

AMALIY MATEMATIKANING ZAMONAVIY MUAMMOLARI VA ISTIQBOLLARI

Respublika ilmiy-amaliy
konferensiya materiallari

24-25-MAY, 2024



<https://mppam2024.qarshidu.uz>

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI**

**AMALIY MATEMATIKANING ZAMONAVIY
MUAMMOLARI VA ISTIQBOLLARI
mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiya
TEZISLAR TO'PLAMI
Qarshi, 2024-yil 24-25- may**

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ
И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
Республиканской научно-практической конференции на
тему
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
Карши, 24-25 мая 2024 года**

**MINISTRY OF HIGHER EDUCATION, SCIENCE AND
INNOVATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN
KARSHI STATE UNIVERSITY
ABSTRACTS
of the Republican scientific and practical conference on the
theme of
MODERN PROBLEMS AND PROSPECTS OF APPLIED
MATHEMATICS
Karshi, May 24-25, 2024**

Оценка порядка производных в модели аномального переноса вещества в фрактальных пористых средах

^{1,2,a)}Хужаёров Б.Х., ^{1,б)}Холлиев Ф.Б., ¹Унгалова М.Б.

¹Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.

²Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук, Ташкент, Узбекистан.

^{a)}b.khuzhayorov@mail.ru, ^{б)}surxon88@bk.ru.

<https://orcid.org/0000-0002-3146-7741>, <https://orcid.org/0009-0003-4469-4155>

В последнее время значительно возрос интерес к проблемам аномальной конвективной диффузии вещества в пористых средах. Решению прямых задач на основе аномальных моделей переноса посвящено большое количество работ. Однако, обратные задачи, особенно по идентификации дробного порядка производных в дифференциальных уравнениях переноса веществ, рассмотрены всего в небольшом количестве работ.

В [1] рассматривается задача конвективного массопереноса в пористой среде и предлагается практический подход к идентификации параметров модели. На основе имеющихся экспериментальных данных предложена методика идентификации параметров модели переноса в фрактальной пористой среде.

В [2] рассмотрена задача переноса вещества в коаксиальной цилиндрической пористой среде с использованием двух подходов: диффузионного и кинетического. На основе диффузионного подхода решена прямая задача переноса вещества. Затем используя значения решения в отдельных точках области решена обратная задача по определению коэффициента в кинетическом уравнении.

В [3] рассматривается проблема переноса растворенных веществ в пористых средах с подвижными и неподвижными зонами. Исследована обратная задача идентификации дробных порядков производных на основе дополнительных измерений в заданной точке области.

В данной работе исследуется обратная задача восстановления порядка дробной производной в задаче переноса вещества в пористой среде с фрактальной структурой, состоящей из двух зон. В зоне с подвижной жидкостью процесс переноса вещества описывается уравнением конвекции-диффузии, а в зоне с неподвижной жидкостью – кинетическим уравнением первого порядка. Исходные данные подготавливаются в трех точках на основе решения соответствующей прямой задачи с заданными порядками производных. Для моделирования погрешности исходные данные возмущены равномерно и нормально распределенными псевдослучайными числами.

Процесс переноса вещества в пористой среде с фрактальной структурой, состоящей из двух зон, описывается с помощью следующих уравнений дробными производными [4-7]

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \theta_m D_m \frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} - v_m \theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \omega(c_m - c_{im}), \quad (2)$$

где α, β – порядки производных, θ_m, θ_{im} – пористости, c_m, c_{im} – объемные концентрации вещества, D_m – коэффициент гидродинамической дисперсии, t – время, x – пространственная переменная, v_m – осредненная скорость движения раствора, γ – коэффициент переноса массы. Если $[\gamma] = T^{\alpha-1}$, $[\omega] = T^{-1}$ то $[\partial^\alpha c / \partial t^\alpha] = T^{-\alpha}$, $[D] = L^{1-\beta} / T^\alpha$, L – размерность длины, T – размерность времени. Порядки дробных производных α и β изменяются в следующем диапазоне: $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$.

Задача рассматривается в полубесконечной области $[0, \infty)$. Начальные и граничные условия имеют вид:

$$c_m(0, x) = 0, \quad c_{im}(0, x) = 0, \quad (3)$$

$$c_m(t, 0) = c_0, \quad c_m(t, \infty) = 0. \quad (4)$$

Для решения обратной задачи помимо условий (3), (4) необходимы дополнительные условия. В качестве таких считается, что в точках x_l известно изменение концентрации во времени, т. е. $z_l(t) = c_m(t, x_l)$ заданные функции, $l = 1, 2, 3$. Часто $z_l(t)$, $l = 1, 2, 3$ определяются экспериментальным путем. Потому при решении обратной задачи $z_l(t)$ можно рассматривать как «данные наблюдения». Таким образом, дополнительные условия можно записать следующим образом:

$$c_m(t, x_l) = z_l(t), \quad t \in [0, T_{\max}], \quad l = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где T_{\max} – максимальное время, в течении которого исследуется процесс.

Обратная задача ставится следующим образом: найти порядки дробных производных α , β на основе исходных данных (5). Задача сводится к минимизации следующего квадратичного функционала:

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{l=1}^3 \int_0^T [c_m(t, x_l) - z_l(t)]^2 dt, \quad (6)$$

здесь $c_m(t, x_l)$ – решение задачи (1)-(4), определенное при некоторых заданных значениях параметров α, β . Для минимизации функционала $J(\alpha, \beta)$ используется метод Нилдера-Мида [8].

Функционал (6) записывается в виде следующей интегральной суммы:

$$J = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=0}^M \tau [c_m(t_j, x_l) - z_l(t_j)]^2, \quad (7)$$

здесь x_l , $l = 1, 2, 3$ – соответствуют координатным узлам сетки, используемой при численном решении прямой задачи (1)-(4).

Задача (1) - (4) решается численно методом конечных разностей при заданных значениях α , β . В области $\Omega = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T_{\max}\}$ введем равномерную сетку $\omega_{ht} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T_{\max} / M\}$, где h – шаг сетки по координате x , τ – шаг сетки по времени t .

Рассматриваемая задача здесь решается в рамках квазиреального эксперимента [9]. Для этого сначала задача (1)-(4) решается численно при заданных α^{exact} , β^{exact} . По результатам численных расчетов определяется $z_l = z_l(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, M$, $l = 1, 2, 3$. Для того, чтобы определить чувствительность обратной задачи к ошибкам, функции $z_l(t_j)$ зашумлены следующим образом:

$$z_l^\delta(t_j) = z_l(t_j) + 2\delta(\sigma(t_j) - 1/2), \quad l = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где, δ – уровень погрешности, $\sigma(t_j)$ – равномерно распределенные псевдослучайные числа, $\sigma(t_j) \in (0, 1)$.

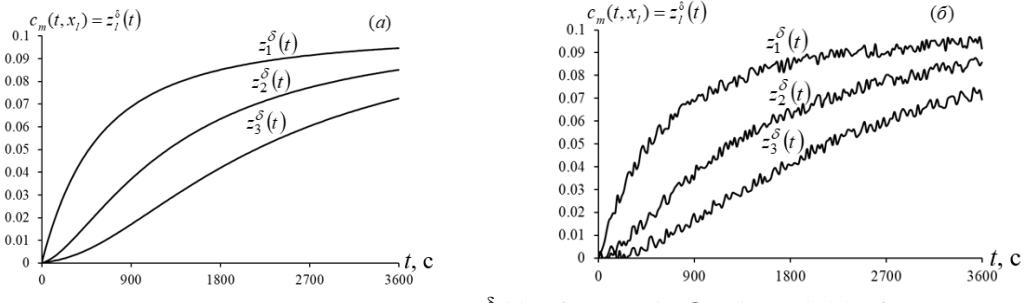


Рис1. Графики функции $z_l^\delta(t)$, $l = 1, 2, 3$, $\delta = 0(a), 0.03(b)$.

На рис.1 а, б показана функция $z_l(t)$, $l=1,2,3$, определенная в точках $x_1 = 0,1\text{м}$, $x_2 = 0,2\text{м}$, $x_3 = 0,3\text{м}$ как решение соответствующей прямой задачи для двух значений δ .

Показано, что с увеличением δ (уровня погрешности) устойчивость решения обратной задачи ухудшается. В табл.1 для $\alpha^{\text{exact}} = 0.8$ и $\beta^{\text{exact}} = 1.8$ представлены результаты расчетов при различных уровнях погрешности. Из табл.1 видно, что по мере увеличения уровня погрешности относительная погрешность восстановления α , β соответственно увеличивается. При этом в зависимости от степени изменения значений δ относительная погрешность восстановления α и β изменяется в интервалах $0.000059\% - 0.031063\%$ и $0.001592\% - 0.780992\%$ соответственно. Количество итераций варьируется в пределах 37-161.

Табл.1

Число итераций, s	δ	Начальное приближение, 0α	Начальное приближение, 0β	Расчетное значение, $\frac{s}{\alpha}$	Расчетное значение, $\frac{s}{\beta}$	Относительная погрешность, $\left \frac{s}{\alpha} - \alpha^{\text{exact}} \right \cdot \frac{\alpha^{\text{exact}}}{100\%}$	Относительная погрешность, $\left \frac{s}{\beta} - \beta^{\text{exact}} \right \cdot \frac{\beta^{\text{exact}}}{100\%}$
37	0	0.6	1.6	0.80000047	1.79997135	0.000059	0.001592
37	0.01	0.6	1.6	0.80008330	1.80570148	0.010413	0.316749
29	0.02	0.6	1.6	0.79984863	1.81173828	0.018921	0.652127
161	0.03	0.6	1.6	0.80024851	1.77334215	0.031063	0.780992

Литература

- Pavlenko I., Ochowiak M., Włodarczak S., Krupinska Z., Matuszak M. Parameter Identification of the Fractional-Order Mathematical Model for Convective Mass Transfer in a Porous Medium // Membranes 2023, 13, 819. <https://doi.org/10.3390/membranes13100819>
- Сулаймонов Ф.У., Холияров Э.Ч. Коэффициентная обратная задача переноса вещества в среде, состоящей из макропористой и микропористой цилиндрических зон // Узб.журнал “Проблемы механики”, 2013. № 2. С. 75-78.
- Gongsheng Li, Wenyi Liu, Xianzheng Jia & Zhiyuan Li. Unique identification of fractional orders in the fractional mobile-immobile solute transport system // Applied Mathematics in Science and Engineering, 31:1, 2243375, doi: 10.1080/27690911.2023.2243375
- Guleria A., Swami D. Solute Transport Through Saturated Soil Column with Time-Dependent Dispersion // Hydrol. J. 2018, 40, C. 1-15.
- Gao G., Zhan H., Feng S., Fu B., Ma Y., Huang G. A new mobile-immobile model for reactive solute transport with scale-dependent dispersion // Water Resour. Res. 2010, 46.
- Khuzhayorov B., Usmonov A., Kholliev F. Numerical Solution of Anomalous Solute Transport in a Two-Zone Fractal Porous Medium // In APAMCS 2022: Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems; Springer: Cham, Switzerland, 2023; Volume 702, pp. 98–105. doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_10.
- Khuzhayorov B. Kh., Viswanathan K. K., Kholliev F. B and Usmonov A. I. Anomalous Solute Transport Using Adsorption Effects and the Degradation of Solute // Computation 2023, 11, 229, doi.org/10.3390/computation11110229.
- Игумнов И.В., Куцый Н.Н. Применение метода Нелдера – Мида при настройке нейронных сетей, реализующих пид-закон регулирования // Современные техн. Системный анализ. Моделирование 2016. № 1(49) С. 90-95.
- Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. – М.: Изд. ЛКИ, 2009. –480 с.

MUNDARIJA

Mualliflar F.I.SH.	Maqola nomi	Bet
Nabiiev D.X.	Kirish so'zi	5
1-SHO'BA. МАТЕМАТИК MODELLASHTIRISH		
Арипов М., Сайфуллаева М.	О свойствах биологической популяционной модели с двойной нелинейной диффузией	6
Равшанов Н., Туракулов Ж.А.	Модель и вычислительный эксперимент для исследования технологического процесса фильтрования ионизированных растворов	7
Хужаёров Б., Джиянов Т.О., Эшдавлатов З.З., Хусанов Ф.З	Численное решение задачи аномального переноса вещества в элементе трещинно-пористой среде с учетом равновесной адсорбции	11
Хужаёров Б.Х., Акрамов Ш.Б.	Задача аномальной фильтрации с заданным граничным расходом в одномерном пласте	13
Тахиров Ж.О., Анваржонов Б.Б.	О модели влияния загрязнений на иммунную систему	16
Хужаёров Б.Х., Холлиев Ф.Б., Унгалова М.Б	Оценка порядка производных в модели аномального переноса вещества в фрактальных пористых средах	18
Утеулиев Н.У., Джайков Г.М., Сеидуллаев А.К., Пиримбетова О.	Численной алгоритм реконструкции плотности сечения объекта на основе интегральных данных в полосе	21
Uteuliev N.U., Orinbaev A.B.	Elektr energiyasini uzatish xarajatlarini minimumlashtirishning stoxastik modeli va algoritmlari	22
Абдурахимов Б.Ф., Ходиев Ш.И	Схемы программ как математические модели преобразований программ	24
Polatov A. Abduraxmonova Sh.	Bir o'lchovlik elastiklik tenglamasini yechish algoritmi	26
Polatov A., Sapayev Sh.	Solving the problem of stationary heat distribution in a complex cylindrical structure by the finite element method	29
Утеулиев Н.У., Кутлимуратов Ю.Қ.	Қишлоқ хўжалиги объектларини жойлаштиришни оптималлаштириш масаласини шакллантириш асослари	31
Begulov U.U., Khaydarov A.T.	The Cauchy problem for a double nonlinear parabolic equation with variable density and nonlinear source	33
Matyakubov A.S., Mamatov A.U.	Effect of heat source on ambient density in double nonlinearity heat dissipation processes in multidimensional areas	35
Шукuros А.М., Жабборов А.У.	Идеал суюқликлар фазосида қалин сферик қобиқдан ностационар түлқин тарқалиши	37
Шукuros А.М., Салиев А.А., Хайруллаев А.Ф., Мусурмонова М.О.	Дифракция плоской поперечной волны сдвига на жестком шаре в неограниченном упругом пространстве	39
Xolmurodov A.E., Matanov M.Ch., Quzratov M.A.	Reflection of sv waves in the elastic half-space. field equations for angles of incidence less than the critical one	41
Matyakubov A.S., Ismoilova M.O.	Nodivergent ko'rinishdagi nochiziqli parabolik tenglama chegaralanmagan yechimlarini tadqiq etish	44