第六章

模糊集合

6.1 引言

- **模糊邏輯**是由 Zadeh 教授於 1965 年所提出一種以數學模型來描述語意式的模糊資訊的方法，我們可以將其視為是傳統的集合理論的一種推廣型式。
- 模糊化的好處是可以提供更佳的**推廣性**、**錯誤容忍性**、以及更適合應用在真實世界中的非線性系統。
- 模糊邏輯的應用領域包括了：控制工程 (如智慧型控制)、圖樣識別 (影像處理、語音辨識、信號處理等)、量化分析、專家診斷系統、預測、排程、自然語言處裡、軟體工程等。

6.2 模糊集合 (1)

- 傳統的明確集合是屬於**二元的**，論域中的元素對某一集合的關係只有兩種，也就是 “**屬於**” 與 “**不屬於**” 。
- 我們可以定義一個「特徵函數」來描述此種關係，令 U 為整個論域，A 為論域中的一個明確集合，x 為論域中的元素，則特徵函數 $\lambda_A(x)$ ，定義如下：

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- 模糊集合是明確集合的一種推廣。我們可以定義在論域 U 中的一個模糊集合 A 為：

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\},$$

其中 $\mu_A(.)$ 是模糊集合 A 的歸屬函數， $\mu_A(x)$ 代表元素 x 對模糊集合 A 的歸屬程度。一般說來，我們將$\mu_A(x)$ 設定為 [0,1] 。

範例 6.1 擁有連續性論域之模糊集合

- 我們定義模糊集合 A 為 “接近於 0 的實數”，則我們可以定義模糊集合 A 為 $A=\{(x,\mu_A(x))|x\in U\},$
- 其中歸屬函數的定義為： $\mu_A(x)=\dfrac{1}{1+10x^2},$
- 模糊集合 A 也可以表示為：

$$A=\{(x,\mu_A(x))|\mu_A(x)=[1+10x^2]^{-1}\}.$$

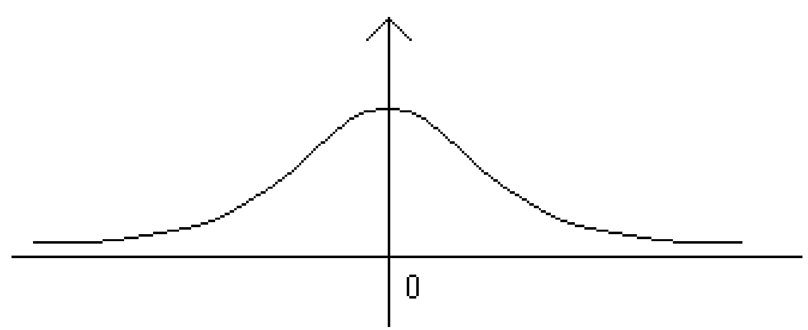


圖 6.1 ： “接近於 0 的實數” 之模糊集合。

範例 6.2 擁有離散性論域之模糊集合

假設 $U=\{0,1,2,\ldots,9\}$ 為代表一個家庭中，所可能擁有子女個數的集合，令三個模糊集合之定義為 A ：子女數眾多， B ：子女數適中， C ：子女數很少，其歸屬函數的定義如表 6.1 所示。

子女數	子女眾多 (A)	子女適中 (B)	子女很少 (C)
0	0	0	1
1	0	0	1
2	0	0.2	0.8
3	0	0.7	0.2
4	0	1	0.1
5	0.1	0.7	0
6	0.3	0.2	0
7	0.8	0	0
8	1	0	0
9	1	0	0

6.2 模糊集合 (2)

- 模糊集合的 **“支集 (support)”** 定義為所有具有歸屬函數值大於 0 的元素集合 $Supp(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$
- 當模糊集合的支集為單一個點，而且此點的歸屬函數值為 1 時，我們稱為「**模糊單點 (fuzzy singleton)** 」；
- 而模糊集合的「核 (kernel) 」的定義為所有具有歸屬函數值為 1 的元素集合，亦即
  ；

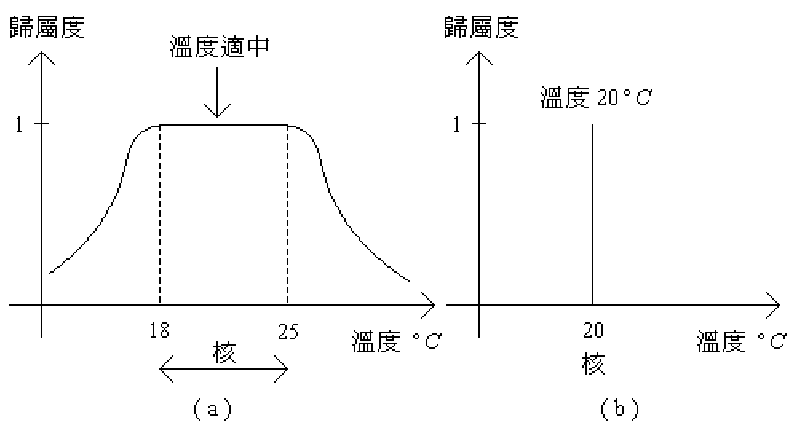


圖 6.2 ：模糊集合的“核”之範例。

6.2 模糊集合 (3)

- 模糊集合的「**高度 (height)**」的定義為此集合在論域中的最大歸屬函數值；正規化 (normal) 的模糊集合代表此模糊集合的高度為 1 ，也就是 $height(A)=1$
- 模糊集合的 **α - 截集 (α-cut)** 的定義為論域中，歸屬函數值大於或等於 α 的所有元素的集合，我們以符號 A_α 代表，也就是：

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1]$$

- 模糊集合為 **"凸的"** 的充要條件是其 α - 截集皆為凸集合 (con vex set) ，也就是說：

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

其中 $x_1, x_2 \in U$, $\lambda \in [0,1]$ 。

- 如果一個定義於實數線上的模糊集合滿足以下兩個條件，則可被視為 **"模糊數 (fuzzy number)"**： **(1) 正規化的**， **(2) 凸的**。

6.3 歸屬函數 (1)

- 只要是函數值都是位於 [0,1] 的區間內的函數，都可成為歸屬函數，以下介紹一些常見的歸屬函數：
- **三角形歸屬函數**：
- **梯形歸屬函數**：
- **高斯函數歸屬函數**： $\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$
- ***s* 函數歸屬函數**：

$$S(x;a,b) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a \le x < \frac{a+b}{2} \\ 1-2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

- **π 函數歸屬函數**：

$$\pi(x;a,b) = \begin{cases} S(x;b-a,b) & x < b \\ 1-S(x;b,b+a) & x > b \end{cases}$$

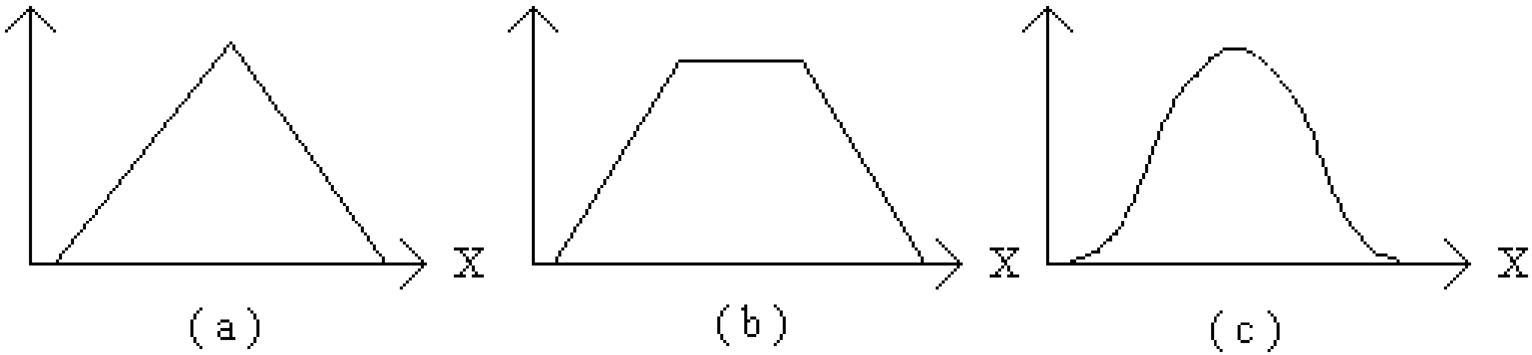


圖 6.4 ： (a) 三角形歸屬函數 ; (b) 梯形歸屬函數 ; (c) 高斯函數歸屬函數。

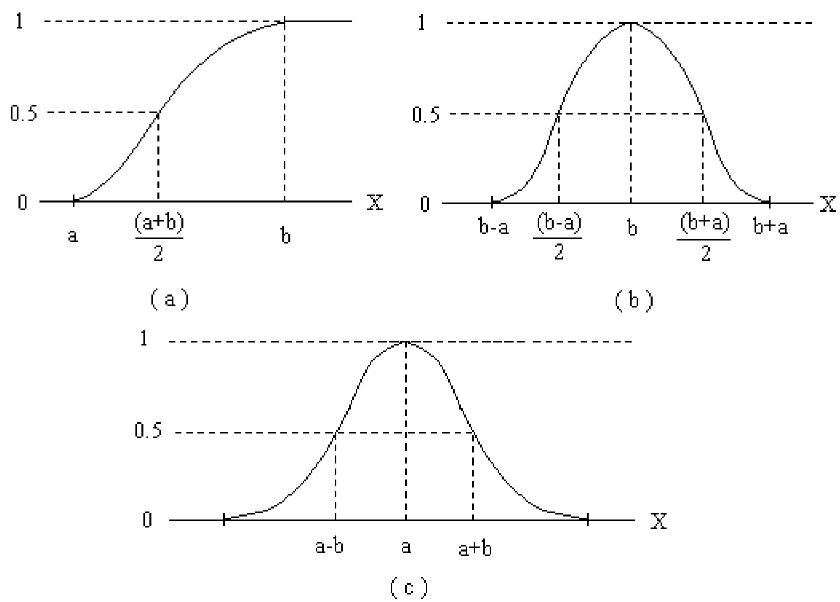


圖 6.5 ： (a) *s* 函數歸屬函數 ; (b) π 函數歸屬函數 ; (c) 簡化的 π 函數歸屬函數。

6.4 模糊集合之運算子 (1)

- **補集**： $\mu_{\overline{A}}(x) \triangleq 1 - \mu_A(x), \forall x \in U$
- **交集**： $\mu_{A \cap B}(x) \triangleq \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
  $\equiv \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \forall x \in U$
- **聯集**： $\mu_{A \cup B}(x) \triangleq \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
  $\equiv \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \forall x \in U$

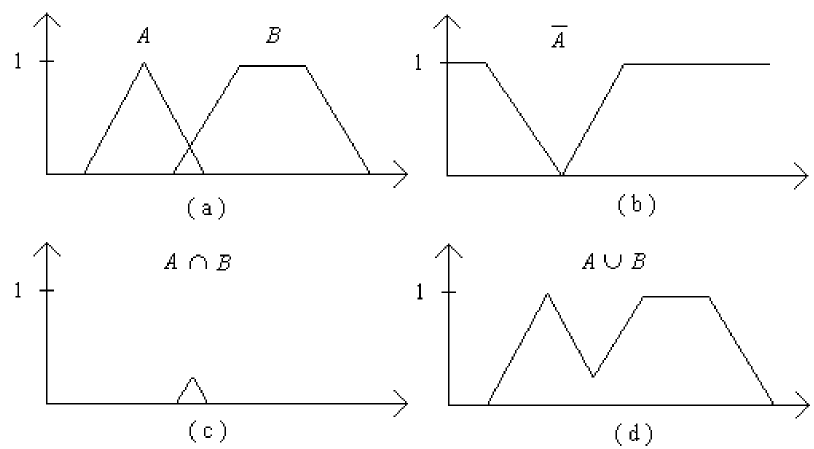


圖 6.6 ：(a) 模糊集合 A 與 B ; (b) 模糊集合 A 的補集 ;
(c) 模糊集合 A 與 B 的交集 ; (d) 模糊集合 A 與 B 的聯集。

6.4 模糊集合之運算子 (2)

- **相等：** $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$

- 模糊集合的 **“相似程度”** 的量測可用 $E(A,B) \equiv \text{degree}(A = B)$

  $$\triangleq \frac{|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|}{|A \cup B|}$$

- **子集**： $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in U$

- 模糊集合 B 對模糊集合 A 的 “**包含程度**” 的量測可用

  $$S(A,B) \equiv \text{degree}(A \subseteq B)$$

  $$\triangleq \frac{|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|}{|A|}$$

6.4.1　模糊補集 (1)

- 我們以符號 A 來表示模糊集合 A 的補集，補集函數的定義為：

$$c: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

使得 $\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_A(x))$

其中，補集函數 $C(.)$ 必須符合以下四個條件：

(1) **邊界條件** (Boundary condition)： c(0)=1 以及 c(1)=0
(2) **單調性** (Monotonic property)：
若 $\mu_A(x_1) < \mu_A(x_2)$ 則 $c(\mu_A(x_1)) \geq c(\mu_A(x_2))$

(3) **連續性** (Continuity)：補集函數 C(.) 必須是一個連續的函數。
(4) **可逆性** (Involution)： $c(c(\mu_A(x))) = \mu_A(x), \forall x \in U$

6.4.1 模糊補集 (2)

- **負補集** (Negation complement) ：$\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_A(x)) \triangleq 1 - \mu_A(x), \forall x \in U$

∀ **λ 補集** (λ complement) (Sugeno's complement) ：$\mu_{\overline{A}^{\lambda}}(x) = c(\mu_A(x)) \triangleq \dfrac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)}, -1 < \lambda < \infty$

- ***w* 補集** (*w* complement) (Yager's complement) ：$\mu_{\overline{A}^{w}}(x) = c(\mu_A(x)) \triangleq (1-\mu_A^w(x))^{1/w}, 0 < w < \infty$

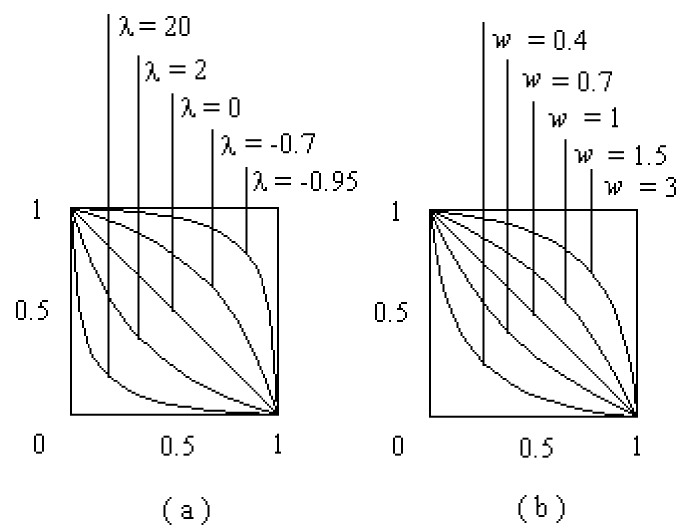


圖 6.7 ：(a) λ 補集；(b) *w* 補集。

6.4.2 模糊交集 (1)

- 模糊交集 (或稱 t-norms) 是一個具有兩個參數的函數，定義為：

$$t:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

使得 $\mu_{A\cap B}(x)=t[\mu_a(x),\mu_B(x)]$

其中，模糊交集函數 必須符合以下四個條件：

1. 邊界條件： $t(0,0)=0$ 以及 $t(\mu_A(x),1)=t(1,\mu_A(x))=\mu_A(x)$

2. 單調性：若 $\mu_A(x)<\mu_C(x)$ 以及 $\mu_B(x)<\mu_D(x)$ 則

$$t(\mu_A(x),\mu_B(x))\le t(\mu_C(x),\mu_D(x))$$

3. 交換性：

$$t(\mu_A(x),\mu_B(x))=t(\mu_B(x),\mu_A(x))$$

4. 結合性：

$$t(\mu_A(x),t(\mu_B(x),\mu_c(x)))=t(t(\mu_A(x),\mu_B(x)),\mu_C(x))$$

6.4.2 模糊交集 (2)

四種最常被使用的非參數型 (nonparametric) 的模糊交集包括 (為了簡化表示式我們令 $a \equiv \mu_A(x)$ $b \equiv \mu_B(x)$ 以及)：

1. 最小值 (Minimum)：

$$t_{\min}(a,b) = a \wedge b = \min(a,b)$$

2. 代數積 (Algebraic product)：

$$t_{ap}(a,b) = a \cdot b = ab$$

3. 邊界積 (Bounded product)：

$$t_{bp}(a,b) = a \Theta b = \max(0, a+b-1)$$

4. 激烈積 (Drastic product)：

$$t_{dp}(a,b) = a \hat{\cdot} b = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & a,b < 1 \end{cases}$$

$$a \hat{\cdot} b \le a \Theta b \le a \cdot b \le a \wedge b$$

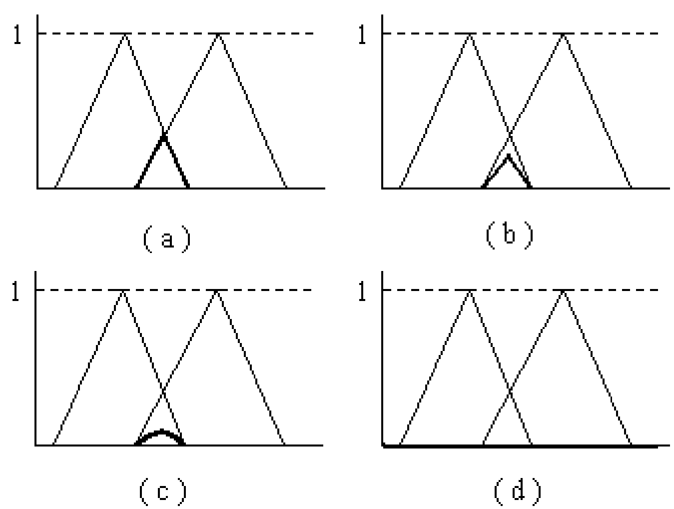


圖 6.8 ：四種模糊交集運算的結果。 (a) 最小值； (b) 代數積； (c) 邊界積； (d) 激烈積。

6.4.2 模糊交集 (3)

兩種常見的參數型 (parametric) 的模糊交集 (t-norms) 有“Yager 交集”和“Sugeno 交集”，其定義分別如下：

- **Yager 交集：**

$$t_w(a,b) = 1 - \min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}], w \in (0, \infty)$$

上式中，w 是一個決定取交集的強度參數，當 w 越大時，其歸屬程度也跟著變大。

- **Sugeno 交集：**

$$t_s(a,b) = \max[0, (s+1)(a+b-1) - sab], \ s \in [-1, \infty)$$

- 上式中，s 是一個決定取交集的強度參數。

6.4.3 模糊聯集 (1)

- 模糊聯集 (或稱 t-conorms) 是一個具有兩個參數的函數，定義為：

$$s:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

使得

$$\mu_{A\cup B}(x)=s[\mu_a(x),\mu_B(x)]$$

其中，模糊聯集函數 s(.,.) 必須符合以下四個條件：

1. **邊界條件**：

$$s(1,1)=1$$

以及

$$s(\mu_A(x),0)=s(0,\mu_A(x))=\mu_A(x)$$

2. **單調性** (Monotonicity)：

若

$$\mu_A(x)<\mu_C(x)$$

以及

$$\mu_B(x)<\mu_D(x)$$

則

$$s(\mu_A(x),\mu_B(x))\leq s(\mu_C(x),\mu_D(x))$$

- **交換性** (Commutativity)：

$$s(\mu_A(x),\mu_B(x))=s(\mu_B(x),\mu_A(x))$$

4. **結合性** (Associativity)：

$$s(\mu_A(x),s(\mu_B(x),\mu_c(x)))=s(s(\mu_A(x),\mu_B(x)),\mu_C(x))$$

6.4.3 模糊聯集 (2)

- 四種最常被使用的非參數型 (nonparametric) 的模糊聯集包括 (為了簡化表示式，我們令 $a \equiv \mu_A(x)$ 以及 $b \equiv \mu_B(x)$)：

1. 最大值 (Maximum)：

$$S_{\max}(a,b) = a \vee b = \max(a,b)$$

2. 代數和 (Algebraic sum)：

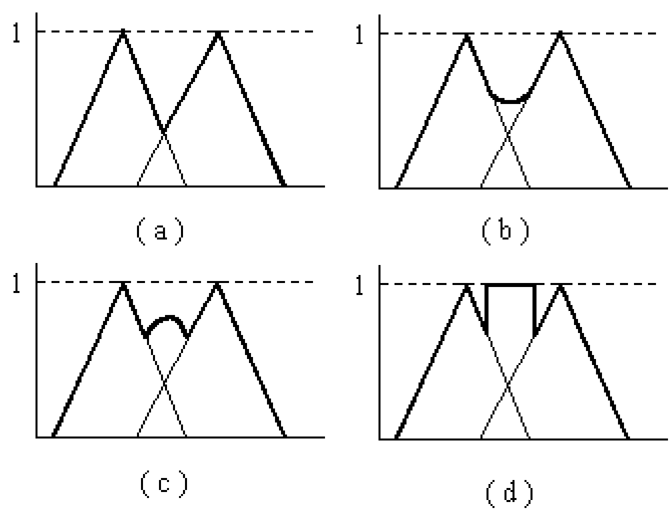
$$S_{as}(a,b) = a \hat{+} b = a + b - ab$$

3. 邊界和 (Bounded sum)：

$$S_{bs}(a,b) = a \oplus b = \min(1, a+b)$$

4. 激烈和 (Drastic sum)：

$$S_{ds}(a,b) = a \dot{\vee} b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ b, & a = 0 \\ 1, & a,b > 0 \end{cases}$$



$$a \vee b \le a \hat{+} b \le a \oplus b \le a \dot{\vee} b$$

圖 6.9 ：四種模糊聯運算的結果。 (a) 最大值； (b) 代數和； (c) 邊界和； (d) 激烈和。

6.4.3　模糊聯集 (3)

兩種常見的參數型 (parametric) 的模糊聯集 (t-conorms) 有 "Yager 聯集" 和 "Sugeno 聯集"，其定義分別如下：

- **Yager 聯集：** $s_w(a,b) = \min[1,(a^w + b^w)^{1/w}], w \in (0,\infty)$

上式中，w 是一個決定取聯集的強度參數，當 w 越大時，其歸屬程度則變小。

- **Sugeno 聯集：** $s_s(a,b) = \min[1, a+b-sab], s \in [-1,\infty)$

上式中，s 是一個決定取聯集的強度參數。