ISNN:2181-1296

ШАРОФ РАШИДОВ НОМИДАГИ САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНА ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika

Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 1(137/2)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК **SCIENTIFIC JOURNAL**

2023-yil, 1-son (137/2) **ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI**

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA

УДК: 532.546 **DOI: https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v1.1.1935**

АНАЛИЗ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ НА ОСНОВЕ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГО-ЧЛЕННЫМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ

Б.Х.Хужаёров, А.И.Усмонов, Ф.Б.Холлиев
Самаркандский государственный университет
E.mail: *b.khuzhayorov@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается численное решение уравнения диффузии с много-членными дробными производными по времени в конечной области. Определены профили изменения концентрации вещества. Оценено влияние порядка производной по координате и времени, т.е. фрактальной размерности среды, на характеристики переноса вещества. Результаты проанализированы для случая, когда уравнение диффузии содержит сумму членов с разными порядками производной по времени.

Ключевые слова: аномальный перенос, много-членные дробные производные, диффузия вещества, пористая среда.

G'ovak muhitlarda diffuziya tenglamasi asosida vaqt bo'yicha ko'phadli kasr hosila bilan modda ko'chish jarayonlarini tahlil qilish

Izoh. Maqolada ko'p hadli vaqt bo’yicha kasr tartibli diffuziya tenglamasining sonli yechimi chekli sohada ko'rib chiqiladi. Erigan moddaning konsentratsiyasidagi o'zgarishlar profillari aniqlandi. Koordinata va vaqtga nisbatan hosila tartibining ta'siri, ya'ni muhitning fraktal o'lchamining erigan moddalarni tashish xususiyatlariga ta'siri baholanadi. Natijalar diffuziya tenglamasi vaqt hosilasining turli tartibli hadlar yig'indisini o'z ichiga olgan holat uchun tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: anomal ko‘chish, ko‘p hadli kasr hosila, modda diffuziyasi, g‘ovak muhit.

Analysis of substance transfer in a porous medium on the basis of the diffusion equation with multi-term fractional time derivatives

Abstract. The paper considers the numerical solution of the multi-term time-fractional diffusion equations in a finite region. The profiles of changes in the concentration of the solute were determined. The influence of the order of the derivative with respect to the coordinate and time is estimated, i.e. fractal dimension of the medium, on the characteristics of the solute transport. The results are analyzed for the case when the diffusion equation contains the sum of terms with different orders of the time derivative

Keywords: anomalous transport, multi-term fractional derivatives, numerical solution, solute diffusion, porous medium.

Введение. В последнее время вопросы математического моделирования процессов аномального переноса веществ в пористых средах привлекают большое внимание. В принципе, подходы к моделированию основываются на законе баланса вещества в некотором контрольном объеме с использованием дополнительных феноменологических соотношений. Процесс переноса веществ в пористой среде определяется множеством факторов, таких как конвективный перенос, диффузия, гидродинамическая дисперсия, адсорбция, осаждение в порах, освобождение их с переходом в мобильное состояние и др. Конвективный перенос, диффузию, гидродинамическую дисперсию, локальное изменение концентрации можно описать уравнением сохранения массы [1].

В [2] решена задача для одномерного уравнения адвекции-дисперсии с переменными коэффициентами, используя явную конечно-разностную схему, далее результаты были расширены на случай двумерного уравнения в полубесконечных средах [3]. Известно, что гидродинамическая дисперсия зависит от скорости потока [4]. В [5] приведена математическая модель для двумерного переноса вещества в полубесконечной неоднородной пористой среде.

В одном из подходов к моделированию аномальных явлений при переносе веществ в пористых средах локальная производная по времени в уравнении диффузии заменяется производной дробного порядка α. Обычно порядок производной может изменятся в пределах от 0 до 1, т.е. $0<\alpha<1$. Известны работы где α принимается из интервала от 0 до 2, т.е. $0<\alpha<2$. В общем случае порядок производной может быть переменной величиной, зависящей как от времени, так и от пространственной координаты [6, 7]. В качества альтернативного подхода было предложено использовать много-членные диффузионные уравнения с производными дробного порядка по времени [8-12].

В [8] решено много-членное дробно-диффузионно-волновое уравнение с однородными и неоднородными граничными условиями с помощью метода разделения переменных. Замечено, что в отличие от одночленного случая, решение много-членного дробно-волнового уравнения диффузии не обязательно неотрицательно и, следовательно, не представляет собой аномальную диффузию любого вида.

В [9] используется метод разделения переменных для решения много-членного уравнения диффузионной волны с дробными производными по времени. Дробная производная по времени определяется в смысле Капуто.

В [10] рассмотрено много-членные дробные производные по времени уравнения волновой диффузии. Много-членные дробные производные по времени определяются в смысле Капуто, порядки которых принадлежат в интервал [0,1], [1,2), [0,2), [0,3), [2,3) и [2,4) соответственно. Предлагаются с вычислительной точки зрения эффективные численные методы моделирования много-членных уравнений волновой диффузии с дробным производными по времени. Эти методы и приемы могут быть распространены также на другие виды много-членных дробных пространственно-временных моделей.

В [11] рассмотрены начально-краевые задачи для обобщенного много-членного уравнения диффузии с дробным производными по времени в открытой ограниченной области $G\times(0,T),\ G\in R^n$. На основе соответствующего принципа максимума, который также формулируется и доказывается, устанавливаются некоторые априорные оценки решения, а затем и его единственность. Чтобы показать существование решения, сначала строится формальное решение с использованием метода разделения переменных Фурье. Компоненты решения, зависящие от времени, задаются в терминах полиномиальной функции Миттаг-Леффлера. Показано, что при определенных условиях формальное решение представляет собой обобщенное решение начально-краевой задачи для обобщенного уравнения много-членной диффузии с дробным производными по времени, которое при некоторых дополнительных условиях оказывается классическим решением. Другим важным следствием принципа максимума является непрерывная зависимость решения от данных задачи (начальных и граничных условий и функции источника), что вместе с результатами единственности и существования превращает рассматриваемую задачу в корректную задачу в смысле Адамара.

В данной работе поставлена и численно решена задача переноса вещества в пористой среде на основе уравнения диффузии с много-членными дробными производными по времени. Показано влияние порядков дробных производных по времени на характеристики переноса, в частности, на распределение концентрации вещества в различные моменты времени.

1. Постановка задачи

Уравнение диффузии с много-членными производными по времени записывается как [12]

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha}+\sum_{s=1}^{n} r_s\frac{\partial^{\beta_s} c}{\partial t^{\beta_s}}=D\frac{\partial^\gamma c}{\partial x^\gamma}+f(t,x), \qquad (1)$$

где $\alpha,\ \beta_s,\ s=\overline{1,n},\ \gamma$ – порядки производных. $0<\beta_s<\beta_{s-1}<\ldots<\beta_1<\alpha<1$. Порядки дробных производных α и γ изменяются в следующем диапозоне: $0<\alpha\le 1,\quad 1\le\gamma\le 2$.

Если c – безразмерная величина, то $\left[\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha}\right]=T^{-\alpha}$, $[r_s]=T^{\beta_s-\alpha}$, $[D]=L^\gamma/T^\alpha$, $[f(t,x)]=T^{-\alpha}$, L – размерность длины, T – размерность времени.

Модель можно преобразовать в следующую более простую форму при $n=2$ и $f=0$

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha}+r_2\frac{\partial^{\beta_1} c}{\partial t^{\beta_1}}+r_1\frac{\partial^{\beta_2} c}{\partial t^{\beta_2}}=D\frac{\partial^\gamma c}{\partial x^\gamma}. \qquad (2)$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$c_m(0,\ x)=0,\qquad c_m(t,\ 0)=c_0,\qquad c_m(t,\ \infty)=0. \tag{3}$$

2. Разностная задача

Для численного решения задачи (2) - (3) применяем метод конечных разностей. В области $\Omega=\{0\le x\le\infty,\ 0\le t\le T\}$ введем сетку, где h – шаг сетки по координате x, где τ – шаг сетки по времени t, L -характерная длина пористой среды. В результате имеем сетку $\omega_{h\tau}=\{(x_i,t_j),\ x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ h=L/N,\ t_j=j\tau,\ j=\overline{0,M},\ \tau=T/M\}$.

Уравнения системы (2), (3) аппроксимируются на сетке $\omega_{h\tau}$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\left[\sum_{l=0}^{j-1}\left((c)_i^{l+1}-(c)_i^{l}\right)\left((j-l+1)^{1-\alpha}-(j-l)^{1-\alpha}\right)-(c)_i^{j}\right]+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}(c)_i^{j+1}+\\
&+\frac{r_1}{\Gamma(2-\beta_1)\tau^{\beta_1}}\left[\sum_{l=0}^{j-1}\left((c)_i^{l+1}-(c)_i^{l}\right)\left((j-l+1)^{1-\beta_1}-(j-l)^{1-\beta_1}\right)-(c)_i^{j}\right]+\frac{1}{\Gamma(2-\beta_1)\tau^{\beta_1}}(c)_i^{j+1}+\\
&+\frac{r_2}{\Gamma(2-\beta_2)\tau^{\beta_2}}\left[\sum_{l=0}^{j-1}\left((c)_i^{l+1}-(c)_i^{l}\right)\left((j-l+1)^{1-\beta_2}-(j-l)^{1-\beta_2}\right)-(c)_i^{j}\right]+\frac{1}{\Gamma(2-\beta_2)\tau^{\beta_2}}(c)_i^{j+1}\\
&=D\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^{\gamma}}\left(\sum_{l=0}^{i-1}\left((c)_{i-(l+1)}^{j}-2(c)_{i-l}^{j}+(c)_{i-(l-1)}^{j}\right)\right)\left((l+1)^{2-\gamma}-(l)^{2-\gamma}\right).
\end{aligned}\tag{4}$$

где $\Gamma(\bullet)$ - Гамма функция Эйлера, c_i^j - сеточная функция, определенная в точке $(t_j,\ x_i)$.

Начальные и граничные условия аппроксимируются следующим образом:

$$(c)_i^0=0,\qquad (c)_0^j=0,\qquad (c)_N^j=0. \tag{5}$$

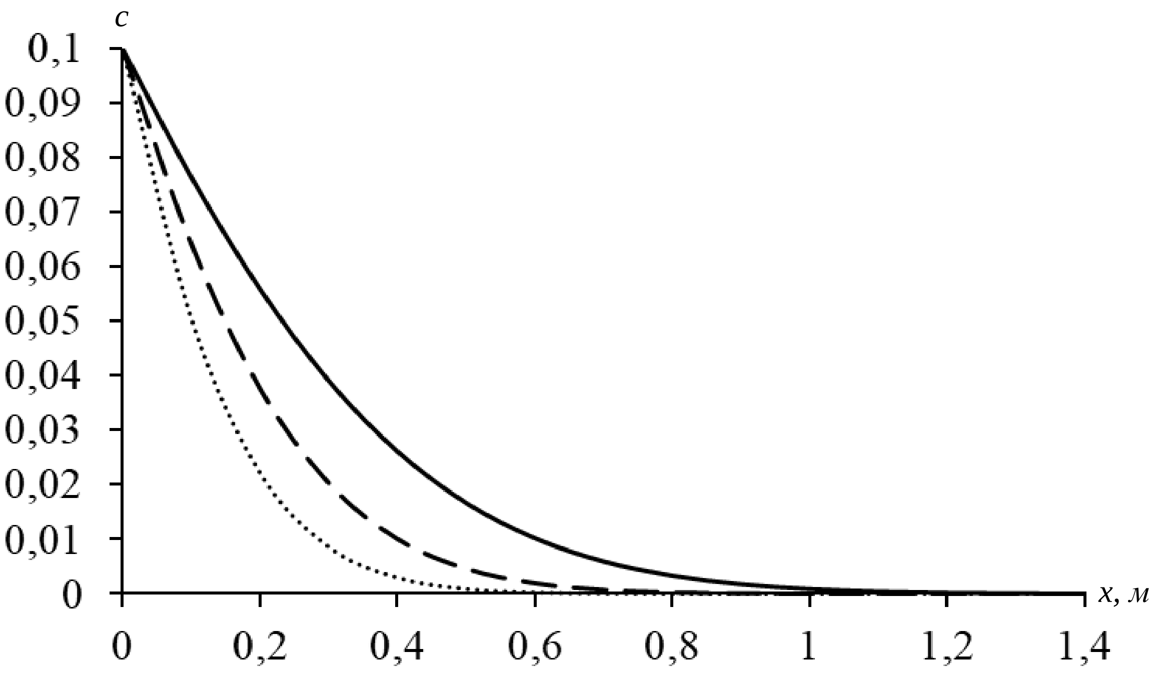
3. Результаты численных расчетов

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $D=10^{-5}\ м^{\gamma}/c$, $c_0=0{,}1$.

Некоторые результаты представлены на рис. 1-6. На рис. 1 и 2 показаны графики изменения профилей концентрации в случае, когда дробная производная по времени в левой части уравнения состоит из суммы 3-х членов. Здесь порядок дробной производной выбирается в порядке убывания ($\alpha=0.9$, $\beta_1=0.8$, $\beta_2=0.7$). Результаты показывают, что добавление дополнительных членов с дробными производными по времени в диффузионное уравнение приводит к замедлению динамики распространения концентрационных профилей. Другими словами, с добавлением дополнительных дробных производных по времени в диффузионное уравнение проявляется эффект запаздывания развития концентрационных полей. В отличие от рис.1 на рис.2 показаны результаты при уменьшении γ от 2. Сравнение рис.1 с рис.2 показывает, что уменьшение γ действует в обратном направлении, чем α, β_1, β_2, т.е. с уменьшением γ от 2 наблюдается так называемая «быстрая диффузия». Таким образом, можно заключить, что много-членность локальной дробной производной по времени и уменьшение порядка производной в диффузионном члене оказывают взаимно обратные действия.

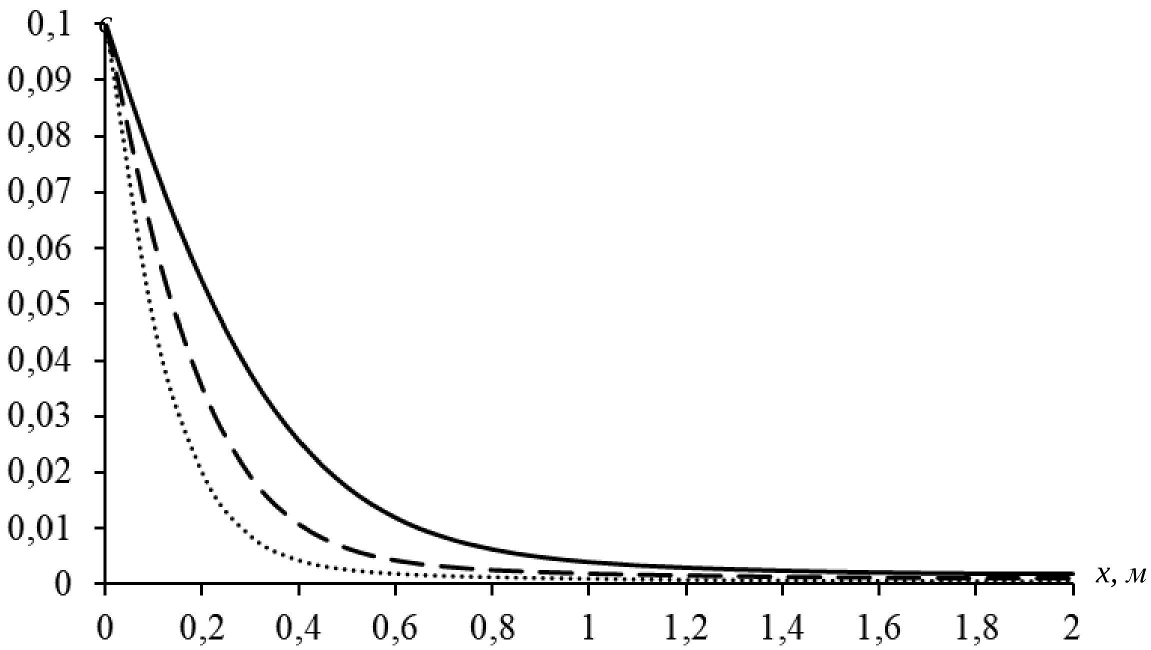
На рис. 3, 4 показано изменение концентрации вещества по времени при разных значениях параметра r_1 и r_2. Как видно из рисунков, с увеличением коэффициентов r_1 и r_2 при одних и тех же значениях γ, β_1, β_2 развитие профилей концентрации вещества замедляется. Таким образом, как увеличение числа членов с дробными производными по времени, так и увеличение их коэффициентов в много-членном уравнении диффузии приводит к замедленной динамике изменения концентрационных профилей. Уменьшение порядка производной γ в диффузионном уравнении, как и в предыдущем случае, приводит к «быстрой диффузии» (рис. 3,4).

Приводились также расчеты с уменьшенными порядками производных по времени β_1, β_2 по сравнению с предыдущими случаями. Некоторые результаты показаны на рис.5,6. Как видно из рисунков, уменьшение значения β_1 от 0,8 до 0,7 и уменьшение значения β_2 от 0,7 до 0,5 приводит к усилению эффекта запаздывания развития профилей концентрации. В частности, сравнение рис.3 с рис.5 показывает, что если передний фронт концентрации в первом случае доходил приблизительно до 0,55 м (рис.3), то во втором случае эта величина составляет ~ 0,35 м. Следовательно, можно заключить, что уменьшение порядков производных по времени в много-членном уравнении диффузии усиливает эффекты запаздывания развития концентрационных профилей.



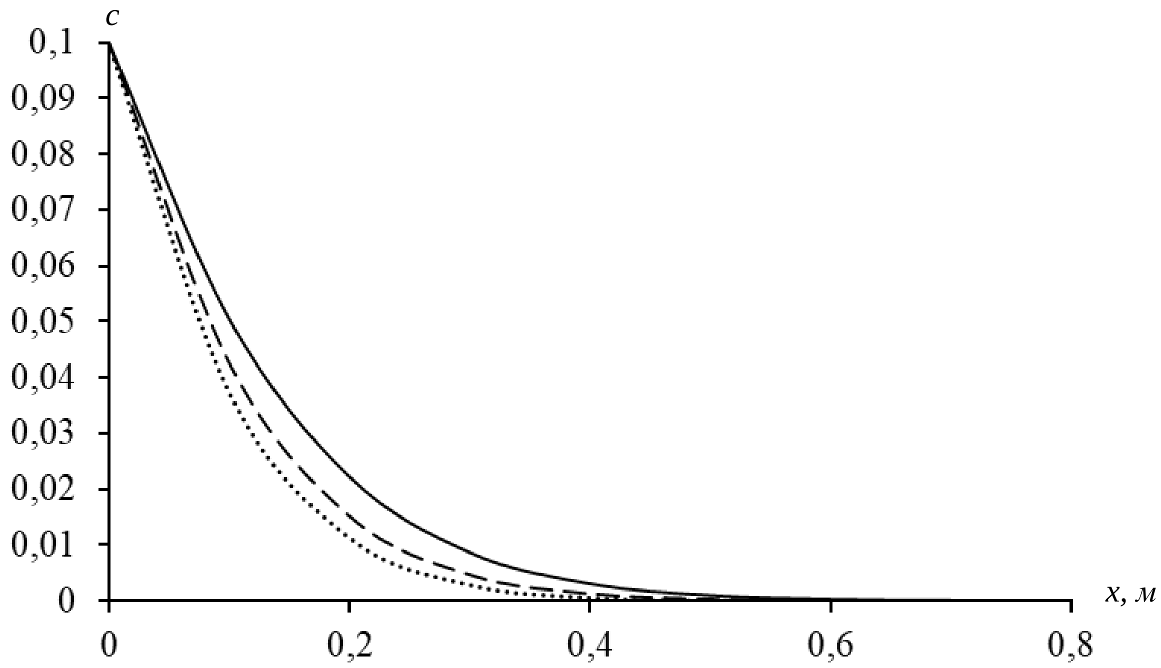
$r_1 = 0,\ r_2 = 0,$ $r_1 = 0.6,\ r_2 = 0,$ $r_1 = 0.6, r_2 = 0.5$

Рис. 1. Профили изменения концентрации: $\gamma = 2$, $\alpha = 0.9$, $\beta_1 = 0.8$, $\beta_2 = 0.7$, $t = 3600c$.



$r_1=0$, $r_2=0$, $r_1=0.6$, $r_2=0$, $r_1=0.6$, $r_2=0.5$

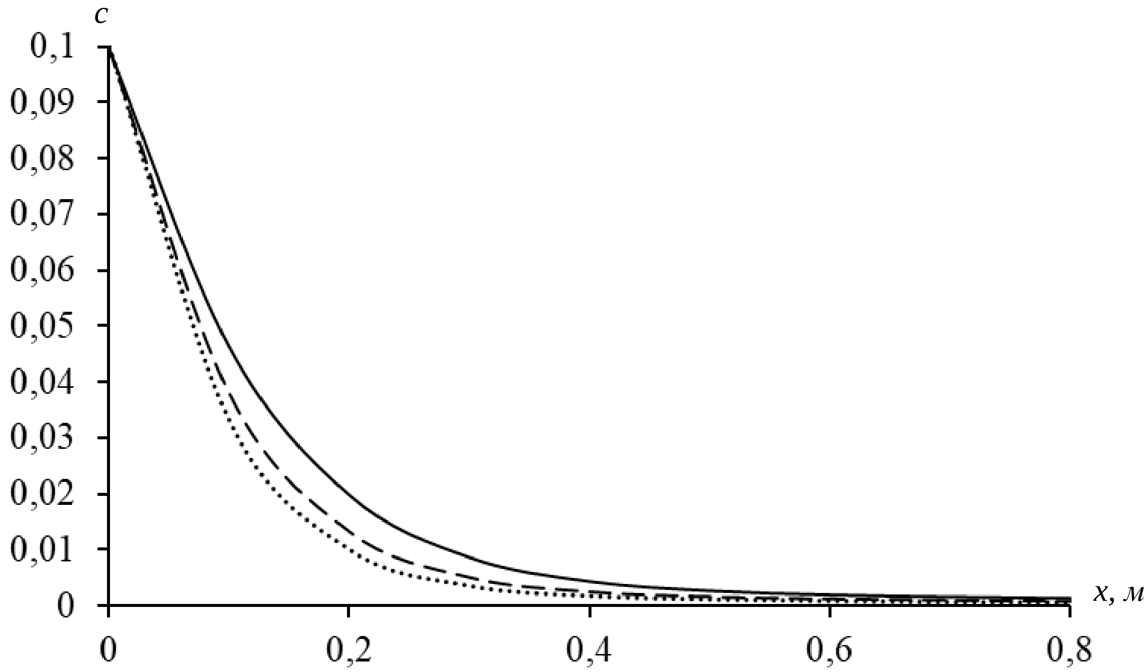
Рис. 2. Профили изменения концентрации: $\gamma=1.9$, $\alpha=0.9$, $\beta_1=0.8$, $\beta_2=0.7$, $t=3600c$



$r_1=0.6$, $r_2=0.5$ $r_1=1.0$, $r_2=0.8$

$r_1=1.5$, $r_2=1.0$

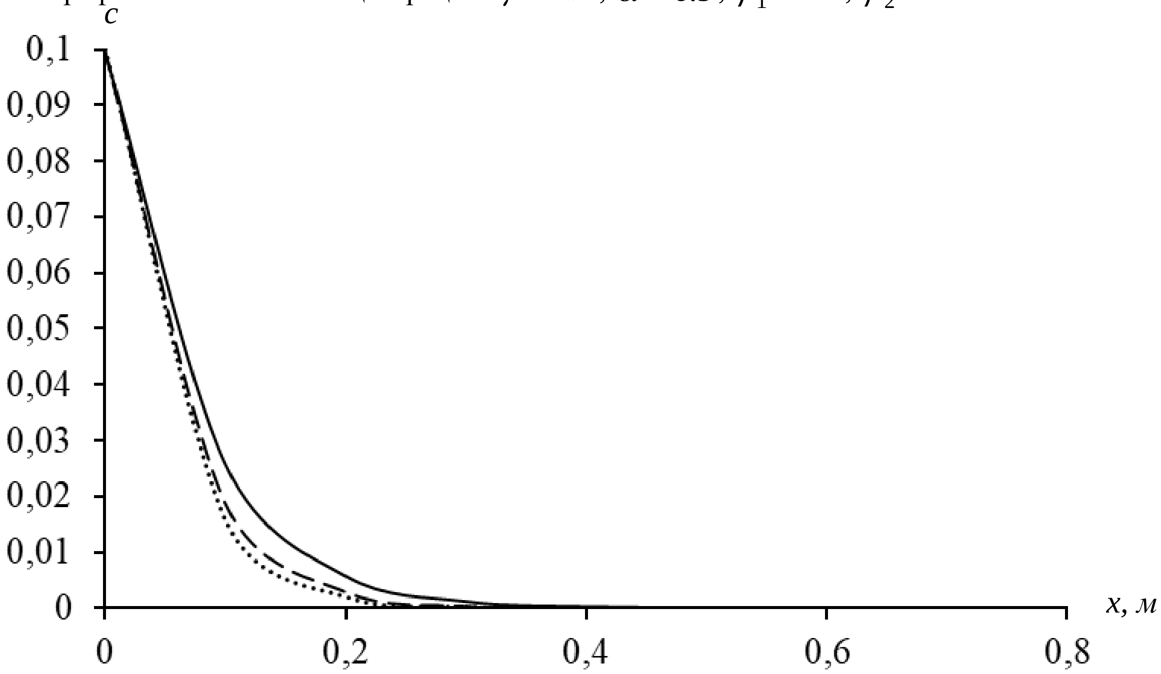
Рис. 3. Профили изменения концентрации: $\gamma=2$, $\alpha=0.9$, $\beta_1=0.8$, $\beta_2=0.7$, $t=3600c$



$r_1=0.6$, $r_2=0.5$ $r_1=1.0$, $r_2=0.8$

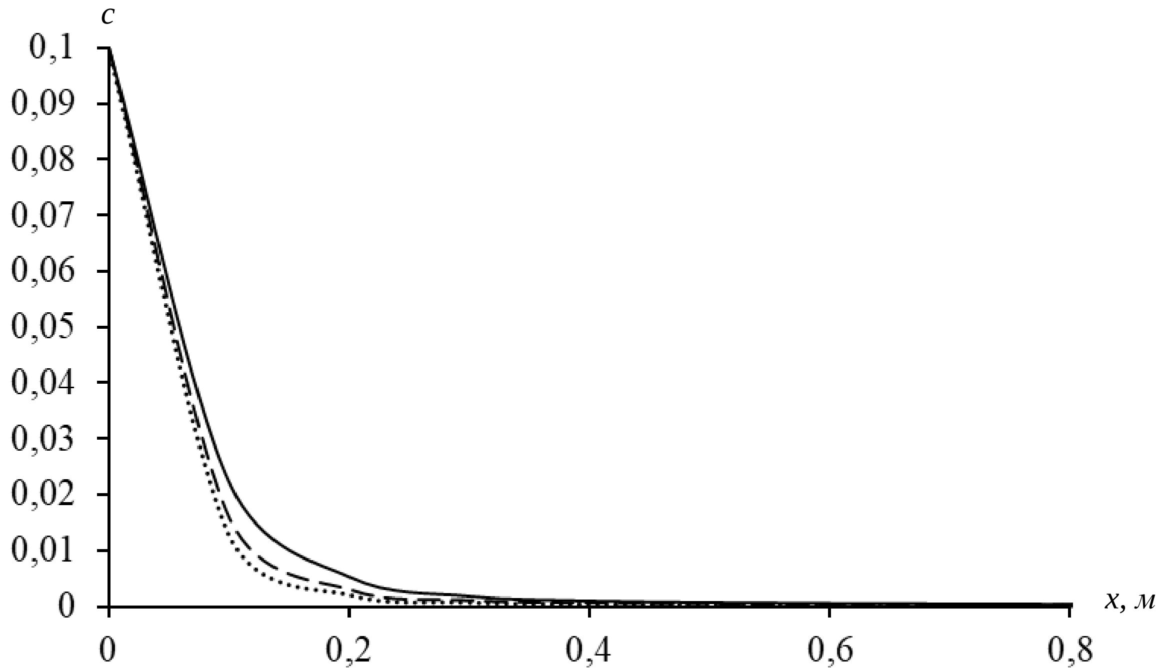
$r_1 = 1.5, r_2 = 1.0$

Рис. 4. Профили изменения концентрации: $\gamma = 1.9$, $\alpha = 0.9$, $\beta_1 = 0.8$, $\beta_2 = 0.7$



$r_1 = 0.6, r_2 = 0.5$ $r_1 = 1.0, r_2 = 0.8$
$r_1 = 1.5, r_2 = 1.0$

Рис. 5. Профили изменения концентрации: $\gamma = 2$, $\alpha = 0.9$, $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.5$



$r_1 = 0.6, r_2 = 0.5$ $r_1 = 1.0, r_2 = 0.8$

………………………… $r_1 = 1.5, r_2 = 1.0$

Рис. 6. Профили изменения концентрации: $\gamma = 1.9$, $\alpha = 0.9$, $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.5$

Заключение

Анализ полученных результатов показывает, что использование дифференциальных уравнений с много-членными дробными производными по времени для моделирования аномальных диффузионных процессов позволяет описать эффекты запаздывания развития концентрационных профилей. Учет много-членности диффузионного уравнения по сравнению с одно-членным уравнением приводит к замедленному распострачению концентрации вещества в среде. Показано, что увеличение значения постоянных коэффициентов (r_1 и r_2) при локальных дробных производных по времени способствует усилению процесса замедления распространения профилей концентрации. Аналогичному усилению запаздывающих эффектов приводит также уменьшение порядков этих локальных производных по времени.

Литературы

1. Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент: Издательство «ФАН». 2012. – 280 с.
2. Savovic S., Djordjevich A. Finite difference solution of the one dimensional advection diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media // Int. J. Heat Mass Transfer 55 (2012) 4291 4294.Pp.
3. Savovic S., Djordjevich A. Numerical solution for temporally and spatially dependent solute dispersion of pulse type input concentration in semi-infinite media // Int. J. Heat Mass Transfer 60 (2013) 291–295 Pp.
4. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier Publishing Company. 1972. -764 p.
5. Yadav R.R., Kumar L.K. Two-Dimensional Conservative Solute Transport with Temporal and Scale-Dependent Dispersion: Analytical Solution // International Journal of Advance in Mathematics. No 2 (2018): 90–111 Pp
6. Lorenzo C.A., Hartley T, Variable order and distributed order fractional operators // Nonlinear Dynam., 29 (2002), pp. 57-98.
7. Chen S., Lui F., Burrage K, Numerical simulation of a new-dimensional variable order fractional percolation equation in non-homogeneous porous media // Computers and Mathematics with Applications, 67 (2014), pp. 1673-1681.
8. Varsha Daftardar-Gejji, Sachin Bhalekar. Boundary value problems for multi-term fractional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 754–765
9. H. Jiang, F. Liu, I. Turner, K. Burrage Analytical solutions for the multi-term time-fractional diffusion-wave/diffusion equations in a finite domain // Computers and Mathematics with Applications 64 (2012) 3377–3388
10. F.Liu, M.M. Meerschaert, R. McGough, P.Zhuang, Q.Liu. Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation // An International Journal for Theory and Applications, Vol 16, №1, 2013
11. Yury Luchko. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation // J. Math. Anal. Appl. 374 (2011) 538–548
12. Gongsheng Li, Chunlong Sun, Xianzheng Jia, Dianhu Du. Numerical Solution to the Multi-Term Time Fractional Diffusion Equation in a Finite Domain // Numer. math. Theor. Meth. Appl. Vol. 9, No. 3, pp.337-357, 2016.