2015 問 7.

(1) $z = x + iy$ とすると,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

であるので, $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$ とおくと,

$$u_x(x,y) = e^x\cos y,\quad u_y(x,y) = -e^x\sin y,\quad v_x(x,y) = e^x\sin y,\quad v_y(x,y) = e^x\cos y.$$

よって, コーシー・リーマンの方程式

$$u_x(x,y) = v_y(x,y),\quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

が成り立つので, e^z は正則である. (証明終)

(2) $S_n = \sum_{l=1}^{k} a_l e^{-lp}$, $\lim_{k\to\infty} S_k = S$ とおく. このとき,

$$\lim_{k\to\infty} a_k e^{-kp} = \lim_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0$$ (証明終)

(3) $p = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, α, β, x, y は実数, $x > \alpha$, $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(p)$ と置く.
問 (2) より, $|a_k e^{-kp}| = a_k e^{-k\alpha} \leq M$ となる定数 $M > 0$ が存在する.
このとき, $x - \alpha > 0$ であるので

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k e^{-kz}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kx} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k\alpha}e^{-k(x-\alpha)}\\ &< \sum_{k=1}^{\infty} Me^{-k(x-\alpha)} = \frac{Me^{-(x-\alpha)}}{1-e^{-(x-\alpha)}}\quad (\text{収束}).\end{aligned}$$

よって, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}$ は収束する.
また, $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(p)$ に含まれる任意の閉集合 D に対して, $m = \inf\{|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(p)|\,;\, z \in D\}$ とおくと, $m > 0$ であり, D に含まれる任意の点 z に対し

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k e^{-kz}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kx} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k\alpha}e^{-k(x-\alpha)}\\ &< \sum_{k=1}^{\infty} Me^{-km} = \frac{Me^{-m}}{1-e^{-m}}\quad (\text{収束}).\end{aligned}$$

したがって, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}\right|$ は広義一様収束しているので, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}$ は正則である. (証明終)

(4) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}$ とおくと,

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(-k)^n e^{-kz},\quad f^{(n)}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(-k)^n e^{-k}$$

であるので, $f(z)$ の $z = 1$ の周りにおけるテイラー展開のテイラー係数 c_n は

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(-k)^n e^{-k}.$$ ……… (答)

よって, 収束半径 r_1 は,

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^{n+1}e^{-k}}{\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^n e^{-k}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^{n+1}e^{-k}}{\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^n e^{-k}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k k^{n+1}e^{-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k k^{n+1}e^{-k}}{\sum_{k=1}^{n}a_k k^n e^{-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k k^n e^{-k}} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k n k^n e^{-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k k^{n+1}e^{-k}}{\sum_{k=1}^{n}a_k k^n e^{-k}+0} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k k^n e^{-k}+\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k k^{n+1}e^{-k}}{\sum_{k=1}^{n}a_k k^n e^{-k}} \\
&= 1\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k k^n e^{-k}+0}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k k^n e^{-k}} = 1
\end{aligned}$$

であることから, ダランベールの公式により

$$r_1 = \frac{1}{L_1} \geq 1.$$

すなわち, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$ の収束半径は 1 以上である. (証明終)

(5) $f(z)$ の点 $z=0$ におけるテイラー展開を

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n z^n$$

であるとし, その収束半径を ε とおく. このとき, テイラー係数 d_n は

$$d_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(-k)^n$$

であり, コーシーの公式により

$$\frac{1}{\varepsilon} = L_0 = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|d_n|}$$

が成り立つ.
一方, $z=i\theta$ (θ は任意の実数) におけるテイラー展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\theta)(z-i\theta)^n$$

と表せて, テイラー係数 $d_n(\theta)$ は

$$d_n(\theta) = \frac{f^{(n)}(i\theta)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(-k)^n e^{-i\theta}.$$

ここで, このテイラー展開の収束半径 r_θ は

$$\begin{aligned}
L_\theta &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(\theta)|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(-k)^n e^{-ik\theta}\right|} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(-k)^n e^{-ik\theta}|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(-k)^n\right|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n} = L_0
\end{aligned}$$

であることから, コーシーの公式により

$$r_\theta = \frac{1}{L_\theta} \geq \frac{1}{L_0} = \varepsilon.$$

よって, 任意の実数 θ に対して $f(z)$ の $z = i\theta$ におけるテイラー展開の収束半径 r_θ は $z = 0$ におけるテイラー展開の収束半径 ε 以上であることがわかる. これは, 各 θ 毎に, $\{z\,;\,|z - i\theta| < r_\theta\} \cap \{z < 0\}$ の部分で解析接続可能であることを示しており, さらに θ が任意であることから, 一致の定理を用いることで $f(z)$ が $\mathrm{Re}(z) > -\varepsilon$ の範囲で解析接続可能であることが示された. (証明終)