九州大学大学院数理学府
平成27年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ.

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.

● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] 群 G は元 a, b, c で生成され，$a^2 = b^2 = c^2 = abc = 1$ を満たすものとする．ただし，1 は G の単位元である．このとき以下の問に答えよ.

(1) G は可換群になることを示せ.

(2) G を決定せよ.

(3) G の位数が 4 のとき，G は 4 次対称群 S_4 のある正規部分群と同型であることを示せ.

[2] 以下の問に答えよ.

(1) 可換環のイデアルが素イデアル，極大イデアルであることの定義をそれぞれ述べよ.

(2) $\mathbb{Z}[x]$ は x を不定元とする整数係数の多項式全体のなす環とする．以下に述べる $\mathbb{Z}[x]$ の各イデアルが素イデアルかどうか判定せよ．さらに，素イデアルであるとき極大イデアルかどうか判定せよ.

(i) $x^2 + 1$ で生成されるイデアル $(x^2 + 1)$.

(ii) 5 と $x^2 + 1$ で生成されるイデアル $(5, x^2 + 1)$.

(iii) 5 と $x^3 - x^2 - 2x + 1$ で生成されるイデアル $(5, x^3 - x^2 - 2x + 1)$.

[3] $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{1-\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ を示せ．

(2) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

(3) $\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\beta)$ は $\mathbb{Q}$ 上の体として同型かどうか判定せよ．

[4] $\mathbb{R}^3$ の部分空間 A, B を次で定める．

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) A のオイラー数を求めよ．

(2) 整数係数のホモロジー群 $H_n(A; \mathbb{Z})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ．

(3) A と B は同相でないことを示せ．

[5] $f(x, y)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ を滑らかな関数とし，曲面

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

を考える．このとき以下の問に答えよ．

(1) 曲面 $\mathbf{p}$ の第一基本形式，第二基本形式，面積要素を求めよ．

(2) 曲面 $\mathbf{p}$ のガウス曲率 K を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ のとき，ガウス曲率 K に面積要素をかけて全曲面で積分した値を求めよ．

[6]　X をコンパクト空間，Y をハウスドルフ空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $f(X)$ は Y のコンパクト部分集合であることを示せ．

(2) A が X の閉集合ならば，A はコンパクト部分集合であることを示せ．

(3) B が Y のコンパクト部分集合ならば，B は閉集合であることを示せ．

(4) $f : X \to Y$ が全単射ならば，f は同相写像であることを示せ．

[7]　定数 a は $0 < a < 1$ を満たすとする．実数 $R > 0$ に対して，複素平面上の積分路 $\gamma_1(R)$，$\gamma_2(R)$，$\gamma_3(R)$，$\gamma_4(R)$ を向きもこめて次のように定める．

$\gamma_1(R)$: $-R$ から R を結ぶ線分．

$\gamma_2(R)$: R から $R + 2\pi i$ を結ぶ線分．

$\gamma_3(R)$: $R + 2\pi i$ から $-R + 2\pi i$ を結ぶ線分．

$\gamma_4(R)$: $-R + 2\pi i$ から $-R$ を結ぶ線分．

さらに，上の 4 つの積分路をつなげてできる向きのついた閉曲線からなる積分路を $\Gamma(R)$ と定める．このとき以下の問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_{\Gamma(R)} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle I_j(R) = \int_{\gamma_j(R)} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz \ (j = 1, 3)$ とする．$I_1(R)$ を用いて $I_3(R)$ を表せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$ の値を求めよ．

[8]　次の微分方程式を考える.

$$(*) \qquad y''' + 3y' + x(y'' + y - 1) = 0$$

このとき以下の問に答えよ.

(1) 微分方程式 $z'' + z = x$ の一般解を求めよ.

(2) y は $(*)$ を満たすとする．$Y = y' + xy$ とおいて Y の満たす微分方程式を求めよ.

(3) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$ を満たす $(*)$ の解を求めよ.

[9] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を有限測度空間とする．可測関数 $g : X \to \mathbb{R}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$A_m(g) = \{x \in X \mid |g(x)| \geq m\}$$

と定義する．このとき以下の問に答えよ．

(1) $m \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} m & (x > m) \\ x & (|x| \leq m) \\ -m & (x < -m) \end{cases}$$

で定義する．このとき，任意の $y, z \in \mathbb{R}$ に対して不等式

$$|y - z| \leq |y|\,\chi_m(|y|) + |\varphi_m(y) - \varphi_m(z)| + |z|\,\chi_m(|z|)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\chi_m(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq m) \\ 0 & (x < m) \end{cases}$ とする．

(2) $h : X \to \mathbb{R}$ が可積分関数であれば

$$\lim_{m \to \infty} \int_{A_m(h)} |h(x)| d\mu = 0$$

となることを示せ.

(3) $f : X \to \mathbb{R}$ と $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ を次の条件 (a) と (b) を満たす可測関数とする．

(a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ μ-a.e.

(b) $\displaystyle\lim_{m \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_m(f_n)} |f_n(x)| d\mu = 0$

このとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$ が成り立つことを示せ.

[10]　確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ が互いに独立で，平均と分散が等しい正規分布 $N(\theta, \theta)$ $(\theta > 0)$ に従うとする．ただし，この正規分布の確率密度関数は次で与えられる．

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta}\right\}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) $\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $U = \dfrac{2}{n(n-1)} \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$ は θ^2 の不偏推定量であることを示せ．

(3) θ の最尤推定量，すなわち $L(\theta) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)$ を最大にする統計量 $\widehat{\theta}$ を求めよ．

[11]　数列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ で定義する．このとき以下の問に答えよ．

(1) 以下の関係式を示せ．

(a) $G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \cdots + G_{2n-1} + G_{2n} = G_{2n+2} - 2$

(b) $G_1 - G_2 + G_3 - G_4 + \cdots + G_{2n-1} - G_{2n} = -G_{2n-1}$

(c) $G_1 + G_3 + G_5 + G_7 + \cdots + G_{2n-3} + G_{2n-1} = G_{2n} - 1$

(d) $G_2 + G_4 + G_6 + G_8 + \cdots + G_{2n-2} + G_{2n} = G_{2n+1} - 1$

(2) 自然数を以下の算法に従って，互いに異なる数 G_n $(n \in \mathbb{N})$ の和として表現することを考える．

[算法] 自然数 m を超えない最大の数 G_n をとる．これが m に等しければそのまま $m = G_n$ と表現する．等しくなければ，$m - G_n$ を超えない最大の数 $G_{n'}$ をとる．これを繰り返す．

(i) 上記の算法に従うと $3 = G_3$, $4 = G_3 + G_1$, $5 = G_4$, $6 = G_4 + G_1$ と表現できる．自然数 29, 73 をそれぞれ，互いに異なる数 G_n の和として表現せよ．

(ii) 任意の自然数を，上記の算法に従って互いに異なる数 G_n の和として表現したとき，その和に現れる G_n は，互いに隣り合わないことを示せ．ここで,「互いに隣り合わない」とは，自然数 m が $m = G_{n_1} + \cdots + G_{n_r}$ と表されたとき，任意の $1 \leq i < j \leq r$ に対して $|n_i - n_j| \neq 1$ が成り立つことをいう．

(iii) 任意の自然数を，互いに異なりかつ互いに隣り合わない数 G_n $(n \in \mathbb{N})$ の和によって表現する．この表現は，上記の算法による以外にはありえないことを示せ．