九州大学大学院数理学府
平成25年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数理学コース)

注意
- 問題[1][2][3][4]のすべてに解答せよ.
- 以下$\mathbb{N}$は自然数の全体，$\mathbb{R}$は実数の全体を表す.

[1] 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$ を求めよ.

(2) 次の級数の値を求めよ.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

[2]　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値とその固有空間を求めよ．

(2) 行列 A を直交行列を用いて対角化せよ．

(3) E を単位行列，O を零行列とするとき，$(B-3E)^3 = O$ であることを示せ．

(4) $t \in \mathbb{R}$ とするとき，行列 $\exp(tB) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!} B^n$ を求めよ．

[3] a, b を $0 < a < b$ を満たす実数とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\ dx$ および $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\ dx$ は $a \leq y \leq b$ で一様収束することを示せ．

(2) y を $y > 0$ を満たす実数とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\ dx = \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\ dx$$

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\ dx = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\ dx$$

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\ dx = \frac{y}{y^2+1}$$

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\ \cos x\ dx$$

が存在することを示し，その値を求めよ．

[4]　n を自然数とし，$\mathbb{R}^n$ には内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられているとする．$\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ を固定し，写像 $T_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $T_{\boldsymbol{a}}$ が線形写像であることを示せ．

(2) $T_{\boldsymbol{a}}$ が内積を保つことを示せ．

(3) $T_{\boldsymbol{a}}$ の固有値とその固有空間を求めよ．

(4) $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{a}$ と直交しているとき，$T_{\boldsymbol{b}} \circ T_{\boldsymbol{a}}$ はどのような写像か述べよ．