九州大学大学院数理学府
平成 28 年度修士課程入学試験
専門科目

[3](1) $\forall q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ に対してある $a, b \in \mathbb{Q}$ が存在して $q = a + b\sqrt{2}$ とかける.
$\alpha^2 - 2 = \sqrt{2} \in K$ であるから $a + b(\alpha^2 - 2) = q \in K$ であるので $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$ である. $\square$
(2) $f(x) = (x^2 - 2)^2 - 2$ とすると $f(\alpha) = 0$ である. Eisenstein の定理より $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$ は体の拡大であり, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \neq K$ なので
$[K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}]$ であるから, α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数は 4 以上である.
以上により, α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $x^4 - 4x^2 + 1$ である. $\square$
(3) $\beta = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ とおくと $\sqrt{2} = \alpha^2 - 2 = \alpha\beta$ より $\alpha - \dfrac{2}{\alpha} = \beta \in K$ である.
また, $-\alpha, -\beta \in K$ であるから $K/\mathbb{Q}$ は正規拡大である.
$x^4 - 4x^2 + 1$ は重根を持たないので $K/\mathbb{Q}$ は分離拡大である.
従って, $K/\mathbb{Q}$ はガロア拡大である. $\square$

[5](1) $H_n(S^1 \times S^1;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=0,2) \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\ (n=1) \\ \{0\}\ (n\neq 0,1,2) \end{cases}$ である. $\square$

(2) $H_n(S^1 \vee S^1;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=0) \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\ (n=1) \\ \{0\}\ (n\neq 0,1) \end{cases}$ である. $\square$

(3) $H_n(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=2) \\ \{0\}\ (n\neq 2) \end{cases}$ である. $\square$