九州大学大学院数理学府
平成 24 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1) $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank} A = 2$ である.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank} A^2 = 1$ である.

$A^3 = 0$ より $\mathrm{rank} A^3 = 0$ である. $\square$

(2) $c_1 a + c_2 A + c_3 A^2 + c_4 b = 0$ とするとき

両辺に A を掛けると $A^3 = 0$ と (i) より $c_1 Aa + c_2 A^2 a = 0$ を得る.

さらに両辺に A を掛けると $c_1 A^2 a = 0$ を得る.(ii) より $A^2 a \neq 0$ なので $c_1 = 0$ である.

$c_1 = 0$ を $c_1 Aa + c_2 A^2 a = 0$ に代入すると $c_2 A^2 a = 0$ なので $c_2 = 0$ である.

$c_1 = c_2 = 0$ を $c_1 a + c_2 A + c_3 A^2 + c_4 b = 0$ に代入すると $c_3 A^2 a + c_4 b = 0$ なので

(ii) より $c_3 = c_4 = 0$ である.

以上により, $a, Aa, A^2 a, b$ は一次独立である. $\square$

[2](1) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変数変換すると

$$C = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 | \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 = 1 \right\}$$

であるから曲線 C の概形は楕円 $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ を原点回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転させたものである. □

(2) f は連続で C はコンパクトであるから有界閉集合上の連続関数は最大値, 最小値を持つことより
$f|_C$ は最小値を持つ. □

(3) $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ として (2) の結果を用いると最小値となる $Q = (x_0, y_0) \in C$ について
$d(P,C) = (f(x_0,y_0))^{\frac{1}{2}}$ である.
$f|_C$ は Q において極小値なので Lagrange の未定乗数法を用いると
$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とするとき
$F_x(x_0,y_0,) = F_y(x_0,y_0) = F_\lambda(x_0,y_0) = 0$ である.
従って, $(x_0 + 2y_0)(x_0 - a) = (2x_0 + y_0)(y_0 - b)$ である. 曲線 C の点 Q における接ベクトル a を求めると
$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ なので $a = ((x_0 + 2y_0), -2(x_0 + y_0))$ である.
$PQ = (x_0 - a, y_0 - b)$ なので $a \cdot PQ = (x_0 + 2y_0)(x_0 - a) - (2x_0 + y_0)(y_0 - b) = 0$ である.
従って, PQ と C は直交する. □

(4) $P = (3,1), Q = (1,0)$ のとき $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-1)^2$ として Lagrange の未定乗数法を用いると
$Q = (1,0)$ は極値であるので $f_{xx}(1,0) = 2 > 0$ かつ $det \begin{pmatrix} f_{xx}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(1,0) & f_{yy}(1,0) \end{pmatrix} = 4 > 0$ より
$f|_C$ は $Q = (1,0)$ で極小値をとる.
従って, $d(P,C) = |PQ|$ である. □

[3](1) $a=b$ のとき $M \to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ より $\dim \mathrm{Ker} M = n-1$ である $\square$

(2)

$$
\begin{aligned}
detM &= (a+(n-1)b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \\
&= (a+(n-1)b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} \\
&= (a+(n-1)b)\,(a-b)^{n-1}
\end{aligned}
$$

である. $\square$

(3) (i) $a=b$ のとき $\dim \mathrm{Im} F = 1$ であり $\mathrm{Im} F$ の基底は

$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

(ii) $a=-(n-1)b$ のとき $\dim \mathrm{Im} F = n-1$ であり $\mathrm{Im} F$ の基底は

$\begin{pmatrix} -n+1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -n+1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

(iii) $a \neq b$ かつ $a \neq -(n-1)b$ のとき $\dim \mathrm{Im} F = n$ であり $\mathrm{Im} F$ の基底は

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ である. $\square$

[4](1) C を積分定数とする.
$x = \alpha \tan\theta$ とすると

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2}dx &= -\frac{1}{\alpha}\int \cos 2\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{2\alpha}\sin 2\theta + C \\
&= -\frac{1}{\alpha}\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} + C \\
&= -\frac{x}{x^2+\alpha^2} + C
\end{aligned}$$

である. □

(2) $\alpha = \sqrt{y^2+1}$ として (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^b \int_0^a \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy &= \int_0^b -\frac{1}{y^2+a^2+1}dy \\
&= \left[-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+a^2}}\right]_0^b \\
&= -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\tan^{-1}\frac{b}{\sqrt{1+a^2}}
\end{aligned}$$

である. □

(3) $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to\infty}\int_0^b\int_0^a \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = 0 \neq \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_0^b\int_0^a \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = -\frac{\pi}{2}$ である.
従って, $\displaystyle\iint_{x\geq 0, y\geq 0}\frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$ は収束しない. □