left\{X \in M(2;\mathbb{R});\ {}^tX = X\right\}$$

また, I を単位行列とし, 写像 $\phi : M(2;\mathbb{R}) \to S(2;\mathbb{R})$ を $\phi(g) = {}^tgg - I$ と定義する. このとき, $\phi(g)$ の微分写像 $D\phi_g(X)$ $(X \in M(2;\mathbb{R}))$ は

$$D\phi_g(X) = {}^tXg + {}^tgX$$

と表せることを示しなさい.

(3) 直交群

$$O(2) = \left\{g \in M(2;\mathbb{R});\ {}^tgg = I\right\}$$

が $M(2;\mathbb{R})$ の部分多様体であることを示しなさい.

[5] Δ を 3-単体とし, その 4 つの頂点を v_0, v_1, v_2, v_3 とする. 2 つの頂点 v_i, v_j を端点とする Δ の辺を $[v_i\ v_j]$ と表し, $\partial\Delta$ を Δ の境界とする.

(1) $\partial\Delta$ の 4 つの頂点を同一視することにより得られる位相空間を X とする. このとき, X の整係数ホモロジー群を計算しなさい.

(2) さらに X から 3 つの辺 $[v_1\ v_2], [v_2\ v_3], [v_3\ v_1]$ を, この向きに貼り合わせることにより得られる位相空間を Y とする. このとき, Y の整係数ホモロジー群を計算しなさい.

[6] $\mathbb{R}^\times$ を 0 でない実数全体のなす乗法群とする. $n \geq 2$ とし, n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から零ベクトル $\mathbf{0}$ を除いて得られる空間 $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ への $\mathbb{R}^\times$ の作用を

$$y \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (yx_1, \cdots, yx_n), \quad (y \in \mathbb{R}^\times,\ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$$

と定義する. この作用の定める同値関係による商空間 $X_n = (\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{R}^\times$ を考えるとき, 以下の各問に答えなさい.

(1) X_n がコンパクト空間となることを示しなさい.

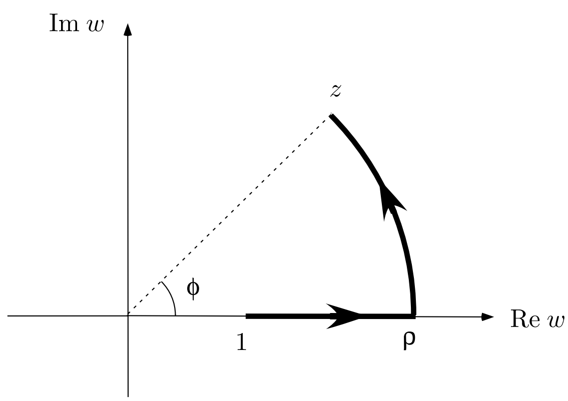
(2) X_2 が円周 S^1 と同相となることを示しなさい.

(3) $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ を $(x_1, \cdots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ と同一視することにより, $X_n \subseteq X_{n+1}$ と見なす. このとき, $X_{n+1} \setminus X_n$ は $\mathbb{R}^n$ と同相であることを示しなさい.

[7] 複素平面から負の実数および 0 を除いて得られる開集合を $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とする. 積分路 $C(1 \to z)$ を以下の図のようにとり, D 上の関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \int_{C(1\to z)} \frac{dw}{w}$$

と定義する.



すなわち, 積分路 $C(1 \to z)$ は, $z = \rho e^{i\phi} \in D$ ($\rho > 0$ かつ $-\pi < \phi < \pi$) とするとき, まず 1 から実軸に沿って ρ まで行き, 次に半径 ρ の円周に沿って角 ϕ の回転で z まで行く道である.

(1) $f(z)$ の実部, 虚部を計算せよ.

(2) $f(z)$ は D 上の正則関数であることを証明し, その導関数を計算せよ.

[8] $I = [0,1]$ 上のルベーグ測度を考える.

(1) I 上の実数値関数 $f(x)$ が可測関数であるということの定義を書け.

(2) q を $0 < q < 1$ をみたす実数とする. I 上の関数 $f_q(x)$ を, $f_q(0) = 1$ および

$$q^{n+1} < x \leq q^n \quad \text{のとき} \quad f_q(x) = \frac{1}{1+q^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

により定義する. 各 q に対して $f_q(x)$ が可測関数であることを, (1) の定義に基づき示せ.

(3) 任意の $x \in [0,1]$ に対して $\displaystyle\lim_{q \to 1-0} f_q(x) = \frac{1}{1+x}$ であることを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{q \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n - q^{n+1}}{1+q^n}$ を求めよ.

[9] 実数値関数 $y(x)$ に対する常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = x^2\, y(x)$$

の解で, 初期条件

$$y(0) = 1, \qquad \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

をみたすものを考えよう.

(1) 解 $y(x)$ を, 形式的ベキ級数の形で求めよ. すなわち

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と書けることを仮定して, 係数 a_n を求めよ.

(2) このベキ級数解の収束半径を求めよ.

(3) $x \to \infty$ での $y(x)$ の様子を調べよう. x が非常に大きければ $y(x)$ が

$$y(x) = x^{\gamma}\, e^{\alpha x^{\beta}} \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \right) \quad (c_0 \neq 0)$$

と書けると仮定して, α と β の値を定めよ.