九州大学大学院数理学府
平成29年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] p を素数とする．以下の問に答えよ．

(1) 位数が p の群は巡回群であることを証明せよ．

(2) $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ を和を演算とするアーベル群とする．このとき G の部分群がいくつあるかを答えよ．

(3) n を自然数とする．位数 p^n の群 G の極大部分群は位数が p^{n-1} であることを示せ．ここで極大部分群とは，G でない部分群の中で包含関係に関して極大なもののことである．この (3) においては p-群の中心は非自明であることを証明なしに用いてよい．

[2] $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し，その複素共役を $\overline{\alpha}$ と書く．また虚数単位を i と書く．一意分解整域 $\mathbb{Z}[i]$ について，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}[i]$ の単元 (積に関する可逆元) 全体がなす集合を $\mathbb{Z}[i]^\times$ と書く．$\mathbb{Z}[i]^\times$ を具体的に決定せよ．

(2) 次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) $p \in \mathbb{Z}$ を素数とする．p が $\mathbb{Z}[i]$ の素元となるための必要十分条件は，$x^2 + y^2 = p$ を満たす整数の組 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ が存在しないことである．

(ii) $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ は，$\alpha\overline{\alpha}$ が $\mathbb{Z}$ の素数になるならば，$\mathbb{Z}[i]$ の素元である．また α が $\mathbb{Z}[i]$ の素元でかつ zu $(z \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{Z}[i]^\times)$ の形でないならば，$\alpha\overline{\alpha}$ は $\mathbb{Z}$ の素数である．

(3) 2016 を $\mathbb{Z}[i]$ の中で素元分解せよ．

[3] p を 2 でない素数とし，$\mathbb{F}_p$ を位数 p の有限体とする．また α を巡回群 $\mathbb{F}_p^\times$ の生成元とする．以下の問に答えよ．

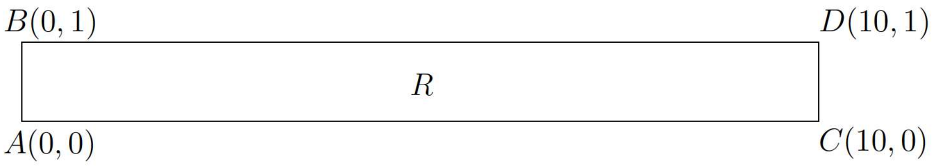
(1) $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = -1$ を示せ．

(2) -1 が $\mathbb{F}_p^\times$ の平方元 (α の偶数べき) となるための必要十分条件は，「p は 4 で割って余り 1」であることを示せ．

(3) $R = \{t \in \mathbb{F}_p : t^2 = -1\}$ とする．写像 $f : \mathbb{F}_p \setminus R \to \mathbb{F}_p^2$ を $t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ で定義する．このとき f の像は $\{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 : x^2 + y^2 = 1,\ (x, y) \neq (-1, 0)\}$ であることを示せ．

(4) $S = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ の元の数を求めよ．

[4] 下図のような図形 $R = [0, 10] \times [0, 1]$ を用意する．



以下の問に答えよ．

(1) 図形 R の辺 $AB = \{0\} \times [0, 1]$ と辺 $CD = \{10\} \times [0, 1]$ とを，すべての $t \in [0, 1]$ に対して点 $(0, t) \in AB$ と点 $(10, t) \in CD$ とを同一視することで貼り合せてできる図形を X とする．このとき整係数ホモロジー群 $H_*(X, \mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) 図形 R の辺 $AB = \{0\} \times [0, 1]$ と辺 $CD = \{10\} \times [0, 1]$ とを，すべての $t \in [0, 1]$ に対して点 $(0, t) \in AB$ と点 $(10, 1-t) \in CD$ とを同一視することで貼り合せてできる図形を Y とする．また Y の中で開円板と同相な近傍をもたない点の全体を Y の境界 ∂Y とする．このとき整係数ホモロジー群 $H_*(\partial Y, \mathbb{Z})$ を求めよ．

(3) (1) の図形 X と (2) の図形 Y とが同相となるかならないかを判定し，その証明を与えよ．