易守拙 2024300001103
计算理论导引
2025 年 11 月 3 日

计算理论导引第二周作业

Question 1. 设 $T(n), T'(n)$ 为时间可构造. 证明 $T(n)+T'(n)$、$T(n)\cdot T'(n)$、$T(n)^{T'(n)}$ 均为时间可构造. 能证明 $T(n)/T'(n)$ 是时间可构造吗?$\log T(n)$ 呢?

设 $\mathbb{M}_{\mathbb{T}}$ 和 $\mathbb{M}_{\mathbb{T}'}$ 分别是计算 $T(n)$ 和 $T'(n)$ 的图灵机.

- $T(n)+T'(n)$: 考察这样的 $\mathbb{M}_{+}$, 它先和 $\mathbb{M}_{\mathbb{T}}$ 执行一样的运算操作, 在执行完成后, 它不清空带子, 而是继续进行和 $\mathbb{M}_{\mathbb{T}'}$ 一样的操作, 最后把他们的计算结果加起来, 这个二进制加法操作的开销是 $O(\log(n))$ 的. 所以总运行时间是 $O(T(n)+T'(n))$ 步. 因此, $T(n)+T'(n)$ 是时间可构造的.
- $T(n)\cdot T'(n)$: 考察这样的 $\mathbb{M}_{.}$, 它进行如下操作: 先和 $\mathbb{M}_{\mathbb{T}}$ 执行一样的运算操作, 待完成后, 再一个独立的带子上写下一个 1, 这个循环持续 $T'(n)$ 遍. 由于 $T'(n)$ 时间可构造, 这个操作是可以被图灵机实现的, 所以 $T(n)\cdot T'(n)$ 是时间可构造的.
- $T(n)^{T'(n)}$: 类似上一个, 构建一个循环.
  先计算 $T(n)$ (需要 $T(n)$ 步), 再计算 $T'(n)$ (需要 $T'(n)$ 步); 因为根据定义, 我们需要最后 $T(n)^{T'(n)}$ 的二进制表示, 所以需要执行一个 $T'(n)$ 次的循环, 在循环体中, 执行一个 $T(n)$ 次的乘法操作. 乘法操作参考 (2), 是时间可构造的.
- $T(n)/T'(n)$: 不行. 若 $T(n)=2^{2^n}, T'(n)=2^n$, 需要用 $\mathbb{M}_{\mathbb{T}}$, 先算出 $T(n)$ 的值是多少, 但是 $T(n)\gg T(n)/T'(n)$, 不能被写成大 O 的形式.
- $\log T(n)$: 同理不行.

Question 2. 在通用图灵机的证明中, 我们让 $|R_i| = 2\cdot 2^{i^2}$. 证明在哪一步会出问题? 如果没有问题的话, 我们会得到一个更高效的通用图灵机!

由于更改, 我们必须在原来的证明中把冗余信息的存放方式修正为: 要么全空, 要么存 $\log(\frac{R_i}{2})/2$(替代半满), 要么存 $\log(\frac{R_i}{2})$(替代全满).

问题出在最后的移动冗余信息中. 考察一个简单的图灵机 $\mathbb{M}$, 它只是简单地将其读写头向右移动 $T(n)$ 个单元格, 每步都在纸带上写入一个符号. 令 $S(i)$ 为从中心点 0 到段 R_{i-1} 末尾的总容量. $S(i)=\sum_{j=0}^{i-1}|R_j| = \sum_{j=0}^{i-1} 2\cdot 2^{j^2}$.

为了让 M 的读写头移动到第 $S(k)+1$ 个单元格, U 必须已经执行了所有 $i=1,2,\ldots,k$ 的重组操作, 把 R_i 的冗余信息搬到前面 $1\sim i-1$ 个格子内. 则:

$$T(n) \geq \sum_{i=1}^{k} C_i = \sum_{i=1}^{k} O(2^{i^2}) = O(2^{k^2})$$

取 $k=\sqrt{\log_2 T(n)}+1$, 代回 $T_U(n)$:

$$T^{'}(n) = O(2^{\log_2 T(n)+2\sqrt{\log_2 T(n)}+1}) = O(2^{\log_2 T(n)}\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 T(n)}}\cdot 2^1) = O(T(n)\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 T(n)}}) \tag{1}$$

他的效率很低下.

Question 3. 说明: 若忽略不终止性, 在第 28 页上定义的非确定的"通用"图灵机是正确的.

(⇒). 根据非确定性计算的定义, 如果 $\mathbb{N}_\alpha$ 接受输入 x, 那么必然存在至少一条从初始格局到接受格局的合法计算路径. 设这条接受路径为格局序列 $\mathcal{C}=(C_0, C_1, \ldots, C_m)$, 其对应的非确定性选择序列为 $\mathcal{D}=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$.

$\mathbb{V}$ 本身是一台非确定图灵机, 它能够探索所有可能的计算分支. 因此, 必然存在一 $\mathbb{V}$ 的计算路径, 在该路径上, 它所猜测的格局序列恰好是 $\mathcal{C}$, 猜测的选择序列恰好是 $\mathcal{D}$. 此时被猜测的序列本身就是一条合法的接受路径, 所有验证步骤都会成功,$\mathbb{V}$ 将停机并成功模拟了运算.

(⇐). 如果 $\mathbb{V}$ 接受输入 $\langle\alpha, x\rangle$, 那么必然存在至少一条 $\mathbb{V}$ 的计算路径使其进入接受状态. 在这条使 $\mathbb{V}$ 接受的路径上, 它必须成功地完成"猜测"和"验证"两个阶段.$\mathbb{V}$ 所猜测的格局序列 $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \ldots, C_m)$ 和选择序列 $\mathcal{D} = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ 必须满足以下所有条件:

- C_0 被验证为是 $\mathbb{N}_\alpha$ 在输入 x 上的初始格局.
- C_m 被验证为是一个接受格局.
- 对所有 $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, 转移 $C_i \to C_{i+1}$ 被验证为是 $\mathbb{N}_\alpha$ 在选择 δ_{i+1} 下的一步合法操作.

根据定义,$\mathbb{N}_\alpha$ 接受 x.

Question 4. 证明: 设图灵机 $\mathbb{M}$ 在 $T(n) = \omega(n)$ 步内判定 L. 对任意 $\varepsilon > 0$, 有图灵机 $\mathbb{M}'$,$\mathbb{M}'$ 能在 $\varepsilon T(n)$ 步内判定 L.

根据课堂上讲过的 ($T(n) = \omega(n)$ 不一定成立的) 线性加速定理, 我们知道, 有图灵机 $\mathbb{M}'$, 它能在 $F(n) \triangleq \varepsilon_1 T(n) + n + 2$ 步内判定 L, 其中 $\varepsilon_1 > 0$.

由于 $T(n) = \omega(n)$, 知 $\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$,

$$0 < \frac{n+2}{T(n)} < \delta \Longrightarrow F(n) < (\varepsilon_1 + \delta) T(n).$$

我们取 $\varepsilon_1 = \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ 即可.