2019 年 (令和元年) 九大数理 基礎

(もっ・ω・さん)*1brother

間違っているかもしれないので，自己責任でご利用下さい．また，正しい解答やこっちの方が速く解けるとかありましたらご連絡下さい．

● 以下，$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ は自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す．

$\boxed{1}$ A を次の 3 次正方行列とする．

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ．

(1) ${}^tPAP$ が対角行列となるような 3 次直交行列 P と ${}^tPAP$ を求めよ．ただし，行列 X に対し，${}^tX$ は X の転置行列を表す．

(2) 三次元列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ に対し，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y},\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_A={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$$

とおく．$\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 上で定義された関数

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_A}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$$

の最大値と最小値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す．

解答

(1) 単位行列を $I\in M(3,\mathbb{R})$ とおく．A の固有値 $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，特性多項式は次を満たす．

$$\begin{aligned}0&=\det(A-\lambda I)\\&=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\\&=\lambda^3-3\lambda-2\\&=(\lambda+1)^2(\lambda-2)\end{aligned}$$

よって，A の固有値は $\lambda=-1,2$ である.A の固有値 λ が持つ固有ベクトルを p_λ とおくと，

$$p_{-1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

である．$\mathbb{R}^3$ に標準内積を入れて，$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を直交化すると，以下の正規直交基底が得られる：

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

そこで, $P:=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ と定める．P は, 定め方から直交行列で, ${}^tPAP=\mathrm{diag}[-1,-1,2]$ を満たす．したがって，所要の直交行列 P は $\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}$ であり，${}^tPAP=\underline{\mathrm{diag}[-1,-1,2]}$ となる． □

(2) $\mathbb{R}^3$ に標準的なノルム $\|\cdot\|$ を入れる．各 $x\in\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$f(x)=(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|},\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|})_A=f(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|})$ となる．よって，$\mathrm{Im}f=f(S^2)$ である．ただし，$S^2\subset\mathbb{R}^3$ は球面を表す．$S^2\subset\mathbb{R}^3$ はコンパクトで，f は連続だから，$\mathrm{Im}f$ は最大値と最小値を持つ．

(1) で求めた直交行列 P について，作用 $S^2\ni\boldsymbol{u}\mapsto{}^tP\boldsymbol{u}\in S^2$ は推移的である．

そのため，$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=:\boldsymbol{u}\in S^2$ に対して f の最大値と最小値を求める問題は,

*1 Twitter はこちら

$$g\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = g(\boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{u}, \mathrm{diag}[-1,-1,2]\boldsymbol{u}) = -a^2 - b^2 + 2c^2$$

の最大値と最小値を求める問題に帰着する．$F(a,b,c,\lambda) := -a^2 - b^2 + 2c^2 + \lambda(a^2+b^2+c^2-1)$ とおくと，Lagrange の乗数法によって，g の最大値または最小値を取る点 $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{cases} F_a = 0 \\ F_b = 0 \\ F_c = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} (\lambda-1)a_0 = 0 \\ (\lambda-1)b_0 = 0 \\ (2\lambda+1)c_0 = 0 \\ a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1 \end{cases}$$

したがって，$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ の候補は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ ただし，$\theta \in [0, 2\pi)$. $g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm1 \end{pmatrix} = 2, g\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$=-1.

以上より，f の最大値は $\underline{2}$ 最小値は $\underline{-1}$. □

$\boxed{2}$ 次の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}$ 上の 3 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$の 1 次元部分空間 V_1で，$f(V_1) \subset V_1$となるものをすべて求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$の 2 次元部分空間 V_2で，$f(V_2) \subset V_2$となるものがただ一つ存在することを示し，その基底を与えよ．

(3) 自然数 n に対し，A^{6n} を求めよ．

解答

単位行列を $I \in M(3, \mathbb{R})$ とおく．A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，特性多項式は次を満たす．

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & -8 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2 - \lambda + 1) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda+\omega)(\lambda+\omega^2) \end{aligned}$$

ただし，$\omega := \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおいた．A の固有値 λ は $-2, -\omega, -\omega^2$ である．
A の固有値 λ が持つ固有ベクトルを p_λ とおくと，

$$p_{-2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_{-\omega} = \begin{pmatrix} \omega+2 \\ \omega+1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad p_{-\omega^2} = \begin{pmatrix} \omega^2+2 \\ \omega^2+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ただし，$p_{-\omega}$ は単因子論的に次のようにして求めた：

$$\begin{pmatrix} -6+\omega & 5 & -8 \\ -1 & 1+\omega & -2 \\ 3 & -2 & 4+\omega \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1-\omega & 2 \\ \omega & -1-6\omega & 4 \\ 0 & 1+3\omega & \omega-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2\omega & \omega \\ \omega & -3\omega & \omega+2 \\ 0 & 1+3\omega & \omega-2 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbb{R}^3$の 1 次元部分空間 V_1は $\boldsymbol{x} \in V_1$を用いて $V_1 = <\boldsymbol{x}>_{\mathbb{R}}$ と表される．この表示は $\boldsymbol{x} \in V_1$の取り方によらずwell-defined である．そこで，$\boldsymbol{x_0} \in V_1$ を fix. このとき，

$$\begin{aligned} 「f(V_1) \subset V_1」 &\leftrightarrow 「{}^{\exists}\lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t.}(A\boldsymbol{x_0} =) f(\boldsymbol{x_0}) = \lambda \boldsymbol{x_0}」 \\ &\leftrightarrow 「V_1 \text{は } A \text{ の 1 次元固有空間}」 \end{aligned}$$

したがって，$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ □

(2) $U := \begin{pmatrix} -2 & \omega+2 & \omega^2+2 \\ 0 & \omega+1 & \omega^2+1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．$U^{-1}AU = \mathrm{diag}[-2, -\omega, -\omega^2]$ を満たす．

このとき，列ベクトル $\begin{pmatrix} 2\omega+4 \\ 2\omega+2 \\ -2 \end{pmatrix}$ の実部と虚部に注目して $P := \begin{pmatrix} -2 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ であり，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[-2, R(\frac{\pi}{3})] =: D$ となる．

ただし，$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおいた．

よって，$f_P(\boldsymbol{x}) := P\boldsymbol{x}, f_D(\boldsymbol{x}) := D\boldsymbol{x}$ とおくと，次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f_D"] \arrow[d, "f_P"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\wr"', "f_P"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

したがって，この可換図式より，$f_D(V_2') \subset V_2'$を満たす 2 次元部分空間 V_2'が一意に存在することを示せば十分である．D の回転行列となっている部分に注目すれば，このような V_2'は

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ に限る．これでV_2の存在とその一意性は示された．再び可換図式を用いると，

$$P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\ P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$$ なので，V_2の基底として $\underline{\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$ が与えられる． □

(3) 自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}P^{-1}A^{6n}P &= (P^{-1}AP)^{6n}\\ &= \mathrm{diag}[-2, R(\frac{\pi}{3})]^{6n}\\ &= \mathrm{diag}[(-2)^6, R(2\pi)]^n\\ &= \mathrm{diag}[2^{6n}, 1, 1]\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\underline{A^{6n}} &= P\mathrm{diag}[2^{6n}, 1, 1]P^{-1}\\ &= \underline{\begin{pmatrix}2^{6n+1} & -2^{6n+1}+2 & 2^{6n+1}-2\\ 0 & 1 & 0\\ -2^{6n}+1 & 2^{6n}-1 & -2^{6n}+2\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

□

$\boxed{3}$

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ が成り立つとする．以下の問に答えよ．

(1) 部分和を $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ とする．任意の自然数 N と任意の実数 r に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{N} a_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{N} s_n r^n + s_N r^{N+1}$$

(2) $0 < r < 1$ なる任意の実数 r に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ は収束し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$$

(3) $\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = 0$ を示せ．

解答

(1) 以下のように式変形ができる．

$$\begin{aligned}
\underline{(1-r)\sum_{n=1}^{N} s_n r^n + s_N r^{N+1}} &= \{s_1 r + \sum_{n=1}^{N-1}(s_{n+1}-s_n) r^{n+1} - s_N r^{N+1}\} + s_N r^{N+1} \\
&= s_1 r + \sum_{n=1}^{N-1}(s_{n+1}-s_n) r^{n+1} \\
&= a_1 r + \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} r^{n+1} \\
&= \underline{\sum_{n=1}^{N} a_n r^n}
\end{aligned}$$

□

(2) 任意に $r \in \mathbb{R}$ with $0 < r < 1$ をとる．$\lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ だから，

$^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t. $|s_n| \leqq 1$ for $^{\forall}n \geqq N$.このとき，$M := \sum_{n=1}^{N-1} |s_n r^n|$ とおく．$N' \to +\infty$ に対して，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N'} |s_n r^n| &= \sum_{n=1}^{N-1} |s_n r^n| + \sum_{n=N}^{N'} |s_n r^n| \\
&= M + \sum_{n=N}^{N'} |s_n| r^n \\
&\leqq M + \sum_{n=N}^{N'} r^n \\
&\leqq M + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \\
&= M + \frac{r}{1-r} < +\infty
\end{aligned}$$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ は絶対収束する．そのため，$\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ は収束する．$s_N, r^{N+1} \to 0$ as $N \to \infty$ だから，(1) で示した等号より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ は収束して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$$

□

(3) $^{\forall}\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{N\to\infty} s_N = 0$ より，$^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t. $|s_n| < \varepsilon$ for $^{\forall}n \geqq N$.

$\sum_{n=1}^{N-1} |s_n|(r^n - r^{n+1}) \to 0$ as $r \to 1-0$ だから，$0 < {}^{\exists}r_0 < 1$ s.t. $\sum_{n=1}^{N-1} |s_n|(r^n - r^{n+1}) < \varepsilon$ for $r_0 < {}^{\forall}r < 1$.$^{\forall}r \in \mathbb{R}$ with $r_0 < {}^{\forall}r < 1$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ は $(r_0, 1)$ で一様収束していることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
|(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n| &\leqq (1-r)\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|r^n \\
&= (1-r)(\sum_{n=1}^{N-1}|s_n|r^n + \sum_{n=N}^{\infty}|s_n|r^n) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}|s_n|(r^n - r^{n+1}) + (1-r)\sum_{n=N}^{\infty}|s_n|r^n \\
&\leqq \varepsilon + \varepsilon(1-r)\sum_{n=N}^{\infty} r^n \\
&\leqq \varepsilon + \varepsilon(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^n \\
&= \varepsilon + \varepsilon r \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

したがって，$\varepsilon > 0$ の任意性から，(2) の結果と合わせて，

$\underline{\lim_{r\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n} = \lim_{r\to 1-0}(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n = \underline{0}.$ $\square$

$\boxed{4}$ 平面 $\mathbb{R}^2$の標準的な座標を (x,y) とする．正の実数 p に対して，$\mathbb{R}^2$の部分集合Ω_pを

$$\Omega_p = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ |x|^p + |y|^p \leqq 1\right\}$$

で定め，次の２重積分を考える．

$$A_p = \iint_{\Omega_p} (x^2+y^2)dxdy$$

以下の問に答えよ．

(1) A_1の値を求めよ．

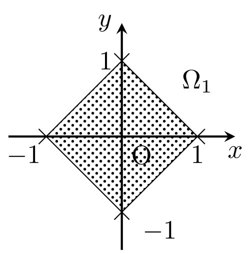
(2) A_2の値を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{p\to\infty} A_p$の値を求めよ．

解答

$f(x,y) := x^2+y^2$とおく．$z = f(x,y)$ とおくと，このグラフは平面 $x=0$ と $y=0$ に関して対称な図形である．また，各正の実数 p に対して,Ω_pは x 軸，y 軸に関して対称な図形である．

(1) Ω_1を図示すると以下である：



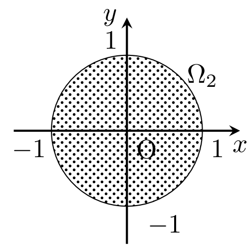
ただし，Ω_1 は境界を含む．

したがって，対称性を用いると，

$$\begin{aligned}
\underline{A_1} &= 4\int_0^1 (\int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy)dx \\
&= 4\int_0^1 [yx^2 + \frac{y^3}{3}]_0^{1-x} dx \\
&= 4\int_0^1 ((1-x)x^2 + \frac{(1-x)^3}{3})dx \\
&= 4[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12})]_0^1 \\
&= \underline{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

□

(2) Ω_2を図示すると以下である：



ただし，Ω_2 は境界を含む．

したがって，極座標変換を用いると，

$$\begin{aligned}
\underline{A_2} &= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \underline{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

□

(3) $\{\Omega_p\}_{p>0}$は次で定める集合Ω の近似増加列である：

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 < x < 1, -1 < y < 1\right\} \sqcup \{(1,0)\} \sqcup \{(-1,0)\} \sqcup \{(0,1)\} \sqcup \{(0,-1)\}$$

実際，これは以下のようにして確かめられる：

各正の実数 p に対して，$g_p(x,y) := |x|^p + |y|^p$とおく．

$(x,y) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 < x < 1, -1 < y < 1\right\}$ をfixするごとに，$g_p(x,y)$ はパラメータ p について狭義単調減少となる．実数 p, q with $0 < p < q$ に対して $g_q(x,y) \leqq g_p(x,y)$ for ${}^\forall(x,y) \in \Omega_p$が成り立つ．すなわち，$\Omega_p \subset \Omega_q$．

さらに,${}^\forall(x,y) \in \Omega_p$をとると，$(x,y)$ は"$|x| < 1$ かつ $|y| < 1$"または"$x = \pm 1$"または"$y = \pm 1$"であるから，$(x,y) \in \Omega$.すなわち,$\Omega_p \subset \Omega$

次に,${}^\forall K \subset \Omega$: 有界閉集合をとる．$\mathbb{R}^2$上では Heine $-$ Borel の被覆定理が成り立つので，$K \subset \Omega$は

compact. 各 $(x,y) \in K$ に対して，$^{\exists}p_{x,y} > 0$ s.t. $g_{p_{x,y}}(x,y) \leqq 1$.すなわち，$(x,y) \in \Omega_{p_{x,y}}$.
よって，$K \subset \displaystyle\bigcup_{(x,y)\in K} \Omega_{p_{x,y}}$ は K のopen covering.$K \subset \Omega$はcompactだから，$^{\exists}F \subset K$: 有限集合 s.t. $K \subset \displaystyle\bigcup_{(x,y)\in F} \Omega_{p_{x,y}}$.このとき，$p_0 := \displaystyle\max_{(x,y)\in F}\{p_{x,y}\}$ とおくと，$K \subset \displaystyle\bigcup_{(x,y)\in F} \Omega_{p_{x,y}} \subset \Omega_{p_0}$.

さらに，正の実数 p に対して，対称性を用いると，

$$
\begin{aligned}
A_p &= 4\int_0^1 (\int_0^{(1-x^p)^{\frac{1}{p}}} (x^2+y^2)dy)dx \\
&= 4\int_0^1 [yx^2 + \frac{y^3}{3}]_0^{(1-x^p)^{\frac{1}{p}}} dx \\
&= 4\int_0^1 ((1-x^p)^{\frac{1}{p}} x^2 + \frac{(1-x^p)^{\frac{3}{p}}}{3})dx \\
&\leqq 4\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})dx \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore \displaystyle\lim_{p\to\infty} A_p \leqq \frac{8}{3} < +\infty$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\underline{\lim_{p\to\infty} A_p} &= \iint_\Omega (x^2+y^2)dxdy \\
&= 4\int_0^1 (\int_0^1 (x^2+y^2)dy)dx \\
&= \underline{\frac{8}{3}}
\end{aligned}
$$

□

Rmk

Lebesgue 積分の理論を使って，$a.e.$で成立する優収束定理からもこの極限を導出できる.