九州大学大学院数理学府
平成30年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．整数 k と $\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$ に対して，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 $f_{k,\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_{k,\vec{u}}(\vec{x}) = A^k \vec{x} + \vec{u} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2)$$

により定義して，このように表される $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像全体のなす集合を G とする．

$$G = \left\{ f_{k,\vec{u}} \mid k \in \mathbb{Z},\ \vec{u} \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 写像の合成により G は群になることを示せ．

(2) G の部分集合

$$H = \{ f_{0,\vec{u}} \in G \mid \vec{u} \in \mathbb{Z}^2 \}$$

は，G の正規部分群になることを示せ．

(3) 剰余群 G/H の位数を求めよ．ただし H は (2) で定義したものとする．

[2] 実 2 次正方行列全体のなす集合の部分集合 R を

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) R は行列の和と積に関して単位元を持つ可換環であることを示せ．

(2) R の元 $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して $AB = O$ を満たす R の零元でない元 B が存在するための必要十分条件を a, b を用いて求めよ．ただし O は零行列とする．

(3) R から $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ への環同型が存在することを示せ．ただし，$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ は二つの $\mathbb{R}$ の環としての直和とする．

[3] $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を位数 3 の有限体，$\overline{\mathbb{F}}_3$ を $\mathbb{F}_3$ の代数閉包とする．以下の問に答えよ．

(1) $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ は既約であることを示せ．

(2) $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ の $\overline{\mathbb{F}}_3$ における根のひとつを α とおく．$\alpha + 1, \alpha - 1 \in \overline{\mathbb{F}}_3$ それぞれの $\mathbb{F}_3$ 上の最小多項式を求めよ．

(3) $X^9 - X \in \mathbb{F}_3[X]$ の $\mathbb{F}_3$ 上の最小分解体を K とおく．$K = \mathbb{F}_3(\alpha)$ となることを示せ．ただし α は (2) のものとする．

[4] $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が次のようにパラメータ表示されているとする．

$$\mathbf{p}(u,v) = \mathbf{q}(u) + v\mathbf{t}(u) \quad (u,v) \in (-1,1) \times (-1,1).$$

ただし，二つの写像 $\mathbf{q}, \mathbf{t} : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ はそれぞれ滑らかで，各 (u,v) に対して，$\mathbf{p}_u(u,v) \times \mathbf{p}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$ とする．以下，K を S のガウス曲率とし，点 $\mathbf{p}(u,v)$ での S の単位法線ベクトルを $\mathbf{e} = \mathbf{e}(u,v)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) S のすべての点で $K \leq 0$ となることを示せ．

(2) S の単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ が v に依存しないとき，各 (u,v) に対して，$\mathbf{t}'(u)$ が $\mathbf{q}'(u)$ と $\mathbf{p}_v(u,v)$ の一次結合で表されることを示せ．

(3) (2) と同じ条件の下で，K は恒等的に 0 になることを示せ．

[5] $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間

$X = \{(x,y,1) \mid 1 = x^2+y^2\}$,
$Y = \{(x,y,1) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$,
$Z = \{(x,y,z) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, z = \pm 1\} \cup \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1, -1 \le z \le 1\}$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) Y に次で生成される同値関係 $\sim_1$ を入れる．

$$(x,y,1) \sim_1 (-x,-y,1) \quad (x^2+y^2=4).$$

このとき，商空間 $Y' = Y/\sim_1$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) 包含写像 $\iota\colon X \to Y$ と商写像 $p\colon Y \to Y'$ の合成写像 $f = p \circ \iota\colon X \to Y'$ が整係数ホモロジー群に誘導する準同型の像を求めよ．

(3) Z に次で生成される同値関係 $\sim_2$ を入れる．

$$(x,y,z) \sim_2 (-x,-y,z) \quad (x^2+y^2=4, z=\pm 1).$$

このとき，商空間 $Z' = Z/\sim_2$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

[6] $M(3,\mathbb{R})$ は 3 次実正方行列全体の集合，E_3 は 3 次単位行列，

$$O(3) = \{A \in M(3,\mathbb{R}) \mid {}^t\!AA = E_3\}$$

とする．関数 $f_{ij}\colon M(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le j \le 3$ を $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in M(3,\mathbb{R})$ に対し，$f_{ij}(X) = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) - \delta_{ij}$ で定める．ただし，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$ はベクトル $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積を表し，$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \ne j) \end{cases}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $O(3) = \{A \in M(3,\mathbb{R}) \mid f_{ij}(A) = 0, 1 \le i \le j \le 3\}$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立であるための必要十分条件は，r 次正方行列 $((\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j))_{1 \le i,j \le r}$ が正則であることを示せ．

(3) $O(3)$ は 3 次元可微分多様体であることを示せ．

[7] D を $\mathbb{C}$ 内の領域，a を D 内の点，f を D 上の正則関数とする．以下の問に答えよ．

(1) n を自然数とし，次が成り立つとする．

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

このとき，点 a のある開近傍 U で f は次のように表されることを示せ．

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

ただし，g は U において正則で，$g(a) \neq 0$ を満たす関数である．

(2) $D \setminus \{a\}$ 内の点列 $\{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ は点 a に収束するとする．f が任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $f(z_j) = 0$ を満たすとき，f は点 a のある近傍で恒等的に 0 となることを示せ．

(3) f が (2) の条件を満たすとき，f は領域 D で恒等的に 0 となることを示せ．

(4) 任意の実数 x に対して $\sin(h(x)) = 0$ を満たす $\mathbb{C}$ 上の正則関数 h は定数関数であることを示せ．

[8] $x > 0$ で定義された関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = \log x \qquad (*)$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $t = \log x$ とおき，y を t の関数と考えたときに y が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) で得られた微分方程式の一般解を求めよ．

(3) $y(1) = 1,\ y'(1) = 1$ を満たす $(*)$ の解を求めよ．

[9] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を有限測度空間とし，$f_n : X \to \mathbb{R}$（$n \in \mathbb{N}$）を可測関数とする．条件

$$\lim_{M \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|f_n| > M} |f_n| d\mu = 0$$

が成り立つとき，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分であるという．以下のそれぞれの命題について，それが正しければ○を書いて証明を与え，誤りであれば×を書いて反例を一つあげよ．

(1) ある可積分関数 $g : X \to [0, \infty)$ で任意の n について $|f_n| \leq g$ (μ-a.e.) となるものが存在すれば $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である．

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分ならば $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| d\mu < \infty$ である．

(3) $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| d\mu < \infty$ ならば $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である．

(4) $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| \log\log(2 + |f_n|)\, d\mu < \infty$ ならば $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である．

(5) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分で $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \mu(|f_n| > 1) = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{|f_n| > 1} |f_n| d\mu = 0$ である．

[10] $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を互いに独立で，同じ一様分布 $U(0,\ \theta)$ $(\theta > 0)$ に従う確率変数とする．すなわち密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる．以下の問に答えよ．

(1) 標本平均の 2 倍 $2\overline{X} = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $Z_2 = \max\{X_1, X_2\}$ の確率密度関数を求めよ．

(3) $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ の確率密度関数を求めよ．

(4) $\dfrac{n+1}{n} Z_n$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

[11] 以下で定義される n 次実正則行列 A と $b \in \mathbb{R}^n$ に対して, 連立方程式 $Ax = b$ を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

行列 A が任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

を満たしていると仮定する. 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A に対して n 次実正方行列 B を次の様に定義する.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

また, $\|B\|_\infty$ を

$$\|B\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

と定義する．ただし，$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ と定める．このとき，$\|B\|_\infty < 1$ であることを証明せよ.

(2) x^* を連立方程式 $Ax = b$ の解とする．任意に選んだ $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ に対して点列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ を

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$$

と定義する．このとき，任意の $k = 0, 1, \ldots$ で

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|x^{(k)} - x^*\|_\infty$$

が成立することを証明せよ.

(3) (2) で定めた x^* と $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ に対して，$x^{(k)} \to x^*$ $(k \to \infty)$ を証明せよ.