2010基礎

(間違っている箇所があるかもしれないのでご利用は自己責任で)

大問1

(1)

$f_x(x,y) = 4x^3 - 2x + 2y$

$f_y(x,y) = 4y^3 - 2y + 2x$

$f_x = f_y = 0$のとき

$f_x - f_y = 0 \Rightarrow (x-y)(x^2+2xy+y^2) = (x-y)(x+y)^2 = 0$

$\therefore x = y$or$x = -y$

- $x = y$のとき
  $4x^3 = 0 \Rightarrow = 0$
- $x = -y$のとき
  $4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow = 0, -1, 1$

$\therefore (x,y) = (0,0), (1,-1), (-1,1)$

(2)

切り口$C : f(x,0) = x^2(x^2-1)$

切り口$D : f(x,x) = 2x^4$(軸の取り方に注意)

(図の書き方分からないので図は略)

(3)

$f_{xx} = 12x^2 - 2$

$f_{yy} = 12y^2 - 2$

$f_{xy} = 2$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$H(1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = H(-1,1)$

$detH(1,-1) = 96 > 0$かつ$f_{xx}(1,-1) > 0$より、$(1,-1)$は極小値

$detH(-1,1) = 96 > 0$かつ$f_{xx}(-1,1) > 0$より、$(-1,1)$は極小値

$(0,0)$について、(2)より極大値でも極小値でもない

大問2

(1)

$|e^{-x^2-y^2}cos(x^2)cos(y^2)| = e^{-x^2-y^2}$で、$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi$より、
$A = \iint e^{-x^2-y^2}cos(x^2)cos(y^2)dxdy$は収束。

B, Cも同様

(2)

$A - C = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}cos(x^2+y^2)dxdy$

$x = rcos\theta, y = rsin\theta$と変数変換すると、

$$\begin{aligned} A - C &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}cos(r^2)rdrd\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}cos(r^2)rdr \end{aligned}$$

$I = \int_0^{\infty} e^{-r^2}cos(r^2)rdr$とおく

$$\begin{aligned} I &= [-\frac{1}{2}e^{-r^2}cos(r^2)]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} -2re^{-r^2}sin(r^2)dr \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^{\infty} re^{-r^2}sin(r^2)dr \\ &= \frac{1}{2} - ([-\frac{1}{2}e^{-r^2}sin(r^2)]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} 2re^{-r^2}cos(r^2)dr) \\ &= \frac{1}{2} - I \end{aligned}$$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}$

$\therefore A - C = \frac{\pi}{2}$

(3)

$$\begin{aligned} 2B &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}sin(x^2+y^2)dxdy \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}sin(r^2)dr \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(4)

(2),(3)より、$A - C = 2B \longrightarrow C = A - 2B$

また、$AC = B^2$より、

$A(A-2B) = B^2$

$\Rightarrow A^2 - 2AB - B^2 = 0$

$\Rightarrow A^2 - A\pi - \frac{\pi^2}{16} = 0$

$A = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + \frac{\pi^2}{4}}}{2} = \frac{\pi(1\pm\sqrt{5})}{4}$

$C = \frac{\pi(-1\pm\sqrt{5})}{4}$

大問3

(1)

${}^tA = A$となっている

Aの固有値λについて、その固有ベクトルをxとすると、

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= (x, Ax) \\ \Rightarrow (\lambda x, x) &= (x, \lambda x) \\ \Rightarrow \overline{\lambda}||x||^2 &= \lambda||x||^2 \\ \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} &\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

よってAの固有値は実数

また、λ_1, λ_2は

$det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(b-\lambda) - b^2 = 0$の解であるが、

判別式$D = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$

よって$\lambda_1 \neq \lambda_2$

(2)

$$\begin{aligned} (Au_1, u_2) &= (u_1, {}^tAu_2) \\ \Rightarrow (\lambda_1 u_1, u_2) &= (u_1, \lambda_2 u_2) \because {}^tA = A \\ \Rightarrow \overline{\lambda_1}(u_1, u_2) &= \lambda_2(u_1, u_2) \\ \Rightarrow \lambda_1(u_1, u_2) &= \lambda_2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

もし$(u_1, u_2) \neq 0$なら$\lambda_1 = \lambda_2$となり(1)に矛盾$\therefore (u_1, u_2) = 0$

よってu_1とu_2は直行する。

(3)

$f(x) = {}^txAx = (x, Ax)$

$$\begin{aligned} f(\xi u_1 + \eta u_2) &= (\xi u_1 + \eta u_2, A(\xi u_1 + \eta u_2)) \\ &= (\xi u_1 + \eta u_2, \lambda_1 \xi u_1 + \lambda_2 \eta u_2) \\ &= \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 \end{aligned}$$

(4)

$f(\frac{\xi'}{\sqrt{|\lambda_1|}}u_1 + \frac{\eta'}{\sqrt{|\lambda_2|}}u_2) = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\xi'^2 + \frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}\eta'^2$

大問4

(1)

前半

$S_{n+1} > S_n$と仮定する

$\epsilon = S_{n+1} - S_n > 0$とおくと$sup$の性質より

$\exists a \in A_{n+1} s.t. a > S_{n+1} - \epsilon = S_n$

だが、A_nについてのsupの定義および$A_{n+1} \subset A_n$より$\forall a \in A_{n+1} \quad a \leq S_n$であるので矛盾

$\therefore S_n \geq S_{n+1}$

後半

$\{a_n\}$は有界な実数列より、$\exists M \in \mathbb{R}, M \leq a_n (\forall n)$

$\therefore M \leq S_n$

S_nは下に有界な単調減少列ゆえ収束する

(2)

$\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

$\beta = \sup X$とおく

$\underline{\alpha \leq \beta}$

$\forall \epsilon > 0 \quad a_m > \beta + \epsilon$なる$m$は有限個(もし無限個あるなら$\beta + \epsilon \in X$上限の定義に反する)

よって、

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N} s.t. \forall m \geq N &\Rightarrow a_m \leq \beta + \epsilon \\ &\Rightarrow \sup A_N \leq \beta + \epsilon \\ &\Rightarrow \alpha \leq \beta + \epsilon \\ &\Rightarrow \alpha \leq \beta (\because \epsilon\text{は任意})\end{aligned}$$

$\underline{\alpha \geq \beta}$

$$\begin{aligned}&\forall \epsilon > 0, \exists x \in X \quad s.t. \quad x > \beta - \epsilon \\ &\Rightarrow a_m > \beta - \epsilon\text{なる}m\text{が無限個存在} \\ &\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N \quad a_m > \beta - \epsilon \\ &\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \quad \sup A_n > \beta - \epsilon \\ &\Rightarrow \alpha \geq \beta - \epsilon \\ &\Rightarrow \alpha \geq \beta\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}X_a &= \{x \in \mathbb{R}; \text{無限個の}m\text{に対して}a_m > x\} \\ X_b &= \{x \in \mathbb{R}; \text{無限個の}m\text{に対して}b_m > x\} \\ X_{a+b} &= \{x \in \mathbb{R}; \text{無限個の}m\text{に対して}a_m + b_m > x\}\end{aligned}$$

とすると、(2)より以下は同値

$$1. \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$2. \sup X_{a+b} \leq \sup X_a + \sup X_b$$

今から2を示す。

$\forall \epsilon > 0$

$a_m > \sup X_a + \frac{\epsilon}{2}$$

$b_l > \sup X_b + \frac{\epsilon}{2}$

なるm, lは高々有限個

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \geq N \quad a_n \leq \sup X_a + \frac{\epsilon}{2}, b_n \leq \sup X_b + \frac{\epsilon}{2}$

このとき、

$a_n + b_n \leq \sup X_a + \sup X_b + \epsilon (\forall n \geq N)$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \sup X_a + supX_b + \epsilon$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \sup X_a + supX_b (\epsilon は任意)$

(4)

$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$