九州大学大学院数理学府
平成 30 年度修士課程入学試験
基礎科目

[1](1) $\forall f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = sx^2 + tx + u \in V$ と $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} T((\alpha f + \beta g)(x)) &= (\alpha f + \beta g)(2x+3) + (\alpha f + \beta g)'(x) \\ &= \alpha(a(2x+3)^2 + b(2x+3) + c) + \beta(s(2x+3)^2 + t(2x+3) + u) + \alpha(2ax+b) + \beta(2sx+t) \\ &= \alpha(a(2x+3)^2 + b(2x+3) + c + (2ax+b)) + \beta(s(2x+3)^2 + t(2x+3) + u + (2sx+t)) \\ &= \alpha T(f(x)) + \beta T(g(x)) \end{aligned}$$

であるので, T は線型変換である. □

(2)

$$T(1) = 1 + 0x + 0x^2$$

$$T(x) = 4 + 2x + 0x^2$$

$$T(x^2) = 9 + 14x + 4x^2$$

であるので, V の基底 $1, x, x^2$ に関する T の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 9 \\ 0 & 2-\lambda & 14 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$ であるので, 求める T の固有値は $1, 2, 4$ である. □

(3) 固有値 1 についての固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$ つまり $x_1 = s_1, y_1 = 0, z_1 = 0$ (s_1 は任意) なので $v_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

従って, 固有空間 $W(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である.

固有値 2 についての固有ベクトル $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$ つまり $x_2 = 4s_2, y_2 = s_2, z_2 = 0$ (s_2 は任意) なので $v_2 = \begin{pmatrix} 4s_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

従って, 固有空間 $W(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である.

固有値 4 についての固有ベクトル $v_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \\ 0 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0$ つまり $x_4 = 37s_4, y_4 = 21s_4, z_4 = 3s_4$ (s_4 は任意) なので $v_4 = \begin{pmatrix} 37s_4 \\ 21s_4 \\ 3s_4 \end{pmatrix}$

従って, 固有空間 $W(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 37 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. $\square$

[2](1) $(T_A - I)(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$ より $x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおくと

$(T_A - I)(x) = 0$ となるとき $p = q = r = s$ (s は任意) なので $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

従って, $\dim V = 1$ であり次元定理より $\dim W = 2$ である. □

(2) $V \cap W = \{0\}$ である.

$\forall x \in \mathbb{R}^3$ に対して $\exists v \in V, \exists w \in W$ s.t. $x = v + w$ を示す.

$(T_A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in W,\ (T_A - I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$ である.

$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると $x = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

とかけるので $\mathbb{R}^3 = V + W$ である.

以上により $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ である. □

(3) $\forall w_1, w_2 \in W$ と $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} T_A(\alpha w_1 + \beta w_2) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\alpha w_1 + \beta w_2) \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w_1 + \beta \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w_2 \\ &= \alpha T_A(w_1) + \beta T_A(w_2) \end{aligned}$$

また $\forall w \in W, \exists x \in \mathbb{R}^3$ s.t. $w = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$ なので

$$T_A(w) = T_A((T_A - I)(x)) = ({T_A}^2 - T_A)(x) = (T_A - I)(T_A(x)) \in W$$

であるから, T_A の W への制限は W の線型変換である.

さらに

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を W の基底としてとると

$$T_A(a_1) = 0a_1 - 2a_2$$

$$T_A(a_2) = 2a_1 + 2a_2$$

であるので求める表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ である. □

(4) $\forall w \in W$ をとると $\exists x \in \mathbb{R}^3$ s.t. $w = (T_A - I)(x)$ である.
今, $x = v + u \in V \oplus U$ とかけるので

$$\begin{aligned} w &= (T_A - I)(x) \\ &= (T_A - I)(v + u) \\ &= (T_A - I)(u) \\ &= T_A(u) - u \\ &\in U \end{aligned}$$

となるので $W \subset U$ である.
また, $\mathbb{R}^3 = V \oplus W = V \oplus U$ であることから $\dim W = \dim U = 2$ なので $U = W$ である. $\square$

[3](1) $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

なので $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ より $A(a,b,c) \geq B(a,b,c)$ である. □

(2) (1) より $A(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}) \geq B(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ つまり $B(a,b,c) \geq C(a,b,c)$ を得る. □

(3) (1) と (2) の結果より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n \leq b_n \leq a_n$ である.

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{3}((b_n-a_n)+(c_n-a_n)) \leq 0$$

よって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列である.

$$c_{n+1}-c_n = \frac{\frac{1}{a_n}(a_n-c_n)+\frac{1}{b_n}(b_n-c_n)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 0$$

よって, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列である. □

(4) (3) の結果より $c_1 \leq c_n \leq b_n \leq a_n \leq a_1$ であり,$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な単調列であるので収束する.
$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n+b_n+c_n)$ より $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束する.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta, \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$$

とおくと $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ である.
$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n+b_n+c_n)$ で $n \to \infty$ を考えると

$$\alpha-\beta = \gamma-\alpha$$

であり $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ より $\alpha-\beta \geq 0$ かつ $\gamma-\alpha \leq 0$ であるので,
$\alpha-\beta = \gamma-\alpha = 0$ つまり $\alpha=\beta=\gamma=0$ である.
従って, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ極限値に収束する. □

[4](1) $f(x)$ が $x \to \infty$ で収束することを示す.
単調増加で $x_n \to \infty$ となる数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を任意にとる.
このとき $\forall \varepsilon > 0$ に対して $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \geq n)$ を十分大きくとると

$$\begin{aligned} |f(x_m) - f(x_n)| &= \left| \int_{x_n}^{x_m} f'(x) dx \right| \\ &\leq \int_{x_n}^{x_m} |f'(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

であり関数列 $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるので実数の完備性より $\lim_{x \to \infty} f(x)$ は収束する.
次に $f(x)$ が $x \to \infty$ で 0 に収束することを示す.
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ とおく.
$\alpha \neq 0$ とすると十分大きな x について

$$-|f(x)| + |\alpha| \leq |f(x) - \alpha| \leq \frac{|\alpha|}{2}$$

であることより

$$\frac{|\alpha|}{2} \leq |f(x)|$$

となるので

$$\int_0^\infty |f(x)| dx \geq \int_0^\infty \frac{|\alpha|}{2} dx = \infty$$

であるが $\lim_{x \to \infty} f(x)$ が収束することに矛盾するので $\alpha = 0$
以上により $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ である. □
(2) $g(x) = \{f(x)\}^2$ とおくと $\int_0^\infty |g(x)| dx < \infty$ である.
また $g'(x) = 2f'(x)f(x)$ であるから Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |g'(x)| dx &\leq 2 \left(\int_0^\infty |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

よって,(1) の結果を $g(x)$ に用いると

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

従って, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ である. □