2019年 (令和元年) 九大数理 専攻

(もっ・ω・さん)[*1]brother

間違っているかもしれないので，自己責任でご利用下さい．また，正しい解答やこっちの方が速く解けるとかありましたらご連絡下さい．

• 以下，$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す．

$\boxed{1}$ G を n 次実正則行列全体のなす群とする (ただし，$n \in \mathbb{N}$)．T を正則な対角行列全体のなす G の部分群とする．G の部分集合 $N_G(T)$ を次のように定義する．

$$N_G(T) = \{g \in G \mid g^{-1}Tg = T\}$$

以下の問に答えよ．

(1) $N_G(T)$ は G の部分群であることを示せ．

(2) T は $N_G(T)$ の正規部分群であることを示せ．

(3) $n = 2$ のとき，商群 $N_G(T)/T$ を決定せよ．

解答

(1) G の単位行列を e とする．まず，$e \in N_G(T)$ である．そこで，任意に $x, y \in N_G(T)$ をとると，

$$(xy^{-1})^{-1}Txy^{-1} = yx^{-1}Txy^{-1} = yTy^{-1} = (y^{-1}T^{-1}y)^{-1} = (y^{-1}Ty)^{-1} = T^{-1} = T$$

よって，$xy^{-1} \in N_G(T)$.したがって，$N_G(T)$ は G の部分群である． □

(2) $g \in T$ ならば $g^{-1}Tg = Tg = T$ なので，$T \subset N_G(T)$.このとき，T は $N_G(T)$ の部分群．実際，単位元 e は正則な対角行列で，正則な対角行列どうしの積は再び正則な対角行列となり，T の任意の元は正則だから逆元を持っている．$N_G(T)$ の定義から，$T \lhd N_G(T)$. □

(3) $n = 2$ のとき，$T = \{\mathrm{diag[a,b]} \mid \mathrm{a,b} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ である．$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in N_G(T)$ と$\mathrm{diag}[a, b] \in T$ with $a \neq b$ に対して，$xw - yz \neq 0$ に注意すると，

$$T \ni \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \frac{1}{xw - yz} \begin{pmatrix} axw - byz & (a-b)yw \\ -(a-b)xz & axw - byz \end{pmatrix}$$

よって，$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の任意性から，$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in N_G(T)$ は $yw = xz = 0$ を満たす．
再び $xw - yz \neq 0$ に注意すると，"$x = w = 0$ かつ $y \neq 0$ かつ $z \neq 0$" または "$y = z = 0$ かつ $x \neq 0$ かつ $w \neq 0$".

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

だから，$N_G(T)/T = \left\{T, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T\right\}$．(2) より，$N_G(T)/T$ は位数 2 の群である．
したがって，$N_G(T)/T$ は位数 2 の巡回群と同型である． □

[*1] Twitter はこちら

$\boxed{2}$ $i=\sqrt{-1}$を虚数単位，f を正の整数とし，

$$\mathcal{O}_f = \{m + nfi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}_f$はガウスの整数環 $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ の部分環であることを示せ．

(2) 環の同型 $\mathcal{O}_f \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ を示せ．ただし，$\mathbb{Z}[x]$ は x を不定元とする整数係数の多項式環とする．

(3) $f>1$ とし，p を f の素因数とする．このときを p 含む $\mathcal{O}_f$の極大イデアル $\mathfrak{m}$ がただ一つ存在することを示せ．

(4) (3) の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は単項イデアルではないことを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $1 = 1 + 0fi \in \mathcal{O}_f$より，$\mathcal{O}_f$は $\mathbb{Z}[i]$ の単位元を持つ．任意に $m+nfi, m'+n'fi \in \mathcal{O}_f$をとると，

$$(m+nfi)+(m'+n'fi) = (m+m')+(n+n')fi \in \mathcal{O}_f$$
$$(m+nfi)(m'+n'fi) = (mm'-nn'f^2)+(mn'+m'n)fi \in \mathcal{O}_f$$

よって，$\mathcal{O}_f$ は和と積に関して閉じている．したがって，$\mathcal{O}_f$は $\mathbb{Z}[i]$ の部分環． □

(2) $\rho : \mathbb{Z}[x] \ni x \mapsto fi \in \mathcal{O}_f$ を定める．ただし，$\rho(1) := 1$ とする．定義から，ρ は環準同型である．任意に $m+nfi \in \mathcal{O}_f$を取ったとき，$m+nx \in \mathbb{Z}[x]$ は $m+nfi = \rho(m+ni)$ を満たすからρ は全射．

このとき，$\mathrm{Ker}\rho = (x^2+f^2)$ である．任意に $g(x) \in \mathrm{Ker}\rho$ をとると，
$g(x) = h(x)(x^2+f^2)+ax+b(h(x) \in \mathbb{Z}[x]\ a, b \in \mathbb{Z})$ と表される．
よって，$0 = \rho(g(x)) = g(fi) = afi + b$ だから，$a = b = 0$．すなわち，
$g(x) = h(x)(x^2+f^2) \in (x^2+f^2)$.したがって,$\mathrm{Ker}\rho \subset (x^2+f^2)$.
また，任意に $g(x) \in (x^2+f^2)$ をとると，$g(x) = h(x)(x^2+f^2)(h(x) \in \mathbb{Z}[x])$ と表される．
よって,$\rho(g(x)) = g(fi) = h(fi)0 = 0$.すなわち，$g(x) \in \mathrm{Ker}$. したがって，$\mathrm{Ker}\rho \supset (x^2+f^2)$.

準同型定理から，$\mathcal{O}_f \simeq \mathbb{Z}[x]/\mathrm{Ker}\rho \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ □

(3) $f = mp^e$と書かれているとする．ただし，e は 1 以上の整数で m は p と互いに素である．$\mathbb{Z}[x]$ のイデアル (x,p) を考える．$x^2+f^2 = (x)x+(m^2p^{2e-1})p \in (x,p)$ に注意すると，$(x^2+f^2) \subset (x,p)$ より，$\mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ のイデアル $(x,p)+(x^2+f^2)$ が定義できる．第 3 同型定理から，

$\dfrac{\mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)}{(x,p)/(x^2+f^2)} \simeq \mathbb{Z}[x]/(x,p) \simeq \mathbb{F}_p$.よって，$(x,p)+(x^2+f^2)$ は $\mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ の極大イデアル．

このとき，$\mathfrak{m}' \subset \mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ が p を含む極大イデアルであるとする．$x^2+f^2 \in \mathfrak{m}'$ だから，$x^2 = (x^2+f^2)-(m^2p^{2e-1})p \in \mathfrak{m}'$.よって，$(x^2,p) \subset \mathfrak{m}'$．このとき，$\mathfrak{m}'$が極大イデアルであることに注意して，両辺の根基イデアルをとると $(x,p) \subset \sqrt{\mathfrak{m}'} = \mathfrak{m}'$．したがって，$(x,p) = \mathfrak{m}'$.

以上より，$\mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ で p を含むイデアルの存在とその唯一性が示された．(2) の結果から，所要の $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_f$が唯一存在することを結論できる． □

(4) (2) の帰結と (3) の証明の過程より，$(x,p)+(x^2+f^2) \subset \mathbb{Z}[x]/(x^2+f^2)$ が単項イデアルではないことを示せば十分．背理法で示す．ある $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在して，$(h(x)) = (x,p)+(x^2+f^2)$ であると仮定する．$(x^2+f^2) \subset (h(x))$ だから，ある $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在して,$x^2+f^2 = g(x)h(x)$.
x^2+f^2は $\mathbb{Z}[x]$ 上で既約だから,$\mathrm{deg}h = 0$ である．そこで，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して，$h(x) = k$ とかける．このとき，素数 p は $(h(x)) = (k)+(x^2+f^2) = (k)$ に属しているから，k は $\pm 1 \pm p$ のいずれか．さらに，$x \in (k)$ より，$k = \pm 1$ であるが，これは $(h(x)) = (k)$ が $\mathbb{Z}[x]$ と一致するため矛盾． □

$\boxed{3}$ p を素数，F を標数 p の体,$\bar{F}$を F の代数閉包とし，$F[x]$ を F の元を係数とし，x を不定元とする多項式環とする.$f(x) = x^p - x - 1 \in F[x]$ とおく.以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha \in \bar{F}$が $f(x)$ の根ならば,$\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + p - 1$ も $f(x)$ の根であることを示せ.

(2) $f(x)$ が $F[x]$ で可約ならば，$f(x)$ の根は全て F の元であることを示せ.

(3) $x^p - x - 1$ を整数係数の多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ の元とみるとき，$\mathbb{Z}[x]$ において既約であることを示せ.

解答

(1) $f(x+1) = (x+1)^p - (x+1) - 1 = x^p + \sum_{j=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_j x^j - x - 1 = x^p - x - 1 = f(x)$ に注意する．
$k = 1, \dots, p-1$ に対して，$f(\alpha + k) = f(\alpha) = 0$ が帰納的に導かれる．

(2) $f(x) \in F[x]$ は分離的である．実際，$f(x)$ を x について微分すると，$f'(x) = px^{p-1} - 1 = -1$ となり，$f(x)$ と $f'(x)$ は非自明な共通因子を持たない．$f(x) \in F[x]$ は$\bar{F}$に根をもつので，それを $\alpha \in \bar{F}$とおく．(1) から$\alpha+1, \alpha+2, \dots, \alpha+p-1$ も $f(x)$ の根である．よって，$f(x) = \prod_{k=0}^{p-1}(x-\alpha-k)$ と書ける．

$f(x)$ は可約だから，次数が $i(1 \leqq i \leqq p-1)$ の多項式 $g(x) \in F[x]$ と次数が $p-i$ の多項式 $h(x) \in F[x]$ を用いて $f(x) = g(x)h(x)$ と書ける．よって，$g(x) = \prod_{l=1}^{i}(x - \alpha - k_l)$ である．
ただし，各 k_lは $0 \leqq k_l \leqq p-1$ を満たすとする．$g(x)$ の $i-1$ 次の係数に注目すると，
$i\alpha + \sum_{l=1}^{i} k_l \in F$ が得られる．p は素数だから,$\alpha \in F$.したがって，各 $k(1 \leqq k \leqq p-1)$ に対して，$\alpha + k \in F$ である． □

(3) F の単位元を 1_Fとしたとき，準同型$\pi : \mathbb{Z} \ni l \mapsto l1_F = l \in F$ が定まる．さらに,π から誘導される多項式環の準同型を $\widetilde{\pi} : \mathbb{Z}[x] \ni h(x) \mapsto \widetilde{h}(x) \in F[x]$ とする．
背理法で示す．$x^p - x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ が可約であると仮定する．このとき，$f(x) = \widetilde{\pi}(x^p - x - 1) \in F[x]$ は可約である．(2) での議論から，$f(x) = x\prod_{k=1}^{p-1}(x-k)$ と書ける．しかし，この等式の定数項に注目すると左辺は -1 だが，右辺は 0 なので矛盾する．

$\boxed{4}$ 閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間上で定義されたなめらかな関数 $f(r) > 0, g(r)$ が

$$f'(r)^2 + g'(r)^2 = 1$$

を満たすとする．xz 平面上の曲線 $(f(r), 0, g(r))$ の z 軸についての回転面 R は

$$\mathbf{x} = (f(r)\cos\theta, f(r)\sin\theta, g(r)) \qquad r \in [a,b], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

と表される．以下の問に答えよ．

(1) 回転面 R の座標 (r, θ) についての第 1 基本形式, 第 2 基本形式を求めよ．

(2) 回転面 R のガウス曲率 K を f と f の高階微分を用いて表せ．

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\iint_R K dA$$

ただし，dA は回転面 R の面積要素とする．

解答

(1) $\mathbf{x}$ を r, θ についてそれぞれ偏微分をして計算する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_r &= (f'(r)\cos\theta, f'(r)\sin\theta, g'(r)) \\
\mathbf{x}_\theta &= (-f(r)\sin\theta, f(r)\cos\theta, 0) \\
\mathbf{x}_{rr} &= (f''(r)\cos\theta, f''(r)\sin\theta, g''(r)) \\
\mathbf{x}_{r\theta} &= (-f'(r)\sin\theta, f'(r)\cos\theta, 0) \\
\mathbf{x}_{\theta\theta} &= (-f(r)\cos\theta, -f(r)\sin\theta, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e} &:= \frac{\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\theta}{|\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\theta|} \\
&= |f(x)|^{-1}(-f(r)g'(r)\cos\theta, -f(r)g'(r)\sin\theta, f(r)f'(r)) \\
&= (-g'(r)\cos\theta, -g'(r)\sin\theta, f'(r))
\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{e}$ の計算において最後に $f(r) > 0$ の仮定を用いた．したがって，$\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = 1, \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\theta = 0, \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = f(r)^2, \mathbf{x}_{rr} \cdot \boldsymbol{e} = -f''(r)g'(r) + f'(r)g''(r), \mathbf{x}_{r\theta} \cdot \boldsymbol{e} = 0, \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \boldsymbol{e} = f(r)g'(r)$.
すなわち，第 1 基本形式は$\underline{\mathrm{diag}[1, f(r)^2]}$, 第 2 基本形式は$\underline{\mathrm{diag}[-f''(r)g'(r) + f'(r)g''(r), f(r)g'(r)]}$
□

(2) 計算をすると，ガウス曲率 K は

$$\begin{aligned}\underline{K} &= \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \\ &= -\frac{f''(r)g'(r)^2}{f(r)} + \frac{f'(r)g'(r)g''(r)}{f(r)} \\ &= -\frac{f''(r)\left(1-f'(r)^2\right)}{f(r)} + \frac{f'(r)\left(1-f'(r)^2\right)'}{2f(r)} \\ &= \underline{-\frac{f''(r)}{f(r)}}\end{aligned}$$

$\square$

(3) $dA = |\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\theta| dr d\theta = f(r) dr d\theta$ なので，(2) の結果を用いると，

$$\underline{\iint_R K dA} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b -\frac{f''(r)}{f(r)} f(r) dr = \underline{2\pi\left(f'(a)-f'(b)\right)}$$

$\square$

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，S^{n-1} を次で定める (ただし，$n \in \mathbb{N}$).

$$S^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}.$$

写像 $F_n : S^{n-1} \to M(n,n;\mathbb{R})$ を

$$F_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} \in M(n,n;\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M(n,1;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$$

により定め，N_n を F_n の像とする．ただし，$m \times n$ 実行列全体を $M(m,n;\mathbb{R})$ で表し，自然にユークリット空間 $\mathbb{R}^m n$ と同一視する．また，行列 $A \in M(m,n;\mathbb{R})$ に対して，${}^tA \in M(n,m;\mathbb{R})$ は A の転置行列を表す．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^{n-1}$ について，$F_n(\boldsymbol{x}) = F_n(\boldsymbol{y})$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x}$ であることを示せ．

(2) S^{n-1} 上の同値関係 $\sim$ を次で定めるとき，商空間 $S^{n-1}/\sim$ が N_n と同相であることを示せ．

$$\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x}$$

(3) $N_n = \left\{P \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid {}^tP = P, P^2 = P, \mathrm{rank}P = 1\right\}$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{rank}P$ は行列 P の階数を表す．

解答

(1) $I \in M(n,n;\mathbb{R})$ を単位行列とする．

($\Longleftarrow$)

$\boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x} = (\pm I)\boldsymbol{x}$ だから，

$$F_n(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}{}^t\boldsymbol{y} = (\pm I)\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}(\pm{}^tI) = (\pm I)\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}(\pm I) = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = F_n(\boldsymbol{x})$$

($\Longrightarrow$)

$F_n(\boldsymbol{x}) = F_n(\boldsymbol{y})$ だから，右から行列として $\boldsymbol{y} \in S^{n-1}$ をかけると，$({}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^{n-1}$ は 0 ではないので，ある $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して，$\boldsymbol{y} = k\boldsymbol{x}$.再び $\boldsymbol{x}$ が 0 ではないことに注意すると，$F_n(\boldsymbol{x}) = F_n(\boldsymbol{y})$ より $(1-k^2)\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = 0$ なので $k = \pm 1$. $\square$

(2) 射影 $p : S^{n-1} \to S^{n-1}/\sim$ を定める．行列の積の定義から F_nの各成分は二つの変数の積となっているので，F_nは連続である．(1) の必要十分条件から，等化空間の普遍性により以下の可換図式が得られる．ただし，$\widetilde{F_n}$ は連続な単射である．

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "F_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", pos=0.3, shift right=3] & \\
S^{n-1}/\sim \arrow[r, dotted, "\exists! \widetilde{F_n}"'] & N_n
\end{tikzcd}$$

さらに，$N_n = \mathrm{Im}F_n$であることと可換図式から，$\widetilde{F_n}$ は全単射．また，$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトなので，$S^{n-1}/\sim \ = p(S^{n-1})$ はコンパクト．$M(n,n;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$はHausdorff 空間なので，その部分空間である N_n も Hausdorff 空間である．したがって，$\widetilde{F_n} : S^{n-1}/\sim \to N_n$ は同相写像． $\square$

(3) $A := \left\{ P \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid {}^tP = P, P^2 = P, \mathrm{rank}P = 1 \right\}$ とおく．

($\subset$)

$P \in N_n$をとる．このとき，ある $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$が存在して，$P = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}$ と書ける．よって，

${}^tP = {}^t(\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = P, P^2 = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = P$ である．さらに，$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\boldsymbol{x} \oplus (\mathbb{R}\boldsymbol{x})^\perp$と表されるから，

$$\mathrm{rank}P{=}\dim\ \mathrm{Im}P{=}\dim\ \mathbb{R}\boldsymbol{x}{=}1$$

したがって，$P \in A$.

($\supset$)

$P \in A$ をとる.${}^tP = P, P^2 = P$ より，$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P$ である．実際，$P^2 = P$ より $\mathrm{Ker}P$ $= \mathrm{Im}(I-P)$ で,${}^tP = P$ より P と $I-P$ が直交して,$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(I-P) \oplus \mathrm{Im}P$ となっている．
さらに,$\mathrm{rank}P = 1$ だから，ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$が存在して $\mathrm{Ker}P = (\mathbb{R}\boldsymbol{x})^\perp, \mathrm{Im}P = \mathbb{R}\boldsymbol{x}$ と書ける．したがって，ある直交行列 $Q \in M(n,n;\mathbb{R})$ が存在して,${}^tQPQ = E_{11}$.ただし，$E_{ij} \in M(n,n;\mathbb{R})$ は (i,j) 成分が 1 でその他の成分が 0 である行列とする．このとき，Q の一列目の列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とおくと $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$かつ，$P = QE_{11}E_{11}{}^tQ = \boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}$.すなわち，$P \in N_n$. $\square$

$\boxed{6}$ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$には標準的な可微分多様体の構造が入っているとする．$\mathbb{R}^2$の部分多様体 S^1を次で定める：

$$S^1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$の部分多様体で直積多様体 $S^1 \times S^1$と微分同相になるものが存在する ことを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$の部分多様体で直積多様体 $S^1 \times S^1 \times S^1$と微分同相になるものが存在する ことを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $\mathbb{R}^3 \supset \mathcal{T}^2 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 - 1 = 0 \right\}$ とおく．パラメータ$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ を用いて，$\mathcal{T}^2$上の点は $\begin{pmatrix} \cos\theta(2+\cos\varphi) \\ \sin\theta(2+\cos\varphi) \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ と書ける．よって，$(x,y,z) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 - 1$ を考えると $\mathcal{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$は部分多様体である．

$$f : \mathcal{T}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} - 2 \\ z \end{pmatrix} \in S^1 \times S^1 \qquad g : S^1 \times S^1 \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1(2+u_2) \\ v_1(2+u_2) \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^2$$

を定義する．各成分に注目すると，f と g は C^∞級写像であり，$f \circ g = \mathrm{id}_{S^1 \times S^1}$かつ $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{T}^2}$.
したがって，微分同相として $\mathbb{R}^3 \supset \mathcal{T}^2 \cong S^1 \times S^1$であり，$\mathcal{T}^2$は所要の部分多様体である． $\square$

(2) $F(x,y,z) := \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2}, \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{T}^3 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4\left(F(x,y,z) - 1\right)^2 + w^2 - 1 = 0 \right\}$

とおく．パラメータ$\theta, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ を用いて，$\mathcal{T}^3$上の点は $\begin{pmatrix} \cos\theta\left(2 + \cos\varphi(1 + \frac{\cos\psi}{2})\right) \\ \sin\theta\left(2 + \cos\varphi(1 + \frac{\cos\psi}{2}\right) \\ \sin\varphi(1 + \frac{\cos\psi}{2}) \\ \sin\psi \end{pmatrix}$

と書ける．よって，$(x,y,z,w) \mapsto 4\left(F(x,y,z) - 1\right)^2 + w^2 - 1$ を考えると $\mathcal{T}^3 \subset \mathbb{R}^4$は部分多様体である．

$$
f : \mathcal{T}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{8(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\{2F(x,y,z)\}^2+w^2+3} \\ \frac{8z}{\{2F(x,y,z)\}^2+w^2+3} \\ \{F(x,y,z)\}^2 + \frac{w^2}{4} - \frac{5}{4} \\ w \end{pmatrix} \in S^1 \times S^1 \times S^1
$$

$$
g : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \left(2 + u_2(1 + \frac{u_3}{2})\right) \\ v_1 \left(2 + u_2(1 + \frac{u_3}{2})\right) \\ v_2(1 + \frac{u_3}{2}) \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^3
$$

を定義する．各成分に注目すると，f と g は C^∞級写像であり，$f \circ g = \mathrm{id}_{S^1 \times S^1 \times S^1}$かつ $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{T}^3}$.
したがって，微分同相として $\mathbb{R}^3 \supset \mathcal{T}^3 \cong S^1 \times S^1 \times S^1$であり，$\mathcal{T}^3$は所要の部分多様体である． □

$\boxed{7}$ μを $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする.$\mathbb{R}$ 上の関数 $P(x), Q(x)$ を

$$
P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, Q(x) = \frac{x}{1+x^2}
$$

と定める．また，正の実数 t に対して，

$$
P_t(x) = \frac{1}{t} P\left(\frac{x}{t}\right), Q_t(x) = \frac{1}{t} Q\left(\frac{x}{t}\right)
$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P_t(x) d\mu(x)$ の値を求めよ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数で，有界かつ $x = 0$ で連続であるとする．
このとき，

$$
\lim_{t \to 0+} \int_{\mathbb{R}} P_t(x) f(x) d\mu(x) = f(0)
$$

が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数で，ある正の実数 M が存在して，

$$
|f(x)| \leq \tfrac{M}{1+|x|} \ (x \in \mathbb{R})
$$

を満たし，かつ x=0 で連続であるとする．このとき，

$$
\lim_{t \to 0+} \left\{ \int_{\mathbb{R}} Q_t(x) f(x) d\mu(x) - \int_{|x|>t} \frac{f(x)}{x} d\mu(x) \right\} = 0
$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 計算をすると，

$$
\begin{aligned}
\underline{\int_{\mathbb{R}} P_t(x) d\mu(x)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + x^2} d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \underline{1}
\end{aligned}
$$

□

(2) f : 有界 なので，ある $M \geq 0$ が存在して，$|f(x)| \leq M$ for$^\forall x \in \mathbb{R}$.$|P(x)f(tx)| \leq MP(x)$ for$^\forall x \in \mathbb{R}$ かつ (1) より $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} MP(x)d\mu(x) = M < \infty$ なので,f が x=0 で連続であることと合わせてルベーグの優収束定理から，

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}} P_t(x)f(x)d\mu(x) = \lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}} P(x)f(tx)d\mu(x) = f(0)\int_{\mathbb{R}} P(x)d\mu(x) = f(0)$$

ただし，最初の式変形で置換積分を実行した． □

(3) f についての仮定から，ある正の実数 M が存在して，$|f(x)| \leq \frac{M}{1+|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ を満たすので，$\displaystyle\int_{|x|>t}\left|\frac{f(x)}{x}\right|d\mu(x) < \infty$ かつ $|f(x)| \leq M$ for $^\forall x \in \mathbb{R}$.$\displaystyle I(t) := \int_{\mathbb{R}} Q_t(x)f(x)d\mu(x) - \int_{|x|>t}\frac{f(x)}{x}d\mu(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{\mathbb{R}} Q(y)f(ty)d\mu(y) - \int_{|y|>1}\frac{f(ty)}{y}d\mu(y) \qquad\qquad < x = ty > \\ &= \int_{-1}^{1} Q(y)f(ty)d\mu(y) - \int_{|y|>1}\frac{f(ty)}{y(1+y^2)}d\mu(y) \\ &=: I_1(t) - I_2(t) \end{aligned}$$

$I_1(t)$ について，$\displaystyle|Q(y)f(ty)| \leq \frac{M|y|}{1+y^2} \leq \frac{M}{1+y^2}$ for $^\forall y \in [-1,1]$ かつ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{M}{1+y^2}d\mu(y) = M\pi < \infty$ なので，f が $x=0$ で連続であることと合わせてルベーグの優収束定理から，

$$\lim_{t\to 0+} I_1(t) = f(0)\int_{-1}^{1} Q(y)d\mu(y) = \frac{f(0)}{2}\left[\log(1+y^2)\right]_{-1}^{1} = 0$$

$I_2(t)$ について，$\displaystyle\left|\frac{f(ty)}{y(1+y^2)}\right| \leq \frac{M}{1+y^2}$ $(|y|>1)$ かつ $\displaystyle\int_{|y|>1}\frac{M}{1+y^2}d\mu(y) \leq \int_{\mathbb{R}}\frac{M}{1+y^2}d\mu(y)$ $= M\pi < \infty$ なので，f が $x=0$ で連続であることと合わせてルベーグの優収束定理から，

$$\lim_{t\to 0+} I_2(t) = f(0)\int_{|y|>1}\frac{d\mu(y)}{y(1+y^2)} = f(0)\left\{\int_{1}^{\infty}\frac{d\mu(y)}{y(1+y^2)} + \int_{-\infty}^{-1}\frac{d\mu(y)}{y(1+y^2)}\right\} = 0$$

したがって，$\displaystyle\lim_{t\to 0+} I(t) = \lim_{t\to 0+} I_1(t) - \lim_{t\to 0+} I_2(t) = 0$ なので所要の極限を得た． □

$\boxed{8}$ $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を複素平面内の原点を中心とする単開円板であるとし，$\bar{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ を Δ の閉包とする．$f(z)$ は$\bar{\Delta}$上の連続関数で,Δ で正則な複素関数であるとする．以下の問に答えよ．

(1) $z = x + iy(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき，次の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

(2) $\bar{\Delta}$の境界上で $|f(z)| = 1$ となるとき，$f(z)$ はΔ で零点をもつか $f(z)$ は定数関数であるかのいずれかであることを示せ．

解答

(1) $f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ とおく．$f(z)$ はΔ で正則な複素関数であるから，u, v は $\mathbb{R}^2$上の単位開円板上の調和関数 $(u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0)$ である．Cauchy Riemann の微分方程式と合わせて，

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

したがって，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{u(x,y)\}^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{u(x,y)\}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{v(x,y)\}^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{v(x,y)\}^2 \\ &= 2u_x(x,y)^2 + 2u_{xx}(x,y)u(x,y) + 2v_x(x,y)^2 + 2v_{xx}(x,y)v(x,y) \\ &\quad + 2u_y(x,y)^2 + 2u_{yy}(x,y)u(x,y) + 2v_y(x,y)^2 + 2v_{yy}(x,y)v(x,y) \\ &= 2\left(u_x(x,y)^2 + v_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2 + v_y(x,y)^2\right) \\ &= 2\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right|^2\right) \\ &= 2\left(|f'(z)|^2 + |f'(z)|^2\right) \\ &= 4|f'(z)|^2 \end{aligned}$$

□

(2) $f(z)$ はΔ で零点をもたないとする．f がΔ 上の定数関数であることを示せばよい．背理法で示す．Δ で零点をもたない f が定数関数ではない関数であると仮定する．このとき，$f(z), \frac{1}{f(z)}$ は$\bar{\Delta}$上の連続関数で,Δ で正則な複素関数である.$\bar{\Delta}$の境界上で $|f(z)| = 1$ なので最大絶対値の原理より，任意の $z \in \Delta$に対して $|f(z)| < 1$ かつ$\frac{1}{f(z)} < 1$ だが，これは矛盾． □

$\boxed{10}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$を区間 $[0,\theta]$ 上の一様分布からの無作為標本とする．θ の最尤推定量を $\hat{\theta}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\hat{\theta}$ を求めよ．

(2) θ の信頼区間 $[c_1\hat{\theta}, c_2\hat{\theta}]$ を考える．ただし，c_1, c_2は $c_1 < c_2$を満たす実数とする．信頼係数を $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ としたとき，信頼区間の長さを最小にする c_1, c_2を求めよ．

解答

(1) 各 i $(i=1,2,\ldots,n)$ に対して，X_iの密度函数 $f(x_i|\theta)$ は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
f(x_i|\theta) &:= \begin{cases} \frac{1}{\theta} & x_i \in [0,\theta] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&= \frac{1}{\theta}\chi_{[0,\theta]}(x_i)
\end{aligned}
$$

ただし，χ は $[0,\theta]$ 上の indicator function とする．

このとき，尤度函数 $L_n(\theta)$ は，

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}\chi_{[0,\theta]}(x_i)$$

θ について，以下のように場合分けをする：

Case.1 $\quad \theta < \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ のとき

ある番号 i で $\chi_{[0,\theta]}(x_i) = 0$ となるから，$L_n(\theta) = 0$.

Case.2 $\quad \theta \geqq \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ のとき

すべての番号 i に対して $\chi_{[0,\theta]}(x_i) = 1$ となるから，$L_n(\theta) = \frac{1}{\theta^n}$.

このとき，$\frac{1}{\theta} \leqq \frac{1}{\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}}$ だから，$L_n(\theta)$ は $\theta = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ において最大値をとる．

以上より，最尤推定量は $\underline{\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}}$ $\square$

(2) 実数 c_1, c_2について，$[c_1\hat{\theta}, c_2\hat{\theta}]$ が信頼区間の長さを最小とするとき，次を満たす：

$$P(c_1\hat{\theta} \leqq \theta \leqq c_2\hat{\theta}) = 1-\alpha$$

まず，$c_1 > 0$ の場合を考える．この等式を変形すると，次が得られる：

$$P(\tfrac{1}{c_2} \leqq \tfrac{\hat{\theta}}{\theta} \leqq \tfrac{1}{c_1}) = 1-\alpha \ \cdots\cdots ①$$

そこで，確率変数 $\hat{\theta}$の分布函数を $F_{\hat{\theta}}$とすると，

$$
\begin{aligned}
F_{\hat{\theta}}(x) &:= P(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leqq x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(x_i \leqq x) \\
&= \begin{cases} 1 & x > \theta \\ \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=0}^{n}\int_0^x dx_i & 0 \leqq x \leqq \theta \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & x > \theta \\ \frac{x^n}{\theta^n} & 0 \leqq x \leqq \theta \\ 0 & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

それゆえ，確率変数 $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$の分布函数を $F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}$とすると，

$$F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x^n & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

信頼区間の長さを最小とする組 (c_1, c_2) は $c_2 - c_1$ を最小とする. このとき，c_1 について，以下のように場合分けができる：

Case.1 $\quad 0 < c_1 < 1$ のとき

$\frac{1}{c_1} > 1$ だから，$F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}$ と①より $c_2 = \alpha^{-\frac{1}{n}}$ である．よって，

$$c_2 - c_1 = \alpha^{-\frac{1}{n}} - c_1 > \alpha^{-\frac{1}{n}} - 1$$

Case.2　$c_1 \geqq 1$ のとき

$0 < \frac{1}{c_2} < \frac{1}{c_1} \leqq 1$ だから，

$$1 - \alpha = P(\tfrac{1}{c_2} \leqq \tfrac{\hat{\theta}}{\theta} \leqq \tfrac{1}{c_1}) = F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}(\tfrac{1}{c_1}) - F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}(\tfrac{1}{c_2}) = (\tfrac{1}{c_1})^n - (\tfrac{1}{c_2})^n$$

そこで，$g(t) := \{t^{-n} - (1-\alpha)\}^{-\frac{1}{n}} - t$ for $1 \leqq t < (1-\alpha)^{-\frac{1}{n}}$
とおくと，$g'(t) = \{1 - (1-\alpha)t^n\}^{-\frac{n+1}{n}} - 1$ だから，g の増減表は以下である：

t	1	$\cdots$	$\dfrac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}}$
g'		$+$	
g	$\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1$	$\nearrow$	

よって，$c_2 - c_1 \geqq \alpha^{-\frac{1}{n}} - 1$．ただし，等号は $(c_1, c_2) = (1, \alpha^{-\frac{1}{n}})$ で成立.

したがって，$c_1 > 0$ のとき，$(c_1, c_2) = (1, \alpha^{-\frac{1}{n}})$ は信頼区間の長さを最小とする.
次に，$c_1 \leqq 0$ のときを考える．$F_{\hat{\theta}}, F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}$ の定義域と値域から，
$1 - \alpha = P(0 \leqq \theta \leqq c_2\hat{\theta}) = P(\frac{1}{c_2} \leqq \frac{\hat{\theta}}{\theta}) = 1 - F_{\frac{\hat{\theta}}{\theta}}(\frac{1}{c_2})$. よって，$c_2 = \alpha^{-\frac{1}{n}}$. それゆえ，

$$c_2 - c_1 = \alpha^{-\frac{1}{n}} - c_1 \geqq \alpha^{-\frac{1}{n}}$$

以上より，$\underline{(c_1, c_2) = (1, \alpha^{-\frac{1}{n}})}$は信頼区間の長さを最小とする.　□