九州大学大学院数理学府
平成 24 年度修士課程入学試験
専門科目

[3](1) n に関する帰納法で証明する.

(i) $n=2$ のときハウスドルフ空間の定義より

x_1 の近傍 U_1 と x_2 の近傍 U_2 で $U_1 \bigcap U_2$ をみたすものが存在する.

(ii) n のとき成立すると仮定する.

つまり, x_k の近傍 $U_k (k=1,2,\cdots,n)$ でどの異なる 2 つも交わらないものが存在する.

X がハウスドルフ空間なので, k $(k=1,2,\cdots,n)$ を固定したとき

x_k の近傍 V_k と x_{k+1} の近傍 $V_{k,n+1}$ で交わらないものが存在する.

$V_{n+1} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} V_{k,n+1}$ とおくとこれも x_{n+1} の近傍であり, $V_1, V_2, \cdots, V_n$ のどれとも交わらない.

$U_1 \bigcap V_1, U_2 \bigcap V_2, \cdots, U_n \bigcap V_n$ と V_{n+1} は順に $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と x_{n+1} の近傍になっている.

これらのうち, 異なる 2 つはどれも交わらない. 従って $n+1$ のときも成立する.

以上により, 与えられた命題は成立する. □

(2) C の補集合 D が開集合であることを示せばよい.

従って, D 内の任意の点 x に対して x を含む開集合 U で D に含まれるものが存在すればよい.

ハウスドルフ空間の定義より, C 内の任意の点 y に対して y を含む開集合 V_y と x を含む開集合 U_y で交わらないものがとれる. $C \subset \displaystyle\bigcup_{y \in C} V_y$ である. コンパクト性の定義から V_y $(y \in C)$ の中の有限個の開集合 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ で C が覆える. つまり, $C \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} V_k$ である.

これらに対応する開集合 U_y を $U_1, U_2, \cdots, U_n$ とおく. $U = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ も x を含む開集合となる.

この U は $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} V_k$ と交わらないので C とも交わらない.

よって, $U \subset D$ なので U が求める開集合になっている. □

(3) B はコンパクト集合なので (2) より閉集合である. よって B の補集合 B^c は開集合である.

$A \bigcap B$ の任意の開被覆 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と B^c で A が覆える.

A はコンパクト集合なので, この中の有限個の開集合 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ と B^c で A が覆える.

よって $U_1, U_2, \cdots, U_n$ で $A \bigcap B$ が覆える.

$A \bigcap B$ の任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在したので $A \bigcap B$ はコンパクトである. □

[5](1) M は円周 S^1 とホモトピー同値なので

$$\begin{aligned} H_n(M;\mathbb{Z}) &\cong H_n(S^1;\mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=0,1) \\ \{0\}\ (n\neq 0,1) \end{cases} \end{aligned}$$

である. $\square$

(2) $\partial D^2 = S^1$ なので ∂M はトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ となるから

$$\begin{aligned} H_n(\partial M;\mathbb{Z}) &\cong H_n(S^1 \times S^1;\mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=0,2) \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\ (n=1) \\ \{0\}\ (n\neq 0,1) \end{cases} \end{aligned}$$

である. $\square$

(3) 対 $(M, \partial M)$ のホモロジー群は鎖群 $C_n(M)$ と鎖群 $C_n(\partial M)$ の
商鎖群 $C_n(M)/C_n(\partial M)$ のホモロジー群に等しい.
これは $S^1 \times D^2$ の境界を 1 点に縮めたものの簡約ホモロジー群に等しい.
円板 D^2 の境界 ∂D^2 を 1 点に縮めると球面 S^2 になる.
$S^1 \times S^2$ のうち, $S^1\times$ (この 1 点) をさらに 1 点に縮めた図形は $S^1 \times S^2$ の S^1 の作る輪を D^2 で埋めた図形とホモトピー同値である. (これは D^3 から $S^1 \times D^2$ を除いた図形である.)
従って,

$$H_n(M, \partial M;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\ (n=2,3) \\ \{0\}\ (n\neq 2,3) \end{cases}$$

である. $\square$