В работе рассматривается численное решение уравнения диффузии с много-членными дробными производными по времени в конечной области. Определены профили изменения концентрации вещества. Оценено влияние порядка производной по координате и времени, т.е. фрактальной размерности среды, на характеристики переноса вещества. Результаты проанализированы для случая, когда уравнение диффузии содержит сумму членов с разными порядками производной по времени.

В данной работе поставлена и численно решена задача переноса вещества в пористой среде на основе уравнения диффузии с много-членными дробными производными по времени. Показано влияние порядков дробных производных по времени на характеристики переноса, в частности, на распределение концентрации вещества в различные моменты времени.

1. Постановка задачи

Уравнение диффузии с много-членными производными по времени записывается как

$$\frac{\partial^{\alpha} c}{\partial t^{\alpha}}+\sum_{s=1}^{n} r_s \frac{\partial^{\beta_s} c}{\partial t^{\beta_s}}=D\frac{\partial^{\gamma} c}{\partial x^{\gamma}}+f(t,x), \tag{1}$$

где $\alpha,\ \beta_s,\ s=\overline{1,n},\ \gamma$ – порядки производных. $0<\beta_s<\beta_{s-1}<...<\beta_1<\alpha<1.$ Порядки дробных производных α и γ изменяются в следующем диапозоне: $0<\alpha\le 1,\ \ 1\le\gamma\le 2.$ Если c − безразмерная величина, то $\left[\frac{\partial^{\alpha} c}{\partial t^{\alpha}}\right]=T^{-\alpha},\quad [r_s]=T^{\beta_s-\alpha},\ [D]=L^{\gamma}/T^{\alpha},\ [f(t,x)]=T^{-\alpha}$, L – размерность длины, T – размерность времени.

Модель можно преобразовать в следующую более простую форму при $n=2$ и $f=0$

$$\frac{\partial^{\alpha} c}{\partial t^{\alpha}} + r_2 \frac{\partial^{\beta_1} c}{\partial t^{\beta_1}} + r_1 \frac{\partial^{\beta_2} c}{\partial t^{\beta_2}} = D \frac{\partial^{\gamma} c}{\partial x^{\gamma}} . \qquad (2)$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$c_m(0,\ x) = 0, \qquad c_m(t,\ 0) = c_0, \qquad c_m(t,\ \infty) = 0. \qquad (3)$$

Анализ полученных результатов показывает, что использование дифференциальных уравнений с много-членными дробными производными по времени для моделирования аномальных диффузионных процессов позволяет описать эффекты запаздывания развития концентрационных профилей. Учет много-членности диффузионного уравнения по сравнению с одно-членным уравнением приводит к замедленному распострачению концентрации вещества в среде. Показано, что увеличение значения постоянных коэффициентов (r_1 и r_2) при локальных дробных производных по времени способствует усилению процесса замедления распространения профилей концентрации. Аналогичному усилению запаздывающих эффектов приводит также уменьшение порядков этих локальных производных по времени.