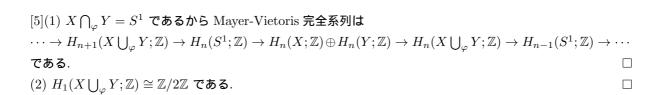
九州大学大学院数理学府 平成 31 年度修士課程入学試験 専門科目



 $[11](1) \ 0 < r \le rac{1}{2}$ ගෙප x=1+r,y=1 $rac{1}{2} < r < 1$ ගෙප x=2-r,y=1 වෙප පි

$$|f(x) - f(y)| > r|x - y|$$

となるので f は縮小写像ではない.

(2)

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|$$
$$= \left| \frac{x-y}{(x+1)(y+1)} \right|$$
$$\leq \frac{1}{4}|x-y|$$

が成り立つのでg は縮小写像である.

(3) m > n として $0 < \exists r < 1$ s.t.

$$|a_{m} - a_{n}| = |g(a_{m-1}) - g(a_{n-1})|$$

$$\leq r|a_{m-1} - a_{n-1}|$$

$$\vdots$$

$$\leq r^{n}|a_{m-n} - a_{0}|$$

$$\to 0 \ (n \to \infty)$$

従って, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列なので収束する.

(4) $x \geq 1$ において f(x) = x をみたす x は $1 + \frac{1}{x} = x$ つまり $x^2 - x - 1 = 0$ より

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

よって, $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ であることを示せば良い. 実際に $0<\exists r<1$ s.t.

$$\left| g^n(a_0) - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right| = \left| g^n(a_0) - g^n \left(\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right) \right|$$
$$= r^n \left| a_0 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right|$$
$$\to 0 \ (n \to \infty)$$

従って

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} g^n(a_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

であるので, f(a) = a が成立する.