

# 第九章 模糊集合與 模糊邏輯系統

第一節 序論

第二節 模糊集合

第三節 模糊關聯性

第四節 模糊推論系統

本章重點回顧

本章習題

# 第一節 Fuzzy ?

就字面的意思來看，模糊就是不精確、不清楚的意思

→「天氣很熱」、「車子不要開太快」

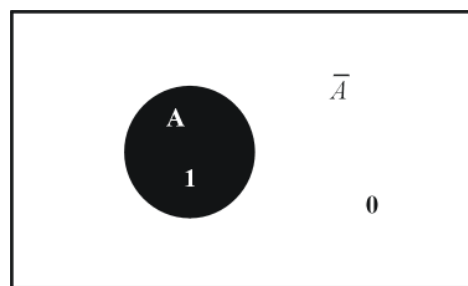
- 在科學與學術的研究上，模糊理論提供一種邏輯系統以處理人類的邏輯推論過程，並可用來設計智慧型系統以解析語意或分析描述性的語言
- 繼 Zadeh (1965, 1973) 分別提出模糊集合 (fuzzy sets) 與模糊邏輯理論 (fuzzy logic) 後，模糊理論就一直受到重視
- 模糊邏輯系統的應用 (Munakata and Jani, 1994)
  - 控制系統 (廣泛地應用在許多領域上)、圖形辨識、語音辨識、診斷程序、時間序列預測 (Mendel, 2000)、智慧型機器人 (Wu, 1996)、軟體工程、決策系統 (Chaneau 等人, 1987)、資料補償等

## 第二節 模糊集合

### 9.2.1 傳統集合與模糊集合的定義

- 傳統集合：非 0 即 1

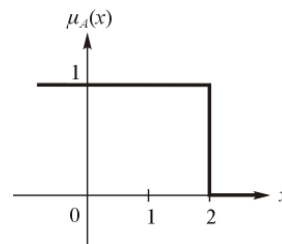
$$A = \{(x, \mu_A(x) \mid x \in U\}, \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{iff } x \in A \\ 0 & \text{iff } x \notin A \end{cases}$$



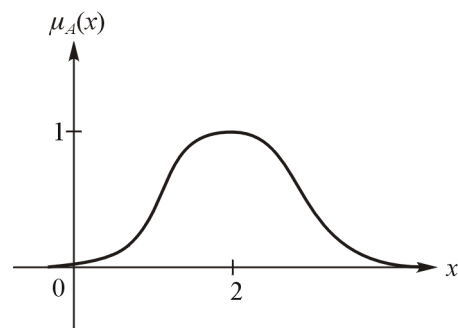
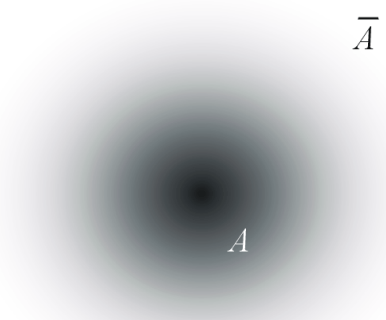
$U$  表示全體集合稱為字集合

$\mu_A(x)$  表示  $x$  在  $A$  集合或不在  $A$  集合的表示值 (0 或 1)

如：  $A = \{x \mid x < 2\}$



- 模糊集合：漸層變化的邊界



$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}, \mu_A(x) = f(x), x \in U$$

$f(x)$  表示0到1之間的函數

$\mu_A(\cdot)$  稱為 A 集合的隸屬函數或特徵函數

$\mu_A(x)$  表示  $x$  在 A 集合的隸屬度，也就是表示  $x$  屬於 A 集合的程度

- 模糊邏輯提供處理人類知識、觀念與推論的工具，因為在真實世界裡有許多情況並非二位元所能描述與呈現。
- 模糊邏輯理論允許一個元素可以同時屬於兩個或以上的集合，而隸屬不同集合的程度各有所不同的組合，如此，相當適於處理那些無數含糊不清的狀態；這與人類推論思考的方式相當接近。

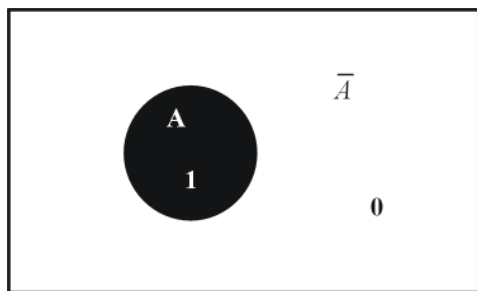
傳統集合	模糊集合
二選一(either or)	涵蓋其間(and)
二元值(bivalent)	多值(multivalent)
是與否(yes or no)	多或少(more or less)

## 9.2.2 模糊集合基本運算

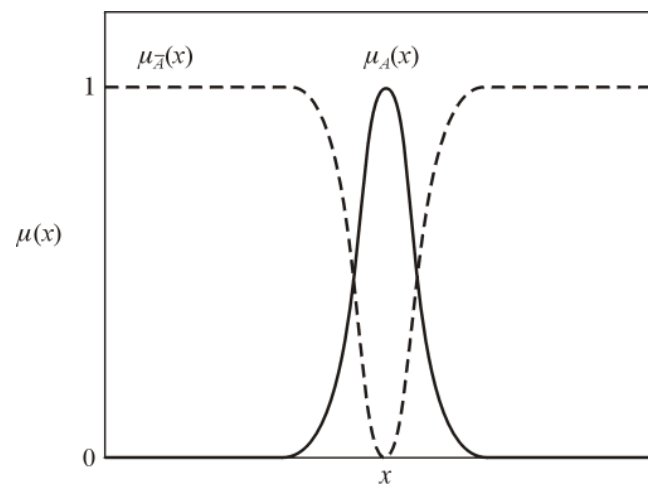
### 補集合

在字集中，可以由任一集合 $A$ 與其補集合 $\bar{A}$  (**com-plement**) 組合而成

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



傳統集合與其補集合



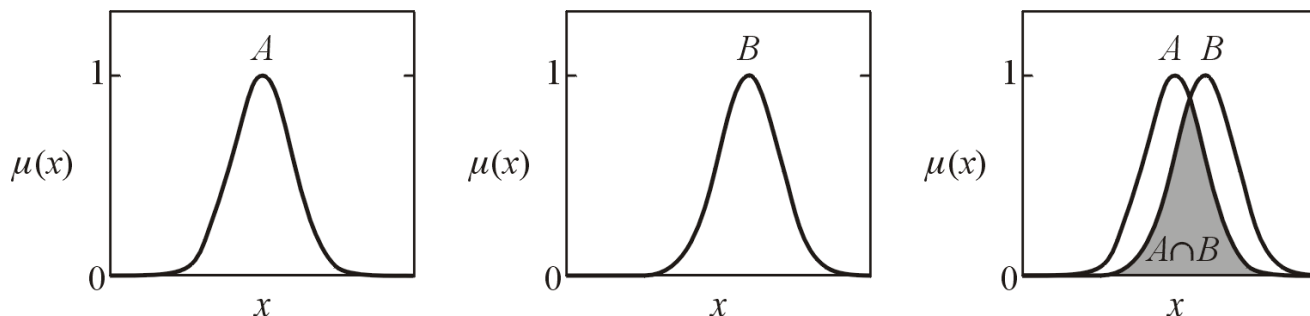
模糊集合與其補集合

## 交集

模糊集合 **A** 與 **B** 的交集（**intersection**），以  $A \cap B$  表示(**AND**)  
交集運算又可稱為 **T-norms**，可以使用**最小值法**或是**代數乘法**

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \equiv \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$



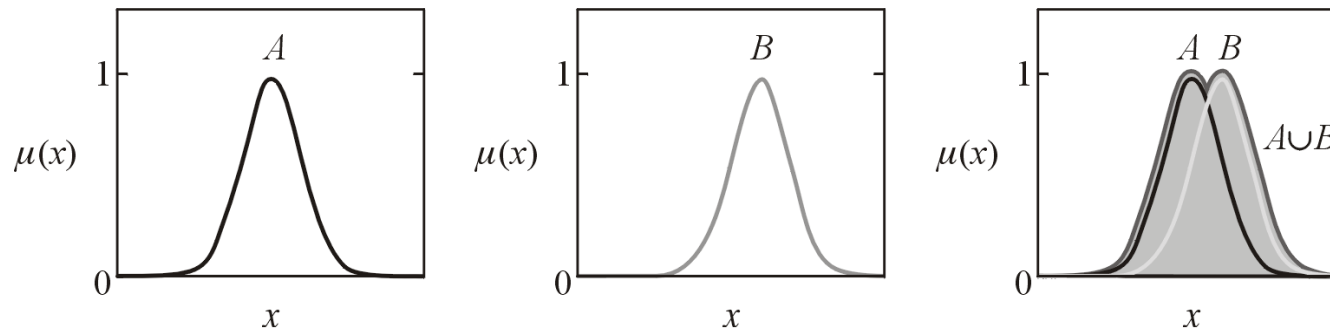
## 聯集

模糊集合 **A** 與 **B** 的聯集（**union**），以  $A \cup B$  表示(**OR**)

聯集運算又可稱為 **T-conorms** 或 **S-norms**，可以使用**最大值法**或是**代數加法**來表示

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \equiv \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$





## 第三節 模糊關聯性

### 9.3.1 模糊化

- 集合的關聯性(Relations)是指不同集合間的關係與相互連結性，如果我們要廣泛具體地定義集合間關聯性的觀念，就必需允許不同集合其元素間的關聯性具有不同程度的描述，因此產生了一模糊關聯性(Fuzzy Relations)。
- 集合關聯性是為了表示兩個或以上集合間的關係，通常關聯性本身也是屬於集合的一種，因此，所有集合運算皆可直接用於關聯性，不用任何修正
- 關聯性亦屬於卡氏乘積(Cartesian product)的子集合，而傳統集合X與Y的卡氏乘積(以 $X \times Y$ 表示)為X集合與Y集合個別的元素組成的有序數對(x,y)

### 實例 9.1

**X與Y兩個集合定義如下：**  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{2, 3, 4\}$ ,  $R: x < y$   
 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

**R為數對集合且為二元關聯性，因此，在傳統集合中，關聯性矩陣的元素值不是0就是1。**

將實例9.1的關聯性改為  $R: x \approx y$  則傳統集合之關聯性矩陣為：

$x \setminus y$	2	3	4
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0

傳統集合的關聯性矩陣經常無法符合實際的狀態描述或無法滿足兩集合間之關係其親疏遠近在等級上的區別，因此，模糊集合在應用於集合的關聯性上，就可以充分地以隸屬度來描述此間的關性；以例9.1而言， $R: x \approx y$  的模糊關聯性矩陣表示為：

$x \setminus y$	2	3	4
1	0.66	0.33	0
2	1	0.66	0.33
3	0.66	1	0.66

## 實例 9.2

以水果表皮的顏色與生長狀態之關聯性進行說明傳統集合的關聯性矩陣與模糊關聯性矩陣，並以IF-THEN規則表示之。假設X表示(芒果)表皮顏色集合、Y表示(芒果)生長狀態(成熟度)。 $X=\{\text{綠色}, \text{黃色}, \text{紅色}\}$ ， $Y=\{\text{未成熟}, \text{半熟}, \text{成熟}\}$ ，則傳統集合之關聯性矩陣為：

R	未熟	半熟	已成熟
綠色	1	0	0
黃色	0	1	0
紅色	0	0	1

將上述關聯性矩陣R以IF-THEN規則表示為：

- 規則一：IF(芒果)表皮是綠色，THEN未成熟。
- 規則二：IF(芒果)表皮是黃色，THEN半熟。
- 規則三：IF(芒果)表皮是紅色，THEN已成熟。

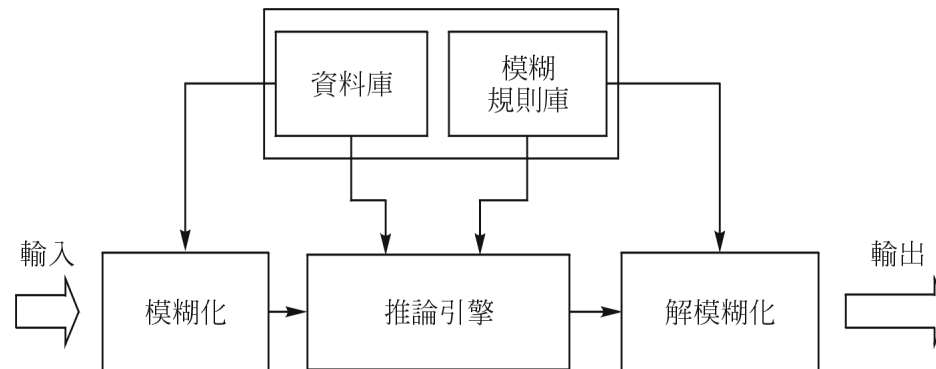
但在一般經驗中，水果(芒果)表皮顏色幾乎不可能出現單一顏色或其成熟度也不會只有三種階段，如以傳統集合描述所有可能出現的表皮顏色或成熟度，不但使得集合更為複雜也幾乎無法逐一系列，因此要建立X與Y兩個集合較佳的關聯性矩陣，可以使用模糊關聯性矩陣來描述之，如下所示：

R	未熟	半熟	已成熟
綠色	1	0.4	0
黃色	0.4	1	0.5
紅色	0	0.2	1

## 第四節 模糊推論系統

- 模糊推論系統（Fuzzy Inference System, FIS）

- 源自模糊集合理論、模糊 IF-THEN 規則、模糊推論等理論基礎
- 主要架構包括：  
模糊化（fuzzifier）、模糊規則（fuzzy rules）、隸屬函數（membership function）資料庫、推論引擎（inference engine）與解模糊化（defuzzifier）等五大部分。



- 經由建立模糊規則庫後，模糊推論系統即可建構輸入值與輸出值間的映射關係（mapping）

## 9.4.1 模糊化

---

- 將真實世界的觀測值映射到模糊集合中
- 其方法分為單值型法（singleton）與非單值型法
  - 非單值型法  
使用隸屬函數來作為觀測值的映射與轉換函數。  
轉換值稱為隸屬度→輸入值對真實觀測值符合度的描述。
- 目的是讓觀測值能夠適用於模糊控制規則庫
  - 在模糊推論系統，IF-THEN 規則中前提（premise）部分是以模糊集合的形式描述，因此，輸入值必須經過模糊化處理，



## 9.4.2 模糊規則庫

---

- 在介紹模糊規則庫前，先了解什麼是模糊關聯性的合成(Composition of fuzzy relations)?
  - 模糊關聯性的合成用於結合不同的模糊關聯性，也可以用於結合模糊關聯性與模糊集合。
  - 合成運算子常見的有：最大-最小(max-min)合成運算子、最大-乘積(max-prod)合成運算子、最大-平均(max-average)合成運算子。



假設  $R_1(x, y), (x, y) \in X \times Y$  與  $R_2(y, z), (y, z) \in Y \times Z$  分別為  $X$  與  $Y$  及  $Y$  與  $Z$  的模糊關聯性

- 最大-最小合成運算為：

$$R_1 \circ R_2(x, z)$$

$$= \left\{ \left[ (x, z), \max_y \{ \min \{ \mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z) \} \} \right] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}$$

- 最大-乘積合成運算為：

$$R_1 \circ_{\otimes} R_2(x, z) = \left\{ \left[ (x, z), \max_y \{ \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(y, z) \} \right] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}$$

- 最大-平均合成運算為：

$$R_1 \circ_{ave} R_2(x, z) = \left\{ \left[ (x, z), \frac{1}{2} \max_y \{ \mu_{R_1}(x, y) + \mu_{R_2}(y, z) \} \right] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}$$

- 
- 模糊推論系統（FIS）架構的主要核心
  - 可經由專家提供、知識（knowledge）擷取或經由資料特性分類產生，以建立IF-THEN模糊規則庫
  - **IF** 部分的敘述為模糊規則的前提（premise, antecedent）部分，而 **THEN**部分的敘述則為結論（conclusion, consequent）
  - 模糊規則庫則是由許多模糊 IF-THEN 規則 所組合的集合  
 $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$

### 實例 9.3

在實例9.2以水果表皮顏色及其成熟度說明如何建立模糊關聯性，接著實例9.2繼續說明模糊關聯性之合成運算，本實例有兩個關聯性矩陣，一為水果表皮顏色與其成熟度的關聯性矩陣、一為其成熟度與酸甜度的關聯性矩陣，由此二關聯性矩陣進行說明模糊關聯性合成運算。假設 $R_1$ 是一個(芒果)表皮顏色 $x$ 與其成熟度 $y$ 的關聯性、 $R_2$ 是一個(芒果)成熟度 $y$ 與酸甜度 $z$ 的關聯性。

**R1模糊關聯性矩陣為：**

<b>R1(x,y)</b>	<b>未熟</b>	<b>半熟</b>	<b>已熟</b>
<b>綠色</b>	<b>1</b>	<b>0.4</b>	<b>0</b>
<b>黃色</b>	<b>0.4</b>	<b>1</b>	<b>0.5</b>
<b>紅色</b>	<b>0</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>

**R2模糊關聯性矩陣為：**

<b>R2(y,z)</b>	<b>酸</b>	<b>略甜</b>	<b>甜</b>
<b>未熟</b>	<b>1</b>	<b>0.1</b>	<b>0</b>
<b>半熟</b>	<b>0.8</b>	<b>1</b>	<b>0.4</b>
<b>已熟</b>	<b>0</b>	<b>0.8</b>	<b>1</b>

以最大—最小合成運算子計算之結果為：

$$r_{11} = \max(\min(1,1), \min(0.4,0.8), \min(0,0)) = \max(1,0.4,0) = 1$$

$$r_{12} = \max(\min(1,0.1), \min(0.4,1), \min(0,0.8)) = \max(0.1,0.4,0) = 0.4$$

⋮

其矩陣形式為 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

或以列表方式表示為

<b>R(x,z)</b>	<b>酸</b>	<b>略甜</b>	<b>甜</b>
<b>綠色</b>	<b>1</b>	<b>0.4</b>	<b>0.4</b>
<b>黃色</b>	<b>0.8</b>	<b>1</b>	<b>0.5</b>
<b>紅色</b>	<b>0.2</b>	<b>0.8</b>	<b>1</b>

- 以最大一乘積合成運算子結果為

$$R = R_1 \circ_{\otimes} R_2$$

$$= \max \begin{bmatrix} (1 \times 1, 0.4 \times 0.8, 0 \times 0) & (1 \times 0.1, 0.4 \times 1, 0 \times 0.8) & (1 \times 0, 0.4 \times 0.4, 0 \times 1) \\ (0.4 \times 1, 1 \times 0.8, 0.5 \times 0) & (0.4 \times 0.1, 1 \times 1, 0.5 \times 0.8) & (0.4 \times 0, 1 \times 0.4, 0.5 \times 1) \\ (0 \times 1, 0.2 \times 0.8, 1 \times 0) & (0 \times 0.1, 0.2 \times 1, 1 \times 0.8) & (0 \times 0, 0.2 \times 0.4, 1 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \max \begin{bmatrix} (1, 0.32, 0) & (0.1, 0.4, 0) & (0, 0.16, 0) \\ (0.4, 0.8, 0) & (0.04, 1, 0.4) & (0, 0.4, 0.5) \\ (0, 0.16, 0) & (0, 0.2, 0.8) & (0, 0.08, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.16 \\ 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.16 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

以IF-THEN規則表示為：

- 規則一：IF(芒果)表皮是綠色，THEN其酸甜度是酸的，有點可能是略甜的，以及不太可能是甜的。
- 規則二：IF(芒果)表皮是黃色，THEN其酸甜度是略甜的，有可能是酸的，也有些可能是甜的。
- 規則三：IF(芒果)表皮是紅色，THEN其酸甜度是甜的，有可能是略甜的，不太可能是酸的。

- 以最大-平均合成運算子結果為

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 \circ_{ave} R_2 \\
 &= \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} (1+1, 0.4+0.8, 0+0) & (1+0.1, 0.4+1, 0+0.8) & (1+0, 0.4+0.4, 0+1) \\ (0.4+1, 1+0.8, 0.5+0) & (0.4+0.1, 1+1, 0.5+0.8) & (0.4+0, 1+0.4, 0.5+1) \\ (0+1, 0.2+0.8, 1+0) & (0+0.1, 0.2+1, 1+0.8) & (0+0, 0.2+0.4, 1+1) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} (2, 1.2, 0) & (1.1, 1.4, 0.8) & (1, 0.8, 1) \\ (1.4, 1.8, 0.5) & (0.5, 2, 1.3) & (0.4, 1.4, 1.5) \\ (1, 1, 1) & (0.1, 1.2, 1.8) & (0, 0.6, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0.9 & 1 & 0.75 \\ 1 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- 雖然三種合成運算子所得之關聯性矩陣的各元素皆不盡相同，大致而言，前兩種合成運算的結果多能符合一般經驗的觀察，但以最大-平均合成運算結果與一般經驗則有一段差距，所以此例並不適用最大-平均合成運算。

## 實例 9.4

在此以糖尿病患者補充胰島素為例說明規則庫的建立。

正常人的胰臟是根據血液中葡萄糖的濃度來分泌胰島素，血糖上升會刺激胰島素的分泌，相對的，血糖下降則會抑制胰島素的分泌，經此調節機制，可使血糖維持在正常的範圍。糖尿病患者則需定時依體重 $W$ 及當時血糖濃度 $C$ 注射適當胰島素的劑量 $O$ ，因此可依 $W$ 、 $C$ 與 $O$ 之間的關係來建立規則庫，如

**規則1: IF  $W=45$  and  $C=180$  THEN  $O=3$**

**(體重45kg、血糖濃度180mg/dl需注射3單位胰島素)**

**規則2: IF  $W=90$  and  $C=240$  THEN  $O=6$**

**(體重90kg、血糖濃度240mg/dl需注射6單位胰島素)**

上述的規則庫包含有兩個規則，其邏輯判斷為：“若血糖濃度( $C$ )和體重( $W$ )到達該規則所設定的條件時，則輸出一個特定的胰島素補充量( $O$ )”



### 9.4.3 推論引擎

- 模糊輸入集合經由模糊邏輯推論，並透過模糊規則庫結合所有 IF-THEN 規則映射到模糊輸出集合（或得到結論）的過程
- 推論的運算以 T-norm 運算和 T-conorm 運算最為普遍
  - T-norm 運算是屬於模糊集合交集運算  
運算子可選取最小值法或代數乘積法，用於 IF 部分前提敘述中——“and”的運算；
  - T-conorm 運算（又稱為 S-norm）是屬於模糊集合聯集運算  
運算子則可選取最大值法或代數和，用於 IF 部分前提敘述中——“or”的運算。

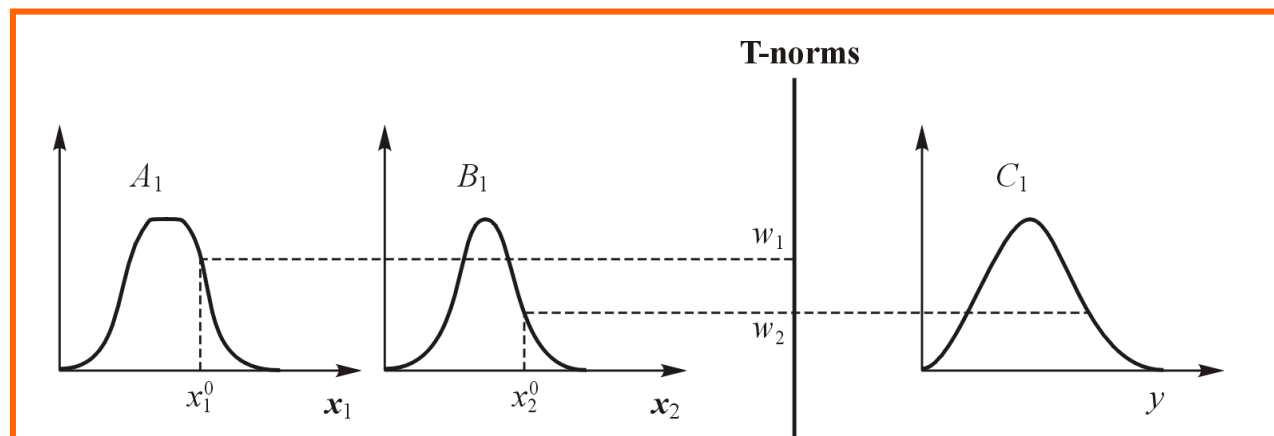
### 9.4.3 推論引擎

- 假設輸入變數維度為 2，推論引擎將前提部分與模糊規則庫先行配對，可獲得輸入變數 $x_1$ 對應於模糊集合  $A$  集合、輸入變數 $x_2$ 對應於模糊集合  $B$  集合以及輸出變數 $y$ 對應於模糊集合  $C$  集合，以規則數為 2 的模式為例：

$R_1$ : If  $x_1$  is  $A_1$  and  $x_2$  is  $B_1$ , then  $y=C_1$  ;

$R_2$ : If  $x_1$  is  $A_2$  and  $x_2$  is  $B_2$ , then  $y=C_2$  ;

在IF-THEN規則前提部分由T-norms運算產生Firing Strength，即當 $x_1=x_1^0$ 可在圖 9.9 的  $A$  集合中對應其隸屬度



## 實例 9.5

本例接續實例9.3， $R(x,z)$ 表示(芒果)表皮顏色 $x$ 和酸甜度 $z$ 的關聯性矩陣(以最大-最小合成運算子之結果為例)，說明如何由獲得推論結果。假設水果(芒果)表皮顏色是紅色的。

解：

- (1)水果表皮顏色有三種包括：綠色、黃色及紅色，所以芒果是紅色的，可以表示為 $x=[0 \ 0 \ 1]$ 。
- (2)由實例9.3建立表皮顏色與酸甜度的關聯性矩陣 $R$

$R(x,z)$	酸	略甜	甜
綠色	1	0.4	0.4
黃色	0.8	1	0.5
紅色	0.2	0.8	1

所獲得的合成結果如下

$$\begin{aligned} y = x \circ R &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \text{MAX} \left[ m(0,1), m(0,0.8), m(1,0.2); m(0,0.4), m(0,1), \right. \\ &\quad \left. m(1,0.8); m(0,0.4), m(0,0.5), m(1,1) \right] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

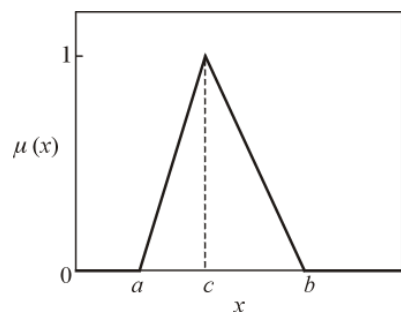
此例說明了向量集合與關聯性矩陣的合成關係，因此，在將語意的描述或知識庫以**IF-THEN**規則庫建構完成後，應該轉換成關聯性矩陣，以便於計算與推論。

## 9.4.4 資料庫

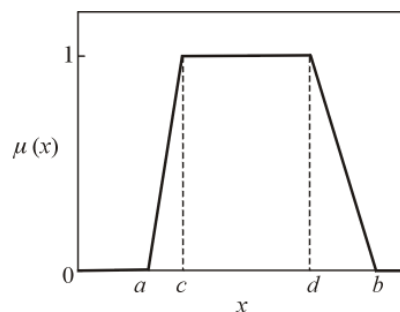
- 提供模糊集合與模糊規則使用的隸屬函數及其相關參數

- 常用的函數有

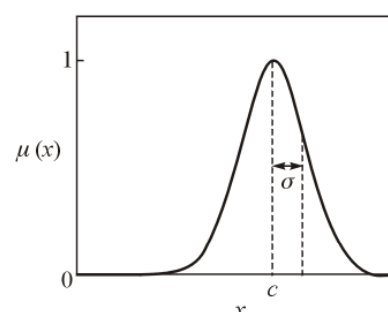
隸屬函數的離散度越大時，表示隱含在資料中的雜訊越多



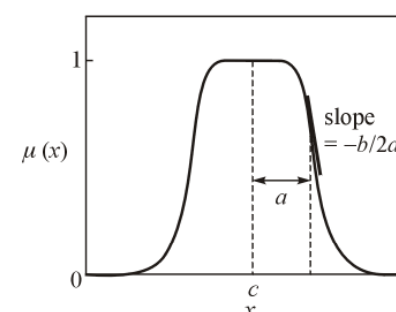
(a) 三角形隸屬函數



(b) 梯形隸屬函數



(c) 高斯隸屬函數



(d) 鐘形隸屬函數

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} & \text{if } x \in [a, c] \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{if } x \in [c, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} & \text{if } x \in [a, c] \\ 1 & \text{if } x \in [c, d] \\ \frac{b-x}{b-d} & \text{if } x \in [d, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

## 9.4.5 解模糊化

- 與模糊化過程相反，主要是轉換推論所得之模糊化結果，也就是將模糊集合轉換成明確值。
- 一般常見的方法主要是根據權重平均法（weighted average formula）衍生而成

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_i(y)}{\sum_{i=1}^N \alpha_i}$$

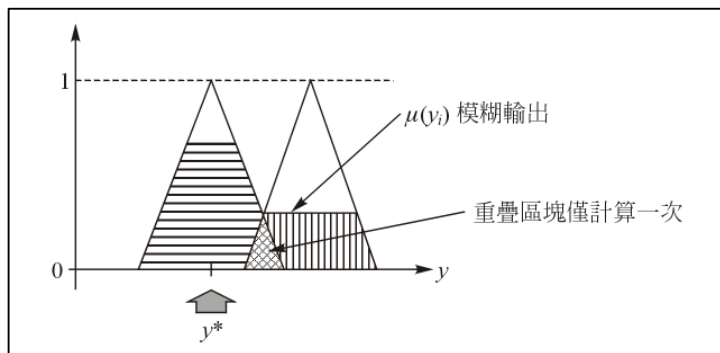
$\mu_i(y)$  為輸出集合的隸屬函數

$\alpha_i$  為第  $i$  個規則的權重

$N$  為規則總數

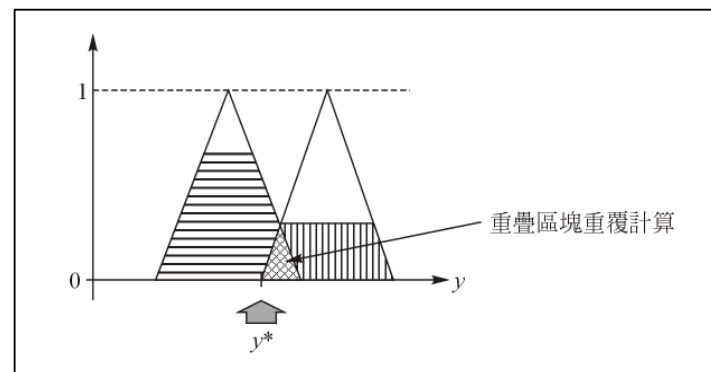
(1)重心法 (center of area, COA  
或center of gravity, COG)

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \mu(y_i)}{\sum_{i=1}^N \mu(y_i)}$$



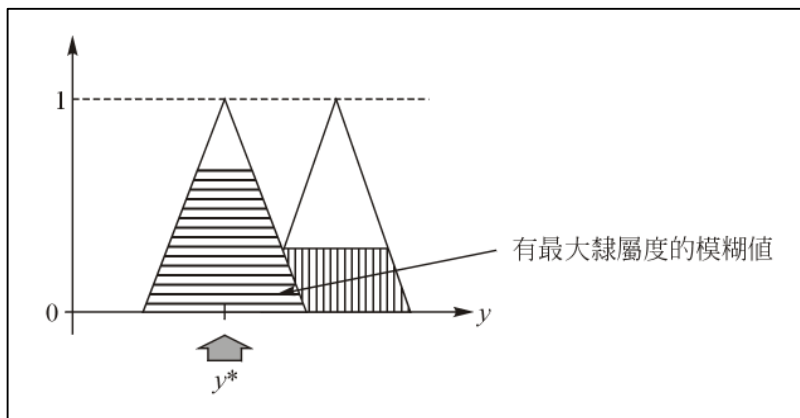
(2)總和中心法 (center-of-sums,  
COS)

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1}^M \mu_j(y_i)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \mu_j(y_i)}$$



### (3)最大值平均值法 (mean of maximum, MOM)

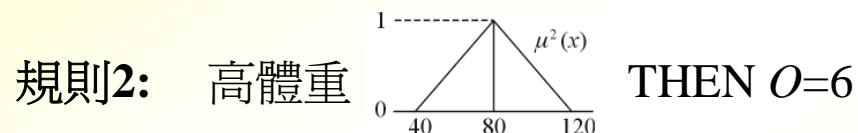
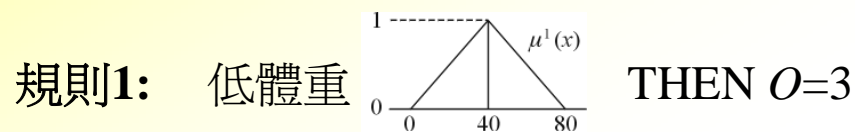
$$y(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i$$





## 實例 9.6

繼續以糖尿病患者補充胰島素為例，說明權重平均法的概念，為簡化問題，在此假設血糖濃度  $C$  為 200 mg/dl 時規則庫中有兩個規則，分別是體重  $A$  與胰島素補充量  $O$  的模糊隸屬度關係，規則一的隸屬函數為  $\mu^1(x)$ ，規則二的隸屬函數為  $\mu^2(x)$ ，如下所列：



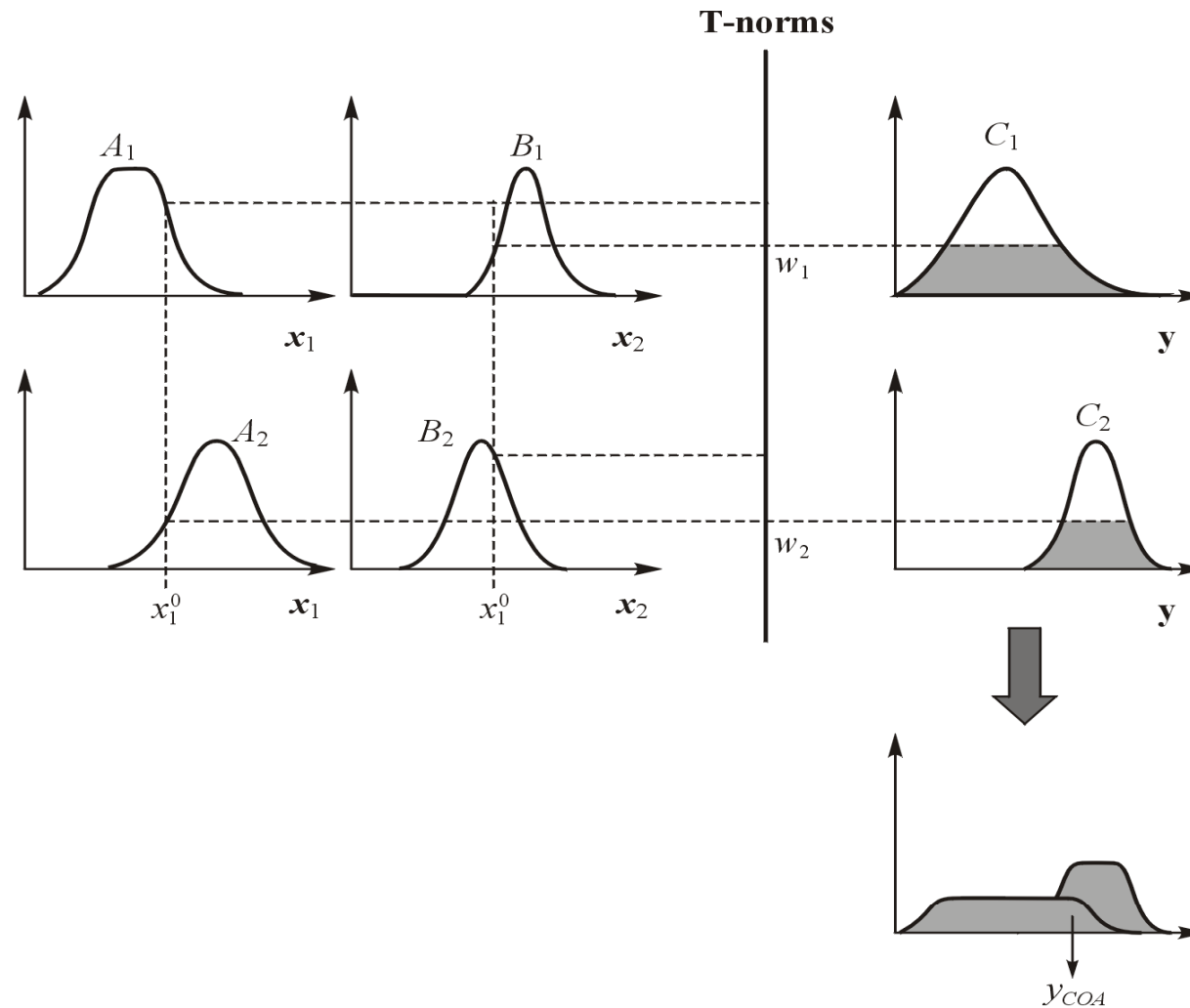
當體重  $W = 66.7$  時， $\mu^1(x) = \frac{1}{3}$   $\mu^2(x) = \frac{2}{3}$  也就是以低體重來說相似度為  $\frac{1}{3}$ ，以高體重來說相似度為  $\frac{2}{3}$

$$O = \frac{\frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 6}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5$$

- 
- 目前最普遍的模糊模式有兩種：
    - **Mamdani** (Mamdani和Assilian, 1975)
    - **Takagi-Sugeno-Kang (TSK)** (Takagi和Sugeno, 1985 ; Sugeno和Kang, 1988)
  - 此兩種模式皆用於IF-THEN規則中，在前提部分有相同的架構，而在結論部分的架構則不相同

# Mamdani Fuzzy Model

利用 T-norms 運算，以最小值計算兩個規則的輸出集合後，再將所有的模糊輸出集合進行解模糊化



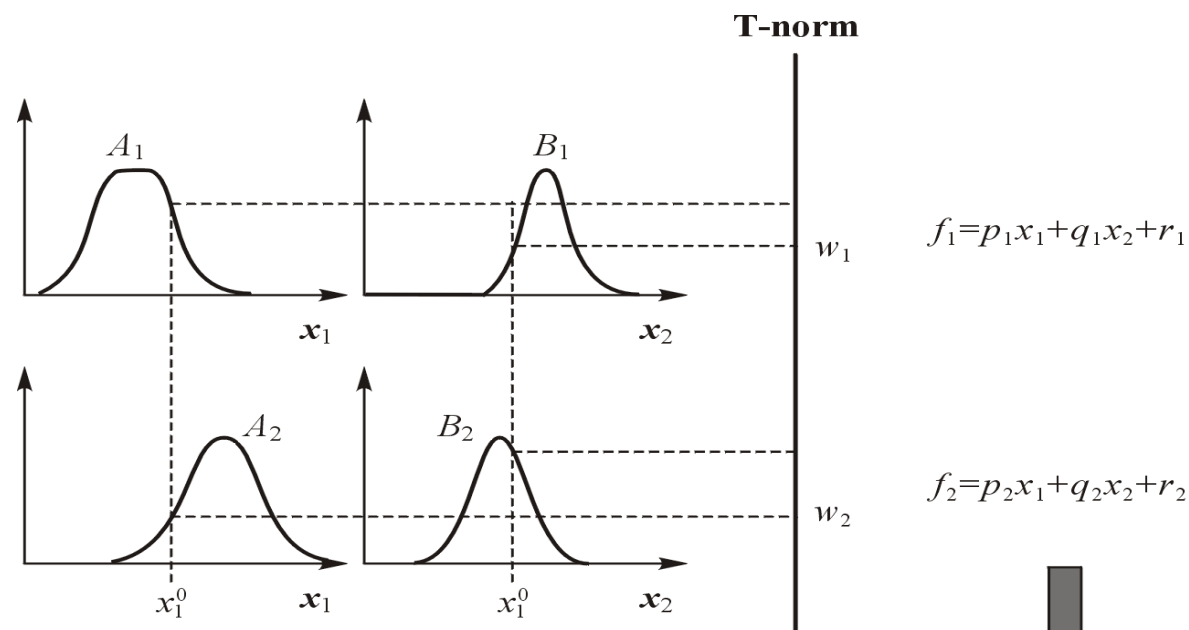
# SugenoFuzzy Model

根據範例資料調整前提部分的架構與參數值，  
以及結論部分的架構與參數值

If  $x_1$  is  $A_1$  and  $x_2$  is  $B_1$ , then  $y = f(x_1, x_2)$

- 當  $y = f(x_1, x_2)$  為一次多項式函數時，模式稱為一次 Sugeno 模糊模式；

$R^i$  If  $x_1$  is  $A_i$  and  $x_2$  is  $B_i$ , then  $y = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2$



↓

$$f = \frac{w_1 f_1 + w_2 f_2}{w_1 + w_2} = \bar{w}_1 f_1 + \bar{w}_2 f_2$$

## 本章重點回顧

### ➤ 傳統集合的表示式

$$A = \{(x, \mu_A(x) \mid x \in U\} \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{iff } x \in A \\ 0 & \text{iff } x \notin A \end{cases}$$

### ➤ 模糊集合的表示式

$$A = \{(x, \mu_A(x) \mid x \in U\} \quad \mu_A(x) = f(x), \quad x \in U$$

$\mu_A(x)$  為在集合的隸屬度, 為隸屬函數

### ➤ 模糊推論系統主要架構包括：

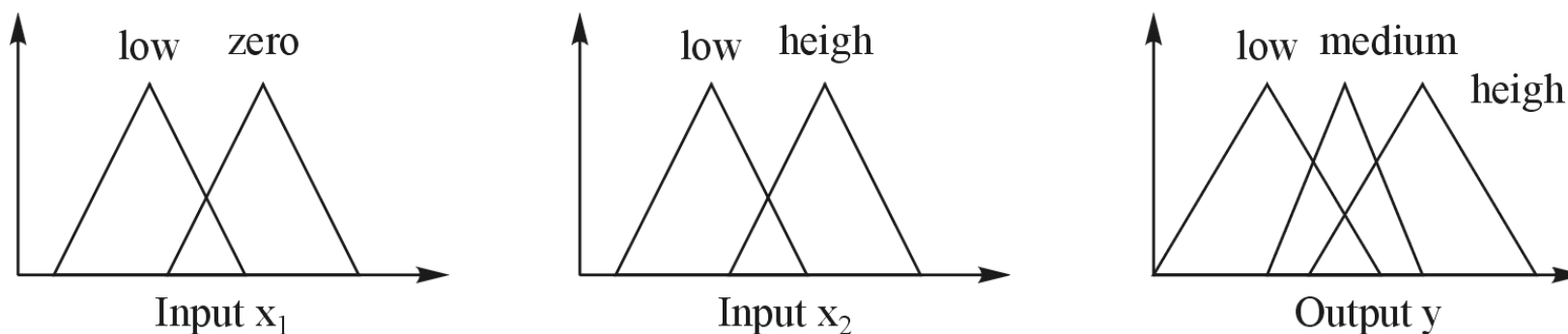
- **模糊化**：模糊化的過程是將真實世界的觀測值映射到模糊集合中。
- **模糊規則**：經由專家提供、知識擷取或經由資料特性分類產生，以建立IF-THEN模糊規則庫。

## 本章重點回顧

- **隸屬函數資料庫**：提供模糊集合與模糊規則使用的隸屬函數及其相關參數。
- **推論引擎**：模糊輸入集合經由模糊邏輯推論，並透過模糊規則庫結合所有 IF-THEN 規則映射到模糊輸出集合的過程。
- **解模糊化**：方法包括重心法、總和中心法、最大值平均值法。
- **模糊集合三種基本運算子**：補集合、交集、聯集，其中交集又可稱為T-norms，聯集又可稱為T-conorms或S-norms。
- **模糊關聯性**：指兩個或兩個以上集合間的關聯性允許不同集合。
- **模糊關聯性合成運算子**：最大—最小、最大—乘積、最大—平均合成運算子。

# 本章習題

**9.1** 下圖是一個有兩個輸入變數  $x_1$  與  $x_2$  及一個輸出項  $y$  的系統，其中每個輸入變數各有兩個三角形模糊隸屬函數



輸出項則可由下列四個模糊規則表示之：

**$R_1$  : IF  $x_1 = \text{low}$  AND  $x_2 = \text{low}$ , THEN  $y = \text{low}$ .**

**$R_2$  : IF  $x_1 = \text{low}$  AND  $x_2 = \text{high}$ , THEN  $y = \text{medium}$ .**

**$R_3$  : IF  $x_1 = \text{zero}$  AND  $x_2 = \text{low}$ , THEN  $y = \text{medium}$ .**

**$R_4$  : IF  $x_1 = \text{zero}$  OR  $x_2 = \text{high}$ , THEN  $y = \text{high}$ .**

**9.2** 請計算此模糊系統的輸出集合，並以繪圖說明之。

**9.3** 請利用三條模糊規則設計一個控制水位的模糊控制器，如圖所示。輸入項為實際水位擾動高度  $\Delta H \in [-1, 1]$ （公尺），控制器放流量為閥門開度率  $V(\%) \in [0, 100]$ 。當  $\Delta H$  為  $-0.25$  時，請問此時控制器閥門開度是多少？。

