



**ALI QUSHCHINING 620 YILLIK TAVALLUDIGA  
BAG'ISHLANGAN "ALI QUSHCHI – MIRZO ULUG'BEK  
ILMIY MAKTABINING BUYUK ELCHISI"  
MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY ANJUMAN  
MATERIALLARI**

2023-yil 21-22 sentyabr  
Samarqand, O'zbekiston



**"ALI QUSHJI – AN OUTSTANDING AMBASSADOR OF  
THE SCIENTIFIC SCHOOL OF ULUGH BEG" CELEBRATING THE  
620<sup>TH</sup> ANNIVERSARY OF ALI QUSHJI'S BIRTH  
INTERNATIONAL CONFERENCE**

September 21-22, 2023  
Samarkand, Uzbekistan

**Ali Qushchi tavalludining 620 yilligi hamda O‘zbekiston respublikasi fanlar akademiyasining 80 yilligiga bag‘ishlangan “Ali Qushchi – Mirzo Ulug’bek ilmiy maktabining buyuk elchisi” mavzusidagi xalqaro ilmiy anjuman materiallari (Samarqand, 2023-yil 21-22 sentyabr). – Samarqand: SamDU nashriyoti, 2023.– 498 b.**

**Tahrir hay’ati:**

**f.m.f.d. M.E. Mo‘minov (mas’ul muharrir);  
f.m.f.d. A.M. Xalxo‘jayev, f.m.f.d. J. Maxmudov, f.m.f.n. G‘.A. Xasanov, f.m.f.n.  
Z.X.Ochilov, f.-m.f.n. E.Ya. Jabborov, m.f.f.d (PhD) F.Tursunov, f.-m.f.n.  
I.Bozorov, m.f.f.d (PhD) H.E. Qudratov, m.f.f.d (PhD) U.B. Mo‘minov, m.f.f.d  
(PhD) Sh. Qurbonov, m.f.f.d (PhD) O. Mirzayev, m.f.f.d (PhD) A.Boltayev**

*Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Kengashining 2023 yil qarori bilan nashrga tavsiya etilgan.*

## **АЛИ ҚУШЧИ – МИРЗО УЛУҒБЕК ИЛМИЙ МАКТАБИННИГ БҮЮК ЭЛЧИСИ**

Илм-фанны ривожланишида буюк аждодларимизнинг илмий ишлари катта ҳисса бўлиб қўшилганлиги тарихий ҳақиқат. Шунинг учун ҳам аждодларимизнинг илмий меросини асрраб-аввайлаш ва келажак авлодларга етказиш йўлида кенг кўламли ишлар амалга оширилмоқда.

Буюк аждодларимиздан бири, йирик ўзбек олимни, математик ва астроном Алоуддин Али ибн Муҳаммад ал-Қушчи номини фахр билан эътироф этамиз. 2023 йилда Али Қушчи таваллудига 620 йил тўлди.

Шу билан бирга бу йил мамлакатимизни ижтимоий-иктисодий ривожлантиришда илм-фаннинг ўрнини ҳамда илмий натижаларни амалиётга тадбиқи самарадорлигини оширишда катта ҳисса қўшиб келаётган Ўзбекистон Фанлар Академиясининг ҳам ташкил топганига 80 йил тўлди.

Шу муносабат билан Самарқанд вилояти ҳокимлиги ташабbusи асосида Фанлар Академияси Математика институти ва Астрономия институти билан ҳамкорликда Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университетида 2023 йил 21-22 сентябрь кунлари Али Қушчи таваллудининг 620 йиллиги ҳамда Ўзбекистон Фанлар Академиясининг 80 йиллигига бағишлиланган “Али Қушчи-Мирзо Улуғбек илмий мактабининг буюк элчиси” мавзусида халқаро илмий анжуман ўтказилмоқда.

Али Қушчи фалаккиётшунос ва риёзиётчи олим, мутафаккир, ундан 20 дан ортиқ илмий асарлар мерос бўлиб қолган. У қўп олимларнинг асарларига шарҳлар ёзган. Унинг «Улуғбек зижига шарҳ» асари астрономия тарихида катта ахамиятга эга. У «Зиж»ни геометрик теоремалар ёрдамида шарҳлайди.

Улуғбек расадхонасини қуришда ва унда олиб борилган кейинги кузатиш ишларида Али Қушчи фаол иштирок этган. Мирзо Улуғбекнинг “Зиди жадиди Кўрагоний” жадвалини тузиш ишларида фаол қатнашган.

У Мирзо Улуғбекнинг “Зиди жадиди Кўрагоний” асарини сақлаб қолди ва жаҳонга ёйди. Шу билан бир қаторда бу асарга ёзилган қўплаб шарҳларни ҳам сақлаб қолди. Ҳозирги илмий тадқиқот ишлари кўрсатишича, Али Қушчи асарларидаги тўғри чизиқли тригонометрияга доир кўп масалалар биринчи марта берилган.

Али Қушчи тарихда иккинчи шарқ ренессансининг етук математик ва астроном олими, ўз даврининг Батлимуси (Шарқ Птоломей) деган юксак унвонга сазовор бўлган йирик аллома бўлиб танилган.

Самарқанд илмий академияси ғояларидан озиқланиб вояга етган, Али Қушчи Марказий Осиёда рўй берган иккинчи ренессанс ютуқларини Европага узатган мутафаккир ҳисобланади.

Конференциянинг мақсади Мирзо Улуғбек мактаби ва Али Қушчи илмий меросини чукур ўрганиш, математика ва унинг турли йўналишларининг бугунги ҳолати ва ривожланиш истиқболларини муҳокама қилиш, ёшларни илмий тадқиқот соҳасига кенг жалб қилиш, фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграсияси

самарадорлигини ошириш бўйича тегишли тавсиялар ишлаб чиқиш ҳамда халқаро илмий ҳамкорликни кучайтиришdir.

Конференцияда математика ва астрономия соҳаларидаги **илмий тадқиқотларнинг натижалари фан ва таълим уйғунлашишининг устувор томонлари муҳокама қилинди**.

Ушбу конференция мамлакатимизда таълим ва илмий тадқиқотчилик соҳасида олиб борилаётган ишларни янада такомиллаштириш, фан ютуқларини республикамиз таълим соҳасига кенг татбиқ қилиш, республикамизда фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграцияси борасида олиб борилаётган ишларни кенг муҳокама қилишга қаратилди.

Конференцияда республикамиздаги олий ўкув юртлари ва илмий текшириш институтларидан олимлар ҳамда АҚШ, Хитой, Жанубий Корея, Ҳиндистон, Россия, Азарбайжон, Туркия каби давлатларнинг илмий-таълим марказларидан етакчи мутахассислар иштирок этди.

*Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университети  
ректори Рустам Халмурадов*

# I. SHO'BA. MATEMATIK ANALIZ

## Eigenvalues of the Schrödinger operator corresponding to a system of three fermions on a one dimensional lattice

**Abdullayev J.I., Ergashova Sh.H**

In this paper, we consider the Hamiltonian  $H_\mu$  of a system of three fermions on a lattice  $\mathbb{Z}$  with pairwise two-particle interactions  $\mu > 0$  at neighboring sites. In the momentum representation, the total three-particle Hamiltonian decomposes into a direct operator integral

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \bigoplus H_\mu(K) dK.$$

The essential spectrum of the faber operator  $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$ ,  $K \in \mathbb{T} \equiv \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$  consists of the union of two segments, whose width and location depend on the parameters of the operator.

The main results of the work are given for values of the interaction energy for sufficiently large  $\mu > 0$  of two fermions.

Bound states of a system of two fermions on a one-dimensional lattice were studied in [1] and infinity number of bound states of a system of two fermions on a two dimensional lattice were considered in [2]. The essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operators  $H_\mu(K)$  was considered in [3], corresponding to a system of three fermions on a  $d$  –dimensional lattice  $\mathbb{Z}^d$  with paired two-particle interactions  $\mu > 0$  at neighboring sites and described the essential spectrum of the operator  $H_\mu(K)$ .

### Representations of Hamiltonians and main results

Let  $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$  be a Hilbert space of square-summable functions defined on  $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , and  $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3)$  be a subspace of antisymmetric functions with respect to any two coordinates.

We consider a Hamiltonian of a system of three quantum particles (three fermions with mass 1) interacting neighboring sites on  $\mathbb{Z}$ .

In coordinate representation, the Hamiltonian  $\hat{h}_0$  of a system of two fermions on  $\mathbb{Z}$  is associated with the bounded self-adjoint operator in  $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2)$ :

$$\hat{h}_0 = -\frac{1}{2}\Delta \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes \Delta,$$

where  $\Delta$  is the lattice Laplasian,  $I$  is identity operator in  $\ell_2(\mathbb{Z})$ .

The total Hamiltonian  $\hat{h}_\mu$  of a system of two fermions interacting neighboring sites acts in  $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2)$  and is bounded perturbation of the free Hamiltonian  $\hat{h}_0$ :

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}_0 - \mu \hat{v}.$$

Here  $\mu > 0$  is energy of interaction of two fermions, and the operator  $\hat{v}$  describes interacting neighboring sites:

$$(\hat{v}\psi)(x, y) = \hat{\vartheta}(x - y)\hat{\psi}(x, y),$$

where

$$\hat{\vartheta}(x) = \begin{cases} 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| \neq 1. \end{cases}$$

Similarly, free Hamiltonian  $\hat{H}_0$  of three fermions on  $\mathbb{Z}$  is defined in  $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3)$  by

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta \otimes I \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes \Delta \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes I \otimes \Delta.$$

The total Hamiltonian  $\hat{H}_\mu$  of the system of three fermions interacting neighboring sites is a bounded perturbation of the free Hamiltonian  $\hat{H}_0$ :

$$\hat{H}_\mu = \hat{H}_0 - \mu(\hat{V}_{12} + \hat{V}_{23} + \hat{V}_{31}),$$

where

$$(V_{\alpha\beta}f)(x_1, x_2, x_3) = \hat{\vartheta}(x_\alpha - x_\beta)f(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Let  $\mathbb{T}$  be one-dimensional torus,  $L_2^{as}(\mathbb{T}^3) \subset L_2(\mathbb{T}^3)$  be a Hilbert space of square integrable functions, defined on  $\mathbb{T}^3$  and antisymmetric with respect to any two coordinates. In the momentum representation, two and three-particle Hamiltonians act accordingly in the Hilbert spaces  $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$  and  $L_2^{as}(\mathbb{T}^3)$  respectively.

The study of spectrum of the operators  $h_\mu$  and  $H_\mu$  is reduced to the study of the spectrum of families of the operators  $h_\mu(k), k \in \mathbb{T}$  and  $H_\mu(K), K \in \mathbb{T}$ , respectively [4, 35], [5, 745], [6, 176].

Two-particle discrete Schrödinger operator

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v \quad (1)$$

acts in  $L_2^0(\mathbb{T}) := \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = -f(p)\}$ , where

$$(h_0(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q),$$

$$\varepsilon_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right), \quad \varepsilon(q) = 1 - \cos q$$

$$(vf)(q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin q \sin s f(s) ds.$$

The associated three particle Schrödinger operator

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$$

acts in  $L_2^{as}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2): f(p, q) = -f(q, p) = -f(K - p - q, q) = -f(p, K - p - q)\}$ , where

$$(H_0(K)f)(p, q) = E_K(p, q)f(p, q),$$

$$E_K(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K - p - q),$$

$$(V_1f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q - s)f(p, s) ds,$$

$$(V_2f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p - s)f(s, q) ds,$$

$$(V_3f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p - s)f(s, p + q - s) ds.$$

### **The spectrum of a two-particle operator $h_\mu(k)$**

We are interested in the essential and discrete spectrum of the two-particle (two fermions) operator  $h_\mu(k)$  defined by (1).

Note that  $v$  is a projector with rank one. According to Weyl's theorem [7, 7], the essential spectrum  $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$  of the operator  $h_\mu(k)$  coincides with the spectrum  $\sigma(h_0(k))$  of unperturbed operator  $h_0(k)$ , i.e

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma_{ess}(h_0(k)) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)],$$

where

$$\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}} \varepsilon_k(q) = 2 - 2 \cos \frac{k}{2} = 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right),$$

$$\varepsilon_{\max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}} \varepsilon_k(q) = 2 + 2 \cos \frac{k}{2} = 4 - 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right).$$

The function  $\varepsilon_{\min}(k)$  is increasing and  $\varepsilon_{\max}(k)$  is decreasing in  $[0, \pi]$  respectively. Therefore,

$$\min_{k \in \mathbb{T}} \varepsilon_{\min}(k) = \varepsilon_{\min}(0) = 0, \quad \max_{k \in \mathbb{T}} \varepsilon_{\max}(k) = \varepsilon_{\max}(\pi) = 4.$$

Since the operator  $v$  is positive, then by minimax principle the operator  $h_\mu(k)$  has no eigenvalues lying above the essential spectrum of the operator  $h_\mu(k)$ . So, we are interested in the eigenvalues of the operator  $h_\mu(k)$  lying to the left of the essential spectrum. It is known that since the rank of the operator  $v$  is equal to one, the operator  $h_\mu(k)$  has at most one eigenvalue lying below the essential spectrum, and Fredholm determinant  $\Delta_\mu(k, z)$  corresponding to this operator has form:

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 q dq}{\varepsilon_k(p) - z} = 1 - \frac{2\mu}{2 - z + \sqrt{(2 - z)^2 - 4 \cos^2 \frac{k}{2}}}.$$

**Lemma 1.** A number  $z < \varepsilon_{\min}(k)$  is an eigenvalue of the operator  $h_\mu(k)$  if and only if  $\Delta_\mu(k, z) = 0$ .

**Theorem 1.** Let  $k \in \mathbb{T}$  and  $\mu > \cos \frac{k}{2}$ . Then the operator  $h_\mu(k)$  has a unique simple eigenvalue  $z_\mu(k) = 2 - \mu - \frac{1}{\mu} + \frac{\varepsilon(k)}{2\mu}$  below the essential spectrum of the operator  $h_\mu(k)$ .

From the definition of  $z_\mu(k)$  and the fact that the function  $\varepsilon(p) = 1 - \cos p$  is even in the interval  $[-\pi, \pi]$  and monotonic in  $[0, \pi]$ , the following assertion follows:

**Lemma 2.** The eigenvalue  $z_\mu(k)$  is even in  $[-\pi, \pi]$  and increases in  $[0, \pi]$ .

### Essential and discrete spectrum of the three-particle operator $H_\mu(K)$

Since three fermions are considered in a three-particle system, the  $H_\mu^{(\alpha)}(K) = H_0(K) - \mu V_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  channel operators are unitary equivalent to each other. Therefore, it is enough for us to study one of the channel operator. Channel operator

$H_\mu^{(\alpha)}(K)$  has no eigenvalues [3, 70]. Its essential spectrum was considered in [3] and the essential spectrum of the operator  $H_\mu^{(\alpha)}(K)$  consists of the union of range of values of the functions  $\Lambda_{\mu K}(p) = z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)$  and  $E_K(p, q)$ :

$$\sigma(H_\mu^{(\alpha)}(K)) = [\Lambda_{min}(\mu, K), \Lambda_{max}(\mu, K)] \cup [E_{min}(K), E_{max}(K)],$$

$$E_{min}(K) = \min_{p,q \in \mathbb{T}} E_K(p, q), \quad E_{max}(K) = \max_{p,q \in \mathbb{T}} E_K(p, q),$$

and

$$\Lambda_{min}(\mu, K) = \min_{p \in \mathbb{T}} \{z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)\}, \quad \Lambda_{max}(\mu, K) = \max_{p \in \mathbb{T}} \{z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)\}.$$

Observe in [3, 70] the spectrum of the channel operator  $H_\mu^{(\alpha)}(K)$  coincides with the essential spectrum of the operator  $H_\mu(K)$ :

$$\sigma_{ess}(H_\mu(K)) = \sigma(H_\mu^{(1)}(K)) = [\Lambda_{min}(\mu, K), \Lambda_{max}(\mu, K)] \cup [E_{min}(K), E_{max}(K)].$$

The intervals  $[\Lambda_{min}(\mu, K), \Lambda_{max}(\mu, K)]$  and  $[E_{min}(K), E_{max}(K)]$  are called "two particle branch" and "three particle branch" of the essential spectrum of the operator  $H_\mu(K)$ , respectively.

Since we are considering a one-dimensional case, the eigenvalue  $z_\mu(k)$  is found exactly. Therefore, we can exactly define the location of the essential spectrum. For example let  $K = \pi$ :

$$\sigma_{ess}(H_\mu(\pi)) = \left[2 - \mu, 4 - \mu - \frac{1}{\mu}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 6\right].$$

Let  $\mu > 2$ , then two and three particle branches of the essential spectrum of the operator  $H_\mu(\pi)$  are disjoint, i.e.

$$\left[2 - \mu, 4 - \mu - \frac{1}{\mu}\right] \cap \left[\frac{3}{2}, 6\right] = \emptyset.$$

The essential spectrum of the operator  $H_\mu(K)$  is described. Now we are interested in the eigenvalues of the operator  $H_\mu(K)$  lying outside the essential spectrum.

**Theorem 2.** *For any  $K \in \mathbb{T}$ ,  $\mu > 0$  the operator  $H_\mu(K)$  does not have an eigenvalue lying above  $E_{max}(K)$ .*

It is known that the problem of finding the eigenvalues of the three-particle operator  $H_\mu(K)$  lying outside the essential spectrum is reduced to the problem of finding the eigenvalues of self-adjoint, compact Faddeev type operator  $A_\mu(K, z)$ .

For any  $z < \Lambda_{min}(\mu, K)$  we define self-adjoint Faddeev type operator  $A_\mu(K, z)$  in  $L_2(\mathbb{T})$  as

$$(A_\mu(K, z)\psi)(p) =$$

$$= \frac{-2\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(\frac{K-p}{2} - s\right) \sin\left(\frac{K-s}{2} - s\right) \psi(s) ds}{(E_K(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(K - s, z - \varepsilon(s))}}.$$

Note, that for  $z < \Lambda_{min}(\mu, K)$  the function  $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))$  is positive for all  $K, p \in \mathbb{T}$ .

**Lemma 3.** *A number  $z < \Lambda_{min}(\mu, K)$  is an eigenvalue of the operator  $H_\mu(K)$  if and only if 1 is eigenvalue of  $A_\mu(K, z)$ .*

Let  $A$  is self-adjoint operator defined in the Hilbert space  $\mathcal{H}$ . We denote by  $n_+[\lambda, A]$  the number of eigenvalues of the operator  $A$  greater than  $\lambda$ , and denote by  $n_-[\lambda, A]$  the number of eigenvalues of the operator  $A$  less than  $\lambda$ .

**Lemma 4.** *For any  $z < \Lambda_{min}(\mu, K)$  the following equality  $n_-[z, H_\mu(K)] = n_+[1, A_\mu(K, z)]$  is true [5, 33], [6, 176].*

**Theorem 3.** *There exists the number  $\mu_0 > 0$  such that for any  $\mu > \mu_0$  the operator  $H_\mu(\pi)$  has exactly four eigenvalues below the essential spectrum of the operator  $H_\mu(\pi)$ .*

## REFERENCES

1. Abdullaev Zh.I. Bound states of a system of two fermions on a one dimensional lattice, Theoretical and Mathematical Physics, 147:1 2006, 486–495.
2. Abdullaev J.I., Kuliev K.D., Mamirov B.U. Infinity of bound states of a system of two fermions on a two dimensional lattice. Uzbek Mathematical Journal, 4, 3-16, 2016.

3. Khaluzhayev A.M. The essential spectrum of the three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice, Russian mathematics, 9, 67-78, 2017.
4. Lakayev S.N., Lakayev Sh.S. The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice, J. Phys. A: Math. Theor., P:743-772, 2017.
5. Albeverio S., Lakayev S.N., Muminov Z.I. Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics, Ann. Henri Poincaré, P: 743-772, 2004
6. Abdullaev Zh. Finiteness of the discrete spectrum for non-trivial values of the full quasi-momentum in the system of three bosons on a lattice, Russian Mathematics Surveys , Vol .62., Issue 1, P: 175-177, 2007.
7. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics VI: Analysis of Operators, New York Academic, 1979.

### **Dynamics of a Cooperative Discrete System with order one in the Plane**

**Absalamov A.T.**

*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan*

We consider the cooperative system

$$V: \begin{cases} x' = ax + \frac{by^k}{1+y^k} \\ y' = dy + \frac{cx^k}{1+x^k} \end{cases}$$

where all parameters  $a, b, c, d$  are positive numbers and the initial conditions  $x_0, y_0$  are nonnegative numbers. In this system  $k$  is called the order of cooperative discrete system (1). We describe the dynamics of this system when  $k = 1$ .

The main problem for a given operator  $V$  and for arbitrarily initial point  $s^{(0)} \in \mathbb{R}_+^2$  is to describe the limit points of the trajectory  $\{s^{(m)}\}_{m=0}^\infty$ , where

$$s^{(m)} = V^m(s^{(0)}) = \underbrace{V(V(\dots V(s^{(0)})) \dots)}_m$$

**Definition 1.** A point  $s$  is called fixed point if  $V(s) = s$ . The set of fixed points is denoted by  $FixV$ .

**Definition 2.** A point  $s$  of the operator  $V$  is called hyperbolic if its Jacobian  $J$  at  $s$  has no eigenvalues on the unit circle.

**Definition 3.** A hyperbolic fixed point  $s$  is called:

- i) *attracting if all the eigenvalues of the Jacobi matrix  $J(s)$  are less than 1 in absolute value,*
- ii) *repelling if all the eigenvalues of the Jacobi matrix  $J(s)$  are greater than 1 in absolute value,*
- iii) *a saddle otherwise.*

For the fixed points of given operator  $V$  we have:

**Teorema 1.** When  $k = 1$  for the operator  $V$  the following statements are hold:

$$FixV = \begin{cases} \{s_1\}, & \text{if } a \geq 1 \text{ or } d \geq 1 \text{ or } a, d \in (0,1) \text{ and } bc \leq (1-a)(1-d) \\ \{s_1, s_2\}, & \text{if } a, d \in (0,1) \text{ and } bc > (1-a)(1-d) \end{cases}$$

$s_1$  is a/an

$$\begin{cases} \text{attractor,} & \text{if } a, d \in (0,1) \text{ and } bc < (1-a)(1-d) \\ \text{saddle,} & \text{if } a, d \in (0,1) \text{ and } (1-a)(1-d) < bc < (1+a)(1+d) \\ \text{repelling,} & \text{if } a \geq 1 \text{ or } d \geq 1 \text{ or } a, d \in (0,1) \text{ and } bc > (1+a)(1+d) \\ \text{non - hyperbolic,} & \text{if } a, d \in (0,1) \text{ and } bc = (1-a)(1-d) \text{ or } bc = (1+a)(1+d) \end{cases}$$

$s_2$  is a/an attractor

$$\text{where } s_1 = (0; 0) \text{ and } s_2 = \left( \frac{bc-(1-a)(1-d)}{(1-a)(1-d+c)}, \frac{bc-(1-a)(1-d)}{(1-d)(1-a+b)} \right).$$

For the limit points of given operator  $V$  we have:

**Teorema 2.** If  $k = 1$  and  $a, d \in (0,1)$ ,  $bc \leq (1-a)(1-d)$  then for the trajectories of operator  $V$  the following holds

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V^m(x, y) = s_1 \text{ for any initial point } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

## References.

1. Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical system*. Westview Press.(2003).

2. Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., and Rozikov U.A. *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*. Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields. 14(2), 279-335. (2011).
3. Absalamov A.T., Rozikov U.A. *The Dynamics of Gonosomal Evolution Operators*. Jour. Applied Nonlinear Dynamics. 9(2), 247-257. (2020).

**Existence conditions of eigenvalues and virtual levels for a two-particle Hamiltonian on a  $d$ -dimensional lattice**

**I. N. Bozorov<sup>1</sup>, A. M. Khurramov<sup>2</sup>, M. I. Muminov<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, <sup>2</sup>Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,

Let  $\mathbb{Z}^d$  be  $d$ -dimensional integer-valued lattice, be  $d$ -dimensional torus, i.e.,  $d$ -dimensional cube whose opposite faces are identified, and let  $L_2(\mathbb{T}^d)$  be the Hilbert space of square integrable functions on  $\mathbb{T}^d$ .

A two-particle Schrödinger operator  $h_\mu(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$ ,  $\mu > 0$ , associated to the Hamiltonian  $h$  for a system of two particles on the lattice  $\mathbb{Z}^d$  interacting via attractive short-range potential, is a self-adjoint operator and acts in  $L_2(\mathbb{T}^d)$  as

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{T}^d, \quad \mu > 0,$$

where  $h_0(k)$  is a multiplication operator by a function

$$E_k(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p - k), \quad \varepsilon_r(p) = \frac{1}{m_r} \varepsilon(p), \quad r = 1, 2,$$

$\varepsilon_r(\cdot)$ , is the dispersion relation of the  $r$  th normal mode associated with the free particle  $r$  ( $r = 1, 2$ ) and  $v$  is an integral operator with kernel

$$v(p - s) = 1 + \sum_{\alpha=1}^d \cos(p_\alpha - s_\alpha) + \sum_{\alpha < \beta} \cos(p_\alpha - s_\alpha) \cos(p_\beta - s_\beta) + \dots + \prod_{\alpha=1}^d \cos(p_\alpha - s_\alpha).$$

**Assumption 1.** Additionally, we assume  $E_k(p)$  is real valued, continuous and non-constant function on  $T^d$  for any fixing  $k \in T^d$ , where  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  are even periodic functions with period  $\pi$  in every variable  $p_i$ ,  $i=1,2,\dots,d$ .

Note that by the Weyl theorem [1] on the essential spectrum the essential spectrum  $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$  of the operator  $h_\mu(k)$  coincides with the spectrum of the unperturbed operator  $h_0(k)$

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

where  $m(k) = \min_{p \in T^d} E_k(p)$ ,  $M(k) = \max_{p \in T^d} E_k(p)$ .

Denote by  $\{\varphi_l\}$  the orthogonal system in  $L_2(T^d)$ , where  $\varphi_l$  is defined as

$$\varphi_l(p) = \prod_{\alpha=1}^d \eta_l(p_\alpha), \quad \{\eta_l(p_\alpha)\} \in \{1, \cos p_1, \dots, \cos p_d, \sin p_1, \dots, \sin p_d\}.$$

The number of these orthogonal functions is  $3^d$ .

We numerate the elements of the system  $\{\varphi_l\}_{l=1}^{3^d}$  to the following rule [2,3].

Consider a set of  $d$ -tuples  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  consisting of 3 digital system. Corresponding for the number zero to 1, 1 to cosine and 2 to sine we construct the following one to one mapping

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \leftrightarrow \eta_l(p_{\alpha_1}) \eta_l(p_{\alpha_2}) \cdots \eta_l(p_{\alpha_d}).$$

For example, for  $d=4$  the tuples  $(0,0,0,0), (0,0,1,2)$  and  $(1,2,2,1)$  correspond to the functions  $1, \cos p_3 \sin p_4$  and  $\cos p_1 \sin p_2 \sin p_3 \cos p_4$ , respectively. We order and numerate the set of  $d$  tuples as

$$\begin{array}{ccccccc} (00\cdots 00), & (00\cdots 01), & (00\cdots 10), & \cdots & (11\cdots 11), \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \vdots & \Downarrow \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_{2^d} \\ (00\cdots 02), & (00\cdots 12), & (00\cdots 20), & \cdots & (22\cdots 22), \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \vdots & \Downarrow \\ \varphi_{2^d+1} & \varphi_{2^d+2} & \varphi_{2^d+3} & \cdots & \varphi_{3^d} \end{array}$$

By construction  $\varphi_l(0)=1$  for  $l=1,\dots,2^d$  and  $\varphi_l(0)=0$  for  $l=2^d+1,\dots,3^d$ .

The operator  $v$  is expressed via the orthogonal functions  $\varphi_l$ ,  $l=1,\dots,3^d$  in the form

$$(vf)(p) = \sum_{l=1}^{3^d} (v_l f)(p), \quad (v_l f)(p) = (\varphi_l, f) \varphi_l(p),$$

where  $(\cdot, \cdot)$  is the inner product in  $L_2(\mathbb{T}^d)$ .

It follows from the nonnegativity of the operator  $v \square 0$  that the square root  $v^{\frac{1}{2}} \square 0$  exists. The operator  $v^{\frac{1}{2}}$  acts in  $L_2(\mathbb{T}^d)$  as

$$(v^{\frac{1}{2}} f)(p) = \sum_{l=1}^{3^d} \frac{1}{\|\varphi_l\|} (v_l f)(p).$$

Let  $X$  be the complex plane, and let  $r_0(k; z)$ ,  $z \in X \setminus [m(k), M(k)]$  be the resolvent of  $h_0(k)$ .

For any  $z \in X \setminus [m(k), M(k)]$ , we define a Birman–Schwinger integral operator  $\mathbf{T}(\mu, k; z) = \mu v^{\frac{1}{2}} r_0(k; z) v^{\frac{1}{2}}$ . The rank of  $\mathbf{T}(\mu, k; z)$  is equal  $3^d$  and it represents via one rank orthogonal projectors  $\mathbf{T}_l(\mu, k; z)$  as

$$\mathbf{T}(\mu, k; z)\psi = \sum_{l=1}^{3^d} \mathbf{T}_l(\mu, k; z)\psi,$$

$$\mathbf{T}_l(\mu, k; z)\psi = \frac{\mu}{\|\varphi_l\|^2} (\varphi_l, r_0(k; z)\varphi_l) (\varphi_l, \psi) \varphi_l,$$

where

$$(\varphi_l, r_0(k; z)\varphi_l) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\varphi_l^2(s) ds}{\tilde{E}_k(s) - z}, \quad l = 1, 2, \dots, 3^d, \quad z \in X \setminus [m(k), M(k)]. \quad (1)$$

A nonzero eigenvalue of the operator  $\mathbf{T}_l(\mu, k; z)$  is  $\lambda_l(z) = \mu(\varphi_l, r_0(k; z)\varphi_l)$ ,  $l = 1, \dots, 3^d$  and  $\varphi_l$  is an eigenfunction corresponding to  $\lambda_l(z)$ . Moreover,

$$\sigma(\mathbf{T}(\mu, k; z)) = \{0 \cup \lambda_1(z) \cup \dots \cup \lambda_{3^d}(z)\}.$$

For each  $z \in X \setminus [m(k), M(k)]$  and  $k \in T^d$  denote by  $\Delta_l(\mu, k; z)$  and  $\Delta(\mu, k; z)$  Fredholm determinants of the operators  $I - \mathbf{T}_l(\mu, k; z)$  and  $I - \mathbf{T}(\mu, k; z)$ , respectively. Then

$$\Delta_l(\mu, k; z) = 1 - \mu \int_{T^d} \frac{\varphi_l^2(s) ds}{\tilde{E}_k(s) - z}, \quad l = 1, 2, \dots, 3^d$$

and the equality

$$\Delta(\mu, k; z) = \prod_{l=1}^{3^d} \Delta_l(\mu, k; z)$$

holds.

The following lemma is a consequence of the Fredholm theorem.

**Lemma.** *A number  $z$ ,  $z \in X \setminus [m(k), M(k)]$ , is an eigenvalue of  $h_\mu(k)$  if and only if  $\Delta(\mu, k; z) = 0$ . Moreover, the multiplicity of a zero of the function  $\Delta(\mu, k; \cdot)$  then coincides with the multiplicity of an eigenvalue of the operator  $h_\mu(k)$ .*

**Remark.** *Clearly, the operator  $h_\mu(k)$  has an eigenvalue  $z < m(k)$ , i.e.,  $\text{Ker}(h_\mu(k) - zI) \neq 0$  if and only if the compact operator  $\mathbf{T}(\mu, k; z)$  in  $L_2(T^d)$  has an eigenvalue equal to 1 and there is a function  $\psi \in \text{Ker}(\mathbf{T}(\mu, k; z) - I)$  such that*

$$f(\cdot) = \frac{\mu v^2 \psi(\cdot)}{E_k(\cdot) - z} \in L_2(T^d).$$

In this case,  $f \in \text{Ker}(h_\mu(k) - zI)$ . Moreover, if  $z < m(k)$ , then

$$\dim \text{Ker}(h_\mu(k) - zI) = \dim \text{Ker}(\mathbf{T}(\mu, k; z) - I),$$

$$\text{Ker}(h_\mu(k) - zI) = \{f : f(\cdot) = \frac{\mu v^2 \psi(\cdot)}{E_k(\cdot) - z}, \psi \in \text{Ker}(\mathbf{T}(\mu, k; z) - I)\}.$$

**Assumption 2.** *Assume that for any  $k \in T^d$  a minimum  $m(k) = \min_{p \in T^d} E_k(p)$  of the function  $E_k(\cdot)$  is a non-generated. Moreover, if*

$$M(k) = \left\{ p \in T^d : m(k) = \min_{p \in T^d} E_k(p) \right\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \quad n < \infty,$$

then

$$c|p - p_l|^2 \leq E_k(p) - m(k) \leq c_1|p - p_l|^2 \text{ as } p \rightarrow p_l, \quad l=1,2,\dots,n.$$

Since the minimum points of  $E_k(\cdot)$  are non-degenerative, the operator  $\mathbf{T}_l(\mu, k; z)$  in  $L_2(T^d)$  is well defined as  $z = m(k)$  for any  $d \square 3$  and  $l = 1, \dots, 3^d$ . The equality  $\varphi_l(0) = 0$ ,  $l = 2^d + 1, \dots, 3^d$  provides well defined of  $\mathbf{T}_l(\mu, k; z)$  in  $L_2(T^d)$  as  $z = m(k)$  for any  $d = 1, 2$  and  $l = 2^d + 1, \dots, 3^d$ . According to (1) the following limits

$$(\varphi_l, r_0(k; m(k))\varphi_l) := \lim_{z \rightarrow m(k)-0} (\varphi_l, r_0(k; z)\varphi_l), \quad l = 1, 2, \dots, 3^d,$$

exist (finite or infinite). We set

$$\mu_l(k) := \frac{1}{(\varphi_l, r_0(k; m(k))\varphi_l)}, \quad l = 1, 2, \dots, 3^d.$$

One can see that  $\mu_l(k) = 0$  for  $d = 1, 2$ ,  $l = 1, \dots, 2^d$  and  $0 < \mu_l(k) < \infty$  for  $d \square 3$ ,  $l = 1, \dots, 2^d$  or for  $d \square 1$ ,  $l = 2^d + 1, \dots, 3^d$ .

**Definition.** Let  $d = 3, 4$  ( $d = 1, 2$ ). We say that the operator  $h_\mu(0)$  has a virtual level at  $z = 0$  (lower edge of essential spectrum) if 1 is an eigenvalue of  $\mathbf{T}(\mu, 0; 0)$  (of  $\mathbf{T}_l(\mu, 0; 0)$  for some  $l > 2^d$ ) with some associated eigenfunction  $\psi$  satisfying the condition

$$\frac{\frac{1}{v^2}\psi(\cdot)}{E_0(\cdot)} \notin L_2(T^d).$$

The number of such linearly independent eigenvectors  $\psi$  of the operator  $\mathbf{T}(\mu, 0; 0)$ ,  $d \square 3$  (of the all operators  $\mathbf{T}_l(\mu, 0; 0)$  for  $d = 2$ ), is called the multiplicity of the virtual level of the operator  $h_\mu(0)$ .

Note that, if the number 1 is an eigenvalue of the operator  $\mathbf{T}(\mu, k; m(k))$ , and the corresponding eigenfunction  $\psi$  with

$$\frac{\frac{1}{v^2}\psi(\cdot)}{E_k(\cdot) - m(k)} \in L_2(T^d), \quad d \square 3,$$

then the function  $\frac{v^{\frac{1}{2}}\psi(\cdot)}{E_k(\cdot) - m(k)}$  is eigenfunction of  $h_\mu(k)$  corresponding to the eigenvalue  $z = m(k)$ .

**Theorem 1.1.** Let  $d = 1, 2$  and  $\mu \in (0, \mu_*(k))$ ,  $\mu_*(k) = \min_{2^d < l < 3^d} \mu_l(k)$ . Then for any  $k \in T^d$  the operator  $h_\mu(k)$  has  $2^d$  eigenvalues (taking into account the multiplicity) lying to the left of the essential spectrum.

2. Let  $d \geq 3$  and  $\mu \in (0, \mu_*(k))$ ,  $\mu_*(k) = \min_{1 \leq l \leq 3^d} \mu_l(k)$ . Then for any  $k \in T^d$  the operator  $h_\mu(k)$  has no eigenvalues lying to the left of the essential spectrum.

3. Let  $d \geq 1$  and  $\mu \in (\mu^*(k), +\infty)$ ,  $\mu^*(k) = \max_{1 \leq l \leq 3^d} \mu_l(k)$ . Then for any  $k \in T^d$  the operator  $h_\mu(k)$  has  $3^d$  eigenvalues (taking into account the multiplicity) lying to the left of the essential spectrum.

Let  $r_s$  be a positive integer number defined as

$$r_s = C_d^0 + C_d^1 + \cdots + C_d^s, \quad s = 0, 1, \dots, d. \quad (2)$$

We split the numbers  $\{1, 2, \dots, 2^d\}$  into  $d+1$  as

$$\{1, 2, \dots, 2^d\} = D_0 \cup \cdots \cup D_d,$$

where  $D_s = \{1 + r_s - C_d^s, \dots, r_s\}$ .

Remark that for any  $d \geq 3$  the following assertions

$$\mu_{r_s}(0) = \mu_r(0), \quad r \in D_s, s = 0, 1, \dots, d,$$

$$\mu_{r_0}(0) < \mu_{r_1}(0) < \mu_{r_2}(0) < \cdots < \mu_{r_d}(0),$$

$$\mu_{r_d}(0) < \mu_l(0), r_d = 2^d, l = 2^d + 1, \dots, 3^d$$

hold.

**Theorem 2.** 1. If  $d = 1$  and  $\mu = \mu_3(0)$ , then  $h_\mu(0)$  has a virtual level at  $z = 0$  and two simple negative eigenvalues.

2. If  $d = 2$  and  $\mu = \mu_*(0) = \min_{4 < l \leq 9} \mu_l(0)$ , then  $h_\mu(0)$  has three negative eigenvalues two of them simple and one of them two-fold, and a two-fold virtual level at  $z = 0$ .

3. Let  $d = 3, 4$  ( $d > 4$ ) and  $\mu = \mu_{r_s}(0)$  for some  $s \in \{0, 1, \dots, d\}$ . Then the operator  $h_\mu(0)$  has  $s$  eigenvalues  $\lambda_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, s-1$ , with multiplicity  $C_d^l$  and  $\lambda_0 < \dots < \lambda_{s-1} < 0$ . Additionally, the operator  $h_\mu(0)$  has a virtual level (an eigenvalue) at  $z = 0$  with multiplicity  $C_d^s$ .

Moreover, if  $d \geq 3$  and  $\mu_{r_d}(0) < \mu < \min_{l > 2^d} \mu_l(0)$ , then the operator  $h_\mu(0)$  has  $d+1$  eigenvalues  $\lambda_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, d$ , lying to the left of the essential spectrum, with  $\lambda_0 < \dots < \lambda_d < 0$  and  $C_d^0 + C_d^1 + \dots + C_d^d = 2^d$ , where  $C_d^r$  is the multiplicity of  $\lambda_r$ .

4. Let  $d \geq 3$  and  $\mu = \mu_l(0)$  for some  $l \in \{2^d + 1, \dots, 3^d\}$ . Then the number  $z = 0$  is an eigenvalue of the operator  $h_\mu(0)$  and this operator has  $2^d + q$  eigenvalues (taking into account the multiplicity) lying to the left of the essential spectrum, where  $q$  is the number of elements of the set  $\{\mu_n : \mu_n > \mu_l(0), n > 2^d\}$ .

## References

1. Reed M., Simon B. *Methods of modern Mathematical Physics. Vol.4. Analysis of Operators*. Academic Press, London. 1980. 404 p.
2. Muminov M. I., Khurramov A. M., Bozorov I.N. Conditions for the existence of bound states of a two-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2022. **13** (3), 237–244.
3. Muminov M. I., Khurramov A. M., Bozorov I.N. On eigenvalues and virtual levels of a two-particle Hamiltonian on a  $d$ -dimensional lattice. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2023. **14** (3), 295–303.
4. Muminov M.I., Khurramov A.M. Multiplicity of virtual levels at the lower edge of the continuous spectrum of a two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theor. Math. Phys.* 2014. **180** (3). 329–341.

# About a regular point of the lattice spin-boson model with at most two photons

**E.B. Dilmurodov**

**Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan**

**Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy,**

**Bukhara, Uzbekistan**

**E-mail: e.b.dilmurodov@buxdu.uz**

The spin-boson model is a well-known quantum-mechanical model which describes the interaction between a two-level atom and a photon field. We refer to [1] and [2] for excellent reviews respectively from physical and mathematical perspectives.

Let  $T^d$  be the  $d$ -dimensional torus,  $L_2((T^d))$  be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on  $T^d$ ,  $\mathbb{C}^2$  be the state of the two-level atom and  $\mathcal{F}_b(L_2(T^d))$  be the symmetric Fock space for bosons, that is,

$$\mathcal{F}_b(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2) \oplus \dots$$

Here  $L_2^{sym}((T^d)^n)$  is the Hilbert space of symmetric functions of  $n \geq 2$  variables. For  $m = 1, 2$  we denote  $\mathcal{L}_m := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_b^{(m)}(L_2(T^d))$ , where

$$\mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d), \quad \mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2).$$

We write elements  $F$  of the space  $\mathcal{L}_2$  in the form  $F = \{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}(k_1), f_2^{(s)}(k_1, k_2); s = \pm\}$ . Then the norm in  $\mathcal{L}_2$  is given by

$$\|F\|^2 := \sum_{s=\pm} \left( |f_0^{(s)}|^2 + \int_{T^d} |f_1^{(s)}(k_1)|^2 dk_1 + \frac{1}{2} \int_{(T^d)^2} |f_2^{(s)}(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 \right). \quad (1)$$

We recall that the lattice spin-boson model with at most two photons  $\mathcal{A}_2$  is acting in  $\mathcal{L}_2$  as the  $3 \times 3$  tridiagonal block operator matrix

$$\mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

where matrix elements  $A_{ij}$  are defined by

$$\begin{aligned}
A_{00}f_0^{(s)} &= s\varepsilon f_0^{(s)}, \quad A_{01}f_1^{(s)} = \alpha \int_{T^d} v(t)f_1^{(-s)}(t)dt, \\
(A_{11}f_1^{(s)})(k_1) &= (s\varepsilon + w(k_1))f_1^{(s)}(k_1), \quad (A_{12}f_2^{(s)})(k_1) = \alpha \int_{T^d} v(t)f_2^{(-s)}(k_1, t)dt, \\
(A_{22}f_2^{(s)})(k_1, k_2) &= (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2))f_2^{(s)}(k_1, k_2), \\
f &= \{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}; s = \pm\} \in \mathcal{L}_2.
\end{aligned}$$

Here  $A_{ij}^*$  denotes the adjoint operator to  $A_{ij}$  for  $i < j$  with  $i, j = 0, 1, 2$ ;  $w(k)$  is the dispersion of the free field,  $\alpha v(k)$  is the coupling between the atoms and the field modes,  $\alpha > 0$  is a real number, so-called the coupling constant, real number. We assume that  $v(\cdot)$  and  $w(\cdot)$  are the real-valued continuous functions on  $T^d$ . Under these assumptions the lattice spin-boson model with at most two photons  $\mathcal{A}_2$  is bounded and self-adjoint in the complex Hilbert space  $\mathcal{L}_2$ .

To study the spectral properties of  $\mathcal{A}_2$  we introduce the following two bounded self-adjoint operators  $\hat{\mathcal{A}}_2^{(s)}$ ,  $s = \pm$ , which acts in  $\mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d))$  as

$$\hat{\mathcal{A}}_2^{(s)} := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} & 0 \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{12}^* & \hat{A}_{22}^{(s)} \end{pmatrix}$$

with the entries

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{00}^{(s)}f_0 &= s\varepsilon f_0, \quad \hat{A}_{01}f_1 = \alpha \int_{T^d} v(t)f_1(t)dt, \\
(\hat{A}_{11}^{(s)}f_1)(k_1) &= (-s\varepsilon + w(k_1))f_1(k_1), \quad (\hat{A}_{12}f_2)(k_1) = \alpha \int_{T^d} v(t)f_2(k_1, t)dt, \\
(\hat{A}_{22}^{(s)}f_2)(k_1, k_2) &= (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2))f_2(k_1, k_2), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d)).
\end{aligned}$$

It is easy to check that

$$\begin{aligned}
(\hat{A}_{01}^*f_0)(k_1) &= \alpha v(k_1)f_0; \\
(\hat{A}_{12}^*f_1)(k_1, k_2) &= \alpha(v(k_1)f_1(k_2) + v(k_2)f_1(k_1)), \quad (f_0, f_1) \in \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)).
\end{aligned}$$

In order to describe the essential spectrum of  $\mathcal{A}_2$  we define an analytic function  $\Delta^{(s)}(\cdot)$  in  $\mathbb{C} \setminus [s\varepsilon + m; s\varepsilon + M]$  by

$$\Delta^{(s)}(\lambda) := -s\varepsilon - \lambda - \alpha^2 \int_{T^d} \frac{v^2(t)dt}{s\varepsilon + w(t) - \lambda},$$

where the numbers  $m$  and  $M$  are defined by

$$m := \min_{p \in T^d} w(p), \quad M := \max_{p \in T^d} w(p).$$

Let  $\sigma^{(s)}$  be the set of all complex numbers  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that the equality  $\Delta^{(s)}(\lambda - w(k_1)) = 0$  holds for some  $k_1 \in T^d$ . Then for the essential spectrum of  $\mathcal{A}_2^{(s)}$  we have

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_2^{(s)}) = \sigma^{(s)} \cup [s\varepsilon + 2m; s\varepsilon + 2M].$$

We set  $E_{\min}^{(s)} := \min \sigma_{ess}(\mathcal{A}_2^{(s)})$ , for  $s = \pm$  and  $E_{\min} := \min\{E_{\min}^{(+)}, E_{\min}^{(-)}\}$ .

Next, we represent the space  $\mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d))$  as a direct sum of two Hilbert spaces  $\mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d))$  and  $L_2^{sym}((T^d)^2)$ , that is,  $\mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d)) = \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2)$ . Then the first Schur complement of the operator  $\mathcal{A}_2^{(s)}$  with respect to this decomposition is defined as

$$S_1^{(s)}(\lambda) : \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)) \rightarrow \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)), \quad \lambda \in \rho(\hat{A}_{22}^{(s)});$$

$$S_1^{(s)}(\lambda) := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} \end{pmatrix} - \lambda - \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{A}_{12} \end{pmatrix} (\hat{A}_{22}^{(s)} - \lambda)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}_{12}^* \end{pmatrix}.$$

Define

$$S_{00}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{00}^{(s)} - \lambda, \quad S_{01}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{01};$$

$$S_{10}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{01}^*, \quad S_{11}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{11}^{(s)} - \lambda - \hat{A}_{12}(\hat{A}_{22}^{(s)} - \lambda)^{-1} \hat{A}_{12}^*.$$

Then the operator  $S_1^{(s)}(\lambda)$  has form

$$S_1^{(s)}(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{00}^{(s)}(\lambda) & S_{01}^{(s)}(\lambda) \\ S_{10}^{(s)}(\lambda) & S_{11}^{(s)}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

We study some important properties of the first Schur complement

$$S_1(\lambda) := \text{diag}\{S_1^{(+)}(\lambda), S_1^{(-)}(\lambda)\}$$

for the lattice spin-boson model with at most two photons  $\mathcal{A}_2$ .

**Proposition 1.** *The number  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_2)$  is an eigenvalue of the operator  $\mathcal{A}_2$  if and only if the operator  $S_1(\lambda)$  has an eigenvalue equal to zero. Moreover, the eigenvalues  $\lambda$  and 0 have the same multiplicities.*

**Proposition 2.**  $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}_2) \setminus \sigma(A_{22})$  if and only if  $0 \in \sigma_{ess}(S_1(\lambda))$ .

From Propositions 1 and 2 we obtain the following two corollaries.

**Corollary 1.** *Let  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_2)$ . Then  $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_2) \Leftrightarrow 0 \in \rho(S_1(\lambda))$ .*

**Corollary 2.** *Let  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_2)$ . If  $(\lambda_0; \lambda_0 + \gamma) \subset \rho(\mathcal{A}_2)$  (resp.  $(\lambda_0 - \gamma; \lambda_0) \subset \rho(\mathcal{A}_2)$ ) for some  $\gamma > 0$ , then there exists a number  $\delta = \delta(\gamma) > 0$  such that  $(0; \delta) \subset \rho(S_1(\lambda_0))$  (resp.  $(-\delta; 0) \subset \rho(S_1(\lambda_0))$ ).*

For a bounded self-adjoint operator  $\mathcal{A}$  acting in a Hilbert space  $H$  we denote by  $N_{(-\infty; \lambda)}(\mathcal{A})$  the number of eigenvalues of  $\mathcal{A}$  to the left of  $\lambda$ ,  $\lambda \leq \min \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ .

**Proposition 3.** *The function  $N_{(-\infty; 0)}(S_1(\cdot))$  is monotonically increasing in  $(-\infty; 0)$ .*

**Definition 1.** *We denote by  $E_m(\cdot), m \in \mathbb{N}$  the positive definite function on the segment  $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(\mathcal{A}_2)$ , satisfying the condition:  $E_m(\lambda)$  is the  $m$ -th eigenvalue (eigenvalues numbered in ascending order, counting their multiplicity) of the operator  $S_1(\lambda), \lambda \in [\alpha; \beta]$ .*

**Theorem.** *The number  $\lambda_0 < E_{\min}$  is the regular point of the operator  $\mathcal{A}_2$  if and only if the function  $N_{(-\infty; 0)}(S_1(\cdot))$  is continuous at point  $\lambda = \lambda_0$ .*

## References

1. A.J.Leggett, S.Chakravarty, A.T.Dorsey, M.P.A.Fisher, A.Garg, W.Zwerger. Dynamics of the dissipative two-state system. Rev. Mod. Phys. 59 (Jan 1987), 1–85.
2. M.Hübner, H.Spohn. Radiative decay: nonperturbative approaches. Rev. Math. Phys. 7:3 (1995), 363–387.

# OSCILLATORY INTEGRALS FOR MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS WITH TWO VARIABLES

I.A. Ikromov<sup>1</sup>, A.R. Safarov<sup>2</sup>, O.T.Mamatkulov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics, <sup>2,3</sup>Uzbek-Finnish pedagogical institute

**Abstract.** In this paper we consider the problem of estimation of oscillatory integrals with Mittag-Leffler functions in two variables. The generalisation is that we replace the exponential function with the Mittag-Leffler-type function, to study oscillatory type integrals.

The function  $E_\alpha(z)$  is named after the Swedish mathematician Gösta Magnus Mittag-Leffler (1846-1927) who defined it by a power series

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (1)$$

and studied its properties in 1902-1905 in several subsequent notes [14, 15, 16, 17] in connection with his summation method for divergent series.

A classical generalization of the Mittag-Leffler function, namely the two-parametric Mittag-Leffler function is

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (2)$$

which was deeply investigated independently by Humbert and Agarval in 1953 [1, 8, 9] and by Dzherbashyan in 1954 [4, 5, 6] as well as in [7].

It has the property that

$$E_{1,1}(x) = e^x \text{ and we can refer to [18] for other properties.} \quad (3)$$

In harmonic analysis one of the most important estimates for oscillatory integral is van der Corput lemma [19, 20, 21, 29]. Estimates for oscillatory integrals with polynomial phases can be found, for instance, in papers [2, 12, 24, 25, 26]. In the current paper we replace the exponential function with the Mittag-Leffler-type function and study oscillatory type integrals (6). In the papers [21] and [22] analogues of the van der Corput lemmas involving Mittag-Leffler functions for one dimensional integrals have been considered. We extend results of [21] and [22] for two-dimensional integrals with phase having some simple singularities. Analogous problem on estimates for Mittag-Leffler functions with the smooth phase functions of two variables having simple singularities was considered in [23] and [27].

**Definition 1.** An oscillatory integral with phase  $f$  and amplitude  $\alpha$  is an integral of the form

$$J(\lambda, f, a) = \int_{R^n} a(x) e^{i\lambda f(x)} dx, \quad (4)$$

where  $a \in C_0^\infty(R^n)$  and  $\lambda \in R$ .

If the support of  $a$  lies in a sufficiently small neighborhood of the origin and  $f$  is an analytic function at  $x = 0$ , then for  $\lambda \rightarrow \infty$  the following asymptotic expansion holds ([13]):

$$J(\lambda, f, a) \approx e^{i\lambda f(0)} \sum_s \sum_{k=0}^{n-1} b_{s,k}(a) \lambda^s (\ln \lambda)^k, \quad (5)$$

where  $s$  belongs to a finite number of arithmetic progressions, independent of  $a$ , composed of negative rational numbers,  $b_{s,k}$  is a distribution with support in the critical set  $\{x : \nabla f(x) = 0\}$ .

Inspired by the terminology from [3], we refer to the maximal value of  $s$ , denoting it by  $\alpha$  in this case, as the *growth index* of  $f$ , or the oscillation index at the origin, and the corresponding value of  $k$  is referred to as the *multiplicity*.

More precisely, the *multiplicity* of the oscillation index of an analytic phase at a critical point is the maximal number  $k$  possessing the property: for any neighbourhood of the critical point there is an amplitude with support in this neighbourhood for which in the asymptotic series (5) the coefficient  $b_{s,k}(a)$  is not equal to zero. The multiplicity of the oscillation index will be denoted by  $m$  (see [3]).

Let  $f$  be a smooth real-valued function defined on a neighborhood of the origin in  $\mathbb{R}^2$  with  $f(0,0) = 0, \nabla f(0,0) = 0$ , and consider the associated Taylor series

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$$

of  $f$  centered at the origin. The set

$$\mathfrak{I}(f) := \{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : c_{jk} = \frac{1}{j! k!} \partial_{x_1}^j \partial_{x_2}^k f(0,0) \neq 0\}$$

is called the Taylor support of  $f$  at  $(0,0)$ . We shall always assume that

$$\mathfrak{I}(f) \neq \emptyset,$$

i.e., that the function  $f$  is of finite type at the origin. If  $f$  is real analytic, so that the Taylor series converges to  $f$  near the origin, this just means that  $f \neq 0$ . The *Newton polyhedron*  $\aleph(f)$  of  $f$  at the origin is defined to be the convex hull of the union of all the quadrants  $(j, k) + \mathbb{R}_+^2$ , with  $(j, k) \in \mathfrak{I}(f)$ . The associated *Newton diagram*  $\aleph_d(f)$  in the sense of Varchenko [28] is the union of all compact faces of the Newton polyhedron; here, by a *face*, we mean an edge or a vertex.

We shall use coordinates  $(t_1, t_2)$  for points in the plane containing the Newton polyhedron, in order to distinguish this plane from the  $(x_1, x_2)$ -plane.

The *distance*  $d = d(f)$  between the Newton polyhedron and the origin in the sense of Varchenko is given by the coordinate  $d$  of the point  $(d, d)$  at which the bisectrix  $t_1 = t_2$  intersects the boundary of the Newton polyhedron.

The *principal face*  $\pi(f)$  of the Newton polyhedron of  $f$  is the face of minimal dimension containing the point  $(d, d)$ . Deviating from the notation in [28], we shall call the series

$$f_p(x_1, x_2) := \sum_{j,k \in \pi(f)} c_{jk} x_1^j x_2^k$$

the *principal part* of  $f$ . In the case that  $\pi(f)$  is compact,  $f_\pi$  is a mixed homogeneous polynomial; otherwise, we shall consider  $f_\pi$  as a formal power series.

Note that the distance between the Newton polyhedron and the origin depends on the chosen local coordinate system in which  $f$  is expressed. By a *local analytic (respectively smooth) coordinate system at the origin* we shall mean an analytic (respectively smooth) coordinate system defined near the origin which preserves 0. If we work in the category of smooth functions  $f$ , we shall always consider smooth coordinate systems, and if  $f$  is analytic, then one usually restricts oneself to analytic coordinate systems (even though this will not really be necessary for the questions we are going to study, as we will see). The *height* of the analytic (respectively smooth) function  $f$  is defined by

$$h := h(f) := \sup\{d_x\},$$

where the supremum is taken over all local analytic (respectively smooth) coordinate systems  $x$  at the origin, and where  $d_x$  is the distance between the Newton polyhedron and the origin in the coordinates  $x$ .

A given coordinate system  $x$  is said to be adapted to  $f$  if  $h(f) = d_x$ .

Let  $\pi$  be the principal face. We assume that  $\pi$  is a point or a compact edge, then  $f_\pi$  is a weighted homogeneous polynomial. Denote by  $\nu$  the maximal order of roots of  $f_\pi$  on the unit circle at the origin, so

$$\nu := \max_{S^1} \text{ord}(f_\pi).$$

If there exists a coordinate system  $x$  such that  $\nu = d_x$  then we set  $m = 1$ . It can be shown that in this case  $x$  is adapted to  $f$  (see [10]). Otherwise we take  $m = 0$ . Following A. N. Varchenko we call  $m$  the *multiplicity of the Newton polyhedron*.

In the classical paper by A. N. Varchenko [28], he obtained the sharp estimates for oscillatory integrals in terms of the height. Also in the paper [11] the height was used to get the sharp bound for maximal operators associated to smooth surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . It turns

out that analogous quantities can be used for oscillatory integrals with the Mittag-Leffler function.

We consider the following integral with phase  $f$  and amplitude  $\psi$ , of the form

$$I_{\alpha,\beta} = \int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x))\psi(x)dx, \quad (6)$$

where  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 0$ ,  $U$  is a sufficiently small neighborhood of the origin. We are interested in particular in the behavior of  $I_{\alpha,\beta}$  when  $\lambda$  is large, as for small  $\lambda$  the integral is just bounded. In particular if  $\alpha = 1$  and  $\beta = 1$  we have oscillatory integral (4).

The main result of the work is the following.

**Theorem 2.** *Let  $f$  be a smooth finite type function of two variables defined in a sufficiently small neighborhood of the origin and let  $\psi \in C_0^\infty(U)$ .*

*Let  $h$  be the height of the function  $f$ , and let  $m = 0,1$  be the multiplicity of its Newton polyhedron. If  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 0$ ,  $h > 1$ , and  $\lambda \gg 1$  then we have the estimate*

$$\left| \int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x_1, x_2))\psi(x)dx \right| \leq \frac{C |\ln \lambda|^m \| \psi \|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}. \quad (7)$$

*If  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 0$ ,  $h = 1$  and  $\lambda \gg 1$ , then we have following estimate*

$$\left| \int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x_1, x_2))\psi(x)dx \right| \leq \frac{C |\ln \lambda|^2 \| \psi \|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda}, \quad (8)$$

*where the constants  $C$  are independent of the phase, amplitude and  $\lambda$ .*

## References

1. R.P.Agarwal, *A propos d'une note de M.Pierre Humbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, 236, 2031-2032 (1953).
2. G.I.Arkhipov, A.A.Karatuba, V.N.Chubarikov, Theory of multiple trigonometric sums, - Moscow. Nauka, 1987, p. 357.
3. V.I.Arnold, S.M.Gusein-Zade, A.N.Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Birkhauser, Boston Basel · Stuttgart, 1985.
4. M.M.Dzherbashyan, *On the asymptotic expansion of a function of Mittag-Leffler type*, Akad. Nauk Armjan. SSR Doklady. 19, 65-72 (1954, in Russian).
5. M.M.Dzherbashyan, *On integral representation of functions continuous on given rays (generalization of the Fourier integrals)*, Izvestija Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 18, 427-448 (1954, in Russian).
6. M.M.Dzherbashyan, *On Abelian summation of the generalized integral transform*, Akad. Nauk Armjan. SSR Izvestija, fiz-mat. estest. techn.nauki. 7(6), 1-26 (1954, in Russian).
7. R.Gorenflo, A.Kilbas, F.Mainardi, S.Rogosin, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2014).

8. P.Humbert, *Quelques résultats relatifs à la fonction de Mittag-Leffler*, C. R. Acad. Sci. Paris, 236, 1467–1468 (1953).
9. P.Humbert, R.P.Agarwal, *Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques de ses généralisations*, Bull. Sci. Math. (Ser.II).77, 180-185 (1953).
10. I.A.Ikromov and D.Müller, *On adapted coordinate systems*, Transactions of the American Mathematical Society, 2011, 363(6), P. 2821–2848.
11. I.A.Ikromov, M.Kempe, D.Müller, *Estimates for maximal functions associated with hypersurfaces in  $\mathbb{R}^3$  and related problems of harmonic analysis*, Acta mathematica, 2010, 204 (2), 151–271.
12. I.A.Ikromov, *Invariant estimates of two-dimensional trigonometric integrals*, Math. USSR. Sb. 76 (1990), 473–488.
13. V.N.Karpushkin, *Uniform estimates of oscillating integrals in  $\mathbb{R}^2$* , Dokl. Academy of Sciences of the USSR, 254 (1980), no.1, 28–31.(Russian)
14. M.G.Mittag-Leffler, *Sur l'intégrale de Laplace-Abel*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris 135, 937–939 (1902).
15. M.G.Mittag-Leffler, *Une généralization de l'intégrale de Laplace-Abel*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris 136, 537-539 (1903).
16. M.G.Mittag-Leffler, *Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$* , Comp. Rend. Acad. Sci. Paris 137, 554-558 (1903).
17. M.G.Mittag-Leffler, *Sopra la funzione  $E_\alpha(x)$* , Rend.R.Acc.Lincei, (Ser.5)13, 3-5 (1904).
18. I.Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
19. M.Ruzhansky, *Pointwise van der Corput Lemma for Functions of Several Variables*, Functional Analysis and Its Applications, 43 (2009), no.1, 75–77.
20. M.Ruzhansky, *Multidimensional decay in the van der Corput Lemma*, Studia Mathematica, 208 (2012), no.1, 1–9.
21. M.Ruzhansky, B.Torebek, *Van der Corput lemmas for Mittag-Leffler functions*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 23 (6), (2021), 1663–1677.
22. M.Ruzhansky, B.Torebek, *Van der Corput lemmas for Mittag-Leffler functions. II.  $\alpha$  –directions* , Bull. Sci. Math., **171** (2021), 103016, 23 pp.
23. M.Ruzhansky, A.R.Safarov, G.A.Khasanov, *Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4*, Analysis and Mathematical Physics, **12(130)**, (2022).
24. A.R.Safarov, *Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals //* Math. Notes. 104, 2018. P.293–302.

25. A.R.Safarov, *On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase*, // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **9** (2016), P.102–107.
26. A.R.Safarov, *On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface* // Russian Mathematics, 63 (4), P.57-63.
27. A.R.Safarov, *Estimates for Mittag–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **15(4)** (2022), P.459–466.
28. A.N.Varchenko, *Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals* //Functional Analysis and Its Applications, vol. 10, pages 175–196 (1976).
29. Van der Korput, *Zur Methode der stationaren phase*// Compositio Math. V.1. 1934. P. 15-38.

### **Estimates for convolution operators with convex phase function**

Ikromova D.I.

Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104, Samarkand, Uzbekistan.

e-mail: ikromova\_89@mail.ru

In this paper we consider the convolution operators of type:

$$M_k = F^{-1}[e^{i\varphi(\xi)} a_k]F,$$

where  $F$  is the Fourier transform operator,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^v \setminus \{0\})$  is homogeneous of order one, so-called phase function,  $a_k \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^v)$  is a homogeneous function of order  $-k$  for large  $\xi$ .  $a_k$  is called to be an amplitude function.

Let  $1 \leq p \leq 2$  be a fixed number: We consider the problem: *find the minimal number  $k(p)$  such that the operator  $M_k: L^p(\mathbb{R}^v) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^v)$  is bounded for any  $k > k(p)$ .* Further, we will assume that  $v > 1$ . Also, it is assumed that  $\varphi(\xi) \neq 0$  for any  $\xi \in \mathbb{R}^v \setminus \{0\}$ . Since  $\varphi$  is a smooth function on  $\mathbb{R}^v \setminus \{0\}$  and its domain is a connected set, whenever  $v \geq 2$ , then without loss of generality we may and will assume that  $\varphi(\xi) > 0$  for any  $\xi \neq 0$ . Moreover,  $\varphi$  is a homogeneous function of order one, then, due to the Euler's homogeneity relation we have the identity:

$$\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi_j} = \varphi(\xi),$$

for any  $\xi \in \mathbb{R}^v \setminus \{0\}$  and hence the set  $\Sigma$  defined by the following

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^v : \varphi(\xi) = 1\}$$

is a smooth or an analytic hypersurface provided  $\varphi$  is a smooth or a real analytic function respectively.

Since  $\Sigma$  is a compact hypersurface, then following M. Sugimoto it is enough to consider the local version of the problem. More, precisely we may assume that the amplitude function  $a_k(\xi)$  is concentrated in a sufficiently small conic neighborhood  $\Gamma$  of a fixed point  $\nu \in \Sigma$  say  $\nu = (0, \dots, 0, 1)$  and  $\varphi(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ . Fixing such a point  $\nu \in \mathbb{R}^v$ , let us define the following local exponent  $k_p(\nu)$  associated to this point:

$$k_p(v) := \inf_{k>0} \{k : \exists \Gamma, M_k : L^p(\mathbb{R}^v) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^v) \text{ is bounded, whenever } \text{supp}(a_k) \subset \Gamma\}.$$

Surely, one can define  $\Sigma$  in a neighborhood of the point  $v = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^v$ , after possible linear transform preserving the point  $v$ , as the graph of a smooth function  $\phi$  defined in a sufficiently small neighborhood  $U$  of the origin of  $\mathbb{R}^{v-1}$  with  $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$ . So:

$$\Sigma \cap \Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^v : (\xi_1, \dots, \xi_{v-1}, 1 + \phi(\xi_1, \dots, \xi_{v-1}))\}.$$

We use notion of Newton polyhedron, adapted coordinates system and linearly adapted coordinates and  $h(\phi)$  the height of the function  $\phi$  and  $h_{lin}(\phi)$  linear height of the function (see [5], [1],[2]).

**Proposition 1.** *If  $\phi$  is a smooth convex function with  $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$  then  $h_{lin}(\phi) = h(\phi)$ .*

The convex function  $\phi$  is called to be a finite line type if for any unit vector  $\eta \in S^2$  there exists  $N \geq 2$  such that the relation

$$D_\eta^N \phi(0) \neq 0$$

holds true, where  $D_\eta$  is the derivative of the function  $\phi$  at the origin in the direction  $\eta$ .

If  $\phi$  is a smooth convex function having the finite line type, then the statement of the Proposition 1 follows from the results of the paper by H. Schultz [3].

In particular, if  $h_{lin}(\phi) < h(\phi)$  then  $\phi$  is not a convex function. The converse statement does not hold.

For example. Consider the function  $\phi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ . Then it is easy to see that  $h_{lin}(\phi) = h(\phi) = \frac{4}{3}$ . But,  $\phi$  is not a convex function.

The main results of the paper are the following Theorems:

**Theorem 2.** *Let  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  be a smooth surface given as the graph  $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 = 1 + \phi(\xi_1, \xi_2)\}$  of a smooth function  $1 + \phi$  satisfying the conditions  $\phi(0) = 0$  and  $\nabla\phi(0) = 0$ . Then the following estimate holds true:  $k_p(v) \leq \left(6 - \frac{2}{h(\phi)}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ , where  $v = (0, 0, 1)$ .*

The following lower bound holds true.

**Theorem 3.** *Let  $\phi$  be a smooth function satisfying the condition of the Theorem 2. Then the following lower estimate holds true:  $k_p(v) \geq \left(6 - \frac{2}{h_{lin}(\phi)}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ .*

The Theorems 2 and 3 yield the following:

**Corollary 4.** *Let  $\phi$  be a smooth function satisfying the condition of the Theorem 2. If  $h_{lin}(\phi) = h(\phi)$  e.g. coordinates are (LA) then the following relation  $k_p(v) = \left(6 - \frac{2}{h_{lin}(\phi)}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$  holds true.*

Note that the statement of Corollary 4 shows that the sharp uniform bound for the oscillatory integrals give the sharp result for the critical exponent  $k_p(v)$ .

**Corollary 5.** *Let  $\phi$  be a smooth convex function satisfying the condition of the Theorem 2. Then the following relation  $k_p(v) = \left(6 - \frac{2}{h_{lin}(\phi)}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$  holds true.*

A proof of the Corollary 5 follows from the Corollary 4 combining the Proposition 1. It improves the result proved by Sugimoto [4].

## Bibliography

1. Ikromov, I. A., Müller, D., Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in  $\mathbb{R}^3$  and an application to Fourier restriction. 17 (2011), no. 6, 1292–1332.
2. Ikromov, I. A., Müller, D., Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra; *Annals of Mathematics Studies 194*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2016; 260 pp.
3. Schulz, H., Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms. Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), 1267–1275.
4. M. Sugimoto, Estimates for Hyperbolic Equations of Space Dimension 3, Journal of Functional Analysis, 160, 382-407 (1998).
5. Varchenko, A. N., Newton polyhedra and estimates of oscillating integrals. , 18 (1976), 175–196.

### **About best constants for Hardy type inequalities with some weights**

**K.Kuliev<sup>1</sup>, M.Eshimova<sup>2</sup>, G.Kulieva<sup>2</sup> and T.Turaqulov<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

<sup>2</sup>V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,

<sup>3</sup>Samarkand State University named after Sharof Rashidov,

**E-mail:** <sup>1</sup>komilkuliev@mail.ru, <sup>2</sup>eshimova\_math@mail.ru, kulievag@mail.ru,  
<sup>3</sup>turakulov1992@inbox.ru.

Hardy's famous inequality reads:

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 f(x)^p dx, \quad (1)$$

where  $1 < p < \infty$  and  $f(x)$  is a  $p$  – integrable non-negative function on  $(0; 1)$ . Let us note that the constant  $C = \frac{p}{p-1}$  in (1) is the best possible, i.e., the least constant for which the inequality holds. Later, the first modification of (1) appeared:

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^\alpha dx \leq \left( \frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^1 f(x)^p x^\alpha dx \quad (2)$$

with  $p > 1$  and  $\alpha < p - 1$  – for all measurable non-negative functions  $f$  (see [1] Theorem 2), here the constant  $C = \frac{p}{p-\alpha-1}$  is the best possible.

During the last decades inequality (2) was extended to the form

$$\left( \int_a^b \left( \int_a^x f(t) dt \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left( \int_a^b f^p(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

which is called generalized Hardy inequality, where  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $u, v$  – weight functions,  $0 < q \leq \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . The last inequality has been studied by many authors and applied in different branches of mathematics. The exact calculation of the best constant of the inequality when the weight functions are general is very complicated. That is why we have to restrict the class of the weight functions.

In this paper we generalize inequality (2) with considering the weights as linear combinations of some power type functions. The goal of the paper is to give exact value of  $C$ .

Let us consider the following Hardy integral inequality:

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p (ax^\alpha + bx^\beta) dx \leq C \int_0^1 f^p(x) (a_1 x^\alpha + b_1 x^\beta) dx, \quad (4)$$

where  $p > 1$  and

$$a > 0, b \geq 0, \alpha, \beta < 0, \quad a_1 = a(p - \beta - 1)^p, \quad b_1 = b(p - \alpha - 1)^p.$$

Our main purpose is to find an explicit value of the constant of inequality (4), which is given in the following

**Theorem 1.** Let  $p > 1$  and  $a > 0, b \geq 0, \alpha, \beta < 0$ . The inequality (4) holds with sharp constant

$$C = \left( \frac{p}{(p - \alpha - 1)(p - \beta - 1)} \right)^p \quad (5)$$

**Remark.** When  $b = 0$  we have (2) with the given constant. If  $\alpha = 0, \beta = 0$  we obtain the classical Hardy inequality (1) with the sharp constant  $\left( \frac{p}{p-1} \right)^p$ .

**Proof of the theorem 1.** Let  $p' = \frac{p}{p-1}, s < \frac{1}{p'(\alpha(1-p')+1)}$  and choose the function as

$$V(x) = \int_0^x t^{\alpha(1-p')} dt = \frac{x^{\alpha(1-p')+1}}{\alpha(1-p') + 1}.$$

Then the left hand side of inequality (4) can be estimated as follows

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p (ax^\alpha + bx^\beta) dx \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^x f(t) V^s V^{-s} dt \right)^p (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx \\
&\leq \int_0^1 \left( \int_0^x f^p(t) V^{sp} dt \right) \left( \int_0^x V^{-sp'} dt \right)^{\frac{p}{p'}} (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^x f^p(t) t^{sp(\alpha(1-p')+1)} dt \right) \left( \int_0^x t^{-sp'(\alpha(1-p')+1)} dt \right)^{\frac{p}{p'}} (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx \\
&= A^{-\frac{p}{p'}}(s; \alpha, p) \int_0^1 \left( \int_0^x f^p(t) t^{sp(\alpha(1-p')+1)} dt \right) x^{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'}} (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx
\end{aligned}$$

where  $A(s; \alpha, p) = -sp'(\alpha(1-p') + 1) + 1$ . Then

$$\begin{aligned}
&A^{-\frac{p}{p'}}(s; \alpha, p) \int_0^1 f^p(t) t^{sp(\alpha(1-p')+1)} \left( \int_t^1 x^{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'}} (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx \right) dt \leq \\
&\leq A^{-\frac{p}{p'}}(s; \alpha, p) \int_0^1 f^p(t) t^{sp(\alpha(1-p')+1)} \left( -\frac{at^{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'} + \alpha - p + 1}}{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'} + \alpha - p + 1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{bt^{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'} + \beta - p + 1}}{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'} + \beta - p + 1} \right) dt \\
&= A^{-\frac{p}{p'}}(s; \alpha, p) \int_0^1 f^p(t) \left( -\frac{at^\alpha}{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'} + \alpha - p + 1} - \frac{bt^\beta}{A(s; \alpha, p) \frac{p}{p'} + \beta - p + 1} \right) dt,
\end{aligned}$$

or

$$I \leq \int_0^1 f^p(t) \left( \frac{A^{-\frac{p}{p'}}(s; \alpha, p)a}{sp(\alpha(1-p') + 1) - \alpha} t^\alpha + \frac{A^{-\frac{p}{p'}}(s; \alpha, p)b}{sp(\alpha(1-p') + 1) - \beta} t^\beta \right) dt.$$

Now we find the value of  $s$  at which each term on the right side of the last expression reaches a minimum. Easy calculations show that the last inequality at the minimum value of each term has the following form:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p (ax^\alpha + bx^\beta) dx \leq \\ & \leq \left( \frac{p}{(p-\alpha-1)(p-\beta-1)} \right)^p \int_0^1 f^p(t) [a(p-\beta-1)^p t^\alpha + b(p-\alpha-1)^p t^\beta] dt. \end{aligned}$$

This means that  $C \leq \left( \frac{p}{(p-\alpha-1)(p-\beta-1)} \right)^p$ .

Now we turn to find lower estimate of  $C$ . Supposing that inequality (4) holds, we choose the test function as

$$f_\tau(t) = \begin{cases} t^\gamma, & \text{if } 0 < t < \tau, \\ 0, & \text{if } \tau < t < 1 \end{cases} \quad \gamma > \max \left\{ -\frac{\alpha+1}{p}, -\frac{\beta+1}{p} \right\}$$

The left-hand side of (4) is

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f_\tau(t) dt \right)^p (ax^\alpha + bx^\beta) dx \geq \int_0^\tau \left( \int_0^x t^\gamma dt \right)^p (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx = \\ & = \frac{1}{(\gamma+1)^p} \int_0^\tau x^{(\gamma+1)p} (ax^{\alpha-p} + bx^{\beta-p}) dx = \frac{1}{(\gamma+1)^p} \int_0^\tau (ax^{p\gamma+\alpha} + bx^{p\gamma+\beta}) dx = \\ & = \frac{a}{(\gamma+1)^p} \cdot \frac{\tau^{p\gamma+\alpha+1}}{p\gamma+\alpha+1} + \frac{b}{(\gamma+1)^p} \cdot \frac{\tau^{p\gamma+\beta+1}}{p\gamma+\beta+1}. \end{aligned}$$

The right-hand side of (4) is

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f_\tau^p(t) [a(p-\beta-1)^p t^\alpha + b(p-\alpha-1)^p t^\beta] dt \\ & = \int_0^1 t^{p\gamma} [a(p-\beta-1)^p t^\alpha + b(p-\alpha-1)^p t^\beta] dt = \\ & = \frac{a(p-\beta-1)^p}{p\gamma+\alpha+1} \cdot \tau^{p\gamma+\alpha+1} + \frac{b(p-\alpha-1)^p}{p\gamma+\beta+1} \cdot \tau^{p\gamma+\beta+1}. \end{aligned}$$

According to (4)

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(\gamma+1)^p(p\gamma+\alpha+1)} \cdot \tau^{p\gamma+\alpha+1} + \frac{b}{(\gamma+1)^p(p\gamma+\beta+1)} \cdot \tau^{p\gamma+\beta+1} \\ & \leq C \left( \frac{a(p-\beta-1)^p}{p\gamma+\alpha+1} \cdot \tau^{p\gamma+\alpha+1} + \frac{b(p-\alpha-1)^p}{p\gamma+\beta+1} \cdot \tau^{p\gamma+\beta+1} \right) \end{aligned}$$

Then we have the inequality

$$\frac{a}{p\gamma+\alpha+1} \left[ \frac{1}{(\gamma+1)^p} - C(p-\beta-1)^p \right] \tau^{p\gamma+\alpha+1} +$$

$$+ \frac{b}{p\gamma + \beta + 1} \left[ \frac{1}{(\gamma + 1)^p} - C(p - \alpha - 1)^p \right] \tau^{p\gamma + \beta + 1} \leq 0.$$

Since the components on the left side of the inequality are mutually symmetric, it can be assumed that  $\alpha \geq \beta$ . Then  $\gamma > -\frac{\beta+1}{p}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{a}{p\gamma + \alpha + 1} \left[ \frac{1}{(\gamma + 1)^p} - C(p - \beta - 1)^p \right] \tau^{\alpha-\beta} + \\ & + \frac{b}{p\gamma + \beta + 1} \left[ \frac{1}{(\gamma + 1)^p} - C(p - \alpha - 1)^p \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

If  $\frac{a}{p\gamma+\alpha+1} \left[ \frac{1}{(\gamma+1)^p} - C(p - \beta - 1)^p \right] < 0$  and  $\frac{b}{p\gamma+\beta+1} \left[ \frac{1}{(\gamma+1)^p} - C(p - \alpha - 1)^p \right] < 0$ , then (6) is true for all  $\tau \in (0,1)$ , i.e.

$$\frac{1}{(\gamma + 1)^p (p - \alpha - 1)^p} < C.$$

We find the supremum of  $\frac{1}{(\gamma+1)^p(p-\alpha-1)^p}$

$$\sup_{\gamma > -\frac{\beta+1}{p}} \frac{1}{(\gamma + 1)^p (p - \alpha - 1)^p} = \left( \frac{p}{(p - \alpha - 1)(p - \beta - 1)} \right)^p.$$

Finally, we obtain the sharp value of  $C$  given in the theorem.

R E F E R E N C E S

1. A. Kufner, L. Maligranda, and L.E. Persson, The Hardy Inequality – About its History and Some Related Results, Pilsen, 2007.
2. L.E. Persson and S. G. Samko, A note on the best constants in some hardy inequalities Journal of Mathematical Inequalities (2014), 1-11.
3. K. Kuliev, G. Kulieva, M. Eshimova. On estimates for norm of some integral operators in weighted Lebesgue spaces, Mathematical Inequalities & Applications Volume 26, Number 1 (2023), 27–37. doi:10.7153/mia-2023-26-03
4. K.D. Kuliev. On estimates for norms of some integral operators with Oinarov's kernel, Eurasian Mathematical Journal 13(3), 67-81.

# Some Spectral Properties of The Generalized Friedrichs Model under Rank One Perturbation

<sup>1</sup>Shakhzod Kurbanov, <sup>2</sup>Said Dustov

<sup>1</sup>Samarkand state university named after Sharof Rashidov

<sup>1</sup>Samarkand, Uzbekistan, Email: shaxzod-kurbanov@mail.ru

<sup>2</sup>Navoi State pedagogical institute

<sup>2</sup>Navoi, Uzbekistan Email: saiddustov@mail.ru

**Keywords:** *Generalized Friedrichs models, coupling constant threshold, Hamiltonian, dispersion relation, threshold resonance, threshold eigenvalue.*

We consider the generalized Friedrichs model  $H_\mu(p)$ ,  $\mu > 0$ , depending on the parameter  $p \in \mathbb{T}^3$ , with the rank-one perturbation associated to a system of two arbitrary or identical quantum mechanical particles moving on the three-dimensional lattice  $\mathbb{Z}^3$ , and interacting via zero-range repulsive potential. This operator generalizes the two-particle Schrödinger operator  $H_\mu(k) := H_0(k) + \mu V$  with the fixed quasi-momentum  $k \in \mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$  of the pair of particles on  $\mathbb{Z}^3$ , (see, e.g., [1, 2] and references therein). The Friedrichs model [3], being mathematically solvable, is one of the best tools to describe quantum decay in physics (see [4, 5, 6] for detailed reviews of applications of the Friedrichs model in various physical and mathematical problems). Another important aspect of studying the generalized Friedrichs models is that they describe the Hamiltonians for systems of both bosons and fermions (see, i.e., [1, 7]).

For a wide class of the two-particle discrete Schrödinger operators  $H(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$  on the  $d$ -dimensional lattice  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ , for all nonzero values of the quasi-momentum  $k$  the existence of eigenvalues of  $H(k)$  below the threshold, under the assumption that  $H_\mu(0)$  has either a threshold energy resonance or a threshold eigenvalue at the threshold (bottom) of the essential spectrum was proved in [1]. A similar result for the Friedrichs model was obtained in [8].

The existence and locations, and the exact number of eigenvalues below and above the essential spectrum for the two-particle discrete Schrödinger operators on  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d = 1, 2$  studied in detail in [7, 9, 10, 11, 12].

The appearance and number of eigenvalues below and above the essential spectrum for the two-particle discrete Schrödinger operators on  $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$  i.e., the presence of threshold resonances and threshold eigenvalues was studied in [7].

The authors of [13] studied for the Schrödinger operator  $H_\mu = -\Delta + \mu V$  for a situation, where as  $\mu$  approaches to  $\mu_0 \geq 0$ , an eigenvalue  $E(\mu)$  accumulates to 0, the bottom of the essential spectrum of  $H_\mu$ , i.e., as  $\mu$  approaches to  $\mu_0$  an eigenvalue is absorbed at the threshold of continuum, and conversely, as  $\mu$  seeks to  $\mu_0 + \epsilon, \epsilon > 0$ , the continuum *gives birth* to a new eigenvalue. This phenomenon in [13] is called *coupling constant threshold*. Moreover, in [13] an absolutely convergent expansion for the eigenvalue  $E(\mu)$  at  $\mu_0 \geq 0$ , the coupling constant threshold of  $H_\mu$ , was found.

In [14] the existence of positive coupling constant threshold  $\mu = \mu(k) > 0$  for the Schrödinger operator  $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d, d \geq 3$  associated to a system of two identical quantum mechanical particles (bosons) moving on the lattice  $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$  and interacting via zero-range repulsive potential is proved: the operator has no eigenvalues for any  $0 < \mu < \mu(k)$ , nevertheless for each  $\mu > \mu(k)$ , it has a unique eigenvalue  $E(\mu, k)$  lying above the essential spectrum. Moreover, an absolutely convergent expansions for the eigenvalue  $E(\mu, k)$  at  $\mu = \mu_0$  depending on  $d \geq 3$  was found. However, in [15] the absence of positive coupling constant thresholds, i.e., for each  $\mu > 0$  and  $k \in \mathbb{T}^d$  the existence of a unique eigenvalue  $E(\mu, k)$  of the discrete Schrödinger operator  $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d, d = 1, 2$ , associated to a system of two identical quantum-mechanical particles (bosons) on  $\mathbb{Z}^d, d = 1, 2$  were proved and an absolutely convergent expansion for  $E(\mu, k)$  at  $\mu = 0$  was found.

A family  $H_\mu(p), \mu > 0, p \in \mathbb{T}^d$  of the generalized Friedrichs models with the local perturbation of rank one, associated to a system of two particles, moving on the  $d$ -dimensional lattice  $\mathbb{Z}^d$ , was considered in [16, 17, 18, 19]. A criterion to existence of a coupling constant threshold  $\mu = \mu_0(p) \geq 0$  depending on the parameters of the model was proved in [16, 19]. An absolutely convergent expansion for the unique eigenvalue  $E(\mu, p)$  of  $H_\mu(p)$  at  $\mu(p) = 0$  was found in [18].

In [20] it is studied the existence of eigenvalues of the generalized Friedrichs model  $H_\mu(p)$ , with a rank-one perturbation, depending on parameters  $\mu > 0$  and  $p \in \mathbb{T}^2$ , and found an absolutely convergent expansions for eigenvalues at  $\mu(p)$ , the coupling constant threshold. The expansions are highly dependent on that, whether the threshold  $m(p)$  of the essential spectrum is: (i) neither a threshold eigenvalue nor a threshold resonance; (ii) a threshold resonance; (iii) a threshold eigenvalue.

In [19], the Generalized Friedrichs model under rank one perturbation is considered. The analytic dependence on the parameters of the eigenvalue and associated eigenfunction is proven. The existance of the coupling constant threshold  $\mu(p)$  is also found for the operator  $H_\mu(p), p \in U_\delta(p_0)$ .

In this work absolutely convergent expansions (asymptotics) of the eigenvalues are found explicitly for each of the following cases: the threshold  $M(p)$  is a threshold resonance or a threshold eigenvalue (see Theorem 2).

We use the following notations: Let  $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$  be the three-dimensional torus and  $L^2(\mathbb{T}^3)$  is the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus  $\mathbb{T}^3$ .

Let  $w(\cdot \cdot)$  be a real-valued analytic function on  $(\mathbb{T}^3)^2$  and  $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^3)$ .

We consider the Generalized Friedrichs model  $H_\mu(p), p \in \mathbb{T}^3$  acting in  $L^2(\mathbb{T}^3)$  defined as

$$H_\mu(p) = H_0(p) + \mu V, \quad \mu > 0,$$

where  $H_0(p), p \in \mathbb{T}^3$  is a multiplication operator by the function  $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$ :

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

and  $V: L^2(\mathbb{T}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^3)$  is the perturbation operator of the form

$$(Vf)(q) = \varphi(q)(f, \varphi),$$

where  $(\cdot, \cdot)$  stands for the inner product in  $L^2(\mathbb{T}^3)$ .

The perturbation  $V$  of  $H_0(p)$  is the positive operator of rank one. Consequently, by the well-known Weyl theorem [21] on compact perturbations, the essential spectrum of  $H_\mu(p)$  satisfies the equalities

$$\sigma_{ess}(H_\mu(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p))$$

and fills the segment  $[m(p), M(p)]$  on the real axis, where

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q).$$

Let us introduce the hypothesis that we assume throughout the paper.

**Hypothesis 1** *The following conditions are satisfied:*

- the function  $\varphi(\cdot)$  is nontrivial and real-analytic and has no singularities on the torus  $\mathbb{T}^3$ ;
- the function  $w(\cdot, \cdot)$  is real-analytic function on  $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$  and has a unique non degenerated maximum at  $(p_0, q_0) \in (\mathbb{T}^3)^2$ .

By Hypothesis 1, there exist  $\delta$ -neighborhood  $U_\delta(p_0) \subset \mathbb{T}^3$  of the point  $p = p_0 \in \mathbb{T}^3$  and an analytic vector function  $\mathbf{q}_0: U_\delta(p_0) \rightarrow \mathbb{T}^3$  such that for each  $p \in U_\delta(p_0)$ , the point  $\mathbf{q}_0(p) = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)}) \in \mathbb{T}^3$  is a unique non-degenerated maximum of the function  $w_p(\cdot)$ .

For any  $\mu > 0$  and  $p \in \mathbb{T}^3$ , we define an analytic function  $\Delta(\mu, p; \cdot)$  (the Fredholm determinant, associated to the operator  $H_\mu(p)$ ) in  $\mathbb{C} \setminus [m(p), M(p)]$  as

$$\Delta(\mu, p; \cdot) = 1 - \mu \Omega(p; \cdot), \text{ where}$$

$$\Omega(p; z) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(q) dq}{z - w_p(q)}, \quad p \in \mathbb{T}^3, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [m(p), M(p)].$$

**Remark 1.** We note that by the parametrical Morse lemma for any  $p \in U_\delta(p_0)$  there exists a map  $s = \psi(y, p)$  of the sphere  $W_\gamma(0) \subset \mathbb{R}^3$  with radius  $\gamma > 0$  and center at  $y = 0$  to a neighborhood  $U(\mathbf{q}_0(p))$  of the point  $\mathbf{q}_0(p)$  that in  $U(\mathbf{q}_0(p))$  the function  $w_p(\psi(y, p))$  can be represented as

$$w_p(\psi(y, p)) = M(p) - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = M(p) - y^2.$$

Here, the function  $\psi(y, \cdot)$  (resp.  $\psi(\cdot, p)$ ) is analytic in  $U_\delta(p_0)$  (resp.  $W_\gamma(0)$ ) and  $\psi(0, p) = \mathbf{q}_0(p)$ . Moreover, the Jacobian  $J(\psi(y, p))$  of the mapping  $s = \psi(y, p)$  is analytic in  $W_\gamma(0)$  and positive, i.e.,  $J(\psi(y, p)) > 0$  for all  $y \in W_\gamma(0)$  and  $p \in U_\delta(p_0)$ .

**Definition 1.** The threshold  $z = M(p)$  is called a regular point of the essential spectrum of the operator  $H_\mu(p)$ , if the equation  $H_\mu(p)f = M(p)f$  has only trivial solution  $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ .

Let  $L^1(\mathbb{T}^3)$  be the Banach space of integrable functions on  $\mathbb{T}^3$ .

**Definition 2.** The threshold  $z = M(p)$  is called a  $M(p)$  energy resonance (virtual level) of the essential spectrum of the operator  $H_\mu(p)$ , if the equation  $H_\mu(p)f = M(p)f$  has a non-trivial solution  $f \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$ . The solution  $f$  is called *resonance state* of the operator  $H_\mu(p)$ .

**Definition 3.** For  $p \in U_\delta(p_0)$ , we define the number  $\mu(p) > 0$  as

$$\mu(p) = \left( \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(q)dq}{M(p) - w_p(q)} \right)^{-1} > 0. \quad (2)$$

Next, we present the main result of the current paper, where an absolutely convergent expansion for the eigenvalue  $E(\mu, p)$  at the coupling constant threshold  $\mu(p)$  defined in (2) is obtained in the cases when the threshold  $M(p)$  is a threshold resonance or a threshold eigenvalue.

**Theorem.** Assume Hypothesis 1. Then for any fixed  $p \in U_\delta(p_0)$ ,  $\mu$  tends to  $\mu(p)$  iff  $E(\mu, p)$  approaches to the threshold  $M(p)$ . Moreover, for sufficiently small and positive  $\mu - \mu(p)$ , the eigenvalue  $E(\mu, p)$  has the following absolutely convergent expansions:

1. If  $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$ , then  $E(\mu, p)$  represents as the following convergent

*Taylor series expansion*

$$E(\mu, p) = M(p) + (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu - \mu(p)]^n)^2, \quad (3)$$

where  $a_n(p), n = 1, 2, \dots$  is real numbers with

$$a_1(p) = \left[ \frac{\pi \varphi^2(\mathbf{q}_0(p)) J(\mathbf{q}_0(p)) \mu^2(p)}{2} \right]^{-1} > 0.$$

2. If  $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$  then  $E(\mu, p)$  represents as the following Puiseux series at  $\mu = \mu(p)$

$$E(\mu, p) = M(p) + (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu - \mu(p)]^{n/2})^2, \quad (4)$$

where  $a_n(p), n = 1, 2, \dots$  real numbers with

$$a_1(p) = [-\mu^2(p)c(p)]^{-1/2}, c(p) < 0$$

and  $[\mu - \mu(p)]^{1/2} > 0$  for  $\mu - \mu(p) > 0$ .

The theorem gives the following corollary.

**Corollary 1.** Assume Hypothesis 1. Then for any fixed  $p \in U_\delta(p_0)$  for  $E(\mu, p)$  the following asymptotic relations hold:

1. If  $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$ , then

$$E(\mu, p) = M(p) + \left[ \frac{\pi\varphi^2(\mathbf{q}_0(p))J(\mathbf{q}_0(p))\mu^2(p)}{2} \right]^{-2} [\mu - \mu(p)]^2 + O([\mu - \mu(p)]^3), \mu \rightarrow \mu(p).$$

2. If  $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$ , then

$$E(\mu, p) = M(p) + [-\mu^2(p)c(p)]^{-1}[\mu - \mu(p)] + O([\mu - \mu(p)]^{3/2}), \mu \rightarrow \mu(p)$$

with  $c(p) < 0$ .

## References

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A. and Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle hamiltonians on lattices. *Comm.Math.Phys.* **262**, 91–115 (2006).
2. Albeverio S., Lakaev S.N. and Muminov Z.I. Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. *Ann. Henri Poincaré* **5**, 743–772 (2004).
3. Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra. *Commun. Pur. Appl. Math.* **1** (4), 361–406 (1948).
4. Gadella M. and Pronko G. The Friedrichs model and its use in resonance phenomena. *Fortschr. Phys.* **59** (9), 795–859 (2011).
5. Brown B.M., Marletta M. and Naboko S. et al. The detectable subspace for the Friedrichs model, *Integr. Equ. Oper. Theory* **91** (49), (2019).
6. Civitarese O. and Gadella M. The Friedrichs-model with fermion-boson couplings II, *International Journal of Modern Physics E*. **16** (1), 169–178 (2007).
7. Lakaev S. N. and Abdulkhakimov S. Kh. Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice. *Theor. Math. Phys.* **203** (3), 251–268 (2020).

8. Albeverio S., Lakaev S.N. and Muminov Z.I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. *J. Math. Anal. Appl.* **330** (2), 1152–1168 (2007).
9. Kholmatov Sh., Lakaev S. and Almuratov F. Bound states of Schrödinger-type operators on one and two dimensional lattices *J. Math. Anal. Appl.* **503** (1), 125280-1–33 (2021).
10. Bozorov I.N. and Khurramov A.M. On the number of eigenvalues of the lattice model operator in one-dimensional case. *Lobachevskii J. Math.* **43** (2), 353–365 (2022).
11. Lakaev S.N. and Boltaev A.T. Threshold phenomena in the spectrum of the two-particle Schrödinger operators on a lattice. *Theoret. and Math. Phys.* **198** (3), 363–375 (2019).
12. Lakaev S. N., Kholmatov Sh. Yu. and Khamidov Sh. I. Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case. *J. Phys. A: Math. Theor.* **54** (24), 245201-1–22 (2021).
13. Klaus M. and Simon B. Coupling constant thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Ann. Physics* **130** (2), 251–281 (1980).
14. Lakaev S.N. and Holmatov Sh.Yu. Asymptotics of Eigenvalues of a two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction. *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (13), 135304 (2011).
15. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. and Lakaev Sh.S. Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. *Theor. and Math. Phys.* **171** (3), 800-811 (2012).
16. Lakaev S., Ibrahim A. and Kurbanov Sh. Threshold effects for the Generalized Friedrichs model with the perturbation of rank one. *Abstract and Applied Analysis* **14** (4), 180953 (2012).
17. Lakaev S.N. and Dustov S.T. The eigenvalues of the generalized Friedrichs model. *Uzbek mathematical journal* **4** (2012).

18. Lakaev S., Darus M. and Kurbanov Sh. Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (20), 205304 (2013).
19. Lakaev S.N., Darus M. and Dustov S.T. Threshold phenomenon for a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one. *Ufa Mathematical Journal* **11** (4), 1-11 (2019).
20. Lakaev S.N., Kurbanov Sh.Kh. and Alladustov Sh.U. Convergent expansions of eigenvalues of the generalized Friedrichs model with a rank-one perturbation. *Complex Analysis and Operator Theory.* **15** (121), (2021).
21. Reed M. and Simon B. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press, N.Y. (1978).

## SPECTRAL PROPERTIES OF TWO-PARTICLE HAMILTONIANS WITH INTERACTIONS UP TO NEXT-NEIGHBORING SITES

**S.N.Lakaev, M.O.Akhmadova**

*Samarkand State University*

*Samarkand Branch of the Institute of Mathematics*

Let  $T^2 = [-\pi, \pi]^2$  be the two dimensional torus and  $L^2(\mathbb{T}^2)$ , resp  $L^{2,e}(\mathbb{T}^2) \subset L^2(\mathbb{T}^2)$  be the Hilbert space of square-integrable functions resp. be the subspace of even functions on  $\mathbb{T}^2$ .

For any  $\gamma, \lambda, \mu \in R$  and  $k \in \mathbb{T}^2$  the bounded and self-adjoint Schrödinger operator  $H_{\gamma\lambda\mu}(k)$  associated to a system of two identical particles (bosons) moving on the two dimensional lattice  $Z^2$  acts in  $L^{2,e}(\mathbb{T}^2)$  (see,e.g.[1,2]) as

$$H_{\gamma\lambda\mu}(k) := H_0(k) + V_{\gamma\lambda\mu}.$$

Here the non-perturbed operator  $H_0(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^2$  is the multiplication operator by the function  $\mathcal{E}_k(\cdot)$  acting in  $L^{2,e}(\mathbb{T}^2)$  as

$$(H_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), \quad \mathcal{E}_k(p) := 2 \sum_{i=1}^2 \left(1 - \cos \frac{k_i}{2} \cos p_i\right), \quad p_i \in \mathbb{T}.$$

The perturbation operator  $V_{\gamma\lambda\mu}$  acts in  $L^{2,e}(\mathbb{T}^2)$  and has form

$$\begin{aligned}
V_{\gamma\lambda\mu}f(p) = & \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_{T^2} f(q) dq + \frac{\lambda}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 \cos p_i \int_{T^2} \cos q_i f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 \cos 2p_i \int_{T^2} \cos 2q_i f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \cos p_1 \cos p_2 \int_{T^2} \cos q_1 \cos q_2 f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \sin p_1 \sin p_2 \int_{T^2} \sin q_1 \sin q_2 f(q) dq.
\end{aligned}$$

The operator  $H_0(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^2$  is the multiplication operator by the continuous real function  $\mathcal{E}_k(p)$  defined on  $\mathbb{T}^2$ , therefore its spectrum consist only of the essential spectrum, i.e.

$$\sigma(H_0(k)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)], \quad (1)$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\min}(k) := & \min_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q) = 2(1 - \cos \frac{k_i}{2}) \geq 0, \\
\mathcal{E}_{\max}(k) := & \max_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q) = 2(1 + \cos \frac{k_i}{2}) \leq 8.
\end{aligned}$$

Depending on  $\gamma, \lambda, \mu \in R$  the rank of  $V_{\gamma\lambda\mu}$  varies but never exceeds seven. Hence, by the well known Weyl theorem [3], the essential spectrum of  $H_{\gamma\lambda\mu}(k)$  coincides with the spectrum of  $H_0(k)$ , i.e.,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\lambda\mu}(k)) = \sigma(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)].$$

Let we define the following subspaces of  $L^{2,e}(T^2)$ :

$$\begin{aligned}
L^{2,ee,s}(T^2) := & \{f \in L^{2,e}(T^2) : f(p_1, p_2) = f(p_2, p_1) = f(-p_1, p_2), p_1, p_2 \in T\}, \\
L^{2,oo,s}(T^2) := & \{f \in L^{2,e}(T^2) : f(p_1, p_2) = f(p_2, p_1) = -f(-p_1, p_2), p_1, p_2 \in T\}
\end{aligned}$$

and

$$L^{2,e,a}(T^2) := \{f \in L^{2,e}(T^2) : f(p_1, p_2) = -f(p_2, p_1), p_1, p_2 \in T\}.$$

The operator  $V_{\gamma\lambda\mu}$  can be written in the following form:

$$V_{\gamma\lambda\mu}f(p) = \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_{T^2} f(q) dq + \frac{\lambda}{8\pi^2} (\cos p_1 + \cos p_2) \int_{T^2} (\cos q_1 + \cos q_2) f(q) dq$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{8\pi^2} (\cos p_1 - \cos p_2) \int_{T^2} (\cos q_1 - \cos q_2) f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{8\pi^2} (\cos 2p_1 + \cos 2p_2) \int_{T^2} (\cos 2q_1 + \cos 2q_2) f(q) dq \quad (2) \\
& + \frac{\mu}{8\pi^2} (\cos 2p_1 - \cos 2p_2) \int_{T^2} (\cos 2q_1 - \cos 2q_2) f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \cos p_1 \cos p_2 \int_{T^2} \cos q_1 \cos q_2 f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \sin p_1 \sin p_2 \int_{T^2} \sin q_1 \sin q_2 f(q) dq.
\end{aligned}$$

Equality (2) yields that the subspaces  $L^{2,ee,s}(T^2)$ ,  $L^{2,oo,s}(T^2)$  and  $L^{2,e,a}(T^2)$  are invariant with respect to  $V_{\gamma\lambda\mu}$ . The subspaces  $L^{2,ee,s}(T^2)$ ,  $L^{2,oo,s}(T^2)$  and  $L^{2,e,a}(T^2)$  are invariant subspaces of the operator  $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$  and reduces it. Therefore

$$\sigma(H_{\gamma\lambda\mu}(0)) = (H_{\gamma\lambda\mu}^{ee,s}) \cup \sigma(H_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s}) \cup \sigma(H_{\gamma\lambda\mu}^a), \quad (3)$$

here  $H_{\gamma\lambda\mu}^{ee,s}$ ,  $H_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s}$  and  $H_{\gamma\lambda\mu}^a$  are the restrictions of  $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$  onto  $L^{2,ee,s}(T^2)$ ,  $L^{2,oo,s}(T^2)$  and  $L^{2,e,a}(T^2)$ , respectively.

The equality (2) gives that

$$V_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s} f(p) = \frac{\mu}{2\pi^2} \sin p_1 \sin p_2 \int_{T^2} \sin q_1 \sin q_2 f(q) dq \quad (4)$$

and  $H_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s} = H_0(0) + V_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s}$ .

Equality (4) shows that the operator  $H_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s}$  depends only of parameter  $\mu$ , which is simpler to investigate. Therefore, here and everywhere below we write in place of the operator  $H_{\gamma\lambda\mu}^{oo,s}$  the operator  $H_\mu^{oo,s}$ .

The result below concerns the number and location of eigenvalues of the  $H_\mu^{oo,s}$ .

**Theorem 4.3** *Let  $\mu \in \mathbb{R}$ . The following relations are true:*

- a) if  $\mu > \frac{3\pi}{3\pi-9}$  then  $H_\mu^{oo,s}$  has at exactly one bound states above the essential spectrum;
- b) if  $-\frac{3\pi}{3\pi-9} \leq \mu \leq \frac{3\pi}{3\pi-9}$  then  $H_\mu^{oo,s}$  hasn't any bound states outside the essential spectrum;
- c) if  $\mu < -\frac{3\pi}{3\pi-9}$  then  $H_\mu^{oo,s}$  has exactly one bound states below the essential spectrum.

## REFERENCES

1. Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I., Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**, (2021).
2. Sh.Yu.Kholmatov, S.N.Lakaev, F.Almuratov, Bound states of discrete Schrödinger operators on one and two dimensional lattices, J. Math. Anal. Appl. **503**:1 (2021).
3. Reed M., Simon B., Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators, Academic Press, N.Y., (1978).

## SPECTRAL PROPERTIES OF DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATORS WITH INTERACTIONS UP TO NEXT-NEIGHBORING SITES

**S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov, M.O.Akhmadova**

*Samarkand State University*

*Samarkand Branch of the Institute of Mathematics*

Let  $T^2 = [-\pi, \pi]^2$  be the two dimensional torus. Let  $L^2(T^2)$  be the Hilbert space of square-integrable functions on  $T^2$  and  $L^{2,e}(T^2) \subset L^2(T^2)$  be the subspace of even functions on  $T^2$ .

For any  $\gamma, \lambda, \mu \in P$  and  $k \in T^2$  the bounded and self-adjoint Schrödinger operator  $H_{\gamma\lambda\mu}(k)$  associated to a system of two identical particles (bosons) moving on the two dimensional lattice  $Z^2$  acts in  $L^{2,e}(T^2)$  (see,e.g.[1]) as

$$H_{\gamma\lambda\mu}(k) := H_0(k) + V_{\gamma\lambda\mu}.$$

Here the non-perturbed operator  $H_0(k)$ ,  $k \in T^2$  is the multiplication operator by the function  $\mathcal{E}_k(\cdot)$  acting in  $L^{2,e}(T^2)$  as

$$(H_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), \quad \mathcal{E}_k(p) := 2 \sum_{i=1}^2 (1 - \cos \frac{k_i}{2} \cos p_i), \quad p_i \in T.$$

The perturbation operator  $V_{\gamma\lambda\mu}$  is defined as

$$\begin{aligned}
V_{\gamma\lambda\mu}f(p) = & \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_{T^2} f(q) dq + \frac{\lambda}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 \cos p_i \int_{T^2} \cos q_i f(q) dq + \frac{\mu}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 \cos 2p_i \int_{T^2} \cos 2q_i f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \cos p_1 \cos p_2 \int_{T^2} \cos q_1 \cos q_2 f(q) dq + \frac{\mu}{2\pi^2} \sin p_1 \sin p_2 \int_{T^2} \sin q_1 \sin q_2 f(q) dq.
\end{aligned}$$

The operator  $H_0(k)$ ,  $k \in T^2$  is the multiplication operator by the continuous real function  $\mathcal{E}_k(p)$  defined on  $T^2$ , therefore its spectrum consist only of the essential spectrum, i.e.

$$\sigma(H_0(k)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)], \quad (1)$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{q \in T} \mathcal{E}_k(q) &= 2(1 - \cos \frac{k_i}{2}) \geq 0, \\
\mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{q \in T} \mathcal{E}_k(q) &= 2(1 + \cos \frac{k_i}{2}) \leq 8.
\end{aligned}$$

Depending on  $\gamma, \lambda, \mu \in P$  the rank of  $V_{\gamma\lambda\mu}$  varies but never exceeds seven. Hence, by the well known Weyl theorem [2], the essential spectrum of  $H_{\gamma\lambda\mu}(k)$  coincides with the spectrum of  $H_0(k)$ , i.e.,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\lambda\mu}(k)) = \sigma(H_0(k)).$$

Let

$$L^{2,e,s}(T^2) := \{f \in L^{2,e}(T^2) : f(p_1, p_2) = f(p_2, p_1), p_1, p_2 \in T\}$$

and

$$L^{2,e,a}(T^2) := \{f \in L^{2,e}(T^2) : f(p_1, p_2) = -f(p_2, p_1), p_1, p_2 \in T\}$$

be the spaces of (essentially) even-symmetric and (essentially) even-antisymmetric functions , respectively.

The operator  $V_{\gamma\lambda\mu}$  can be written in the following form:

$$\begin{aligned}
V_{\gamma\lambda\mu}f(p) = & \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_{T^2} f(q) dq + \frac{\lambda}{8\pi^2} (\cos p_1 + \cos p_2) \int_{T^2} (\cos q_1 + \cos q_2) f(q) dq \\
& + \frac{\lambda}{8\pi^2} (\cos p_1 - \cos p_2) \int_{T^2} (\cos q_1 - \cos q_2) f(q) dq
\end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{8\pi^2} (\cos 2p_1 + \cos 2p_2) \int_{T^2} (\cos 2q_1 + \cos 2q_2) f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{8\pi^2} (\cos 2p_1 - \cos 2p_2) \int_{T^2} (\cos 2q_1 - \cos 2q_2) f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \cos p_1 \cos p_2 \int_{T^2} \cos q_1 \cos q_2 f(q) dq \\
& + \frac{\mu}{2\pi^2} \sin p_1 \sin p_2 \int_{T^2} \sin q_1 \sin q_2 f(q) dq.
\end{aligned}$$

(2) yields that the subspaces  $L^{2,e,s}(T^2)$  and  $L^{2,e,a}(T^2)$  are invariant with respect to  $V_{\gamma\lambda\mu}$ .

Thus, the subspaces  $L^{2,e,s}(T^2)$  and  $L^{2,e,a}(T^2)$  are invariant subspaces of the operator  $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$  and reduces it. Therefore

$$\sigma(H_{\gamma\lambda\mu}(0)) = \sigma(H_{\gamma\lambda\mu}^s) \cup \sigma(H_{\gamma\lambda\mu}^a),$$

where  $H_{\gamma\lambda\mu}^s$  and  $H_{\gamma\lambda\mu}^a$  are the restrictions of  $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$  onto  $L^{2,e,s}(T^2)$  and  $L^{2,e,a}(T^2)$ . Since (2) we arrive the following expressions:

$$V_{\gamma\lambda\mu}^a f(p) = \frac{\lambda}{8\pi^2} (\cos p_1 - \cos p_2) \int_{T^2} (\cos q_1 - \cos q_2) f(q) dq + \quad (3)$$

$$\frac{\mu}{8\pi^2} (\cos 2p_1 - \cos 2p_2) \int_{T^2} (\cos 2q_1 - \cos 2q_2) f(q) dq$$

and  $H_{\gamma\lambda\mu}^a = H_0(0) + V_{\gamma\lambda\mu}^a$ .

(3) shows that the restriction  $H_{\gamma\lambda\mu}^a$  of the operator  $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$  onto the Hilbert space  $L^{2,e,a}(T^2)$  is depending only of parameters  $\lambda$  and  $\mu$ , which is simpler to investigate. Therefore, here and everywhere below we write  $H_{\gamma\lambda\mu}^a$  and  $V_{\gamma\lambda\mu}^a$  as  $H_{\lambda\mu}^a$  and  $V_{\lambda\mu}^a$ , respectively.

The Fredholm determinant  $\Delta_{\lambda\mu}^a(z)$  associated to the operator  $H_{\lambda\mu}^a$  defines as

$$\Delta_{\lambda\mu}^a(z) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda a_{11}(z) & \mu a_{12}(z) \\ \lambda a_{12}(z) & 1 + \mu a_{22}(z) \end{vmatrix}$$

where

$$a_{ij}(z) := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Gamma^2} \frac{(\cos ip_1 - \cos ip_2)(\cos jp_1 - \cos jp_2) dp}{E_0(p) - z}, i, j = 1, 2.$$

We define the coefficient  $C^-(\lambda, \mu)$  (resp.  $C^+(\lambda, \mu)$ ) of the asymptotics of  $\Delta_{\lambda\mu}^a(z)$  vanishes as  $z$  approaches the lower (resp. upper) edge of the essential spectrum.

We partition  $(\lambda, \mu)$ -plane of interactions into connected components  $X_0^\pm, X_1^\pm, X_2^\pm$  by means of hyperbolas

$$C^+(\lambda, \mu) := 1 - \frac{(4-\pi)}{\pi} \lambda - \frac{(32-9\pi)}{2\pi} \mu + \frac{(32-9\pi)}{16\pi} \lambda \mu$$

and

$$C^-(\lambda, \mu) := 1 + \frac{(4-\pi)}{\pi} \lambda + \frac{(32-9\pi)}{2\pi} \mu + \frac{(32-9\pi)}{16\pi} \lambda \mu,$$

where

$$X_0^+ := \{(\lambda, \mu) \in P^2 : C^+(\lambda, \mu) > 0, \mu < \frac{4(4-\pi)}{32-9\pi}\},$$

$$X_1^+ := \{(\lambda, \mu) \in P^2 : C^+(\lambda, \mu) < 0\},$$

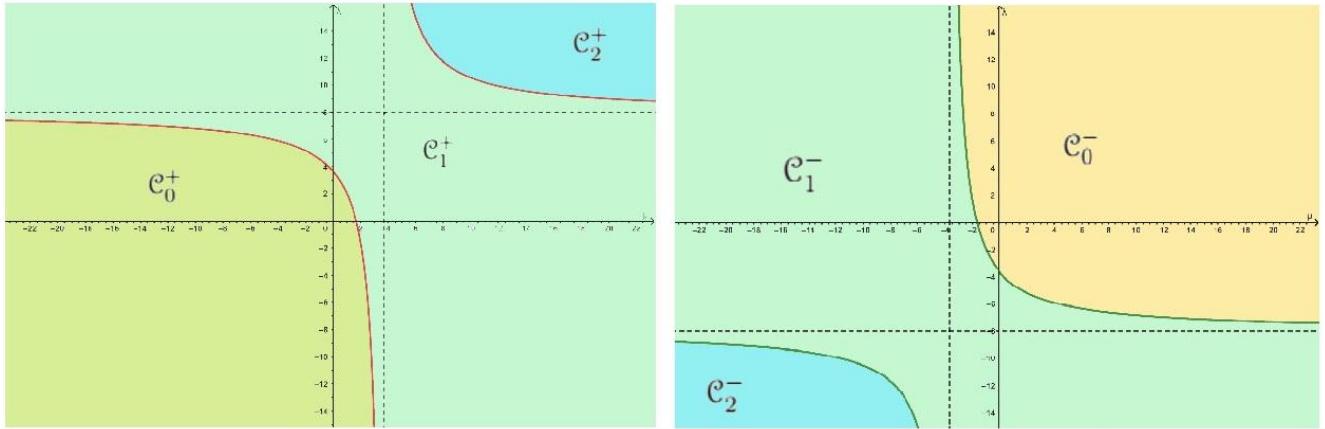
$$X_2^+ := \{(\lambda, \mu) \in P^2 : C^+(\lambda, \mu) > 0, \mu > \frac{4(4-\pi)}{32-9\pi}\}$$

and

$$X_0^- := \{(\lambda, \mu) \in P^2 : C^-(\lambda, \mu) > 0, \mu > \frac{4(\pi-4)}{32-9\pi}\},$$

$$X_1^- := \{(\lambda, \mu) \in P^2 : C^-(\lambda, \mu) < 0\},$$

$$X_2^- := \{(\lambda, \mu) \in P^2 : C^-(\lambda, \mu) > 0, \mu < \frac{4(\pi-4)}{32-9\pi}\}.$$



**Figure 1.**

**Theorem 4.3** Let  $\lambda, \mu \in P$ . The following relations are true:

- d) if  $(\lambda, \mu) \in X_0^+$  resp.  $(\lambda, \mu) \in X_0^-$ , then  $H_{\lambda\mu}^a$  hasn't any bound states above resp. below the essential spectrum;
- e) if  $(\lambda, \mu) \in X_1^+$  resp.  $(\lambda, \mu) \in X_1^-$ , then  $H_{\lambda\mu}^a$  has a unique antisymmetric bound state above resp. below the essential spectrum;
- f) if  $(\lambda, \mu) \in X_2^+$  resp.  $(\lambda, \mu) \in X_2^-$ , then  $H_{\lambda\mu}^a$  has exactly two antisymmetric bound states above resp. below the essential spectrum.

## REFERENCES:

1. Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I., Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**, (2021).
2. Reed M., Simon B., Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators, Academic Press, N.Y., (1978).
3. Sh.Yu.Kholmatov, S.N.Lakaev, F.Almuratov, Bound states of discrete Schrödinger operators on one and two dimensional lattices, J. Math. Anal. Appl. **503**:1 (2021).

## EXISTENCE CONDITIONS FOR EIGENVALUES OF THE LATTICE SCHRÖDINGER OPERATOR

MUKHIDDIN I. MUMINOV, AND ILKHOM A. MUKHAMMADIEV

Samarqand davlat universiteti mmuminov@mail.ru,  
mukhammadiyevikhom@gmail.com

Consider a two-particle Schrodinger operator  $h_{\lambda\mu}(k)$ ,  $k \in T^3$ , associated to the Hamiltonian  $h$  for a system of two particles on the lattice  $\mathbb{Z}^3$  interacting via attractive short-range potential. The operator  $h_{\lambda\mu}(k)$  is a self-adjoint and acts in  $L_2(T^3)$  as (See, [1])

$$h_{\lambda\mu}(k) = h_0(k) - V, \quad k = (k_1, k_2, k_3) \in T^3,$$

where  $h_0(k)$  is a multiplication operator by

$$E_k(p) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(p - k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{l=1}^3 (1 - \cos 2p_l),$$

$V$  is an integral operator defined as

$$(Vf)(p) := \lambda \sum_{l=1}^3 \int_{T^3} \cos(s_l - p_l) f(s) ds + \mu \sum_{l=1}^3 \int_{T^3} \cos 2(s_l - p_l) f(s) ds$$

Note that by the Weyl theorem [See, 2] on the essential spectrum the essential spectrum  $\sigma_{ess}(h_{\lambda\mu}(k))$  of the operator  $h_{\lambda\mu}(k)$  coincides with the spectrum of the unperturbed operator  $h_0(k)$

$$\sigma_{ess}(h_{\lambda\mu}(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

where  $m(k) = \min_{p \in T^3} E_k(p)$ ,  $M(k) = \max_{p \in T^3} E_k(p)$ .

Remark that

$$\sigma_{disc}(h_{\lambda\mu}(k)) \cap (M(k), +\infty) = \emptyset$$

We introduce the following numbers

$$\begin{aligned} \lambda_0^e &= \left( \int_{T^3} \frac{\varphi_1^2(s)}{E_k(s)} ds \right)^{-1}, \quad \lambda_0^o = \left( \int_{T^3} \frac{\psi_1^2(s)}{E_k(s)} ds \right)^{-1} \\ \mu_0^{e,r} &= \left( \int_{T^3} \frac{\varphi_r^2(2s)}{E_k(s)} ds \right)^{-1}, \quad \mu_0^{o,r} = \left( \int_{T^3} \frac{\psi_r^2(2s)}{E_k(s)} ds \right)^{-1}, r = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Note that  $\mu_0^{e,1} > \mu_0^{e,2} = \mu_0^{e,3}$ ,  $\mu_0^{o,1} > \mu_0^{o,2} = \mu_0^{o,3}$

**Theorem 1.** The following statements are true:

(i) For any  $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_0^e] \times [0, \mu_0^{e,r}]$

the operator  $h_r^e(k)$  has no eigenvalue lying to the left  $m(k)$ .

(ii) For any  $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_0^e] \times (\mu_0^{e,r}, \infty) \cup (\lambda_0, \infty) \times [0, \mu_0^{e,r}]$

the operator  $h_r^e(k)$  has a unique eigenvalue lying to the left  $m(k)$ .

(iii) For any  $(\lambda, \mu) \in (\lambda_0^e, \infty) \times (\mu_0^{e,r}, \infty)$  the operator  $h_r^e(k)$  has two eigenvalues lying to the left  $m(k)$ .

**Theorem 2.** The following statements are true:

(i) For any  $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_0^o] \times [0, \mu_0^{o,r}]$  the operator  $h_r^o(k)$  has no eigenvalue lying to the left  $m(k)$ .

(ii) For any  $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_0^o] \times (\mu_0^{o,r}, \infty) \cup (\lambda_0, \infty) \times [0, \mu_0^{o,r}]$

the operator  $h_r^o(k)$  has a unique eigenvalue lying to the left  $m(k)$ .

(iii) For any  $(\lambda, \mu) \in (\lambda_0^o, \infty) \times (\mu_0^{o,r}, \infty)$

the operator  $h_r^o(k)$  has two eigenvalues lying to the left  $m(k)$ .

## REFERENCES

1. Muminov M.I., Khurramov A.M., Bozorov I.N. Conditions for the existence of bound states of a two-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2022. **13**(3), 237-244.

2. Reed M., Simon B. Methods of modern Mathematical Physics. Vol.4. Analysis of Operators. Academic Press, London. 1980. 404 p.

3. Muminov M.I., Khurramov A.M. On compact distribution of two-particle schrödinger operator on a lattice. Russian Math. (Iz. VUZ) 2015. **59**(6), 18-22.

## Asymptotics for discrete spectrum of Schrödinger operator in one dimensional lattice

**M.A. Pardabaev, F.M. Almuratov**

*Samarkand state university*

In [2] Klaus studied the discrete spectrum of the Schrödinger operator  $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda V$

for  $\lambda > 0$  and  $V$  obeying

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|V(x)|dx < \infty,$$

extending the results of Simon in [1] in  $d = 1$ . Klaus showed that if  $\int V(x)dx > 0$ , then for small and positive  $\lambda$  there is no bound state, and if  $\int V(x)dx \leq 0$ , then there exists a bound state  $E(\lambda)$  and it satisfies

$$(-E(\lambda))^{\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda}{2} \int V(x)dx - \frac{\lambda^2}{4} \int V(x)|x - y|V(y)dxdy + o(\lambda^2)$$

as  $\lambda \searrow 0$ .

In the present paper we replace the Euclidean one dimensional space  $\mathbb{R}$  by the one dimensional lattice  $\mathbb{Z}$  be the one dimensional cubical lattice and  $\ell^2(\mathbb{Z})$  be the Hilbert space of square-summable functions on  $\mathbb{Z}$ . Let  $\mathbb{T} := (-\pi, \pi]$  be the one dimensional torus, the dual group to  $\mathbb{Z}$  and let  $L^2(\mathbb{T})$  be the Hilbert space of square-integrable functions on  $\mathbb{T}$ . In the coordinate space representation the energy operator  $\hat{H}_{ab}(\mu)$  of a one-particle system on  $\mathbb{Z}$  under a potential field

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} a, & \text{if } x = 0, \\ b, & \text{if } |x| = 1, \\ 0, & \text{if } |x| > 1, \end{cases}$$

with  $a, b \in \mathbb{R}\{0\}$ , is defined as  $\hat{H}_{ab}(\mu) := \hat{H}_0 - \mu \hat{V}_{ab}$ ,  $\mu \geq 0$ , where the free energy operator  $\hat{H}_0$  is a Laurent-Toeplitz-type operator

$$\widehat{H}_0 \widehat{f}(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \widehat{\epsilon}(x-y) \widehat{f}(y),$$

in  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , given by a *Hopping matrix*  $\widehat{\epsilon} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  of the particle which satisfies  $\widehat{\epsilon}(x) = \overline{\widehat{\epsilon}(-x)}$ , and the potential energy operator is the multiplication in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  by  $\widehat{v}$ . Note that  $\widehat{H}_{ab}(\mu)$  is a self-adjoint bounded operator. Let

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}), \quad \mathcal{F}\widehat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x) e^{i(p,x)}$$

be the standard Fourier transform with the inverse

$$\mathcal{F}^*: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(p) e^{-i(p,x)} dp.$$

The operator  $H_{ab}(\mu) = \mathcal{F}\widehat{H}_{ab}(\mu)\mathcal{F}^*$ , called the *momentum representation*, can be written as  $H_{ab}(\mu) = H_0 - \mu V_{ab}$ , where  $H_0 := \mathcal{F}\widehat{H}_0\mathcal{F}^*$  is the multiplication operator in  $L^2(\mathbb{T})$  by  $\epsilon := \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\widehat{\epsilon}$  and  $V_{ab} := \mathcal{F}\widehat{V}_{ab}\mathcal{F}^*$  is a convolution operator

$$V_{ab}f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (a + 2b \cos(p-q)) f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Since  $\widehat{V}_{ab}$  is at most of rank 3, by the Weyl Theorem [12, Theorem XIII.14],

$$\sigma_{\text{ess}}(\widehat{H}_{ab}(\mu)) = \sigma(\widehat{H}_0) = [\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}] = [\min \epsilon, \max \epsilon], \quad \mu \geq 0.$$

In what follows we always assume:

**Hypothesis 1** *The dispersion relation  $\epsilon$  is a real-analytic, even function having a unique non-degenerate minimum at  $0 \in \mathbb{T}$ .*

**Remark 1** *In view of Hypothesis 1.  $\frac{d\epsilon}{dq}(0) = 0$  and  $\frac{d^2\epsilon}{dq^2}(0) > 0$ . Moreover, by the Morse Lemma there exist a neighbourhood  $U(0) \subset \mathbb{T}$  of  $0 \in \mathbb{T}$  and an analytic diffeomorphism  $\psi: (-\gamma, \gamma) \rightarrow U(0)$  for some  $\gamma \in (0,1)$  such that  $\psi(0) = 0$  and  $\epsilon(\psi(y)) = \epsilon_{\min} + y^2$  for all  $y \in (-\gamma, \gamma)$ . Moreover, the Jacobian  $J(\psi(y))$  of map  $\psi$  is strictly positive in  $(-\gamma, \gamma)$ . We write*

$$J_0 := J(\psi(0)) > 0. \tag{1}$$

The main aim of the current paper is to study the discrete spectrum of  $\widehat{H}_{ab}(\mu)$  lying below the essential spectrum depending on parameters  $a, b \neq 0$  and  $\mu > 0$ . In particular, we establish the existence or non-existence, the number (uniqueness and finiteness) of eigenvalues, and also the asymptotics of eigenvalues absorbed into the essential spectrum as  $\mu \searrow 0$ ,  $\mu \searrow \mu_o$  and  $\mu \searrow \mu_e$ .

Let  $L^{2,e}(\mathbb{T})$  and  $L^{2,o}(\mathbb{T})$  be the subspaces of essentially even and essentially odd functions in  $L^2(\mathbb{T})$ . We remark that by the symmetricity of  $e$  each  $L^{2,e}(\mathbb{T})$  and  $L^{2,o}(\mathbb{T})$  is invariant with respect to  $H_{ab}(\mu)$ , the restrictions  $H_{ab}(\mu)|_{L^{2,o}(\mathbb{T})}$  acts a rank-one perturbation of  $H_0$ , while  $H_{ab}(\mu)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$  is a rank-two perturbation of  $H_0$ . Thus, we can study the discrete spectrum of  $H_{ab}(\mu)$  separately restricted to these subspaces. For fixed  $a, b \neq 0$  let us define the following numbers:

$$\mu_e := \frac{a+2b}{ab} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(\cos q - 1)^2 dq}{e(q) - e_{\min}} \right)^{-1} \quad \text{and} \quad \mu_o := \frac{1}{b} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 q dq}{e(q) - e_{\min}} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Note that all integrals in (2) is finite. The first main result is on the discrete spectrum of  $H_{ab}(\mu)$  in  $L^{2,e}(\mathbb{T})$ . Before the statement given  $a, b \neq 0$  let us define the following numbers:

$$c^* := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos p) dp}{e_{\min} - e(p)}, \quad c^{**} := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{2 \cos p (1 - \cos p) dp}{e_{\min} - e(p)},$$

$$\kappa_* := \frac{[c^* a - c^* b]^2}{2\pi^2} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos p)^2 dp}{e(p) - e_{\min}} \right]^{-2}, \quad \kappa_0 := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos p)^2 dp}{e(p) - e_{\min}}.$$

Now we describe the discrete spectrum of  $H_{ab}(\mu)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$ . For the convenience of the reader we divide the statements into two theorems depending on the sign of  $ab$ .

**Theorem 1** *Let  $H_{ab}^e(\mu) := H_{ab}(\mu)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$  and  $ab < 0$ .*

- *Assume that  $a + 2b \geq 0$ , then for any  $\mu > 0$  the operator  $H_{ab}^e(\mu)$  has a unique eigenvalue  $z_e(\mu)$  in  $(-\infty, e_{\min})$ . Moreover, the function  $z_e(\cdot)$  is real-analytic, strictly decreasing in  $(0, +\infty)$ . Furthermore, for sufficiently small  $\mu > 0$  the function  $e_{\min} - z_e(\mu)$  has a convergent expansion*

$$e_{\min} - z_e(\mu) = \begin{cases} (c_e \mu + \sum_{n \geq 2} c_n \mu^n)^2 & \text{if } a + 2b > 0, \\ (c_e \mu^2 + \sum_{n \geq 3} c_n \mu^n)^2 & \text{if } a + 2b = 0, \end{cases} \quad (3)$$

where  $\{c_n\}$  are real coefficients and

$$c_e = \begin{cases} \frac{J_0}{2}(a + 2b) & \text{if } a + 2b > 0, \\ -\frac{J_0}{2}ab\kappa_0 & \text{if } a + 2b = 0, \end{cases}$$

$J_0$  is given by (1).

- Assume that  $a + 2b < 0$ , then for any  $\mu \leq \mu_e$  the operator  $H_{ab}^e(\mu)$  has no eigenvalue below the essential spectrum and for any  $\mu > \mu_e$  the operator  $H_{ab}^e(\mu)$  has a unique eigenvalue  $z_e(\mu)$  in  $(-\infty, \epsilon_{min})$ . Moreover, the function  $z_e(\cdot)$  is real-analytic, strictly decreasing in  $(\mu_e, +\infty)$ . Furthermore, for sufficiently small  $\mu - \mu_e > 0$  the function  $\epsilon_{min} - z_e(\mu)$  has a convergent expansion

$$\epsilon_{min} - z_e(\mu) = \begin{cases} (c_e(\mu - \mu_e) + \sum_{n \geq 2} c_n(\mu - \mu_e)^n)^2 & \text{if } c^*a \neq c^{**}b, \\ \left(c_e(\mu - \mu_e)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n \geq 2} c_n(\mu - \mu_e)^{\frac{n}{2}}\right)^2 & \text{if } c^*a = c^{**}b, \end{cases} \quad (4)$$

where  $\{c_n\}$  are real coefficients and

$$c_e = \begin{cases} \frac{a^2 b^2 J_0 \mu_e \kappa_0}{2\kappa_*} & \text{if } c^*a \neq c^{**}b, \\ \sqrt{\frac{\pi \kappa_0}{\mu_e} \left[ \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos q)^2 dq}{(\epsilon(q) - \epsilon_{min})^2} \right]^{-1}} & \text{if } c^*a = c^{**}b. \end{cases}$$

**Theorem 2** Let  $H_{ab}^e(\mu) := H_{ab}(\mu)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$  and  $ab > 0$ .

- Assume that  $a, b < 0$ , then for any  $\mu > 0$  the operator  $H_{ab}^e(\mu)$  has no eigenvalue below the essential spectrum.
- Assume that  $a, b > 0$ , then for any  $\mu \leq \mu_e$  the operator  $H_{ab}^e(\mu)$  has a unique eigenvalue  $z_e^{(1)}(\mu) < \epsilon_{min}$  and for any  $\mu > \mu_e$  the operator  $H_{ab}^e(\mu)$  has two eigenvalues  $z_e^{(1)}(\mu), z_e^{(2)}(\mu) < \epsilon_{min}$ . Moreover, the functions  $z_e^{(1)}(\cdot)$  and  $z_e^{(2)}(\cdot)$  are real-analytic and strictly decreasing in  $(0, +\infty)$  and  $(\mu_e, +\infty)$ , respectively. Furthermore, for sufficiently small  $\mu > 0$  the function  $\epsilon_{min} - z_e^{(1)}(\mu)$  has a convergent expansion

$$\epsilon_{min} - z_e^{(1)}(\mu) = \left(c_e^{(1)}\mu + \sum_{n \geq 2} c_n^{(1)}\mu^n\right)^2, \quad c_e^{(1)} := \frac{J_0}{2}(a + 2b) > 0,$$

- and for sufficiently small  $\mu - \mu_e > 0$  the function  $e_{min} - z_e^{(2)}(\mu)$  has a convergent expansion

$$e_{min} - z_e^{(2)}(\mu) = \begin{cases} \left( c_e^{(2)} (\mu - \mu_e) + \sum_{n \geq 2} c_n^{(2)} (\mu - \mu_e)^n \right)^2 & \text{if } c^* a \neq c^{**} b, \\ \left( c_e^{(2)} (\mu - \mu_e)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n \geq 2} c_n^{(2)} (\mu - \mu_e)^{\frac{n}{2}} \right)^2 & \text{if } c^* a = c^{**} b, \end{cases}$$

where  $\{c_n^{(1)}\}, \{c_n^{(2)}\}$  are real coefficients and

$$c_e^{(2)} = \begin{cases} \frac{a^2 b^2 J_0 \mu_e \kappa_0}{2 \kappa_*} & \text{if } c^* a \neq c^{**} b, \\ \sqrt{\frac{\pi \kappa_0}{\mu_e} \left[ \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos q)^2 dq}{(e(q) - e_{min})^2} \right]^{-1}} & \text{if } c^* a = c^{**} b. \end{cases}$$

## References

1. B. Simon: The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. Ann. Phys. **97** (1976), 279–288.
2. M. Klaus: On the bound states of Schrödinger operators in one dimension. Ann. Phys. **108** (1977), 288-300.
3. S. Lakaev, Sh. Holmatov: Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction J. Phys. A. **44** (2011).
4. A.M. Khalkhuzhaev and Sh.S. Lakaev: Asymptotics of the eigenvalue of the Hamiltonian of a system of two fermions on a one-dimensional lattice. Uzbek Mathematical Journal.Tashkent, **No.4** (2012), 152-164.
5. Sh.Yu. Kholmatov, S.N. Lakaev, F. Almuratov: Bound states of discrete Schrödinger operators on one and two dimensional lattices.J. Math. Anal. Appl. **503** (2021), 125280.
6. S.N. Lakaev, A.T. Boltaev, F. Almuratov: On the discrete spectra of Schrödinger-type operators on one dimensional lattices. Lobachevskii Journal of Mathematics. (2022).
7. M. Reed, B. Simon: Modern Methods of Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York. (1978).

# SPECTRAL RELATIONS FOR THE CLOSURE OF AN UNBOUNDED OPERATOR MATRICES

**Tulkın Rasulov**

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;

rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

An operator matrix is a matrix the entries of which are linear operators [1]. Every bounded linear operator can be written as an operator matrix if the space in which it acts is decomposed in two or more components. For an unbounded linear operator  $\mathcal{A}$ , its domain need not be decomposable as direct sum of subspaces and hence it is an additional assumption that  $\mathcal{A}$  has an operator matrix representation. If the entries of an operator matrix are densely defined and closable, this need not be true for the operator matrix. Moreover, if an operator matrix is closable, its closure need not have an operator matrix representation anymore.

The numerical range is an important tool in the spectral analysis of bounded and unbounded linear operators in Hilbert spaces. Let  $\mathcal{H}$  be a complex Hilbert space and let  $\mathcal{A}$  be a linear operator in  $\mathcal{H}$  with domain  $D(\mathcal{A})$ . Then the numerical range of  $\mathcal{A}$  is the set

$$W(\mathcal{A}):= \{(\mathcal{A}f, f) : f \in D(\mathcal{A}), \|f\|=1\}.$$

By the well-known Toeplitz-Hausdorff theorem, the numerical range is a convex subset of  $\mathbb{C}$  (see [2, Theorem V.3.1]) and it satisfies the so-called spectral inclusion property  $\sigma_p(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$  for the point spectrum  $\sigma_p(\mathcal{A})$  (or set of eigenvalues) of  $\mathcal{A}$ . For the inclusion of the spectrum, an additional condition is required: if  $\mathcal{A}$  is closed, then  $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W(\mathcal{A})}$  holds if every component of  $\mathbb{C} \setminus W(\mathcal{A})$  contains at least one point of the resolvent set  $\rho(\mathcal{A})$  of  $\mathcal{A}$  (see [2, Theorem V.3.2]).

In the present note we discuss the spectral inclusion property for closure of an unbounded block operator matrices.

We remind some definitions and facts from [2]. Let  $E$  and  $F$  be Hilbert spaces. A linear operator  $T$  from  $E$  to  $F$  with domain  $D(T)$  is called closed if its graph  $G(T):=\{(x, Tx) : x \in D(T)\}$  is a closed subspace of  $E \times F$  and closable if the closure  $\overline{G(T)}$  of its

graph is a graph; in this case, the operator  $\overline{T}$  with  $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$  is called the closure of  $T$ . Note that a bounded linear operator  $T$  is closed if and only if its domain  $D(T)$  is closed; in particular, an everywhere defined bounded linear operator is closed. Conversely, the closed graph theorem says that an everywhere defined closed linear operator is bounded.

Let  $T$  be a closable linear operator in a Hilbert space  $E$ . The resolvent set and the spectrum of  $T$  are defined as

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ is injective}, (T - \lambda)^{-1} \in L(E)\};$$

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T),$$

and the point spectrum, continuous spectrum, and residual spectrum as

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ is not injective}\};$$

$$\sigma_{\text{cont}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ is injective}, \overline{R(T - \lambda)} = E, R(T - \lambda) \neq E\};$$

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ is injective}, \overline{R(T - \lambda)} \neq E\}.$$

Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  and  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$  be Hilbert spaces. For  $i = 1, \dots, n$  by  $(\cdot, \cdot)_i$  and  $\|\cdot\|_i$  we denote the scalar product and corresponding norm in  $\mathcal{H}_i$ . Let  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  be the Euclidean product of  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ , that is,

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n, \|f\| := \sqrt{\|f_1\|_1^2 + \dots + \|f_n\|_n^2}, f = (f_1, \dots, f_n)^t \in \mathcal{H}.$$

In the Hilbert space  $\mathcal{H}$  we consider linear operators  $\mathcal{A}$  that admit an  $n \times n$  operator matrix representation,

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

in  $\mathcal{H}$ , where the entries  $A_{ij} : \mathcal{H}_j \supset D(A_{ij}) \rightarrow \mathcal{H}_i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , are densely defined closable linear operators and for which the domain of  $\mathcal{A}$ , given by

$$D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^n \left( \bigcap_{i=1}^n D(A_{ij}) \right)$$

is again dense in  $\mathcal{H}$ .

**Definition.** Set

$$\mathbb{S}^n := \{f = (f_1, \dots, f_n)^t \in D(\mathcal{A}), \|f_j\|_j = 1, j = 1, \dots, n\}.$$

For  $f \in \mathbb{S}^n$  define the  $n \times n$  matrix

$$\mathcal{A}_f := ((A_{ij}f_j, f_i)_i)_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C}).$$

Then the set of eigenvalues of all these matrices,

$$W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}(\mathcal{A}) := \bigcup_{f \in \mathbb{S}^n} \sigma_p(\mathcal{A}_f),$$

is called the block numerical range of the unbounded block operator matrix (with respect to the block operator representation (1)). For a fixed decomposition of  $\mathcal{H}$ , we also write

$$W^n(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}(\mathcal{A}).$$

Define

$$D_j := \bigcap_{i=1}^n D(A_{ij}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Sometimes it is more convenient to have the following, clearly equivalent, description of the block numerical range, which uses non-zero elements  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , that need not have norm one.

**Remark.** For  $f = (f_1, \dots, f_n)^t \in D(\mathcal{A})$  such that  $f_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , we set

$$\mathcal{A}_f := \left( \frac{(A_{ij}f_j, f_i)_i}{\|f_i\|_i \|f_j\|_j} \right)_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$$

and

$$\begin{aligned} \Delta(f_1, \dots, f_n; \lambda) &:= \det((A_{ij}f_j, f_i)_i)_{i,j=1}^n - \lambda(\|f_1\|_1^2, \dots, \|f_n\|_n^2)^t \\ &= \|f_1\|_1^2 \dots \|f_n\|_n^2 \det(\mathcal{A}_f - \lambda I_n), \end{aligned}$$

where  $I_n$  denotes the identity matrix in  $\mathbb{C}^n$ . Then

$$\begin{aligned} W^n(\mathcal{A}) &= \bigcup_{\substack{f=(f_1,\dots,f_n)^t \\ f_j \in D_j \setminus \{0\}, j=1,\dots,n}} \sigma_p(\mathcal{A}_f) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}: \exists f_j \in D_j \setminus \{0\}, j = 1, \dots, n, \det(\mathcal{A}_f - \lambda I_n) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}: \exists f_j \in D_j \setminus \{0\}, j = 1, \dots, n, \Delta(f_1, \dots, f_n; \lambda) = 0\}. \end{aligned}$$

Notice that for  $n = 1$ , the block numerical range coincides with the usual numerical range; for  $n = 2$  it coincides with the quadratic numerical range introduced in [3]; and for an  $n \times n$  matrix  $W^n(\mathcal{A})$  coincides with the spectrum of  $\mathcal{A}$ .

It is easy to see that if  $\mathcal{A}$  is a lower or upper tridiagonal matrix, then

$$W^n(\mathcal{A}) = W(A_{11}) \cup \dots \cup W(A_{nn}).$$

One can show that if  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ , then  $W^n(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$ .

It is also known that the block numerical range is contained in the numerical range  $W^n(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$ .

The approximate point spectrum of a linear operator  $\mathcal{A}$  is defined as

$$\sigma_{app}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (f^{(v)})_1^\infty \subset D(\mathcal{A}), \|f^{(v)}\| = 1, (\mathcal{A} - \lambda)f^{(v)} \rightarrow 0, v \rightarrow \infty\}.$$

One of the most important features of the numerical range of a linear operator  $\mathcal{A}$  is the spectral inclusion property

$$\sigma_p(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A}), \quad \sigma_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W(\mathcal{A})}.$$

**Definition.** For a block operator matrix  $\mathcal{A}$  as in (1) we define the *diagonal part*  $\mathcal{T}$  and the *off-diagonal part*  $\mathcal{S}$  by

$$\mathcal{T} := \text{diag } (A_{11}, \dots, A_{nn}), \quad \mathcal{S} := \mathcal{A} - \mathcal{T},$$

and we call  $\mathcal{A}$  *diagonally dominant of order  $\delta_S$*  if  $\mathcal{S}$  is  $\mathcal{T}$ -bounded with  $\mathcal{T}$ -bound  $\delta_S$ .

We note that if  $\mathcal{A}$  is diagonally dominant of order  $\delta_S < 1$ , then  $\mathcal{S}$  is  $\mathcal{A}$ -bounded with  $\mathcal{A}$  bound  $\leq \delta_S/(1 - \delta_S)$ .

In the following theorem we establish these spectral inclusions for the block numerical range of the closure of the unbounded  $n \times n$  block operator matrices  $\mathcal{A}$ .

**Theorem 1.** *If  $\mathcal{A}$  is a diagonally dominant  $n \times n$  operator matrix of order 0, then*

$$\sigma_p(\overline{\mathcal{A}}) \subset \overline{W^n(\mathcal{A})}, \quad \sigma_{app}(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{W^n(\mathcal{A})}.$$

In the proof of these relations we use the relations

$$\sigma_p(\overline{\mathcal{A}}) \subset \sigma_{app}(\mathcal{A}), \quad \sigma_{app}(\overline{\mathcal{A}}) = \sigma_{app}(\mathcal{A})$$

and spectral inclusion property [4] for  $\mathcal{A}$ .

#### References

1. C.Tretter. Spectral theory of block operator matrices and applications. Imperial College Press, 2008.
2. T.Kato. Perturbation theory for linear operators. Classics Math., Springer, Berlin, 1995, reprint of the 1980 edition.

3. H.Langer, A.S.Markus, V.I.Matsaev, C.Tretter. A new concept for block operator matrices: The quadratic numerical range. Linear Algebra Appl., **330** (2001), pp. 89–112.

4. T.H.Rasulov, C.Tretter. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Rocky Mountain J. Math., 2018, No. 1, 279–324.

УДК 517.938

## ON DYNAMICAL SYSTEMS OF A RATIONAL FUNCTION

**U. A. Rozikov, E. T. Aliev**

Let  $f$  be a function on a topological space  $X$ . Denote  $f^n(x)$ , meaning  $f$  is applied to  $x \in X$  iteratively  $n$  times.

The point  $x \in X$  is called a fixed point for  $f$  if  $f(x) = x$ . The point  $x \in X$  is a periodic point of period  $m$  for  $f$  if  $f^m(x) = x$ . The least positive  $m$  for which  $f^m(x) = x$  is called the prime period of  $x$ . We denote the set of all periodic points of period  $m$  by  $\text{Per}_m(f)$ , and the set of all fixed points by  $\text{Fix}(f)$ . For given topological space  $X$ ,  $x^{(0)} \in X$  and  $f : X \rightarrow X$  the discrete-time dynamical system is defined as

$$x^{(0)}, x^{(1)} = f(x^{(0)}), x^{(2)} = f^2(x^{(0)}), x^{(3)} = f^3(x^{(0)}), \dots \quad (1)$$

For a given dynamical system one has to describe (see [2]) the set of limit points of  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^\infty$  for arbitrary given  $x^{(0)}$ .

We consider a real dynamical system associated with the function  $f : R \rightarrow R$  defined by

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad a, b, c \in R, \quad b \neq 0, \quad ab - c \neq 0, \quad x \neq \hat{x} = -\frac{c}{b}. \quad (2)$$

See [1] for the theory of dynamical systems generated by rational functions.

**Lemma 1.** *The function  $f(x)$  given by (2) is invertible on  $R \setminus \{\hat{x}\}$ .*

Introduce the set of ‘bad’ points for  $f$ :

$$P = \{x \in R : \exists n \in N \cup \{0\}, f^n(x) = \hat{x}\}, \quad (3)$$

Using Lemma 1 we get

$$P = \{f^{-n}(\hat{x}) : n \in N \cup \{0\}\}. \quad (4)$$

If  $(c-1)^2 + 4ab \geq 0$  we define

$$x_1 = \frac{1-c+\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2b}, \quad x_2 = \frac{1-c-\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2b}. \quad (5)$$

Note that the set of fixed points of the function (2) is

$$\text{Fix}(f) = \{x : f(x) = x\} = \begin{cases} \{x_1, x_2\}, & \text{if } (c-1)^2 + 4ab > 0 \\ \{x_1\}, & \text{if } (c-1)^2 + 4ab = 0 \\ \emptyset, & \text{if } (c-1)^2 + 4ab < 0. \end{cases}$$

To study dynamical system (1) for (2) we use the following known formula for  $f^n(x)$ ,  $n \geq 1$ :

$$f^n(x) = \frac{1}{b} + \frac{ab-c}{b} \cdot \begin{cases} \frac{(bx-1+\alpha)\alpha^{n-1} - (bx-1+\beta)\beta^{n-1}}{(bx-1+\alpha)\alpha^n - (bx-1+\beta)\beta^n}, & \text{if } \alpha \neq \beta \\ \frac{(bx-1)(n-1)+n\alpha}{\alpha[(bx-1)n+(n+1)\alpha]}, & \text{if } \alpha = \beta, \end{cases} \quad (6)$$

where

$$\alpha \equiv \alpha(a, b, c) = \frac{1+c+\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2}, \quad \beta \equiv \beta(a, b, c) = \frac{1+c-\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2}. \quad (7)$$

For  $q \geq 1$  denote

$$K_q \equiv K_q(a, b, c) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{q-j-1} \beta^j.$$

Let us give some examples of  $K_q$ :

$$K_q \equiv K_q(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = 1 \\ 1+c & \text{if } q = 2 \\ 1+c+c^2+ab & \text{if } q = 3 \\ (1+c)(1+2ab+c^2) & \text{if } q = 4. \end{cases}$$

The following theorems give complete answer to the main problem:

**Theorem 1.** Let function  $f$  be given by parameters  $(a, b, c) \in R^3$  satisfying (2).

- If  $K_q(a, b, c) \neq 0$  then  $\text{Per}_q(f) \setminus \text{Fix}(f) = \emptyset$ .
- If  $K_q(a, b, c) = 0$  then any  $x \in R \setminus P$  is  $q$ -periodic, i.e.,  $\text{Per}_q(f) = R \setminus P$ .

Denote

$$\tilde{K}_q = \{(a,b,c) \in R^3 : K_q(a,b,c) = 0\}.$$

$$\tilde{K} = R^3 \setminus \bigcup_{q=2}^{+\infty} \tilde{K}_q.$$

**Theorem 2.** Let function  $f$  be given by parameters  $(a,b,c) \in \tilde{K}$  satisfying (2). Then following equalities hold:

1) If  $(c-1)^2 + 4ab > 0$  then for any  $x \in R \setminus (\text{Fix}(f) \cup P)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \begin{cases} x_2, & \text{if } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \\ x_1, & \text{if } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > 1. \end{cases}$$

2) If  $(c-1)^2 + 4ab = 0$  then for any  $x \in R \setminus (\text{Fix}(f) \cup P)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_1 = \frac{1-c}{2b}.$$

3) If  $(c-1)^2 + 4ab < 0$  then for any  $x \in R \setminus (\text{Fix}(f) \cup P)$  the trajectory  $\{f^n(x)\}_{n \geq 1}$

is dense in  $R$ .

## REFERENCES

1. A.F. Beardon, *Iteration of rational functions. Complex analytic dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, 132. Springer-Verlag, New York, 1991.
2. U.A. Rozikov, *An introduction to mathematical billiards*, World Sci. Publ. Singapore. 2019, 224 pp.

**РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО БИСИНГУЛЯРНОГО  
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ  $H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$**

**Absalamov T., Fayzullayeva B., O'ktamova S.**

Самаркандский Государственный университет

Методом последовательных приближений доказана разрешимость нелинейного бисингулярного интегрального уравнения

$$u(x_1, x_2) = \lambda \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{u(s_1, s_2)}{(s_1 - x_1)(s_2 - x_2)} ds_1 ds_2 \quad (1)$$

в  $H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$  [1], где функция  $f(s_1, s_2, u)$  определена на  $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \times (-\infty, +\infty)$ , а  $\lambda$  - действительный параметр.

**Лемма 1.** Пусть функция  $f(s_1, s_2, u)$  удовлетворяет условиям:

1. Для почти всех  $s_1 \in (a_1, a_2)$   $s_2 \in (b_1, b_2)$  и при любых

$u_1, u_2 \in (-\infty, +\infty)$ ,  $|f(s_1, s_2, u_1) - f(s_1, s_2, u_2)| \leq D|u_1 - u_2|$ , где  $D$  - положительная постоянная;

2.  $f(s_1, s_2, 0) \in H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$

Тогда:

а) оператор  $(fu)(s_1, s_2) = f(s_1, s_2, u(s_1, s_2))$  действует в  $H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$

в) при любых  $u_1, u_2 \in H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$ ,  $\|fu_1 - fu_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \leq$

$D\|u_1 - u_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}}$

Рассмотрим следующие операторы

$$(Bu)(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{f(s_1, s_2, u(s_1, s_2))}{(s_1 - x_1)(s_2 - x_2)} ds_1 ds_2$$

$$(Av)(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{v(s_1, s_2)}{(s_1 - x_1)(s_2 - x_2)} ds_1 ds_2$$

**Лемма 2.** Пусть функция  $f(s_1, s_2, u)$  удовлетворяет условия 1 и 2 леммы.

Тогда:

а)  $B: H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2} \rightarrow H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$

в) при любых  $u_1, u_2 \in H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$  имеет место неравенство:

$$\|Bu_1 - Bu_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \leq D\|A\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \|u_1 - u_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}}$$

### Доказательство.

Справедливость первый части леммы следует из леммы 1 и теоремы [1] об инвариантности  $H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$  относительно бисингулярного оператора А.

Докажем вторую часть леммы. Учитывая лемму 1 и равенство  $Bu = Afu$ , где

$$\begin{aligned}
\|Bu_1 - Bu_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} &= \|Af u_1 - Af u_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \\
&\leq \|A\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \|f u_1 - f u_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \\
&\leq D \|A\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}} \|u_1 - u_2\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}}
\end{aligned}$$

Из леммы 2 и принципа сжатых отображений вытекает

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(s_1, s_2, u)$  удовлетворяет условиям I и 2 леммы 1. Тогда, если

$$|\lambda| < \frac{1}{D \|A\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}}} ,$$

то уравнение (1) имеет единственное решение в  $H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$  и это решение можно найти методом последовательных приближений, начиная с любого элемента  $H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$

Пользуясь теоремой об ограниченности оператора  $A$  ([2], [3]) в  $L_p(\rho)$  доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(s_1, s_2, u)$  удовлетворяет условию 1 из леммы. 1 и  $f(s_1, s_2, 0) \in H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}$

Тогда, если

$$|\lambda| < \frac{1}{D \|A\|_{H_{\varphi_1\psi_1}^{p,a_1} + H_{\varphi_2\psi_2}^{p,a_2}}}$$

,

то уравнение (1) имеет единственное решение в  $L_p(\rho)$  и это решение можно найти методом последовательных приближений, начиная с любого элемента  $L_p(\rho)$ . Последовательные приближения сходятся в метрике  $L_p(\rho)$ .

### Литература

1. Absalamov T., Fayzullayeva B., O'ktamova S. Некоторые свойства бисингулярного интеграла с локально суммируемой плотностью и его приложения. Slovak international scientific journal. 73, 2023, 3-7.
2. Джвершайшили А. Г. О кратных интегралах типа Коши . Труд Тбл. Госуниверситет т. 84, 1961, с .409-424
3. Fefferman R.,  $A_p$  weights and singular integrals, Amer.J.Math.-M., 1988, 110, 5, p.975-987.

**Об одной оценки функции Карлемана для бигармонических функций,  
определенных в  $D \subset R^3$ .**

Ашуррова Зебинисо Рахимовна

доц. кафедры «Точных наук» Уз-Фин.ПИ, кандидат физика математических наук  
zeb1957niso@gmail.com .

Ибрагимов Анвар

доц. кафедры «Точных наук» Уз-Фин.ПИ, кандидат физика математических наук доц.

**Аннотация:** В работе оценивается нормальная производная функции Карлемана построенная Жураевой У.Ю для полигармонических функций второго порядка .

**Ключевые слова:** Функция Карлемана, полигармонические функции, частные производные, нормальные производные,

В теории функций известна следующая задача: если гармоническая функция и ее нормальная производная ограничены на границе  $D$  и  $u(P)$  неограничена внутри, то при  $P \rightarrow \infty$  она должна расти внутри  $D$  со скоростью, не меньшей некоторой предельной, оценить эту предельную скорость роста.

Е.М.Ландис в книге -Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва, - поставил задачу в виде - Пусть в цилиндре  $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 < 1$  расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в оба стороны – все равно) в граница  $\Gamma$  этой области как угодно гладка .

Пусть в области определено решение и уравнение  $\Delta\Delta u = 0$  как угодно гладкое вплоть до границы и  $u|_{\Gamma} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ . Следует ли отсюда, что неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность). [3,55 стр],

Первый результат в этом направлении в 1926 году получил Т.Карлеман (для класса ограниченных функций в области  $D$  одного специального вида [1,116-стр].

Эта идея получения формулы Карлемана с помощью аппроксимации ядра Коши может быть представлена с помощью введенного М.М.Лаврентьевым понятия функции Карлемана.

Задачи Коши для уравнения Лапласа из-за неустойчивости ее решения, исследования Т.Карлемана в течение долгого времени не имело продолжения. Однако неустойчивые задачи, часто возникали в приложениях . А. Н. Тихонов показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения т.е. задача становится устойчивой. Используя идеи М.М.Лаврентьева для гармонических функций а также для полигармонических функций заланных в ограниченных областях эту задачу Шароф Ярмухамедович Ярмухамедов, в работах впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа- так называемая в настоящей времена «функции Грина-Ярмухамедова» , исчезающего в пределе вместе со своими производными любого порядка вне произвольного фиксированного конуса получил интегральное представление и теоремы единственности и ряд интересных свойств функций. [4,162стр],[5,301-стр]

Использовав разного видов ядро Ярмухамедова в 2009 году Н.Ю. Жураева доказывая интегральное представление для бигармонических функций получила некоторые свойства (оценка роста, формула Карлемана) бигармонических функций бигармонических функций определенного класса для неограниченных областей, лежащих внутри слоя в  $R^3$ . Кроме того, получила аналог формулы Карлемана для неограниченных областей, лежащие внутри слоя в  $R^m$   $m$  -мерное вещественное евклидово пространства получила регуляризацию и разрешимость задачи Коши для полигармонических уравнений порядка  $n$  в некоторых неограниченных областях (при произвольных нечетных  $m$  и четных  $m$  когда  $2n < m$ ) [10]-[12]. Позже совместно с У Жураевой в 2009 году эту задачу для некоторых неограниченных областях (при произвольных четных  $m$  когда  $2n \geq m$ ). [13]-[15].

В 1992 году З.Р. Ашуррова доказала:  $D$ -неограниченная область, лежащая  $\{y_m > 0\}$ , с границей  $\partial D$  -любая конечная часть удовлетворяет условию Ляпунова и кроме того, предположим что граница вне некоторого круга задана уравнением

$\partial D, y_m = f(y_1, \dots, y_{m-1})$  непрерывная функция, имеющая ограниченные частные производные первого порядка .

**Теорема.** Пусть для функции  $u(y) \in B_\rho(D)$  в любой точке, где  $D$ -полупространство  $y_m > 0$  выполняется неравенство:

$$u(y') = 0, \frac{\partial u(y')}{\partial n} \rightarrow 0, y' \rightarrow \infty. \text{ Если } \rho < 1$$

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi(y, x) \frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}} ds$$

$$\text{где } \Phi(y, x) = \begin{cases} -\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r^2}, & \text{при } m = 2 \\ \frac{x_m}{r_1^m} \left(1 + \frac{x_m}{y_m}\right) + C \left(\frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r^{m-2}}\right), & \text{при } m > 2 \end{cases}$$

Из которой следует , что  $u(x) \equiv 0$

Теорема . Пусть  $D$ -неограниченная односвязная область, лежащая внутри слоя  $0 \leq y_m \leq \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$  в граница  $\partial D$  -поверхность любая конечная часть удовлетворяет условию Ляпунова и кроме того, пусть вне некоторого шара граница  $\partial D$  задается с помощью конечного числа однозначных функций имеющие частное производные первого порядка. Если  $u(y) \in A_\rho(D)$  выполнено условию,  $\forall y \in \partial D$

$$u(y) = 0, \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right| < |y|^\mu, \mu > 0,$$

тогда  $\forall x \in D \ u(x) = 0$ .

В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области  $D \subset R^3$ , где  $\partial D = \{y: y = (y_1, y_2, y_3), y_3 = 0\}$  .

Функции  $\varphi_\sigma(y, x)$  при  $s > 0, \sigma \geq 0$  определим следующими равенствами:

$$c_3 \varphi_\sigma(y, x) K(x_3) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \frac{K(i\sqrt{s+u^2} + y_3)}{i\sqrt{s+u^2} + y_3 - x_3} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad (1)$$

$$K(\omega) = \frac{\exp[-\sigma(\omega+1)^{\rho_1}]}{(\omega+x_3)^2} \quad \text{где, } c_0 \in R, \omega = i\sqrt{u^2 + s} + y_3, \sigma > 0, y_3 > 0, 0 < \rho_1 < 1.$$

и с помощью его построим функцию Карлемана  $\Phi_\sigma(y, x)$ .

**Теорема.** Для функции  $\varphi_\sigma(y, x)$ , имеет место неравенство

$$\frac{\partial \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_i} \leq \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{\alpha^2 r} \right) \frac{c_0}{r_1^4 \exp(\sigma A)}, i = 1, 2$$

$$\frac{\partial \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_3} \leq \left( \frac{1}{\alpha r^3} + \frac{1}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2 r} \right) \frac{c_0}{r_1^4 \exp(\sigma A)}$$

Доказательство: так как

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(y, x) &= \frac{c_0}{K(x_3)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{\exp\left(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1}\right)}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2} \frac{du}{\sqrt{u^2+s}} = \\ &= \frac{c_0}{K(x_2)} \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1}\right)}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2} du = \\ &= c_0 \operatorname{Im} \varphi_1(y, x, \sigma) \end{aligned}$$

для получения этого результата нам придется оценивать рост частных производных для  $\varphi_1(y, x, \sigma)$  где

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, x, \sigma) &= \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1}\right)}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2} du \\ \frac{\partial \varphi_1(y, x, \sigma)}{\partial y_1} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\exp\left(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1}\right)}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2} \right) du \end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \phi(y, x) &= \exp\left(-\sigma(i\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1}\right) \\ \varphi(y, x) &= (\sqrt{u^2+s})^{-1} \\ \chi(y, x) &= (i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-1} \\ \psi(y, x) &= (i\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^{-2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(y, x, \sigma)}{\partial y_k} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi(y, x)\varphi(y, x)\psi(y, x)\chi(y, x))}{\partial y_k} &= \varphi(y, x)\psi(y, x)\chi(y, x)\frac{\partial\phi(y, x)}{\partial y_k} + \phi(y, x)\psi(y, x)\chi(y, x)\frac{\partial\varphi(y, x)}{\partial y_k} + \\ &\quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$+ \phi(y, x)\varphi(y, x)\chi(y, x)\frac{\partial\psi(y, x)}{\partial y_k} + \phi(y, x)\varphi(y, x)\psi(y, x)\frac{\partial\chi(y, x)}{\partial y_k}$$

$$\text{И если } \frac{\partial \varphi_1(y, x, \sigma)}{\partial y_k} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{\exp(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1})}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(i\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2 \sqrt{u^2+s}} \right) du \quad k = 1, 2$$

$$\frac{\partial \varphi_1(y, x, \sigma)}{\partial y_3} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \frac{\exp(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1})}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(i\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2 \sqrt{u^2+s}} \right) du$$

$$A_1 = A_1^k + A_1^3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_k} (i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-1} &= -(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-2} \frac{\partial}{\partial y_k} \sqrt{u^2+s} = \\ &= -(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-2} \frac{y_k - x_k}{\sqrt{u^2+s}} \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

$$A_1^k = \int_0^\infty \frac{\exp(-\sigma(\sqrt{u^2+s} + y_3 + 1)^{\rho_1}) \frac{\partial}{\partial y_k} (i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-1}}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2 \sqrt{u^2+s}} du$$

$$\begin{aligned} |A_1^k| &\leq \frac{c_0}{\exp(\sigma A)} \left| \int_0^\infty \frac{(y_k - x_k) du}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^2 (i\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2 (u^2+s)} \right| \leq \\ &\leq \frac{c_0}{\exp(\sigma A)} \left| \int_0^\infty \frac{1}{(u^2+s)(u^2+r^2)} \frac{1}{(u^2+r_1^2)^2} \frac{(y_k - x_k) du}{(u^2+r^2)} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2 r^2 r_1^4} \frac{c_0}{\exp(\sigma A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_3} (i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-1} &= -(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-2} \frac{\partial}{\partial y_3} (i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3) = \\ &= -(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)^{-2} \end{aligned}$$

Оценивая каждый из вышеприведённых интегралов получаем утверждение теоремы.

## Литература.

1. Carleman T. Les functions quassianalytiques. Paris 1926, 11бр.
2. Евграфов М. А., Чегис И. А Обобщенные теоремы типа Фрагмена-Линделефа на гармонические функции в пространстве. ДАН СССР, Т.134, № 2, 1960, с.259-262.
3. Е.М.Ландис. -Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва, 1971 г.55 стр.
4. Ярмухамедов.Ш.Я. Задача Коши для полигармонического уравнения. Доклады РАН 2003 том 388 ст 162-165.
5. Ярмухамедов Ш.Я. Жураева Н.Ю. Задача Коши для полигармонических функций. Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики. Труды международной научной конференции. Ташкент 16-19 ноября 2004г. с.301-302.
6. З. Ашуррова. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990, №5. 6-8 стр .
7. Ашуррова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, International Journal of Innovative Research , 2021,10, C.84–90, Impact Factor 7.512.
8. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews, India, 2020 ,7, C.371–378, DOI : 10.31938.jcr.07.06.62.
9. Ashurova Zebiniso Raximovna, Juraeva Nodira Yunusovna, Juraeva Umidakhon Yunusalievna. «Функция Карлемана для полигармонических функций определенных в некоторых областях лежащих в некоторых четном n-мерном евклидовом пространстве». Операторные алгебры и смежные проблемы журнал, 2012, с.100-101.
10. N.Yu. Juraeva Growing polyharmonic functions and task Cauchy of some class.Узбекский математический журнал. №.2, 2009, с.70-74.
11. Н.Ю.Жураева Об интегральном представлении полигармонических функций. Ташкент. ДАН РУз № 3, 2008г. с.18-20.

12. Н.Ю. Жураева., Жураева У.Ю, Саидов У.М Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в  $m$ -мерном четном евклидовом пространстве, *Uzbek Mathematical Journal*, 2011, №3, стр. 92–97.
13. У.Ю. Жураева Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных. *Известия вузов. Математика* 2022, №10.с 42-65.<https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm>, e-mail: izvuz. Matem@kpfu.ru
14. Jurayeva. U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems. *Uzbek Mathematical Journal*, 2022, Volume 66, Issue 3. pp 54-61, (№3, 54–61). DOI:10. 29229/uzmj. 2022-3-7 .
15. Жураева У.Ю. Некоторые свойства функции Карлемана. Наманган Давлат Университети Илмий ахборотномаси. 2022 йил 2 сон.

## **СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ШРЕДИНГЕРА, АССОЦИИРОВАННОГО С $s-d$ ОБМЕННОЙ МОДЕЛЬЮ НА РЕШЕТКЕ**

**Болтаев А.Т.<sup>1</sup>, Кудратова Д.<sup>2</sup>**

Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз Самаркандского отделения,  
Самарканд, Узбекистан,  
atboltaev@mail.ru

Магистрантка Самаркандского Государственного Университета, Самарканд,  
Узбекистан,  
kudratovadurdona99@gmail.com

Пусть  $Z^3$ - трехмерная кубическая решетка и  $l^2(Z^3)$  гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций определенных на  $Z^3$  и  $k \in T^3 = (-\pi, \pi]^3$  - трехмерный тор.

В работе рассматривается двухчастичный оператор  $H_A(k), k \in T^3$  отвечающий оператору энергии  $s-d$  обменной модели, которая содержит спин-спиновое взаимодействие между локализованными спинами и электронами проводимости с константой связи  $s-d$  (обменным параметром)  $A < 0$ . Данная обменная модель, которая является решетчатым аналогом модели Ли – простейшей модели в

квантовой теории поля [1], на строгом математическом уровне описана в [2], а в [3] обсуждены физические результаты вытекающие из этой модели.

Дискретный оператор  $H_A(k)$ ,  $k \in T^3$  системы двух частиц, ассоциированный с  $s-d$  обменной моделью, при фиксированном квазимпульсе действует в  $\ell^2(Z^3)$  по формуле  $H_A(k) = H_0(k) + \frac{A}{2}V$ ,  $k \in T^3$ , где  $H_0(k)$ ,  $k \in Z^3$ , оператор типа свертки,

задающийся как  $(H_0(k)f)(x) = \sum_{y \in Z^3} \varepsilon_k(x-y)f(y)$ ,  $f \in \ell^2(Z^3)$ , где

$\varepsilon_k(x) = \frac{1}{e}\varepsilon(x) + \frac{1}{m}e^{-i(k,x)}\varepsilon(-x) - AS\delta_{x0}$ . Здесь  $e > 0$  и  $m > 0$  массы электрона и

магнона ( $e \neq m$ ),  $S > 0$  и  $\delta_{x0}$  – символ Кронекера,  $(k, x) = \sum_{i=1}^3 k_i x_i$ ,  $k \in T^3$ ,  $x \in Z^3$  и

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 6, & \text{если } |x| = 0 \\ -1, & \text{если } |x| = 1, \quad |x| = |x_1| + |x_2| + |x_3|. \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

Оператор  $V$  определяется как  $(Vf)(x) = v(x)f(x)$ ,  $f \in \ell^2(Z^3)$ , где  $v(x) = \delta_{x0}$ .

Оператор возмущения  $V$  компактный, тогда из теоремы Г. Вейля [4] существенный спектр оператора  $H_A(k)$  совпадает с существенным спектром оператора  $H_0(k)$ , т.е.

$$\sigma_{ess}(H_A(k)) = \sigma_{ess}(H_0(k)) = \sigma(H_A(k)) = [\hat{\varepsilon}_{min}(k), \hat{\varepsilon}_{max}(k)],$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{min}(k) := \min_{q \in T^3} \hat{\varepsilon}_k(q) = 2 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{e+m}{em} - \frac{1}{em} \sqrt{e^2 + m^2 + 2em \cos k_i} \right] - AS,$$

$$\hat{\varepsilon}_{max}(k) := \max_{q \in T^3} \hat{\varepsilon}_k(q) = 2 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{e+m}{em} + \frac{1}{em} \sqrt{e^2 + m^2 + 2em \cos k_i} \right] - AS.$$

Здесь функция  $\hat{\varepsilon}_k(\cdot)$  является преобразованием Фурье функции  $\varepsilon_k(\cdot)$ .

Для любого  $k \in T^3$  определим функцию  $a(k;\cdot)$ , регулярную в  $R \setminus \sigma_{ess}(H_A(k))$  следующим образом:  $a(k;\cdot) = \int_{T^3} \frac{\eta(dq)}{\varepsilon_k(q) - z}$ .

Заметим, что для любого  $k \in T^3$  интеграл

$$a(k) := \lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k)^-} a(k; z) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\eta(dq)}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)}$$

существует и определяет положительную голоморфную функцию в  $\mathbb{T}^3$ .

Для любого  $k \in \mathbb{T}^3$  введем обозначение:

$$A_0(k) := \frac{-2\mu(k)}{2S + a(k)\mu(k)} < 0,$$

где  $\mu(k) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{e^2} - \left( C_{em}(k_i) - \frac{1}{m} \right)^2 \right]$ . Здесь  $C_{em}(k_i) = \frac{1}{em} \sqrt{e^2 + m^2 + 2em \cos k_i}$ .

Введем следующие подмножества значений квазимульса  $k \in \mathbb{T}^3$  для фиксированного значения обменного взаимодействия  $A < 0$ :

$$\begin{aligned} B^<(A) &= \{k \in \mathbb{T}^3 : A < A_0(k)\}, \\ B^=(A) &= \{k \in \mathbb{T}^3 : A = A_0(k)\}, \\ B^>(A) &= \{k \in \mathbb{T}^3 : A > A_0(k)\}. \end{aligned}$$

**Теорема.** (i) Если  $k \in B^<(A)$ , то оператор  $H_A(k)$  имеет единственное собственное значение  $z_A(k)$  на полуоси  $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ .

(ii) Если  $k \in B^>(A)$ , то оператор  $H_A(k)$  не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра  $\sigma_{ess}(H_A(k))$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А. М.Переломов. "Наука,", 1971.
2. Mogilner A.: Hamiltonians in solid state physics as multi-particle discrete Schrödinger operators: Problems and results. Advances in Soviet Mathematics **5**, 139-194 (1991).
3. Нагаев Э.Л. Физика магнитных полупроводников, Москва, изд. "Наука" 1979 г. 432 стр.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

## Об ограниченности максимальных операторов для выпуклых функций, не имеющих конечный линейный тип.

**И.А. Икромов, <sup>2</sup>А.М. Баракаев**

<sup>1</sup>Институт Математики им. В.И. Романовского АНРУз

<sup>2</sup>Самаркандинский государственный Университет

E-mail: i.ikromov@mathinst.uz, azamat1\_9@mail.ru

### Введение.

Многие задачи, связанные с понятием предельного перехода в интегралах и суммах, зависящих от параметров, в частности, с дифференцированием интеграла часто приводится к изучению различных вида "максимальных операторов". Одним из таких операторов является классический максимальный оператор Харди-Литтлвуда, который появляется при решении различных задач гармонического

анализа и математической физики. В настоящей работе мы будем иметь дело с максимальными операторами, связанными (ассоциированными) с гиперповерхностями. Основным результатом является теорема-1, в которой получена необходимое и достаточное условия ограниченности максимальных операторов в случае, когда гиперповерхность имеет изолированный нуль в начале координат.

### **Постановка задачи и формулировка основной теоремы.**

Пусть  $S$  – гладкая гиперповерхность в  $R^{n+1}$  и  $d\mu = \psi d\sigma$ , где  $d\sigma$  – индуцированная мера Лебега на  $S$  и  $\psi$  – бесконечно-гладкая неотрицательная функция с компактным носителем в  $R^{n+1}$  ( $\psi \in C_0^\infty$ ). Через  $\delta_t$  обозначим обычную евклидову гомотетию, заданную формулой  $\widehat{\delta_t}h(\xi) = \widehat{h}(t\xi)$  (см. [1]).

Рассмотрим следующий оператор усреднения

$$A_t f(x) = \int_S f(x - ty)\psi(y) d\sigma(y) = f * \delta_t(\psi d\sigma).$$

Соответствующий максимальный оператор определим соотношением:

$$Mf(x) = \sup_{t>0} |A_t f(x)|.$$

**Определение 1.** Говорят, что максимальный оператор  $M$  ограничен в  $L^p$ , если существует положительное число  $C_p$  такое, что для любой функции  $f \in C_0^\infty(R^{n+1})$ , выполняется неравенство:

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p},$$

где  $\|\cdot\|_{L^p}$  – естественная норма пространства  $L^p$ .

Стейн в своей работе [2] доказал что, если  $S = S^n$  является  $n$ -мерной сферой, центр которой совпадает с началом координат, то максимальный оператор  $Mf$  ограничен в  $L^p(R^{n+1})$  при  $p > \frac{n+1}{n}$ ,  $n \geq 2$ , т.е. справедлива оценка (2).

Отметим, что при  $p \leq \frac{n+1}{n}$  максимальный оператор  $Mf$  неограничен в  $L^p$ . При доказательстве ограниченности сферических максимальных операторов существенно используется тот факт, что гауссова кривизна сферы отлична от нуля. Задача об ограниченности максимальных операторов в  $L^p$ , связанных с гиперповерхностями, для которых гауссова кривизна обращается в нуль в некоторых точках является актуальной.

**Определение-2.** Функция  $F$  называется функцией конечного линейного типа по направлению единичного вектора  $\xi \in R^n$  в начале координат, если существует  $N \geq 2$  такое, что  $D_\xi^N F(0) \neq 0$ , где  $D_\xi^N F$  – производная функции  $F$  по направлению вектора  $\xi$  в начале координат. Если  $F$  имеет конечный линейный тип для каждого единичного  $\xi \in R^n$ , то говорят, что гиперповерхность  $S = \{x, F(x)\}$  имеет конечный линейный тип в точке  $(0, F(0))$ .

В работе [1] доказано что, если  $S$  выпуклая гиперповерхность конечного линейного типа(см. определение 2) и  $p \geq 2$ , то условие

$$d(x, T)^{-\frac{1}{p}} \in L^1_{loc}(S)$$

является необходимым и достаточным для ограниченности максимального оператора в  $L^p(R^{n+1})$ , где  $T$  – любая гиперплоскость, не проходящая через начало координат и  $d(X, T)$  – расстояние от  $x \in S$  до  $T$ . В работе [3] доказано, что если  $S \subset R^3$  – гладкая гиперповерхность, то при  $p > h \geq 2$  (где  $h(S)$  – высота гиперповерхности, введенная в классической работе А.Н. Варченко [4]), максимальный оператор ограничен.

Если  $S$  – аналитическая гиперповерхность, то при  $p \leq h$  максимальный оператор не ограничен [3]. Однако при  $p = h$  вопрос об ограниченности максимального оператора оставался открытым для бесконечно гладких гиперповерхностей.

В данной работе мы предположим, что в каждой точке хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля. Из результатов С.Д. Согги [5] следует, что такой максимальный оператор ограничен в  $L^p$  при  $p > 2$ . Однако, вопрос об ограниченности максимального оператора при  $p = 2$  остается открытым.

Приведем следующее предложение, доказательство, которого следует из аналога теоремы Г.Щульца [6] (а также см.[7])

**Предложение-1.** Допустим что  $\text{rankHess } F(0,0) = 1$ . Тогда, после замены подходящих линейных координат, функцию  $F$  в достаточно малой окрестности начала координат можно записать в следующем виде:

$$F(x, y) = b(x, y)(y - \omega(x))^2 + \varphi(x),$$

где  $b, \omega$  и  $\varphi$  – гладкие функции, и  $\omega(x) = cx^m + O(x^{m+1})$ , где  $c \neq 0$  и  $m \geq 2$ , причем  $b(0,0) \neq 0$ .

**Предложение-2.** Если дважды дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$  в окрестности нуля выпукла и  $\nabla f(0,0) = 0$ , то точка  $(0,0)$  является точкой минимума.

**Доказательство:** Сначала докажем для функции, зависящей от одного переменного, т.е. если  $z = f(x)$  – выпуклая и удовлетворяет условию  $f'(0) = 0$ , то точка  $x = 0$  единственная точка минимума. Пусть  $x > 0$ . Согласно определения выпуклости имеем:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{0}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(0).$$

После простых преобразований последнею неравенству можно записать в следующем:

$$\frac{f(x)}{2} - \frac{f(0)}{2} \geq f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0).$$

Разделив оба части на  $\frac{x}{2}$ , получим следующее неравенство:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)}{\frac{x}{2}}.$$

Применяя эту неравенству  $n$  раз имеем следующую:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n}}.$$

Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$  и учитывая что  $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq f'(0) = 0.$$

Из этого неравенства следует что  $f(x) \geq f(0)$  при  $x > 0$ . Точно также для  $x < 0$  можно доказать, что  $f(x) \geq f(0)$ . Таким образом, для всех  $x \neq 0$  доказали что  $f(x) \geq f(0)$ . Теперь при фиксированных  $x, y \neq 0$  рассмотрим функцию  $P(t) = f(tx, ty)$  от одной переменной  $t$ . Продифференцировав дважды функцию  $P(t)$  имеем следующее равенство:

$$P''(t) = \frac{\partial^2 f(tx, ty)}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(tx, ty)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f(tx, ty)}{\partial y^2} y^2.$$

Так как функция  $z = f(x, y)$  выпуклая то  $Hess z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0$ . Для

$P''(t)$  имеет место следующее равенство:

$$P''(t) = y^2 \left( \frac{\partial^2 f(tx, ty)}{\partial x^2} q^2 + 2 \frac{\partial^2 f(tx, ty)}{\partial x \partial y} q + \frac{\partial^2 f(tx, ty)}{\partial y^2} \right),$$

где  $q = \frac{x}{y}$ . Квадратный трехчлен стоящий в последней скобки неотрицательная, поскольку дискриминант  $D = 4 \left( \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = -4Hess(z) \leq 0$ , и старший коэффициент  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$ .

Это в свою очередь означает, что функция  $P(t)$  также является выпуклой.

Так как,  $P'(0) = 0$  по доказанному имеем  $P(1) \geq P(0)$  или все равно что  $f(x, y) \geq f(0, 0)$ .

Пусть нам даны поверхность  $S = \{x, y, z(x, y)\} \subset R^3$  и её касательная плоскость  $T$  в точке  $(0, 0, z(0, 0))$ . Обозначим через  $d(Y, T)$  расстояние от точки  $Y := (x, y, z(x, y))$  поверхности до ее касательной плоскости  $T$ . Более того, пусть в некоторой окрестности начала координат выпуклая поверхность  $S$  задана следующей формулой:

$$z = F(x, y) := xb(x, y) + \varphi(y) + C,$$

где  $b(x, y)$  – аналитическая функция, удовлетворяющая условиям:  $b(0, 0) = 0, b'_x(0, 0) \neq 0$ ,  $C$  – любая константа отличная от нулья и  $\varphi(y)$  есть выпуклая

функция, и ее производные всех порядков обращаются в нуль в точке 0, то есть  $\varphi^{(n)}(0) = 0$  для всех неотрицательных целых чисел  $n$ .

Далее, пусть максимальный оператор определен как в (1), где  $supp\psi \subset U \subset S$  и  $T$  её касательная плоскость в точке  $(0,0, Z(0,0))$ . Обозначим через  $d(Y, H)$  расстояние от точки  $Y := (x, y, z(x, y))$  поверхности до ее касательной плоскости  $T$ .

Исходя из теорему Щулца [6] можно доказать следующую:

**Предложение 3.** Выпуклая функция заданной формулой (4) может быть записано в виде

$$z = x^2 B(x, y) + \varphi(y) + C$$

где  $B(0,0) > 0$ .

Полученные результаты мы сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема-1.** Если функция  $\varphi$  выпуклая и при любом  $y$ , отличном от нуля, положительна; то есть  $\varphi(y) > 0$  при  $y \neq 0$  и если, кроме этого  $\varphi^{(j)}(0) = 0, \forall j \geq 0$  и  $\psi(0,0) > 0$ , то для того что бы максимальный оператор  $M$  был ограниченным в пространстве  $L^2(R^3)$  необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \ln \varphi(y) dy < +\infty.$$

### Литература

1. Iosevich A., Sawyer E. Maximal Averages over surfaces, Adv. in Math.,--1997.--132.--46.--P.119--187.
2. Stein E.M. Maximal functions.I.Spherical means, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A.--1976.--73. 7.--P.2174--2175.
3. Ikromov I. A., Kempe M., Müller D. Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in R3 and related problems of harmonic analysis, Acta Math.,—2010.—204.—P. 151–271.
4. Варченко А.Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. Функциональный анализ и его прил.,--1976.10, №3.--Стр.13--38.
5. Sogge, C. D., Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature, in Fourier Analysis and Partial Differential Equations (Miraflores de la Sierra, 1992), Stud. Adv. Math., pp. 317–323. CRC, Boca Raton, FL, --1995.
6. Schulz H. Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms//Indiana Univ. Math. J. --1999. --40.--No4.--P.1267--1275.
7. Ikromov I.A., Muller D. Fourier Restriction for Hypersurfaces in Three Dimensions and Newton Polyhedra (AM-194)//Princeton University Press.--2016.

## **Сепаратно вещественно аналитические функции двух переменных**

**Расулов Камол Карим угли**

(Инновационный и социально-экономический университет)

*rasulov.kamol@gmail.com*

**Гадаев Сохиб Абдуллевич** Докторант, Ургенчского государственного университета, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимжана, 14.

*gadayev.sokhib@gmail.com*

Известная теорема Хартогса[1] утверждает, что сепаратно-аналитическая функция является аналитической, т.е. если функция  $f(z, w)$  – двух комплексных переменных является аналитической по  $w$  при фиксированном  $z$  и аналитическая по  $z$  при фиксированном  $w$ , то она будет аналитической по совокупности переменных  $(z, w)$ . Следует отметить, что в общем случае точный аналог этой теоремы для  $\mathbb{R}$  –аналитических функций не справедлив.

Естественно возникает вопрос: Как вообще дать описание особого подмножества, на которой исходная сепаратно  $\mathbb{R}$  –аналитическая функция  $f(x, y)$  не является  $\mathbb{R}$  –аналитической? Другими словами: функция  $f(x, y)$ , определенная в открытом множестве  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  – аналитическая или нет в каком то подмножестве в  $\Omega$ , когда  $f(x, y)$   $\mathbb{R}$  – аналитическая по  $x$  для каждого фиксированного  $y$  и  $\mathbb{R}$  –аналитическая по  $y$  для каждого фиксированного  $x$ ?

Сепаратно  $\mathbb{R}$  –аналитические функции изучены в работах С.Раймонда[2], Й.Сичака[3], Й.Бочнака[4], З.Блоцкого[5]. Из работ выше указанных авторов возможно извлекать следующий результат.

**Теорема 1.** *Если  $f$  является сепаратно  $\mathbb{R}$  –аналитической функцией на  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , то существует замкнутое подмножество  $E$  в  $\Omega$  такое, что  $f$  является  $\mathbb{R}$  –аналитическим на  $\Omega \setminus E$  и две ортогональные проекции  $E$  полярные, и наоборот для любого замкнутого подмножества  $E \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$  с полярными ортогональными проекциями, существует сепаратно  $\mathbb{R}$  –аналитическая функция которая является  $\mathbb{R}$  –аналитической вне особого множества  $E$ .*

Следующий пример из работы Й.Бочнака и В.Кучарза[6] показывает, что точный аналог теоремы Хартогса для вещественно аналитических функций вообще-то будет неверным.

**Пример 1.** Функция  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  определенная в следующей виде

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

принадлежит классу  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  и является сепаратно  $\mathbb{R}$  –аналитической, но не является  $\mathbb{R}$  –аналитической по совокупности переменных в точке  $(0,0)$ .

Аналогичные вопросы для случая, когда функции двух переменных, являются действительно аналитическими на аналитических кривых, изучены в совместной работе Е.Биерстона, П.Милмана и А.Парусинского[7]. Здесь также построен пример функции двух переменных  $f(x_1, x_2)$ , сужение которой на любую аналитическую кривую является  $\mathbb{R}$  –аналитической, однако  $f(x_1, x_2)$  не является даже непрерывной функцией.

Недавно А.Садуллаев[8] доказал аналог теоремы Форелли для  $\mathbb{R}$  –аналитических функций. В работах С.Имомкулова[9] и А.Атамуратова, Ж.Тишабаева, Т.Туйчиева[10] был доказан аналог леммы Хартогса для  $\mathbb{R}$  –аналитических функций о  $\mathbb{R}$  –аналитическом продолжении вдоль фиксированного направления. С помощью разработанных, в этих работах, методов мы получили следующий более общий результат.

**Теорема 2.** *Пусть даны две интервалы  $D = \{|x| < r_1\} \subset \mathbb{R}_x$   $G = \{|y| < r_2\} \subset \mathbb{R}_y$  и регулярные компактные подмножества  $E \subset D$ ,  $F \subset G$ . Предположим, что функция  $f(x, y)$  первоначально определенная на множестве  $E \times F$ , имеет следующие свойства:*

- a) при каждом фиксированном  $y^0 \in F$ , функция  $f(x, y^0)$   $\mathbb{R}$  –аналитически продолжается в  $D$ ,
- b) при каждом фиксированном  $x^0 \in E$ , функция  $f(x^0, y)$   $\mathbb{R}$  –аналитически продолжается в  $G$ .

Тогда будем говорить, что функция  $f(x, y)$  определяет сепаратно  $\mathbb{R}$  –аналитическую функцию на множестве  $\Omega = (D \times F) \cup (E \times G)$  и  $f(x, y)$

$\mathbb{R}$  –аналитически по совокупности переменных продолжается в некоторой области  $\widehat{\Omega} \subset D \times G$  такое, что  $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$  –полярно.

### Литература

1. Shabat B.V. *Introduction to complex analysis, Part II. Functions of several variables*, Providence, RI: AMS, 1992.
2. Raymond J.S. *Fonctions séparément analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40(1990), 79–101
3. Siciak J. *Singular sets of separately analytic functions*, Colloq. Math. 60/61(1990), 281–290
4. Bochnak J. *Analytic functions in Banach space*, Studia Mathematica, 35(1970), 273–292
5. Blocki Z. *Singular sets of separately analytic functions*, Ann. Polon. Math. LVI. 2(1992), 219–225
6. Bochnak J. and Kucharz W. *Algebraic surfaces determine analyticity of functions*, Arch. Math. 118(2022), 57–63
7. Bierstone E., Milman P. D. and Parusi’nski A. *A function which is arc-analytic but not continuous*, Proc. Amer. Math. Soc. 113(1991), 419–423
8. Sadullaev A. *Real analyticity of a  $\mathbb{C}^\infty$  – germ at an origin*, Annales Polonici Mathematici 128(2022), 87–97
9. Imomkulov S.A. *Continuation of  $\mathbb{R}$  –analytic functions parallel lines*, TWMS J. Pure Appl. Math. 14( 2023), 120-124
10. Atamuratov A.A., Tishabaev J.K. and Tuychiev T.T. *An analogue of the Hartogs lemma for  $\mathbb{R}$  –analytic functions*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 15(2)(2022), 194-198

### Детерминант и собственное значение некоторого частично интегрального оператора с вырожденным ядром

**Т.М.Тұхтамуродова**

Самосопряженные частично интегральные операторы возникают в теории дискретных операторов Шредингера ([1–5]). В настоящей работе рассматривается самосопряженный частично интегральный оператор  $H$  типа Фредгольма, который возникает в теории дискретных операторов Шредингера ([6, 7]).

Пусть  $\Omega_1 = [a, b]^{\nu_1}$  и  $\Omega_2 = [c, d]^{\nu_2}$  ( $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ ). В гильбертовом пространстве  $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$  рассмотрим следующий самосопряженный частично интегральный оператор (ЧИО)

$$H = H_0 - (T_1 + T_2). \quad (1)$$

Здесь действия операторов  $H_0$ ,  $T_1$  и  $T_2$  определяются по формулам

$$H_0 f(x, y) = k_0(x, y) f(x, y), \quad f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_1 f(x, y) = \int_{\Omega_1} \left( \gamma_0 \varphi_1(x) \overline{\varphi_1(s)} + \gamma \varphi_2(x) \overline{\varphi_2(s)} \right) f(s, y) d\mu_1(s), \gamma > 0, \gamma_0 \geq 0$$

$$T_2 f(x, y) = \int_{\Omega_2} \left( \mu_0 \psi_1(y) \overline{\psi_1(t)} + \mu \psi_2(y) \overline{\psi_2(t)} \right) f(x, t) d\mu_2(t), \mu > 0, \mu_0 \geq 0$$

где  $k_0(x, y)$  – неотрицательная непрерывная функция на  $\Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\varphi_1(\cdot)$  и  $\varphi_2(\cdot)$ ,  $\psi_1(\cdot)$  и  $\psi_2(\cdot)$  – взаимно ортонормированные непрерывные функции на  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ . т.е.

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad (\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

и  $\mu_j(\cdot)$  – мера Лебега на  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ . Таким образом оператор  $H$  (1) зависит от четырех параметров  $\gamma$ ,  $\gamma_0$ ,  $\mu_0$  и  $\mu$ , т.е.  $H = H(\gamma_0, \gamma, \mu_0, \mu)$ .

Пусть  $u(x)$ ,  $v(y)$  – неотрицательные непрерывные функции на  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , соответственно, и  $0 \in \text{Ran}(u) \cap \text{Ran}(v)$ .

Из следующих равенств

$$\begin{aligned} k_0(x, y) &= u(x)v(y), \\ k_1(x, s, y) &= \gamma(\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}), \\ k_2(x, t, y) &= \mu(\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}) \end{aligned}$$

для операторов  $B_1(\lambda) = B_1(\lambda; \gamma)$  и  $B_2(\lambda) = B_2(\lambda; \mu)$  получим, что

$$\begin{aligned} B_1(\lambda)f(x, y) &= \gamma \int_{\Omega} \frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}}{u(s)v(y) - \lambda} f(s, y) ds, \lambda \in \rho(H_0), \\ B_2(\lambda)f(x, y) &= \mu \int_{\Omega} \frac{\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}}{u(x)v(t) - \lambda} f(x, t) dt, \lambda \in \rho(H_0). \end{aligned}$$

**Лемма 1.** Для детерминантов  $\Delta_1(y; \lambda) = \Delta_1(y; \lambda, \gamma)$  и  $\Delta_2(x; \lambda) = \Delta_2(x; \lambda, \mu)$  частично интегральных операторов  $E - B_1(\lambda)$  и  $E - B_2(\lambda)$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \Delta_1(y; \lambda, \gamma) &= \left( 1 - \gamma \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda} \right) \left( 1 - \gamma \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_2(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda} \right) - \\ &\quad - \gamma^2 \int_{\Omega_1} \frac{\overline{\varphi_1(s)}\varphi_2(s) ds}{u(s)v(y) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_1} \frac{\varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)} ds}{u(s)v(y) - \lambda}, \lambda \in \rho(H_0); \\ \text{b)} \quad \Delta_2(x; \lambda, \mu) &= \left( 1 - \mu \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_1(t)|^2 dt}{u(x)v(t) - \lambda} \right) \left( 1 - \mu \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_2(t)|^2 dt}{u(x)v(t) - \lambda} \right) - \\ &\quad - \mu^2 \int_{\Omega_2} \frac{\overline{\psi_1(t)}\psi_2(t) dt}{u(x)v(t) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_2} \frac{\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} dt}{u(x)v(t) - \lambda}, \lambda \in \rho(H_0). \end{aligned}$$

В пространстве  $L_2(\Omega_1)$  рассмотрим семейство  $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega_2}$  самосопряженных операторов в модели Фридрихса

$$H_1(\alpha)\varphi(x) = u(x)v(\alpha)\varphi(x) - \gamma \int_{\Omega_1} \left( \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)} \right) \varphi(s) ds.$$

Аналогично определим в  $L_2(\Omega_2)$  семейство операторов  $\{H_2(\beta)\}_{\beta \in \Omega_1}$ :

$$H_2(\beta)\psi(y) = u(\beta)v(y)\psi(y) - \int_{\Omega_2} \left( \psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)} \right) \psi(t) dt.$$

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha \in \Omega$  – произвольное. Число  $\lambda \in (-\infty, 0)$  является собственным значением оператора  $H_1(\alpha)$  (оператора  $H_2(\alpha)$ ) тогда и только тогда, когда число  $\xi = 1$  является собственным значением компактного оператора  $\gamma K_1(\alpha; \lambda)$  ( $\mu K_2(\alpha; \lambda)$ ), где

$$K_1(\alpha; \lambda)\varphi(x) = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}}{\sqrt{v(\alpha)u(x) - \lambda} \cdot \sqrt{v(\alpha)u(s) - \lambda}} \varphi(s) ds,$$

$$K_2(\alpha; \lambda)\varphi(y) = \int_{\Omega} \frac{\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}}{\sqrt{v(\alpha)u(y) - \lambda} \cdot \sqrt{v(\alpha)u(t) - \lambda}} \varphi(s) ds.$$

### Список литературы

1. Ю.Х. Эшкабилов Существенный и дискретный спектры частично интегральных операторов, – Мат. труды, 11:2, 2008, 187–203.
2. Ю.Х. Эшкабилов Возмущение спектра оператора умножения на функцию с частным интегральным оператором, – Вестник НУУз, 2, 2006, 17–21.
3. Ю.Х. Эшкабилов Об одном дискретном "трехчастичном" операторе Шредингера в модели Хаббарда, – ТМФ, 149:2, 2006, 228–243.
4. Ю.Х. Эшкабилов Эффект Ефимова для одного модельного "трехчастичного" дискретного оператора Шредингера, – ТМФ, 164:1, 2010, 78–87.
5. Ю.Х. Эшкабилов О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса, – Мат. Труды, 2011, Т.14, №1, С. 195–211.
6. Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров О конечности отрицательных собственных значений частично интегрального оператора, – Мат. труды, 2014, Т.17, №1, 128–144.
7. Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров О существенном и дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке, – ТМФ, 170:3, 2012, 409–422.

## PANJARADAGI BIR ZARRACHALI DISKRET SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATLARINING MAVJUDLIGI

**Abduxakimov Saidakbar**

abduxakimov93@mail.ru, Samarqand davlat universiteti

Ushbu ishida uch o‘lchamli panjara  $\mathbb{Z}^3$  da  $\hat{V}_{\lambda\mu}$  potensial maydon bilan ta’sirlashuvchi bir zarrachali  $\hat{h}_{\lambda\mu} = \hat{h}_0 - \hat{V}_{\lambda\mu}$  Schrödinger operatori uchun ko’paytirish funksiyasi ikkita nuqtada aynimagan minimumga ega bo’lgan holda muhim spektridan chapda xos

qiymatlarining mavjudligi va soni zarrachalar ta'sir energiyasi  $\lambda, \mu > 0$  parametrga bog'liq holda ko'rsatilgan.

Faraz qilaylik  $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$  kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va  $\ell^{2,0}(\mathbb{Z}^3)$  kvadrati bilan jamlanuvchi toq funksiyalarning qism fazosi bo'lsin.

Diskret Shrödinger operatori  $\hat{h}_{\lambda\mu}$  ning koordinata tasviri  $\ell^{2,0}(\mathbb{Z}^3)$  fazoda quyidagicha aniqlangan :

$$\hat{h}_{\lambda\mu} = \hat{h}_0 - \hat{v}_{\lambda\mu}$$

bu yerda

$$(\hat{h}_0 \hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{\varepsilon}(x-s) \hat{f}(s), \quad \hat{f} \in \ell^{2,0}(\mathbb{Z}^3)$$

va  $\hat{\varepsilon}(\cdot)$  quyidagicha

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 3, & s = 0, \\ -\frac{1}{2}, & s = \pm e_i, i = 1,2,3 \\ 0, & \text{qolgan hollarda.} \end{cases}$$

Ta'sir operatori  $\hat{v}_{\lambda\mu}$  funksiyaga ko'paytirish operatori sifatida aniqlangan, ya'ni

$$(\hat{v}_{\lambda\mu} \hat{f})(x) = \hat{v}_{\lambda\mu}(x) \hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^{2,0}(\mathbb{Z}^3)$$

$\hat{v}_{\lambda\mu}$  funksiya quyidagicha

$$\hat{v}_{\lambda\mu}(s) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & s = \pm e_i, i = 1,2,3, \\ \frac{\mu}{2}, & s = \pm 2e_i, i = 1,2,3, \\ 0, & \text{qolgan hollarda.} \end{cases}$$

$L^2(\mathbb{T}^3) - \mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$  uch o'lchamli torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar Hilbert fazosi.

$$L^{2,0}(\mathbb{T}^3) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-t) = -f(t)\}$$

orqali,  $L^2(\mathbb{T}^3)$  ning toq funksiyalardan iborat qism to'plamini belgilaymiz. Diskret Shrödinger operatori  $h_{\lambda\mu}$  ning impuls tasvirini quyidagicha:

$$h_{\lambda\mu} = h_0 - v_{\lambda\mu}.$$

Qo'zg'almas  $h_0$  operatori  $\varepsilon$  funksiyaga ko'paytirish operatoridir, ya'ni

$$(h_0 f)(q) = \varepsilon(q) f(q), \quad f \in L^{2,0}(\mathbb{T}^3),$$

bunda

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos 2q_i).$$

Ta'sir operatori (qo'zg'alish operatori)  $v_{\lambda\mu} - L^{2,0}(\mathbb{T}^3)$  Hilbert fazosida quyidagicha:

$$(\hat{v}_{\lambda\mu} f)(q) = \lambda \sum_{i=1}^3 \sin q_i \int_{\mathbb{T}^3} \sin t_i f(t) dt + \mu \sum_{i=1}^3 \sin 2q_i \int_{\mathbb{T}^3} \sin 2t_i f(t) dt.$$

Quyidagi tengliklar o'rinni

$$\sigma_{\text{ess}}(h_{\lambda\mu}) = \sigma_{\text{ess}}(h_0) = \sigma(h_0) = [0,6].$$

Biz quyidagi sonlarni olamiz

$$\lambda_0 = \left( \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 t_1}{\varepsilon(t)} dt \right)^{-1}, \quad \mu_0 = \left( \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 2t_1}{\varepsilon(t)} dt \right)^{-1}.$$

$h_{\lambda\mu}$  operatorning spektrini  $(\lambda, \mu)$  – parametrga bog'liq ravshda o'rganish uchun  $(\lambda, \mu)$  tekislikni quyidagi sohalarga ajratamiz.

$$C_0^+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda < \lambda_0\}$$

$$C_1^+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda > \lambda_0\}$$

$$S_0^+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu < \mu_0\}$$

$$S_1^+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > \mu_0\}$$

### Teorema.

1.  $(\lambda, \mu) \in C_1^+ \cap S_1^+$  bo'lsin. U holda  $h_{\lambda\mu}$  operatorning muhim spektridan chapda ikkita uch karrali xos qiymatga ega va o'ngda xos qiymatga ega emas.
2.  $(\lambda, \mu) \in C_1^+ \cap S_0^+$  bo'lsin. U holda  $h_{\lambda\mu}$  operatorning muhim spektridan chapda bitta uch karrali xos qiymatga ega va o'ngda xos qiymatga ega emas.
3.  $(\lambda, \mu) \in C_0^+ \cap S_1^+$  bo'lsin. U holda  $h_{\lambda\mu}$  operatorning muhim spektridan chapda bitta uch karrali xos qiymatga ega va o'ngda xos qiymatga ega emas.
4.  $(\lambda, \mu) \in C_0^+ \cap S_0^+$  bo'lsin. U holda  $h_{\lambda\mu}$  operatorning muhim spektridan chapda ham o'ngda ham xos qiymatga ega emas.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. S.N. Lakaev, A.K. Motovilov, S.Kh. Abdukhakimov. Two-fermion lattice Hamiltonian with first and second nearest-neighboring-site interactions, J. Phys. A: Math. Theor. 56 (2023) 315202 (23pp)

2. S.N. Lakaev, Sh.Yu. Kholmatov, Sh.I. Khamidov, Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54 (2021).

## PANJARADAGI UCH ZARRACHALI SISTEMALARGA MOS MODEL OPERATORNING MUHIM SPEKTRINING JOYLASHUV O'RNI

*Bahronov Bekzod Islom o'g'li*

*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston.*

*e-mail: b.i.bahronov@buxdu.uz*

$d \in N$  natural soni uchun  $T^d := (-\pi; \pi]^d$  orqali  $d$  o'lchamli torni,  $L_2^s((T^d)^2)$  orqali  $(T^d)^2$  da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarining Hilbert fazosini belgilaymiz.  $L_2^s((T^d)^2)$  Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi

$$H_{\mu,\lambda} := H_0 - \mu(V_{11} + V_{12}) + \lambda(V_{21} + V_{22}) \quad (1)$$

tenglik orqali aniqlanuvchi operatorni qaraymiz. Bunda  $\mu, \lambda > 0$  ta'sirlashish parametrlari,  $H_0$  operator

$$(H_0 f)(x, y) = u(x) + u(y)f(x, y)$$

kabi aniqlangan

$V_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  –operatorlar esa lokal bo'lmagan potensial operatorlari:

$$(V_{i1}f)(x, y) = v_i(x) \int_{T^d} v_i(t) f(t, y) dt, (V_{i2}f)(x, y) = v_i(y) \int_{T^d} v_i(t) f(x, t) dt;$$

$u(\cdot, \cdot) - (T^d)^2$  da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzlucksiz, simmetrik funksiya,  $v_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$  lar esa  $T^d$  da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzlucksiz funksiyalar.

(1) tenglik yordamida ta'sir qiluvchi  $H_{\mu,\lambda}$  operator  $L_2^s((T^d)^2)$  Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi.

Mazkur ishning asosiy natijalarini bayon qilish maqsadida  $H_{\mu,\lambda}$  operator bilan bir qatororda  $L_2(T^d)$  Hilbert fazosida

$$h_{\mu,\lambda} := h_{0,0} - \mu k_1 + \lambda k_2, \mu, \lambda > 0, x \in T^d$$

kabi ta'sir qiluvchi va Fridrixs modeli deb ataluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda  $h_{0,0}$  operator ko'paytirish operatori bo'lib,  $L_2(T^d)$  Hilbert fazosida

$$(h_{0,0}f)(x) = u(x)f(x)$$

kabi aniqlangan.  $k_i$   $i = 1,2$  potensial operatorlari bo'lib,  $L_2(T^d)$  Hilbert fazosida

$$(k_i f)(y) = v_i(y) \int_{T^d} v_i(t) f(t) dt, i = 1,2$$

kabi aniqlangan. Bunda  $u(\cdot)$  va  $v_i(\cdot)$ ,  $i = 1,2$  funksiyalar  $T^d$  torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

Kiritilgan  $h_{\mu,\lambda}$  operator  $L_2(T^d)$  Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma ekanligini oson ko'rsatish mumkin.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{ess}(h_{\mu,\lambda}) = [E_1; E_2]$$

tenglik o'rinnlidir, bu yerda  $E_1$  va  $E_2$  sonlari

$$E_1 := \min_{x \in T^d} u(x), E_2 := \max_{x \in T^d} u(x)$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

Har bir fiksirlangan  $\mu, \lambda > 0$  va  $x \in T^d$  lar uchun  $C \setminus [E_1; E_2]$  sohada regulyar bo'lgan

$$\Delta_{\mu,\lambda}(x, z) := \Delta_\mu^{(1)}(z) \Delta_\lambda^{(2)}(z) + \mu \lambda (I_{12}(z))^2$$

funksiyani qaraymiz. Bu yerda

$$\Delta_\mu^{(1)}(x, z) = 1 - \mu I_{11}(z), \quad \Delta_\lambda^{(2)}(x, z) = 1 + \lambda I_{22}(z),$$

$$I_{ij}(z) = \int_{T^d} \frac{v_i(t) v_j(t)}{u(t) - z} dt, i, j = 1, 2.$$

Odatda  $\Delta_{\mu,\lambda}(z)$  funksiya  $h_{\mu,\lambda}$  operatroga mos Fredholm determinanti deyiladi hamda bu funksiya  $h_{\mu,\lambda}$  operatorning diskret spektrini tadqiq qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

**1-lemma.**  $z \in C \setminus [E_1; E_2]$  soni  $h_{\mu, \lambda}$  operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun  $\Delta_{\mu, \lambda}(z) = 0$  bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Keyingiz qilishlarga qulaylik bo‘lishi uchun ushbu

$$mes(supp\{v_1(\cdot)\} \cap supp\{v_2(\cdot)\})$$

shart bajarilishini talab qilamiz.

**2-lemma.**  $h_{\mu, \lambda}$  operator  $E_1$  dan chapda  $E_2$  dan o‘ngda ko‘pi bilan bittadan sodda xos qiymatga ega.

$$I_{11}(E_1) = \lim_{z \rightarrow E_1 - 0} I_{11}(z), \quad I_{22}(E_2) = \lim_{z \rightarrow E_2 + 0} I_{22}(z)$$

bo‘lsin.

**1-teorema [3].** Faraz qilaylik  $I_{11}(E_1) = +\infty$  va  $I_{22}(E_2) = +\infty$  bo‘lsin.

Agar  $\mu, \lambda > 0$  bo‘lsa, u holda  $H_{\mu, \lambda}$  model operator 2 ta  $2E_1(\mu)$  va  $2E_2(\lambda)$  oddiy xos qiymatlarga ega bo‘lib,

$$\sigma_{ess}(H_{\mu, \lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

$$\sigma_{pp}(H_{\mu, \lambda}) = \{2E_1(\mu); E_1(\mu) + E_2(\lambda); 2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o‘rinli.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$\mu_0 := (I_{11}(E_1))^{-1}, \quad \lambda_0 := -(I_{22}(E_2))^{-1}.$$

**2-teorema [4].** Faraz qilaylik  $|I_{11}(E_1)| < +\infty$ , va  $|I_{22}(E_2)| < +\infty$  bo‘lsin.

a) Agar  $0 < \mu \leq \mu_0$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu, \lambda}) = [2E_1; 2E_2]; \quad \sigma_{pp}(H_{\mu, \lambda}) = \emptyset$$

tengliklar o‘rinli;

b) Agar  $\mu > \mu_0$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  bo‘lsa,  $H_{\mu, \lambda}$  model operator 1 ta  $2E_1(\mu)$  oddiy xos qiymatga ega bo‘lib,

$$\sigma_{ess}(H_{\mu, \lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2];$$

$$\sigma_{pp}(H_{\mu, \lambda}) = \{2E_1(\mu)\}$$

tengliklar o‘rinli;

c) Agar  $0 < \mu \leq \mu_0$  va  $\lambda > \lambda_0$  bo‘lsa,  $H_{\mu,\lambda}$  model operator 1 ta  $2E_2(\lambda)$  oddiy xos qiymatga ega bo‘lib,

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

$$\sigma_{pp}(H_{\mu,\lambda}) = \{ 2E_2(\lambda) \}$$

tengliklar o‘rinli;

d) Agar  $\mu > \mu_0$  va  $\lambda > \lambda_0$  bo‘lsa, u holda  $H_{\mu,\lambda}$  model operator 2 ta  $2E_1(\mu)$  va  $2E_2(\lambda)$  oddiy xos qiymatlarga ega bo‘lib,

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

$$\sigma_{pp}(H_{\mu,\lambda}) = \{ 2E_1(\mu); E_1(\mu) + E_2(\lambda); 2E_2(\lambda) \}$$

tengliklar o‘rinli.

Aytaylik

$$\mu_1 := (I_{11}(2E_1 - E_2))^{-1}, \quad \lambda_0 := -(I_{22}(2E_2 - E_1))^{-1}$$

bo‘lsin.

**3-teorema.** Faraz qilaylik  $I_{11}(E_1) = +\infty$  va  $I_{22}(E_2) = +\infty$  bo‘lsin.

a) Agar  $0 < \mu \leq \mu_1$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o‘rinli;

b) Agar  $\mu > \mu_1$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o‘rinli bo‘lib,  $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$  bo‘ladi.

c) Agar  $0 < \mu \leq \mu_1$  va  $\lambda > \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tengliklar o‘rinli bo‘lib,  $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$  bo‘ladi.

d) Agar  $\mu > \mu_1$  va  $\lambda > \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

tenglik o‘rinli bo‘lib,  $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$  va  $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$  bo‘ladi.

## Eslatma. Ushbu

$$\mu_0 < \mu_1 \text{ va } \lambda_0 < \lambda_1$$

tengsizliklar o‘rinli.

**4-teorema.** Faraz qilaylik  $|I_{11}(E_1)| < +\infty$ , va  $|I_{22}(E_2)| < +\infty$  bo‘lsin.

a<sub>1</sub>) Agar  $0 < \mu \leq \mu_0$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]$$

tenglik o‘rinli;

a<sub>2</sub>) Agar  $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2]$$

tenglik o‘rinli;

a<sub>3</sub>) Agar  $\mu > \mu_1$  va  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2]$$

kabi bo‘lib,  $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$  tensizlik o‘rinli;

b<sub>1</sub>) Agar  $0 < \mu \leq \mu_0$  va  $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o‘rinli;

b<sub>2</sub>) Agar  $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$  va  $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

tenglik o‘rinli;

b<sub>3</sub>) Agar  $\mu > \mu_1$  va  $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo‘lib,  $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$  tensizlik o‘rinli;

c<sub>1</sub>) Agar  $0 < \mu \leq \mu_0$  va  $\lambda > \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo‘lib,  $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$  tengsizlik o‘rinli;

c<sub>2</sub>) Agar  $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$  va  $\lambda > \lambda_1$  bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo'lib,  $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$  tengsizlik o'rini;

$c_3)$  Agar  $\mu > \mu_1$  va  $\lambda > \lambda_1$  bo'lsa, u holda

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rini bo'lib,  $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$  va  $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$  bo'ldi.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. Фаддеев Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. В кн.: Труды математического института АН СССР. Т.73.М.: Наука.1964. С. 292-313

2. Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса, Труды сем. им. И.Г. Петровского, (1986), С. 210-238.

3. T.H.Rasulov, B.I.Bahronov. Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. Nanosystems: Phys. Chem. Math., **14**:2 (2023), pp. 151–157.

4. Б.И.Бахронов, Т.Х.Расулов, М.Рехман. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана. Известия ВУЗов. Математика. (2023), С. 1–9

### Uzluksiz funksiyalar fazosida siljishli singulyar integral operatorlarning yarim nyuterlik shartlari

**Mardihev R, Sayfiddinova Z.**

Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston.

rnot0376@gmail.com

$\Gamma$  - Sodda silliq yopiq kontur,  $\alpha$  -  $\Gamma$  konturni o'ziga akslantiruvchi diffeomorfizm bo'lib, chekli sondagi  $\Lambda$  davriy nuqtalarga ega bo'lsin.

Bu ishda  $\Gamma$  konturda uzluksiz funksiyalar fazosi  $C(\Gamma)$  da

$$T = A_+ P_+ + A_- P_-$$

ko'rinishdagi siljishli singulyar integral operator qaraladi. Bu yerda

$A_{\pm} = a_{\pm}(t)I - b_{\pm}(t)W$ ,  $I$  – birlik operator,  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ ,  $S$  - Koshi yadroli singulyar

integral operator:

$$(S\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$W$  -siljish operatori:  $(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$ ,  $t \in \Gamma$ ,  $a_{\pm}, b_{\pm} \in C(\Gamma)$ .

Bu ishda  $C(\Gamma)$  fazosida  $T$  operatorning  $n(d)$  - normal (ya'ni operator obrazining yopiqligi va yadrosining (koyadrosining) chekli o'lchovliligi) bo'lishligi  $A_+$  va  $A_-$  operatorlarning  $C(\Gamma)$  fazoda chapdan (o'ngdan) teskarilanuvchi bo'lishiga ekvivalent ekanligi isbotlanadi.

Teorema.Uzluksiz funksiyalar fazosi  $C(\Gamma)$  da  $T$  operatorning  $n(d)$  - normal bo'lishi uchun  $A_+$  va  $A_-$  operatorlarning  $C(\Gamma)$  fazoda chapdan (o'ngdan) teskarilanuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

[1] ishda  $A_+$  va  $A_-$  operatorlarning chapdan (o'ngdan) teskarilanuvchi bo'lishi shartlari olingan.([1] ish 1- teorema).Bu shartlar  $A_{\pm}$  operatorlarningkoeffisiyentlari  $a_{\pm}, b_{\pm}$  funksiyalari orqali ifodalanadi.Bu faktlardan  $T$  operatorning  $n(d)$  normallik shartlarini ham  $a_{\pm}, b_{\pm} \in C(\Gamma)$  funksiyalar orqali ifodalash mumkinligi kelib chiqadi.

### **Adabiyotlar**

1. Mardiyev R.,Murodov J.Sh. Siljishli funksional operatorlarning teskarilanuvchanlik va o'ngdan teskarilanuvchanlik shartlari.Algebra va analizning dolzarb masalalari mavzusidagi Respublika ilmiy anjumani materiallari to'plami (1-qism).Termiz 2022.

Uch o'lchamli panjaradagi uchta bir xil zarrachali Shredinger operatori disket spectri haqida

**Mukhiddin I.Muminov, Zarina Asrorova**

*Samarqand davlat universiteti*

$L_k^2(T^3)$  va  $L_k^2((T^3)^2)$  orqali mos ravishda  $g(p) = g(k-p)$  va  $f(p,q) = f(q,p) = f(K-p-q,q)$  shartlarni qanoatlantiruvchi  $g \in L^2(T^3)$  va  $f \in L^2((T^3)^2)$  funksiyalar fazosini belgilaymiz, bunda  $T = (-\pi; \pi]$ .

Ikkita bir xil zarrachali diskret Shredinger operatori  $L^2(T^3)$  fazoda ushbu formula orqali aniqlanadi([1]):

$$h_{\mu}(k) = h_0(k) - \mu V,$$

bu yerda  $h_0(k)$  quyidagi

$$E_k(p) = \varepsilon(p) + \varepsilon(k-p)$$

funksiyaga ko'paytirish operatori va

$$(Vf)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^3} f(s) ds.$$

Uchta bir xil zarrachali diskret Shredinger operatori  $H_\mu(K)$ ,  $K \in T^3 - L_K^2((T^3)^2)$  gilbert fazosida quydagicha aniqlangan([3]):

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu V_1 - \mu V_2 - \mu V_3, \quad (1)$$

bunda  $H_0(K)$  ushbu

$$E_K(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K - p - q), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i)$$

funksiyaga ko'paytirish operatori va

$$\begin{aligned} (V_1 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{T^3} f(s, q) ds, \quad (V_2 f)(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{T^3} f(s, p) ds, \\ (V_3 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{T^3} f(s, K - p - q) ds. \end{aligned}$$

Quydagi lemma o'rini:

**Lemma 1.** *Ixtiyoriy  $f \in L_K^2((T^3)^2)$  lar uchun*

$$(V_1 f, f) = (V_2 f, f) = (V_3 f, f)$$

tengliklar o'rini.

Quyidagi teorema Hilbert fazosi elementlari va Lemma 1ga assoslanib isbotlanadi.

**Theorem 1.** *Agar  $h_{3\mu}(0) \geq 0$  bo'lsa, u holda barcha  $K \in T^3$  lar uchun  $H_\mu(K) \geq 0$  bo'ladi.*

$H_\mu(K)$  operatorning  $\sigma_{ess}(H_\mu(K))$  muhim spektri uchun ushbu

$$\sigma_{ess}(H_\mu(K)) = [m_K, M_K] \cup \bigcup_{p \in T^d} \sigma_{disc}[(h_\mu(K - p)) + \varepsilon(p)]$$

tenglik o'rini, bu yerda

$$m_K = \min_{p,q} E_K(p, q), \quad M_K = \max_{p,q} E_K(p, q).$$

Xususiy holda,  $K = 0$  da

$$\sigma_{ess}(H_\mu(0)) = [0, M_0] \cup \bigcup_{p \in T^d} \sigma_{disc}[(h_\mu(K - p)) + \varepsilon(p)]$$

bo'ladi.

Ushbu teorema [1] va [2] ishda keltirilgan metodlardan foydalanib isbotlanadi.

**Theorem 2.** *Faraz qilaylik  $H_\mu(0) \geq 0$  va 0 soni  $H_\mu(0)$  operatorning xos qiymati bo'lsin. U holda har bir  $K \neq 0$  da  $H_\mu(K)$  operatorning diskret spektri bo'sh emas.*

### References

1. Mukhiddin I. Muminov, *Positivity of the Two-Particle Hamiltonian on a Lattice*. Theoretical and Mathematical Physics, 153(3): 1671-1676(2007)
2. S. Albeverio, S.N.Lakaev, K.A.Makarov, Z.I.Muminov, *The Threshold Effects for the Two-Particle Hamiltonians on Lattices*. Communications in Mathematical Physics 262, 91-115(2006), DIO 10.1007/s00220-005-1454-y
3. S.N.Lakaev, M.I.Muminov, *Essential and discrete spectrum of the three particle Schrodinger operator on the lattice*. Theoretical and Mathematical Physics, 197, 478-503(2003)

### Regulyarlashtirilgan o'lchovning bahosi haqida

**A.J. Jo'raqulov**

<sup>1</sup>V.I. Romanovsky nomidagi matematika instituti,

<sup>2</sup>Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti,

<sup>3</sup>Mirzo Ulug 'bek nomidagi astronomiya instituti.

E-mail: abdullahuraqulov4@gmail.com

### Masalani qo'yilishi va asosiy teorema.

Bizga quyidagi sirt berilgan bo'lsin.

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = 1 + \Phi(x_1, x_2)\}$$

bu yerda,  $(x_1, x_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U(0,0)$  nuqtaning yetarli kichik atrofi,  $\Phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^2 + x_1^n \beta(x_1)$  bo'lib,

$b(x_1, x_2) \in C^\infty(U)$ ,  $b(0,0) \neq 0$ ,  $\omega(x_1), \beta(x_1) \in C^\infty(U)$ ,  $\omega(0) \neq 0, \beta(0) \neq 0$ .

Farza qilaylik, yuqoridagi sirtda aniqlangan  $\psi(x) \in C_0^\infty(S)$

funksiya berilgan bo'lib u  $(0,0,1)$  nuqtaning yetarli kichik atrofida mujassamlashgan.

Shu sirtda  $\mu := dS$  zaryad (ishora almashinuvchi o'lchov)ning Furye almashtirishini qaraymiz.

$$\widehat{\mu(\xi)} = \int_S e^{-i(\xi, x)} \psi(x) dS(x)$$

$\widehat{\mu(\xi)}$   $\mathbb{C}^3$  da analitik funksiya bo‘ladi.

Yuqoridagi almashtirishni to‘liqroq quyidagi ikki karrali integral shaklida yozamiz.

$$\begin{aligned}\widehat{\mu(\xi)} &= \int_S e^{-i(\xi, x)} \psi(x) dS(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3(1 + \Phi(x_1, x_2)))} \psi(x_1, x_2, \\ &1 + \Phi(x_1, x_2)) \sqrt{1 + |\nabla \Phi(x_1, x_2)|^2} dx_1 dx_2\end{aligned}\quad (1)$$

Yozuvni qisqartirish uchun quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$a(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2, 1 + \Phi(x_1, x_2)) \sqrt{1 + |\nabla \Phi(x_1, x_2)|^2}$$

U holda (1) ni quyidagicha yozamiz.

$$\widehat{\mu(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3(1 + \Phi(x_1, x_2)))} a(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2)$$

Endi,  $\widehat{\mu^\lambda(\xi)}$  deb quyidagini olamiz.

$$\widehat{\mu^\lambda(\xi)} = \chi_1\left(\frac{\xi_3}{\lambda}\right) \chi_0\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}\right) \widehat{\mu(\xi)} \quad (3)$$

bu yerda,  $\lambda \gg 1$  parametr bo‘lib,  $\chi_1\left(\frac{\xi_3}{\lambda}\right)$  va  $\chi_0\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}\right)$  funksiyalar quyidagicha aniqlangan.

$$\chi_0\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\left(\frac{D_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}\right)\right| \leq 1 \\ 0, & \left|\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}\right)\right| > 2 \end{cases}$$

$$\chi_1\left(\frac{\xi_3}{\lambda}\right) = \div_0\left(\frac{\xi_3}{\lambda}\right) - \chi_0\left(\frac{2\xi_3}{\lambda}\right).$$

$\widehat{\mu^\lambda(\xi)}$  kompakt tashuvchili  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  funksiya bo‘lgani bois  $\mu^\lambda$  Schwartz funksiyasi bo‘ladi. Unga  $\mu$  o‘lchovning reguljarlashgani deb aytaymiz. Bu funksyaning  $\lambda \gg 1$  bo‘lgandagi xarakteri bilan shug‘ullanamiz.

Biz  $\widehat{\mu^\lambda(\xi)}$  uchun teskari Furye almashtirishini olamiz.

$$\mu^\lambda(y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\xi,y)} \widehat{\mu^\lambda(\xi)} d\xi \quad (4)$$

**Asosiy teorema:** (0,0,1) nuqtaning shunday V atrofi topiladiki, istalgan  $\psi \in C_0^\infty(V)$  uchun quyidagi

$$|\mu^\lambda(y)| \leq C|\lambda|, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

baho o‘rinli bo‘ladi. Bunda  $C$  y va  $\lambda$  larga bog‘liq emas.

**Izbot.** (4) tenglikni o‘ng tamonini (3) va (2) tengliklardan foydalanib quyidagicha yozamiz.

$$\begin{aligned} \mu^\lambda(y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^5} \chi_1\left(\frac{\xi_3}{\lambda}\right) \chi_0\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}\right) a(x_1, x_2) \times \\ &\times e^{i(\xi_1(y_1-x_1)+\xi_2(y_2-x_2)+\xi_3(y_3-(1+\Phi(x_1, x_2))))} dx_1 dx_2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Yuqoridagi integral uchun quyidagi almashtirish olamiz.

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda s_1 s_3 \\ \xi_2 = \lambda s_2 s_3 \\ \xi_3 = \lambda s_3 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{D(s_1, s_2, s_3)} = \lambda^3 s_3^2$$

(6) almashtirish orqali (5) integral quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$\begin{aligned} \mu^\lambda(y) &= \frac{\lambda^3}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^5} \chi_1(s_3) \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) a(x_1, x_2) s_3^2 \times \\ &\times e^{i\lambda s_3(s_1(y_1-x_1)+s_2(y_2-x_2)+(y_3-(1+\Phi(x_1, x_2))))} dx_1 dx_2 ds_1 ds_2 ds_3 \end{aligned}$$

Quyida biz biror chekli  $\delta$  soni uchun  $|y_1| + |y_2| < \delta$  va  $|1 + \Phi(x_1, x_2)| < \delta$  deb faraz qilamiz.

Yuqoridagi karrali integralni hisslashda dastlab  $(x_1, x_2, s_1, s_2)$  o‘zgaruvchilar bo‘yicha olingan karrali integralni hisoblaymiz va bunda “statsionar faza” usulidan foydalanamiz.

$$\begin{aligned}
\mu^\lambda(y) &= \frac{\lambda^3}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^5} \chi_1(s_3) \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) a(x_1, x_2) s_3^2 \times \\
&\times e^{i\lambda s_3(s_1(y_1-x_1)+s_2(y_2-x_2)+(y_3-(1+\Phi(x_1,x_2))))} dx_1 dx_2 ds_1 ds_2 ds_3 = \\
&= \frac{\lambda^3}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} \chi_1(s_3) s_3^2 ds_3 \int_{\mathbb{R}^4} \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) \times \\
&\times a(x_1, x_2) e^{i\lambda s_3(s_1(y_1-x_1)+s_2(y_2-x_2)+(y_3-(1+\Phi(x_1,x_2))))} dx_1 dx_2 ds_1 ds_2
\end{aligned} \tag{7}$$

Yuqoridagi to‘rt karrali integralni hisoblaymiz va hisoblashda [1, 117-b] 2.1- teoremadan foydalanamiz.

$$\begin{aligned}
J(\lambda s_3, y) &= \int_{\mathbb{R}^4} \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) a(x_1, x_2) \times \\
&\times e^{i\lambda s_3(s_1(y_1-x_1)+s_2(y_2-x_2)+(y_3-(1+\Phi(x_1,x_2))))} dx_1 dx_2 ds_1 ds_2
\end{aligned} \tag{8}$$

Yuqoridagi integralda faza funksiyasi sifatida quyidagini olishimiz mumkin.

$F(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, y_1, y_2, y_3) = s_3(s_1(y_1 - x_1) + s_2(y_2 - x_2) + (y_3 - (1 + \Phi(x_1, x_2))))$  Shuningdek, amplitude funksiyasi sifatida esa,

$$A(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) a(x_1, x_2)$$

funksiyani olishimiz mumkin.

Endi, faza funksiyasining kritik nuqtalarini topamiz.

$$\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial F}{x_1} = -s_3 s_1 - s_3 \frac{\partial \Phi}{x_1} = 0 \\
\frac{\partial F}{x_2} = -s_3 s_2 - s_3 \frac{\partial \Phi}{x_2} = 0 \\
\frac{\partial F}{s_1} = s_3(y_1 - x_1) = 0 \\
\frac{\partial F}{s_2} = s_3(y_2 - x_2) = 0
\end{array}
\right.$$

Agar biz  $s_3 \neq 0$  desak, u holda quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ s_1 = -\frac{\partial \Phi(y_1, y_2)}{x_1} \\ s_2 = -\frac{\partial \Phi(y_1, y_2)}{x_2} \end{cases}$$

Faraz qilaylik yuqoridagi tenglamani yechimi  $(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c) = (y_1, y_2, -\frac{\partial \Phi(y_1, y_2)}{x_1}, -\frac{\partial \Phi(y_1, y_2)}{x_2})$  bo'lsin. Endi, faza funksiyasini Hessianini hisoblaymiz.

$$Hess(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial s_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial s_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial s_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_2^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} & -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} & -s_3 & 0 \\ -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} & -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} & 0 & -s_3 \\ -s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = s_3^4 \neq 0$$

Yozuvni qisqartirish maqasadida quyidagi belgilashlarni olamiz.

$$-s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = a_{11}, -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = a_{12}, -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} = a_{21}, -s_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = a_{22}$$

$Hess(F)$  matritsaning xos qiymatlarini topamiz.

$$\det(Hess(F) - I\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & -s_3 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & 0 & -s_3 \\ -s_3 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & s_3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$\det(Hess(F) - I\lambda) = 0$  bu tenglamani yechimlarini yozamiz:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + 4s_3^2}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{a_{22} \pm \sqrt{a_{22}^2 + 4s_3^2}}{2}$$

Demak,  $\operatorname{sgn}(Hess(F)) = 2 - 2 = 0$

Yuqoridagilardan foydalanib (8) integralning  $|\lambda| \gg 1$  bo'yicha asimptotikasini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^4} \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) a(x_1, x_2) \times \\ & \times e^{i\lambda s_3(s_1(y_1-x_1)+s_2(y_2-x_2)+(y_3-(1+\Phi(x_1,x_2))))} dx_1 dx_2 ds_1 ds_2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 |Hess(F)|^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times e^{i\lambda F(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3, y_1, y_2, y_3) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn}(Hess(F))} (A(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3) + O(\lambda^{-1})) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 s_3^{-2} \times \\ & \times e^{i\lambda F(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3, y_1, y_2, y_3)} (A(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3) + O(\lambda^{-1})), \lambda \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (9)$$

Endi, (9) dan foydalanib (7) tenglikning oxirgi tengligini quyidagicha yozamiz.

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^3}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} \chi_1(s_3) s_3^2 ds_3 \int_{\mathbb{R}^4} \chi_0(s_1 s_3, s_2 s_3) \times \\ & \times a(x_1, x_2) e^{i\lambda s_3(s_1(y_1-x_1)+s_2(y_2-x_2)+(y_3-(1+\Phi(x_1,x_2))))} dx_1 dx_2 ds_1 ds_2 = \\ & = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_1(s_3) e^{i\lambda F(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3, y_1, y_2, y_3)} (A(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3) + O(\lambda^{-1})) ds_3 \\ & \lambda \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Yuqoridagi tenglikdan kelib chiqqan holda, quyidagiga ega bo'ldik.

$$\mu^\lambda(y) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_1(s_3) \times$$

$$\times e^{i\lambda F(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3 \cdot y_1, y_2, y_3)} (A(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3) + O(\lambda^{-1})) ds_3 \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (10)$$

Yuqoridagi tenglik bilan aniqlangan integralni baholaymiz.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_1(s_3) e^{i\lambda F(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3 \cdot y_1, y_2, y_3)} (A(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3) + O(\lambda^{-1})) ds_3 \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{\lambda}{2\pi} \right| \int_{\mathbb{R}} |\chi_1(s_3)| |e^{i\lambda F(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3 \cdot y_1, y_2, y_3)}| |A(x_1^c, x_2^c, s_1^c, s_2^c, s_3) + O(\lambda^{-1})| |ds_3| \leq \\ & \leq C|\lambda|, \quad \lambda \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (11)$$

Shunday qilib, (10) tenglikka va (11) tongsizlikka ko‘ra quyidagi bahoga ega bo‘ldik.

$$|\mu^\lambda(y)| \leq C|\lambda|, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

### Adabiyotlar ro‘yxati.

1. Федорюк М. В. - Метод перевала. - 1977. - 368с
2. I. M. Vinogradov, The Method of Trigonometric Sums in the Theory of Numbers (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
3. Hua Loo-keng, “On the number of solutions of Tarry’s problem,” Acta Sci. Sinica 1 (1), 1–76 (1952).
4. I. A. Ikromov and D. Muller, “Fourier Restriction for Hypersurfaces in Three Dimensions and Newton Polyhedra, in Ann. of Math. Stud. (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2016), Vol. 194. 8.
5. I. A. Ikromov, “Summability of oscillatory integrals over parameters and the boundedness problem for Fourier transforms on curves,” Math. Notes 87 (5), 700–719 (2010).

### Quadratic stochastic processes of permutation matrix

S.S.Khudayarov

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, Bukhara,  
Uzbekistan

E-mail: s.s.xudayarov@buxdu.uz

Denote  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ . Let  $\mathcal{C}$  be the set of all  $m^3$ -dimensional cubic matrices over the field of real numbers. Denote by  $E_{ijk}$ ,  $i, j, k \in I$  the basis cubic matrices in  $\mathcal{C}$ . (see [1])

Following [2] define the following multiplications for basis matrices  $E_{ijk}$ :

$$E_{ijk} *_0 E_{lnr} = \delta_{kl} \delta_{jn} E_{ijr}, \quad (1)$$

where  $\delta_{kl}$  is the Kronecker symbol, i.e.

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

Then for any two cubic matrices  $A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}) \in \mathcal{C}$  the matrix  $A *_0 B = (c_{ijk})$  is defined by

$$c_{ijr} = \sum_{k=1}^m a_{ijk} b_{kjr}. \quad (2)$$

The following results of this section are proven in [2] (see also [1] for detailed proofs)

**Proposition.** *The algebra of cubic matrices  $(\mathcal{C}, *_0)$  is a direct sum of algebras of square matrices.*

Define multiplication:

$$E_{ijk} *_a E_{lnr} = \delta_{kl} E_{ia(j,n)r}, \quad (3)$$

where  $a : I \times I \rightarrow I$ ,  $(j, n) \mapsto a(j, n) \in I$ , is an arbitrary associative binary operation.

**Stochasticity.** Define several kinds of cubic stochastic matrices (see [2,4]): a cubic matrix  $P = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$  is called

- (1,2)-stochastic if

$$p_{ijk} \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^m p_{ijk} = 1, \text{ for all } k.$$

- (1,3)-stochastic if

$$p_{ijk} \geq 0, \quad \sum_{i,k=1}^m p_{ijk} = 1, \text{ for all } j.$$

- (2,3)-stochastic if

$$p_{ijk} \geq 0, \quad \sum_{j,k=1}^m p_{ijk} = 1, \text{ for all } i.$$

- 3-stochastic if

$$p_{ijk} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m p_{ijk} = 1, \text{ for all } i, j.$$

The last one can be also given with respect to first and second index.

Denote by  $S$  the set of all possible kinds of stochasticity and denote by  $M$  the set of all possible multiplication rules of cubic matrices.

Let parameters  $s \geq 0, t \geq 0$ , are considered as time.

Denote by  $M^{[s,t]} = (P_{ijk}^{[s,t]})_{i,j,k=1}^m$  a cubic matrix with two parameters.

**Definition.**[3]. A family  $\{M^{[s,t]} : s, t \in R_+\}$  is called a Markov process of cubic matrices (or a quadratic stochastic process (QSP)) of type  $(\sigma | \mu)$  if for each time  $s$  and  $t$  the cubic matrix  $M^{[s,t]}$  is stochastic in sense  $\sigma \in S$  and satisfies the Kolmogorov-Chapman equation (for cubic matrices):

$$M^{[s,t]} = M^{[s,\tau]} *_{\mu} M^{[\tau,t]}, \text{ for all } 0 \leq s < \tau < t \quad (4)$$

with respect to the multiplication  $\mu \in M$ .

In the work M. Ladra and U.A Rozikov proved the following theorem.

**Theorem 1.** [3]. Let  $\{A^{[t]} = (a_{ij}^{[t]}, t \geq 0)\}$  be a family of invertible (for all  $t$ ),  $m \times m$  square matrices and let  $(A^{[t]})^{-1} = (b_{ij}^{[t]})$  denote the inverse of  $A^{[t]}$ . Let  $B^{(s)} = (\beta_{ijk}^{(s)})$ , be a cubic matrix, where  $\beta_{ijk}^{(s)}, i, j, k = 1, \dots, m$ , are arbitrary functions such that

$$\sum_{j=1}^m \beta_{ijk}^{(s)} = a_{ik}^{[s]}, \text{ for any } i, k \text{ and } s.$$

Then cubic matrix

$$M^{[s,t]} = \left( \sum_{k=1}^m \beta_{ijk}^{(s)} b_{kr}^{[t]} \right)_{i,j,r=1}^m \quad (5)$$

generates an flow of algebras (i.e. satisfies equation (4) of type (D)).

In general, the matrix (1) does not generate a QSP. Here our aim is to find conditions on matrices  $A^{[t]}$  and  $B^{(s)}$  (mentioned in Theorem 1) ensuring that the matrix (5) generates a QSP.

**QSP of type  $(\sigma | D)$ .**

**Lemma 1.** Let  $A^{[t]} = \left( a_{ij}^{[t]} \right)_{i,j=1}^m$  be a right stochastic and invertible matrix and let  $(A^{[t]})^{-1} = \left( b_{ij}^{[t]} \right)_{i,j=1}^m$  be its inverse matrix. If  $(A^{[t]})^{-1}$  is not a stochastic matrix, then it has at least one negative element.

**Proposition 1.** If  $A^{[t]}$  and  $B^{(s)} = (\beta_{ijk}^{(s)})_{i,j,k=1}^m$  in Theorem 1 satisfies the following conditions:

- $(A^{[t]})^{-1}$  is a left stochastic;
- $B^{(s)}$  is a  $(1,2)$ -stochastic.

Then the matrix  $M^{[s,t]}$  (given by (5))  $(12|D)$ .

**Example 1.** Let

$$A^{[t]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$B^{(s)} = \begin{pmatrix} f(s) & 0 & 0 \\ 1-f(s) & 0 & 0 \\ 0 & g(s) & 1-g(s) \end{pmatrix}$$

Here  $0 \leq f(s), g(s) \leq 1$ .

Then  $A^{[t]}$  and  $(A^{[t]})^{-1}$  satisfy all conditions of Theorem 1.

In this case the QSP is defined by the matrix

$$M^{[s]} = \begin{pmatrix} f(s) & 0 & 0 \\ 1-f(s) & 0 & 0 \\ 0 & g(s) & 1-g(s) \end{pmatrix}$$

**Theorem 2.** If in Theorem 1 both  $A^{[t]}$  and  $(A^{[t]})^{-1}$  are stochastic for some  $t > 0$  and  $(\beta_{ijk}^{(s)})_{i,j,k=1}^m$  is 3-stochastic for some  $s < t$ , then  $M^{[s,t]}$  is not 3-stochastic.

## References

1. Rozikov U.A. // Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. World Sci. Publ. Singapore. P. 1-460. 2020.
2. Maksimov V.M. // Cubic stochastic matrices and their probability interpretations Theory Probab. Appl., 41:1 (1996), P. 55-69.
3. Ladra M., Rozikov U.A. // Flow of finite-dimensional algebras. Jour. Algebra, 470 (2017), P.263-288.
4. Mukhamedov F.M., Ganikhodjaev N.N. // Quantum quadratic operators and

processes. Lecture Notes in Mathematics book 2133, Springer, Cham, (2015).

## On the Discrete Spectrum of the One-dimensional Discrete Schrödinger Operator Depending on Three Parametres

Z.I. Muminov<sup>1</sup>, F. Madatova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Tashkent State University of Economics, Islam Karimov street 49,  
100066, Tashkent, Uzbekistan. e-mail: zimuminov@gmail.com

<sup>2</sup>National University of Uzbekistan, University street 9, 100174,  
Tashkent, Uzbekistan. e-mail: fotimamadatova2@gmail.com

**Abstract:** We consider a family of Schrödinger operators  $H_{\lambda\mu k} = -\Delta - \lambda\delta_{kx} - \mu\delta_{0x}$  on the one-dimensional lattice  $\mathbb{Z}^1$ , where  $\Delta$  is a standard discrete Laplacian,  $\delta_{.,.}$  is a Kronecker delta function, and  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$  and  $k \in \mathbb{Z}^1$  are parameters. Behaviors of eigenvalues, resonances and their dependence on the parameters of the operator are explicitly derived.

**Keywords:** Discrete Laplacian, Discrete Schrödinger operator, eigenvalues, Fredholm determinant, resonances

### 1 Introduction

Behavior of eigenvalues below the essential spectrum of standard Schrödinger operators of the form  $-\Delta + \varepsilon V$  defined on  $L^2(\mathbb{R}^n)$  has been considerably studied so far. Here  $V$  is a negative potential and  $\varepsilon \geq 0$  is a parameter which is varied. When  $\varepsilon$  approaches to some critical point  $\varepsilon_c \geq 0$ , the negative eigenvalues approach to the left edge of the essential spectrum, and consequently they are absorbed into it. A crucial mathematical problem is to specify whether the edge of the essential spectrum is an eigenvalue or a threshold resonance at the critical point  $\varepsilon_c$ . Their behaviors depend on the spatial dimension  $n$ .

The discrete Schrödinger operators have attracted considerable attention for both combinatorial Laplacians and quantum graphs; for some recent summaries refer to [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8] and the references therein. Particularly, eigenvalue behavior of discrete Schrödinger operators are discussed in e.g. [9, 10, 11, 12] and are briefly discussed in [12, 13, 14] when potentials are delta functions with a single point mass. In [9] an explicit example of a  $-\Delta - V$  on the three-dimensional lattice  $\mathbb{Z}^3$ , which possesses both a *lower* threshold resonance and a *lower* threshold eigenvalue, is constructed, where  $-\Delta$  stands for the standard discrete Laplacian in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  and  $V$  is a multiplication operator by the function

$$\hat{V}(x) = \mu\delta_{x0} + \frac{\lambda}{2} \sum_{|s|=1} \delta_{xs}, \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \quad (1.1)$$

where  $\delta_{xs}$  is the Kronecker delta.

The authors of [14] considered the restriction of this operator to the Hilbert space  $\ell^2_e(\mathbb{Z}^3)$  of all even functions in  $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ . They investigated the dependence of the number of eigenvalues of  $H_{\lambda\mu}$  on  $\lambda, \mu$  for  $\lambda > 0, \mu > 0$ , and they showed that all eigenvalues arise either from a *lower* threshold resonance or from *lower* threshold eigenvalues under a variation of the interaction energy. Moreover, they also proved that the first *lower* eigenvalue of the Hamiltonian  $-\Delta - V$  arises only from a *lower* threshold resonance under a variation of the interaction energy. In case  $\lambda = 0$ , Hiroshima et.al. [12] showed that an threshold eigenvalue does appear for  $n \geq 5$  but does not for  $1 \leq n \leq 4$ .

The papers [15-23] are devoted to study Schrodinger operators depending on two parameters.

There are still interesting spectral properties of the discrete Schrödinger operators with potential of the form (1.1).

In this paper, we consider an one-dimensional discrete Schrödinger operator  $H_{\lambda\mu k} = H_0 - v_{\lambda\mu k}$ , where  $H_0 = -\Delta$  is the discrete Laplacian and  $v_{\lambda\mu k}$  is a multiplication operator by the function  $v(x) = \lambda\delta_{0x} + \mu\delta_{kx}$ , where  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$  and  $k \in \mathbb{Z}^1$  are parameters.

We show that the operator  $H_{\lambda\mu k}$  may have two eigenvalues, one of which is located below eigenvalues of  $H_{\lambda 0k}$  and  $H_{0\mu k}$ , while the other lies above. Additionally, we investigate the spectrum of  $H_{\lambda\mu}$ , specifically, *lower* threshold eigenvalues and threshold resonances for *any*

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

The paper is organized as follows. In Section 2 and Section 3, a discrete Schrödinger operator in the coordinate and momentum representation is described. The essential spectrum of the operator is investigated in Section 4. Section 5 is devoted to showing main results, Theorems 5.8.

## 2 The discrete Schrödinger operator in the position representation.

The standard discrete Laplacian  $\Delta$  on the one dimensional lattice  $\mathbb{Z}$ , is defined with the following self-adjoint (bounded) Toeplitz-type operator on the Hilbert space  $\ell^2(\mathbb{Z})$  ([19]) as

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}, |x|=1} (T(x) - T(0)),$$

where  $T(y)$ ,  $y \in \mathbb{Z}$ , is the shift operator

$$(T(y)f)(x) = f(x+y), \quad f \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Let the discrete Schrödinger operator be defined in the Hilbert space  $\ell^2(\mathbb{Z})$  as follows

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - \hat{V}$$

where  $H_0 = -\Delta$  and the potential operator  $\hat{V}$  depending on the parameters  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  and  $k \in \mathbb{Z}$  is define by

$$(\hat{V}\hat{f})(x) = \begin{cases} \mu \hat{f}(x), & \text{if } x = 0 \\ \lambda \hat{f}(x), & \text{if } x = k \\ 0, & \text{if } x \in \mathbb{Z} \setminus \{k, 0\} \end{cases}, \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

### 3 The discrete Schrödinger operator in the momentum representation.

The standard Fourier transform  $F : L^2(T) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  defined by

$$(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T f(\theta) e^{ix\theta} d\theta, \quad f \in L^2(T), \quad x \in \mathbb{Z},$$

with the inverse  $F^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(T)$ :

$$(F^{-1}f)(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) e^{-ix\theta}, \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \theta \in T,$$

provides the momentum representation of the Hamiltonian  $H_{\lambda\mu} = F^{-1}H_{\lambda\mu}F$  acting on  $L^2(T)$  as

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V_{\lambda\mu},$$

where the non-perturbed operator  $H_0 = F^{-1}H_0F$  is defined on  $L^2(T)$  as a multiplication operator

$$(H_0f)(p) = e(p)f(p), \quad f \in L^2(T), \quad p \in T, \quad (3.1)$$

where

$$e(p) = 1 - \cos p, \quad p \in T,$$

The perturbation  $V_{\lambda\mu} = F^{-1}\hat{V}F$  is the two-dimensional integral operator:

$$(V_{\lambda\mu}f)(p) = \frac{\mu}{2\pi} \int_T f(q) dq + \frac{\lambda}{2\pi} \int_T e^{ix_0(p-q)} f(q) dq, \quad f \in L^2(T), \quad p \in T.$$

It isn't difficult to see that  $H_{\lambda\mu}$  is a self-adjoint operator.

In the physical literature, the function  $e(\cdot)$ , being a real valued-function on  $T$ , is called the dispersion relation of the Laplace operator  $-\Delta$ .

**Remark 3.1** When  $k = 0$ , the potential operator  $V_{\lambda\mu}$  becomes a one-dimensional and the operator  $H_{\lambda\mu}$  was investigated in ([12],[13],[23]). In the present work, we study the case  $k \neq 0$ .

## 4 The essential spectrum.

The perturbation  $V_{\lambda\mu}$  of  $H_0$  is the operator of rank two and in accordance with Weyl theorem on the stability of the essential spectrum the equality  $\sigma_{ess}(H_{\lambda\mu}) = \sigma_{ess}(H_0)$  holds the essential spectrum of the operator  $H_{\lambda\mu}$  consists of the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_{\lambda\mu}) = [e_{min}, e_{max}],$$

where

$$e_{min} = 0, \quad e_{max} = 2.$$

## 5 Fredholm determinant of the operator $H_{\lambda\mu}$ .

**5.1 Fredholm determinant of the operator  $H_{\lambda\mu}$ .** For any  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , we define Fredholm determinant associated with the operator  $I - T(z)$  as a analytic function in  $z \in \mathbb{C} \setminus [e_{min}, e_{max}]$  as

$$D(\lambda, \mu, z) = \Delta_\mu(z)\Delta_\lambda(z) - \lambda\mu b^2(z), \quad (5.2)$$

where

$$a(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1}{e(q) - z} dq \text{ and } b(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\cos(k, q)}{e(q) - z} dq.$$

**Lemma 5.1 (Birman-Schwinger principle for  $z \in \mathbb{C} \setminus [e_{min}, e_{max}]$ )**

The number  $z \in \mathbb{C} \setminus [e_{min}, e_{max}]$  is an eigenvalue of  $H_{\lambda\mu}$  if and only if  $D(\lambda, \mu, z) = 0$

Moreover, the function

$$f = \frac{1}{e(p) - z} (\mu\omega_0 + \lambda\omega_1 e^{-ikp}) \quad (5.3)$$

is an eigenfunction of with  $H_{\lambda\mu}$  associated eigenvalue  $z$ .

*Proof.* The proof comes from the Birman-Schwinger principle for the investigated operator.

**5.2 Properties of the Fredholm determinant.** In the following lemma we calculate the values of the coefficients  $a(z)$  and  $b(z)$ .

**Lemma 5.2 (a)** The following equalities are valid for  $a(z)$  and  $b(z)$

$$a(z) = \frac{1}{\sqrt{-z}\sqrt{2-z}}, \quad z \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

and

$$b(z) = \frac{(1-z-\sqrt{z^2-2z})^k}{\sqrt{-z}\sqrt{2-z}}, \quad z \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

(b) The following inequalities are satisfied for  $a(z)$  and  $b(z)$

$$a(z) > b(z)$$

and

$$\dot{a}(z) > \dot{b}(z)$$

*Proof.* (a) In order to calculate the integrals  $a(z)$  and  $b(z)$ , we use the Cauchy residue theorem

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta = 2\pi i \frac{f(\zeta_0)}{g'(\zeta_0)}, \quad (5.4)$$

where a function  $f(\zeta)$  is the analytic in the set  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , and  $\zeta_0$  is a only zero of the function  $g(\zeta)$  in  $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$ .

(b) The proof of this clause follows from the positivity of derivatives of the functions  $a(z)$  and  $b(z)$ .

**Lemma 5.3** a) *The function  $\gamma(z)$  is monotonically decreasing in the interval  $(-\infty, 0)$ .*

b) *The following relations are appropriate*

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \gamma(z) = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} \gamma(z) = \frac{1}{2k} \quad (5.7)$$

*Proof.* a) The proof can be obtained using the differentiation methods.

b) Lemma 5.2 implies the proof.

Since  $\xi(z)$  is even with respect to the parameter  $k$  we consider the case  $k > 1$ .

**Lemma 5.4** a) *If  $|k| = 1$ , then  $\xi(z) = \text{const}$ .*

b) When  $k > 1$ , function  $\xi(z)$  is monotonically increasing in the interval  $(-\infty, 0)$ .

c) The following relations are appropriate

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \xi(z) = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} \xi(z) = \frac{1}{4k^2}. \quad (5.8)$$

*Proof.* Lemma 5.2 implies the proof.

**5.3 Continuation of  $H_z(\lambda, \mu)$  to the point  $z = 0$ .** Using the limits (5.7) in Lemma 5.3 and (5.8) in Lemma 5.4, we can introduce the continuation of the function

$H_z(\lambda, \mu) = (\lambda - \gamma(z))(\mu - \gamma(z)) - \xi(z)$  at the point  $z = 0$  as follows

$$H_0(\lambda, \mu) = \left( \lambda - \frac{1}{2k} \right) \left( \mu - \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{4k^2} \quad (5.13)$$

We study the family of rectangular hyperbolas  $H_z(\lambda, \mu) = 0, z \leq 0$ . The left branch  $\Gamma_0^l$  and right branch  $\Gamma_0^r$  of hyperbola  $H_z(\lambda, \mu) = 0$  split the space  $\mathbb{R}^2$  into three open sets

$$G_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : H_z(\lambda, \mu) > 0, \lambda < 1/2k\}, \quad G_1 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : H_z(\lambda, \mu) < 0\},$$

$$G_2 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : H_z(\lambda, \mu) > 0, \lambda > 1/2k\}$$

Hence  $\partial G_0 = \Gamma_0^l$  and  $\partial G_2 = \Gamma_0^r$  follow from the definition of  $G_0$  and  $G_2$ , respectively (see Figure 3).

**Lemma 5.5** a) Let  $k = 1$ . If  $z$  approaches to  $-\infty$  from 0, then the hyperbola  $H_z(\lambda, \mu) = 0$  parallel moves to the upper right corner of the  $\lambda\mu$ -coordinate plane (see Figure 1).

b) Let  $k > 1$ . If  $z$  approaches to  $-\infty$  from 0, the hyperbola  $H_z(\lambda, \mu) = 0$  moves to the upper right corner of the  $\lambda\mu$ -coordinate plane, but the concavity of a rectangular hyperbola increases (see Figure 2).

c) Additionally, for any  $z \neq \hat{z} < 0$ ,  $z, \hat{z} \in (-\infty, 0)$  the branches do not intersect i.e.,  $\Gamma_z^l \cap \Gamma_{\hat{z}}^l = \emptyset$  and  $\Gamma_z^r \cap \Gamma_{\hat{z}}^r = \emptyset$ .

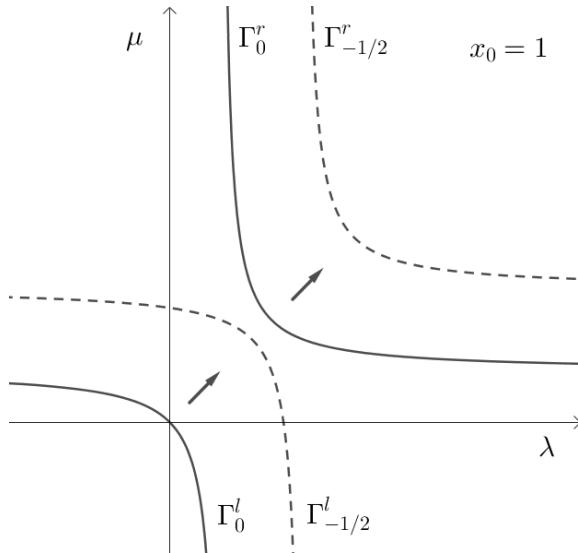


Figure 1: Motion of hyperbolas for  $k = 1$

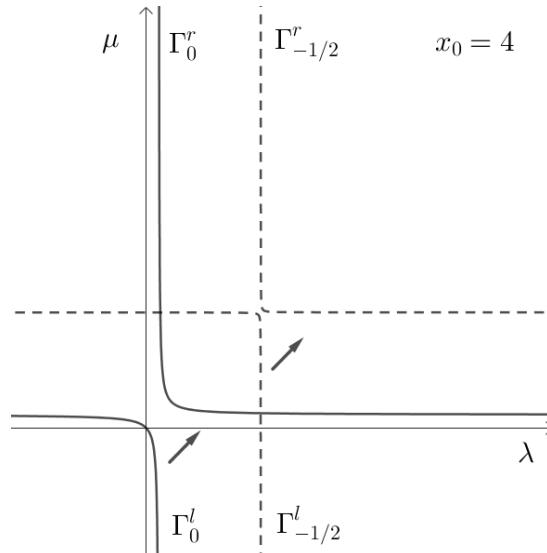


Figure 2: Motion of hyperbolas for  $k > 1$

*Proof.* a) and b). According to the Lemma 5.4,  $\xi(z) = \text{const}$ , if  $k = 1$  and  $\xi(z)$  is monotonically increasing in the interval  $(-\infty, 0)$ , if  $k = 1$ , respectively. These facts impli the proof.

c) The coordinates of vertices of the hyperbola are

$$(\lambda_0^1, \mu_0^1) = \left( \frac{1}{a(z)+b(z)}, \frac{1}{a(z)+b(z)} \right) \quad \text{and} \quad (\lambda_0^2, \mu_0^2) = \left( \frac{1}{a(z)-b(z)}, \frac{1}{a(z)-b(z)} \right).$$

From the functions

$$\frac{1}{a(z)+b(z)} \quad \text{and} \quad \frac{1}{a(z)-b(z)}$$

are monotonically decreasing in the interval  $(-\infty, 0)$ , the vertices of the hyperbola  $H_z(\lambda, \mu) = 0$  move to the right as  $z$  approaches to  $-\infty$  from 0

Also, from the Lemma 5.3 function  $\gamma(z)$  i.e.  $\frac{a(z)}{a^2(z)-b^2(z)}$  is monotonically decreasing in the interval  $(-\infty, 0)$ . Hence the asymptote of the hyperbola  $H_z(\lambda, \mu) = 0$  is

$$(\lambda(z), \mu(z)) = \left( \frac{a(z)}{a^2(z)-b^2(z)}, \frac{a(z)}{a^2(z)-b^2(z)} \right)$$

move no parallelly upwards as  $z$  approaches to  $-\infty$  from 0 (see figures 1and2).

**Definition 5.6** (*Threshold eigenvalue and threshold resonance*) Let function  $f$  in  $T$  be solution of the equation  $H_{\lambda\mu}f = 0$ .

- a) If  $f \in L^2(T)$  we say that 0 is a lower threshold eigenvalue of the operator  $H_{\lambda\mu}$ .
- b) If  $f \in L^1(T) \setminus L^2(T)$  we say that 0 is a lower threshold resonance of the operator  $H_{\lambda\mu}$ .
- c) If  $f \in L^\varepsilon(T) \setminus L^1(T)$  for any  $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$  we say that 0 is a lower super threshold resonance of the operator  $H_{\lambda\mu}$ .

**Theorem 5.7** (a)  $(\lambda, \mu) \in \Gamma_z^l$  or  $(\lambda, \mu) \in \Gamma_z^r$ ,  $z \in (-\infty, 0)$ , then  $z$  is an eigenvalue of the operator  $H_{\lambda\mu}$

- (b1)  $(\lambda, \mu) \in \Gamma_0^l$  or  $(\lambda, \mu) \in \Gamma_0^r$ , then 0 is neither eigenvalue nor resonance.
- (b2) For any  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $H_{\lambda\mu}$  has no threshold resonance and no super-threshold resonance.

*Proof.* (a) Assume  $(\lambda, \mu) \in \Gamma_z^l$  or  $(\lambda, \mu) \in \Gamma_z^r$ . Then  $H_z(\lambda, \mu) = 0$  that is  $D(\lambda, \mu, z) = 0$ . According to the Lemma 5.1,  $z$  is an eigenvalue for the operator  $H_{\lambda\mu}$  (b) Let  $f \in L^1(T)$ . Then  $H_{\lambda\mu}f = 0$  gives  $f = 0$  follows.

**Theorem 5.8** a) If  $(\lambda, \mu) \in G_0 \cup \Gamma_0^l$ , then  $\sigma_d(H_{\lambda\mu}) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$  (see Figure 4).

b) If  $(\lambda, \mu) \in G_1 \cup \Gamma_0^r$ , then the operator  $H_{\lambda\mu}$  has a simple eigenvalue in the interval  $(-\infty, 0)$  (see Figure 5).

c) If  $(\lambda, \mu) \in G_2$ , then the operator  $H_{\lambda\mu}$  has a two eigenvalue in the interval  $(-\infty, 0)$  (see Figure 6).

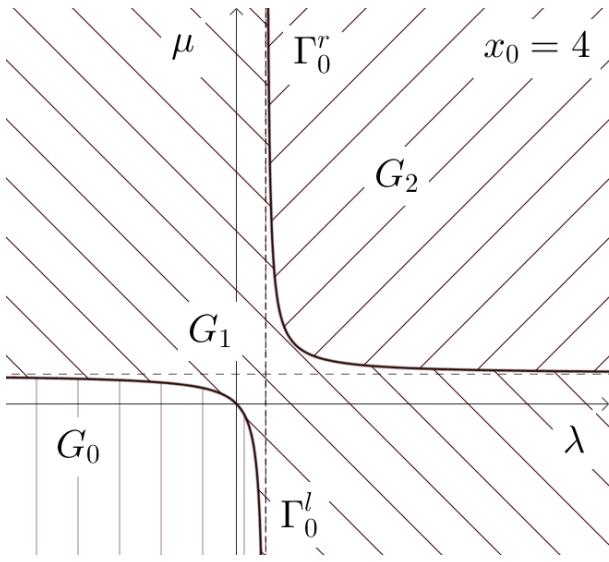


Figure 3: Regions

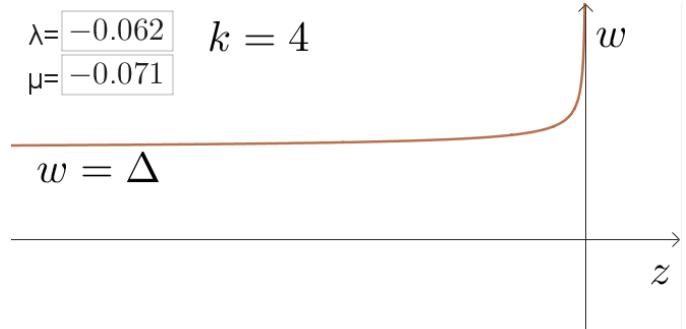


Figure 4:  $(\lambda, \mu) \in G_0 \cup \Gamma_0^l$

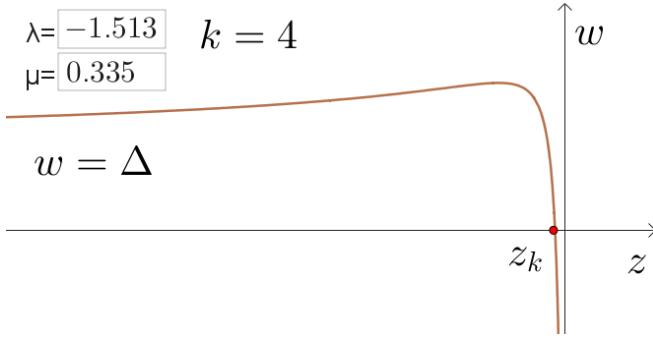


Figure 5:  $(\lambda, \mu) \in G_1 \cup \Gamma_0^r$

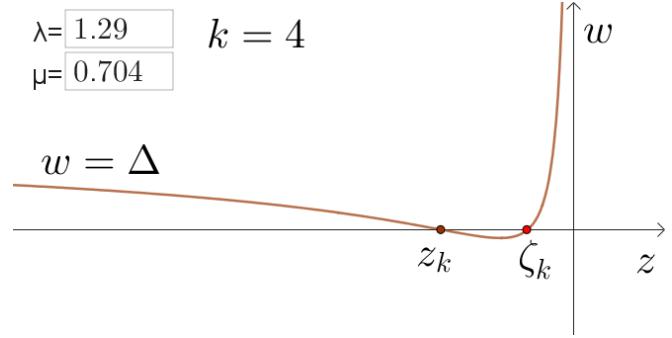


Figure 6:  $(\lambda, \mu) \in G_2$

## Funding

The first author acknowledges support from the Foundation for Basic Research of the Republic of Uzbekistan (grant no. FZ-20200929224).

## References

1. F. Chung: Spectral Graph Theory, CBMS Regional Conf. Series Math., Washington DC (1997)
2. A. Grigor'yan: Heat kernels on manifolds, graphs and fractals, in: European Congress of Mathematics, Barcelona, July 10-14, 2000, Progress in Mathematics 201, Birkhäuser, 393-406 (2001)
3. G. Berkolaiko, R. Carlson, S.A. Fulling and P.A. Kuchment (eds.): Quantum Graphs and Their Applications, Contemp. Math. 415 (2006)
4. Damanik D., Hundertmark D., Killip R., Simon B. Variational estimates for discrete Schrödinger operators with potentials of indefinite sign. Comm.Math.Phys. Vol. 238, 545-562 (2003)

5. P. Exner, J.P. Keating, P.A. Kuchment, T. Sunada and A. Teplyaev (eds.): Analysis on Graphs and Its Applications, Proc. Symp. Pure Math., vol. 77, AMS Providence, (2008)
6. G. Berkolaiko and P.A. Kuchment: Introduction to Quantum Graphs, AMS Mathematical Surveys and Monographs, **186**, (2012)
7. O. Post: Spectral Analysis on Graph-Like Spaces, Lecture Notes in Mathematics 2039, Springer, (2012)
8. E. Korotyaev and N. Saburova: Schrödinger operators on periodic discrete graphs, arXiv:1307.1841 (2013)
9. S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov: The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys. **262**, 91–115 (2006)
10. P. Exner, P.A. Kuchment and B. Winn: On the location of spectral edges in Z-periodic media, J. Phys. A **43**, 474022 (2010)
11. Bellissard J. and Schulz-Baldes H. Scattering theory for lattice operators in dimension  $d \geq 3$ , Reviews in Mathematical Physics, **24**(8), 1250020 (2012)
12. F. Hiroshima, I. Sasaki, T. Shirai and A. Suzuki: Note on the spectrum of discrete Schrödinger operators, J. Math-for-Industry **4** 105-108, (2012)
13. Faria da Veiga P. A., Ioriatti L., and O'Carroll M.: Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians. Phys. Rev. E (3) **66**, 016130, 9 pp. (2002)
14. S.N. Lakaev, I.N. Bozorov.: The number of bound states of one particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. Theoretical and Mathematical physics, **158**(3): 360-376 (2009)
15. S.N. Lakaev, I. N. Bozorov, “On the number and location of eigenvalues one-particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice,”Uzbek Mathematical Journal, **2**, 70-80 (2007) [in Russian].
16. F. Hiroshima, Z. Muminov, U. Kuljanov, “Threshold of discrete Schrödinger operators with delta potentials on N-dimensional lattice,”Linear and Multilinear Algebra. 0308-1087 (Print) 1563-5139 (Online), 1-36 (2020).
17. Z.E. Muminov, Sh.U. Alladustov, and Sh.S. Lakaev, “Threshold Analysis of the Three Dimensional Lattice Schrödinger Operator with Non-local Potential,”Lobachevskii J. Math., **41** (6) 1094-1102 (2020).
18. Z.E. Muminov, Sh.U. Alladustov, and Sh.S. Lakaev, “Spectral and threshold analysis of a small rank perturbation of the discrete Laplacian,”J. Math. Anal. Appl., **496** (2), 124827 (2021).
19. Yafaev D. R.: *Scattering theory: Some old and new problems*, Lecture Notes in Mathematics, 1735. Springer-Verlag, Berlin, (2000), 169 pp.

20. Lakaev S.N., Tilovova Sh.M. Merging of eigenvalues and resonances of a two-particle Schrödinger operator. *Theoretical and Mathematical Physics*. 101:2:13201331. (1994)
21. Z. Muminov, Sh. Lakaev.: On negative eigenvalues of the discrete Schrödinger operator with non-local potential. *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*. 3 (1) Article 4, (2020)
22. Sh.Yu. Kholmatov, S.N. Lakaev, F.M. Almuratov.: Bound states of Schrödinger-type operators on one and two dimensional lattices. *J. Math. Anal. Appl.* 503 (2021) 125280.
23. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov. *Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics*. *Ann. Henri Poincare*, 5 (4), 743-772 (2004).

## II. SHO'BA. ALGEBRA VA GEOMETRIYA

BERNSTEIN-NIKOLSKII TYPE INEQUALITIES FOR ALGEBRAIC

POLYNOMIALS IN REGIONS WITH CUSPS

F.G. ABDULLAYEV, C.D. GÜN

### ABSTRACT

Let  $G \subset \mathbb{C}$  be a bounded Jordan region in the complex plane,  $L := \partial G$ ; Let  $w = \Phi(z)$ ,  $\Phi: \Omega \rightarrow \{w: |w| > 1\}$ , be a univalent conformal mapping with  $\Phi(\infty) = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ . Let  $\wp_n$  denotes the class of all algebraic polynomials  $P_n(z)$  of degree at most  $n \in \mathbb{N}$ .

Let  $\{z_j\}_{j=1}^l$  be the fixed system of distinct points on the curve  $L$ . We consider the generalized Jacobi weight function  $h(z)$  which is defined as follows:

$$h(z) := \prod_{j=1}^l |z - z_j|^{\gamma_j}, \quad z \in \mathbb{C},$$

where  $\gamma_j > -2$ , for all  $j = 1, 2, \dots, l$ .

For any  $0 < p \leq \infty$ , we introduce:

$$\|P_n\|_{A_p(h,G)} := \left( \iint_G h(z) |P_n(z)| d\sigma_z \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_{A_\infty(1,G)} := \max_{z \in G} |P_n(z)|, \quad p = \infty,$$

where  $\sigma$  be the two-dimensional Lebesgue measure.

In this work we study the following type estimation

$$\|P_n^{(m)}\|_X \leq \lambda_n \|P_n\|_Y, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

for the  $m$ -th derivative of the algebraic polynomials  $P_n(z)$ , where  $\lambda_n := \lambda_n(G, h, p, m) > 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , is a constant, depending on the geometric properties of the region  $G$  and the weight function  $h$ , in general.

Inequalities (1) are often found in the literature, which is called the Bernstein ( $X = Y = A_\infty$ ), Markov ( $X = Y = A_p$ ,  $p > 0$ ) and Nikolskii ( $m = 0$ ;  $X = A_q$ ,  $Y = A_p$ ,  $0 < p < q < \infty$ ). Inequalities of type (1) have been studied in [1]-[4] and others (see, also references therein), for the algebraic polynomials in various spaces.

#### REFERENCES

1. Abdullayev F.G., Aral D. The relation between different norms of the algebraic polynomials in the regions of complex plane, Azerb. J. of Math. 2011; 1(2): 70-82.
  2. Abdullayev F.G. Tunc T., Abdullayev G.A. Polynomial inequalities in quasidisks on weighted Bergman space, Ukr. Math. J. 2017; 69 (5): 675-695.
  3. Milovanovic G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M. Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros, Singapore, World Scientific, 1994.
  4. Nikolskii S.M. Approximation of function of several variables and imbedding theorems, New-York, Springer-Verlag, 1975.
- F.G. ABDULLAYEV, fabdul@mersin.edu.tr; Mersin University, Turkey;  
C.D. GÜN, cdgun@gantep.edu.tr; Gaziantep University, Turkey.

#### NOTE ON BINARY LEIBNIZ ALGEBRAS

Aiken Kazin and Farukh Mashurov

#### Abstract

In this work, we consider a free binary Leibniz algebra defined by the following identities

$$\langle a, a, b \rangle = 0, \langle a, b, a \rangle = 0, \langle a, b, ab \rangle = 0$$

where  $\langle a, b, c \rangle = (ab)c - a(bc) + b(ac)$ . We prove the nilpotency of a free binary Leibniz algebra satisfying the second(left)-Engel condition  $b(ba) = 0$ .

**Theorem 1.** Let  $B(X)$  be a free binary Leibniz algebra with the (left)-Engel identity. Then  $B(X)$  is nilpotent with nilpotency index 5.

**Remark.** Let  $B$  be a binary Leibniz algebra with the (right)-Engel identity  $(ab)b = 0$ . Then  $B$  can be non-nilpotent. There is a two-dimensional algebra with multiplication table  $e_2e_1 = e_1$ , which satisfies the identities of binary Leibniz algebra and  $(ab)b = 0$ , but not nilpotent.

In addition we consider the question posed by Dzhumadil'daev and Ismailov about the Leibniz analogue of Malcev algebras [1]. We present a modest contribution that completes a piece of the picture below:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}ie & \subset & \mathcal{M}alc & \subset & \mathcal{L}ie_2 & \subset & \mathcal{L}ie_1 \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{L}eib & \subset & ? & \subset & \mathcal{L}eib_2 & \subset & \mathcal{L}eib_1 \end{array}$$

To do this, we introduce a class of algebras defined by the identities

$$\langle a, a, b \rangle = 0, \langle a, b, a \rangle = 0$$

and the identity

$$\langle a, b, ac \rangle = \langle a, b, c \rangle a,$$

where  $\langle a, b, c \rangle = (ab)c - a(bc) + b(ac)$ . It is proved that this class of algebras lies between the classes  $Leib$  and  $Leib_2$ .

### References:

1. Ismailov, N.A., Dzhumadil'daev, A.S. Binary Leibniz Algebras. Math Notes 110, 322–328 (2021).  
УДК 517.938

## ON $p$ -ADIC DYNAMICAL SYSTEMS OF A RATIONAL FUNCTION E. T. ALIEV

Let  $f$  be a function on a topological space  $X$ . Denote  $f^n(x)$ , meaning  $f$  is applied to  $x \in X$  iteratively  $n$  times.

The point  $x \in X$  is called a fixed point for  $f$  if  $f(x) = x$ . The point  $x \in X$  is a periodic point of period  $m$  for  $f$  if  $f^m(x) = x$ . The least positive  $m$  for which  $f^m(x) = x$  is called the prime period of  $x$ . We denote the set of all periodic points of period  $m$  by  $\text{Per}_m(f)$ , and the set of all fixed points by  $\text{Fix}(f)$ . For given topological space  $X$ ,  $x^{(0)} \in X$  and  $f : X \rightarrow X$  the discrete-time dynamical system is defined as

$$x^{(0)}, x^{(1)} = f(x^{(0)}), x^{(2)} = f^2(x^{(0)}), x^{(3)} = f^3(x^{(0)}), \dots \quad (1)$$

For a given dynamical system one has to describe (see [2]) the set of limit points of  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  for arbitrary given  $x^{(0)}$ .

The completion of  $\mathbb{Q}$  with respect to  $p$ -adic norm defines the  $p$ -adic field which is denoted by  $\mathbb{Q}_p$ . The algebraic completion of  $\mathbb{Q}_p$  is denoted by  $\mathbb{C}_p$  and it is called complex  $p$ -adic numbers (see [1]). Note that  $\mathbb{C}_p$  is algebraically closed, an infinite dimensional vector space over  $\mathbb{Q}_p$ .

We consider a  $p$ -adic dynamical system associated with the function  $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  defined as (see [3])

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq ab, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_p, \quad (2)$$

where  $x \neq \hat{x} = -\frac{c}{b}$ .

If  $(c-1)^2 + 4ab \geq 0$  we define

$$x_1 = \frac{1-c+\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2b}, \quad x_2 = \frac{1-c-\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2b}. \quad (3)$$

Note that the set of fixed points of the function (2) is

$$\text{Fix}(f) = \{x: f(x) = x\} = \begin{cases} \{x_1, x_2\}, & \text{if } (c-1)^2 + 4ab > 0 \\ \{x_1\}, & \text{if } (c-1)^2 + 4ab = 0 \\ \emptyset, & \text{if } (c-1)^2 + 4ab < 0. \end{cases}$$

To study dynamical system (1) for (2) we use the following known formula for  $f^n(x)$ ,  $n \geq 1$ :

$$f^n(x) = \frac{1}{b} + \frac{ab-c}{b} \cdot \begin{cases} \frac{(bx-1+\alpha)\alpha^{n-1} - (bx-1+\beta)\beta^{n-1}}{(bx-1+\alpha)\alpha^n - (bx-1+\beta)\beta^n}, & \text{if } \alpha \neq \beta \\ \frac{(bx-1)(n-1)+n\alpha}{\alpha[(bx-1)n+(n+1)\alpha]}, & \text{if } \alpha = \beta, \end{cases} \quad (4)$$

where

$$\alpha \equiv \alpha(a, b, c) = \frac{1+c+\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2}, \quad \beta \equiv \beta(a, b, c) = \frac{1+c-\sqrt{(c-1)^2+4ab}}{2}. \quad (5)$$

For  $q \geq 1$  denote

$$K_q \equiv K_q(a, b, c) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{q-j-1} \beta^j.$$

Let us give some examples of  $K_q$ :

$$K_q \equiv K_q(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = 1 \\ 1 + c & \text{if } q = 2 \\ 1 + c + c^2 + ab & \text{if } q = 3 \\ (1 + c)(1 + 2ab + c^2) & \text{if } q = 4. \end{cases}$$

Denote the following

$$P_p = \{x \in \square_p : \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^n(x) = \hat{x}\}.$$

The following theorems give complete answer to the main problem:

**Theorem 1.** Let function  $f$  be given by parameters  $(a, b, c) \in \square_p$  satisfying (2).

1) If  $K_q(a, b, c) \neq 0$  then  $\text{Per}_q(f) \setminus \text{Fix}(f) = \emptyset$ .

2) If  $K_q(a, b, c) = 0$  then any  $x \in \square_p \setminus P_p$  is  $q$ -periodic.

Denote

$$\tilde{K}_q^p = \{(a, b, c) \in \square_p : K_q(a, b, c) = 0\}.$$

$$\tilde{K}^{(p)} = \square_p \setminus \bigcup_{q=2}^{+\infty} \tilde{K}_q^{(p)}.$$

**Theorem 2.** Let function  $f$  be given by parameters  $(a, b, c) \in \tilde{K}^{(p)}$  satisfying (2). Then following equalities hold:

1) If  $(c - 1)^2 + 4ab \neq 0$  then for any  $x \in \square_p \setminus (\text{Fix}(f) \cup P_p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \begin{cases} x_2, & \text{if } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_p < 1 \\ x_1, & \text{if } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_p > 1. \end{cases}$$

2) If  $(c - 1)^2 + 4ab = 0$  then for any  $x \in \square_p \setminus (\text{Fix}(f) \cup P_p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_1 = \frac{1-c}{2b}.$$

## REFERENCES

1. N. Koblitz,  $p$ -adic numbers,  $p$ -adic analysis and zeta-function, Springer, Berlin, 1977.
2. U.A. Rozikov, An introduction to mathematical billiards, World Sci. Publ. Singapore. 2019, 224 pp.
3. F.M. Mukhamedov, U.A. Rozikov, On rational  $p$ -adic dynamical systems, Methods of Funktional Analysis and Topology, 10(2004), no.2, 21-31.

## **Formal stability investigation for Hamiltonian system with three degrees of freedom**

<sup>1</sup>*Batkhan A.B.*, <sup>2</sup>*Khaydarov Z.Kh.*

<sup>1</sup> *Faculty of Aerospace Engineering, Technion – Israel Institute of Technology, Israel,*  
e-mail: batkhin@gmail.ru

<sup>2</sup> *Samarkand State University named after Sh. Rashidov, Samarkand, Uzbekistan,*  
e-mail: zafarxx@gmail.com

### **1 Motivation and problem setting**

There are three main types of stability for theoretical-mechanical problems [3]: a) *Lyapunov stability* is the most rigorous and guarantees uniform boundedness of solutions over an infinite interval of time with respect to the set of perturbations by initial conditions and parametres; b) *Formal stability* is weaker, but ensures a slower rate of scattering of trajectories than the power growth with an arbitrary positive exponent; c) *Weak stability* means only bounded solutions on a finite interval with respect to a set of disturbing factors.

### **Problem setting**

To provide formal stability investigation one has to describe the mutual position of resonant varieties: a) for elementary singular point of a multiparameter Hamiltonian system we discuss a method of computing the condition of existence of a resonance of an arbitrary order and multiplicity; b) for a certain resonant vector this condition defines a resonant variety written with the characteristic polynomial coefficients of linearized Hamiltonian system; c) by means of computer algebra and power geometry techniques polynomial parametrization of the resonant variety is obtained; d) these results are used

to investigate the formal stability regions of the equilibrium of a Hamiltonian multiparameter system. Some non-trivial example is presented.

## 2 Vicinity of a stationary point

Consider a Hamiltonian system

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

with  $n$  degrees of freedom in the neighborhood of a *stationary point* (SP) at the origin

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, \eta) = 0. \quad (2)$$

If the Hamilton function  $\gamma(\zeta)$  is analytic at this point, then it expands into a convergent power series

$$\gamma(\zeta) = \sum \gamma_{pq} \xi^p \eta^q, \quad (3)$$

where  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geq 0$ ,  $\gamma_{pq}$  are constant coefficients. Since the point (2) is stationary, the expansion of (3) starts with quadratic terms. They correspond to the linear part of the system (1).

The eigenvalues of its matrix are divided into pairs  $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Denote by vector  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  the set of *basic eigenvalues*.

**Theorem 1 ([2])** *There is a canonical formal transformation  $\xi, \eta \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}$  that reduces the Hamiltonian (3) to the normal form*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum g_{pq} \mathbf{x}^p \mathbf{y}^q, \quad (4)$$

where the series  $g$  contains only resonant terms with  $\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$ .

For the real initial system (1), the constant coefficients  $g_{pq}$  of the complex normal form (4) satisfy special realness relations, and the standard canonical linear coordinate substitution  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}$  reduces the system (4) into a real system.

**Definition 1** *For each resonance are defined: **multiplicity**  $\mathfrak{k}$ : the number of linearly independent solutions  $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$  to the resonant equation*

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0; \quad (5)$$

**order**  $q$ :  $q = \min|\mathbf{p}|$  over  $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ , satisfying (5);  **$n$ -frequency resonance**: if exactly  $n$  nonzero eigenvalues  $\lambda_j$  are included in the nontrivial solution of the resonance equation; **strong resonances** are called the resonances of orders 2, 3 or 4.

**Definition 2** *Condition  $A_k^n$  for system with  $n$  DOF takes place if the resonant equation (5) has no integer solutions  $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$  with  $|\mathbf{p}| \leq k$ .*

This condition means that there are no resonances up to and including the order  $k$ . If it is satisfied, then in the normal form (4)

$$g = \sum_{l=1}^{[k/2]} g_l(\mathbf{r}) + \tilde{g}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (6)$$

where  $g_l(\mathbf{r})$  are homogeneous polynomials from  $r_j = x_j y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , of degree  $l$ , and  $\tilde{g}^{(k)}$  is a series from  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  starting with powers above  $k$  and  $[k/2]$  means an integer part of number  $k/2$ . In particular, under the condition  $A_2^n$  we have

$$g = \langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \tilde{g}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (7)$$

and under the condition  $A_4^n$  we have

$$g = \langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle C\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle + \tilde{g}^{(5)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8)$$

where  $C$  is  $n \times n$  matrix.

**Definition 3** *A stationary point  $\zeta = 0$  of a real Hamiltonian system (1) is stable by Lyapunov iff for every  $\epsilon > 0$  in “cube”  $\|\zeta\| < \epsilon$  there exists a closed integral  $(2n - 1)$ -dimensional manifold  $\mathcal{L}$  surrounding the point  $\zeta = 0$  from all sides.*

**Lemma 1** *A stationary point  $\zeta = 0$  is Lyapunov stable if there exists a sign-definite real integral  $f(\zeta) = f_l(\zeta) + \tilde{f}^{(l)}(\zeta)$  of the system (1), where  $f_l(\zeta)$  is a homogeneous form of degree  $l$ . In other words,  $\{f, \gamma\} = 0$  and  $f_l(\zeta)$  does not equal to zero at any  $\zeta$  except the point  $\zeta = 0$ .*

Stability is possible only if  $\Re \boldsymbol{\lambda} = 0$ . If the condition  $A_2^n$  is satisfied, then all  $\lambda_j$  are different and non-zero. Suppose  $X_j^2 + Y_j^2 = R_j$ ,  $\lambda_j = i\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Theorem 2** *If the condition  $A_2^n$  is satisfied and the numbers  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  are of the same sign, then the stationary point  $\zeta = 0$  is stable according to Lyapunov.*

Here the role of the integral  $f$  is played by the Hamiltonian  $\gamma$  itself, for it is an integral, the notation (7) has the form (6) with  $k = 2$  and the form  $\gamma_2 = g_2 = -\langle \alpha, R \rangle / 2$  is sign-defined, for  $R \geq 0$ .

**Definition 4 ([3])** A stationary point  $\zeta = 0$  of a real Hamiltonian system (1) is formally stable if there exists a formal real sign-defined integral  $f(\zeta) = f_l(\zeta) + \tilde{f}^{(l)}(\zeta)$  of the system (1), i.e., the formal identity  $\{f, \gamma\} = 0$  is satisfied and the homogeneous form  $f_l$  is null only at  $\zeta = 0$ .

Formal stability means that the divergent of solutions from the SP is very slow: slower than any finite degree of  $t$ .

Since  $r_j r_k = -\frac{1}{4} R_j R_k$ , then under the condition  $A_4^n$  the sum (8) takes the form

$$g = -\frac{1}{2} \langle \alpha, R \rangle - \frac{1}{4} \langle CR, R \rangle + \tilde{g}^{(5)} \quad (9)$$

Hence, all elements of matrix  $C$  are real.

Let  $K \subset \mathbb{R}^n$  be a linear shell of integers  $q$  satisfying the equation  $\langle \alpha, q \rangle = 0$ , and  $Q = \{q \geq 0, q \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$  is a non-negative orthant without origin.

**Theorem 3 ([4])** If Condition  $A_4^n$  is satisfied and in (9)  $\langle Cq, q \rangle \neq 0$  for  $q \in K \cap Q$ , then the point  $\zeta = 0$  is formally stable in the sense of Definition 4.

Here, the normal form of the Hamiltonian (4) from Theorem 1 is used to construct the formal integral.

### 3 Formal stability investigation in a case of 3 DOF

Below we describe a method for investigating formal stability of the SP for a multiparameter Hamiltonian system with 3 DOF. Consider a Hamiltonian system in the vicinity of the SP for which the following conditions are satisfied: a) the number of DOF of the system is greater than two; b) form  $\gamma_2$  in expansion (3) is nondegenerate and is not sign definite; c) the Hamiltonian function  $\gamma$  smoothly depends of the vector of parameters  $P$  from a domain  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$ .

**Corollary 1 (of Theorem 3)** If in  $\mathbb{R}^3$  the intersection of the plane  $\langle \lambda, q \rangle = 0$  and the cone  $\langle Cq, q \rangle$  either does not lie in  $Q = \mathbb{R}_+^3$ , or lies in  $Q = \mathbb{R}_+^3$ , but does not contain the integer vector  $q$ , then the stationary point is formally stable.

The behavior of the phase flow in the first approximations is described by the linear Hamiltonian system

$$\dot{\zeta} = B(\mathbf{P})\zeta, \quad B(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}J \frac{\partial^2 \gamma_2(\mathbf{P})}{\partial \zeta^2}, \quad (10)$$

where  $J$  is the symplectic unit matrix. The characteristic polynomial  $\check{f}(\lambda)$  of the matrix  $B(\mathbf{P})$  contains only even degrees of  $\lambda$ ; therefore, it is a polynomial of  $\mu = \lambda^2$ . Such a polynomial is called *semi-characteristic*:  $f_n(\mu) = \sum_{k=0}^n f_{n-k}(\mathbf{P})\mu^k$ ,  $f_0 \equiv 1$ .

**Definition 5** *The stability set  $\Sigma$  of the linear system (10) is the set of all values of parameters  $\mathbf{P} \in \Pi$  for which the stationary point  $\zeta = 0$  is Lyapunov stable.*

In order to apply Formal Stability Theorem 3, we should find the boundaries of the domains in the space of parameters  $\Pi$  determined by the resonant varieties corresponding to strong resonances.

**Definition 6** *A resonant variety  $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$  in the space  $K$  of coefficients  $a_1, \dots, a_n$  of the semi-characteristic polynomial  $f_n(\mu)$  of degree  $n$  is an algebraic variety on which the vector of basis eigenvalues  $\lambda$  is a nontrivial solution of the resonant equation  $\langle \mathbf{p}, \lambda \rangle = 0$  for a fixed integer vector  $\mathbf{p}^*$ . An analytical representation of the variety  $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}^*}$  in an implicit or parametric form is denoted by  $R_n^{\mathbf{p}^*}$ .*

To examine the formal stability of a stationary point of a Hamiltonian system (1), we should: a) find in the space of parameters  $\Pi$  the stability set  $\Sigma$  of the linear system (10); b) find such domains, in which the quadratic form  $\gamma_2(\mathbf{z})$  is not sign definite; c) find parts  $S_k$  in these domains that do not contain strong resonances; d) normalize the Hamiltonian in each of these parts  $S_k$  up to order four; and then e) apply Formal Stability Theorem 3. To do this, it is sufficient to select a point in each  $S_k$  in the space of parameters and use one of the normalization algorithms for the Hamiltonian function. Since all eigenvalues  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) are simple at each interior point of  $S_k$ , the invariant normalization algorithm can be easily applied.

The border of the stability set  $\Sigma$  in generic case is the resonant variety  $\mathcal{R}_3(1,1,0)$ .

For  $n = 3$  the borders between the parts  $S_k$  are defined by the following resonant varieties:

a)  $\mathcal{R}_3^{(2,1,0)}, \mathcal{R}_3^{(3,1,0)}$  corresponding two-frequency resonances and b)  $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}, \mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$  corresponding three-frequency resonances.

A general description of the procedure for obtaining condition on the existence of two and multi-frequency resonances is as follows (for details see [1]): 1) for a certain vector  $\mathbf{p}^* = (r, q, 1)$ , where  $r, q \in \mathbb{Q}$ ,  $r, q \neq 0$ , satisfying the resonance equation (5), a polynomial ideal is composed  $\mathcal{J} = \{\langle \mathbf{p}^*, \lambda \rangle, \lambda_j^2 - \mu_j\}$ ; 2) Gr $\Gamma$ bner basis  $\mathcal{G}$  of this ideal with the elimination monomial order of variables  $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, n$  is computed. The first polynomial  $R_3^{(r,q,1)}(\mu_j)$  of  $\mathcal{G}$  is a quasi-homogeneous polynomial in the variables  $\mu_j, j = 1, \dots, n$ . Its zeroes determine the condition of existence of resonance for a given vector  $\mathbf{p}^*$ . This condition takes the form

$$R_3^{(r,q,1)}(\mu_j) \equiv q^4 \mu_2^2 - 2q^2 r^2 \mu_1 \mu_2 + r^4 \mu_1^2 - 2q^2 \mu_2 \mu_3 - 2r^2 \mu_1 \mu_3 + \mu_3^2 = 0. \quad (11)$$

For condition (11) a power transformation [2] with the corresponding variable change  $\mu_1 = s_2 s_3$ ,  $\mu_2 = s_1 s_3$ ,  $\mu_3 = s_3$  is done. It reduces the polynomial  $R_3^{(r,q,1)}(\mu_j)$  into a polynomial of two variables  $\tilde{R}_3^{(r,q,1)} \equiv q^4 s_1^2 - 2q^2 r^2 s_1 s_2 + r^4 s_2^2 - 2q^2 s_1 - 2r^2 s_2 + 1 = 0$ , which has the parametric representation of the roots  $\mu_1 = (r^2 u(q+1) + q-1)^2 v$ ,  $\mu_2 = (r^2 u - 1)^2 v r^2$ ,  $\mu_3 = (r^2 u + 2q-1)^2 v r^2$ .

For each strong resonance of orders 2, 3 and 4 parametric representation of the corresponding variety was obtained. Their mutual location is shown in Fig. 1 in [1].

#### 4 Example

Consider a modified Hamiltonian oscillation system with 3DOF and two parameters. Such a system arises in the study of motion near a linearly stable SP of three mathematical pendulums of equal length  $l$  and close masses, connected by weightless elastic springs of stiffness  $k$ .

The normal coordinates  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$  are chosen as the generalized coordinates and form  $\gamma_2$  of the Hamilton function is written as

$$H_2 = -\frac{(2\alpha+1)Q_1^2}{2\alpha} - \frac{\alpha P_1^2}{4\alpha+2} + (\beta+1)Q_2^2 + \frac{P_2^2}{4} - (2\alpha+1)(2\beta\alpha+\beta+1)Q_3^2 + \frac{P_3^2}{8\alpha+4},$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are the parameters which, according to the physical meaning of the problem, must be positive. Since the form  $H_2$  is not sign-defined, the Dirichlet theorem is inapplicable. Let us perform a study of the formal stability of the SP.

For the initial parameters, the vector of basic eigenvalues is the following  $\lambda = (-1, \sqrt{\beta + 1}, -\sqrt{2\beta\alpha + \beta + 1})^\top$ . Let us introduce new parameters  $a, b$  so that the value of  $a$  is the square of the deviation of the second frequency from 1, and the value of  $b$  is the square of the deviation of the third frequency from the second frequency, i.e.  $\alpha = b/(2a)$ ,  $\beta = a$ . In the new parameters  $a, b$ , the domain  $\mathcal{K} \subset \Pi$ , for values of which all eigenvalues are purely imaginary, is a positive quadrant of the parameter plane  $\Pi$ , and the vector  $\lambda = (-1, \lambda_2, -\lambda_3)^\top$ , where  $\lambda_2 = \sqrt{a + 1}$ ,  $\lambda_3 = \sqrt{a + b + 1}$ .

For application of Bruno's Formal Stability Theorem 3 it is necessary to normalize the Hamiltonian to the 4th order in the domain without strong resonances.

Let us determine the location of resonance manifolds in the domain of  $\mathcal{K}$ . Since there is no third degree form in the original Hamiltonian, it is sufficient to study the 4th order resonances, i.e., the manifolds  $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}_1^*}$ ,  $\mathbf{p}_1^* = (3, 1, 0)$  and  $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}_2^*}$ ,  $\mathbf{p}_2^* = (2, 1, 1)$ .

In variables  $a, b$ , these manifolds are written in the following form:

$$\begin{aligned} R_3^{\mathbf{p}_1^*} &= (9a + 8)(8 - a)(9a + 8 + 9b)(8a + 8 - b)(8a + 8 + 9b)(a - 8 + b) = 0 \\ R_3^{\mathbf{p}_2^*} &= (9a^2 - 6ab + b^2 + 8a - 8b)(b^2 - 16a - 8b)(9a^2 + 24ab + 16b^2 + 8a \\ &\quad + 16b) = 0. \end{aligned}$$

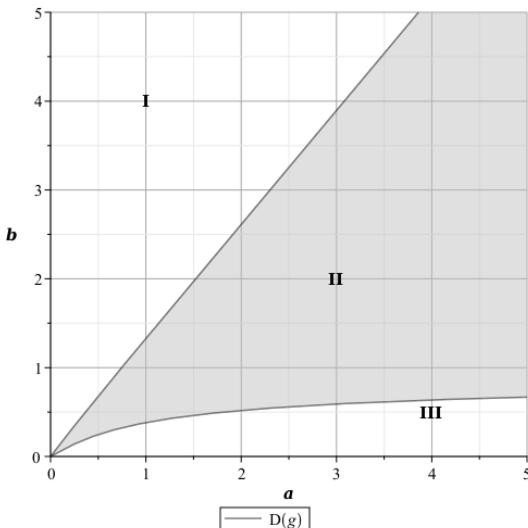
Manifold corresponding to the two-frequency resonances on the first quadrant  $a, b > 0$  is the union of three lines:  $a = 8$ ,  $b = 8(a + 1)$ ,  $a + b = 8$ . Manifold corresponding to the three-frequency resonances on the first quadrant  $a, b > 0$  is the union of two parabolas  $(3a - b)^2 + 8(a - b) = 0$ ,  $(b - 4)^2 - 16(a + 1) = 0$ . On the described manifolds the structure of the normal form changes, and study of stability can be carried out according to the methods in [4].

Here we provide formal stability investigation of the initial system in accordance with the conditions of Theorem 3 and Corollary 1, i.e., in the domain of parameter values where there are no strong resonances.

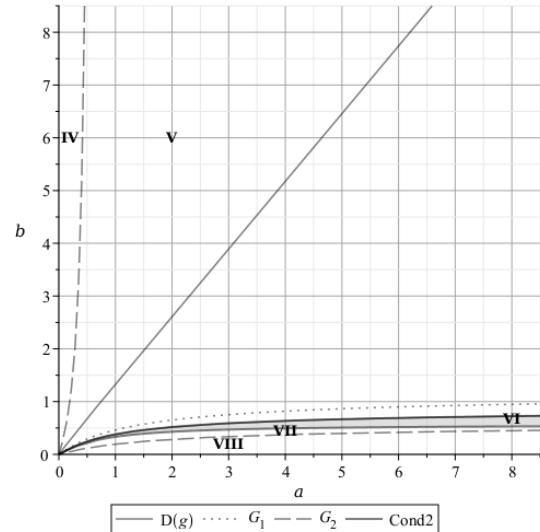
At the first step we normalize the quadratic part of  $H_2$ . At the second step, we perform the normalization using the Zhuravlev invariant normalization method (for details

see [5]). Due to the fact that the normalization is performed under the condition that there are no strong resonances, the obtained NF depends only on the action variables  $\rho_j$ , and can be written as  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4$ , where

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 &= -\rho_1 + \lambda_2\rho_2 - \lambda_3\rho_3 \\ \mathcal{H}_4 &= -\frac{b\rho_1^2}{128(a+b)} + \frac{b(1+2a)\rho_1\rho_2}{32\lambda_2(a+b)} - \frac{b(2b+2a+1)\rho_1\rho_3}{32\lambda_3(a+b)} - \\ &\quad - \frac{(4a+1)\rho_2^2}{128\lambda_2} + \frac{a(2b+1+4a)\rho_2\rho_3}{32\lambda_2\lambda_3(a+b)} - \frac{(a^2-ab+b^2)(4b+4a+1)\rho_3^2}{128(a+b)a\lambda_3^2}.\end{aligned}$$



a) for Case 1



b) for Case 2

**Picture 1:** Domain of formal stability

According to Corollary 1 of Theorem 3, we find in the first quadrant of space  $\Pi$  of the new parameters  $a, b$  of the domains in which the conditions of Corollary are satisfied. From the equation of the plane  $\mathcal{H}_2 = 0$ , we express the variable  $\rho_1$ , substitute it into the equation of the cone  $\mathcal{H}_4 = 0$  and obtain the quadratic equation

$$g \equiv a_0\zeta^2 + a_1\zeta + a_2 = 0, \quad \zeta = \rho_2/\rho_3, \quad (12)$$

whose coefficients are the following

$$a_0 = \frac{G_0}{128(a+b)\lambda_2}, \quad a_1 = -\frac{G_1}{64\lambda_2\lambda_3(a+b)}, \quad a_2 = \frac{G_2}{128(a+b)a\lambda_3^2},$$

$$G_0 = 7a^2b - 4a^2 + 6ab - a + 2b,$$

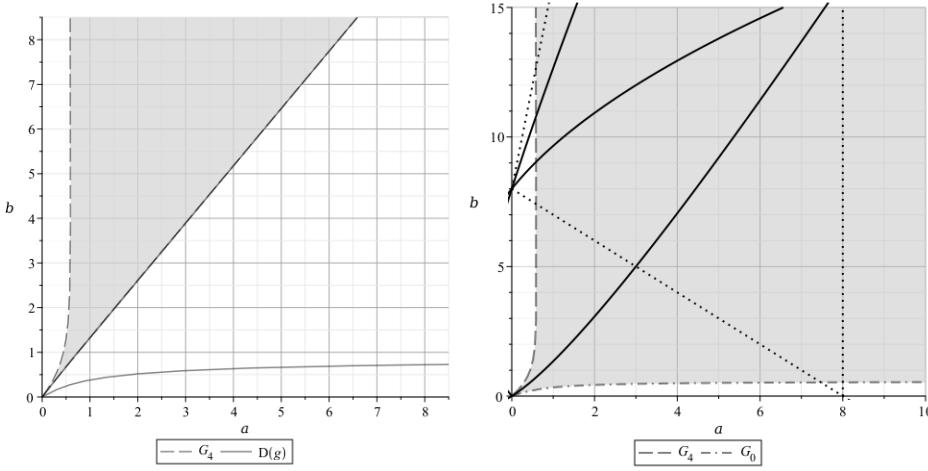
$$G_1 = 7a^2b + 7ab^2 - 8a^2 + 6ab + 5b^2 - 2a + 3b,$$

$$G_2 = 7a^3b + 14a^2b^2 + 7ab^3 - 4a^3 + 10a^2b + 10ab^2 - 4b^3 - a^2 + 4ab - b^2.$$

Conditions of Corollary 1 are satisfied in one of the following cases: 1) discriminant of equation (12) is negative, so  $D(g) < 0$ ; 2) discriminant of equation (12) is positive, but both roots are negative, so  $D(g) > 0$ ,  $a_1/a_0 > 0$ ,  $a_2/a_0 \geq 0$ ; 3) there is at least one positive root of  $\zeta^+$ , but the value of  $\rho_1$  corresponding to it is non-positive, so  $a_1/a_0 < 0$ ,  $\zeta^+ < \lambda_3/\lambda_2$ ; 4) equation (12) degenerates into a linear equation with a positive root  $\zeta^+$  and with  $\rho_1 < 0$ , so  $a_0 = 0$ ,  $\zeta^+ < \lambda_3/\lambda_2$ ; 5) given  $D(g) = 0$ , the multiple root of equation (12) is  $\zeta < 0$ , or  $\zeta > 0$  but  $\rho_1 < 0$ .

**Case 1** Discriminant of equation (12) is the following:  $D(g) = -4\lambda_2^2 G_3 / (\lambda_3^2 G_0^2)$ , where  $G_3 = 56a^5b + 84a^4b^2 - 28a^3b^3 - 56a^2b^4 - 48a^5 + 46a^4b + 78a^3b^2 - 12a^2b^3 - 35ab^4 - 24a^4 + 32a^3b + 22a^2b^2 - 12ab^3 - 8b^4 - 3a^3 + 6a^2b - 2b^3$ .

In the first quadrant the sign of  $D(g)$  changes only on the curve  $G_3 = 0$ , which divides the first quadrant into three curvilinear segments marked I, II, III in Pic. 1a. Substituting the coordinates of points from these domains shows that the discriminant is negative in domain II.



a) for Case 3

b) Final domain of formal stability

Picture 2: Domain of formal stability

**Case 2** Let us write out expressions for the ratios of the coefficients of the polynomial  $g$   $\frac{a_1}{a_0} = -\frac{2\lambda_2 G_1}{\lambda_3 G_0}$ ,  $\frac{a_2}{a_0} = \frac{\lambda_2^2 G_2}{a\lambda_3^2 G_0}$ . The signs of the ratios can change on the curves  $G_j = 0$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Their mutual arrangement is shown in Pic. 1b together with the curve  $G_3 = 0$ . In the mentioned domains where  $D(g) > 0$  the values of  $a_1/a_0, a_2/a_0$  are calculated. Both coefficients are positive in the domain VI.

**Case 3** The condition requires that there be at least one positive root ( $a_1/a_0 < 0$ ) and that the largest positive root  $\zeta^+ = (-a_1/a_0 + \sqrt{D(g)})/2$  be less than the ratio  $\lambda_2/\lambda_3$ . In variables  $a, b$  this condition is rewritten as  $\frac{4\lambda_2^2 G_4}{a\lambda_3^2 G_2} > 0$ ,  $G_4 = 7ab^3 + 8a^3 + 4a^2b - 4b^3 + 2a^2 - b^2$ .

Two domains satisfy Condition 3 but one of them coincides with the domain VI from Pic. 1b. Pic. 2a shows the domain bounded by the curves  $G_4 = 0$  and  $G_3 = 0$ .

**Cases 4 and 5** are always satisfied, since in these cases the only root of  $\rho_1$  is always negative.

The final result is the domain shown in Pic. 2b. It is contained between the curves  $G_0$  and  $G_4$ . The resonance varieties  $\mathcal{R}_3^{p_1}$  (shown by dotted lines) and  $\mathcal{R}_3^{p_1}$  (shown by solid lines) should be removed from this region.

**Acknowledgments.** The authors express their gratitude to Professor A.D.Bruno for helpful discussion of the work.

### References

1. A. B. Batkhin and Z. Kh. Khaydarov. Calculation of a strong resonance condition in a Hamiltonian system. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63(5):687–703, 2023.
2. Bruno A. D. Analytical form of differential equations (II) // Trans. Moscow Math. Soc.—1972.—Vol. 26.—P. 199–239.
3. Moser J. K. New aspects in the theory of stability in Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math.—1958.—Vol. 11, no. 1.—P. 81–114.
4. Bruno A. D. Formal stability of Hamiltonian systems // Math. Notes.—1967.—Vol. 1, no. 3.—P. 216–219.
5. Batkhin A. B., Bruno A. D., Varin V. P. Stability sets of multiparameter Hamiltonian systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics.—2012.—Vol. 76, no. 1.—P. 56–92.
6. Batkhin A. B., Khaydarov Z. K. Calculation of a strong resonance condition in a Hamiltonian system // Computational Mathematics and Mathematical Physics.—2023.—Vol. 63, no. 5.—P. 687–703.
7. Bruno A. D., Azimov A. A. Computing unimodular matrices of power transformations// Programming and Computer Software.—2023.—Vol.49, no.1.—P. 32–41.
8. Markeev A. P. Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics.—Moscow : Nauka, 1978.—(in Russian).
9. Zhuravlev V. F., Petrov A. G., Shunderyuk M. M. Selected Problems of Hamiltonian Mechanics.—Moscow : LENAND, 2015.—P. 304.—(in Russian).

# TRANSLATION-INVARIANT GIBBS MEASURES FOR THE POTTS MODEL ON THE CAYLEY TREE

Botirov G'olibjon Isroilovich, University of Exact and Social Sciences,  
e-mail: botirovg@yandex.ru

Mustafoyeva Zarinabonu Erkin qizi, Romanovskii Mathematical Institute,  
e-mail: mustafoyeva53@gmail.com

**Abstract.** In this talk, we consider description of translation-invariant splitting Gibbs measures (TISGMs) of the  $q$ -state Potts model on the Cayley tree of order three. It is analyzed possible solutions of TISGMs associated with critical temperatures (critical value of  $\theta$ ) and defined several special cases.

The Cayley tree  $T^k$  of order  $k \geq 1$  is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, with exactly  $k + 1$  edges issuing from each vertex. Let  $T^k = (V, L)$  where  $V$  is the set of vertices and  $L$  the of edges. Two vertices  $x$  and  $y$  are called *nearest-neighbors* if there exists an edge  $l \in L$  connecting them and we denote  $l = \langle x, y \rangle$ . A collection of nearest neighbor pairs  $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$  is called a *path* from  $x$  to  $y$ :

$$d(x, y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}.$$

For a fixed  $x^0 \in V$ , we set

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V | d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L | x, y \in V_n\}.$$

It is well known that there exists a one-to-one correspondence between the set  $V$  of vertices of the Cayley tree of order  $k \geq 1$  and the group  $G_k$  of free products of a  $k + 1$  cyclic group of order two with the generators  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ . [1, p.3]

For each  $x \in G_k$ , let  $S_1(x)$  denote the set of all neighbors of  $x$ , i.e.,  $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle \in L\}$ . The set  $S_1(x) \setminus S(x)$  is a singleton.

We consider the models in which the spin takes values in the set  $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$ ,  $q \geq 2$ . A configuration  $\sigma$  on the set  $V$  is then defined as a function  $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ ; the set of all configurations coincides with  $\Omega = \Phi^V$ .

Let  $G_k^*$  be a subgroup of index  $r \geq 1$ . We consider the right coset  $G_k \setminus G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ .

**Definition 1.** A configuration  $\sigma(x)$  is said to be  $G_k^*$ -periodic if  $\sigma(x) = \sigma_i$  for all  $x \in G_k$  with  $x \in H_i$ . A  $G_k$ -periodic configuration is said to be *translation invariant*.

The Hamiltonian of the Potts model has the form

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

where  $J \in R$ ,  $\langle x, y \rangle$  are nearest neighbors and  $\delta$  is the Kronecker's symbol:

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 0, & \text{if } u \neq v \\ 1, & \text{if } u = v \end{cases}$$

Given  $n = 1, 2, \dots$ , consider the probability distribution  $\mu_n$  on  $\Phi^{V_n}$  defined by

$$\mu_n(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\}, \quad (2)$$

where  $\beta = \frac{1}{T}$ ,  $T > 0$  is a temperature,  $Z_n$  is the corresponding partition function:

$$Z_n = \sum_{\sigma_n \in \Phi^{V_n}} \exp\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\}$$

and  $h_x = \{h_{1,x}, \dots, h_{q,x}\} \in R^q$ ,  $x \in V$  is a vector-valued function.

As usual, the probability distributions  $\mu_n$  are compatible if for any  $n \geq 1$  and  $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ :

$$\sum_{\sigma_n \in \Phi^{V_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_n(\sigma_n).$$

Here  $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$  is the concatenation of the  $\sigma_{n-1}$  and  $\omega_n$ . In this case, there exists a unique measure  $\mu$  on  $\Phi^V$  such that, for all  $n$  and  $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma | V_n = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

To describe conditions on  $h_x$  guaranteeing compatibility distribution  $\mu^{(n)}(\sigma_n)$  we have the following theorem from [1, p.105-115]:

**Theorem 1.** The probability distributions  $\mu_n(\sigma_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  in (2) are compatible iff for any  $x \in V$  the following equation holds:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (3)$$

where  $F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$  is defined as

$$F_i = \ln \left( \frac{(\theta-1) \exp h_i + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j} \right),$$

and  $\theta = \exp(J\beta)$ ,  $S(x)$  is the set of direct successors of  $x$ .

For all  $x \in V$ , a translation-invariant splitting Gibbs measure (TISGM) corresponds to a solution  $h_x$  of (3) with  $h_x = \{h_{1,x}, \dots, h_{q,x}\} \in R^q$ . From equation (3) we get  $h = kF(h, \theta)$ , i.e.,

$$h_i = k \ln \left( \frac{(\theta-1) \exp h_i + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j} \right), i = 1, \dots, q-1.$$

Then denoting  $z_i = \exp(h_i)$ ,  $i = 1, \dots, q-1$  we have

$$z_i = \left( \frac{(\theta-1) z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, i = 1, \dots, q-1. \quad (4)$$

We can rewrite the last equation from [2, p.636-678] as:

$$z_i = f_m(z) = \left( \frac{(\theta+m-1)z + q-m}{mz + q - m - 1 + \theta} \right)^k, \quad (5)$$

for some  $m = 1, \dots, q-1$ . [3, p.189-200]

It is explicit that  $z_0 = 1$  is a solution of (5). To find other solutions of (5) we denote  $x = \sqrt[3]{z}$ , and we get

$$\varphi(x) = mx^3 - (\theta-1)x^2 - (\theta-1)x + q - m = 0. \quad (6)$$

Then, solving  $\varphi'(x) = 0$

$$x^*(\theta, m) = \frac{\theta-1 + \sqrt{(\theta-1)^2 + 3m(\theta-1)}}{3m}.$$

**Remark 1.** All solutions of equation (5) are described for  $k = 3, q = 3$  and  $k = 3, q = 4$  in [4, 1651-1659] and [5, p.117-132], respectively.

Let  $k = 3, \theta > 1$ . We try to solve and find the solutions of (6) using Cardano's formula for  $m = 1$ . We denote  $x = y + \frac{\theta-1}{3}$  and rewrite (6):

$$y^3 + p(\theta)y + r(\theta) = 0, \quad (7)$$

where

$$p(\theta) = -\frac{1}{3}(\theta^2 + \theta - 2), r(\theta) = -\frac{1}{27}(2(\theta-1)^3 + 9(\theta-1)^2 - 27(q-1)).$$

Substituting  $x^*(\theta, 1)$  into the equation (3.3) for  $m = 1$ , we get

$$2\theta_1^3 + 3\theta_1^2 - 12\theta_1 - 27q + 34 + 2(\theta_1^2 + \theta_1 - 2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

From the last equation, we find

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{a(q)}}{\sqrt{2}} - q + 1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{-2a(q) + 12q^2 - 36q + 36 - \frac{16(q-1)^3 - 24(q-2)(q-1) - 16(3q-4)}{\sqrt{2a(q)}}},$$

where  $(q) = 2q^2 - 6q + 6 + 3\sqrt[3]{-2q^4 + 12q^3 - 26q^2 + 24q - 4}$ .

(7) equation has one negative solution for  $\theta < \theta_1$ ,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{r(\theta)}{2} + \sqrt{D(\theta)}} + \sqrt[3]{-\frac{r(\theta)}{2} - \sqrt{D(\theta)}}, D(\theta) = \frac{p^3(\theta)}{27} + \frac{r^2(\theta)}{4},$$

one positive solution for  $\theta = \theta_1$ ,

$$y = -\frac{1}{3}\sqrt{\theta_1^2 + \theta_1 - 2},$$

and three solutions for  $\theta > \theta_1$ ,

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p(\theta)}{3}}\cos\frac{\varphi(\theta)}{3}, y_2 = 2\sqrt{-\frac{p(\theta)}{3}}\cos\frac{\varphi(\theta)+2\pi}{3}, y_3 = 2\sqrt{-\frac{p(\theta)}{3}}\cos\frac{\varphi(\theta)+4\pi}{3},$$

where

$$\varphi(\theta) = \arccos\frac{2\theta^3 + 3\theta^2 - 12\theta + 34 - 27q}{2(\theta^2 + \theta - 2)^{\frac{3}{2}}}.$$

It can be seen that

$$x_0 = 1, x_1(\theta) = \frac{\theta-1}{3} + y_1 > 0, x_2(\theta) = \frac{\theta-1}{3} + y_2 < 0, x_3(\theta) = \frac{\theta-1}{3} + y_3 > 0$$

for  $\theta > \theta_1$ .

Let  $q = 2m$ . Then substituting  $x^*(\theta, m)$  into (6), we have  $\theta_m = m + 1$ . On the other hand, the critical value of  $\theta$  that ensures the non-uniqueness of Gibbs measures for the Potts model is  $\theta_{cr} = \frac{k+q-1}{k-1}$  ([1], p.115) and this critical value of  $\theta$  in the case  $k = 3, q = 2m$  coincides with  $\theta_m$ , i.e.,  $\theta_m = \theta_{cr} = m + 1$ . In this case, from (6) we get

$$x^0 = -1, x_4(\theta) = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\theta m - 2\theta - 3m^2 - 2m + 1 + \theta + m - 1}}{2m},$$

$$x_5(\theta) = \frac{-\sqrt{\theta^2 + 2\theta m - 2\theta - 3m^2 - 2m + 1 + \theta + m - 1}}{2m}.$$

**Theorem 1.** Let  $k = 3, \theta > 1$ . Then the following statements hold:

1.  $1 < z_1(\theta) = z_3(\theta)$ , if  $\theta = \theta_1$ ;
2.  $z_4(\theta) > 1$ , if  $\theta = \theta_{cr}$ , i.e.,  $q = 2m$ ;

3.  $1 < z_3(\theta) < z_1(\theta)$ , if  $\theta > \theta_1$ ;
4.  $z_1(\theta)$  is an increasing function for  $\theta > \theta_1$ ,

where  $z_1 = x_1^3(\theta)$ ,  $z_3 = x_1^3(\theta)$ , and  $z_4 = x_4^3(\theta)$ .

## REFERENCES

1. U.A.Rozikov, Gibbs measures on Cayley trees, World Scientific, 2013.
2. C.Kulske, U.A.Rozikov, Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree, Random Structures and Algorithms, 50 (2017).
3. C.Kulske, U.A.Rozikov, R.M.Khakimov, Description of all translation-invariant (splitting) Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree, Jour.Stat.Phys., 156:1 (2014).
4. R.M.Khakimov, F.Kh.Khaydarov, Translation-invariant and periodic Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree, Theor.Math.Phys., 189(2), (2016).
5. M.T.Makhammadaliev, Extremality of the translation-invariant Gibbs measures for the Potts model with four states on the Cayley tree of order  $k=3$ , Uzbek Mathematical Journal 66(1), 2022.

## ON DYNAMICA OF A QUADRATIC OPERATOR

**U. U. Jamilov, N. R. O'roqova**

*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics;*

*National University of Uzbekistan;*

*e-mails:* jamilovu@yandex.ru, nilufaroroqova6@gmail.com

Let

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

$(m-1)$ -dimensional simplex. A map  $V$  of  $S^{m-1}$  into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j \quad (1)$$

for any  $x \in S^{m-1}$  and for all  $k = 1, \dots, m$  where

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1. \quad (2)$$

A quadratic stochastic operator is called a Volterra operator if

$$p_{ij,k} = 0, \text{ for any } k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k = 1, \dots, m.$$

The trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{n=\infty}$  of an operator  $V$  for an initial point  $x \in S^{m-1}$  is defined by  $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$  for all  $n = 0, 1, 2, \dots$ , with  $x^{(0)} = x$ . Denote by  $\omega_V(x^{(0)})$  the set of limit points of

the trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{n=\infty}$ . The asymptotic behavior of trajectories Volterra QSOs was analysed in [2]

**Definition 1.** A point  $x \in S^{m-1}$  is called a *periodic point* of  $V$  if there exists an  $n$  so that  $V^n(x) = x$ . The smallest positive integer  $n$  satisfying the above is called the prime period or least period of the point  $x$ . A period-one point is called a *fixed point* of  $V$ .

Denote the set of all fixed points by  $Fix(V)$  and the set of all periodic points of (not necessarily prime) period  $n$  by  $Per_n(V)$ . Let  $D(V(x^*)) = (\partial V_i / \partial x_j)(x^*)$  be a Jacobian of  $V$  at the point  $x^*$ .

**Definition 2.** [1] A *fixed* point  $x^*$  is called hyperbolic if its Jacobian  $D(V(x^*))$  has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point  $x^*$  is called:

- i) *attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian  $D(V(x^*))$  are less than 1 in absolute value;
- ii) *repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian  $D(V(x^*))$  are greater than 1 in absolute value;
- iii) a *saddle*, otherwise.

We let  $intS^{m-1}$  denote the interior of  $S^{m-1}$  be the set  $intS^{m-1} = \{x \in S^{m-1} : x_1 x_2 \cdots x_m > 0\}$  and a face of the simplex  $S^{m-1}$  be the set  $\Gamma_I = \{x \in S^{m-1} : x_i = 0, i \notin I \subset \{1, 2, \dots, m\}\}$ .

Let us consider a QSO defined on the one-dimensional simplex which has the form

$$V : \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \\ \dot{x}_2 = (1-a)x_1^2 + 2(1-b)x_1x_2 + (1-c)x_2^2. \end{cases} \quad (3)$$

where  $a, b, c \in [0, 1]$ .

Obviously that  $a = p_{11,1}$ ,  $b = p_{12,1}$  and  $c = p_{22,1}$ . Using  $x_2 = 1 - x_1$  and introducing new variables  $x = x_1$ ,  $x'_1 = f(x)$  from (1) one has  $f(x) = (a - 2b + c)x^2 - 2(b - c)x + c$ .

Let  $\Delta = 4(1-a)c + (1-2b)^2$ .

**Theorem 1.** For the function  $f$  the following statements are true:

i) for any parameters  $a, b, c \in [0, 1]$  the function  $f$  has a unique fixed point in  $x^* \in [0, 1]$ ;

ii) the a unique fixed point  $x^*$  has the type  $\begin{cases} \text{attracting, if } 0 \leq \Delta < 4, \\ \text{non-hyperbolic, if } \Delta = 4, \\ \text{repelling, if } 4 < \Delta \leq 5; \end{cases}$

- iii) if  $0 \leq \Delta < 4$  then any trajectory converges to  $x^* \in [0,1]$ ;
- iv)  $\Delta = 4$ , then  $f$  has a 2-periodic cycle  $\{\hat{x}, \tilde{x}\}$  and any trajectory converges to this periodic cycle;
- v) if  $4 < \Delta \leq 5$  then there is a 2-periodic cycle  $\{\hat{x}, \tilde{x}\}$  and any trajectory converges to this periodic cycle.

### References

1. Yu. I. Lyubich, Iterations of quadratic transformations, Mathematical economics and functional analysis 109-138 (1974).
2. R. N. Ganikhodzhaev, Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments, Sb. Math. 76 (2) (1993) 489-506.

## CYCLES AND EXTENSIONS IN *E*-THEORY

G.S. Makeev

The odd-graded Kasparov  $KK$ -theory [1, 2] can be described in terms of the so-called Kasparov  $KK^1$ -cycles [1]. Let  $A$  and  $B$  be  $C^*$ -algebras,  $A$  separable,  $B$  stable; and let  $\mathcal{M}B$  be the multiplier algebra of  $B$ . We denote by  $\mathbb{E}(A, B)$  the set of all pairs  $(\nu, \varphi)$ , where the element  $\nu \in \mathcal{M}B$  and the  $*$ -homomorphism  $\varphi: A \rightarrow \mathcal{M}B$  satisfy the following conditions

$$[\nu, \varphi(a)] \in B, \quad (\nu^* - \nu)\varphi(a) \in B, \quad (\nu^2 - \nu)\varphi(a) \in B$$

for all  $a \in A$ . One can straightforwardly define on  $\mathbb{E}(A, B)$  a homotopy relation  $\sim$  (see [1, Chapter 3.3]). Elements of the set  $\mathbb{E}(A, B)$  are called  $KK^1$ -cycles, and the quotient  $\mathbb{E}(A, B)/\sim$  endowed with the abelian group structure is denoted by  $KK^1(A, B)$ . It is known that  $KK^1(A, B)$  is naturally isomorphic to the group of invertible extensions  $\text{Ext}^{-1}(A, B)$  with elements stable equivalence classes [1, Definition 3.2.5]) of  $*$ -homomorphisms from  $A$  to  $QB$ , where  $QB = \mathcal{M}B/B$  is the corona of  $B$ .

In this paper we introduce an analogous isomorphism in the context of the unsuspended form of *E*-theory obtained in [3, 4].

**Definition 1.** Let  $A, B$  be  $C^*$ -algebras, and let  $F$  be a sufficiently nice endofunctor of  $C^*$ -algebras. Let  $\varphi_0, \varphi_1: A \rightarrow FB$  be two  $*$ -homomorphisms. We call them *F-homotopic* (written  $\varphi_0 \simeq_F \varphi_1$ ), if there is a  $*$ -homomorphism  $\Phi: A \rightarrow FIB$ , such that  $Fev_j \circ \Phi =$

$\varphi_j, j = 0,1$ , where  $I = C[0,1] \otimes \cdot$ , and  $\text{ev}_t: IB \rightarrow B$  the evaluation at  $t$ . Denote  $[A, F, B] := \text{hom}(A, FB)/\simeq_F$ .

**Definition 2.** Let  $X$  be a metric space of bounded geometry. The *Roe functor* for  $X$  which we denote by  $\mathfrak{M}_X$  is given at object  $B$  as a  $C^*$ -algebra obtained by taking the closure of all  $X$ -by- $X$ -matrices of finite propagation with uniformly bounded entries in  $B$ . We call the Roe corona for  $X$  the functor  $\mathfrak{N}_X$ , given at object  $B$  by  $\mathfrak{N}_X B = \mathfrak{M}_X B / \mathbb{K}B$ , where  $\mathbb{K}$  is the tensoring with compacts.

**Definition 3.** Let  $A, B$  be  $C^*$ -algebras,  $A$  separable,  $B$  stable. Define two abelian groups:

$$\begin{aligned} \text{KK}_{cla}^1(A, B) &:= [A, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A}, B], \\ \text{Ext}(A, B) &:= [A, \mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \mathfrak{A}, B]. \end{aligned}$$

We can regard  $\text{KK}_{cla}^1$  and  $\text{Ext}$  as  $E$ -theory analogs for  $KK^1$  and  $\text{Ext}^{-1}$ . It is shown in [3] that  $\text{KK}_{cla}^1$  is just the  $E_1$  functor. The main result of this work is the following theorem.

**Theorem 4.** *The obvious natural transformation  $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}$  induces an abelian group isomorphism  $\text{KK}_{cla}^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}(A, B)$ .*

## REFERENCES

1. K. Jensen, K. Thomsen. Elements of KK-theory. Birkhäuser, Boston, 1991.
2. G. G. Kasparov. The operator K-functor and extensions of  $C^*$ -algebras // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 44(3):571–636, 1980.
3. G. S. Makeev. Yet another description of the Connes-Higson functor // Math. Notes 107(2):97–108, 2020.
4. G. S. Makeev. An unsuspended description of the E-theory category // Moscow Univ. Math. Bull. 78(1):1–14, 2023.

## ROE FUNCTORS PRESERVE HOMOTOPIES

G. S. Makeev

Many constructions involving homotopies of asymptotic homomorphisms in the  $E$ -theory of Connes and Higson [1, 2] can be formulated at the level of endofunctors of  $C^*$ -algebras. The category GEFC introduced in [3] with objects sufficiently good endofunctors of  $C^*$ -algebras happens to be an appropriate category to describe this behavior.

**Defenition 1.** We call natural transformations  $\gamma_0, \gamma_1 \in \text{GEFC}(F, G)$  *homotopic* if there is a natural transformation  $\gamma: F \Rightarrow GI$  such that the following diagram commute:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\gamma} & GI \\ \searrow \gamma_j & & \downarrow G \text{ ev}_j \\ & & G, \quad j = 0, 1. \end{array}$$

Due to the axioms for good endofunctors [3], the homotopy is an equivalence relation.

Introduce an important example of good endofunctors. Let  $X$  be a metric space of bounded geometry. The *Roe functor* for  $X$  is given at object  $B$  as a  $C^*$ -algebra obtained by taking the closure of all  $X$ -by- $X$ -matrices of finite propagation with uniformly bounded entries in  $B$ .

**Defenition 1.** A discrete metric space  $X$  has *bounded geometry* [5] if for every  $R > 0$  all the  $R$ -balls have uniformly bounded cardinalities, i.e.

$$\sup_{x \in X} |B_R(x)| < \infty.$$

**Defenition 3.** Let  $f: X \rightarrow Y$  be a map between two metric spaces.

- $f$  is *proper* if  $f^{-1}(B)$  is bounded for all bounded subsets  $B \subset Y$ ;
- $f$  is *bornologous* if for all  $N > 0$  there is  $M > 0$  such that if  $x, y \in X$  and  $\text{dist}(x, y) < N$ , then  $\text{dist}(f(x), f(y)) < M$ ;
- $f$  is *coarse* if it is proper and bornologous.

Denote by DMBD the category of discrete metric spaces of bounded geometry and coarse maps. Now we introduce coarse homotopies, following [4].

**Defenition 4.** Let  $X \in \text{DMBD}$ , and let  $p: X \rightarrow \mathbb{N}$  be a coarse map. Define the  *$p$ -cylinder*

$$I_p X = \{(x, n) \in X \times \mathbb{N}: n \leq p(x) + 1\}$$

with the metrics given by the formula

$$\text{dist}((x, n), (y, m)) = \text{dist}(x, y) + |n - m|.$$

We also introduce the two inclusions

$$\begin{aligned} i_0 &: X \rightarrow I_p X: x \mapsto (x, 1), \\ i_1 &: X \rightarrow I_p X: x \mapsto (p(x) + 1). \end{aligned}$$

Clearly,  $I_p X \in \text{DMBD}$  and  $i_0, i_1 \in \text{DMBD}$ .

**Defenition 5.** Let  $f_0, f_1 \in \text{DMBD}(X, Y)$ . We call them *coarsely homotopic* (written  $f_0 \simeq_{crs} f_1$ ) if there is a  $p$ -cylinder  $I_p X$  and a coarse map  $H: I_p X \rightarrow Y$  making the diagrams

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ i_k \downarrow & \searrow f_k & \\ I_p X & \xrightarrow{H} & Y, \end{array} \quad k = 0, 1$$

commute. The map  $H$  is called a *coarse homotopy*.

The main result of this work is as follows.

**Theorem 6.** *For every coarse map  $f: X \rightarrow Y$  between metric spaces of bounded geometry there is a natural transformation  $\mathfrak{M}_f: \mathfrak{M}_X \Rightarrow \mathfrak{M}_Y$  defined up to homotopy such that the correspondence  $f \mapsto \mathfrak{M}_f$  is a functor from DMBD to hGEFC, which is invariant with respect to the coarse homotopies.*

## REFERENCES

1. A. Connes and N. Higson. Déformations, morphismes asymptotiques et  $K$ -théorie bivariante. // CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math, 311(2):101–106, 1990.
2. E. Guentner, N. Higson, and J. Trout. Equivariant  $E$ -theory for  $C^*$ -algebras. // Mem. Amer. Math. Soc., 148(703), 11 2000.
3. G. S. Makeev. An unsuspended description of the  $E$ -theory category. // Moscow Univ. Math. Bull., 78(1):1–14, 2023.
4. P. D. Mitchener, B. Norouzizadeh, and T. Schick. Coarse homotopy groups. // Math. Nachr., 293(8):1515–1533, 2020.
5. J. Roe. Lectures on coarse geometry. // Number 31. Amer. Math. Soc., 2003.

## New example of Koszul Calabi-Yau algebra of global dimension 5.

**Mizomov I. E.** V. I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

[mizomovinomjon@mail.ru](mailto:mizomovinomjon@mail.ru)

**Abstract.** In this work we consider algebras defined from elliptic theta functions. The algebras are the quotient of the free algebra with the relations that are third order derivations of the superpotential. We find the superpotential for these algebras which proves they are Koszul Calabi-Yau algebra.

**Keywords.** Koszul Calabi-Yau algebra, free algebra, generator, superpotential.

The notion of Calabi-Yau algebras was introduced by Ginzburg in [4]. Let  $A$  be a graded associative algebra and let  $A^e = A \otimes A^{op}$  be its enveloping algebra. Then  $A$  is a  $d$ -Calabi-Yau algebra for some natural number  $d$  if  $A$  has a bounded  $A^e$ -projective resolution consisting of finitely generated  $A^e$ -modules and

$$\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A, A^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d \\ A[-l], & i = d \end{cases}$$

as  $A^e$ -modules for some integer  $l$ .

There is a large class of Calabi-Yau algebras are derived from *superpotentials*. Let  $A = C\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  be the free algebra on  $n$  generators. Then  $A$  has a natural grading by length of monomials, which denote by  $|a|$ . For a monomial  $a = a_1 a_2 \dots a_m \in A$ , where each  $a_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ , in [2] R.Bocklandt and others define the *noncommutative partial derivative* with respect to  $x_k, k \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_{x_k}(a) = \sum_{\{i \in [1, m] \mid a_i = x_k\}} a_{i+1} a_{i+2} \dots a_m a_1 a_2$$

By linearity, it can be extended to a map  $\partial_{x_k} : A \rightarrow A$ . Next, taking composition of such maps, we can define higher order derivatives. More precisely, for  $p = x_{i_1} \dots x_{i_s}$ , one can be set  $\partial_p := \partial_{x_{i_1}} \circ \dots \circ \partial_{x_{i_s}}$ . Then, for  $\omega \in A$ , following [5] we define the *derivation-quotient algebra* of order  $k$  as

$$D(\omega, k) := \frac{A}{\langle \partial_p \omega : |p|=k \rangle}$$

where  $p$  runs over all monomials of  $A$  of length  $k$ .

**Definition.**  $\omega \in A$  is called *superpotential* if it is the sum of elements of the form

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(n+1)} a_i a_{i+1} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_{i-1}, \quad a_i \in \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (1)$$

It has been proved in [1] that graded Calabi-Yau algebras of global dimension 3 always derive from a superpotential. In [2, Theorem 6.2], the authors have shown that essentially all Koszul Calabi-Yau algebras come from a superpotential, that is, of the form (1) (see also [5]).

Let  $a, b, c \in C$ . The algebra  $B$  is graded  $C$ -algebra with generators  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  of degree one, with relations of the form:

$$\begin{aligned} r_1 &= ax_0^2 + b(x_2x_3 + x_3x_2), & s_1 &= cx_0^2 - b(x_1x_4 + x_4x_1), \\ r_2 &= ax_1^2 + b(x_3x_4 + x_4x_3), & s_2 &= cx_1^2 - b(x_2x_0 + x_0x_2), \\ r_3 &= ax_2^2 + b(x_4x_0 + x_0x_4), & s_3 &= cx_2^2 - b(x_3x_1 + x_1x_3), \\ r_4 &= ax_3^2 + b(x_0x_1 + x_1x_0), & s_4 &= cx_3^2 - b(x_4x_2 + x_2x_4), \\ r_5 &= ax_4^2 + b(x_1x_2 + x_2x_1), & s_5 &= cx_4^2 - b(x_0x_3 + x_3x_0). \end{aligned}$$

Define the tensors  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 \in V^{\otimes 2}$  by

$$\begin{aligned} Q_i = & \frac{a^3b + b^2c^2 + ac^3}{b}(r_i^2 - r_{i+3}s_{i+2} - s_{i+2}r_{i+3} - r_{i+2}s_{i+3} - s_{i+3}r_{i+2}) \\ & + \frac{a^2b^2 + a^3c - bc^3}{b}(s_i^2 - r_{i+1}s_{i+4} - s_{i+4}r_{i+1} - s_{i+1}r_{i+4} - r_{i+4}s_{i+1}) \\ & - \frac{b^4 + 3ab^2c + a^2c^2}{b}(r_is_i + s_ir_i - s_{i+2}s_{i+3} - s_{i+3}s_{i+2} - r_{i+1}r_{i+4} - r_{i+4}r_{i+1}) \\ & + \frac{ab^3 + 2a^2bc + c^4}{b}(r_{i+2}r_{i+3} + r_{i+3}r_{i+2}) + \frac{a^4 - b^3c - 2abc^2}{b}(s_{i+4}s_{i+1} + s_{i+1}s_{i+4}) \end{aligned}$$

with the indices  $\{i, i+1, i+2, i+3, i+4\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  taken modulo 5. Consider the following tensor

$$\Phi := x_0Q_1 + x_1Q_2 + x_2Q_3 + x_3Q_4 + x_4Q_5$$

**Theorem.** The element  $\Phi$  is a superpotential. Moreover, for any  $a, b, c \in C$   $B \cong D(\Phi, 3)$  and the algebra  $B$  is Koszul Calabi-Yau.

## References

1. R. Bocklandt, *Graded Calabi-Yau algebras of dimension 3*, with an appendix "The signs of Serre functor" by M. Van den Bergh, J. Pure Appl. Algebra, 212 (2008), 14-32.
2. R. Bocklandt, T. Schedler, M. Wemyss, *Superpotentials and higher order derivations*, J. Pure Appl. Algebra, 214 (2010) 1501–1522.
3. M. Dubois-Violette, *Multilinear forms and graded algebras*, Journal of Algebra 317 (2007) 198–225.
4. V. Ginzburg, *Calabi-Yau algebras*, preprint, 2006. arXiv:math/0612139.
5. M. Van den Bergh, *Calabi-Yau algebras and superpotentials*, Sel. Math. New Ser., 21 (2015), no. 2, 555-603.

# ON AN UPPER BOUND OF THE NORM OF A MATRIX BASIS OF AN ALGEBRAIC LATTICE

Kh.Kh. Ruzimuradov,

Samarkand state university, Samarkand, 140104, Uzbekistan

rxx05@mail.ru

## Abstract

In this paper, we have obtained an upper estimate for the norm of the basis vectors of the lattice  $\Lambda$  in terms of the homogeneous minimum of the lattice  $\mu$ . Such estimates are used to estimate and find the vector and closest vector problems on lattices. In this paper, we essentially use the geometric construction of the basis of an admissible lattice and some properties of matrix arithmetic.

*Keywords:* lattice, homogeneous minimum, norm

### 1. Statements of Main Results

The elements  $X$  of the space  $\mathbb{R}^n$  will be called points or vectors and written as columns, so that  $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Consider lattices  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  with matrix basis  $A = (a_{ij})$  and volume  $d(\lambda) = \det A$ .

Let  $\Lambda$  be an unimodular point lattice in  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\det \Lambda = 1$ . Let  $N(X)$  denote the absolute value of the product of coordinates of a point  $X^T$ ,  $N(X) = |x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n|$ , and let  $N(\Lambda) = \mu$  denote the homogeneous minimum of  $\Lambda$  [1]:

$$\mu = N(\Lambda) = \inf_{X \in \Lambda, X \neq 0} N(X).$$

**Definition.** A lattice  $\Lambda$  is called admissible if  $\mu = N(\Lambda) > 0$ .

A non-zero lattice vector of minimum length is called its shortest vector. It is known that the problem of finding the minimum length vector is related to estimates for the homogeneous minimum of the lattice [4, 5].

In this paper is considered the maximum or infinite norm (the Chebyshev norm) : if  $X \in \mathbb{R}^n$ , then  $\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$ .

In this paper, we have obtained an upper estimate for the norm of the basis vectors of the lattice  $\Lambda$  in terms of the homogeneous minimum of the lattice  $\mu$ .

The following theorem is proved.

**Main Theorem.** Let  $\Lambda$  a lattice with  $\det \Lambda = 1$  and  $\mu = N(\Lambda) > 0$  be given. Then there is a constant  $C(\mu)$  depending only on  $\mu$ , such that for  $\Lambda = A\mathbb{Z}^n$  the inequality  $\|A\| \leq C(\mu)$  is true.

## 2. Auxiliary Assertions

To prove Main theorem, we use the following Remark 1 and Lemma 1.

*Remark 1. There is a constant  $V_0$  such that a rectangular parallelepiped with volume  $V_0$ , whose sides are parallel to the coordinate axes, does not contain a lattice point  $\Lambda$ .*

Indeed, since the length of any non-zero vector of the lattice  $\Lambda$  is not less than  $\mu^{\frac{1}{n}}$ .  
 $n^{\frac{1}{2}}$ , then the parallelepiped with volume  $V_0 = \mu$  does not contain a point of the lattice  $\Lambda$ .

*Lemma 1. Let the matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*If the following inequalities hold for the elements of the matrix A*

$$|a_{ii}| > \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|,$$

then  $\det A \neq 0$ .

**Proof.** Let us prove the lemma by induction.

Let be

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

where  $\lambda_s = -\frac{a_{1s}}{a_{11}}$ ,  $s = 2, \dots, n$ .

Multiplying  $\Delta(\lambda)$  by  $A$  on the right, we obtain

$$A \cdot \Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

where  $a'_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} \cdot a_{r1}$ .

Let us assume that for the matrix

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{32} & \dots & a'_{3n} \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

inequalities (1.11) are not satisfied, i.e.

$$|a'_{rr}| \leq \sum_{k=1, k \neq r}^n |a'_{2k}|.$$

Then

$$\begin{aligned} |a'_{rr}| &= \left| a_{rr} - \frac{a_{1r}}{a_{11}} \cdot a_{r1} \right| \leq \underbrace{(|a_{rr}| + \dots + |a_{rs}| + \dots + |a_{rn}|)}_{n-2, s \neq r} + \\ &\quad \frac{|a_{r1}|}{|a_{11}|} \left( \underbrace{|a_{12}| + \dots + |a_{1s}| + \dots + |a_{1n}|}_{n-2, s \neq r} \right) < \\ |a_{rr}| - |a_{r1}| + |\frac{a_{r1}}{a_{11}}|(|a_{11}| - |a_{12}|) &= |a_{rr}| - \frac{|a_{r1}||a_{1r}|}{|a_{11}|}. \end{aligned}$$

Further,

$$|a_{rr}| - \frac{|a_{r1}||a_{1r}|}{|a_{11}|} \leq |a_{rr} - \frac{a_{r1}a_{1r}}{a_{11}}| < |a_{rr}| - \frac{|a_{r1}||a_{1r}|}{|a_{11}|}.$$

Consequently,  $|a_{rr}| < |a_{rr}|$ , which is impossible. Lemma 1 is proved.

### 3. Proof of the Main Theorem

Consider the following parallelepiped:

$$P_1(L_1, a_1, \dots, a_1) = \{X \mid |x_1| \leq L_1, |x_2| \leq a_1, \dots, |x_n| \leq a_1\},$$

with the volume  $V(P_1) = 2^n \cdot L_1 \cdot a_1^{n-1}$  and with the condition  $L_1 \geq (n-1)a_1$ .

Let

$$K = \begin{pmatrix} k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}, \quad KP_1 = \{KX \mid X \in P_1\}$$

Then, there exists  $K$  such that the largest parallelepiped, which is not containing a lattice point, is  $KP_1 = P_2(kL_1, ka_1)$ . Setting  $kL_1 = L_2$ ,  $ka_1 = a_2$ , we obtain the following empty parallelepiped with respect to the lattice  $\Lambda$   $KP_1 = P_2(L_2, a_2, \dots, a_2)$ , with the volume  $V(P_2) = 2^n L_2 a_2^{n-1} \leq 2^n \mu$  and with the condition  $L_2 > (n-1)a_2$ .

By means of similarity, we stretch the side of the parallelepiped  $P_2$ , which is parallel to the first coordinate axis, until we get a parallelepiped with a volume greater

than the volume of the main parallelepiped of the lattice  $\Lambda$ , so there is such  $m$  that the smallest parallelepiped containing the point  $Z_1$  of the lattice  $\Lambda$  is  $P_3 = P_2(mL_2, a_2, \dots, a_2)$ , with the volume  $V(P_3) = mV(P_2) = 2^n mL_2 a_2^{n-1} \leq 2^n m\mu$  and with the condition  $mL_2 > (n - 1)a_2$ .

Let the point  $Z_1 \in \Lambda \cap P_3$  have the form  $Z_1^T = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ .

Then  $x_1^{(1)} = mL_2$ ,  $|x_2^{(1)}|, \dots, |x_n^{(1)}| \leq a_2$  and  $|x_1^{(1)}| > |x_2^{(1)}| + \dots + |x_n^{(1)}|$ .

Further, stretching the second side of the parallelepiped  $P_2$ , which is parallel to the second coordinate axis, we obtain one more lattice vector  $\Lambda$ :

$Z_2^T = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ , with  $|x_1^{(2)}| > |x_3^{(2)}| + \dots + |x_n^{(2)}|$ .

and so on, expanding the  $n$ -th coordinate in a similar way, we get the last vector  $Z_n^T \in \Lambda \cap P_2'$ :  $Z_n^T = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$  with the condition  $|x_n^{(n)}| > |x_1^{(n)}| + \dots + |x_{n-1}^{(n)}|$ .

Assume that among the constructed parallelepipeds, the parallelepiped  $P_3 = P_2(mL_2, a_2, \dots, a_2)$  has the largest side. Then, the vectors  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  constructed above are all contained in a cube with side  $mL_2$ . By Lemma 1, these vectors form a system of  $n$  linearly independent vectors of the lattice  $\Lambda$ .

Let the lattice  $\Lambda$  have the form  $\Lambda = AZ^n$ . Then the system of vectors  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  can be regarded as a basis of the sublattice  $\Lambda'$  of the lattice  $\Lambda$ . By theorem 1 of Chapter 1 [1], this sub lattice will have the form  $\Lambda' = ABZ^n$ , where  $B$  is an integer matrix. Let  $C = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = A \cdot B$ . Let us estimate the norm of the matrix  $C$ . Since all vectors  $Z_i$  are in a cube with side  $L_2$ , each coordinate of the vector  $Z_i$  is not greater than the length of the side of the cube, i.e.

$$\|C\| \leq mL_2. \quad (1)$$

Since  $V(P_2) = 2^n L_2 a_2^{n-1} \leq 2^n \mu$ , then

$$L_2 \leq \frac{\mu}{a_2^{n-1}}. \quad (2)$$

From the condition  $L_2 > (n - 1)a_2$ , we deduce that there exists  $\theta > 1$  such that  $L_2 = (n - 1)a_2 \cdot \theta$ . From here

$$a_2 = \frac{L_2}{(n-1)\theta}, \quad a_2^{n-1} = \frac{L_2^{n-1}}{(n-1)^{n-1} \theta^{n-1}}.$$

Substituting the values  $a_2^{n-1}$  into (2.13), we obtain

$$L_2 \leq \frac{\mu(n-1)^{n-1} \theta^{n-1}}{L_2^{n-1}}.$$

From here

$$L_2 \leq \mu^{\frac{1}{n}} (n-1)^{\frac{(n-1)}{n}} \theta^{\frac{(n-1)}{n}}. \quad (3)$$

Therefore, from (2) and (3) we obtain

$$\|C\| \leq m \mu^{\frac{n-1}{n}} (n-1)^{\frac{n-1}{n}} \theta^{\frac{n-1}{n}}, \quad (4)$$

for  $m \leq \frac{1}{\mu}$  from (4) we obtain

$$\|C\| \leq \left(\frac{(n-1)\theta}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (5)$$

Next, we estimate the norm of the matrix  $B$ . There is an integer unimodular matrix  $E$  such that  $C = AE^{-1}EB$ ,  $AE^{-1} = C(EB)^{-1}$ .

By theorem 1 of Chapter 1 [1], we choose the matrix  $E$  so that the following equality holds:

$$EB = \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ & d_2 \dots a_{2n} \\ & 0 \dots d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \dots b_{1n} \\ 0 & 1 \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \dots & \\ & & d_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

with the condition  $0 \leq b_{ki} < 1$ . Find the inverse matrix  $(EB)^{-1}$ .

From (6) we obtain:

$$(EB)^{-1} = \begin{pmatrix} d_1' & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & B_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

with the condition  $0 < d_k' \leq 1$ .

Then the condition  $0 \leq b_{ki} \leq 1$  implies that

$$\|(EB)^{-1}\| \leq 1 \quad (8)$$

Since  $E^{-1} = C(EB)^{-1}$ , it follows from (8) that

$$\|AE^{-1}\| = \|C(EB)^{-1}\| \leq n\|C\|.$$

From here and from (5) we get

$$\|AE^{-1}\| \leq \frac{n(n-1)^{\frac{n-1}{n}} \theta^{\frac{n-1}{n}}}{\mu}$$

The Main Theorem is proved.

#### 4. Conclusion

In this paper, we have obtained an upper estimate for the norm of the basis vectors of the lattice  $\Lambda$  in terms of the homogeneous minimum of the lattice  $\mu$ . Such estimates are used in the shortest vector problems and closest vector problems on lattices. In this paper, we essentially use the geometric construction of the basis of an admissible lattice and some properties of matrix arithmetic. For lattices of small dimensions, there are several algorithms for estimating the length of the shortest lattice vector, but in the n-dimensional case, there are only estimates by Minkowski and some other authors [2-3]. We obtain a new estimate for the norm of basis vectors, through which we can estimate the length of the shortest vector in the n-dimensional case

#### References

1. J.W. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. Second Printing. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
2. A.V. Malyshev. The main notions and theorems of the geometry of numbers. Chebyshevskii sbornik, 2019, vol. 20, no. 3, pp. 43–73.
3. P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker, Geometry of numbers. North-Holland (1987).
4. Ruzimuradov, Kh. Kh. Fundamental rectangles of admissible lattices. (Russian) *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **204** (1993), Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii. 11, 82–89, 168–169; translation in *J. Math. Sci.* **79** (1996), no. 5, 1320–1324
5. Ruzimuradov Kh.Kh. On the problem of counting the number of points of algebraic lattices in rectangles. Uzbek Mathematical Journal, 2008, No. 4, pp. 116-124.

## ON $q$ – LACUNARY STRONG INVARIANT SUMMABILITY OF WEIGHT $g$

EKREM SAVAŞ

Uşak University, Uşak, Turkiye

e-mail: ekremsavas@yahoo.com

In this paper we present the concept of  $q$  - lacunary invariant statistical convergence of weight  $g$  and establish some connections between  $q$ -lacunary invariant t statistical

convergence of weight  $g$  and  $q$  - lacunary strong invariant summability of weight  $g$ , We also investigate the relations between the spaces  $[N_{\sigma}^g, \theta, f, q, p]$  and  $S_{(\theta, \sigma, q)}^g$ .

Keywords: Weight function  $g$ , statistical convergence, strong invariant convergence, modulus function.

AMS Subject Classification: 40A05, 40A35

## REFERENCES

1. R. Colak, B. C. Tripathy and M. Et, Lacunary strongly summable sequences and  $q$ - lacunary almost statistical convergence, Vietnam Journal of Math. 34(2), (2006), 129-138.
2. E. Savaş, On lacunary strong  $\sigma$ -convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 21 (4)(1990), 359 - 365.
3. E. Savaş, On lacunary almost statistical convergence of weight  $g$ , (Preprint).

## Построение выпуклой формы траектории борта карьера методом кубических сплайнов

**Норов Г.М., Худайбердиев О.Ж., Рахматов С.Х., Мехмонов М.Р.**  
**Навоийский государственный горно-технологический университет,**  
**г. Навои, Узбекистан.**

**Аннотация:** В данной статье рассматривается задача об построение выпуклой формы траектории борта, с целью усиления безопасности ведения вскрышных работ и добычи полезных ископаемых открытым способом. При определении траектории борта используется метод кубических сплайнов.

Ключевые слова: *откосы уступов, карьер, разрушение, устойчивость, борт, траектория борта, интерполяция, сплайн – функция, метод кубического сплайна, алгебраический многочлен.*

Изучение различной литературы посвященной решению задачи обеспечение устойчивости бортов карьера показывает, что в этом направление ведутся множество исследовательских разработок. Мировой опыт показывает, что обеспечение устойчивости бортов карьера при вскрышных работах и добычи полезных ископаемых открытым способом, в основном ведутся в трех направлениях [1-3], которые зависят от траектории бортов карьера. Траектория бортов карьера могут быть в следующей форме: выпуклой, вогнутой или наклонной прямой. Вид бортов карьера, при их разработке, зависит от многих факторов, таких например: структуры почвы, рельефа местности, способов ведения работы, наличия техники, персонала и т.д. В процессе построения траектории бортов карьера, естественно, учитываются финансовые, материальные и другие расходы. Именно по этим критериям выбираются один из трех вышеуказанных видов траектории бортов карьера. По затратным соображениям, при ведении вскрышных работ, наиболее выгодным является выпуклая форма траектории борта карьера, если удастся выбрать более точного угла наклона борта [4].

Во всех формах определения траектории борта карьера особое внимание уделяются на углах наклона борта, который является одним из важнейших параметров в процессе ведения открытых горных работ [5].

Для решения поставленной задачи используем интерполяционный метод кубического сплайна, так, как этот метод обеспечивает получению гладкую кривую, интерполирующую траекторию борта карьера (уступа).

Идею составления и использования метода сплайна кубической интерполяции можно найти в работах [5-6].

Пусть в результате экспериментов получены значения функции, измеренные в нескольких точках. Требуется решать следующую задачу: как найти значения функции в промежуточных точках? Такая задача называется задачей *интерполяции* и часто возникает на практике. Например, в геологии проводится опробование месторождение и определяется концентрация полезных ископаемых в определенных точках, а с помощью интерполяции можно оценить концентрацию в промежуточных точках. Список реальных примеров легко продолжить.

На практике наиболее часто используются *кубические* сплайны  $S_3(x)$  - сплайны третьей степени с непрерывной, по крайней мере, первой производной.

При этом величина  $m_i = S_3'(x_i)$ , называется наклоном сплайна в точке  $x_i$ . Здесь  $m_i$  определяется по формулам:

$$m_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (1)$$

$$m_0 = \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}, m_N = \frac{3f_N - f_{N-2} - 3f_{N-1}}{2h}. \quad (2)$$

Данные формулы являются формулами численного дифференцирования второго порядка точности относительно шага  $h = (b - a)/N$ , согласно [5].

Далее, приводится общий вид кубического сплайна для номера  $i$ , где  $i = \overline{0, 4}$ :

$$y_i = S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \quad (3)$$

Теперь переходим к *непосредственному изложению решения поставленной задачи, иллюстрируя это на конкретном примере*.

**Пример.** Построить выпуклую форму траектории борта карьера, если в результате экспериментов, получена некоторая зависимость функции  $y = f(x)$  от переменной  $x$ , в виде таблицы (таб. 1).

Таблица 1.

$i$	0	1	2	3	4
$x$	0	4	8	12	16
$y$	0	9	14	18	20

В результате эксперимента получена зависимость функции  $y = f(x)$  от переменной  $x$ .  $i$ -номер точек,  $x$ -значения переменной,  $y$ -значения функции.

Здесь в первой строке указаны порядковые номера переменной  $x$  и функции  $y = f(x)$ . Во второй и третьей строках таблицы соответствующей значения переменной  $x$  и функции  $y = f(x)$ .

Далее расписываются кубические многочлены для каждого значения переменной  $x$  и функции  $y = f(x)$ , т.е. на каждом частичном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ , в соответствии со значениями указанной в таблице 1, тогда получим:

$$\begin{aligned}y_0 &= S_0 = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3 \\y_1 &= S_1 = a_1 + b_1(x - 4) + c_1(x - 4)^2 + d_1(x - 4)^3 \\y_2 &= S_2 = a_2 + b_2(x - 8) + c_2(x - 8)^2 + d_2(x - 8)^3 \\y_3 &= S_3 = a_3 + b_3(x - 12) + c_3(x - 12)^2 + d_2(x - 12)^3\end{aligned}$$

Таким образом, получены четыре кубических многочлена. Далее находим производные первого и второго порядка из каждой функции:

$$\begin{aligned}y'_0 &= S'_0 = b_0 + 2c_0x + 3d_0x^2, \\y'_1 &= S'_1 = b_1 + 2c_1(x - 4) + 3d_1(x - 4)^2, \\y'_2 &= S'_2 = b_2 + 2c_2(x - 8) + 3d_2(x - 8)^2 \\y'_3 &= S'_3 = b_3 + 2c_3(x - 12) + 3d_3(x - 12)^2 \\y''_0 &= S''_0 = 2c_0 + 6d_0x \\y''_1 &= S''_1 = 2c_1 + 6d_1(x - 4) \\y''_2 &= S''_2 = 2c_2 + 6d_2(x - 8) \\y''_3 &= S''_3 = 2c_3 + 6d_3(x - 12)\end{aligned}$$

Теперь, по шаблону, находим следующие:

1) значения многочлена

$$y_0 = S_0 = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$$

в точках ( $x_0 = 0; y_0 = 0$ ) и ( $x_1 = 4; y_1 = 9$ ):

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_0 + 4b_0 + 16c_0 + 64d_0 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0, \\ 4b_0 + 16c_0 + 64d_0 = 9. \end{cases}$$

В результате получили первую систему линейного алгебраического уравнения, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными. Теперь для остальных функциях  $S_i$  также подставляем соответствующие значения  $x_i$  и  $y_i$  из таблицы 1, так как процедура получения систем уравнений идентичны, то опуская промежуточные элементарные выкладки, приводим соответствующие системы:

$$2) \begin{cases} a_1 = 9, \\ a_1 + 4b_1 + 16c_1 + 64d_1 = 14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5, \\ 4b_1 + 16c_1 + 64d_1 = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a_2 = 14 \\ a_2 + 4b_2 + 16c_2 + 64d_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 14 \\ b_2 + 4c_2 + 16d_2 = 1. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} a_3 = 18 \\ a_3 + 4b_3 + 16c_3 + 64d_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 18 \\ 2b_3 + 8c_3 + 32d_3 = 1. \end{cases}$$

5)  $y'_0 = y'_1$  в точке ( $x_1 = 4; y_1 = 9$ ):

$$b_0 + 8c_0 + 48d_0 = b_1 \text{ или } b_0 + 8c_0 + 48d_0 - b_1 = 0.$$

Далее, для определения значения производных те же процедуры вычисления повторяются, поэтому пропуская промежуточные элементарные выкладки, приводим соответствующие уравнения:

- 6)  $c_0 + 12d_0 - c_1 = 0.$
- 7)  $b_1 + 8c_1 + 48d_1 - b_2 = 0.$
- 8)  $c_1 + 12d_1 - c_2 = 0.$
- 9)  $b_2 + 8c_2 + 48d_2 - b_3 = 0.$
- 10)  $c_2 + 12d_2 - c_3 = 0.$

11) а) граничные условия  $y_0'' = S_0'' = 0$  в точке  $x_0 = 0$ :

$$2c_0 = 0 \text{ или } c_0 = 0.$$

б) граничные условия  $y_3'' = S_3'' = 0$  в точке  $x_4 = 16$ :

$$2c_3 + 24d_3 = 0 \text{ или } c_3 + 12d_3 = 0.$$

После некоторых элементарных преобразований, объединяя выше полученные выражения, составим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 9 \\ a_2 = 14 \\ a_3 = 18 \\ c_0 = 0 \\ 4b_0 + 16c_0 + 64d_0 = 9 \\ 4b_1 + 16c_1 + 64d_1 = 5 \\ b_2 + 4c_2 + 16d_2 = 1 \\ 2b_3 + 8c_3 + 32d_3 = 1 \\ b_0 + 8c_0 + 48d_0 - b_1 = 0 \\ c_0 + 12d_0 - c_1 = 0 \\ b_1 + 8c_1 + 48d_1 - b_2 = 0 \\ c_1 + 12d_1 - c_2 = 0 \\ b_2 + 8c_2 + 48d_2 - b_3 = 0 \\ c_2 + 12d_2 - c_3 = 0 \\ c_3 + 12d_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 9 \\ a_2 = 14 \\ a_3 = 18 \\ c_0 = 0 \\ 4b_0 + 64d_0 = 9 \\ 4b_1 + 16c_1 + 64d_1 = 5 \\ b_2 + 4c_2 + 16d_2 = 1 \\ 2b_3 + 8c_3 + 32d_3 = 1 \\ b_0 - b_1 + 48d_0 = 0 \\ -c_1 + 12d_0 = 0 \\ b_1 - b_2 + 8c_1 + 48d_1 = 0 \\ c_1 - c_2 + 12d_1 = 0 \\ b_2 - b_3 + 8c_2 + 48d_2 = 0 \\ c_2 - c_3 + 12d_2 = 0 \\ c_3 + 12d_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Для краткости эту систему напишем в матричном виде, как

$$AX = B,$$

здесь  $A$ - матрица коэффициентов,  $X$ - матрица-столбец неизвестных,  $B$ - матрица-столбец свободных чисел.

Здесь получено 16 уравнений, в которых 5 коэффициентов известны, остальные 11 подлежат определению. В полученной системе имеется 11 уравнений с 11-ю неизвестными, это означает, что система имеет единственное решение. Для решения этой системы составляется матрица коэффициентов неизвестных, которую в силу громоздкости записи пропускаем.

Далее находится соответствующая обратная матрицу, для этой цели используется готовая программа в EXCEL.

Найденную обратную матрицу умножая на матрицу столбец-свободных членов

$$B^T = [0; 9; 14; 18; 0; 9; 5; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0],$$

находим неизвестных коэффициентов полученной СЛАУ.

Определим обратную матрицу  $A^{-1}$  к матрице  $A$ . Так, как уравнение  $AX = B$  имеет решение  $X = B \cdot A^{-1}$ , то используя программу из Excel находим произведение  $B \cdot A^{-1}$ . Далее, находим неизвестных коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i = \overline{0, 3}$ ):

Таблица 1.

<i>i</i>	<i>a<sub>i</sub></i>	<i>b<sub>i</sub></i>	<i>c<sub>i</sub></i>	<i>d<sub>i</sub></i>
0	0	2,508929	0	-0,01618
1	9	1,732143	-0,1942	0,018415
2	14	1,0625	0,026786	-0,0106
3	18	0,767857	-0,10045	0,008371

Приведены  
неизвестных

значения

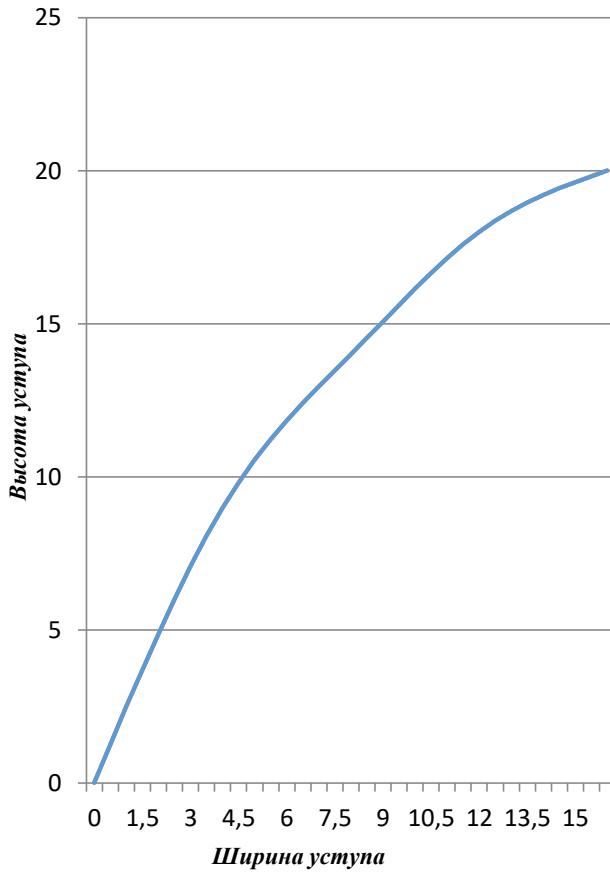
коэффициентов, для соответствующих кубических сплайнов.

Итак, определены все неизвестные коэффициенты. Подставляя их в кубические многочлены соответственно, получим кубические сплайны, которые интерполируют исходную функцию в заданных частичных отрезках. Теперь, в частичных отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ , где  $i = \overline{0, 3}$ , задавая последовательно шаг, например 0,5 или 1, получим таблицу (таб. 2) значений  $y$  для соответствующих отрезков  $x$ . В итоге построим график кубического сплайна, который приведен на рисунке 1.

Таблица 2.

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
0	0	4,5	9,819824	8,5	14,53662	12,5	18,35986
0,5	1,252441	5	10,55636	9	15,07868	13	18,67578
1	2,492746	5,5	11,22342	9,5	15,61823	13,5	18,95403
1,5	3,708775	6	11,83482	10	16,14732	14	19,20089
2	4,888393	6,5	12,40437	10,5	16,65799	14,5	19,42264
2,5	6,019461	7	12,94587	11	17,1423	15	19,62556
3	7,089844	7,5	13,47314	11,5	17,59229	15,5	19,81592
3,5	8,087402	8	14	12	18	16	20
4	9						

В таблице приведены значения  $x$  и  $y$  соответствующие частичным отрезкам  $[x_i, x_{i+1}]$ , где  $i = \overline{0, 3}$ .



**Рис. 1. Траектория борта карьера, полученная кубическим сплайном.**

Далее, используя формулы (1) и (2), находим значения наклонов в соответствующих точках, которые, по сути, являются значениями определения угла наклона для функции

$$y'_i = S'_i(x_i), \text{ где } i = \overline{0; 3};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 = m_0 &= \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} = \frac{4 \cdot 9 - 14 - 3 \cdot 0}{2 \cdot 4} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}, \\ \operatorname{tg} \alpha_1 = m_1 &= \frac{y_2 - y_0}{2h} = \frac{14 - 0}{2 \cdot 4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = m_2 &= \frac{y_3 - y_1}{2h} = \frac{18 - 9}{2 \cdot 4} = \frac{9}{8}, \\ \operatorname{tg} \alpha_3 = m_3 &= \frac{y_4 - y_2}{2h} = \frac{20 - 14}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Для определения угла наклона в градусах, используем функцию арктангенс, тогда получим:

$$\alpha_0 = 70^\circ, \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 48^\circ \text{ и } \alpha_3 = 37^\circ.$$

Как показывает решенный пример, для построения траектории борта карьера (уступа), его нужно проектировать в виде выпуклой кривой третьей степени. Определенные углы наклона показывают устойчивость борта карьера на его деформации, так, как, наклон борта от подошвы борта до его вершины

последовательно увеличивается (т.е. наклонная уменьшается в градусах относительно горизонтальной оси).

## **Вывод**

Таким образом, решена поставленная задача, т.е., построена выпуклая форма траектории борта в виде кубической сплайн функции. Полученная сплайн функция хороша тем, что задавая различные значения переменной  $x$ , можно получить различные графики сплайн функции. Это означает, что над ними можно манипулировать и получить желаемый результат. Из полученного результата демонстрируемого примера следует что, такой профиль борта при деформировании горного массива в силу собственной тяжести, не способствует скольжению горной породы, а наоборот, служит её сдерживанию.

## **Литература**

1. Норов Ю.Д., Заиров Ш.Ш. Проектирование карьеров и обеспечение устойчивости бортов. – Навои, Изд. «Навои», 2015. – 252 с.
2. Демин А.М. Устойчивость открытых горных выработок и отвалов. – М.: Недра, 1973. – 232 с.
3. Рыбин В.В. Развитие теории геомеханического обоснования рациональных конструкций бортов карьеров в скальных тектонически напряженных породах // Дисс. докт. техн. наук. – Апатиты, 2016. – 385 с.
4. Заиров Ш.Ш., Уринов Ш.Р., Тухташев А.Б. Теоретическое обоснование методов оценки устойчивости откосов трещиноватых пород // Научно-практический электронный журнал «ТЕСНИКА». – Нукус, 2020. №2. С. 50-55.
5. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Вычислительная математика. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976. 248 с.<http://statistica.ru/branches-maths/interpolyatsiya-splaynami-teor-osnovy>.

**Sferik ko‘pburchak yuzalarini hisoblash usullari va sferik tasvirlar.**

**E. Q. Qurbanov<sup>1</sup>. A. SH. Shamshiev<sup>2</sup>.**

<sup>1</sup> Jizzax politexnika instituti.

<sup>2</sup> Jizzax davlat pedagogika universiteti.

**Аннотация:** В статье определена площадь сферического многоугольника и представлена декартова интерпретация построение сферического изображение куба.

**Ключевые слова:** Сферический многоугольник, площадь многоугольника, сферическая изображения, дефект триуголника.

**Аннотация:** Maqolada sferik ikki burchak va sferik ko‘pburchak yuzalari hamda kubning sferik tasviri yangicha usulda aniqlangan.

**Калит сўзлар:** Sferik ko'pburchak, ko'pburchak yuzasi, sferik tasvir, uchburchak defekti.

**1 – teorema.**  $ABC$  sferik uchburchak yuzasi  $S = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$  ga teng.

*Ishbot.* Avvalo uchlari diametral qarama – qarshi  $A$  va  $A'$  nuqtalarda, tomonlari esa shu nuqtalardan o'tuvchi katta aylana yoylaridan hamda bu yoylar orasidagi burchagi  $\varphi$  ga teng bo'lgan sferik ikki burchak yuzasini topaylik. Bu sferik ikki burchak yuzasi  $S(AA')$ , uning bir tomonini sfera bo'ylab  $\varphi$  burchakka burishdan hosil bo'ladi. Agar  $A$  va  $A'$  nuqtalardan o'tuvchi katta aylana  $AA'$  yoyini  $\varphi = 2\pi$  burchakka bursak butun birlik sfera yuzasi  $2\pi$  hosil bo'ladi [1, 24-b]. Shuning uchun quyidagi proporsiyani

$$\frac{S(AA')}{4\pi} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (1)$$

tuzish mumkin. Bundan esa sferik ikki burchak yuzasi

$$S(AA') = 2\pi \quad (2)$$

ga teng bo'ladi. Sferik uchburchak yuzasini hisoblashda (1.3.2) formuladan foydalanamiz. Agar  $ABC$  sferik uchburchak tomonlarini davom ettirsak, ular sfera ustida uchlaridagi burchaklari  $\angle A, \angle B, \angle C$  larga teng bo'lgan 6 ta sferikikki burchaklarni hosil qiladi. Shuningdek, bu 6 ta ikki sferikikki burchaklar sferani to'liq qoplab oladi [3,54-b]. Biroq ularning umumiy qismi bo'lgan  $ABC$  va  $A'B'C'$  uchburchaklar uch martadan takrorlanadi. Shuning uchun sakkizta sferik ikki burchak yuzalari yig'indisidan  $4S_{ABC}$  ni chiqarib tashlasak, sfera yuzasi hosil bo'ladi. Avvalo  $AB$  va  $AC$  tomonlar orqali o'tgan katt3a aylanalar hosil qilgan ikkita sferik ikki burchak yuzasi sfera yuzasining qancha qismini tashkil etishini aniqlaylik. Chizmadagi ikkita sferik ikkiburchaklarning  $A$  uchidagi burchagi  $2\alpha$  ga teng. U holda bu ikkita sferik ikki burchak yuzasi sfera yuzasining

$$S_{AB,AC} = 4\pi \frac{2\alpha}{2\pi} = 4\alpha$$

qismini tashkil etadi. Xuddi shunga o'xshash  $BA, BC$  va  $CA$  va  $CB$  tomonlar orqali o'tgan katta aylanalar hosil qilgan ikki yoqli burchaklar yuzalari

$$S_{BA,BC} = 4\beta, \quad S_{CA,CB} = 4\gamma$$

ga teng. Agar  $S_{AB,AC}$ ,  $S_{BA,BC}$ ,  $S_{CA,CB}$  sferik ikkiburchaklar yuzalarini qo'shsak, sfera yuzasi  $4\pi$  ga  $2S_{ABC}$  va  $2S_{A'B'C'}$  sferik uchburchaklar yuzalari qo'shiladi, ya'ni

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4S_{ABC}, \text{ bu yerda } S_{ABC} = S_{A'B'C'}.$$

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Teorema isbot bo'lди. Sferik uchburchak yuzalari to'g'risidagi teoremani sferik  $n$  burchaklar uchun umumlashtirish mumkin.

Birlik sfera radiusini  $R$  marta kattalashtirsak, birlik sferaga o'xshash sfera hosil bo'ladi. O'xshashlik koeffitsenti  $R$  ga teng bo'ladi. Ma'lumki, o'xshash almashtirishlarda burchak saqlanadi, uzunlaiklar  $R$  ga ko'paytiriladi va yuza esa  $R^2$  marta kattalashadi [5,64-b]. U holda  $O$  markazli  $R$  radiusli sfera ustida  $ABC$  uchburchak yuzasi

$$S(ABC) = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

ga teng bo'ladi.

$\angle A + \angle B + \angle C - \pi$  ayirma sferik uchburchak defekti deb ataladi. Demak, sferik uchburchak yuzasi defektga to'g'ri proporsional ekan.

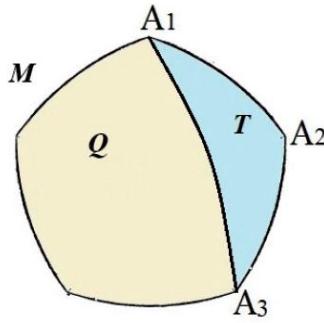
**2 – teorema.** Qavariq sferik  $n$  burchak yuzasi  $S(F)$

$$S(F) = 2\pi - \sum_{i=1}^n \partial(A_i) \tag{3}$$

ga teng.

*Izbot.* Sferik ikki burchak va sferik uchburchak yuzalari  $S(F_1) = 2\pi$ ,  $S(F_2) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$  ga teng ekanligidan foydalanamiz.

Bu yerda  $F_1$  sferik ikki burchak,  $F_2$  esa sferik uchburchak. Sferik  $n$  burchakni  $A_1$  va  $A_3$  uchlarini tutashtiruvchi diagonali uni bitta  $\Delta A_1 A_2 A_3$  uchburchakka va bitta  $(n-1)$  ko'pburchaklarga ajratad.



Teoremani isbotlashda matematik induksiyadan foydalanamiz [6,74-b]. Ya’ni (3) formula sferik ikki burchak va uchburchak uchun o’rinli deb, uni  $k < n$  ko’pburchak uchun ham o’rinli ekanligini ko’rsatamiz.

$$\delta(\Delta) = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \delta(A_i)$$

$$\delta(n-1) = 2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \delta(A_i)$$

Shartga ko’ra, chap tomondagi  $\delta(\Delta)$  uchburchak va  $\delta(n-1)$  ko’pburchak yuzalari yig’indisi izlanayotgan sferik  $n$  burchak yuzasiga teng, ya’ni

$$\delta(\Delta) + \delta(n-1) = \delta(F).$$

$$\delta(F) = 4\pi - \left( \sum_{i=1}^3 \delta(A_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \delta(A_i) \right).$$

Shuningdek,

$$\sum_{i=1}^3 \delta(A_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \delta(A_i) = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta(A_i)$$

u holda

$$S(F) = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta(A_i)$$

kelib chiqadi.

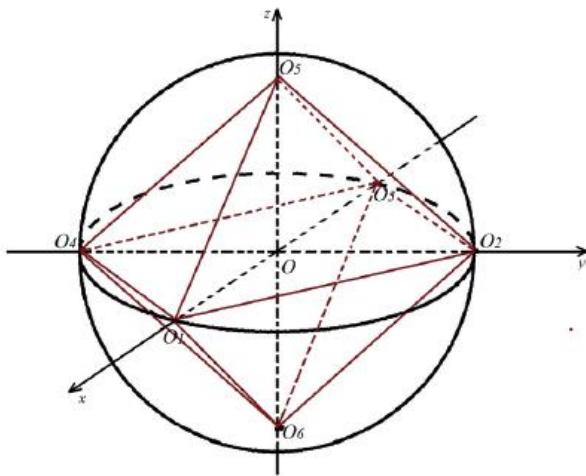
Endi birlik sferani unga tashqi chizilgan kubga sfera markazidan proyeksiyalash usullarini keltiramiz [2,23-b]. Buning uchun sfera markazini dekart koordinatalar boshiga parallel ko’chiramiz. U holda birlik sfera bilan dekart repyorning koordinat o’qlari quyidagi diametral qarama – qarshi nuqtalarda o’zaro kesishadi.

$$O_1(1,0,0) \text{ va } O_3(-1,0,0)$$

$$O_2(0,1,0) \text{ va } O_4(0,-1,0)$$

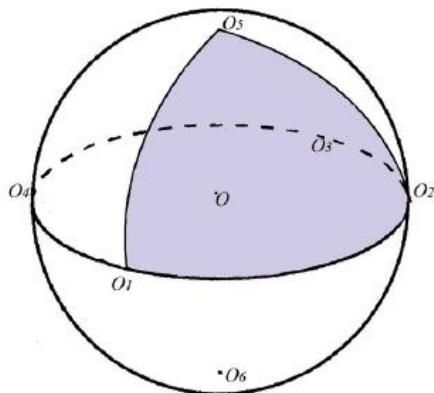
$$O_5(0,0,1) \text{ va } O_6(0,0,-1)$$

Agar diametral qarama – qarshi nuqtalarni o’zaro tutashtirsak, sferaga ichki chizilgan okraedr hosil bo’ladi. Bu oktaedr uchlari sferaga tegishli nuqtalardir.

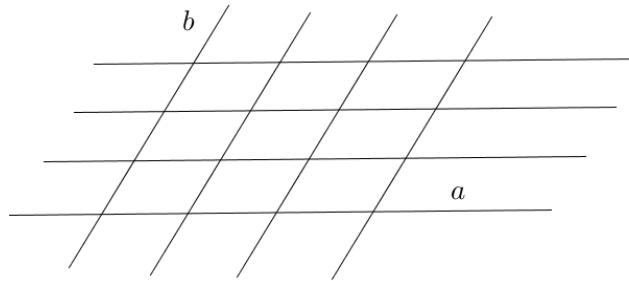


Dekart repyorning  $(xOy)$ ,  $(yOz)$ ,  $(xOz)$  koordinat tekisliklari sferani uchta katta aylanalar bo'yicha kesadi. Natijada sfera sakkizta kesimlarga ya'ni 8 ta sferik uchburchaklarga ajraladi. Ulardan bittasi yuqoridagi rasmda ko'rsatilgan.  $\Delta O_1O_2O_3$  sferik uchburchakning har bir ichki burchagi  $\frac{\pi}{2}$  ga va har bir tomoni uzunliklari ham  $\frac{\pi}{2}$  ga teng.

Sakkizta muntazam sferik uchburchaklar sferani to'liq qoplaydi.



Odatda to'r deganda o'zaro parallel b'lмаган  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri chiziqlar oilasi kesishishidan hosil bo'lган quyidagi shaklni ko'z oldimizga keltiramiz [4,61-b].



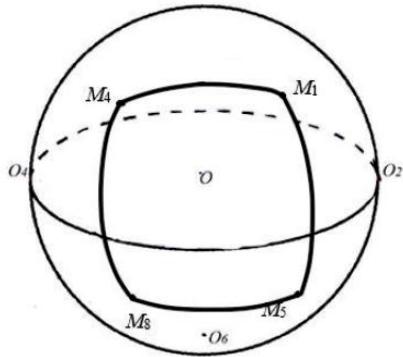
Yevklid tekisligida koordinat o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishib shunday to'rni hosil qiladi. Bu to'rlarni to'rburchaklardan tuzilgan deyish mumkin. Ammo barcha to'rlarni to'rburchaklardan tuzilgan deyish noto'g'ri. Shunday to'rlar borki, ular uchburchaklardan tuzilgan [6,89-b]. Yuqorida sferani sakkizta muntazam sferik uchburchaklar bilan qoplash mumkinligini ko'rdik. O'sha sakkizta sferik uchburchaklar muntazam bo'lganligi uchun ularni uchburchakli sferik tor deyish mumkin.  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$  nuqtalarda sferaga o'tkazilgan urinma tekisliklar o'zaro kesishib, sferaga tashqi chizilgan kubni hosil qiladi. Kub uchlari quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi.

$$\begin{aligned} &K_1(1,1,1), \quad K_2(-1,1,1), \quad K_3(-1,-1,1) \\ &K_4(1,-1,1), \quad K_5(1,1,-1) \quad K_6(1,-1,-1) \\ &K_7(-1,-1,1), \quad K_8(1,-1,-1). \end{aligned}$$

Endi kub uchlari sfera markazidan sferaga markaziy proyeksiyalaylik, ya'ni

$$\begin{aligned} f(K_1) &= M_1, \quad f(K_2) = M_2, \quad f(K_3) = M_3 \\ f(K_4) &= M_4, \quad f(K_5) = M_5, \quad f(K_6) = M_6 \\ f(K_7) &= M_7, \quad f(K_8) = M_8. \end{aligned}$$

Markaziy proyeksiyalashdan hosil bo'lgan  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$  nuqtalar yuqorida keltirilgan sakkizta sferik uchburchaklarning markazlari bo'ladi. Shuningdek, markaziy proyeksiyalashda kub qirralari katta yarim aylanalarining yoylariga akslanadi. Kubning oltita yoqlari bo'lganligi uchun kub qirralarining sferik aksi oltita muntazam sferik to'rburchaklardan iborat bo'ladi. Chizmada shunday to'rburchaklardan bittasi ko'rsatilgan.



Shu bilan sfera ustida sakkizta muntazam uchburchakli va oltita teng tomonli to'rtburchakli to'r hosil bo'ladi. Bu to'rlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, kesishgan nuqtalari har bir to'r tomonlarining o'rtalari bo'ladi.

### **ADABIYOTLAR.**

1. AleksandrovA. D. Izbrannie trudi: v 3 t. T. 2. Vipukliye mnogogranniki. Novosibirsk: " Nauka", 2007. 491 c.
2. AleksandrovA. D., Verner A. L., Rijkov B. I. Geometriya, 11. M: "Prosveshenie", 2014. 272 c.
3. Smirnov I. M. V mire mnogogrannikov. M: "Prosveshenie", 1995. 143 c.
4. VasilevaM. N. " Mnogogranniki Keplera – Puanso, vpisannie v dodekaedr i ikosaedr ". RGPUim. A. I. Gersina, 2015.
5. Vasileva M. N. " Geometriya odnosvyaznix mnogogrannix poverxnostey Keplera - Puanso". RGPUim. A. I. Gersina, 2017.
6. Danilova O. . " Geometriya neodnosvyaznix mnogogrannix poverxnostey Keplera - Puanso". RGPUim. A. I. Gersina, 2017.

### **Proyektiv tekislikdagi nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari orasidagi bog'lanishlar.**

**A. Sh. Shamshiev<sup>1</sup>, E. Q. Qurbanov<sup>2</sup>,**

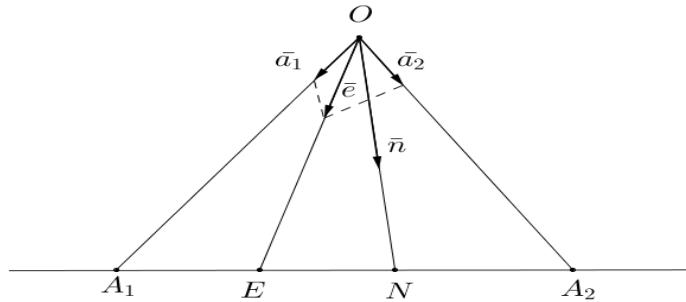
<sup>1</sup> Jizzax davlat pedagogika universiteti.

<sup>2</sup> Jizzax politexnika instituti,

**Аннотация:** Maqolada proyektiv tekislikda proyektiv koordinatalar sistemasini kiritish usullari, nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari orasidagi bog'lanishlar aniqlangan.

**Калит сўзлар:** Nuqtning affin koordinatalari, cheksiz uzoqlashgan nuqta, bazis nuqtalar, vektor fazo bazisi.

Ma'lumki, agar yevklid to'g'ri chizig'iga biror dekart yoki affin koordinatalar kiritilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning har bir  $M$  nuqtasiga yagona haqiqiy son mos qo'yilgan deyiladi va bu son shu nuqtaning koordinatasi deb ataladi [5,45-b].  $a$  to'g'ri chiziqqa affin koordinatalar sistemasini kiritish uchun bizga bitta  $O$  nuqta va shu to'g'ri chiziqqa parallel  $\bar{e}$  vektor kerak bo'ladi.  $O$  nuqta sifatida  $a$  to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini olamiz va shu nuqtadan  $\bar{e}$  vektorni qo'yamiz. U holda  $\overline{OM} = x\bar{e}$  tenglik (munosabat) yordamida  $a$  to'g'ri chiziqning har bir  $M$  nuqtasiga yagona  $x$  sonni mos qo'yish mumkin. Bu yerda  $\mathfrak{R} = \{O, \bar{e}\}$  juftlikka  $a$  to'g'ri chiziqdagi affin koordinatalar sistemasi deb,  $x$  songa esa  $M$  nuqtaning affin koordinatasi deb ataladi [1,85-b]. Proyektiv to'g'ri chiziqdagi har bir  $N$  nuqtaga ham shunday haqiqiy sonni mos keltirish mumkin. Proyektiv to'g'ri chiziqda cheksiz uzoqlashgan nuqta mavjud ekanligidan, uning har bir nuqtasiga bitta emas, balki ikkita sonni mos keltirish mumkin. Agar yevklid to'g'ri chizig'ida affin koordinatalar sistemasi bitta  $O$  nuqta va bitta  $\bar{e}$  vektordan tashkil topgan bo'lsa, proyektiv to'g'ri chiziqda proyektiv koordinatalar sistemasi uchta nuqtadan tashkil topgan  $\bar{\mathfrak{R}} = \{A_1, A_2, E\}$  nuqtalar uchталигига proyektiv reper deb ataladi [2,42-b].  $\bar{a}$  proyektiv to'g'ri chiziqdagi  $A_1, A_2, E$  nuqtalarga markaziy proyeksiyalashda mos keluvchi to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari  $\overline{\bar{a}_1}, \overline{\bar{a}_2}$  va  $\bar{e}$  vektorlardan iborat bo'lsin. Dasta to'g'ri chiziqlariga parallel vektorlar cheksiz ko'p ekanligidan  $\overline{\bar{a}_1}, \overline{\bar{a}_2}$  va  $\bar{e}$  vektorlar vazifasini bajaruvchi vektorlar cheksiz ko'p bo'ladi.  $\bar{a}$  proyektiv to'g'ri chiziqdagi  $E$  nuqtaga mos keluvchi  $\bar{e}$  vektorni yasashdan boshlaymiz. Proyeksiyalash markazi  $O$  nuqtada bo'lsin  $O \notin \bar{a}$ .  $\mathfrak{R} = \{\overline{\bar{a}_1}, \overline{\bar{a}_2}\}$  vektor fazoning bazis vektorlari bo'lsin.  $\mathfrak{R} = \{\overline{\bar{a}_1}, \overline{\bar{a}_2}\}$  bazisni ko'pincha proyektiv to'g'ri chiziqdagi  $\bar{\mathfrak{R}} = \{A_1, A_2, E\}$  proyektiv reperning vektorli bazisi deb ataladi [4,12-b]. Boshi  $O$  nuqtada bo'lgan  $\bar{e}$  vektorni shunday tanlaymizki, proyektiv reperning  $A_1$  va  $A_2$  bazis nuqtalariga mos keluvchi  $\overline{\bar{a}_1}$  va  $\overline{\bar{a}_2}$  vektorlar yig'indisi  $\bar{e}$  vektorga teng bo'lsin.



Ya’ni  $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{e}$ . Demak,  $\bar{e}$  vektor tomonlari  $OA_1$  va  $OA_2$  to‘g‘ri chiziqlarda yotgan parallelogramning diogonal vektori bo‘lar ekan.  $N$  nuqta  $\bar{a}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U holda  $N$  nuqtaga mos keluvchi to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorini  $\bar{n}$  bilan belgilaymiz.  $\bar{n}$  vektorning  $\mathfrak{R} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$  bazisga nisbatan koordinatalari  $n_1$  va  $n_2$  lar bo‘lsin. U holda  $\bar{n} = n_1 \bar{a}_1 + n_2 \bar{a}_2$ .  $\bar{n}$  vektor  $\bar{a}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi  $N$  nuqtaga mos kelgan vektor bo‘lganligi uchun  $\bar{n}$  vektorning  $n_1$  va  $n_2$  koordinatalari  $N$  nuqtaning  $\overline{\mathfrak{R}} = \{A_1, A_2, E\}$  proyektiv reperga nisbatan koordinatalari deb ataladi.  $\bar{a}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi  $N$  nuqtaga markaziy proyeksiyalashda yagona to‘g‘ri chiziq mos kelsada bu to‘g‘ri chiziqqa parallel vektorlar cheksiz ko‘p ekanligida  $\bar{n}$  vektor o‘rniga unga parallel ixtiyoriy boshqa  $\bar{k}$  vektorni ham olishimiz mumkin ya’ni

$$\bar{k} = \lambda \bar{n} = \lambda(n_1 \bar{a}_1 + n_2 \bar{a}_2) = (\lambda n_1) \bar{a}_1 + (\lambda n_2) \bar{a}_2.$$

Yuqorida ta’kidlaganimizdek,  $n_1$  va  $n_2$  sonlari  $N$  nuqtaning  $\overline{\mathfrak{R}} = \{A_1, A_2, E\}$  reperga nisbatan koordinatalari bo‘lsa, u holda  $\lambda n_1$  va  $\lambda n_2$  lar ham  $N$  nuqtaning koordinatalari bo‘ladi [3,58-b]. Shunday qilib,  $\bar{a}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi har bir  $N$  nuqtaga bir juft haqiqiy sonni mos qo‘yish mumkin ekan.

**1-teorema.** Proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi bazis nuqtalar  $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$  ko‘rinishdagi koordinatalarga ega bo‘ladi.

**Isbot.**  $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$  proyektiv reperning  $A_1$  va  $A_2$  bazis hamda  $E$  birlik nuqtalarining koordinatalarini aniqlaylik.  $\bar{a}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi  $N$  nuqta koordinatalari sifatida bu nuqtaga mos kelgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori koordinatalarini qabul

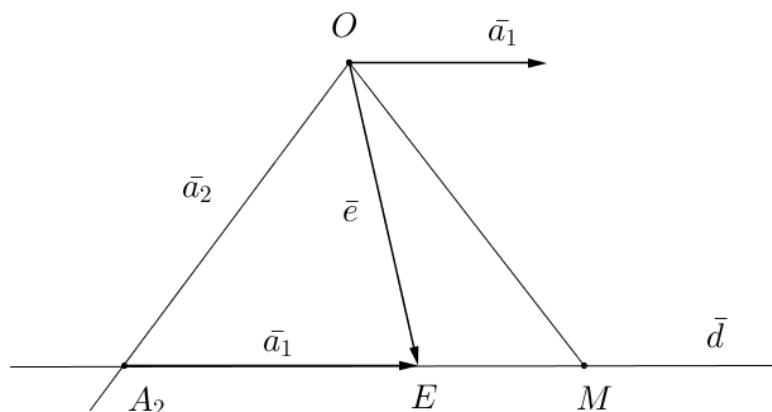
qilgan edik.  $A_1$  va  $A_2$  va  $E$  nuqtalarning koordinatalari sifatida ham ularga mos kelgan  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  va  $\bar{e}$  vektorlarning koordinatalarini qabul qilamiz. U holda quyidagi munosabatlardan foydalanish mumkin.

$$\bar{a}_1 = 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2, \quad \bar{a}_2 = 0 \cdot \bar{a}_1 + 1 \cdot \bar{a}_2, \quad \bar{e} = 1 \cdot \bar{a}_1 + 1 \cdot \bar{a}_2$$

Demak, bazis nuqtalar  $A_1(1, 0)$ ,  $A_2(0, 1)$ ,  $E(1, 1)$  koordinatalarga ega ekan.  $\bar{d}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi  $\mathfrak{R}$  proyektiv reperlar ichida shundaylari ham borki, ular  $a$  yevklid to‘g‘ri chizig‘idagi affin koordinatalar sistemasini vazifasini bajara oladi [1,44-b]. Bunday sistemalarni aniqlash uchun  $\bar{d}$  proyektiv to‘g‘ri chiziq  $\mathfrak{R} = \{A_\infty, A_2, E\}$  bitta bazis nuqtasi cheksiz uzoqlashgan proyektiv reper berilgan bo‘lsin.  $M(x_1, x_2)$  nuqta  $\bar{d}$  to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin.  $\mathfrak{R}$  reperning chekli  $A_2$  va  $E$  nuqtalaridan  $\bar{d}$  to‘g‘ri chiziqqa  $\mathfrak{R} = \{A_2, \overline{A_2E}\}$  affin repyorni hosil qilish mumkin. U holda  $M$  nuqta  $\mathfrak{R} = \{A_2, \overline{A_2E}\}$  affin reperga nisbatan bitta  $x$  koordinataga ega bo‘ladi.  $\overline{A_2E}$  vektor  $d$  yevklid to‘g‘ri chizig‘idagi bazis vektor bo‘lganligi uchun

$$\overline{A_2M} = x \overline{A_2E} \quad (1)$$

kelib chiqadi.  $A_1$  cheksiz uzoqlashgan nuqta ekanligidan quyidagi chizmani chizish mumkin.



Yuqorida  $\bar{e}$  vektorni tanlab oлганимизда  $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{e}$  tenglik o‘rinli edi.  $A_1$  nuqta cheksiz uzoqlashgan nuqta ekanligidan  $\bar{a}_1$  vektor  $\bar{d}$  proyektiv to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi va

shundagina  $\bar{e}$  vektor uchun  $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{e}$  shart bajariladi. U holda  $\bar{a}_1 = \overline{A_2 E}$  bo‘ladi. Har ikkala tomonini  $x$  ga ko‘paytirsak,  $x\bar{a}_1 = x\overline{A_2 E}$  bo‘ladi. Shuningdek, (1) ga asosan,  $x\overline{A_2 M} = \overline{A_2 M}$  ga teng.

$$\overline{A_2 M} = -\bar{a}_2 + \lambda \bar{m} = -\bar{a}_2 + \lambda(x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2).$$

U holda

$$x = \lambda x_1, \quad \lambda x_2 = 1, \quad x = \frac{x_1}{x_2} \quad (2)$$

Oxirgi munosabatlar to‘g‘ri chiziqdagi nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari orasidagi bog‘lanishni ifoda qiladi. Oxirgi munosabatlarni proyektiv tekislikdagi nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari uchun keltirib chiqaramiz. Aniqroq qilib aytganda, (2) formula yevklid to‘g‘ri chizig‘idagi nuqtaning affin koordinatasi bilan proyektiv to‘g‘ri chiziqda shu nuqtaga mos kelgan nuqtaning proyektiv koordinatalar orasidagi bog‘lanishni ifoda etadi. Shu bog‘lanishning proyektiv tekislikdagi ko‘rinishini aniqlaymiz. Agar yevklid tekisligida  $\mathfrak{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  affin koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsa, bu tekislikning har bir nuqtasiga bir juft haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘ladi [6.74-b].  $M(x, y)$  yevklid tekisligining ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, unga mos keluvchi radius vektor  $\overline{OM}$  ham  $x$  va  $y$  koordinatalarga ega bo‘ladi. U holda  $\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$  tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda  $x$  va  $y$  lar  $\overline{OM}$  vektoring shuningderk,  $M$  nuqtaning ham  $\bar{e}_1$  va  $\bar{e}_2$  bazis vektorlarga nisbatan koordinatalari affin koordinatalari deb ataladi.

**1-ta’rif.** Proyektiv tekislikda  $A_1, A_2, A_3$  va  $E$  nuqtalardan tashkil topgan tartiblangan  $\overline{\mathcal{B}} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$  sistemaga proyektiv koordinatalar sistemasi yoki proyektiv reper deb ataladi.

Bu yerda  $A_1, A_2, A_3, E$  nuqtalardan istalgan uchtasi bir to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmaydi.  $(A_1 A_2), (A_2 A_3), (A_1 A_3)$  proyektiv to‘g‘ri chiziqlar  $\mathfrak{R}$  proyektiv reperning

koordinat to‘g‘ri chiziqlari deb ataladi. Ta’rifda keltirilgan  $A_1, A_2, A_3, E$  nuqtalarning istalganlari cheksiz uzoqlashgan nuqta bo‘lishligi mumkin. Yuqorida proyektiv to‘g‘ri chiziq uchun keltirilgan belgilashlarni davom etdiramiz.  $\mathfrak{R}$  reperning bazis  $A_1, A_2, A_3$  nuqtalariga mos keluvchi vektor fazo vektorlarini  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$  lar bilan  $E$  birlik nuqtaga mos keluvchi vektor fazo vektorini  $\overline{e}$  bilan belgilaymiz. Proyektiv to‘g‘ri chiziqdada  $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$  reper uchun  $\overline{a_1} + \overline{a_2} = \overline{e}$  shartni qabul qilgan edik. Bu yerda ham  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$  vektorlar uchun  $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = \overline{e}$  shartni qabul qilamiz. Odatdagidek,  $\overline{e}$  vektor birlik  $E$  nuqtani hosil qiladi.  $M(x_1, x_2, x_3)$  proyektiv tekislikdagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. U holda uni hosil qiluvchi (unga mos keluvchi) vektor  $\overline{m}$  bo‘lib, ular uchun  $\overline{m} = x_1 \overline{a_1} + x_2 \overline{a_2} + x_3 \overline{a_3}$  yoyilma o‘rinli bo‘ladi. Endi  $V_3$  vektor fazoning  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$  bazis vektorlarini quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz.

$$\begin{aligned}\overline{a_1} &= 1 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + 0 \cdot \overline{a_3} \\ \overline{a_2} &= 0 \cdot \overline{a_1} + 1 \cdot \overline{a_2} + 0 \cdot \overline{a_3} \\ \overline{a_3} &= 0 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + 1 \cdot \overline{a_3}\end{aligned}$$

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$  vektorlar  $\mathfrak{R}$  reperning mos ravishda  $A_1, A_2, A_3$  bazis nuqtalarini hosil qilganligi uchun bazis nuqtalar quyidagi koordinatalarga ega bo‘ladi.

$$A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1).$$

Shuningdek,  $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = \overline{e}$  ekanligidan  $E(1,1,1)$  kelib chiqadi.

**2-ta’rif.** Proyektiv tekislikda uchta  $A_1, A_2, A_3$  bazis nuqtalardan hamda ular orqali o‘tuvchi uchta  $(A_1 A_2), (A_2 A_3), (A_1 A_3)$  proyektiv to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan to‘plamga koordinat uchligi yoki koordinat uchburchagi deb ataladi.

Proyektiv tekislikda nuqtaning proyektiv va affin koordinatalari orasidagi bog‘lanishni topishda qulaylik uchun proyektiv reperti  $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$  ko‘rinishda tanlab olamiz. Bu reperga nisbatan  $M$  nuqtaning proyektiv koordinatalarini  $M(x_1, x_2, x_3)$  ko‘rinishda belgilaylik. U holda cheksiz uzoqlashmagan  $A_3$  va  $E$  nuqtalarning koordinat

o‘qlardagi  $E_1$  va  $E_2$  proyeksiyalaridan foydalanib,  $\mathfrak{R} = \left\{ A_3, \overline{A_3E_2}, \overline{A_3E_1} \right\}$  affin reperni hosil qilish mumkin. B affin reperga nisbatan  $M$  nuqta koordinatalari  $x$  va  $y$  lar bilan belgilaymiz. Bu yerda  $M$  nuqta bir vaqtning o‘zida  $\mathfrak{R}$  affin ham  $\bar{\mathfrak{R}}$  proyektiv reperga nisbatan qaralayotganligidan hamda proyektiv to‘g‘ri chiziqdagi nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari orasidagi bog‘lanishdan yana bir bor foydalanib,

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad (3)$$

larni hosil qilish mumkin. (3) formulalar proyektiv tekislikdagi nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari orasidagi bog‘lanishni ifoda qiladi.

### **ADABIYOTLAR.**

Uchebnoe posobie. Izdatelstvo DVGUPS. Xabarovsk-2018.

2. Guseva N.I. i dr. Proyektivnaya geometriya. Moskva, Akademiya, 2013.
3. Denisova N. S., Teslya O. Yu. Postroenie yyeveklidovoy geometrii na osnove sistemi aksiom Veylya. Uchebnoe posobie. Moskva: Prometey, 2016.
4. Eliseeva N. A. Dissertatsiya. Raspredeleniya proyektivnogo prostranstva. Kazan-2004.
5. Isaeva M.A., Martinyuk A.N., Ptitsina I.V. Vvedenie v deystvitelnuyu proyektivnuyu geometriyu. Uchebnoe posobie.– M.: Izdatelstvo MGOU, 2010.
6. Ignatev Yu.G., Agafonov A.A. Proyektivnaya geometriya i metodi izobrajeniya. Uchebnoe posobie. - Kazan: Kazanskiy universitet, 2014, - 179

### **Ba’zi singulyar sirtlar haqida** **Usmanov Salim Eshimovich, Abdanov Sardor Qahhorovich**

Ma’lumki, agar  $x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)$  lar differensiallanuvchi funksiyalar bo’lib, uch o’lchvli Evklid fazosidagi biror sirt

$$x_1 = x_1(u_1, u_2), \quad x_2 = x_2(u_1, u_2), \quad x_3 = x_3(u_1, u_2) \quad (1)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo’lsa, u holda quyidagi ta’rif o’rinli.

**Ta’rif.** Agar  $(u_1, u_2)$  nuqtada ushbu

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 2 ga teng bo'lsa, u holda (1) sirtning

$$P = (x_1, x_2, x_3) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$$

nuqtasi uning regulyar nuqtasi deyiladi ( [1, 72-b.] yoki [2, 218-b.]). Sirtning regulyar bo'lmanan nuqtalari uning singulyar nuqtalari deyiladi.

$R^3$  fazoda quyidagi parametrik tenglamalar bilan berilgan sirtlarni qaraymiz:

$$\begin{aligned} x_1(u_1, u_2) &= r_1 + u_1^{a_1} u_2^{a_2}, \\ x_2(u_1, u_2) &= r_2 + u_1^{b_1} u_2^{b_2}, \\ x_3(u_1, u_2) &= r_3 + u_1^{c_1} u_2^{c_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Bu yerda  $r_1, r_2, r_3$  - ixtiyoriy haqiqiy sonlar va  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  - manfiy bo'lmanan ratsional sonlar,  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ . Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B_3 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

(2) sirtni yuqoridagi ta'rif bo'yicha tekshirib, quyidagi tasdiq o'rinni bo'lishini ko'ramiz.

**Lemma.** Agar  $B_1, B_2, B_3$  sonlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda (2) sirtning  $(r_1, r_2, r_3)$  nuqtasining yetarlicha kichik atrofida va koordinatalar boshi shu nuqtada bo'lgan koordinatalar sistemasining koordinata tekisliklaridan tashqarida yotadigan nuqtalari regulyar nuqtalaridir. (2) sirtning koordinatalar boshi  $(r_1, r_2, r_3)$  nuqtada bo'lgan koordinatalar sistemasining koordinatalar tekisliklarida yotadigan nuqtalari uning singulyar nuqtalaridir.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. Современная геометрия. Москва "Наука". 1979.

2. П.К.Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. Москва, 1938.

### III. SHO'BA. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKA

#### ON AN INVERSE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION

Akhundov A.Ya.

Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan,

Institute of Mathematics and Mechanics

adalatakhund@gmail.com

The purpose of the paper is to study the well-posedness of an inverse problem for an elliptic equation with unknown coefficients on the right-hand side. The inverse problem is considered in a bounded domain in the case of the Dirichlet boundary condition and with integral additional information. A theorem on the uniqueness and “conditional” stability of the solution of the considered inverse problem is proved.

Let  $D \subset R^n$  be a convex, bounded domain with rather smooth boundary  $\partial D$ ,  $D' \subset R^{n-1}$  be a projection of domain  $D$  on a hyperplane  $y = x_n = 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$  and  $(x, y)$  are arbitrary points of domains  $D'$  and  $D$ , respectively,  $D = D' \times (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ ,  $\gamma_1(x)$  and  $\gamma_2(x)$  are given rather smooth functions.

We consider an inverse problem on determination of a pair of functions  $\{f(x), u(x, y)\}$  from the conditions

$$\Delta u = f(x)g(u) \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial D \quad (2)$$

$$\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} u(x, y) dy = h(x), \quad x \in \overline{D}' \quad (3)$$

by the known functions  $g(p), \varphi(x, y), h(x)$ .

**Definition.** A pair of function  $\{f(x), u(x, y)\}$  is said to be a solution of problem (1)-(3), if

- 1)  $f \in C(\overline{D}')$ ,
- 2)  $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$
- 3) these functions verify (1)-(3) in the ordinary sense.

Theorems of uniqueness and “conditional” stability of the solution in inverse problems occupies a central place in studying their well-posedness.

Let  $\{f^i(x), u^i(x, y)\}$  be solutions of problem (1)-(3) that correspond to the data  $g^i(u^i)$ ,  $\varphi^i(x, y)$ ,  $h^i(x)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

**Theorem.** Let 1)  $g^i(p)$  is determined and continuous for any  $p \in R^1$ ; there exists a constant  $c_0 > 0$  such that for all  $p, q \in R^1$ ,  $|g^i(p) - g^i(q)| \leq c_0 |p - q|$ ;  $\varphi^i \in C^{2+\alpha}(\partial D)$ ;  $h^i \in C^{2+\alpha}(\overline{D}')$ ;  $\gamma_i \in C^{1+\alpha}(\overline{D}')$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\gamma_1(x) < \gamma_2(x)$ ,  $x \in \overline{D}'$ .

2) there exist solutions  $\{f^i(x), u^i(x, y), i \in \{1, 2\}\}$  of problem (1)-(3) in the sense of definition 1, and they belong to  $K_\alpha = \{(f, u) \mid f \in C^\alpha(\overline{D}'), u \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), |f(x)| \leq c_1, x \in \overline{D}', |D_{x,y}^l u(x, y)| \leq c_2, l \in \{0, 1, 2\}, (x, y) \in \overline{D}\}$ , where  $c_1, c_2$  are some constants.

Then the solution of problem (1)-(3) is unique and the “conditional” stability estimation is valid:

$$\|f^1 - f^2\|_0 + \|u^1 - u^2\|_0 \leq c_3 \|g^1 - g^2\|_0 + \|\varphi^1 - \varphi^2\|_2 + \|h^1 - h^2\|_2$$

here  $c_3 > 0$  is independent on the data of problem (1)-(3) and the set  $K_\alpha$ .

### Inverse problem of determining the kernel in an integro - differential equation of parabolic type with nonlocal conditions

D.D. Atoev - PhD student, Bukhara State University

Let  $T > 0$  be fixed number and  $D_{Tl} = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ . Consider the inverse problem of determining of functions  $u(x, t)$ ,  $k(t)$  such that it satisfies the equation

$$u_t - u_{xx} = \int_0^t k(t - \tau)u(x, \tau)d\tau, \quad (x, t) \in D_{Tl}, \quad (1)$$

with the nonlocal initial condition

$$u(x, 0) + \lambda u(x, T) + \int_0^T p(\tau)u(x, \tau)d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad [1, p.3.]. \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

and the additional condition

$$u(x_0, t) = h(t), \quad (4)$$

here  $\lambda \geq 0$  is a given number greater than zero,  $\varphi(x)$ ,  $p(t)$  ( $p(t) \geq 0, t \in [0, T]$ ),  $h(t)$  are given functions of  $x \in [0, l]$  and  $t \in [0, T]$ .

We introduce the notation

$$\vartheta(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (5)$$

and obtain the following equivalent problem with respect to function  $\vartheta(x, t)$ :

$$\vartheta_t - \vartheta_{xx} = \int_0^t k(t - \tau) \vartheta(x, \tau) d\tau, \quad (6)$$

$$\vartheta(x, 0) + \lambda \vartheta(x, T) + \int_0^T p(\tau) \vartheta(x, \tau) d\tau = \varphi''(x), \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad (7)$$

$$\vartheta|_{x=0} = \vartheta|_{x=l} = 0, \quad (8)$$

$$\vartheta|_{x=x_0} = h'(t) - \int_0^t k(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (9)$$

The problem (6)-(8) is equivalent to the problem of finding the function  $\vartheta(x, t)$  from the following integral equation:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= F(x, t) + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, \beta) \int_0^{t-\beta} k(\tau) \vartheta(\xi, t - \beta - \tau) d\tau d\xi d\beta - \\ &\quad - \lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x, \xi, \beta) \int_0^{T+t-\beta} k(\tau) \vartheta(\xi, T + t - \beta - \tau) d\tau d\xi d\beta - \\ &\quad - \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x, \xi, \alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} k(\beta) \vartheta(\xi, t + \tau - \alpha - \beta) d\beta d\xi d\alpha d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

$$F(x, t) = \int_0^l G_0(x, \xi, t) \varphi''(\xi) d\xi.$$

Differentiate the integral equation (10) once with respect to the variable  $t$ :

$$\begin{aligned} \vartheta_t(x, t) &= F_t(x, t) + \lambda \int_0^l G_0(x, \xi, t) \int_0^T k(\tau) \vartheta(\xi, T - \tau) d\tau d\xi - \\ &\quad - \lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G(x, \xi, \beta) \int_0^{T+t-\beta} k(\tau) \vartheta_t(\xi, T + t - \beta - \tau) d\tau d\xi d\beta - \\ &\quad - \lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x, \xi, \beta) k(T + t - \beta) v(\xi, 0) d\xi d\beta + \\ &\quad + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, \beta) k(t - \beta) v(\xi, 0) d\xi d\beta + \\ &\quad + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, \beta) \int_0^{t-\beta} k(\tau) \vartheta_t(\xi, t - \beta - \tau) d\tau d\xi d\beta + \\ &\quad + \int_0^T p(\tau) \int_0^l G_0(x, \xi, t) \int_0^\tau k(\beta) \vartheta(\xi, \tau - \beta) d\beta d\xi d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x, \xi, \alpha) k(t + \tau - \alpha) \vartheta(\xi, 0) d\xi d\alpha d\tau - \\
& - \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x, \xi, \alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} k(\beta) \vartheta_t(\xi, t + \tau - \alpha - \beta) d\beta d\xi d\alpha d\tau \quad (11)
\end{aligned}$$

We calculate the derivative  $F_t(x, t)$ , using the relation

$$G_{0t}(x, \xi, t) = G_{0\xi\xi}(x, \xi, t).$$

Integrating by parts, using matching conditions  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ , we find that

$$\begin{aligned}
F_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^l G_0(x, \xi, t) \varphi''(\xi) d\xi \right) = \\
&= \int_0^l G_{0\xi\xi}(x, \xi, t) \varphi''(\xi) d\xi = \int_0^l G_0(x, \xi, t) \varphi^{(4)}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Taking into account the last equalities and condition (9), from (11), we obtain the integral equation for the unknown function  $k(t)$  as follows:

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{h''(t)}{h(0)} - \frac{F_t(x_0, t)}{h(0)} - \frac{1}{h(0)} \int_0^t k(\tau) h'(t - \tau) d\tau - \\
&\quad - \frac{\lambda}{h(0)} \int_0^l G_0(x_0, \xi, t) \int_0^T k(\tau) \vartheta(\xi, T - \tau) d\tau d\xi + \\
&\quad + \frac{\lambda}{h(0)} \int_t^{T+t} \int_0^l G(x_0, \xi, \beta) \int_0^{T+t-\beta} k(\tau) \vartheta_t(\xi, T + t - \beta - \tau) d\tau d\xi d\beta + \\
&\quad + \frac{\lambda}{h(0)} \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x_0, \xi, \beta) k(T + t - \beta) v(\xi, 0) d\xi d\beta - \\
&\quad - \frac{1}{h(0)} \int_0^t \int_0^l G(x_0, \xi, \beta) k(t - \beta) v(\xi, 0) d\xi d\beta - \\
&\quad - \frac{1}{h(0)} \int_0^t \int_0^l G(x_0, \xi, \beta) \int_0^{t-\beta} k(\tau) \vartheta_t(\xi, t - \beta - \tau) d\tau d\xi d\beta - \\
&\quad - \frac{1}{h(0)} \int_0^T p(\tau) \int_0^l G_0(x_0, \xi, t) \int_0^\tau k(\beta) \vartheta(\xi, \tau - \beta) d\beta d\xi d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{h(0)} \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x_0, \xi, \alpha) k(t + \tau - \alpha) \vartheta(\xi, 0) d\xi d\alpha d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{h(0)} \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x_0, \xi, \alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} k(\beta) \vartheta_t(\xi, t + \tau - \alpha - \beta) d\beta d\xi d\alpha d\tau. \quad (12)
\end{aligned}$$

**Theorem 1.** Let conditions  $\varphi(x) \in C^4[0, l]$ ,  $p(t) \in C[0, T]$ ,  $h(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ ,  $h(0) \neq 0$ ,  $\lambda \geq 0$ , be satisfied. Then there exists sufficiently small numbers  $T^* \in (0, T)$  that the solution to the integral equations (10)-(12) in the class of functions  $\vartheta(x, t) \in C^{2,1}(D_{T^*})$ ,  $k(t) \in C^1[0; T^*]$  exist and unique, where  $D_{T^*} = \{(x, t) | x \in (0, l^*), t \in (0, T^*)\}$ .

In this work, the solvability of a nonlinear inverse problem for integro-differential heat equation with nonlocal conditions was studied. The inverse problem was considered for determining the kernel  $k(t)$  included in the equation (1.1) with integral observation (1.4) of the solution of this system with the initial and boundary conditions (1.2), (1.3). Conditions for given functions are obtained, under which the inverse problem have unique solutions for a sufficiently small interval.

### References

1. E. I. Azizbayov , Y. T. Mehraliyev, Solvability of nonlocal inverse boundary-value problem for a second-order parabolic equation with integral conditions, Electron. J. Differential Equations 2017, No. 125, 1–14.
2. A. N. Kolmogorov , S. V. Fomin, "Elements of function theory and functional analysis", Moscow: Nauka, 1972.(In Russian)
3. Trenogin, V.A., Funktsional'nyi analiz (Functional Analysis), Moscow: Izd. Tsentr "Akademiya", 2002.

## INTEGRATION THE COMBINED KDV-NKDV EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

Baltaeva I. I., Azimov D. B.,

Urgench State University,

14, Kh.Alimdjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan;

iroda-b@mail.ru, doniyor.azimov.97@bk.ru

**Abstract.** In this work we study the integration of the combined KdV-nKdV equation with a self-consistent source in the “rapidly decreasing” class via inverse scattering problem.

**Keywords.** The combined KdV-nKdV equation, self-consistent source, scattering theory, inverse scattering problem.

In this work, we consider the following system of equations

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + 6uu_x + u_{xxx} + 4\sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} |\phi_m|^2, \\ v_{xx} = uv, \\ -\varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, m = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

under the initial condition

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2)$$

The initial function  $u_0(x)$  holds the following properties:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) |u_0(x)| dx < \infty,$
2. The operator  $Ly \equiv -y'' + u_0(x)y = \lambda y$ ,  $x \in R^1$  has exactly  $N$  negative eigenvalues  $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$ .

In the problem under consideration  $\varphi_m(x, t)$  - is an eigenvector function of

the operator  $L(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$ , corresponding to the eigenvalue

$\lambda_m(t) = -\chi_m^2(t)$ , and normalized by the condition,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_m(x, t)|^2 dx = A_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

where  $A_m(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  are given nonnegative continuous functions.

It is assumed that, the functions  $u(x, t)$  is sufficiently smooth, tends to zero under  $x \rightarrow \pm\infty$  and  $u(x, t), v(x, t)$  tends to its limits rapidly enough when  $x \rightarrow \pm\infty$  and satisfying following conditions:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( (1+|x|)|u(x, t)| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right) dx &< \infty, \\ v^2(x, t) &\rightarrow 1, \text{as } x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

The goal of this work is to study the integration of the combined KdV-nKdV equation with a self-consistent source in the “rapidly decreasing” class via inverse scattering problem.

Not that, for the classical Korteweg-de Vries equation, this result was obtained in the work [1]. Finding solutions to nonlinear evolution equations have several direct and inverse methods. In particular, the solutions of the combined KdV-nKdV equation was found by using the  $(G'/G)$  - expansion method in work [2].

## **REFERENCES**

1. Mel'nikov V.K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source// Phys. Lett. A-UK, 1988. - v.128. - pp. 488-4924.

2. M. Allami, A. K. Mutashar, and A. S. Rashid, “On solutions of the combined KdV-nKdV equation”, Al-Mustansiriyah Journal of Science, vol. 30, no. 2, pp. 33–45, Sep. 2019.

## **SOLITON WAVE SOLUTIONS OF THE FRACTIONAL KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH ADDITIONAL TERM**

**<sup>1</sup>Bazar Babajanov, <sup>2</sup>Fakhreddin Abdikarimov, <sup>3</sup>Zokhidjon Shakirov**

**<sup>1</sup>DSc, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench  
State University, Uzbekistan.**

**<sup>2</sup>Phd student, Khorezm Mamun Academy, Uzbekistan.**

**<sup>3</sup>Master degree student, Department of Applied Mathematics and Mathematical  
Physics, Urgench State University, Uzbekistan.**

**Email: a.murod@mail.ru, goodluck\_0714@mail.ru**

Recently, many research articles focused on the nonlinear fractional partial differential equations which are the generalization of the classical integer order partial differential equations. Fractional differential equations can be used to properly model various phenomena such as modelling of earth quack nonlinear oscillation[1], propagation of spherical waves[2], the fluid traffic[3], biomedical and biological[4] and other applications in various branches of research. Many important and efficient techniques that have been implemented to solve fractional differential equations and their systems are

optimal homotopy asymptotic method[5], natural transform method[6] and  $(G/G')$ -expansion method[7].

The fractional Korteweg-de Vries equation is a valuable class of the PDEs, it describes elegantly modeled of evolution of unidirectional nonlinear shallow water waves[8]. Various numerical, analytical and semi analytical techniques are devised for the solution of fractional Korteweg-de Vries equation[9]. Momani extended the Adomian decomposition method for the equation and obtained the numerical solution of fractional Korteweg-de Vries equation in the form of convergent series[10]. Wang used the homotopy perturbation method to obtain the approximate analytical solution of fractional Korteweg-de Vries equation[11]. Wei proposed the LDG finite element method of the Korteweg-de Vries-Burgers-Kuramoto equation, using variable-order Riemann-Liouville fractional derivatives, and proved the unconditional stability and convergence of the scheme[12]. Zhang constructed an efficient numerical scheme for solving linearized fractional-order Korteweg-de Vries equations on unbounded spaces[13].

We consider the fractional Korteweg-de Vries equation with additional term

$$D_t^\alpha u - 6puD_x^\beta u + D_x^{3\beta} u + \gamma D_x^\beta u = 0,$$

where  $u(x,t)$  is an unknown function,  $x \in R$ ,  $t \geq 0$ ,  $p$  and  $\gamma$  are any constants,  $0 < \alpha < 1$  and  $0 < \beta < 1$  are the order of the fractional derivative. The fractional derivative is considered in the sense of Riemann-Liouville.

This paper presents exact solutions for the fractional Korteweg-de Vries equation with additional term using the functional variable method. The main advantage of the proposed functional variable method over other methods is that it provides more accurate traveling wave solutions with additional free parameters. As a result, periodic and hyperbolic solutions are obtained. It is shown that the calculations in the functional variable method are very simple and easy to understand, and this method is very effective for handling nonlinear equations of fractional order. Exact solutions are great importance in revealing the internal mechanism of physical phenomena. This method presents a wider applicability for handling nonlinear fractional-order wave equations.

## References

1. He J.H. Nonlinear Oscillation with Fractional Derivative and its Applications. International Conference on Vibrating Engineering. Dalian. 1998;288-291.
2. Fellah E.A., Fellah M., Roncen R., Ongwen N.O., Ogam E., Depollier C. Transient Propagation of Spherical Waves in Porous Material: Application of Fractional Calculus. Symmetry. 2022;14(2):233. <https://doi.org/10.3390/sym14020233>.
- 3 He J.H. Homotopy Perturbation Technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999;178(3-4):257-262. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(99\)00018-3](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(99)00018-3).
4. Bertsias P., Kapoulea S., Psychalinos C., Elwakil A.S. A Collection of Interdisciplinary Applications of Fractional-Order Circuits. Fractional Order Systems an Overview of Mathematics. Design and Applications for Engineers. 2022;1:35-69. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-824293-3.00007-7>.
5. Mustahsan M., Younas H.M., Iqbal S., Rathore S., Nisar K.S., Singh J. An Efficient Analytical Technique for Time-Fractional Parabolic Partial Differential Equations. Frontiers in Physics. 2020;8:131. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00131>.
6. Ismail G.M., Abd-Rahim H.R., Abdel-A.A., Kharabsheh R., Alharbi W., Abdel A.M. An Analytical Solution for Fractional Oscillator in a Resisting Medium. Chaos Solitons & Fractals. 2020;130:109395. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109395>.
7. Ali K.K., Dutta H., Yilmazer R., Noeiaghdam S. On the New Wave Behaviors of the Gilson-Pickering Equation. Frontiers in Physics. 2020;8:54.
8. Yokus A. Comparison of Caputo and conformable derivatives for time-fractional Korteweg-de Vries equation via the finite difference method. International Journal of Modern Physics B. 2018;32(29):1-12. <https://doi.org/10.1142/S0217979218503654>.
9. Yan J., Zhang H., Liu Z., Song S. Two novel linear-implicit momentum-conserving schemes for the fractional Korteweg-de Vries equation. Applied Mathematics and Computation. 2020;367:1-14. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124745>.
10. Momani S. An explicit and numerical solutions of the fractional KdV equation. Mathematics and Computers in Simulation. 2005;70(2):110-118. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2005.05.001>.
11. Wang Q. Homotopy perturbation method for fractional KdV equation. Applied Mathematics and Computation. 2009;190:1795-1802. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.02.065>.
12. Wei L., Wei X., Tang B. Numerical Analysis of Variable-Order Fractional KdV-Burgers-Kuramoto Equation. Electronic Research Archive. 2018;30:1263-1281. <https://doi.org/10.3934/era.2022066>.
13. Zhang Q., Zhang J., Jiang S., Zhang Z. Numerical Solution to a Linearized Time Fractional KdV Equation on Unbounded Domains. Mathematics of Computation. 2018;87:693-719.

# Convolution kernel determination problem in the third order Moore-Gibson-Thompson equation

**D.K. Durdiev<sup>1,a</sup>, Z.R. Bozorov<sup>1,b</sup> A.A. Boltayev<sup>1,c</sup>**

<sup>1)</sup> Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan,

<sup>a)</sup>d.durdiev@mathinst.uz, <sup>b)</sup>zavqiddinbozorov2011@mail.ru <sup>c)</sup>asliddinboltayev@mail.ru

We consider the one-dimensional Moore-Gibson-Thompson equation [1]:

$$u_{ttt} + u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} + \\ + \int_0^t g(t-\tau) (u_{xx}(x, \tau) + u_{xx\tau}(x, \tau)) d\tau = 0, \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

with initial

$$\begin{cases} u(x, 0) = \psi_1(x), \\ u_t(x, 0) = \psi_2(x), \quad x \in [0, 1], \\ u_{tt}(x, 0) = \psi_3(x), \end{cases} \quad (2)$$

and boundary conditions

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where,  $T$  is arbitrary positive number and  $\Omega_T := \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ .

The problem of determining a function  $u(x; t) \in C_{x,t}^{2,3}(\Omega_T) \cap C_{x,t}^{2,3}(\overline{\Omega}_T)$  that satisfies (1)-(3) with known functions  $\psi_i(x), i = \overline{1,3}$  and  $g(t)$  will be called the direct problem [2].

In the inverse problem [3], it is required to determine the function  $g(t)$  using overdetermination conditions about the solution of the direct problem (1)-(3):

$$\int_0^t \eta(x) u(x, t) dx = h(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

In this work, inverse problem was considered for determining the kernel  $g(t)$  included in the equation (1) with by using additional condition (4) of the solution of problem with the initial and boundary conditions (2), (3). Sufficient conditions for given

functions are obtained, under which the inverse problem has unique solutions for a sufficiently small interval.

## REFERENCES

1. B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, R. Marchand, Well-posedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, *Control and Cybernetics*, (2011), V. 40, pp. 971988.
2. V.G. Romanov, Inverse problems of mathematical physics, Utrecht, The Netherlands, (1987).
3. S. Liu, and R. Triggiani, An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, (2013), V.21, pp. 825869.

## INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR TIME FRACTIONAL WAVE EQUATION WITH GENERALIZED FRACTIONAL DERIVATIVE

**D. K. Durdiev<sup>1,2</sup> and H.H. Turdiev<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, M.Ikbol str. 11, Bukhara 200100, Uzbekistan,

<sup>2</sup>Bukhara State University, M.Ikbol str. 11, Bukhara 200100, Uzbekistan.

E-mail: <sup>1</sup>d.durdiev@mathinst.uz, <sup>2</sup>hturdiev@mail.ru

In the domain  $\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ , we consider the unique solvability of the inverse problem of determining a pair of functions  $\{u(x, t), q(t)\}$  satisfying the equation

$$\left( D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u \right)(x, t) - u_{xx} + q(t)u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

with the initial conditions of Cauchy type

$$I_{0+,t}^{(2-\alpha)(1-\beta)} u(x, t)|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( I_{0+,t}^{(2-\alpha)(1-\beta)} u \right)(x, t)|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Here the generalized Riemann-Liouville (Hilfer) fractional differential operator  $D_{0+,t}^{\alpha,\beta}$  of the order  $1 < \alpha < 2$  and type  $0 \leq \beta \leq 1$  is defined as follows :

$$D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u(\cdot, t) = \left( I_{0+,t}^{\beta(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( I_{0+,t}^{(1-\beta)(2-\alpha)} u \right) \right) (\cdot, t),$$

$$I_{0+,t}^\gamma u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t - \tau)^{1-\gamma}} d\tau, \quad \gamma \in (0,1)$$

is the Riemann–Liouville fractional integral of the function  $u(x, t)$  with respect to  $t$ ,  $\Gamma(\cdot)$  is the Euler's Gamma function. The function  $f(x, t)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  are known functions.

In [1, pp. 112-118], by R. Hilfer was introduced a generalized form of the Riemann–Liouville fractional derivative of order  $\alpha$  and a type  $\beta \in [0,1]$ , which coincides with the Riemann-Liouville fractional derivative at  $\beta = 0$  and with Gerasimov-Caputo fractional derivative  $\beta = 1$ , and  $\beta \in (0,1)$  interpolates these both fractional derivatives.

Assume that throughout this article, given functions  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $f$  satisfy the following assumptions:

- A1)  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in C^3[0,1]$ ,  $\{\varphi_1^{(4)}, \varphi_2^{(4)}\} \in L_2[0,1]$ ,  $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$ ,  $\varphi_2(0) = \varphi_2(1) = 0$ ,  $\varphi''_1(0) = \varphi''_1(1) = 0$ ,  $\varphi''_2(0) = \varphi''_2(1) = 0$ , and  $\varphi_1^{(4)}(0) = \varphi_1^{(4)}(1) = 0$ ,  $\varphi_2^{(4)}(0) = \varphi_2^{(4)}(1) = 0$ ;
- A2)  $f(x, \cdot) \in C[0, T]$  and for  $t \in [0, T]$ ,  $f(\cdot, t) \in C^3[0,1]$ ,  $f(\cdot, t)^{(4)} \in L_2[0,1]$ ,  $f(0, t) = f(1, t) = 0$ ,  $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) = 0$  and  $f_{xxxx}(0, t) = f_{xxxx}(1, t) = 0$ ;

Fractional Calculus is a new growing field. Fractional derivative is the generalization of the classical derivative of whole order. Fractional derivative had been used in physical events such as visco-elasticity, dynamical processes in self-similar structures, biosciences, signal processing, system control theory, electrochemistry, diffusion processes and etc [2]-[6].

Inverse problems for classical integro-differential wave propagation equations have been extensively studied. Nonlinear inverse coefficient problems with various types of sufficient determination conditions are often found in the literature (e.g., [7]-[12] and references therein).

We consider the weighted spaces of continuous functions .

$$C_\gamma[a,b] := \{f: (a,b] \rightarrow R: (x-a)^\gamma f(x) \in C[a,b], 0 \leq \gamma < 1, \},$$

$$C_\gamma^{2,\alpha,\beta}(\Omega) = \{u(x,t): u(\cdot, t) \in C^2(0,1); t \in [0,T] \text{ and}$$

$$D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u(x,\cdot) \in C_\gamma(0,T]; x \in [0,1], 1 < \alpha \leq 2, 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

We obtain the following assertion.

**Theorem 1.** Let  $q(t) \in C[0,T]$ , A1), A2) are satisfied, then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3) ,  $u(x,t) \in C_\gamma^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

#### REFERENCES

1. Hilfer R, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific: Singapore, 2000.
2. Sorrentinos G, *Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams*, in Proceedings of IMAS, Saint Louis, Mo, USA, 2006.
3. Sorrentinos G, *Analytic modeling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems*, in Advances in Fractional Calculus, J. Sabatier, O. P. Agrawal, and J. A Tenreiro Machado, Eds., pp. 403-416, Springer, 2007.
4. Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, NY, USA, 1999.
5. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Yveron, 1993.
6. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and application of fractional differential equations*. North–Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.
7. Durdiev D. K., *On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type*, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. Vol.19 (4), pp.658-666, 2015.
8. Durdiev D. K., Turdiev Kh. Kh., *The problem of finding the kernels in the system of integrodifferential Maxwell's equations*, Sib. Zh. Ind. Math., Vol. 24:2, 38-61.  
2021
9. Durdiev D. K. and Turdiev Kh. Kh. , *An Inverse Problem for a First Order Hyperbolic System with Memory*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 56 (12), pp. 1666-1675, 2020.
10. Durdiev D. K., Jumaev J. J., *Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor*, Math. Meth. Appl. Sci. Vol. 45, pp. 8374-8388, 2022.
11. Durdiev D. K., Rahmonov A. A., *A 2D kernel determination problem in a viscoelastic porous medium with a weakly horizontally in homogeneity*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 43, pp. 8776-8796, 2021.

12. Durdiev D. K., Rahmonov A. A., Bozorov Z. R., *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 44, pp. 10753-10761, 2021.

## CARLEMAN'S FORMULA FOR THE GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN SYSTEM IN A BOUNDED DOMAIN

**Ermamatova Fotima E**

*Samarkand State University, Uzbekistan, Samarkand*

*fotimaermamatova2020@gmail.com*

Let  $x = (x_1, x_2, x_3)$  and  $y = (y_1, y_2, y_3)$  be points of the real three dimensional Euclidean space  $R^3$ ,  $\Omega$  is a part of a ball  $B = B(0, R)$  with center at the origin and radius  $R > 0$ . Let  $S$  be a smooth closed surface in  $B$  which does not meet  $x = 0$  and divides  $B$  into two domains. Denote by  $\Omega$  the closed domain that does not contain the origin. Its boundary  $\partial\Omega$  consists of simply connected domain in  $R^3$ , with piecewise-smooth boundary consisting of  $S$  and a part of the sphere  $\partial B$  in  $R^3$ .

Suppose that vector function  $U = (u_1, u_2, u_3)$  satisfied in  $D$  the system equations [1]

$$\sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + a_k u_k \right) = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - b_k u_j + b_j u_k = 0 \quad (k, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

**Statement of the problem.** Find a regular solution  $U$  of system (1) in the domain  $\Omega$  using its Cauchy data on the surface  $S$ :

$$U(y) = f(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

where  $f(y)$  is a given continuous vector function on  $S$ .

Using results from [2], [3],[4] on solving the Cauchy problem, we construct the Carleman matrix for the Laplace and Helmholtz equations in explicit form and, on its basis, the regularized solution of the Cauchy problem for system (1). By using the continuation formula we found necessary and sufficient for the extendibility of functions given an a part of a boundary to the domain as a solution of the system (1). We prove the

Fock-Kyni theorem fore this one. This result were proofed in [5]-[7] of the another domain  $\Omega$  three-dimensional Euclidean space.

## REFERENCES

1. E. I. Obolashvili, "The spatial analog of generalized analytic functions," Soobshch. AN GSSR 73(1), 20–24 (1974).
2. Lavrent'ev M.M. Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics, Novosib., 1962, 92 pp.
3. Yarmukhamedov Sh. // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 235(2), 281-283(1977).
4. Yarmukhamedov Sh. // Dokl. Ross. Akad. Nauk 357(3), 320-323 (1997)
5. Sattorov E.// Differentsial'nye Uravneniya 44(8), 1100-1110 (2008).
6. Sattorov E.// Mathematical Notes 85(5), 733-745 (2009).
7. Sattorov E.// Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., №1, 32-45(2011)

### **Comparative analysis of Homotopy Perturbation Method and Adomian Decomposition Method for Solving Nonlinear Fredholm Integral Equations of the Second Kind**

Zainidin K. Eshkuvatov<sup>a</sup>, Ganga Mamatqulova<sup>b</sup>, Khusnidakhon Mamatova<sup>a</sup>,

<sup>a</sup>Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, Universiti Malaysia Terengganu, 21300, Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia, E-mail: zainidin@umt.edu.my

<sup>b</sup>Faculty of Mathematics and Informatics, Jizzakh State Pedagogical University, 130100, Jizzakh, Uzbekistan Email: gangamamatkulova@gmail.com

**Abstract.** The aim of this note is to do comparative analysis of homotopy perturbation method (HPM) and Adomian decomposition method (ADM) to solve second kind linear and non-linear integral equation of Fredholm type. Proper derivation of both methods (HPM and ADM) are presented for the stated problems. Three examples are presented to show the validity and accuracy of the method. The results reveal that the error of HPM decreases drastically when number of iteration increases. It is observed that numerical results given in [1] and [2] can be improved for large number of iteration and accuracy is highly improved.

**Keywords:** Homotopy perturbation method; Fredholm integral equation, Nonlinearity

## References

1. J.H. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, Applied Mathematics and Computation 151 (2004) 287–292.
2. S. Abbasbandy, Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, Applied Mathematics and Computation 173 (2006) 493–500.

# HOMOTOPY PERTURBATION METHOD FOR SOLVING NONLINEAR

## FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND

Zainidin K. Eshkuvatov<sup>a</sup>, Ganga Mamatqulova<sup>b</sup>, Khusnidakhon Mamatova<sup>a</sup>,

<sup>a</sup>*Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, Universiti Malaysia Terengganu, 21300, Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia, E-mail: zainidin@umt.edu.my*

<sup>b</sup>*Faculty of Mathematics and Informatics, Jizzakh State Pedagogical University, 130100, Jizzakh, Uzbekistan Email: gangamamatkulova@gmail.com*

**Abstract.** The aim of this paper is to apply homotopy perturbation method (HPM) to solve second kind linear and non-linear integral equation of Fredholm type. Three examples are presented to show the validity and accuracy of the method. The results reveal that the error of HPM decreases drastically when number of iteration increases. It is observed that numerical results given in [1] can be improved for large number of iteration and accuracy is highly improved.

**Keywords:** Homotopy perturbation method; Fredholm integral equation, Nonlinearity

## Inverse problem of determining the kernel of integro-differential fractional diffusion equation in bounded domain

J. J. Jumaev<sup>1,2</sup>, Z. R. Bozorov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan;

<sup>2</sup>Bukhara state university.

Let  $T > 0$ ,  $l > 0$  be fixed numbers and  $D_{Tl} := \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ .

Consider the time-fractional diffusion equation

$$\partial_{0+,t}^\alpha u - u_{xx} = \int_0^t k(\tau)u(x, t - \tau)d\tau, \quad (x, t) \in D_{Tl}, \quad (1)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where  $\partial_{0+,t}^\alpha$  is the Caputo fractional derivative of order  $0 < \alpha \leq 1$  in the time variable (see definition 1),  $\varphi(x)$  is the initial temperature.

We pose the inverse problem as follows: find the function  $k(t)$  in (1), if the solution of the problem (1)-(3) satisfies

$$u_x(x, t)|_{x=0} = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$h(t)$  is given function of  $t \in [0, T]$ .

**Definition 1.** A function  $u(x, t)$  is called a classical solution to the initial-boundary problem (1)-(3) if:

- I.  $u(x, t)$  is twice continuously differentiable in  $x$  for each  $t > 0$ ;
- II. for each  $x \in (0, l)$   $u(x, t)$  is continuous in  $t$  on  $[0, T]$ , and its fractional integral  $(I_{0+,t}^{1-\alpha} u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$  is continuously differentiable in  $t$  for  $t > 0$ ;
- III.  $u(x, t)$  satisfies (1)-(3).

The functions  $\varphi$  and  $h$  satisfy the following assumptions:

$$(A1) \quad \varphi(x) \in C_\gamma^4[0, l], \varphi^{(5)}(x) \in L_2[0, l], \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0,$$

$$(A2) \quad h(t) \in C_\gamma^1[0, T] \text{ and } \varphi'(0) = h(0) > 0.$$

Let  $[a, b]$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ) finite interval and  $\gamma \in \mathbb{C}$  ( $0 \leq \Re(\gamma) < 1$ ). We introduce the weighted space  $C_\gamma[a, b]$  of functions  $f$  given on  $(a, b]$ , such that the function  $(x - a)^\gamma f(x) \in C[a, b]$ , and

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x - a)^\gamma f(x)\|_C, \quad C_0[a, b] = C[a, b].$$

For  $n \in N$  we denote by  $C_\gamma^n[a, b]$  the Banach space of functions  $f(x)$  which are continuously differentiable on  $[a, b]$  up to order  $n - 1$  and have the derivative  $f^{(n)}(x)$  of order  $n$  on  $(a, b]$  such that  $f^{(n)}(x) \in C_\gamma[a, b]$ :

$$C_\gamma^n[a, b] = \{f : \|f\|_{C_\gamma^n[a, b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma}\}, \quad C_\gamma^0[a, b] = C_\gamma[a, b].$$

**Definition 2.** The Caputo time fractional derivative of order  $0 < \alpha < 1$  of the integrable function  $u$  is defined by

$$\partial_{0+,t}^\alpha u(x, t) = I_{0+,t}^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} u(x, \tau) d\tau,$$

where  $\Gamma(\cdot)$  is the Euler's Gamma function.

**Definition 3.** The Riemann-Liouville time fractional derivative of order  $0 < \alpha < 1$  of the integrable function  $u$  is defined by

$$D_{0+,t}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} I_{0+,t}^{1-\alpha} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(x, \tau) d\tau,$$

where  $\Gamma$  is the Euler's Gamma function.

Let  $u(x, t), k(t)$  be a classical solution to the problem (1)-(4) and  $\varphi, h$  be enough smooth functions. The next assertion contains the auxiliary equivalent problem.

**Lemma 1.** *Problem (1)-(4) is equivalent to the auxiliary problem of determining the functions  $\vartheta(x; t), k(t)$  from the following equations:*

$$D_{0+,t}^\alpha \vartheta - \vartheta_{xx} = k(t) \varphi''(x) + \int_0^t k(\tau) \vartheta(x, t-\tau), \quad (x, t) \in D_{Tl}, \quad (4)$$

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} \vartheta(x, t)|_{t=0} = \varphi^{(IV)}(x), \quad x \in [0, l], \quad (5)$$

$$\vartheta(x, t)|_{x=0} = \vartheta(x, t)|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\vartheta_x(x, t)|_{x=0} = D_{0+,t}^\alpha h'^{(t)} - k(t) \varphi'^{(0)} - \int_0^t k(\tau) h'^{(t-\tau)} d\tau, \quad (7)$$

where  $\vartheta(x, t) := u_{txx}(x, t)$ .

**Theorem 1.** *Let (A1)-(A2) are satisfied. Then there exists a number  $T^* \in (0, T)$ , such that there exists a unique solution  $k(t) \in C_\gamma[0, T^*]$  of the inverse problem (5)-(7).*

By found function  $\vartheta(x, t), k(t)$ , the function  $u(x, t)$  is found by virtue of the notation  $\vartheta(x, t) = u_{txx}$  from which follows

$$u(x, t) = \int_0^x (x-\xi) \int_0^t \vartheta(\xi, \tau) d\tau d\xi + \varphi(x) - x\varphi'(0) + xh(t).$$

In this work, the solvability of a nonlinear inverse problem for integro-differential diffusion equation with initial-boundary conditions and overdetermination conditions was studied. An auxiliary problem equivalent to the problem was introduced first. We have investigated solvability direct problem. Existence and uniqueness of direct problem solution was proven by using spectral method. The inverse problem was considered for determining function  $k(t)$  included in the equation (1) with additional condition (4).

Conditions for given functions are obtained, under which the inverse problem has unique solutions for a sufficiently small interval.

### References

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo Theory and Applications of Fractional Differential Equations Amsterdam: Elsevier in English
2. R. Hilfer Applications of Fractional Calculus in Physics Singapore: World Scientific in English
3. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems J. Math. Anal. Appl. 447
4. A. Kilbas Integral equations: course of lectures Minsk: BSU In Russian

## ABOUT A NONLINEAR HIROTA EQUATION WITH FINITE DENSITY

*Khasanov Aknazar<sup>1</sup>, Eshbekov Raykhonbek<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Professor of department of Differential Equations, Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, e-mail<sup>1</sup>:*

*ahasanov2002@mail.ru*

<sup>2</sup>*PhD student of department of Differential Equations, Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, e-mail<sup>2</sup>:* *rayxonbek@mail.ru*

**Abstract.** In this paper, we study a Hirota-type equation with finite density in the class of periodic infinite-gap functions. It should be noted that Hirota's equation is a nonlinear partial differential equation and combination of the focusing non-linear Schrödinger equation (FNShE) and the complex modified Korteweg-de Vries equation (cmKdV). This equation was integrated in [1-4], as well as [5-7] in the class of rapidly decreasing and finite-gap functions. In addition, an explicit formula was derived for finite-gap solutions in terms of the Riemann theta functions. Thus, the solvability of the Cauchy problem for the Hirota equation was established (see [5-7]) for any finite-gap initial data. In [9-10] the Hirota equations are integrated in the class of periodic infinite-gap functions.

**Keywords.** Hirota type equation, periodic functions, finite density, Dirac operator, spectral data, Dubrovin system of differential equations, single-zone potential.

**1. Statement of the problem.** Consider the Cauchy problem for a Hirota-type equation with a finite density of the form

$$\begin{cases} p_t = a(t)\{p_{xxx} + 6[\rho^2 - (p^2 + q^2)p_x]\} + b(t)\{-q_{xx} - 2[\rho^2 - (p^2 + q^2)q]\} \\ q_t = a(t)\{q_{xxx} + 6[\rho^2 - (p^2 + q^2)q_x]\} + b(t)\{p_{xx} + 2[\rho^2 - (p^2 + q^2)p]\}, \end{cases} \quad (1)$$

with initial conditions:

$$\begin{aligned} p(x, t)|_{t=0} &= p_0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \\ p_0(x + \pi) &= p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (2)$$

in the class of real infinite-gap  $\pi$ -periodic in  $x$  functions:

$$\begin{aligned} p(x + \pi, t) &= p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ p(x, t), q(x, t) &\in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Here  $a(t), b(t) \in C[0; \infty)$  functions are given continuous bounded functions and  $\rho -$  are finite non-negative numbers.

In this paper, we propose an algorithm for constructing exact solutions  $p(x, t), q(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ , problem (1)-(3) by reducing it to an inverse spectral problem for the Dirac operator:

$$\mathcal{L}(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4)$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Denote by  $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  and  $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  solutions of equation (4) with initial conditions  $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$  and  $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$ . The function  $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$  is called the Lyapunov function for equation (4).

The spectrum of the Dirac operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$  is purely continuous and consists of the set

$$\sigma(\mathcal{L}) = \mathbb{R} \setminus \left( \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

The intervals  $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), n \in \mathbb{Z}$ , are called gaps, where  $\lambda_n$  are the roots of the equation  $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$ . They coincide with the eigenvalues of the periodic or antiperiodic ( $y(0) = \pm y(\pi)$ ) problem for equation (4). We denote the roots of the equation  $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$  by  $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ , while  $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n \in \mathbb{Z}$ . The numbers  $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$  and the signs  $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}, n \in \mathbb{Z}$  are called spectral parameters of the operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$ . The spectral parameters  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ , and the spectrum boundaries  $\lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$  are called the spectral givens or spectral data of the Dirac operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$ .

The problem of recovering the coefficient  $\Omega(x, t)$  of the operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$  from spectral data is called the inverse problem. The coefficients  $p(x + \tau, t)$  and  $q(x + \tau, t)$  of the operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$  are determined uniquely from the spectral data  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ . If using the initial function  $q_0(x + \tau)$  and  $p_0(x + \tau), \tau \in \mathbb{R}$ , we construct the Dirac operator  $\mathcal{L}(\tau, 0)$  of the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tau, 0)y &\equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \\ \Omega_0(x) &= \begin{pmatrix} p_0(x) & q_0(x) \\ q_0(x) & -p_0(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

then we will see that the boundaries of the spectrum  $\lambda_n(\tau), n \in \mathbb{Z}$ , of the obtained problem do not depend on the parameter  $\tau \in \mathbb{R}$ , that is  $\lambda_n(\tau) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}$ , and the spectral parameters depend on the parameter  $\tau$ :  $\xi_n^0 = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0 = \sigma_n^0(\tau) = \pm 1$  and are periodic functions:  $\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau), \tau \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ . Solving the direct problem, we find the spectral data  $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), y_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$  of the operator  $\mathcal{L}(\tau, 0)$ .

**2. Main result and discussion.** The main result of this paper is contained in the following theorem.

**Theorem 1.** Let  $p(x, t)$  and  $q(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0$  – be the solution of the Cauchy problem (1)-(3). Then the boundaries of the spectrum  $\lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ , of the operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$  do not depend on  $\tau$  and  $t$ , that is,  $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}$ , and the spectral parameters  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ , satisfy the first and second equations of the Dubrovin system of differential equations, respectively:

$$1. \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \{p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)\}, n \in \mathbb{Z}; \quad (5)$$

$$2. \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Here the sign  $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$  changes to the opposite at each collision of the point  $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ , with the boundaries of its gap  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ . In addition, the following initial conditions are satisfied

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

where  $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$  are spectral parameters of the Dirac operator  $\mathcal{L}(\tau, 0)$ . The sequence  $h_n(\xi)$  and  $g_n(\xi), n \in \mathbb{Z}$ , involved in equation (6), is determined by the formulas:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t)) \cdot f_n(\xi)}, \\ = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{+\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}}, \quad (8)$$

$$g_n(\xi) = a(t)[4\xi_n^3(\tau, t) + 4p(\tau, t)\xi_n^2(\tau, t) + 2(p^2(\phi, t) + q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t)) \times \\ \times \xi_n(\tau, t) + 2(p(\tau, t)q_\tau(\tau, t) - p_\tau(\tau, t)q(\tau, t)) + 2p(\tau, t)(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t)) - \\ - p_{\tau\tau}(\tau, t) - 6\rho^2(p^2(\tau, t) + \xi_n(\tau, t))] + b(t)[(p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t))^2 + q^2(\tau, t) + \\ + q_\tau(\tau, t) + \xi_n^2(\tau, t) - \rho^2], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Now, using the trace formulas

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \quad (9)$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \quad (10)$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right), \quad (11)$$

and their derivatives  $p_\tau(\tau, t), q_\tau(\tau, t)$  and  $p_{\tau\tau}(\tau, t)$ , system (6) can be rewritten in closed form. Next, using the change of variables

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dubrovin's system of equations (6) can be rewritten as a single equation in the Banach space  $\mathbb{K}$ :

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, t)|_{t=0} = x^0(\tau) \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &= \left\{ x(\tau, t) = (\dots, x_{-1}(\tau, t), x_0(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots) : \|x\| \right. \\ &\quad \left. = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + |n|^2)(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})|x_n(\tau, t)| < \infty \right\}.\end{aligned}$$

**Lemma 1.** If the initial functions  $p_0(x), q_0(x)$  satisfy the conditions

$$p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

then the vector function  $H(x)$  satisfies the Lipschitz condition in the Banach space  $\mathbb{K}$ , that is, there exists a constant  $L = \text{const} > 0$ , such that the following inequality holds for arbitrary elements  $x, y \in \mathbb{K}$ :

$$||H(x) - H(y)|| \leq L||x - y||,$$

where

$$\begin{aligned}L &= c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + |n|^2)|n|^3 \gamma_n < \infty, \quad c = \text{const}, \quad \gamma_k = \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} \\ &= \frac{c_k^{(6)}}{2^5 |k|^6} + \frac{\delta_k}{k^7}, \quad (13) \\ Q_0(t) &\equiv q_0(t) - i p_0(t), \quad c_k^{(6)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q_0^{(6)}(t) e^{-2ikt} dt, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k^2 < \infty.\end{aligned}$$

It should be noted that the second equality (13) was obtained in the work (see [8], p. 98).

**Remark 1.** Theorem 1 and Lemma 1 give a method for finding a solution to problem (1)-(3). To do this, we first find the spectral data  $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ , of the Dirac operator  $\mathcal{L}(\tau, 0)$ . Denote the spectral data of the operator  $\mathcal{L}(\tau, t)$  by  $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ . Now, solving the Cauchy problem (6), (7) for an arbitrary value of  $\tau$ , we find  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ . From the trace formula (9) and (10), we define the functions  $p(\tau, t)$  and  $p(\tau, t)$ , that is, solution of problem (1)-(3).

Thus, we have proved the following theorem.

**Theorem 2.** If the initial functions  $p_0(x), q_0(x)$  satisfy the conditions

$$p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

then there exists a uniquely determined solution  $p(\tau, t), q(\tau, t)$  of problem (1)-(3) in the class  $C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ , which are determined, respectively, by the sum of series (9) and (10).

Consider the following Cauchy problem for the Hirota equation with a finite density of the form (1) with initial conditions (2), where

$$\begin{aligned}p_0(x) &= \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{-(\lambda_0 + \lambda_{-1})x + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}, \\ q_0(x) &= -\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin\{-(\lambda_0 + \lambda_{-1})x + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}\end{aligned}$$

single-zone potential  $u_0(x) = q_0(x) - ip_0(x)$  of the Dirac operator, given by the spectrum  $E = \mathbb{R} \setminus (\lambda_{-1}, \lambda_0)$  and spectral parameters  $\xi_0(0) \in [\lambda_{-1}, \lambda_0]$ ,  $\sigma_0(0) = \pm 1$ . Using the above algorithm (see Remark 1), we find solutions to problem (1)–(3):

$$p(\tau, t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ 2A(\rho) \int_0^t a(s) ds + 2B(\rho) \int_0^t b(s) ds - (\lambda_0 - \lambda_{-1})\tau + 2\sigma_0(0)\varphi_0(0) \right\},$$

$$q(\tau, t) = -\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ 2A(\rho) \int_0^t a(s) ds + 2B(\rho) \int_0^t b(s) ds - (\lambda_0 - \lambda_{-1})\tau + 2\sigma_0(0)\varphi_0(0) \right\}.$$

Here

$$A(\rho) = \left[ \frac{3}{4}(\lambda_0 + \lambda_{-1})(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2 + \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_{-1})^3 - 6\rho^2 \left( \frac{\lambda_0 + \lambda_{-1}}{2} \right) \right],$$

$$B(\rho) = \left( \frac{\lambda_0 + \lambda_{-1}}{2} \right)^2 + \frac{\lambda_0^2 + \lambda_{-1}^2}{2} - \rho^2.$$

**3. Conclusion.** The inverse spectral problem method is used to integrate a nonlinear Hirota-type equation with a finite density in the class of periodic infinite-gap functions. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin differential equations in the class of five times continuously differentiable periodic infinite-gap functions is proved. The solvability of the Cauchy problem for a Hirota type equation with finite density in the class of five times continuously differentiable periodic functions is established.

### References

1. Hirota R. Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation.//J.Math.Phys.1973. Vol. 14,pp.805-809.
2. Hirota R. Exact N-soliton solution of the wave equation of long waves in shallow water and nonlinear lattices.//J.Math.Phys.1973. Vol. 14,pp.810-815.
3. Eslami M., Mirzazadeh M.A., Neirameh A. New exact wave solutions of Hirota equation.//Pramana-5.Phys. 2014, Vol. XX, № X., pp.1-6.
4. Shaikhova G.N., Kaykbay Y.S. Exact solutions of the Hirota equation using the sine-cosine method.// Bulletin of the South Ural State University ser. Mathematics, Mechanics, Physics, 2021, Vol.13, №3, pp.47-52.
5. Матвеев В.Б., Смирнов А.О. Решения типа “волнубийц” уравнений иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура: единый подход//ТМФ,2016,т.106,№2,ст.191-220.

- 6.** Матвеев В.Б., Смирнов А.О. Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархи. //Зап.научн.сем. ПОМИ, 2018, т.473, ст.205-227.
- 7.** Matveev V.B., Smirnov A.O. Multiphase solutions of nonlocal symmetric reductions of equations of the AKNS hierarchy: general analysis and simples examples.//Theoretical and Math.Physics, 2020, Vol.204, №3, pp.1154-1165.
- 8.** Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодических и антипериодических краевых задач, порождаемых операцией Дирака I,II//Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вищс. школа, 1978, вып.30, стр. 90-101;1979, вып.31, стр.102-109.
- 9.** Хасанов А.Б., Маннонов Г.А. Интегрирование нелинейного уравнения Хирота в классе периодических бесконечнозонных функций//Доклады АНРУз, 2022, №1, стр.7-11.
- 10.** Маннонов Г.А., Хасанов А.Б. Задача Коши для нелинейного уравнения Хироты в классе периодических бесконечнозонных функций.//Алгебра и анализ. Том 34, 2022, №5, стр. 139-172.

## **SOLITARY AND PERIODIC WAVE SOLUTIONS OF THE LOADED MODIFIED BURGERS–KDV EQUATION BY FUNCTIONAL VARIABLE METHOD**

**M.M.Khasanov \*, O.Y.Ganjaev\*, Sh.Sh.Omonov\*\***

**\*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan**

**\*\*Tashkent Institute of Finance, Tashkent, Uzbekistan**

**e-mail: hmuzaffar@mail.ru , otabekxiva3639@gmail.com ,**

omonov.sherzod.4808@mail.ru

We apply the functional variable method to solve the loaded modified Burgers–KdV equation.

Consider the following loaded modified Burgers–KdV equation

$$u_t + pu^2 u_x + qu_{xx} - ru_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 0, \quad (1)$$

where  $u(x,t)$  is an unknown function,  $x \in R$ ,  $t \geq 0$ ,  $\gamma(t)$  - is the given real continuous function.

Let us given a nonlinear partial differential equation in the following form

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2)$$

where  $P$  is a polynomial in  $u=u(x,t)$  and its partial derivatives.

Step 1. It is used the following transformation for a nonlinear partial differential of eq.(2):

$$u(x,t) = u(\xi), \quad (3)$$

with

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \frac{du}{d\xi}, \frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{du}{d\xi}, \dots \quad (4)$$

where

$$\xi = px - kt, \quad p = \text{const}, \quad (5)$$

and  $k$  is the speed of the traveling wave.

Putting eq. (3) and eq. (4) into nonlinear partial differential eq. (2), we obtain the following ODE of the form

$$F(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad u' = \frac{du}{d\xi}, \quad (6)$$

where,  $F$  is a polynomial in  $u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots$

Step 2. Let

$$u' = F(u). \quad (7)$$

It follows that

$$\int \frac{du}{F(u)} = \xi + \xi_0,$$

where we suppose  $\xi_0 = 0$  for convenience. Higher-order derivatives of  $u$  are defined as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = \frac{1}{2} \frac{d(F^2(u))}{du} \\ u''' = \frac{1}{2} \frac{d^2(F^2(u))}{du^2} \sqrt{F^2(u)} \\ u^{(IV)} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^3(F^2(u))}{du^3} F^2(u) + \frac{d^2(F^2(u))}{du^2} \frac{d(F^2(u))}{du} \right) \\ \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

Step 3. Substituting eq. (8) into eq. (6), we obtain

$$G(u, \frac{dF(u)}{du}, \frac{d^2F(u)}{du^2}, \frac{d^3F(u)}{du^3}, \dots) = 0. \quad (9)$$

The equation (9) is of special interest because it admits analytical solutions for a large class of nonlinear wave type equations. After integration, equation (9) provides the expression of  $F$  and this, together with equation (7), gives solutions to the original problem.

### References

1. H. Bateman. Some recent researches on the motion of fluids. Monthly Weather Review, 43:163-170, 1915.
2. A. A. Soliman. The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations, Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, vol. 361, no. 2, pp. 394-404, 2006.
3. J. Biazar and A. Hosseini. Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM. Mathematical and Computer Modelling, 49:1394-1400, 2009.
4. J. M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In Advances in applied mechanics, 1:171-199, 1947.

### **Integration of the type loaded second-order Korteweg-de Vries equation with a free term independent of the spatial variable**

**M. M. Matyakubov**

Urgench State University, Urgench, Uzbekistan

E-mail: mmm2210410@mail.ru

Solutions in the class of periodic functions for KdV equation were studied in [1]–[3] in various formulations. In the works of [4] the KdV equation with free a term independent of the spatial variable, and in the work of [5], [6] the KdV equation with a loaded term was studied.

In this work, we study the loaded second-order KdV equation with a free term independent of the spatial variable, namely, we consider the following equation

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxxx} - 5q_x q_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2q_x + \gamma(t) \cdot q|_{x=0} \cdot q_x + f(t), \quad x \in R, t > 0 \quad (1)$$

with initial condition

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad (2)$$

where  $\gamma(t) \in C[0, \infty)$  and  $f(t)$  is given real continuous function and  $q_0(x) \in C^5(R^1)$  is given real function. It is required to find a real function  $q(x, t)$ , that is  $\pi$ -periodic in a variable  $x$ :

$$q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (3)$$

and satisfies the smoothness conditions:

$$q(x, t) \in C_x^5(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (4)$$

**Theorem.** Let  $q(x, t)$  be the solution of problem (1)-(4). Then the boundaries  $\lambda_n(t)$ ,  $n \geq 0$  of the spectrum of the following operator

$$L(\tau, t)y \equiv -y'' + q(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R \quad (5)$$

satisfy the system of equations

$$\dot{\lambda}_n(t) = f(t), \quad n \geq 0, \quad (6)$$

and the spectral parameters  $\xi_n(\tau, t)$ ,  $n \geq 1$  satisfy the analogue of the system of equations of Dubrovin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n}{\partial t} &= 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \left[ -\frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) + \frac{3}{2} q^2(\tau, t) + 2\xi^2 q(\tau, t) + 4\xi_n^2 - \gamma(t)q(0, t) \right] h_n(\xi) + f(t) \\ h_n(\xi) &= \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (7)$$

the sign  $\sigma_n(\tau, t)$  changes at each collision of the point  $\xi_n(\tau, t)$  with the boundaries of its gap  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ . Moreover, the following initial conditions are fulfilled:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geq 1, \quad (8)$$

where  $\xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n^0(\tau)$ ,  $n \geq 1$  are the spectral parameters of the Sturm-Liouville equation corresponding to the coefficients  $q_0(x + \tau)$ .

**Remark.** Using the trace formula

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) \quad (9)$$

$$q^2(\tau, t) - \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t)) \quad (10)$$

system equations of Dubrovin can be rewritten in the “closed” form.

**Corollary 1.** The theorem gives a method for solving problem (1)-(4). First we find the spectral data  $\lambda_n^0$ ,  $n \geq 0$ ;  $\xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n^0(\tau)$ ,  $n \geq 1$  of the Sturm-Liouville equation

$$-y'' + q_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in R.$$

Solving equations (6) with initial conditions  $\lambda_n^0(t)|_{t=0} = \lambda_n^0$ ,  $n \geq 0$ , we find

$$\lambda_n(t) = \lambda_n^0 + \int_0^t f(s)ds, \quad n \geq 0. \quad (11)$$

Further, solving the Cauchy problem (7), (8) for  $\tau=0$  we get  $\xi_n(0,t)$ ,  $n \geq 1$ . Then substituting this data into equation (7) and solving the Cauchy problem  $\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$ ,  $n \geq 1$  for Dubrovin system (7) we find  $\xi_n(\tau,t)$ ,  $n \geq 1$ . Finally, by using the trace formula (9) and (10) we obtain  $q(\tau, t)$ .

**Remark.** Equations (6) show that the spectrum of the Sturm-Liouville operator (5) moves on the axis while keeping the initial structure, that is, the lengths of the gaps do not change.

**Corollary 2.** In [7], there was proved the theorem which states that the lengths of the gaps of the Sturm-Liouville equation with  $\pi$ -periodic real-valued coefficient decrease exponentially if and only if the coefficient is analytic. From this theorem we conclude that if  $q_0(x)$  is real analytical function, then the lengths of the gaps corresponding to this coefficient decrease exponentially. For the coefficient  $q(x,t)$  there correspond the same gaps. Thus the solution  $q(x,t)$  of problem (1)-(4) is real analytical functions on  $x$ .

**Corollary 3.** In [8], a generalization of Borg's inverse theorem was proved: the number  $\pi/n$  is a period of the coefficient of the Sturm-Liouville equation with  $\pi$ -periodic real-valued coefficient if and only if all the lacunae whose numbers are not divisible by  $n$  are vanished. Here  $n \geq 2$  is a natural number and the lacuna  $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$  has a number  $k$ . Therefore, if  $q_0(x)$  has a period  $\pi/n$  then the solution to problem (1)-(4) is the  $\pi/n$ -periodic function on  $x$ .

## References

1. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I. // Функц. анализ и прил., 1974, т. 8, № 3, с. 54-66.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. // ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 12, с. 2131-2143.
3. Lax P. Periodic Solutions of the KdV equation. // Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, p. 141-188.
4. Yakhshimuratov, A.B. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions. // Ufa Mat. Journal. 2011, vol. 3, no. 4, p. 144-150.
5. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций// Известия вузов. Математика. 2016 г., N 2, с. 87-92.

6. A. B. Khasanov and M. M. Matyakubov., Integration of the nonlinear Korteweg–de Vries equation with an additional term//Theoretical and Mathematical Physics, 2020, v. 203, No. 2, 596–607.

7. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure. Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

8. Hochstadt H. A Generalization of Borg’s Inverse Theorem for Hill’s Equations. // Journal of math. analysis and applications, 1984, 102, p. 599-605.

## Интегрирование объединенного уравнения мКдФ-нМКдФ в классе периодических функций

**Г.У.Уразбоев<sup>1,2</sup>, М. М. Хасанов<sup>1</sup>, О.Б. И smoилов<sup>2,1</sup>**

<sup>1</sup>Ургенчский государственный университет,

<sup>2</sup>Хорезмское отделение Института математики имени В.И. Романовского

e-mail: gayrat71@mail.ru, hmuzaffar@mail.ru,  
bakhromboyevich.oxunjon@gmail.ru

Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работах [1], [2], а в работе [3] изучена отрицательно-четная иерархия мКдФ и ее солитонные решения. Смешанные положительные и отрицательные иерархии исследованы в [4], [5], в работе [6] изучено интегрируемость объединенного уравнения КдФ-нКдФ.

В этой работе изучается интегрирование уравнения мКдФ-нМКдФ отрицательного порядка

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + 6q^2q_x - q_{xxx}, & t > 0, \quad x \in R \\ \mu_x = -q^2 \end{cases} \quad (1)$$

Требуется найти решение  $q(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x, t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x, t) - \mu_t(x, t)]|_{x=0} = \beta(t), \quad (2)$$

$$q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in R,$$

$$\begin{aligned} q(x, t) &\in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x, t) &\in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $q_0(x) \in C^3(R)$ ,  $\mu_0(t) \in C^1[0, \infty)$  и  $\beta(t) \in C[0, \infty)$  заданные действительные функции,  $q_0(x)$  имеет период  $\pi$ , а функция  $\beta(t)$  ограничена. При изучении задачи (1)-(3) используется следующий оператор Дирака

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через  $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$  обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям  $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$ .

Целью данной работы является интегрирования комбинированного уравнения мКдФ-нМКдФ в классе периодических функций с помощью методом обратной спектральной задачи.

### Литература

1. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228-239.
2. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Балтаева И.И. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида. // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 31–43.
3. Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R. and Zimerman A.H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions. // J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 445204 (11pp).
4. Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L. Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability.// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, (2009), 42(11), 1-13.
5. Gomes J.F., de Melo G.R., Zimerman A.H. A class of mixed integrable models. //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, (2009), 42(27), 1-11
6. M. Allami, A. K. Mutashar, and A. S. Rashid, “On solutions of the combined KdV-nKdV equation”, *Al-Mustansiriyah Journal of Science*, vol. 30, no. 2, pp. 33–45, Sep. 2019.

# **Condition for the existence of a periodic solution of a differential equation with a piecewise constant argument**

**Mukhiddin I.Muminov, Tirkash A.Radjabov**

*Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan,*

*mmuminov@mail.ru, radjabovtirkash@yandex.com*

**Abstract.** We deal a linear differential equation with piecewise constant argument. The considering equation with initial condition has a unique solution. We obtain sufficient conditions of a  $n$ -periodic solution for the considering problem.

**Key words:** *partial differential equation, piecewise constant arguments, periodic solution.*

## **1. Introduction**

Differential equations with piecewise constant arguments (briefly DEPCA) arise in an attempt to extend the theory of functional differential equations with continuous arguments to differential equations with discontinuous arguments. This task is of considerable applied interest since DEPCA include, as particular cases, impulsive and loaded equations of control theory and are similar to those found in some biomedical models. In [5] Cooke and Wiener studied a new differential equation alternately of retarded and advanced type. They have shown that all equations with piecewise constant delays have characteristics similar to the equations studied in [2]. These equations are closely related to impulse and loaded equations and, especially, to difference equations of a discrete argument. The equations are similar in structure to those found in certain "sequential-continuous" models of disease dynamics [1]. Differential equations with piecewise constant arguments are usually referred to as a hybrid system, and could model certain harmonic oscillators with almost periodic forcing [3], [4]. For a survey of work on ordinary and partial differential equations with piecewise constant arguments (DEPCA) we refer the reader to [6], [7]. Functional differential equations with deviated argument provide a mathematical model for systems where the changes of state depend upon its past history or its future. DEPCA also arises in the process of replacing some terms of a

differential equation by their piecewise constant approximations. This point of view has applications in impulsive or loaded differential equations of control theory, and stabilization of systems with discrete (sample) control [7], [8]. A recently published papers [10], [11], [13] and [14] studied DEPCA special form. Authors the n-periodic solvable problem reduced to the study a system of n linear equations. Furthermore, by applying the well-known properties of linear system in algebra, all existence conditions are described for n-periodic solutions that yields explicit formula for the solutions of the equations.

In this paper, we study existence conditions of periodic solution to a linear differential equations with piecewise constant argument of the form

$$T'(t) + a(t)T(t) + b(t)T([t]) + c(t)T([t+1]) = 0, \quad t > 0, \quad T(0) = v_0, \quad (1)$$

where nonzero functions  $a(t), b(t), c(t)$  is continuous on  $R_+ = [0, \infty)$ ,  $n$  is a positive integer number.

## 2. Differential equation with piecewise constant argument

Let us define a definition of solution for (1)

**Definition 2.1** *A function  $T(t)$  is called a solution of (1) if the following conditions are satisfied:*

(i)  $T(t)$  is continuous on  $R_+$ ;

(ii)  $T'(t)$  exists and continuous in  $R_+$ , with possible exception at points  $[t] \in R_+$ ,

where one-sided derivatives exist;

(iii)  $T(t)$  satisfies Eq. (1) in  $R_+$ , with the possible exception at the points  $[t] \in R_+$ .

Denote

$$M(i, t) = e^{-\int_i^t a(m)dm} (1 - \int_i^t b(s)e^{\int_s^t a(r)dr} ds), \quad t > i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P(i, t) = e^{-\int_i^t a(m)dm} \int_i^t c(s)e^{\int_s^t a(r)dr} ds, \quad t > i, \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

**Theorem 2.1.** *Let  $a(t), b(t), c(t)$  is continuous function on  $[0, \infty)$  and*

$$P(i,t) \neq -1, \quad t > i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

The solution of (1) is well defined for all  $t > 0$  and given by

$$T(t) = T_0 \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{M(i,i+1)}{1 + P(i,i+1)} \right) \frac{M(n,t)}{1 + P(n,t)} \quad \text{for } t \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

*Proof.* The solution of (1) in  $t \in [0,1]$  is

$$T(t) = T_0 \frac{e^{-\int_0^t a(m) dm} (1 - \int_0^t b(s) e^{\int_0^s a(r) dr} ds)}{1 + e^{-\int_0^t a(m) dm} \int_0^t c(s) e^{\int_0^s a(r) dr} ds} = T_0 \frac{M(0,t)}{1 + P(0,t)} \quad \text{for } t \in [0,1].$$

Then

$$T(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} T(t) = T_0 \frac{M(0,1)}{1 + P(0,1)}.$$

The solution of (1) in  $t \in [1,2)$  has the form

$$T(t) = T_1 \frac{e^{-\int_1^t a(m) dm} (1 - \int_1^t b(s) e^{\int_1^s a(r) dr} ds)}{1 + e^{-\int_1^t a(m) dm} \int_1^t c(s) e^{\int_1^s a(r) dr} ds}$$

or

$$T(t) = T_0 \frac{M(0,1)}{1 + P(0,1)} \frac{M(1,t)}{1 + P(1,t)} \quad \text{for } t \in [1,2).$$

Let the function

$$T(t) = T(0) \prod_{i=0}^{k-2} \left( \frac{M(i,i+1)}{1 + P(i,i+1)} \right) \frac{M(k-1,t)}{1 + P(k-1,t)} \quad \text{for } t \in [k-1, k), \quad k = 3, 4, \dots$$

be solution of (1) in  $[k-1, k)$ , then the function

$$T(t) = T(0) \prod_{i=0}^{k-1} \left( \frac{M(i,i+1)}{1 + P(i,i+1)} \right) \frac{M(k,t)}{1 + P(k,t)} \quad \text{for } t \in [k, k+1), \quad k = 3, 4, \dots \quad (3)$$

is solution of (1) in  $t \in [k, k+1)$ .

### 3. Existence condition of a periodic solution

**Theorem 3.1.** Let  $a(t)$ ,  $b(t)$  and  $c(t)$  be  $n$ -periodic continuous functions and  $P(i,i+1) \neq -1$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Then the solution for (1) is  $n$ -periodic iff

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{M(i,i+1)}{1+P(i,i+1)} = 1.$$

*Proof.* Let  $T(t)$  be a  $n$ -periodic solution for (1). Then  $T(n) = T(0)$ . By (2) as  $t = n$  we get  $1 = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{M(i,i+1)}{1+P(i,i+1)}$ .

Conversely, let  $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{M(i,i+1)}{1+P(i,i+1)} = 1$ . We show that  $T(n+t) = T(t)$  for all  $t \in R_+$ . Let  $t+n \in [n+k, n+k+1]$ , where  $k$  is an integer number. Then

$$T(t+n) = T(0) \prod_{i=0}^{n+k-1} \frac{M(i,i+1)}{1+P(i,i+1)} \frac{M(n+k,t+n)}{1+P(n+k,t+n)} \quad \text{for } t+n \in [n+k, n+k+1].$$

Changing the variables  $r' = \rho + n$ ,  $s = s' + n$  in the integral

$$M(n+k,t+n) = e^{-\int_{n+k}^{t+n} a(r')dr'} (1 - \int_{n+k}^{t+n} b(s) e^{\int_{n+k}^s a(r)dr} ds),$$

$$P(n+k,t+n) = e^{-\int_{n+k}^{t+n} a(r')dr'} \int_{n+k}^{t+n} c(s) e^{\int_{n+k}^s a(r)dr} ds.$$

we obtain

$$M(n+k,t+n) = e^{-\int_k^t a(\rho)d\rho} (1 - \int_k^t b(s') e^{\int_{n+k}^{s'+n} a(r)dr} ds'),$$

$$P(n+k,t+n) = e^{-\int_k^t a(\rho)d\rho} \int_k^t c(s') e^{\int_{n+k}^{s'+n} a(r)dr} ds'.$$

Then a changing variable  $r = r' + n$  gives

$$M(n+k,t+n) = e^{-\int_k^t a(\rho)d\rho} (1 - \int_k^t b(s') e^{\int_k^{s'+n} a(r')dr'} ds'),$$

$$P(n+k, t+n) = e^{-\int_k^t a(\rho)d\rho} \int_k^t c(s') e^{\int_k^{s'} a(r')dr'} ds',$$

i.e.  $\frac{M(n+k, t+n)}{1+P(n+k, t+n)} = \frac{M(k, t)}{1+P(k, t)}$  for all  $t+n \in [n+k, n+k+1]$ . Using this equation we

provide the following calculations

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n+k-1} \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} \prod_{i=n}^{n+k-1} \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} = \prod_{i=n}^{n+k-1} \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{M(j+n, j+n+1)}{1+P(j+n, j+n+1)} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{M(j, j+1)}{1+P(j, j+1)}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} T(t+n) &= T(0) \prod_{i=0}^{n+k-1} \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} \frac{M(n+k, t+n)}{1+P(n+k, t+n)} = \\ &= T(0) \prod_{i=0}^{k-1} \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} \frac{M(k, t)}{1+P(k, t)} = T(t) \quad \text{for } t \in [k, k+1]. \end{aligned}$$

Thus  $T(n+t) = T(t), t \in [k, k+1]$ .

**Example 3.1.** Let  $a(t) = \pi^2$ ,  $b(t) = \beta \sin 2\pi t$  and  $c(t) = \cos 2\pi t$ . Then

$$M(i, t) = e^{-\pi^2(t-i)} - \frac{\beta e^i}{\pi^2(1+4\pi^2)} (e^{-\pi^2(t-i)} + \sin 2\pi t - \cos 2\pi t) \quad \text{for } t > i,$$

$$P(i, t) = \frac{1}{(\pi^2 + 4)\pi} (2\sin 2\pi t + \pi \cos 2\pi t - e^{-\pi^2(t-i)} (2\sin 2\pi t + \pi \cos 2\pi t)) \quad \text{for } t > i.$$

(a) Let  $\beta$  be the root of

$$\prod_{i=0}^1 \frac{M(i, i+1)}{1+P(i, i+1)} = 1.$$

Then for this case the solution for (1) is unique 2-periodic solution defined as

$$T(t) = \begin{cases} T(0) \frac{M(0, t)}{1+P(0, t)}, & t \in [0, 1], \\ T(0) \frac{M(0, 1)M(1, t)}{(1+P(0, 1))(1+P(1, t))}, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

(b) Let  $\beta$  be the root of

$$\prod_{i=0}^2 \frac{M(i, i+1)}{1 + P(i, i+1)} = 1.$$

Then for this case the solution for (1) is unique 3-periodic solution defined as

$$T(t) = \begin{cases} T(0) \frac{M(0, t)}{1 + P(0, t)}, & t \in [0, 1], \\ T(0) \frac{M(0, 1)M(1, t)}{(1 + P(0, 1))(1 + P(1, t))}, & t \in [1, 2], \\ T(0) \frac{M(0, 1)M(1, 2)M(2, t)}{(1 + P(0, 1))(1 + P(1, 2))(1 + P(2, t))}, & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

### References

1. Busenberg S. Cooke K. L. Models of vertically transmitted diseases with sequential continuous dynamics. *Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences* (V. Lakshmikantham, ed.), Academic Press, New York, 1982, pp. 179-187.
2. Cooke K. L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 99 (1984), 265-297.
3. Hale J. K., Lunel V. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1993.
4. Hino Y., Naito T., Minh N. Shin V. *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces. Stability and Control: Theory, Method and Applications*. vol. 15. Taylor & Francis. London. 2002.
5. Cooke K. L., Wiener J. An equation alternately of retarded and advanced type. *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (1987). 726-732.
6. Cooke K. L., Wiener J. A survey of differential equations with piecewise continuous arguments. *Delay Differential Equations and Dynamical Systems*. vol. 1475 (1991).1-15. Springer. Berlin. Germany.
7. Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific. Singapore. 1993.
8. Pinto M., Robledo G. Controllability and observability for a linear time varying system with piecewise constant delay. *Acta Appl. Math.* (2014) 1-24.
9. Veloz T., Pinto M. Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument. *J. Math. Anal. Appl.* 426(1). 330-339. 2015.
10. Muminov M.I. Radjabov T.A. Forced diffusion equation with piecewise continuous time delay. *Advances in Mathematics: Scientific Journal* **10**(4) (2021). 2269-2283.
11. Muminov M.I. Radjabov T.A. On existence conditions for periodic solutions to a differential equation with constant argument. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* **13**(5) (2022), 491-497.

12. Wiener J. Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay. *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 14 (1991). 301-321.
13. Muminov M. I. On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments. *Advances in Difference Equations.* (2017). DOI 10.1186/s13662-017-1396-7.
14. Muminov M. I. Ali H. M. Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments. *Open Mathematics.* 18(1). 93-105. DOI: <https://doi.org/10.1515/math-2020-0010>.

## **Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке**

**Ж.И. Абдуллаев <sup>1,2</sup>, А.М. Халхужаев <sup>2,1</sup>, Х.Ш. Махмудов <sup>2</sup>**

*Самаркандинский государственный университет, Самарканд, Узбекистан <sup>1</sup>*

*Институт математики им. В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан <sup>2</sup>*

Рассматривается оператор  $H(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{T}^2$ , соответствующий гамильтониану системы двух бозонов на двумерной решетке. Доказывается, что сужение  $H^+(k_1, \pi)$  оператора  $H(k_1, \pi)$  на подпространство четных функций  $L_2^e(\mathbb{T}^2)$  имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра впервые подробно исследовалась Минлосом и Маматовым [1], а потом в более общей ситуации Минлосом и Могильнером [2]. Исследование связанных состояний гамильтониана  $H$  системы двух частиц на  $d$  – мерной решетке  $\mathbb{Z}^d$  сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера  $H(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ . При этом собственные функции оператора  $H(\mathbf{k})$  трактуются как связанные состояния гамильтониана  $H$ , а собственные значения как энергии связанного состояния. Возмущения собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке исследовалось в работе [3]. В работе [4] изучена дискретный спектр двухчастичного оператора Шредингера  $H_{\mu\lambda}(K)$ ,  $K \in \mathbb{T}^2$  связанного с гамильтонианом Бозе-Хаббарда  $H_{\mu\lambda}(K)$  системы из двух одинаковых бозонов, взаимодействующих

контактными и с ближайшими соседями на двумерной решетке  $\mathbb{Z}^2$  с энергиями взаимодействий  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ , соответственно.

В этой работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана  $\widehat{H}$  (см. (1)) системы двух бозонов на двумерной решетке  $\mathbb{Z}^2$ , т.е. изучается дискретный спектр семейства операторов Шредингера  $H(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{T}^2$ , (см. (3)) соответствующих гамильтониану  $\widehat{H}$ . Из (3) и (4)(см. ниже) вытекает, что

$$H(k_1, k_2) = H(-k_1, k_2) = H(k_1, -k_2),$$

поэтому можно считать, что  $k_1, k_2 \in [0, \pi]$ .

Если потенциал  $\widehat{\nu}$  имеет вид (2) и  $\mathbf{k} = (\pi, \pi)$ , то оператор  $H(\pi, \pi)$  имеет бесконечное число собственных значений вида  $4 - \bar{\nu}(\mathbf{n})$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ , и существенный спектр состоит из одной точки  $\{4\}$ . При этом число  $z_0(\pi, \pi) = 4 - \bar{\nu}(0)$  является простым,  $z_1(\pi, \pi) = 4 - \bar{\nu}(1)$  двухкратным,  $z_2(\pi, \pi) = 4 - \bar{\nu}(2)$  четырехкратным собственным значением. А для любого  $n \geq 3$  число  $z_n(\pi, \pi) = 4 - \bar{\nu}(n)$  является пятикратным собственным значением оператора  $H(\pi, \pi)$ . Показывается, что сужение  $H^+(k_1, \pi)$  оператора  $H(k_1, \pi)$  на подпространство четных функций  $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$  имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Свободному гамильтониану  $\widehat{H}_0$  системы двух бозонов на двумерной решетке  $\mathbb{Z}^2$  обычно соответствует следующий ограниченный, самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) := \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$  по формуле

$$\widehat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Здесь  $m$  означает массу бозона, которую в дальнейшем мы считаем равным единице,  $\Delta_1 = \Delta \otimes I$  и  $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ , где  $I$  единичный оператор, решетчатый Лапласиан  $\Delta$  – есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta \hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 [\hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

где  $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0,1)$  – единичные орты в  $\mathbb{Z}^2$ . Полный гамильтониан  $\hat{H}$  действует в гильбертовом пространстве  $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2)$  и состоит из разности свободного гамильтониана  $\hat{H}_0$  и потенциала взаимодействия  $\hat{V}_2$  двух частиц (см. [5, стр. 212-220]), т.е.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2, \quad (1)$$

где

$$(\hat{V}_2 \hat{\psi})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2).$$

В дальнейшем предполагается, что  $\hat{v}(\mathbf{n}) > 0$ , и

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & \text{если } |n_1| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |n_1| \geq 3, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\bar{v}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  – четная, убывающая на  $\mathbb{Z}_+$  функция из пространства  $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$  и  $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2|$ .

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$F: \ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) \rightarrow L_2^{sym}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2).$$

Гамильтониан  $H = H_0 - V = F\hat{H}F^{-1}$  в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов  $U_s, s \in \mathbb{Z}^2$ :

$$(U_s f)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \exp(-i(s, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad f \in L_2^{sym}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2).$$

Отсюда следует, что существуют разложения пространства  $L_2^{sym}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)$  и операторов  $U_s, H$  в прямые интегралы (см. [6, стр. 90-104])

$$\begin{aligned} L_2^{sym}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2) &= \int_{\mathbb{T}^2} \bigoplus L_2(F_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k}, \quad U_s = \int_{\mathbb{T}^2} \bigoplus U_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \\ H &= \int_{\mathbb{T}^2} \bigoplus \tilde{H}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Здесь

$$F_{\mathbf{k}} = \{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 : \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}\}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{T}^2,$$

$U_s(\mathbf{k})$  - оператор умножения на функцию  $\exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}))$  в пространстве  $L_2(F_{\mathbf{k}})$ . Слой  $\tilde{H}(\mathbf{k})$  оператора  $H$  также действует в  $L_2(F_{\mathbf{k}})$  и унитарно эквивалентен оператору  $H(\mathbf{k}):= H_0(\mathbf{k}) - V$ , называемому оператором Шредингера, действующему в гильбертовом пространстве  $L_2^e(\mathbb{T}^2):=\{f \in L_2(\mathbb{T}^2): f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$  по формуле

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{q} - \mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \quad (3)$$

Невозмущенный оператор  $H_0(\mathbf{k})$  есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}\right) + \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}\right) = 4 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos q_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos q_2. \quad (4)$$

Оператор возмущения  $V$  – интегральный оператор в  $L_2^e(\mathbb{T}^2)$  с ядром

$$\frac{1}{2\pi} v(\mathbf{q} - \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} (F\hat{v})(\mathbf{q} - \mathbf{s})$$

и принадлежит классу Гильберта-Шмидта  $\Sigma_2$ .

Известно, что  $L_2^e(\mathbb{T}^2) = L_2^{++}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{--}(\mathbb{T}^2)$ ,

где

$$L_2^{++}(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2^e(\mathbb{T}^2): f(p_1, p_2) = f(-p_1, p_2) = f(p_1, -p_2) = f(-p_1, -p_2)\},$$

$$L_2^{--}(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2^e(\mathbb{T}^2): f(p_1, p_2) = -f(-p_1, p_2) = -f(p_1, -p_2) = f(-p_1, -p_2)\}$$

суть соответственно подпространства функций, четных и нечетных по каждому аргументу.

**Лемма 1.** Пусть потенциал  $\hat{v}$  имеет вид (2). Подпространства  $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$  являются инвариантными относительно оператора  $H(\mathbf{k})$ .

Обозначим через  $H^+(\mathbf{k})$ , сужения оператора  $H(\mathbf{k})$  соответственно на подпространства  $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ . Действие оператора  $H_0(\mathbf{k})$  остается неизменным, поэтому мы приведем формулы для оператора  $V^+ = V|_{L_2^{++}(\mathbb{T}^2)}$ :

$$(V^+f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \{\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1)[\cos p_1 \cos q_1 + \cos p_2 \cos q_2] \\ + 2\bar{v}(2)[\cos 2p_1 \cos 2q_1 + \cos 2p_2 \cos 2q_2 + 2\cos p_1 \cos p_2 \cos q_1 \cos q_2] \\ + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \bar{v}(n)[\cos np_1 \cos nq_1 + 2\cos p_1 \cos(n-1)p_2 \cos q_1 \cos(n-1)q_2]$$

$$+2\cos 2p_1 \cos(n-2)p_2 \cos 2q_1 \cos(n-2)q_2] \} f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad f \in L_2^{++}(\mathbb{T}^2).$$

Из определения оператора  $V^+$  вытекает, что число  $\bar{v}(0)$  является для него простым,  $\bar{v}(1)$  – двухкратным собственным значением. А для любого  $n \geq 2$  число  $\bar{v}(n)$  является трехкратным собственным значением оператора  $V^+$ .

Можно показать, что верно равенство

$$L_2^{++}(\mathbb{T}^2) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

где

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-q) = f(q)\}.$$

Разложение пространства  $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ . Система функций

$$\left\{ \psi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \psi_n^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nq \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

образует ортонормальный базис в  $L_2^+(\mathbb{T})$ . Обозначим через  $L^+(n)$  одномерное подпространство, натянутое на вектор  $\psi_n^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . При этом пространство  $L_2^+(\mathbb{T})$  разлагается в прямую сумму:

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus L^+(n). \quad (5)$$

Это разложение порождает разложение

$$L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \{L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^+(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}_n^+,$$

где  $\mathfrak{R}_n^+ := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^+(n)$ .

**Лемма 2.** Пусть потенциал  $\hat{v}$  имеет вид (2). Тогда для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  подпространство  $\mathfrak{R}_n^+$  является инвариантным относительно оператора  $H(k_1, \pi)$ .

Рассмотрим сужение  $H^{+n}(k_1, \pi)$  оператора  $H(k_1, \pi)$  на подпространство  $\mathfrak{R}_n^+ = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^+(n)$ :

$$H^{+n}(k_1, \pi) = [2I + H_0(k_1) - V_n^+] \otimes I \quad (6)$$

где  $I$ - единичный оператор в  $L^+(n)$ , а  $H^{+n}(k_1) = 2I + H_0(k_1) - V_n^+$  есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в  $L_2^+(\mathbb{T})$  по формуле

$$(H_0(k_1)f)(p) = \left(2 + \varepsilon_{k_1}(p)\right) f(p), \quad \varepsilon_{k_1}(p) = 2 - 2\cos \frac{k_1}{2} \cosh p. \quad (7)$$

Заметим, что действие оператора  $V_n^+$  на элемент  $f \in L_2^+(\mathbb{T})$  имеет вид

$$(V_n^+ f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1)\cos p \cos s + 2\bar{v}(n+2)\cos 2p \cos 2s] f(s) ds, \quad (8)$$

поэтому оператор  $V_n^+, n \in \mathbb{Z}_+$  является трехмерным оператором.

Таким образом, изучение спектральных свойств оператора  $H^+(k_1, \pi)$  привели к изучению спектральных свойств оператора  $H^{+n}(k_1) = 2I + H_0(k_1) - V_n^+$  т.е. двумерную задачу привели к одномерному.

Собственные функции оператора  $H(\mathbf{k})$  интерпретируются как связанные состояния гамильтониана  $H$ , а собственные значения - как энергии связанных состояний. Собственных значений оператора  $H(k_1, \pi)$  путем анализа мы приведем исследованию собственных значений (относительно простых) операторов  $H^{+n}(k_1, \pi), n \in \mathbb{Z}_+$ . В силу представления (6) достаточно исследовать собственные значения одномерных операторов  $H^{+n}(k_1), n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Теорема 1.** Для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  оператор  $H^{+n}(k_1)$  имеет хотя бы одно собственное значение.

Мы начнем с изучения собственных значений оператора  $H^{+n}(\pi - 2\beta)$  при малых  $\beta$ . Из выражения (7) и (8) вытекает, что при фиксированном  $n \in \mathbb{Z}_+$  оператор  $H^{+n}(\pi)$  имеет три простых собственных значения

$$z_n^{(1)}(0) = 4 - \bar{v}(n) = z_n(\pi, \pi), \quad z_{n+1}^{(2)}(0) = 4 - \bar{v}(n+1) = z_{n+1}(\pi, \pi), \\ z_{n+2}^{(3)}(0) = 4 - \bar{v}(n+2) = z_{n+2}(\pi, \pi).$$

**Теорема 2.** Для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  существует  $\delta_n > 0$  такое, что для каждого  $\beta \in (0, \delta_n)$  оператор  $H^{+n}(\pi - 2\beta)$  имеет три различных невырожденных собственных значения  $z_n^{(1)}(\beta), z_{n+1}^{(2)}(\beta)$  и  $z_{n+2}^{(3)}(\beta)$  со следующими асимптотиками при  $\beta \rightarrow 0$ :

$$z_n^{(1)}(\beta) = z_n(\pi, \pi) - \frac{2}{\bar{\nu}(n) - \bar{\nu}(n+1)} \beta^2 + O(\beta^4),$$

$$z_{n+1}^{(2)}(\beta) = z_{n+1}(\pi, \pi) - \left[ \frac{1}{\bar{\nu}(n+1) - \bar{\nu}(n+2)} - \frac{2}{\bar{\nu}(n) - \bar{\nu}(n+1)} \right] \beta^2 + O(\beta^4),$$

$$z_{n+2}^{(3)}(\beta) = z_{n+2}(\pi, \pi) - \left[ \frac{1}{\bar{\nu}(n+2)} - \frac{1}{\bar{\nu}(n+1) - \bar{\nu}(n+2)} \right] \beta^2 + O(\beta^4).$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что оператор  $H(k_1, \pi)$  на подпространство четных функций  $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$  имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

### Литература

1. Маматов Ш.С., Минлос Р.А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. ТМФ. Т.79, 2, 1989.
2. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models. In Schodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapoor. 1989.
3. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д. Связанные состояния системы двух фермионов на двумерной решетке. ТМФ. Т.247, 1, 2016.
4. Lakaev S., Kholmatov Sh., Khamidov Sh., Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54, 245201, 2021
5. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ. Т.145, 1, 2005.
6. M. Reed and B. Simon. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

### НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ КАРЛЕМАНА

#### **З.Р.Ашуррова.**

Доцент кафедры математического анализа, к.ф.м.н., Самаркандский государственный университет, Узбекистан, г. Самарканд

#### **Жураева У.Ю.**

Докторант кафедры дифференциальные уравнения, Самаркандский государственный университет, Узбекистан, г. Самарканд

**Аннотация.** В данной работе построена функция Карлемана для бигармонических функций в некоторых неограниченных областях  $D$ , заданных в двумерном Евклидовом пространстве и получены её некоторые оценки.

**Ключевые слова:** Теорема типа Фрагмена — Линделёфа, бигармоническая функция, функция Карлемана, интегральное представление.

Настоящая заметка посвящена задаче:

Дана бесконечная область  $D$  двухмерного пространства и бигармоническая в  $D$  функция  $u(P)$ , непрерывная вплоть до границы области со своими производными первого порядка. Требуется показать, что если функция и ее нормальная производная, лапласиан функции и нормальная производная этого лапласиана ограничены на границе  $D$  и  $u(P)$  неограничена внутри, то при  $P \rightarrow \infty$  она должна расти внутри  $D$  со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Для гармонических функций это задача была предметом исследования М.А.Евграфова[1], И.А.Чегиса[2], А.Ф.Леонтьевым, И.С.Аршоном[3], Ш.Ярмухамедовым [7], З.Р.Ашуровой[4], Н.Жураевой [6] и др. В 1960 году М.А.Евграфов и И.А.Чегис в статье [1, 252–262] получили следующий результат

**Теорема.** Рассматривается гармоническая функция  $u(r, \phi, x)$  в круглом цилиндре:  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $-\infty < x < \infty$ , которая на поверхности цилиндра равна нулю, а внутри цилиндра удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi, x) \right| < c, \max_{(r, \phi)} |u(r, \phi, x)| < c \exp \exp \frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)}, \varepsilon > 0,$$

тогда  $u(r, \phi, x) \equiv 0$ .

Аналогичная теорема установлена И. А. Чегисом [2] в работе для случая цилиндра с прямоугольным основанием. В 1963 году А. Ф. Леонтьев [3, 661-667] получил следующую теорему

**Теорема.** Пусть  $u(r, \phi, x)$  — гармоническая функция в круглом цилиндре:  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Если выполнено условие

$$u(a, \phi, x) = 0, \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi, x) \right| < c \exp \mu(x),$$

$$\max_{(r, \phi)} |u(r, \phi, x)| < c \exp \exp \frac{\pi|x|}{2(a + \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0,$$

когда  $\mu(x) < \frac{\alpha}{a}$ , где  $\alpha$ -наименьший положительный нуль функции Бесселя  $J_0(x)$ ,  
тогда  $u(r, \phi, x) \equiv 0$ .

Е.М.Ландис в книге «Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов» (Москва, 1971 г., 55 стр)- рассматривал задачу в виде:  
Пусть в цилиндре  $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 < 1$  расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в оба стороны – все равно) в граница  $\Gamma$  этой области как угодно гладка



1-рисунок

Пусть в области определено решение и уравнение  $\Delta\Delta u = 0$  как угодно гладкое вплоть до границы и  $u|_{\Gamma} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ . Следует ли отсюда, что неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность)?.

Получаемые результаты из данной работе в некотором смысле является ответом на задачу поставленном Е.М.Ландисом.

В 1972 году используя идеи М.М.Лаврентьева, Ш. Ярмухамедов в своих работах впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа. Им получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В этом направлении им было установлено теорема типа Фрагмена - Линделефа для гармонических функций.

Используя ядро Ярмухамедова З.Р. Ашуррова получила несколько теорем типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций многих переменных.

Жураева Н в 2009 году получила регуляризацию и разрешимость задачи Коши для полигармонических уравнений порядка  $n$  в некоторых неограниченных областях (при произвольных нечетных  $m$  и четных  $m$  когда  $2n < m$ ) [4]-[8]. Позже

совместно с Жураевой У в 2009 году эту задачу для некоторых неограниченных областях (при произвольных четных  $m$  когда  $2n \geq m$ ) [10].

В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области  $D \subset R^2$ , где  $D = \{y: y = (y_1, y_2), y_1 \in R, 0 < y_2 < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\}$ .

Функцию  $\Phi_\sigma(y, x)$  определим следующим равенством

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(\sigma\omega + \omega^2) - \operatorname{ach}\rho_1\left(\omega - \frac{h}{2}\right)}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2), x' = (x_1, 0), r = |x - y|, s = |x' - y'|, \alpha^2 = s,$

$\omega = iu + y_2, s > 0, \sigma \geq 0, a \geq 0$ . Для удобства записи в дальнейшим обозначим через  $c_0$  все постоянные числа.

**Теорема 1.** Функция  $\Phi_\sigma(y, x)$ , определенная формулой (1) имеет вид  $\Phi_\sigma(y, x) = c_0 r^2 \ln \frac{1}{r} + r^2 G_\sigma(y, x)$  и она является бигармонической функцией, где  $G(y, x)$ - гармоническая функция в  $R^2/\{x\}$  по переменную  $y$ .

**Теорема 2.** Для функции  $\Phi_\sigma(y, x)$  имеет место неравенства

$$|\Phi_\sigma(y, x)| \leq (\sigma r + 1) \frac{c_0}{\exp(A)},$$

где  $A = \sigma y_2 + y_2^2 - s - \operatorname{ach}\rho_1\alpha \cos\rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right)$ .

**Доказательство.** Действительно после элементарных преобразований функцию  $\Phi_\sigma(y, x)$  можно написать в виде

$$\Phi_\sigma(y, x) = C_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp\left(\sigma(iu + y_2) + (iu + y_2)^2 - \operatorname{ach}\rho_1\left((iu + y_2) - \frac{h}{2}\right)\right)}{(iu + y_2) - x_2} \right] (u^2 - s) du.$$

Обозначим через  $u^2 - s = r^2 t, du = \frac{r^2 dt}{2\sqrt{r^2 t + s}}$  тогда

$$\Phi_\sigma(y, x)$$

$$= \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp \left( \sigma(i\sqrt{r^2t+s} + y_2) + (i\sqrt{r^2t+s} + y_2)^2 - a \cos \rho_1 \left( i\sqrt{r^2t+s} + y_2 - \frac{h}{2} \right) \right)}{(i\sqrt{r^2t+s} + y_2 - x_2)} \right] * \frac{r^4 t dt}{\sqrt{r^2t+s}}$$

При  $A_1 = \sigma y_2 + y_2^2 - r^2 t - s - a \operatorname{ch} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \cos \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right)$ ,  $A_2 = \left( (\sigma + 2y_2)\sqrt{r^2 t + s} + -a \operatorname{sh} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \sin \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \right)$ ,  $Q = \exp(\sigma y_2 + y_2^2)$ ,

$$\sin A_2 = \sin \left( \sigma \sqrt{r^2 t + s} + 2\sqrt{r^2 t + s} y_2 - a \operatorname{sh}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \sin \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \right),$$

МОЖНО ПОЛУЧИТЬ ОЦЕНКУ

$$\begin{aligned} & \left| \sin(\sigma \sqrt{r^2 t + s} + 2\sqrt{r^2 t + s} y_2 - a \operatorname{sh}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \sin \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right)) \right| \leq \\ & \leq \left( \sin(\sigma \sqrt{r^2 t + s}) \cos(2\sqrt{r^2 t + s} y_2 + a \operatorname{sh}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \sin \rho_1 \beta_2) \right. \\ & \quad \left. + \sin(2t \alpha y_2 + a \operatorname{sh} \rho_1 \alpha t \sin \rho_1 \beta_2) \cos(\sigma \alpha t) \right) \leq c_0 + c_0 \sigma \sqrt{r^2 t + s}. \end{aligned}$$

$$|\sin A_2| \leq c_0 \sigma \sqrt{r^2 t + s}$$

$$\Phi_\sigma(y, x) = r^2 \int_0^\infty \frac{Q(y_2 - x_2) \sin A_2 - \sqrt{r^2 t + s} \cos A_2}{\exp \left( a \operatorname{ch} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \cos \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \right) (t+1) \exp(r^2 t + s)} \frac{tdt}{\sqrt{r^2 t + s}}$$

=

$$\begin{aligned} & = r^2 \int_0^\infty \frac{Q(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp \left( a \operatorname{ch} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \cos \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \right) \exp(r^2 t + s) (t+1)} \frac{tdt}{\sqrt{r^2 t + s}} - \\ & \quad - r^2 \int_0^\infty \frac{Q \cos A_2}{\exp \left( a \operatorname{ch} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \cos \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \right) (t+1)} \frac{tdt}{\exp(r^2 t + s)}. \end{aligned}$$

Обозначая  $\Phi_\sigma(y, x) = r^2 J_1^1 - r^2 J_1^2$ , где

$$J_1^1 = \int_0^\infty \frac{Q(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp(\sigma y_2 + y_2^2 - \operatorname{ach} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \cos \rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right)) \exp(r^2 t + s)(t+1)} \frac{tdt}{\sqrt{r^2 t + s}},$$

$$J_1^2 = \int_0^\infty \frac{Q \cos A_2}{\exp(\sigma y_2 + y_2^2 - \operatorname{ach} \rho_1 \sqrt{r^2 t + s} \cos \rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right))(t+1)} \frac{tdt}{\exp(r^2 t + s)},$$

можно получить неравенство

$$\begin{aligned} |J_1^1| &\leq \left| \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp(\operatorname{ach}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos \rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right)) \sqrt{r^2 t + s} \exp(r^2 t + s)} \frac{tdt}{(1+t)} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{c_0 \sigma \sqrt{r^2 t + s}}{\exp(\operatorname{ach}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos \rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right))} \frac{dt}{\exp(r^2 t + s)} \right| \leq \frac{c_0 \sigma}{r \exp(A)}. \end{aligned}$$

Имея в виду  $\int_0^\infty \frac{t^{p-\frac{1}{2}} dt}{\exp(at)} = \frac{135 \dots (2p-1)}{2^p} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{p+\frac{1}{2}}}$ ,  $\int_0^\infty \frac{dt}{\exp(r^2 t + s)} = \frac{c_0}{r^2}$ , кроме того

$$\left| \frac{\cos A_2}{\exp(\operatorname{ach}(\rho_1 \sqrt{r^2 t}) \cos \rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right)) (1+t)} \right| \leq \frac{c_0}{\exp(A)}, \text{ получим}$$

$$|J_1^2| \leq c_0 \int_0^\infty \left| \frac{1}{\exp(\operatorname{ach}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos \rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right))} \right| \frac{dt}{\exp(r^2 t + s)} \leq \frac{c_0}{r^2 \exp(A)}.$$

$$\text{Итак, } |\Phi_\sigma(y, x)| \leq \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \frac{r^2 c_0}{\exp(A)} = \frac{c_0(\sigma r + 1)}{\exp(A)}.$$

**Теорема 3.** Для нормальной производной функции  $\Phi_\sigma(y, x)$  имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \Phi_\sigma(y, x) \right| \leq \left( (1 + \sigma + \sigma^2) \left( 1 + \frac{1}{r} \right) + \sigma(r + r^2) \right) \frac{c_0}{\exp(A)}.$$

Доказательство. Так как функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  имеет вид  $\Phi_\sigma(y, x) = r^2(J_1 - J_2)$ . Из свойств интеграла имеем вычисляя частную производную от функции  $J_1$ ,

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{\partial}{\partial y_i} (J_1) &= \\
&-c_0 r^2 \int_0^\infty \sin(A_2) \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \frac{1}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)} + c_0 r^2 \int_0^\infty \cos(A_2) \frac{1}{\exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \frac{tdt}{(1+t)}, \\
r^2 \frac{\partial}{\partial y_i} (J_2) &= r^2 \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp A_1} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{tdt}{(1+t)} + \\
&+ r^2 \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \cos(A_2) \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \frac{1}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)} \\
&- r^2 \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \sin(A_2) \frac{1}{\exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \frac{tdt}{(1+t)}.
\end{aligned}$$

Используя  $\frac{\partial A_1}{\partial y_i} = -2(y_i - x_i)(t + 1) + (\sigma + 1) \rho_1 \operatorname{sh} \rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \operatorname{cos} \rho_1(y_2 - \frac{h}{2}) \frac{(y_i - x_i)(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}}$ ,

оценим  $\left| \frac{\partial A_1}{\partial y_i} \right| \leq r(t + 1) + \frac{\sigma r(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}} \operatorname{sh} \rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s})$ . Аналогичным образом можно получить оценку  $\left| \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \right| \leq (\sigma + 2y_2) \frac{r(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}} + \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \frac{r(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}}$ . С помощью полученных неравенств для  $\left| \frac{\partial A_1}{\partial y_i} \right|$  и  $\left| \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \right|$ , можно получить оценку для  $\left| \frac{\partial}{\partial y_i} J_1 \right|$ :

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{\partial}{\partial y_i} (J_1) &= -c_0 r^2 \int_0^\infty \sin(A_2) \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \frac{1}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)} + c_0 r^2 \int_0^\infty \cos(A_2) \frac{1}{\exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \frac{tdt}{(1+t)} = \\
&c_0 r^2 \int_0^\infty \sin(A_2) (\sigma + 2y_2) \frac{r(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{1}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)} + \\
&c_0 r^2 \int_0^\infty \sin(A_2) \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \frac{r(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{1}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)} + c_0 r^2 \int_0^\infty \cos(A_2) \frac{1}{\exp A_1} r(t + \\
&1) \frac{tdt}{(1+t)} + c_0 r^2 \int_0^\infty \cos(A_2) \frac{1}{\exp A_1} \frac{\sigma r(t + 1)}{\sqrt{r^2 t + s}} \operatorname{sh} \rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \frac{tdt}{(1+t)}, \\
r^2 \frac{\partial}{\partial y_i} (J_1) &= c_0 r^2 \int_0^\infty r \sigma (\sigma + 2y_2) \frac{tdt}{\exp A_1} + \\
&+ c_0 r^2 \int_0^\infty \sigma r \rho_1 \operatorname{sin} \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \frac{tdt}{\exp A_1} + c_0 r^2 \int_0^\infty r \frac{t^{n-k} dt}{\exp A_1} + \\
&c_0 r^2 \sigma \int_0^\infty \operatorname{sh} \rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \frac{t^{-\frac{1}{2}} dt}{\exp A_1},
\end{aligned}$$

$$\left| r^2 \frac{\partial}{\partial y_i} J_1 \right| < \left( \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}.$$

Аналогичным образом вычислим оценку для  $J_2$ :  $\left| r^2 \frac{\partial}{\partial y_1} J_2 \right| < (1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma r^2) \frac{c_0}{\exp(A)}$ . Используя вышеприведенные оценки и равенство  $\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_i} = (J_1 - J_2) \frac{\partial r^2}{\partial y_i} + r^2 \frac{\partial (J_1 - J_2)}{\partial y_i}$ ,  $i = 1, 2$  находим  $\left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} \right| \leq \left( 1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma r^2 + \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{r} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}$ .

Аналогично можно получить неравенство

$$\left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} \right| \leq \left( \frac{\sigma^2}{r} + \sigma^2 + \sigma + \sigma r + 1 \right) \frac{c_0}{\exp(A)}.$$

В итоге имеем  $\left| \frac{\partial}{\partial n} \Phi_\sigma(y, x) \right| = \left| r(J_1^1 - J_1^2) + r^2 \frac{\partial}{\partial n} (J_1^1 - J_1^2) \right| \leq \left( 1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma r + \sigma r^2 + \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma^2}{r} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}$ ,

т.е. теорема доказана.

**Теорема 4.** Для лапласиана функции  $\Phi_\sigma(y, x)$  справедливо неравенства:

$$|\Delta \Phi_\sigma(y, x)| \leq \left( \sigma + \sigma^2 + \sigma r + \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r} + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^2} \right) \frac{c_0}{\exp(A)},$$

$$|\Delta \Phi_\sigma(y, x)| \leq \left( \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \sigma \left( 1 + r + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \sigma^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right) \frac{c_0}{\exp(A)},$$

$$A = a \operatorname{ch} \rho_1 \alpha \cos \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right).$$

**Теорема 5.** Пусть  $n$ -внешняя нормаль к границе  $\partial D$ . Тогда для функции  $\Phi_\sigma(y, x)$  справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \\ & \leq \left( \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) + \sigma \left( 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) + \sigma^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sigma^3}{r^2} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** Функция  $\Phi_\sigma(y, x)$ , зависящая от параметра  $\sigma > 0$ , определенная формулой (1.2.1)-(1.2.2), при  $y \neq x$  является функцией Карлемана для области  $D$ .  
Доказательство: на основании вышеприведенных неравенств

$$\begin{aligned} & \left( |\Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| + |\Delta \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) \leq \\ & \leq \left( 1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma r + \sigma r^2 + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{\sigma^3}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^3} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}, \end{aligned}$$

$$A = \operatorname{ach} \rho_1 \alpha \cos \rho_1 \left( y_2 - \frac{h}{2} \right),$$

$$L = \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left( \Delta^k \Phi_\sigma(y, x) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right) ds,$$

$\partial D = \{(y_1, y_2) : y_1 \in R, y_2 = 0\} \cup \{(y_1, y_2) : y_1 \in R, y_2 = \frac{\pi}{\rho}\} = L_1 \cup L_2$ ,  $ds = dy_1$ . После преобразование  $y_1 - x_1 = t$ ,  $dy_1 = dt$  и кроме того  $0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{\rho}$  имеем

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \sum_{k=0}^1 \left( |\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) \leq \\ &\leq \left( 1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma \sqrt{t^2 + x_2^2} + \sigma(t^2 + x_2^2) + \frac{\sigma}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} + \frac{\sigma}{(t^2 + x_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma}{(t^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{c_0}{\exp(A)} + \\ &+ \left( \frac{\sigma^2}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} + \frac{\sigma^2}{(t^2 + x_2^2)} + \frac{\sigma^2}{(t^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma^3}{(t^2 + x_2^2)} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} + \frac{1}{(t^2 + x_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(t^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}, \text{ где } A = \operatorname{ach} \rho_1 tb. \end{aligned}$$

На  $L_1$ :  $y_2 = 0$  поэтому  $A = ach \rho_1 t \cos \rho_1 \left(-\frac{h}{2}\right) = abch \rho_1 t$ , и кроме того  $b \neq 0$ ,  $\left(\rho_1 \left(-\frac{h}{2}\right)\right) = -\rho_1 \frac{\pi}{2\rho} = -\frac{\pi}{2} \frac{\rho_1}{\rho}$ ,  $\left(\frac{\rho_1}{\rho} < 1\right)$  т. е.  $\rho_1 < \rho$  поэтому  $\cos \rho_1 \left(-\frac{h}{2}\right) \neq 0$ .

Используя верности утверждения  $0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{\rho}, \sqrt{t^2 + x_2^2} \geq x_2$  и кроме того

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp(r^2 x)} = \frac{n!}{(r^{2n+2})}, \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{dt}{\exp(r^2 t + s)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2r^2}, \int_0^\infty \frac{dt}{\exp(r^2 t + s)} = \frac{c}{r^2}, \text{ получим}$$

$$l_1(t) \leq \left( 1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma \sqrt{t^2 + c_0} + \sigma(t^2 + c_0) + \frac{\sigma}{\sqrt{t^2 + c_0}} + \frac{\sigma}{(t^2 + c_0)} \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{(t^2 + c_0)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{c_0}{\exp(A)} \\ + \left( \frac{\sigma^2}{\sqrt{t^2 + c_0}} + \frac{\sigma^2}{(t^2 + c_0)} + \frac{\sigma^2}{(t^2 + c_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma^3}{(t^2 + c_0)} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + c_0}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(t^2 + c_0)} + \frac{1}{(t^2 + c_0)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{c_0}{\exp(A)}.$$

При вычислениях мы использовали  $a$  – как постоянное число подбирая его  $a = 1 + \sigma$  мы получим неравенство

$$\int_{L_1} \sum_{k=0}^1 \left( |\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) |ds| \leq \frac{c_0 c_\sigma^1}{\exp(\sigma)},$$

где  $c_\sigma^1$  – многочлен завысящая от  $\sigma$ . На  $L_2$ :  $y_2 = \frac{\pi}{\rho}$  поэтому точно также

доказывается

$$\int_{L_1} \sum_{k=0}^1 \left( |\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) |ds| \leq \frac{c_0 c_\sigma^2}{\exp(\sigma)},$$

$c_\sigma^2$  – многочлен завысящая от  $\sigma$ . Обозначая  $\varepsilon(\sigma) = \frac{c_\sigma^1 + c_\sigma^2}{\exp(\sigma)}$ , имеем  $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ ,

при  $\sigma \rightarrow \infty$  окончательно можем утверждать

$$L = \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left( \Delta^k \Phi_\sigma(y, x) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right) ds \leq c_0 \varepsilon(\sigma),$$

$\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ , при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $A_{\rho_2}(D)$  –пространство бигармонических функций, определенных в  $D$ , имеющих непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы  $\partial D$  и удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=0}^1 (|\Delta^k u(y)| + |\operatorname{grad} \Delta^{1-k} u(y)|) \leq C_0 \exp(\exp \rho_2 |y|), \quad y \in D,$$

**Теорема 7.** Пусть для функции  $u \in A_{\rho_2}(D)$  в любой точке  $y \in \partial D$  выполняется неравенство:

$$u(y) = 0, \quad y \in \partial D, \quad \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} |\Delta^k u(y)| + \left| \frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial \bar{n}} \right| ds < C$$

где  $\rho_2 < \rho_1$ , тогда,  $u(x) \equiv 0$ .

**Теорема 8.** Пусть для функции  $u \in A_{\rho_2}(D)$ , в любой точке  $y \in \partial D$  и если выполнено условие роста  $\forall y \in \partial D$

$$\Delta^k u(y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial n} \rightarrow 0, \quad k=0,1,$$

где  $\rho_2 < \rho_1$ , тогда  $u(x) \equiv 0$ .

### Литература

16. Евграфов М.А., Чегис И.А. Обобщение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве. Доклады Академии наук СССР, 1960. № 134, С. 252–262.
17. Чегис И.А. Теорема типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре. ДАН СССР, 1961. 136, С. 556–559.
18. А. Ф. Леонтьев. О теоремах типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций в цилиндре, Изв. АН СССР., 1963, том 27, выпуск 3, 661–676.
19. Аршон И.С., Евграфов М.А. О росте функций, гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности вместе с нормальной производной. Доклады Академии наук СССР, 1962, 140, С. 321–324.
20. З.Р. Ашуррова. Теоремы типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990, №5. 6-8 стр
21. Ашуррова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, International Journal of Innovative Research , 2021,10, C.84–90, Impact Factor 7.512.

22. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews, India, 2020 ,7, C.371–378, DOI : 10.31938.jcr.07.06.62.

23. Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю, Сайдов У.М Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в  $m$ -мерном четном евклидовом пространстве, Uzbek Mathematical Journal, 2011, №3, 92–97.

## **Некоторые свойства функция Карлемана бигармонических функций.**

*Ашуррова Зебинисо Рахимовна*

Доцент каф. Математического анализа, СамГУ им. Ш.Рашидова, доцент каф. Точных наук. Уз-Фин.ПИ.

*Жураева Нодира Юнусовна*

кафедра Высшей Математики, ТУИТ имени Ал-Хорезми.

*Маллаева Фируза Уткуржоновна*

Студентка 2 курса Математического факультета, СамГУ им. Ш.Рашидова.

**Аннотация.** В этом работе рассматривается полигармонические функции 2-го порядка заданное в некотором неограниченном множестве двухмерного пространства ( $\Delta^2 u(y) = 0$ ) получив интегральное представление с помохи её получается теоремы типа Фрагмена – Линделефа.

**Ключевые слова:** гармонические функции, бигармонические функции, интегральное представление.

**Abstract.** In this article we consider Carleman's functions, to find integral representation for the polyharmonic functions ( $\Delta^2 u(y) = 0$ ) defined in unbounded domain of Euclidean space obtaining an integral representation.

**Keywords:** Phragmen-Lindelof type theorems, biharmonic functions, Carleman's function, integral representation.

Постановка задачи. В теории функций известна следующая теорема:

**Теорема.** Пусть аналитическая функция  $F(z)$ , регулярная в угле  $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$

и непрерывна вплоть до его сторон, на сторонах угла удовлетворяет  $|F(z)| \leq M$ .

Тогда или  $|F(z)| \leq M$  во всем угле, или

$$\max_{\substack{|z|=r \\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\rho}}} |F(z)| > e^{cr^\rho} \quad (c > 0, r > r_0)$$

Общий смысл этой теоремы состоит в том, что аналитическая функция, ограниченная на границе бесконечной области и неограниченная внутри нее, должна расти внутри со скоростью, не меньшей некоторой предельной. Приведенная теорема гласит, что для угла  $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$  это пределная скорость роста не ниже чем  $e^{c|z|^\rho}$  (пример функции  $e^{cz^\rho}$  показывает, что найденная оценки пределной скорости роста точна)

В данной работе рассматривается задача : если гармоническая функция и ее нормальная производная ограничены на границе  $D$  и  $u(P)$  неограничена внутри, то при  $P \rightarrow \infty$  она должна расти внутри  $D$  со скоростью, не меньшей некоторой предельной, оценить эту предельную скорость роста. Эта задача была предметом исследования работ М.А.Евграфова[1], И.А.Чегиса [2], Е.М.Ландиса, [3], Т.Карлемана М.М.Лаврентьева, Ш.Ярмухамедовым [4]- [5], З.Р.Ашуровой [6]- [11], Н.Жураевой [12]- [14], и У.Жураевой [15]- [17], др.

Е.М.Ландис в книге -Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва, 1971 г.55 стр.)- поставил задачу в виде - Пусть в цилиндре  $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 < 1$  расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в оба стороны – все равно) в граница  $\Gamma$  этой области как угодно гладка .

Пусть в области определено решение и уравнение  $\Delta\Delta u = 0$  как угодно гладкое вплоть до границы и  $u|_\Gamma = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0$ . Следует ли отсюда, что неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность).

При условии, когда  $D$  - односвязная ограниченная область со спрямляемой границей  $\partial D$ , то для некоторого класса функций  $f$  (например класса Харды  $H^1(D)$ ) справедлива формула Коши ([30]. 205c)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad z \in D \quad (1)$$

т.е. формула Коши восстанавливает функцию по ее значениям на  $\partial D$ .

Первый результат в этом направлении в 1926 году получил Т.Карлеман (для класса ограниченных функций в области  $D$  одного специального вида.

Эта идея получения формулы Карлемана с помощью аппроксимации ядра Коши может быть представлена с помощью введенного М.М.Лаврентьевым, понятия функции Карлемана.

**Определение 3.** Функция  $\Phi_\sigma(y, x)$ , зависящая от параметра  $\sigma > 0$  и определенная  $y \neq x$ , называется функцией Карлемана для точки  $x \in D$  и части  $\partial D \setminus S$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция,  $\Phi_\sigma(y, x)$  представима в виде

$$\Phi_\sigma(y, x) = \begin{cases} C_{n,m} r^{2n-m} \ln r + G_\sigma(y, x), & 2n \geq m, m - \text{чётное число.} \\ C_{n,m} r^{2n-m} + G_\sigma(y, x), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где

$$C_{n,m} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \left( \Gamma(n - \frac{m}{2} + 1) 2^{2n-1} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(n) \right)^{-1}$$

и  $G_\sigma(y, x)$  регулярная по переменному  $y$  и непрерывно дифференцируема на  $D \cup \partial D = \bar{D}$ , решения полигармонического уравнения.

2. При фиксированном  $x \in D$  функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D \setminus S} \left[ \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x) \right| - \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right] ds_y \leq C(x) \varepsilon(\sigma),$$

где постоянная  $C(x)$  зависит от  $x$  и  $\bar{n}$ -направленная внешняя нормаль к  $\partial D$ ,  $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$  когда  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Задачи Коши для уравнения Лапласа из-за неустойчивости ее решения, исследования Т.Карлемана в течение долгого времени не имело продолжения. Однако неустойчивые задачи, часто возникали в приложениях.

В 1943 году А. Н. Тихонов показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения т.е. задача становится устойчивой.

В своих работах М. М. Лаврентьев впервые разработал новую идею, связывающую исследование Т.Карлемана и А. Н. Тихонова и на ее основе, по заданной паре функций, приближающей данные Коши с заданной погрешностью (уклонением), построил функционал зависящий от положительного параметра (параметра регуляризации), согласованного с погрешностью исходных данных и числом, характеризующим компакт.

Используя идеи М.М.Лаврентьева для гармонических функций а также для полигармонических функций заланных в ограниченных областях эту задачу Шароф Ярмухамедович Ярмухамедов, впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа- так называемая в настоящей времени «функции Грина-Ярмухамедова», исчезающего в пределе вместе со своими производными любого порядка вне произвольного фиксированного конуса получил интегральное представление и теоремы единственности и ряд интересных свойств функций.

Позже подбирая функцию Грина-Ярмухамедова нужным образом З.Р.Ашуррова для некоторых неограниченных областей получая интегральное представление доказала несколько теорем типа Фрагмена- Линделефа и единственности для гармонических функций многих переменных..

Использовав разного видов ядро Ярмухамедова в 2009 году Н.Ю. Жураева доказывая интегральное представление для бигармонических функций получила некоторые свойства (оценка роста, формула Карлемана) бигармонических функций бигармонических функций определенного класса для неограниченных областей, лежащих внутри слоя в  $R^3$ . Кроме того, получила аналог формулы Карлемана для неограниченных областей, лежащие внутри слоя в  $R^m$   $m$  -мерное вещественное евклидово пространства получила регуляризацию и разрешимость задачи Коши для полигармонических уравнений порядка  $n$  в некоторых неограниченных областях (при произвольных нечетных  $m$  и четных  $m$  когда  $2n < m$ ) [4]-[8]. Позже

совместно с У Жураевой в 2009 году эту задачу для некоторых неограниченных областях (при произвольных четных  $m$  когда  $2n \geq m$ ).

Исследование условной корректности, построение новых формул Карлемана и регуляризация в задаче Коши для полигармонических функций порядка  $n$  являются актуальными задачами теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Рассмотрим бигармонических функций заданные в области  $D$ ,

$$D = \left\{ y: y = (y_1, y_2) \in R^2, -\infty < y_1 < \infty, y_2 \in R, 0 < y_2 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0 \right\}, \text{ -2-}$$

мерное евклидово пространство,  $r = \sqrt{\sum_{j=1}^2 (y_j - x_j)^2}, s = (y_1 - x_1)^2$ . В данной работе построив функцию удовлетворяющей условию функцию Карлемана, с помохи её намерены получать интегральное представления.

Функцию  $\Phi(y, x)$  при  $s > 0$ :

$$\Phi(y, x) = c_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(\omega^2)}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du, \omega = iu + y_2 \quad (3)$$

доказываем некоторые свойство этих функций.

Теорема 1. Функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  которая определяется с помохи (3) является бигармонической функцией.

Для доказательство этого теоремы мы, во-первых, используем лемму доказываемой У.Жураевой утверждения: Если  $\phi_\sigma(y, x)$  гармоническая функция в  $R^m$  по переменной  $y$  включая и точку  $x$ , то справедливо равенство

$$\Delta r^k \phi_\sigma(y, x) = r^{k-2} \phi_{\sigma,1}(y, x), \text{ где}$$

$$\phi_{\sigma,1}(y, x) = k(m+k-2)\phi_\sigma(y, x) + 2k \sum_{j=1}^m (y_j - x_j) \frac{\partial \phi_\sigma(y, x)}{\partial y_j}$$

функция тоже является гармонической функцией в  $R^m$  по переменному  $y$  включая и точку  $x$ , мы используем его в виде :

Лемма 1. Если  $\phi_\sigma(y, x)$  гармоническая функция в  $R^2$  по переменной  $y$  включая и точку  $x$ , то справедливо равенство

$$\Delta r^2 \phi_\sigma(y, x) = \phi_{\sigma,1}(y, x), \text{ где}$$

$$\phi_{\sigma,1}(y, x) = 4\phi_\sigma(y, x) + 4 \sum_{j=1}^m (y_j - x_j) \frac{\partial \phi_\sigma(y, x)}{\partial y_j}$$

функция тоже является гармонической функцией в  $R^2$  по переменному  $y$  включая и точку  $x$ . т.е  $r^2\phi_\sigma(y, x)$ , является бигармонической функцией.

Теперь используя это свойство бигармонических функций доказываем теорему 1.

Доказательство теоремы. Имея ввиду свойства гиперболических функций,

$$\begin{aligned} \exp(\omega^2) &= \exp[(iu + y_2)^2] = \exp[(y_2^2 - u^2) + i(2uy_2)] = \\ &= \exp[y_2^2 - u^2] \exp i(\sigma u + 2uy_2) = \exp[y_2^2 - u^2](\cos A_2 + i \sin A_2) \\ \text{где } A_0 &= (y_2^2 - u^2), \quad A_2 = 2uy_2 \end{aligned}$$

Так, как данная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(y, x) &= c_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \exp A_0 \frac{(\cos A_2 + i \sin A_2)}{(y_m - x_m)^2 + u^2} \right] (u^2 - s) du = \\ &= c_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \exp A_0 \frac{(y_2 - x_2) \sin(A_2) - u \cos(A_2)}{((y_2 - x_2)^2 + u^2)} (u^2 - s) du \end{aligned}$$

при преобразовании

$$u^2 - s = r^2 t, u^2 = r^2 t + s, 2u du = r^2 dt, du = \frac{r^2 dt}{2\sqrt{r^2 t + s}}$$

$\Phi_\sigma(y, x)$  обладает вид

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(y, x) &= c_0 r^2 \int_0^{\infty} \frac{(y_m - x_m) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{tdt}{\exp(A_1)(1+t)} - c_0 r^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos A_2}{\exp(A_1)(1+t)} \frac{tdt}{(1+t)} = \\ &= c_0 r^2 \int_0^{\infty} \frac{(y_m - x_m) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{1}{\exp A_1 (1+t)} \frac{tdt}{(1+t)} - c_0 r^2 \int_0^{\infty} \cos A_2 \frac{1}{\exp A_1 (1+t)} \frac{tdt}{(1+t)} \end{aligned}$$

$$A_1 = (r^2 t + s - y_2^2) \quad \text{и}$$

Обозначая

$$J_1 = c_0 \int_0^{\infty} \frac{(y_m - x_m) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{1}{\exp A_1 (1+t)} \frac{tdt}{(1+t)}$$

$$J_2 = c_0 \int_0^\infty \frac{\cos A_2}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)}$$

имеем  $\Phi_\sigma(y, x) = r^2(J_1 - J_2)$ .

Если мы докажем гармоничность  $(J_1 - J_2)$  тогда согласно леммы 1 функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  будет полигармоническая функция второго порядка. Рассмотрим оператор Лапласа для функции  $(J_1 - J_2)$ . Так, как под интегралом мы можем дифференцировать

$$\frac{\partial J_1}{\partial y_1} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1} \frac{tdt}{(t+1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (J_1 - J_2) =$$

$$= c_0 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s} \exp(A_1)} \frac{tdt}{(1+t)} - c_0 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\cos A_2}{\exp(A_1)} \frac{tdt}{(1+t)}$$

Легко получая производные для  $\frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1}$  и  $\frac{\cos A_2}{\exp(A_1)}$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1} &= \frac{(y_2 - x_2) \cos(A_2)}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1} \frac{\partial A_2}{\partial y_j} + \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1} \frac{1}{\exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} - \\ &\quad - \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp A_1} \frac{(y_1 - x_1)(t+1)}{(\sqrt{r^2 t + s})^3} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\cos(A_2)}{\exp A_1} = - \frac{\sin(A_2)}{\exp A_1} \frac{\partial A_2}{\partial y_1} + \cos(A_2) \frac{1}{\exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_1}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} (J_1) &= c_0 \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2) \cos(A_2)}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1} \frac{\partial A_2}{\partial y_1} \frac{tdt}{(1+t)} + c_0 \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s} \exp A_1} \frac{1}{\exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_1} \frac{tdt}{(1+t)} - \\ &\quad - c_0 \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp A_1} \frac{(y_1 - x_1)(t+1)}{(\sqrt{r^2 t + s})^3} \frac{tdt}{(1+t)} \end{aligned}$$

Точно также для

$$\frac{\partial}{\partial y_1} (J_2) = - \int_0^\infty \frac{\sin(A_2)}{2 \exp A_1} \frac{\partial A_2}{\partial y_1} \frac{tdt}{(1+t)} + \int_0^\infty \cos(A_2) \frac{1}{2 \exp A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_1} \frac{tdt}{(1+t)}$$

А для второго производных  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} J_1$  и  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} J_2$  используя равенства

$$1) \left( \sum_{j=1}^2 -2 \frac{(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \left( \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \right) + \frac{2}{(\sqrt{r^2 t + s})^5} \left( \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_2^2} \right) \right) \frac{\sin(A_2)}{\exp A_1} - \\ - \left( \frac{2}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{\partial A_2}{\partial y_2} + \frac{(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_j^2} + \frac{2(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \right) \right) \frac{\cos(A_2)}{\exp A_1} + \\ - \frac{2}{(\sqrt{r^2 t + s})^3} \left( (y_2 - x_2)t \frac{\partial A_2}{\partial y_2} + (y_1 - x_1)(1+t) \frac{\partial A_2}{\partial y_1} \right) \frac{\cos(A_2)}{\exp A_1},$$

$$2) \quad \left( \sum_{j=1}^2 \left( -2 \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\sin(A_2)}{\exp A_1} -$$

$$- \left( \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_1^2} \right) \right) \frac{\cos(A_2)}{\exp A_1},$$

Введя обозначения и интегрируя каждый из этих интегралов получим

$$M = \int_0^\infty \frac{\cos(A_2)}{e \exp A_1} \left( \frac{\partial A_2}{\partial y_2} - \frac{2}{\sqrt{r^2 t + s}} + \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_1^2} \right) \frac{(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \right) \frac{tdt}{(1+t)} + \\ + \int_0^\infty \frac{\cos(A_2)}{e \exp A_1} \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \frac{\partial A_2}{\partial y_j} - \frac{2(y_2 - x_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} \right. \\ \left. - \frac{2(y_2 - x_2)}{(\sqrt{r^2 t + s})^3} \left( (y_2 - x_2)t \frac{\partial A_2}{\partial y_2} + (y_1 - x_1)(1+t) \frac{\partial A_2}{\partial y_1} \right) \right) \frac{tdt}{(1+t)}$$

$$T = \int_0^\infty \frac{\cos(A_2)}{e \exp A_1} \left( \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_1^2} \right) \right) \frac{tdt}{(1+t)}.$$

далее убедимся в гармоничности  $(J_1 - J_2)$ , тогда согласно леммы 1 функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  будет полигармоническая функция второго порядка. т.е. является бигармонической функцией

## Литература.

1. Евграфов М.А., Чегис И.А. Обобщение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве. Доклады Академии наук СССР, 1960. № 134, С. 252–262.
2. Чегис И.А. Теорема типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре. Доклады Академии наук СССР, 1961. 136, С. 556–559.
3. Е.М.Ландис. -Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва, 1971 г.55 стр.
4. Ярмухамедов.Ш.Я. Задача Коши для полигармонического уравнения. Доклады РАН 2003 том 388 ст 162-165.
5. Ярмухамедов Ш.Я. Жураева Н.Ю. Задача Коши для полигармонических функций. Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики. Труды международной научной конференции. Ташкент 16-19 ноября 2004г. с.301-302.
6. З. Ашуррова. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990, №5. 6-8 стр .
7. Ашуррова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, International Journal of Innovative Research , 2021,10, C.84–90, Impact Factor 7.512.
8. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews, India, 2020 ,7, C.371–378, DOI : 10.31938.jcr.07.06.62.
9. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function, Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra India, 2020, 10, C.371–378, URL : <http://saarj.com>.
10. Ashurova Zebiniso Raximovna, Juraeva Nodira Yunusovna, Juraeva Umidakhon Yunusalievna. «Функция Карлемана для полигармонических функций определенных в некоторых областей лежащих в некоторых четном n-мерном евклидовом пространстве». Операторные алгебры и смежные проблемы журнал, 2012, с.100-101.
11. Ashurova Zebiniso Raximovna, Juraeva Nodira Yunusovna, Juraeva Umidakhon Yunusalievna. «Функция Карлемана для полигармонических функций определенных в некоторых областей лежащих в некоторых четном n-мерном евклидовом пространстве». Операторные алгебры и смежные проблемы журнал, 2012, с.100-101.
12. N.Yu. Juraeva Growing polyharmonic functions and task Cauchy of some class. Узбекский математический журнал. №.2, 2009, с.70-74.
13. Н.Ю.Жураева Об интегральном представлении полигармонических функций. Ташкент. ДАН РУз № 3, 2008г. с.18-20.
14. Н.Ю. Жураева., Жураева У.Ю, Сайдов У.М Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве, Uzbek Mathematical Journal, 2011, №3, стр. 92–97.

15. У.Ю. Жураева Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных. Известия вузов.Математика 2022,№10.с 42-65.<https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm>, e-mail: izvuz. Matem@kpfu.ru
16. Jurayeva. U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems. Uzbek Mathematical Journal,2022, Volume 66, Issue 3. pp 54-61, (№3, 54–61). DOI:10. 29229/uzmj. 2022-3-7 .
17. Жураева У.Ю. Некоторые свойства функции Карлемана. Наманган Давлат Университети Илмий ахборотномаси. 2022 йил 2 сон.

## **Задача интегральной геометрии по семействам сфер в пространстве**

**А.Х.Бегматов<sup>1</sup>, А.С.Исмоилов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций

<sup>2</sup> Узбекско-Финский педагогический институт

Математическое исследование проблем, возникающих в таких практических важных и интенсивно развивающихся областях, как интерпретация данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, сейсморазведка, медицинская томография и т.д., часто приводит к задачам интегральной геометрии. Так, например, линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки и линеаризованная обратная кинематическая задача эквивалентны соответствующим задачам интегральной геометрии. Поэтому задачи интегральной геометрии являются одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений и математической физики.

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1].

Пусть  $x \in R^n, x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y \in R^m, y = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $S(y)$  – семейство многообразий в  $x \in R^n$ , зависящих от параметра  $y$  размерности  $m$ ,  $\dim S = p$ . Пусть, далее,  $u(x)$  - функция, определена в некоторой области  $D \subset R^n$ ,  $\rho(x, y)$  – функция переменных  $x, y$ ,  $\omega(y)$  – мера на многообразии  $S(y)$ .

Рассмотрим функцию

$$\int_{S(y)} \rho(x, y) u(x) d\omega = f(y). \quad (1)$$

Интегральная геометрия есть раздел математики, в котором изучаются различные взаимоотношения между элементами, входящими в (1).

Мы будем считать, что в (1)  $S(y)$ ,  $\rho(x, y)$ ,  $f(y)$  заданы и рассматривать (1) как линейное операторное уравнение относительно функции  $u(x)$ .

Задачами интегральной геометрии вольтеровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтера в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1]. Приведем также определения слабой и сильной некорректности задачи интегральной геометрии. Задача решения уравнения (1) называется слабо некорректной, если для данных задачи и ее решения можно подобрать такую пару функциональных пространств, в которых при определении нормы участвует конечное число производных, что оператор обращения для этой пары пространств непрерывен. Если такой пары пространств не существует, то задача является сильно некорректной [1].

Первые результаты по единственности и устойчивости задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов и инвариантны относительно группы всех движений, параллельных  $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [2,3].

В работе М.М. Лаврентьева [6] была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Отметим, что задача определения функции по ее сферическим средним путем сведения к некоторому дифференциальному уравнению изучалась в монографии [5]. Следует упомянуть также работу [4], в которой изучались другие классы вольтерровых задач интегральной геометрии.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова [7-9]. В его работах изучались задачи

интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве.

В работах [10-12] изучены новые классы задач интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

В настоящей главе исследуются вопрос сведения задачи интегральной геометрии для специального класса поверхностей к задаче Коши для некоторого уравнения эволюционного типа.

В работе применяются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными. Сведение к задаче Коши и доказательство теорем единственности основаны на изучении краевых задач для вспомогательных функций. Используются также метод преобразования Фурье. Получены методы, позволяющие свести задачу интегральной геометрии для специальных семейств кривых и поверхностей к задаче Коши для уравнений эволюционного типа, и выделены классы таких задач. Доказаны теоремы единственности для некоторых новых классов операторных уравнений типа Вольтерра в трехмерном пространстве. Получены явные выражения для весовых функций специального вида операторных уравнений из этих классов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. -- Издательство Института математики, Новосибирск 2010, — 912 с.
2. Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журнал. - 1967. - Т. 8, № 5. - С. 1206-1208.
3. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. —Новосибирск: Наука, 1972. -164 с
4. Бухгейм А.Л. О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журнал, 1972.- Т. 13, С. 34-42.
5. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. -М.: Изд-во иностр. лит., 1958. - 158 с.
6. Лаврентьев М.М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода // Междунар. мат. конгресс в Ницце, 1970. - М.: Наука, 1972.- С. 130-136.

7. Бегматов Акр. Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости, Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 243-247.
8. Бегматов Акр.Х. Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве, Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500-505.
9. Бегматов Акр.Х. Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых сособенностями, Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 723-737.
10. Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S. Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Vol. 3, issue 2. 2020, pp. 246-254.
11. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. On A Problem Of Integral Geometry Over A Family Of Parabolas With Perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association 27 (4), 497-509, 2021.
12. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane. Uzbek Mathematical Journal, Volume 66, Issue 1, pp.64-75. 2022.

**Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа в бесконечной цилиндрической области, когда нагруженной часть уравнения содержит след оператора дробного порядка в смысле Капуто**

**Б.И.Исломов<sup>1</sup>, А.З. Турдибоев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г.Ташкент, Узбекистан, [islomovbozor@yandex.com](mailto:islomovbozor@yandex.com); [turdiboyev932104@gmail.com](mailto:turdiboyev932104@gmail.com)

Трехмерные аналоги задаче Трикоми и Геллерстедта для уравнения эллиптико-гиперболического изучены в работах [1-3].

Локальные и нелокальные задачи для параболо-гиперболического уравнения с общими нагруженными слагаемыми в двухмерных областях рассмотрены в работах [4-7].

Насколько нам известно, что трехмерные краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа ранее мало изучены. Отметим работы [8-9].

В настоящей работе в бесконечной цилиндрической области изучается аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа, когда нагруженной часть уравнения содержит след оператора дробного порядка в смысле Капуто

Пусть  $\Omega$  - трехмерная область, ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_k : x = k, \quad 0 \leq y \leq h, \quad -\infty < z < +\infty, \quad k = 0, 1, \quad \Gamma_2 : y = h, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$\Gamma_3 : x + y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < +\infty, \quad \Gamma_4 : x - y = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} + \mu_c D_{0x}^\alpha U(x, 0, z) & \in \Omega_1, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} + \mu_c D_{0\xi}^\beta U(\xi, 0, z) & \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

в области  $\Omega$  будем изучать аналог задачи Трикоми, где  $\mu$  - любая действительная постоянная, причем  $\mu < 0$ ,  $\xi = x + y$ , а  $_c D_{0x}^\gamma$  - оператор дробного порядка  $\gamma$  в смысле Капуто [10] :

$$_c D_{0x}^\gamma f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x (x-t)^{-\gamma} f'(t) dt, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{d}{dx} f(x), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение (1) является параболическим и гиперболическим в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно.

Введем обозначения:  $J = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, y = 0, z \in (-\infty, +\infty)\}$ ,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$ ,

$\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z \in (-\infty, +\infty)\}$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y, z) : x > 0, y < 0, z \in (-\infty, +\infty)\}$ .

$$l_0 = \bar{\Gamma}_3 \cap \bar{\Gamma}_4, l_1 = \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_3, l_2 = \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_4,$$

$$D = \Omega \cap \{z = 0\}, D_i = \Omega_i \cap \{z = 0\}, (i = 1, 2), \sigma_j = \Gamma_j \cap \{z = 0\}, (j = \overline{0, 4}),$$

$$\tilde{l}_k = l_k \cap \{z = 0\}, (k = \overline{0, 2}), J = I \cap \{z = 0\},$$

**Определение 1.**  $L(-\infty, +\infty)$ -множество функций  $H(x, y, z)$ , определенных в  $\Omega$  и абсолютно интегрируемых по переменному  $z$  в интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

**Определение 2.** Функция  $U(x, y, z)$  называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap L(-\infty, +\infty);$$

2)  $U_x(x, y, z), U_y(x, y, z), U_z(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap L(-\infty, +\infty)$ , кроме того, функции  $U_x(x, y, z)$  и  $U_y(x, y, z)$  могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях  $l_1$  и  $l_2$ ;

$$3) \quad U(x, y, z) \in C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2), \quad U_{xx}(x, y, z), U_{yy}(x, y, z), U_{zz}(x, y, z) \in L(-\infty, +\infty),$$

$D_{0x}^\gamma U(x, 0, z) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap L(-\infty, +\infty)$ , ( $\gamma = \alpha, \beta$ ) и удовлетворяет уравнению (1).

**Задача  $TD_\mu$ .** Требуется найти регулярное в области  $\Omega$  решение  $U(x, y, z)$  уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$U|_{\Gamma_0} = \Phi_0(y, z), \quad U|_{\Gamma_1} = \Phi_1(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

$$U|_{\Gamma_3} = \Psi(x, z), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (4)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} U(x, y, z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_x(x, y, z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_y(x, y, z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_z(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

где  $\Phi_0(y, z), \Phi_1(y, z), \Psi(x, z)$  – заданные функции, причем  $\Phi_0(0, z) = \Psi(0, z) = 0$ ,  
 $\Phi_j(y, z) \in C([0; h] \times R) \cap L(-\infty, +\infty)$ ,  $\Phi'_{jy}(y, z) \in C((0; h) \times R) \cap L(-\infty, +\infty)$ , ( $j = 0, 1$ ),

$$\Psi'_x(x, z) \in C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times R\right) \cap L(-\infty, +\infty), \quad \Psi''_{xx}(x, z) \in C\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \times R\right) \cap L(-\infty, +\infty),$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi_j(y, z) = 0, \quad \forall y \in [0, h] \quad (j = 0, 1), \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Psi(x, z) = 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (6)$$

**Исследование решения задачи  $TD_\mu$ .** При сделанных предположениях относительно поведения функций  $U(x, y, z)$  мы можем ввести следующие преобразования Фурье по переменной  $z$ :

$$u(x, y; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y; z) e^{i\lambda z} dz.$$

Если функция

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y; \lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda \quad (7)$$

является решением задачи  $TD_\mu$ , то функция  $u(x, y; \lambda)$  должна быть регулярным решением задачи  $TD_\mu^\lambda$

Применяя преобразование Фурье (7) к уравнению (1), получим следующее уравнение

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx} + \lambda^2 u + \mu_c D_{0x}^\alpha u(x, 0; \lambda), & (x, y) \in D_1, \\ u_{yy} - u_{xx} + \lambda^2 u + \mu_c D_{0\xi}^\beta u(\xi, 0; \lambda), & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (8)$$

В силу (7) задача  $TD_\mu$  эквивалентно сводится к следующему задачу.

**Задача  $TD_\mu^\lambda$ .** Определить функцию  $u(x, y; \lambda)$ , такую, что:

1)  $u(x, y; \lambda)$  непрерывная функция в  $\bar{D}$  и непрерывно-дифференцируемая в  $D \cup \sigma_3$ , причем  $u_x(x, y; \lambda)$  и  $u_y(x, y; \lambda)$  могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в точках  $\tilde{l}_1$  и  $\tilde{l}_2$  [11];

2)  $u(x, y; \lambda) \in C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_2)$ ,  $D_{0x}^\gamma u(x, 0, \lambda) \in C(D_1 \cup D_2)$ , ( $\gamma = \alpha, \beta$ ) и

удовлетворяет уравнению (8) в областях  $D_j$ , ( $j = 1, 2$ ); 3)  $u(x, y, \lambda)$  удовлетворяет условиям

$$u|_{\sigma_0} = \varphi_0(y; \lambda), \quad u|_{\sigma_1} = \varphi_1(y; \lambda), \quad 0 \leq y \leq h, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad (9)$$

$$u|_{\sigma_3} = \psi(x; \lambda), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad (10)$$

где  $\varphi_0(y; \lambda)$ ,  $\varphi_1(y; \lambda)$ ,  $\psi(x; \lambda)$  – заданные функции, причем

$$\varphi_j(y; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j(y, z) e^{i\lambda z} dz, \quad (j=0,1), \quad (11)$$

$$\psi(x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, z) e^{i\lambda z} dz, \quad (12)$$

$$\varphi_j(y; \lambda) \in C[0; h] \cap C^1(0, h), \quad (j=0,1), \quad (13)$$

$$\psi(x; \lambda) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \psi(0; \lambda) = \varphi_0(0; \lambda) = 0. \quad (14)$$

**Вывод основных функциональных соотношений.** С учетом условия 1)

задачи  $TD_\mu^\lambda$  введем следующие обозначения

$$u(x, \pm 0; \lambda) = \tau(x; \lambda), \quad (x, 0; \lambda) \in \bar{J}, \quad (15)$$

$$u_y(x, \pm 0; \lambda) = \nu(x; \lambda), \quad (x, 0; \lambda) \in J. \quad (16)$$

Решение задачи Дарбу [12] для уравнения (2.7) в области  $D_2$ , с первыми краевыми условиями (10) и (16) существует, единственno и представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y; \lambda) = & \int_0^{x+y} \nu(\xi; \lambda) J_0 \left[ \lambda \sqrt{(\xi - x - y)(\xi - x + y)} \right] d\xi + \\ & + \psi(0; \lambda) J_0 \left[ \lambda \sqrt{(x^2 - y^2)} \right] + \frac{1}{2} \int_0^{x-y} \psi' \left( \frac{\eta}{2}; \lambda \right) B(0, \eta; x + y, x - y) d\eta + \\ & + \frac{\mu}{4} \int_0^{x+y} D_{0\xi}^\beta \tau(\xi; \lambda) d\xi \int_\xi^{x-y} B(\xi, \eta; x + y, x - y) d\eta, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$B(\xi, \eta; x + y, x - y) =$$

$$= \begin{cases} J_0 \left[ \lambda \sqrt{(\xi - x - y)(\eta - x + y)} \right], & \eta > x + y, \\ J_0 \left[ \lambda \sqrt{(\xi - x - y)(\eta - x + y)} \right] + J_0 \left[ \lambda \sqrt{(\eta - x - y)(\xi - x + y)} \right], & \eta < x + y \end{cases} \quad (18)$$

- функция Римана-Адамара [12] задачи Дарбу, для уравнения

$$L_0(v) \equiv v_{\xi\eta}(\xi, \eta; \lambda) + \lambda^2 v(\xi, \eta; \lambda)/4 = g(\xi, \eta; \lambda), \text{ где } g(\xi, \eta; \lambda) = \mu {}_c D_{0\xi}^\beta \tau(\xi; \lambda)/4,$$

$J_0[x]$  – функция Бесселя [13].

В силу (15) из (17) имеем

$$\begin{aligned} \tau(x; \lambda) &= \int_0^x v(\xi; \lambda) J_0[\lambda(x - \xi)] d\xi + \int_0^x \psi' \left( \frac{\eta}{2}; \lambda \right) J_0 \left[ \lambda \sqrt{x(x - \eta)} \right] d\eta + \\ &+ \psi(0; \lambda) J_0[\lambda x] + \frac{\mu}{2} \int_0^x {}_0 D_{0\xi}^\beta \tau(\xi; \lambda) d\xi \int_\xi^x J_0 \left[ \lambda \sqrt{(\xi - x)(\eta - x)} \right] d\eta. \end{aligned} \quad (19)$$

Формула (19) дает первое функциональное соотношение между функциями  $\tau(x; \lambda)$  и  $v(x; \lambda)$ , перенесенное из области  $D_2$  на  $J$ .

Следовательно, как в работе [11, 39-48] и [14, стр. 110] переходя к пределу при  $y \rightarrow +0$  в уравнении (8), с учетом (15), (16) получим второе функциональное соотношение между функциями  $\tau(x; \lambda)$  и  $v(x; \lambda)$ , перенесенное из области  $D_1$  на  $J$ :

$$[\tau(x; \lambda)]''_{xx} - v(x; \lambda) - \lambda^2 \tau(x; \lambda) - \mu {}_c D_{0x}^\alpha \tau(x; \lambda) = 0, \quad (20)$$

**Существование решения задачи  $TD_\mu^\lambda$  для уравнения (8).**

**Теорема 1.** Если выполнены условия (13), (14) и  $\mu < 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ , то в области  $D$  существует единственное решение задачи  $TD_\mu^\lambda$ .

**Доказательство теоремы 1.** Исключая функцию  $v(x)$  из основных функциональных соотношений (19) и (20), с учетом

$$\tau(0; \lambda) = \varphi_1(0; \lambda) = \psi(0; \lambda) = 0, \quad \tau(x; \lambda) = \varphi_1(0; \lambda) + \int_0^x \tau'(t; \lambda) dt, \quad (21)$$

$$\tau'(0; \lambda) = \psi'(0; \lambda) + v(0; \lambda) = 0 \quad (22)$$

и используя формулы интегрирования по частям, имеем интегральное уравнение относительно  $\tau'(x; \lambda)$ :

$$\tau'(x; \lambda) - \int_0^x L(x, t; \lambda) \tau'(t; \lambda) dt = f_1(x; \lambda), \quad x \in (0, 1), \quad \lambda \in R, \quad (23)$$

где  $L(x, t; \lambda)$  и  $f_1(x; \lambda)$  – известные функции, причем

$$|f_1(x, \lambda)| \leq const, \quad |L(x, t; \lambda)| \leq const. \quad (24)$$

При этом уравнения (23), безусловно, разрешимо[15] относительно  $\tau'(x; \lambda)$  в классе

$$C[0, 1] \cap C^2(0, 1) \quad (25)$$

и его решение представимо в виде:

$$\tau(x; \lambda) = \int_0^x f_1(t; \lambda) \left[ 1 + \int_t^x R(s, t; \lambda) ds \right] dt, \quad (26)$$

где  $R(x, t; \lambda)$  – резольвента ядра  $L(x, t; \lambda)$ .

Подставляя функций  $\tau(x, \lambda)$  из (26) в (20) с учетом (25) находим функцию  $v(x, \lambda)$  из класса:

$$v(x, \lambda) \in C^2(0, 1).$$

После определения функций  $\tau(x, \lambda)$  и  $v(x, \lambda)$  решение задачи  $TD_\mu^\lambda$  в области  $D_2$  записывается в виде (17), а в области  $D_1$  находится из решения первой краевой задачи для уравнения 8) с условиями (9) и (15) [14]. Следовательно, задача  $TD_\mu^\lambda$  однозначно разрешима.

Этим завершается исследование задачи  $TD_\mu^\lambda$  для уравнения (8).

**Теорема 1 доказана.**

Для обеспечения существования интеграла (7) и выполнения условий (5) находим, оценку решения задачи  $TD_\mu^\lambda$  при больших значениях параметра  $|\lambda|$ .

**Теорема 2.** Если выполнены условия

$$\varphi_0(y; \lambda), \quad \varphi_1(y; \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{k+2}}\right), \quad y \in [0, h],$$

$$\psi(x; \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), \quad \psi'_x(x; \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), \quad x \in \bar{\sigma}_3,$$

то  $u(x, y, \lambda)$  функция при больших значениях  $|\lambda|$  допускает оценку

$$u(x, y; \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), \quad k > 3. \quad (27)$$

Теоремы 2 доказывается с помощью принципа экстремума [14, стр. 10].

**Теорема 3.** Пусть решение  $u(x, y, \lambda)$  плоской задачи  $TD_\mu^\lambda$  для уравнения (8) существует и дается формулой (17) и

$$u(x, y; \lambda) = \vartheta(x, y; \lambda) + \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^{1/2}} \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) {}_c D_{0\xi}^\alpha f_2(\xi; \lambda) d\xi,$$

а при больших значениях  $|\lambda|$  допускает оценку (27). Тогда в области  $\Omega$  решение задачи  $TD_\mu$  для уравнения (1) существует и находится формулой (7), где

$$\begin{aligned} f_2(x; \lambda) &= \int_0^x f_1(t; \lambda) \left[ 1 + \int_t^x R(s, t; \lambda) ds \right] dt, \\ \vartheta(x, y; \lambda) &= \vartheta_0(x, y; \lambda) + \int_0^y d\eta \int_0^1 R_1(x, y; \xi, \eta; \lambda) \vartheta_0(\xi, \eta; \lambda) d\xi, \\ \vartheta_0(x, y; \lambda) &= \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta, \lambda) d\eta + \int_0^y G_\xi(x, y; 1, \eta) \varphi_2(\eta, \lambda) d\eta + \\ &\quad + \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi; \lambda) d\xi, \\ G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \left\{ \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4(y-\eta)}\right\} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left\{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right\} \right\}, \end{aligned}$$

$G(x, y; \xi, \eta)$  - функция Грина первой краевой задачи для уравнения  $\vartheta_{xx} - \vartheta_y = 0$  с условиями (9) и (15), а  $\tau(x; \lambda)$  - определяются из (26), здесь  $R_1(x, y; \xi, \eta; \lambda)$  резольвента ядра  $-\lambda^2 G(x, y; \xi, \eta)$ .

Теоремы 3 доказывается точно также как работе [9].

### Литература

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми. // «Сибирский математический журнал». 1962. Т. III. С.642-644.

2. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта. //«Дифференциальные уравнения». 1968. Т. 4. №1. С.52-62.
3. Салахитдинов М.С., Исламов Б. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа. // «Док. АН СССР». 1990. Т.311. №4 С.797-801.
4. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // ДАН РУз. 1996. № 1-2. С.3-6.
5. Kishin B.S. and Abdullaev O.Kh. About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives // International Journal of Differential Equations. 2016. vol. Article ID 9815796. 6 p.
6. Islomov, B.; Baltaeva, U. I. Boundary value problems for the classical and mixed integrodifferential equations with Riemann-Liouville operators. (English) Int. J. Partial Differ. Equ. 2013. Article ID 157947. 7 p. (2013).
7. Дженалиев Н.Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными и граничными условиями. // «Дифференциальные уравнения». 1991. Т. 27. № 10. С. 1925-1927.
8. Islomov B.I., Yuldashev T. K., Alikulov E. K. Boundary-Value Problems for Loaded Third-Order Parabolic-Hyperbolic Equations in Infinite Three-Dimensional Domains.// Labachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. **41**. № 5. pp. 926–944.
9. Islomov, B.I.; Alikulov, Y.K. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-hyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. (English) International Journal of Applied Mathematics. 2021. V.34. №. 2. pp.377-390.
10. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик. 2005. 186 с.
11. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа.// Ташкент: ФАН. 1979. 240 с.
12. Сабитов К.Б. Построения в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С.1023-1032.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1966. Т. 2. 296 с.
14. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. // Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
15. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 224 с.

# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ишанкулов Толиб, д.ф.-м.н. профессор,  
*tolibi@mail.ru*

Самаркандинский государственный университет имени Шарофа Рашидова  
Самарканда, Узбекистан  
Маннонов Махмуд базовый докторант.  
*maxmudjon\_mannopov@mail.ru*

Функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

называется полианалитической порядка  $m$  (или кратко  $m$ - аналитической) в некоторой области  $D$  плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , если она в  $D$  имеет непрерывные частные производные до порядка  $m$  включительно и удовлетворяет обобщенному условию Коши-Римана:

$$\frac{\partial^m w}{\partial \bar{z}^m} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Полианалитические функции тесно связаны с полигармоническими функциями. Функция  $u(x, y)$  тогда и только тогда является полигармонической, если она служит вещественной или мнимой частью полианалитической функции [3]. Бианалитические функции (решения уравнения (1) при  $m = 2$ ) ввиду их связи с бигармоническими функциями, имеют важные применения.

В работах Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, А. В. Бицадзе, М. Б. Балка, Х. Бегера и их учеников рассмотрены различные краевые задачи для полианалитических функций в которых краевые условия задаются на всей границе области регулярности.

В данной работе рассмотрим задачу продолжения  $m$ -аналитической функции в область по ее значениям и значениям производных до  $(m-1)$ -го порядка на части границы этой области.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $D$ -ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Требуется определить  $m$ -аналитическую функцию  $w(z)$  в области  $D$  по значениям ее последовательных производных  $\frac{\partial^k w}{\partial \bar{z}^k}$  ( $k = 0, 1, \dots, m-1$ ), на части границы  $S$  ( $S \subset \partial D$ ) этой области:

$$\frac{\partial^k w}{\partial \bar{z}^k} = f_k(z) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \quad z \in S \quad \left( \frac{\partial^0 w}{\partial \bar{z}^0} = w \right). \quad (2)$$

В случае  $n = 1$ , задача (1), (2) превращается в граничную задачу аналитического продолжения. Поэтому задачу (1), (2) естественно называть граничной задачей продолжения полианалитических функций. Задача (1), (2) является некорректной. Решение единственно но неустойчиво. Устойчивость решения граничной задачи аналитического продолжения в классе ограниченных функций следует из теоремы о двух константах [1].

Класс  $m$ -аналитических в области  $D$  функций обозначим через  $\Pi_m(D)$ . При  $m=1$ ,  $\Pi_1(D)$  – класс аналитических в области  $D$  функций. Обозначим через  $M$  множество функций  $w \in \Pi_m(D) \cap C^{m-1}(\bar{D})$ , удовлетворяющих при  $z \in D$  неравенствам

$$\left| \frac{\partial^k w(z)}{\partial z^k} \right| \leq C, \quad z \in D \quad (k = 0, 1, \dots, m-1),$$

где  $C$  – постоянное число, не зависящее от функции  $w(z)$ .

Приведем аналог теоремы о двух константах для  $m$ -аналитических функций ( $m > 1$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $w \in M$  и

$$\left| \frac{\partial^k w(z)}{\partial z^k} \right| \leq \varepsilon, \quad z \in S \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Тогда, при  $z \in D$  имеет место неравенство

$$|w(z)| \leq \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=k}^{m-1} \frac{d^l}{k!(l-k)!} \right] \varepsilon^{\omega(z)} C^{1-\omega(z)},$$

где  $d = \max_{z \in D} |z|$ ,  $\omega(z)$  – гармоническая мера множества  $S$  относительно области  $D$ .

Многомерные краевые задачи для полианалитических функций к настоящему времени недостаточно изучены. В частности, не исследована задача продолжения полианалитической функции многих комплексных переменных с части границы области регулярности. Решение этой задачи играет важную роль в построении теории многомерных краевых задач для полианалитических функций.

Пусть  $D = D_1 \times \dots \times D_n$  – полицилиндр в комплексном  $n$ -мерном пространстве  $\square^n$  переменных  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $(k = 1, 2, \dots, n)$ .

То есть  $D = D_1 \times \dots \times D_n$ , где  $D_k$  – плоские односвязные области с кусочно-гладкими границами  $\partial D_k$ .  $E_k$  – множества положительной меры на  $\partial D_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Остов полицилиндра  $D$  обозначим через  $\Gamma = \partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$ . Ясно, что  $E_1 \times \dots \times E_n = E \subset \Gamma$ .

**Определение 2.** Функция  $w(z) = w(z_1, \dots, z_n) \in C^2(D)$  называется бианалитической в полицилиндре  $D$  если она удовлетворяет следующим  $\frac{n(n+1)}{2}$  уравнениям с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_l} = 0, \quad z \in D, \quad k \leq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Постановка задачи продолжения для бианалитических функций многих комплексных переменных в полицилиндре:

Требуется определить бианалитическую функцию  $w \in \Pi_2(D) \cap C^1(\bar{D})$  в полицилиндре  $D$  по ее значениям и значениям производных первого порядка на множестве  $E$ :

$$w(z) = f_0(z), \quad \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z), \quad k = \overline{1, n} \quad z \in E. \quad (4)$$

Здесь граничные значения функций в точках остава понимается как по координатное угловые пределы.

Задача продолжения аналитической функции многих комплексных переменных в полилиндре  $D$  по ее граничным значениям на множестве  $E$  рассмотрена в работах [2] и [4]. Для  $m$ -аналитической функции одной комплексной переменной в области ограниченной отрезком вещественной оси и гладкой кривой лежащей в верхней полуплоскости (область типа “шапочка”) задача продолжения рассматривалась в [5].

Приведем оценку условной устойчивости задачи (3), (4). С этой целью обозначим через  $M$  множество функций  $w \in \Pi_2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , удовлетворяющих при  $z \in D$  неравенствам

$$|w(z)| \leq C, \quad \left| \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}_k} \right| \leq C, \quad (k = \overline{1, n}),$$

где  $C$  – постоянное число, не зависящее от функции  $w(z)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $w \in M$  и

$$|w(z)|_E \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}_k} \right|_E \leq \varepsilon, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда, при  $z \in D$  имеет место неравенство

$$|w(z)| \leq \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n d_k \right) \varepsilon^{\omega_1(z_1)\omega_2(z_2)\dots\omega_n(z_n)} C^{1-\omega_1(z_1)\omega_2(z_2)\dots\omega_n(z_n)},$$

где  $d_k = \max_{z_k \in D_k} |z_k|$ ,  $\omega_k(z_k)$  – гармоническая мера множества  $E_k$  относительно области  $D_k$ .

### Литература

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990.
3. Балк М. Б. Полианалитические функции и их обобщения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления том 85, 187–246 (1991).
4. Ишанкулов Т. О двух задачах аналитического продолжения для функций многих переменных. Сиб. матем. журн. 25:3, 89-94 (1984)
5. Ишанкулов Т., Фозилов Д. Ш. Продолжение полианалитических функций. Известия вузов. Математика. 8, 37-45 (2021)

# **Краевая задача с нелокальным граничным условием второго рода для смешанной уравнения третьего порядка в прямоугольной области**

**Г.К. Кылышбаева**

*Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан,  
г. Ташкент, [kalbaevna85@mail.ru](mailto:kalbaevna85@mail.ru)*

Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов третьего порядка, когда главная часть оператора содержит производную по  $x$  или  $y$  в первые аналитическими методами изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С. Салохитдинова [1], М.С. Салохитдинова [2], Т.Д. Джураева [3], Т.Д. Джураева, А. Сопуева и М. Мамажонова [4], где смешанная область, состоящая из характеристических треугольников и прямоугольника (или полуокружность). В этих работах решение найдено в классе функций, представимых в виде  $u(x, y) = v(x, y) + \omega(x)$  или  $u(x, y) = v(x, y) + \omega(y)$ , где  $v(x, y)$  – произвольное регулярное решение уравнения второго порядка  $Lv = 0$ ,  $\omega(x), \omega(y)$  – произвольные функции. Такое представление имеет важное место для уравнений, составляемых из произведения перестановочных дифференциальных операторов. Но для уравнения смешанного типа с обобщенным оператором, содержащим в себе младшие члены, этот метод не всегда верен [5].

Далее это направление для различных уравнений с частными производными третьего порядка развивались в работах [2], [3], [6]-[8].

В последние годы возник интерес исследованию методом спектрального анализа [9] однозначной разрешимости и устойчивости решения прямых и обратных задач для модельного уравнения второго порядка смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов целого и дробного порядка в прямоугольной области. Отметим работы [10-16].

Краевые задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов в прямоугольных областях, случай, когда уравнения содержит произведения неперестановочных дифференциальных операторов мало изучены. Отметим работе [17].

В настоящей работе исследуется краевая задача с нелокальным граничным условием второго рода для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в прямоугольной области, когда главная часть содержит оператор первого порядка.

В прямоугольной области  $D = \{(x, y) : 0 < x < l, -p < y < q\}$ , рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) L u = 0, \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & \text{при } x > 0, y > 0, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & \text{при } x > 0, y < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$p > 0, q > 0, \lambda$  – действительные числа,  $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $c \in (-\infty, +\infty)$ .

Введем обозначения:  $J = \{(x, y) : 0 < x < l, y = 0\}$ ,

$$D_1 = D \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\}, \quad D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

Через  $C_\theta^k(M)$  обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по  $\theta$  до  $k$ -го порядка включительно в области  $M$ .

В области  $D$  для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

**Задача  $S$ .** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}), \quad u \in C_y^2(\bar{D}_2), \quad u \in C_x^2(\bar{D}), \quad u_{xy} \in C(D_1), \quad u_{xyy} \in C(D_2), \quad u_{xxx} \in C(D_1 \cup D_2), \quad (3)$$

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) Lu = 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (au_{xx}(x, y) + cu_x(x, y)) \Big|_{x=0} &= (au_{xx}(x, y) + cu_x(x, y)) \Big|_{x=l}, \\ (au_x(x, y) + cu(x, y)) \Big|_{x=l} &= 0, \quad -p \leq y \leq q, \end{aligned} \quad (5)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad -p \leq y \leq q, \quad (6)$$

$$u(x, -p) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(y)$ , – заданные достаточно гладкие функции,  $\varphi'(0) = \varphi'(l)$ ,  $\varphi(l) = 0$ .

**Доказаны следующие теоремы.**

**Теорема 1.** Если существует решение задачи  $S$ , то оно единствено тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\Delta_{pq}(n) = \cos \rho_n p + \rho_n \sin \rho_n p \neq 0 \quad \text{при всех } n \in N_0,$$

$$\text{где } \rho_n^2 = \lambda^2 + \mu_n^2, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in N_0 = N \cup \{0\}.$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия  $\varphi_1(x) \in C^5[0, l]$ ,  $\varphi_1^{(i)}(0) = \varphi_1^{(i)}(l) = 0, i = 1, 3, 5, 7, 9$ ,  $\varphi_1^{(j)}(l) = 0, j = 0, 2, 4$ ;  $\psi(y) \in C^2[-p, q]$  и  $\Delta_{pq}(n) > 0, \forall n \in N_0$ . Тогда существует единственное решение задачи  $S$  и оно определяется формулой

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{a}x} \left[ \psi(y) + \frac{1}{a} \int_0^x v(t, y) e^{\frac{c}{a}t} dt \right],$$

$$v(x, y) = \frac{2(l-x)}{l} g_0(y) + \frac{4(l-x)}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(y) \cos \mu_n x + \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(y) \sin \mu_n x$$

принадлежащий к классу (3), где

$$\vartheta_0(y) = \begin{cases} \frac{\varphi_{10}}{\Delta_{pq}(0)} e^{-\lambda^2 y}, & y > 0, \\ \frac{\varphi_{10}}{\Delta_{pq}(0)} (\cos \lambda y - \lambda \sin \lambda y), & y < 0, \end{cases}$$

$$\vartheta_n(y) = \begin{cases} \frac{\varphi_{1n}}{\Delta_{pq}(n)} e^{-\rho_n^2 y}, & y > 0, \\ \frac{\varphi_{1n}}{\Delta_{pq}(n)} (\cos \rho_n y - \rho_n \sin \rho_n y), & y < 0, \end{cases}$$

$$w_n(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\rho_n^2 y}}{\Delta_{pq}(n)} [\tilde{\varphi}_{1n} + \varphi_{1n} (2\mu_n y - \theta_n(-p))], & y > 0, \\ \frac{1}{\Delta_{pq}(n)} \{ \tilde{\varphi}_{1n} (\cos \rho_n y - \rho_n \sin \rho_n y) + \\ + \varphi_{1n} [\Delta_{pq}(n) \theta_n(y) - (\cos \rho_n y - \rho_n \sin \rho_n y) \theta_n(-p)] \}, & y < 0, \end{cases}$$

$$\theta_n(y) = \frac{\mu_n}{\rho_n \Delta_{pq}(n)} [(1+y) \sin \rho_n y + \rho_n y \cos \rho_n y], \quad \varphi_1(x) = a \varphi'(x) + c \varphi(x),$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi_1(x) dx, \quad \varphi_{1n} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \mu_n x dx, \quad \tilde{\varphi}_{1n} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi_1(x) x \sin \mu_n x dx,$$

Используя методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического и спектрального анализа доказывается теоремы 1 и 2.

## ЛИТЕРАТУРА

- Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа. // «Сибирский математический журнал». Новосибирск. 1961. 2(1). С. 7-19.
- Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Т.: Фан. 1974. 156 с.
- Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Издательство: ФАН. 1979. 240 с.
- Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. 220 с.
- Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // "Мат. заметки". 2003. Т.74. Вып.4. С. 517-528.
- Кожанов А.И. Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка// "Матем. Сборник". 1982. 118(160): 4(8). –С. 504–522.
- Islomov B. I., Usmonov B. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. // "Labachevskii Journal of Mathematics". 2020. 41(1). Р. 32-38.
- Chen S.X. Mixed type equations in gas dynamics. // Quart.Appl. Math. 2010. LVXIII (3). pp. 487-511.

9. Ильин В.А. Единственность и принадлежность  $W_2^1$  классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения. // «Математические заметки». 1975. 17(1). С. 93–103.
10. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев – Бицадзе в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 1978. 14(1). С.136-139.
11. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. // «Доклады РАН» 2007. 413(1). С. 23-26.
12. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. // “Матем. заметки”. 2010. 87(6). С. 907–918.
13. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью. // Известия Вузов. Математика. 2011. 5. С.44-52.
14. Удалова Г.Ю. Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. // Вестник СамГУ - Естественно-научная серия. 2010. 78(4). С.116-122.
15. Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021. № 3. С.29-46.
16. Yuldashev T.K., Islomov B.I., Ubaydullaev U.Sh. On Boundary Value Problems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator. // Bulletin of the Karaganda University . Mathematicsseries. № 1(101). 2021. P.127-137.
17. Islomov B.I., Kilishbaeva G.K. Boundary value problems for third-order mixed equations in the rectangular domain.// Science and Education in Karakalpakstan. 2022. № 2/1(24). P.32-41.

## **ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛАПЛАСОВА ПОЛЯ**

**Ж. А. Мардонов**

**Самаркандский государственный университет имени Шароф Рашидов**

e-mail: mardonov-jolgosh@mail.ru

### **1. Введение.**

Через  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и  $y = (y_1, y_2, y_3)$  будем обозначать точки трехмерного вещественного Евклидова пространство  $\square^3$ , через  $D$  - ограниченную область этого пространства с гладкой границей  $\partial D$ . В этой области рассмотрим некоторого

векторного поля  $\vec{F}(x)$ , которое удовлетворяет системе дифференциальных уравнений первого порядка [1]:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x) = \vartheta(x), \quad \operatorname{rot} \vec{F}(x) = \vec{R}(x), \quad x \in D. \quad (1)$$

где  $\vartheta(x)$  - скалярное поле,  $\vec{R}(x)$  - векторное поле.

Мы будем предполагать, что заданные поля  $\vartheta(x)$  и  $\vec{R}(x)$  дифференцируемы в области  $D$ .

Нам известно, что уравнение (1) имеет внутри  $D$  общее решение, выражаемой формулой [1 – 2] :

$$\begin{aligned} \vec{F}(x) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} + [\vec{n} \times \vec{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} \right\} ds_y + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \vartheta(y) \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} dv + \frac{1}{4\pi} \iiint_D R(y) \times \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} dv, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (2)$$

Если поле  $\vec{F}(x)$ - гармонического (или лапласово) в  $D$  т.е.  $\operatorname{div} \vec{F}(x)=0$ ,

$\operatorname{rot} \vec{F}(x)=0$ , то из (2) немедленно следует трехмерная интегральная формула Коши [2]-[3]:

$$\vec{F}(x) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} + [\vec{n} \times \vec{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} \right\} ds_y, \quad x \in D. \quad (3)$$

## 2. Теперь решаем задачу (1) для специальных классов областей

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^3$  - ограниченная односвязная область, граница которой состоит из куска  $T$  гиперплоскости  $y_3 = 0$  и гладкой поверхности  $S$ , лежащей в полупространстве  $y_3 \geq 0$ , т.е.  $\partial D = S \cup T$ . Рассмотрим в области  $D$  задачу Коши.

**Подстановка задачи.** Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности  $S$ :

$$\vec{F}(y)|_S = \vec{f}(y), \quad y \in S. \quad (4)$$

где  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  - заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется восстановить функцию  $\vec{F}(y)$  в  $D$ , исходя из заданной  $\vec{f}(y)$ .

Обозначим через  $H(D)$  совокупность функций гармонических в  $D$  и непрерывных на  $D \cup \partial D = \bar{D}$ . Функцию  $\Phi(y, x)$  при  $y \neq x$  определим равенством

$$\Phi(y, x) = -\frac{1}{4\pi r} + g(y, x), \quad r = |x - y|. \quad (5)$$

здесь  $g(y, x)$  - функция заданная  $R^3 \times R^3$  и гармоническая по переменному  $y$  в  $R^3$ .

Пусть  $K(w)$ ,  $w = u + iv$  ( $u, v$  - вещественные) - целая функция, принимающая действительные значения при вещественных  $w$  и

$$K(w) \neq 0, \sup_{v \geq 1} |v^p \cdot K^p(w)| = M(p, u) < \infty, p = 0, 1, 2, -\infty < u < +\infty.$$

Функция  $\Phi(y, x)$  при  $y \neq x$  определим формулой

$$\Phi(y, x) = -\frac{1}{2\pi^2 K(x_3)} \int_0^\infty \text{Im} \left[ \frac{K(w)}{w - x_3} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.$$

В работе [4] -[6] показано, что функция  $\Phi(y, x)$ , определенная равенством (6), представима в виде (5). Таким образом, для  $\vec{F}(y) \in A(D)$  справедлива формула (2), в которой  $\Phi(y, x)$  находится из (6). Заметим, что в (6) за  $K(w)$  можно взять аналитическую функцию, регулярную в некоторой области .

При  $\sigma > 0$  в формуле (6) положим

$$\begin{aligned} K(w) &= \exp(\sigma w^2), \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \\ K(x_3) &= \exp(\sigma x_3^2), \quad \sigma > 0, \quad x_3 > 0. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\Phi_\sigma(y, x) = -\frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2} \int_0^\infty \text{Im} \left[ \frac{\exp(\sigma w^2)}{w - x_3} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2), получим

$$\begin{aligned}\vec{F}(x) = & -\iint_{\partial D} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{F}) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) + [\vec{n} \times \vec{F}] \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) \right\} ds_y + \\ & + \iiint_D \mathcal{G}(y) \cdot \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) dv + \iiint_D [R(y) \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x)] dv, \quad x \in D.\end{aligned}\quad (8)$$

Выделяя мнимую часть подинтегрального выражения в (7), получим

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{e^{\sigma y_3^2 - \sigma x_3^2 - \sigma \alpha^2}}{2\pi^2} \int \frac{\varphi_\sigma(y, x, u)}{u^2 + r^2} \cdot e^{-\sigma u^2} du,\quad (9)$$

где

$$\varphi_\sigma(y, x, u) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \cdot \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3.\quad (10)$$

Предположим, что ограничена на части  $T$  границы  $\partial D$ :

$$|\vec{F}(y)| \leq M, \quad y \in T,\quad (11)$$

где  $M$  – заданное положительное число.

Подставим заданную задачу Коши в формуле (8) и введем следующая обозначения:

$$\begin{aligned}\vec{F}_\sigma(x) = & -\iint_S \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{f}(y)) \cdot \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) + [\vec{n} \times \vec{f}(y)] \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) \right\} ds_y + \\ & + \iiint_D \mathcal{G}(y) \cdot \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) dv + \iiint_D [R(y) \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x)] dv.\end{aligned}\quad (12)$$

Используя этот обозначение следующая теорема верна для задачи Коши приведения для системы (1).

**Теорема 1.** Пусть  $\vec{F}(x)$  – регулярное решение уравнения (1) в области  $D$ , на части  $T$  удовлетворяющее условию (11). Тогда для  $x \in D$  и  $\sigma \geq 1$  справедливо неравенство

$$|\vec{F}(x) - \vec{F}_\sigma(x)| \leq MC(x) \sigma e^{-\sigma x_3^2}\quad (13)$$

$$\text{где } c(x) = \frac{8}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{x_3} \right).$$

Здесь и ниже функции, ограниченные на компактных подмножествах области  $D$ , обозначим через  $C(x)$ .

**Доказательство.** Согласно формуле (8) имеем:

$$\begin{aligned} & - \iint_T \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{F}(y)) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) + [\vec{n} \times \vec{F}(y)] \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) \right\} ds_y + \\ & + \iiint_D \mathcal{G}(y) \cdot \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) dv + \iiint_D [R(y) \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x)] dv = \vec{F}_\sigma(x) + \vec{J}_\sigma(x), \quad (14) \end{aligned}$$

(14) можно написать в виде  $\vec{F}(x) - \vec{F}_\sigma(x) = \vec{J}_\sigma(x)$ ,

$$\text{гд} \vec{J}_\sigma(x) = - \iint_T \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{F}(y)) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) + [\vec{n} \times \vec{F}(y)] \times \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x) \right\} ds_y, \quad (15)$$

при этом из  $|\vec{J}_\sigma(x)| \leq BT_\sigma(x)$ , где

$$T_\sigma(x) = 2 \iint_T |\operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x)| ds_y \leq 2 \iint_T \left\{ \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_3} \right| \right\} ds_y \quad (16)$$

Вычислим  $\frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_\sigma(y, x), (i=1,2,3)$  по формуле (9), (10) и положим  $y_3 = 0$ :

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} = - \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{\pi^2} \cdot \int_0^\infty (y_1 - x_1) \left( \frac{\sigma}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{1}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) \cdot e^{-\sigma u^2} \cdot e^{-\sigma u^2} du$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} = - \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{\pi^2} \cdot \int_0^\infty (y_2 - x_2) \left( \frac{\sigma}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{1}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) \cdot e^{-\sigma u^2} \cdot e^{-\sigma u^2} du$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_3} = \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{\pi^2} \cdot \int_0^\infty \left( \frac{\sigma x_3}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{x_3}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) \cdot e^{-\sigma u^2} \cdot e^{-\sigma u^2} du$$

Тогда для  $T_\sigma(x)$ , определенного равенством (16), получим

$$\begin{aligned}
T_\sigma(x) \leq & \frac{2}{\pi^2} \cdot e^{-\sigma x_3^2} \left[ \iint_T (\|y_1 - x_1\| + \|y_2 + x_2\|) \left\{ \int_0^\infty \left( \frac{\sigma}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{1}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) \cdot e^{-\sigma u^2} du \right\} e^{-\sigma \alpha^2} dy_1 dy_2 + \right. \\
& \left. + \iint_T \left\{ \int_0^\infty \left( \frac{\sigma x_3}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{x_3}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) \cdot e^{-\sigma u^2} du \right\} e^{-\sigma \alpha^2} dy_1 dy_2 \right] \quad (17)
\end{aligned}$$

Область  $T$  в интеграле заменим  $\mathbb{R}^2$  и полученные повторные интегралы преобразуем в трехкратные по всему  $\mathbb{R}^3$ . Переходим в последнем интеграле в сферическую систему координат

$$\begin{aligned}
y_1 = & x_1 + t \sin \theta \cos \varphi, \quad y_2 = x_2 + t \sin \theta \sin \varphi, \quad u = t \cos \theta, \\
0 \leq & t < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \frac{\partial(y_1, y_2, u)}{\partial(t, \varphi, \theta)} = t^2 \sin \theta
\end{aligned}$$

В результате имеем оценку

$$\begin{aligned}
T_\sigma(x) \leq & \frac{2e^{-\sigma x_3^2}}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \left( t \sin \theta (|\cos \varphi| + |\sin \varphi|) \left( \frac{\sigma}{t^2 + x_3^2} + \frac{1}{(t^2 + x_3^2)^2} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left( \frac{\sigma x_3}{t^2 + x_3^2} + \frac{x_3}{(t^2 + x_3^2)^2} \right) \right) t^2 \sin \theta d\theta \right\} d\varphi \right] e^{-\sigma t^2} dt = \\
& = \frac{8}{\pi} \cdot e^{-\sigma x_3^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sigma t^3}{t^2 + x_3^2} + \frac{t^3}{(t^2 + x_3^2)^2} + \frac{\sigma x_3 t^2}{t^2 + x_3^2} + \frac{x_3 t^2}{(t^2 + x_3^2)^2} \right] e^{-\sigma t^2} dt = \\
& = \frac{16}{\pi} \cdot e^{-\sigma x_3^2} \left[ \int_0^\infty \sigma t e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty \frac{t e^{-\sigma t^2} dt}{t^2 + x_3^2} \right] = \frac{16}{\pi} e^{-\sigma x_3^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2x_3 \sqrt{\sigma}} \right) \leq \\
& \leq \frac{8}{\pi} e^{-\sigma x_3^2} \left( 1 + \frac{\pi}{x_3} \right) \cdot \sigma, \quad \frac{x_3 t}{t^2 + x_3^2} \leq 1. \quad (20)
\end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.1.

**Следствие 1.1.** Для любого  $x \in D$  справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \overrightarrow{F}_\sigma(x) = \overrightarrow{F}(x) \quad (21)$$

причем предел достигается равномерно на компактах из  $D$ .

**Следствие 1.1.** дает точное решение задачи Коши (1) – (4), в случае, когда данные Коши на поверхности  $S$  заданы точно.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шилов Г.Е. Математический анализ . Части 1 - 2. -Москва: Наука,1972. [624 стр].
2. Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей . М. Наука, 1984. [326 стр]
3. Zhdanov M.S. Use of Cauchy integral analogs in the geopotential theory. An. Geophys. №4, 1980, pp. [447-458 стр].
- 4 Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа. ДАН СССР, 1977.- Т.235.-№2, [281-283стр]
5. Ярмухамедов Ш. Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа. Сибирский Математический журнал. 2004, Т.33.№3, [702-719 стр].

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗНИКАЮЩЕГО В АРТЕРИАЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

**М. М. Матякубов**

Ургенчский государственный университет

E-mail: mmm2210410@mail.ru

В этой работе метод обратной спектральной задачи применяется к периодическим решениям уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, возникающим в артериальной механике. Получены важные следствия об аналитичности и о периоде решения.

**Ключевые слова:** уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Хилла, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина-Трубовица, формулы следов.

В работе [5] и [6] исследовано уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) с нагруженным членом в классе периодических функций. В этой работе изучается периодические решения уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником возникающего в артериальной механике

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx} + h(t)q_x + 2 \int_0^\infty \beta(\lambda, t)s(\pi, \lambda, t)(\psi_+(x, \lambda, t) \cdot \psi_-(x, \lambda, t))_x d\lambda, , t > 0, x \in R \quad (1)$$

Требуется найти решение  $q(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q(x+\pi, t) \equiv q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \quad (2)$$

где  $q_0(x)$  и  $h(t) \in C[0, \infty)$  заданные действительные функции. Здесь  $\beta(\lambda, t) \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$  - заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику  $\beta(\lambda, t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\psi_{\pm}(x, \lambda, t)$  - решения Флоке (нормированные условием  $\psi_{\pm}(0, \lambda, t) = 1$ ) уравнения Хилла

$$H(t)y \equiv -y'' + q(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R^1, \quad (3)$$

$s(x, \lambda, t)$  - решение уравнения (3), удовлетворяющая начальным условиям  $s(0, \lambda, t) = 0$ ,  $s'(0, \lambda, t) = 1$ .

Спектр оператора (3) состоит из следующего множества  $E = \bigcup_{n \in Z} [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$ . Интервалы  $(-\infty, \lambda_0)$ ,  $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  называются лакунами. Здесь  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{4k-1}$ ,  $\lambda_{4k}$  - собственные значения периодической задачи ( $y(0) = y(\pi)$ ,  $y'(0) = y'(\pi)$ ), а  $\lambda_{4k+1}$ ,  $\lambda_{4k+2}$  - собственные значения антипериодической задачи ( $y(0) = -y(\pi)$ ,  $y'(0) = -y'(\pi)$ ) для уравнения (3).

Собственные значения  $\xi_n(t)$ ,  $n \in Z$  задачи Дирихле  $y_1(0) = 0$ ,  $y_1(\pi) = 0$  для уравнения (3) вместе со знаками  $\sigma_n(t) = \text{sign}\{s'(\pi, \xi_n(t), t) - 1/s(\pi, \xi_n(t), t)\}$ ,  $n \in Z$  называются спектральными параметрами задачи (3).

**Теорема.** Пусть  $q(x, t)$  и  $\psi_{\pm}(x, \lambda, t)$  является решением задачи (1)+(2). Тогда спектр оператора Хилла с коэффициентом  $q(x+\tau, t)$  не зависит от  $\tau$  и  $t$ , а спектральные параметры  $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$ ,  $n \in Z$  удовлетворяют системе Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{2q(\tau, t) + 4\xi_n - h(t) + \int_0^\infty \frac{s(\pi, \lambda, t) \beta(\lambda, t)}{\lambda - \xi_n} d\lambda\}, \quad n \in Z, \quad (4)$$

где  $h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}$

и

$$s(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}.$$

Знак  $\sigma_n(\tau, t) \equiv \pm 1$  меняется при каждом столкновении  $\xi_n(\tau, t)$  с границами своей лакуны  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ . Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

где  $\xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n^0(\tau)$   $n \in \mathbb{Z}$  - спектральные параметры оператора Хилла соответствующие коэффициенту  $q_0(x + \tau)$ .

Учитывая формулы следов

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t))$$

$$q^2(\tau, t) - \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t))$$

систему (4) можно переписать в замкнутой форме.

**Следствие 1.** Эта теорема дает метод решения задачи (1)+(2). Действительно, обозначим через  $\lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\xi_n(\tau, t)$ ,  $\sigma_n(\tau, t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , спектральные данные задачи

$$-y'' + q(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Найдём спектральные данные  $\lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n^0(\tau)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  для уравнения

$$-y'' + q_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Решаем задачу Коши  $\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  для системы уравнений Дубровина (4). По формуле следов  $q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t))$  находим решение задачи (1)+(2). После этого нетрудно найти решения Флоке  $\psi_{\pm}(x, \lambda, t)$ .

**Следствие 2.** Используя результаты работы [7] выводим, что если начальная функция  $q_0(x)$  является действительной аналитической функцией, то решение  $q(x, t)$  также является действительной аналитической функцией по  $x$ .

**Следствие 3.** В силу теоремы работы [8], если число  $\pi/n$  является периодом начальной функции  $q_0(x)$ , то это число  $\pi/n$  является периодом и для решения  $q(x, t)$  по переменной  $x$ . Здесь  $n \geq 2$  натуральное число.

### **Библиографический список**

1. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I. // Функц. анализ и прил., 1974, т. 8, № 3, с. 54-66.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. // ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 12, с. 2131-2143.
3. Lax P. Periodic Solutions of the KdV equation. // Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, p. 141-188.
4. Yakhshimuratov, A.B. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions. // Ufa Mat. Journal. 2011, vol. 3, no. 4, p. 144-150.
5. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций// Известия вузов. Математика. 2016 г., N 2, с. 87-92.
6. A. B. Khasanov and M. M. Matyakubov. Integration of the nonlinear Korteweg–de Vries equation with an additional term//Theoretical and Mathematical Physics, 2020, v. 203, No. 2, 596–607.
7. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure. Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.
8. Hochstadt H. A. Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations. // Journal of math. analysis and applications, 1984, 102, p. 599-605.

## **ЧАСТИЧНО-ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ**

О.Э.Мирзаев

Самаркандинский государственный университет имени Ш.Рашидова

**Аннотация.** В данной работе предлагается алгоритм, построения изоспектральных и частично-изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

**Ключевые слова:** Задача Штурма-Лиувилля, собственные значения, нормирующие константы, спектральные данные, обратная спектральная задача интегральное уравнение, частично-изоспектральные операторы.

### **1. Введение**

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех граничных задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с одним и тем же

спектром. Такие граничные задачи называются изоспектральными, и были изучены в работах E.L.Isaacson, H.P.McKean, B.E.Dahlberg, E.Trubowitz [4-7].

**Определение 1.1.** Краевые задачи Штурма-Лиувилля

$$L^0 y \equiv -y'' + q_0(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_0 y(\pi) = 0 \quad (1.1)$$

и

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (1.2)$$

называются изоспектральными, если они имеют одинаковые собственные значения, т.е.  $\sigma(L) = \sigma(L^0) = \{\lambda_n^0, n \geq 0\}$ .

**Определение 1.2.** Краевые задачи (1.1) и (1.2) называются частичноизоспектральными, если их собственные значения удовлетворяют условиям

$$\lambda_n \neq \lambda_n^0 \text{ при } n = \overline{0, n_0 - 1}; \quad \lambda_n = \lambda_n^0 \text{ при } n = \overline{n_0, \infty},$$

где  $n_0 \in N$  некоторые натуральные число.

Здесь  $q_0(x), q(x) \in C[0, \pi]$  - действительная непрерывная функция на отрезке  $[0, \pi]$ ,  $H_0$  и  $H$  конечные действительные числа.

В настоящее время имеются разные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования т.е. метод Гельфанд-Левитана, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей и другие (см. [8]-[17]). В.А.Марченко показал, что оператор Штурма-Лиувилля на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, т.е. по спектральной функции. При построении изоспектральных граничных задач Штурма-Лиувилля с заданным спектром  $\sigma(L) = \{\lambda_n, n \geq 0\}$  нами использован метод Гельфанд-Левитана. И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном были найдены необходимые и достаточные условия восстановления граничных задач Штурма-Лиувилля по их спектральным функциям. Этот метод основан на восстановлении потенциала и граничных условий по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметрами.

Основным результатом работы является алгоритм, восстановления семейства краевых задач Штурма-Лиувилля  $L = L(q(x), \infty, H)$ , спектры которых удовлетворяют условиям:  $\sigma(L) = \left\{ \lambda_0 = a^2, a \in [0; \frac{3}{2}) \setminus \{\frac{1}{2}\}, \lambda_n = (n + 1/2)^2, n \geq 1 \right\}$ .

## 2. Некоторые сведения об обратной спектральной задаче

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$L(q(x), \infty, H)y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi) \quad (2.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2.3)$$

где  $q(x) \in C[0, \pi]$ ,  $\lambda$  - спектральный параметр.  $H$  конечное действительное число.

Обозначим через  $\varphi(x, \lambda)$  решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1. \quad (2.4)$$

Хорошо известно [3], что решение  $\varphi(x, \lambda)$  задачи (2.1), (2.4) существует, единственно и для каждого фиксированного  $x \in [0, \pi]$  является целой функцией по  $\lambda$ . Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x K(x, t) \sin \sqrt{\lambda}t dt, \quad (2.5)$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \quad (2.6)$$

Очевидно, что  $\varphi(x, \lambda)$  при любом  $\lambda$  удовлетворяет граничному условию (2.2). Поэтому собственные значения  $\lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  задачи (2.1)-(2.3) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0, \quad (2.7)$$

а соответствующая собственная функция  $\varphi(x, \lambda_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx. \quad (2.8)$$

Числа  $\alpha_n$  называются нормировочными числами граничной задачи (2.1)-(2.3).

Набор чисел  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$  будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (2.1)-(2.3).

**Теорема 2.1.** ([3]) Для спектральных данных  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$  задачи (2.1)-(2.3) справедливы равенства

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{c}{(n+1/2)\pi} + \frac{\gamma_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2(n+1/2)^2} + \frac{\beta_n}{n^3}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\} \in l_2, c = H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (2.9)$$

Хорошо известно, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны и для произвольных функций  $f(x) \in L^2(0, \pi)$  имеет место

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n} \left( \int_0^\pi f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt \right) \varphi(x, \lambda_n). \quad (2.10)$$

Отсюда получим символическое равенство

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(t, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} = \delta(t - x), \quad (2.11)$$

где  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака. В частности, при  $q(x) \equiv 0, H = 0$  имеем

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n^0} \frac{\sin(n+1/2)x \sin(n+1/2)t}{(n+1/2)^2} = \delta(t - x), \quad (2.12)$$

где

$$\alpha_n^0 = \frac{\pi}{2(n+1/2)^2}, \quad n \geq 0. \quad (2.13)$$

**Теорема 2.2.** (В.А.Марченко, [1]). Потенциал  $q(x)$  и коэффициент  $H$  краевой задачи (2.1)-(2.3) определяется однозначно по спектральным данным  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ .

**Лемма 2.1.** Имеет место тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} = 0, \quad 0 < t < x. \quad (2.14)$$

**Теорема 2.3.** (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, [2]). Ядро  $K(x,t)$  оператора преобразования (2.5), удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \quad (0 < t < x), \quad (2.15)$$

где

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_n} t}{\lambda_n} - \frac{1}{\alpha_n^0} \frac{\sin(n+1/2)x \sin(n+1/2)t}{(n+1/2)^2} \right\}. \quad (2.16)$$

**Теорема 2.4.** (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, [2]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  была спектральным данным некоторой граничной задачи вида (2.1)-(2.3) с потенциалом  $q(x) \in L^2(0, \pi)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.9).

**Теорема 2.5.** (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, [2]) При каждом фиксированном  $x \in (0, \pi)$  интегральное уравнение (2.15) имеет единственное решение  $K(x,t) \equiv K_x(t)$ .

Решая уравнение (2.15) находим  $K(x,t)$ . Далее определим функцию  $\varphi(x, \lambda)$  по формуле (2.5). Тогда функция  $\varphi(x, \lambda)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad (0 < x < \pi), \quad (2.17)$$

и начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1, \quad (2.18)$$

где

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x,x). \quad (2.19)$$

При этом постоянная  $H$  в граничном условии (2.3) определяется из равенства

$$H = c - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (2.20)$$

### 3. Алгоритм восстановления частично-изоспектральных граничных задач

**Теорема 3.1.** Пусть пара  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$  последовательности действительных чисел удовлетворяет следующим условиям

$$\lambda_0 = a^2, a \in [0; \frac{3}{2}) \setminus \{\frac{1}{2}\}, \lambda_n = (n + 1/2)^2, n \geq 1, \alpha_n = \frac{\pi}{2(n + 1/2)^2}, n \geq 0. \quad (3.1)$$

Тогда эта пара является спектральными данными некоторой граничной задачи Штурма-Лиувилля вида  $L(q(x), \infty, H) = L(a)$ .

**Доказательство.** Что последовательность  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , определенная равенствами (3.1), удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Поэтому существует единственная краевая задача  $L(q(x), \infty, H) = L(a)$  с коэффициентами  $q(x) = q(x, a)$ ,

$H = H(a)$ , и спектром  $(\sigma(L(a)) = \left\{ \lambda_0 = a^2, a \in [0; \frac{3}{2}) \setminus \{\frac{1}{2}\}, \lambda_n = (n + 1/2)^2, n \geq 1 \right\})$ :

$$L(a)y \equiv -y'' + q(x, a)y = \lambda y, 0 < x < \pi, \quad (3.2)$$

$$y(0) = 0, y'(\pi) + H(a)y(\pi) = 0. \quad (3.3)$$

Далее находим коэффициенты (3.2) граничных задач. Сначала определим  $F(x, t)$  по формулам (2.16) и (3.1)

$$F(x, t) = \frac{1}{2a^2\pi} \sin ax \sin at - \frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{t}{2} \quad (3.4)$$

Затем, подставляя (3.4) в интегральное уравнение (2.15), получим

$$K(x, t) = -\frac{\sin at}{2a\pi} \varphi(x, a) + \frac{1}{\pi} \varphi(x, \frac{1}{2}) \sin \frac{t}{2}, \quad (3.5)$$

где

$$\varphi(x, a) = \frac{1}{a} (\sin ax + \int_0^x K(x, s) \sin as ds), \quad \varphi(x, \frac{1}{2}) = 2 \left( \sin \frac{x}{2} + \int_0^x K(x, s) \sin \frac{s}{2} ds \right). \quad (3.6)$$

Подставляя выражение (3.5) в формуле (3.6), имеем

$$\varphi(x, a) = \frac{1}{a} (\sin ax - \frac{1}{2a\pi} \varphi(x, a) \int_0^x \sin^2 as ds + \frac{1}{\pi} \varphi(x, \frac{1}{2}) \int_0^x \sin as \sin \frac{s}{2} ds), \quad (3.7)$$

$$\varphi(x, \frac{1}{2}) = 2(\sin \frac{x}{2} - \frac{\varphi(x, a)}{2a\pi} \int_0^x \sin as \sin \frac{s}{2} ds + \frac{1}{\pi} \varphi(x, \frac{1}{2}) \int_0^x \sin^2 \frac{s}{2} ds), \quad (3.8)$$

$$\varphi(x, a) = \frac{(1 - I_3) \frac{\sin ax}{a} + 2I_2 \sin \frac{x}{2}}{(1 + I_1)(1 - I_3) + I_2^2}, \quad \varphi(x, \frac{1}{2}) = \frac{2(1 + I_1) \sin \frac{x}{2} - I_2 \frac{\sin ax}{a}}{(1 + I_1)(1 - I_3) + I_2^2}. \quad (3.9)$$

$$\text{Здесь } I_1 = \frac{1}{2a^2\pi} \int_0^x \sin^2 as ds, \quad I_2 = \frac{1}{a\pi} \int_0^x \sin as \sin \frac{s}{2} ds, \quad I_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin^2 \frac{s}{2} ds.$$

Дифференцируя (3.7) и (3.8) по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi'(x, a) &= \frac{(1 - I_3)(F(x) \cos ax - \frac{f_1(x) \sin^2 ax}{2a^2\pi} + \frac{f_2(x)}{a\pi} \sin ax \sin \frac{x}{2})}{F^2(x)} + \\ &+ \frac{I_2(F(x) \cos \frac{x}{2} - \frac{f_1(x)}{a\pi} \sin ax \sin \frac{x}{2} + \frac{2f_2(x)}{\pi} \sin^2 \frac{x}{2})}{F^2(x)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \frac{1}{2}) &= \frac{(1 + I_1)(F(x) \cos \frac{x}{2} - \frac{f_1(x)}{a\pi} \sin ax \sin \frac{x}{2} + \frac{2f_2(x)}{\pi} \sin^2 \frac{x}{2})}{F^2(x)} - \\ &- \frac{I_2(F(x) \cos ax - \frac{f_1(x) \sin^2 ax}{2a^2\pi} + \frac{f_2(x)}{a\pi} \sin ax \sin \frac{x}{2})}{F^2(x)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{Здесь } F(x) = (1 + I_1)(1 - I_3) + I_2^2, \quad f_1(x) = (1 - I_3) \frac{\sin ax}{a} + 2I_2 \sin \frac{x}{2},$$

$$f_2(x) = 2(1 + I_1) \sin \frac{x}{2} - I_2 \frac{\sin ax}{a}.$$

Наконец, в вышеуказанных формулах (3.9) и (3.10), полагая  $x = \pi$ , из второго граничного условия (3.3) находим

$$H(a) = -\frac{\varphi'(\pi, a)}{\varphi(\pi, a)} = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{4a^2 - 1}{2\cos a\pi} \left(1 + \frac{\pi - \frac{1}{2}\sin 2a\pi}{4a^2\pi} + \frac{2\sin 2a\pi}{\pi a(4a^2 - 1)}\right). \quad (3.12)$$

Из формулы (2.19), (3.9), (3.10) и (3.11), определяем  $q(x, a)$ :

$$\begin{aligned} q(x, a) = & -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\left( \frac{\sin(a + \frac{1}{2})x}{a\pi(2a+1)} - \frac{\sin(a - \frac{1}{2})x}{a\pi(2a-1)} \right) \left( \sin(a + \frac{1}{2})x + \sin \frac{x}{2} \cos ax + \frac{\sin ax \cos \frac{x}{2}}{2a} \right)}{\left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right) \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right) + \left( \frac{\sin(a - \frac{1}{2})x}{a\pi(2a-1)} - \frac{\sin(a + \frac{1}{2})x}{a\pi(2a+1)} \right)^2} + \right. \\ & + \frac{\left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right) \sin x - \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right) \frac{\sin 2ax}{2a}}{\left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right) \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right) + \left( \frac{\sin(a - \frac{1}{2})x}{a\pi(2a-1)} - \frac{\sin(a + \frac{1}{2})x}{a\pi(2a+1)} \right)^2} \Bigg] - \\ & - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\frac{\sin^4 ax}{4a^4\pi} \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right)^2 + \frac{4}{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right)^2}{\left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right) \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right) + \left( \frac{\sin(a - \frac{1}{2})x}{a\pi(2a-1)} - \frac{\sin(a + \frac{1}{2})x}{a\pi(2a+1)} \right)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\frac{2 \sin^2 ax \sin^2 \frac{x}{2}}{a^2\pi} \left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right) \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right)}{\left( 1 + \frac{x}{4a^2\pi} - \frac{\sin 2ax}{8a^3\pi} \right) \left( 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi} \right) + \left( \frac{\sin(a - \frac{1}{2})x}{a\pi(2a-1)} - \frac{\sin(a + \frac{1}{2})x}{a\pi(2a+1)} \right)^2} \right]. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Таким образом, мы построили семейство граничных задач Штурма-Лиувилля, собственные значения которых совпадают с заданными числами

$$\sigma(L(a)) = \left\{ \lambda_0 = a^2, a \in [0; \frac{3}{2}) \setminus \{\frac{1}{2}\}, \lambda_n = (n + 1/2)^2, n \geq 1 \right\}.$$

## Литература

1. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка.//Труды ММО, 1952, т. 1, с.327-420.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. //Изв. АН СССР, сер. матем. 1951, т. 15, №4, с. 309-360.
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
4. Isaacson E.L., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem I. // Comm. Pure Appl. Math, 1983, v. 36, p.767-783.
5. Isaacson E.L., McKean H.P., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem II. // Comm. Pure Appl. Math. 1984, v. 37, p. 1-11.
6. Dahlberg B.E., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem III. // Comm. Pure Appl. Math, 1984, v.37, p. 255-267.
7. Poschel J., Trubowitz E. Inverse spectral theory. // Academic Press, New York, 1987.
8. Jodeit M., Levitan B.M. The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation. // Advances in differential equations. 1997, v.2, № 2, p. 297-318.
9. Алимов Ш. А. О работах А.Н.Тихонова по обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля. УМН, 6(192),1976, стр.84-88.
10. Амбарцумян В. А. Über eine Frage Eigenwerttheorie. *Zeitschr. für Physik*, 53,1929, pp.690-695
11. Мирзаев О. Э., Хасанов А. Б. О семействе изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля. *Уфимский математический журнал*, 12(2), 2020, стр. 28-34.
12. Мирзаев О.Э., Муродов Ф.М. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный вестник СамГУ, 2020, № 3(121), 50-55.
13. Мирзаев О.Э. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный вестник СамГУ, 2020, № 5(123), 60-64.
14. Мирзаев О.Э., Хасанов А.Б.. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. ДАН РУз. 2020, № 3, 3-9.
15. Мирзаев О.Э. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. *Чебышевский сборник*. 2023;24(1):104-113.  
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113>
16. Мирзаев О.Э., Сувонова М. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИРОВАНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ, СТАБИЛИЗАЦИЯ, ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. Материалы IX Международной научно-практической конференции 24-25 апреля 2023 г. Елец. Стр. 129-134.
17. Мирзаев О.Э., Сувонова М. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ II международный форум 9 ноября 2022 г. Санкт-Петербург. Стр. 23-27.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НАГРУЖЕННЫМ ЧЛЕНОМ

Муминов У.Б.

Самаркандинский государственный университет им.Ш.Рашидова, Самарканд,  
Узбекистан

e-mail: umuminov153@gmail.com,

**Аннотация.** Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с нагруженными членами в классе периодических бесконечнозонных функций. Выводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициенты которого является решением задачи Коши для НУШ с дополнительным членом. В работе предлагается алгоритм построения решения задачи Коши, с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с нагруженными членами вида

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с нагруженными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + p(x_0, t)q \\ q_t = p_{xx} + 2p(p^2 + q^2) - p(x_0, t)p \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$p(x, t)|_{t=0} = p_0(x), q(x, t)|_{t=0} = q_0(x) \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных  $\pi$  - периодических по  $x$  функций:

$$\begin{aligned} p(x + \pi, t) &= p(x, t), q(x + \pi, t) = q(x, t), x \in R, t \geq 0, \\ p(x, t), q(x, t) &\in C_x^2(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

В данной статье предлагается алгоритм построения решения  $p(x, t), q(x, t), x \in R, t > 0$ , задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y = B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x, \tau \in R, \quad t > 0 \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  и  $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  решения уравнения (4) с начальными условиями  $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$  и  $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$ . Функция  $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$  называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Корни уравнений  $\Delta(\lambda, \tau, t) = \pm 2$  обозначим через  $\lambda_n(\tau, t)$ , она совпадает с собственными значениями периодической и антiperiodической задачи  $(0, \tau, t) = \pm y(0, \tau, t)$  для уравнения (4).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, y_1(\pi, \tau, t) = 0 \quad (5)$$

для уравнения (4). Первая компонента вектор-функции  $s(x, \lambda, \tau, t)$  удовлетворяет первому граничному условию (5), подставляя его во второе граничное условие, получим  $s_1(\pi, \lambda, \tau, t)$ . Решая его относительно  $\lambda$ , находим собственные значения  $\xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in Z$ , задачи Дирихле (4), (5). Обозначим через  $\sigma_n(\tau, t)$  знак:  $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$

Множество  $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z\}$ , называется спектральными параметрами, а набор  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z\}$ - спектральными данными оператора  $L(\tau, t)$ . Восстановление коэффициента  $\Omega(x, t)$  оператора  $L(\tau, t)$  по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент  $\Omega(x, t)$ - оператора  $L(\tau, t)$  определяется однозначно по спектральным данным  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z\}$ . Теперь с помощью начальной функции  $q_0(x + \tau), \tau \in R$ , построим оператор Дирака вида  $L(\tau, 0)y = \lambda y, x, \tau \in R$ . Решая прямую задачу, находим спектральные данные  $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau, t), \sigma_n^0(\tau, t), n \in Z\}$  оператора  $L(\tau, t)$ . Отсюда следует, что

$$\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau), n \in Z.$$

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

**Теорема.** Пусть пара  $p(x, t), q(x, t), x, \tau \in R, t > 0$ , является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z\}$  оператора  $L(\tau, t)$  удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned}
1) \frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial t} &= 0, \lambda_n(\tau, 0) = \lambda_n, n \in Z, \\
2) \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} &= 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + [p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)]^2 + \\
&+ \xi_n^2(\tau, t) - \frac{1}{2} p(x_0, t)
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
h_n(\xi(\tau, t)) &= \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2k-1})(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))} \times \\
&\times \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Знаки,  $\sigma_n(\tau, t) = sign\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\} = \pm 1, n \in Z$  меняются при каждом столкновении точки  $\xi_n(\tau, t), n \in Z$ , с границами своей лакуны  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ . Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t) \Big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t) \Big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z \tag{8}$$

**Следствие 1.** Учитывая формулы следов

$$\begin{aligned}
p(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \\
q(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)) \\
q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

систему дифференциальных уравнений (6) можно переписать в замкнутой форме.

**Следствие 2.** Теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные  $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$ , оператора  $L(\tau, 0)$  соответствующие коэффициентам  $p_0(x + \tau), q_0(x + \tau), \tau \in R$ . Обозначим спектральные данные оператора  $L(\tau, t)$  через  $\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z$ . Теперь в системе уравнения (6) с начальным условием (8) положим  $t = x_0$ . Решая полученную задачу Коши, находим  $\xi_n(x_0, t), \sigma_n(x_0, t), n \in Z$ . Затем из формулы следов (9), определим функции  $p(x_0, t)$ . После этого подставляем эти данные в систему уравнений (6) и решая задачу Коши (6)-(7) при произвольном значении  $t$ , находим  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z$ . Из формул следов (9), определим  $p(\tau, t)$  и  $q(\tau, t)$ , т.е. решение задачи (1)-(3).

### Список литературы

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.
2. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера// Докл. АН УССР. Сер.А., 1976, №11, 965-968.
3. Смирнов А.О. Эллиптические по  $t$  решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.
4. Хасанов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199, №1, с.60-68.
5. Домрин А.В. О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.
6. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. //Функц.анализ и его прил. – Москва, 1975.т.9.вып.3. с.41-51.
7. Муминов У.Б., Хасанов А.Б., Интегрирование дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членами// ТМФ, 211:1 (2022), 84-104.
8. Муминов У.Б., Хасанов А.Б., Задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом// Математические Труды. 2022, т. 25, №1, с. 102-133.

**О точнее решения задача Радона**  
**М.Э.Муминов, З.Х.Очилов**  
**Самаркандинский государственный университет**  
**mmuminov@mail.ru, zarifjonochoilov@mail.ru**

Проблемы интегральной геометрии естественным образом возникают при исследовании многих математических моделей в таких широко прикладных областях, как сейсморазведка, интерпретация геофизических и аэрокосмических наблюдений, различные процессы, описываемые кинетическими уравнениями и т. д. Разработанный здесь аппарат является математической основой вычислительной томографии. Отображение заданной функции на множество ее линейных интегралов называется преобразованием Радона (на плоскости) [1].

Преобразование Радона на евклидовой плоскости называется интегральное преобразование, относящее функции  $f$  на плоскости её интегралы по всевозможным прямым (относительно евклидовой длины).

В работах [3-10] изучены новые классы задачи интегральной геометрии введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

Рассмотрим задачу Радона для финитных функций двух переменных. Пусть  $u(x, y)$  – непрерывная функция двух переменных, равная нулю вне следующего эллипса

$$D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Требуется определить функцию  $u$ , если известны интегралы от этой функции по всем прямым, пересекающим  $D$ .

Укажем представления задачи Радона в виде задач решения линейных операторных уравнений, соответствующих классическим формулам параметризации систем прямых на плоскости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x + s \cos \alpha, y + s \sin \alpha) ds = f(x, y, \alpha). \quad (1)$$

Так как интегралы от функции  $u$  по прямым, не пересекающим  $D$ , равны нулю, мы можем считать функции  $f$  заданными для всех значений переменных  $(x, y, \alpha)$ . В правых частях уравнений (1), стоят функция трех переменных, однако они определяются через функции двух переменных. Функция  $f$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f_x' \cos \alpha + f_y' \sin \alpha = 0,$$

откуда следует

$$f(x, y, \alpha) = f_0(\sin \alpha \cdot x - \cos \alpha \cdot y, \alpha).$$

В следующую теорему приводится точнее решение задачи Радона.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  непрерывная функция из  $L_2(D)$  и имеет непрерывное частное производные до первого порядка по переменной  $(x, y)$  из класса  $L_2(D)$ . Тогда функция

$$u(x, y) = \frac{f_0(x \sin \alpha - y \cos \alpha)(b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)}{2ab\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2}} \quad (2)$$

является точное решения задача Радона.

### *Литература*

1. M.M. Lavrentyev, L.Ya. Savelyev, Operator theory and ill-posed problems, Publishing house of the Institute of Mathematics, Moscow, 2010.
2. S. Helgason, Integral Geometry and Radon Transform, Springer, New York, 2011.
3. D.S. Anikonov, Ya.A. Kipriyanov, An underdetermined problem of integral geometry for the generalized Radon transform, J. Appl. Industr. Math., 10 (1) -2016, 21--28.
4. A.X.Begmatov, Z.X.Ochilov Problems of integral geometry with a discontinuous weight function // Doklady RAS, - 429 (3), 2009, 295--297.
5. A.X.Begmatov, Z.X.Ochilov D'Alembert Mappings for a Class of Symmetric Domains // Doklady RAS, - 427 (3), 2009, 506--507.
6. Очилов З.Х. Задачи интегральной геометрии на плоскости и отображения Даламбера для симметричных областей // Узб. мат. жур.-Ташкент, 2011.-№3.- С.136-
7. Akr.H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type // Mathematics and Statistics, 2015.-№3- С.113-120.
8. Ochilov Z.X. The uniqueness of solution problems of integral geometry a family of parabolas with a weight function of a special type. *Uzbek Mathematical Journal*, 2020. №3, 107-116.
9. Ochilov Z. Kh. Existence of solutions to problems of integral geometry by a family of parabolas with a weight function of a special form. Bull. Inst. Math., 2021. Vol.4, №4, pp. 28-33.
10. M.I. Muminov, Z.Kh. Ochilov An inversion formula for the weighted Radon transform along family of cones // Nanosystems:Phys. Chem. Math., -14 (1), 2023, 1--6.

### **О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана с кватернионным параметром Рустамов С.У.**

*Навоинский государственный педагогический институт  
e-mail: Sohibjon\_17@mail.ru*

**Аннотация.** В работе получена формула продолжения для обобщенной системы Коши-Римана с кватернионным параметром в ограниченной области.

**Ключевые слова.** Система Коши-Римана, кватернион, некорректная задача, интегральная формула Коши.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  задано ограниченная односвязная область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  состоящей из компактной связной части  $T$  плоскости  $y_3 = 0$  и гладкого куска поверхности  $S$  Ляпунова, лежащей в полупространстве  $y_3 \geq 0$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega = S \cup T$ ,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2, 0), \quad y' = (y_1, y_2, 0) \in R^2,$$

$$s = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = |y - x| = s + (y_3 - x_3)^2.$$

Рассмотрим обобщенная система Коши-Римана с кватернионным параметром [1]-[2]

$$\alpha_0 f_0 - \operatorname{div} f - \langle f, \vec{\alpha} \rangle = 0, \quad \operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} f + [f \times \vec{\alpha}] + f_0 \vec{\alpha} + \alpha_0 f = 0 \quad (1)$$

где  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\alpha_k \in C$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ;  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $f_0$  - векторная и скалярная

функции соответственно. На кватернионнозначных функциях вида  $F(x) = \sum_{k=0}^3 f_k(x) i_k$

,  $x \in \Omega \subset R^3$ ,  $f_k(x) \in C^1(\Omega)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  определим оператор  $D_\alpha F := (D + M^\alpha)F$ , где

$D := \sum_{k=1}^3 i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  - оператор, обобщающий двумерный оператор Коши-Римана (см.

например [3]);  $M^\alpha F := F\alpha$ . Тогда уравнение  $D_\alpha F = 0$  является эквивалентной записью системы (1).

**Задача 1.** Требуется определить регулярное решение  $F(y)$  системы (2.2) в области  $\Omega$ , исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности  $S$ :

$$F(y)|_S = g(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

где  $g(y) = \sum_{k=0}^3 g_k(y) i_k$  - заданная непрерывная кватернионно-значная функция.

Когда  $\alpha \in C$ , т.е.  $\alpha \equiv \alpha_0$ , фундаментальное решение  $G_\alpha$  оператора  $D_\alpha$  найдено по формуле (ср. [3] с. 76)

$$G_\alpha(x) = -[D_{-\alpha} h_\alpha](x) = h_\alpha(\alpha - x|x|^{-2} + i\alpha x|x|^{-1}), \quad (3)$$

где  $h_\alpha(x) := -(4\pi|x|)^{-1} e^{-i\alpha|x|}$  - фундаментальное решение оператора Гельмгольца  $\Delta + \alpha^2 I$  (см. например, [4]).

Обозначим  $P^+ F := (2\gamma)^{-1} F(\gamma + \hat{\alpha})$ ,  $P^- F := (2\gamma)^{-1} F(\gamma - \hat{\alpha})$ .

Тогда справедливо следующее непосредственно проверяемое равенство:

$$D_\alpha F = D_\xi P^+ F + D_\zeta P^- F \quad (4)$$

где  $\xi = \alpha_0 + \gamma$ ,  $\zeta = \alpha_0 - \gamma$ ,  $\gamma \in C$ ,  $\gamma^2 = \hat{\alpha}^2$ .

Заметим, что операторы  $P^+$  и  $P^-$  являются взаимно дополнительными проекторами, коммитирующими с операторами  $D_\xi$  и  $D_\zeta$ .

**Определение 1.** Функция

$$G_\alpha := \begin{cases} P^+ G_\xi + P^- G_\zeta; & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [G_{\alpha_0}] \hat{\alpha}, & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha} = 0, \\ P^+ G_{2\alpha_0} + P^- G_0, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + h_0 \alpha, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

является фундаментальным решением оператора  $D_\alpha$ .

Рассмотрим

$$K_\alpha := P^+ K_\xi + P^- K_\zeta = -\frac{(\gamma + \hat{\alpha})}{2\gamma} [D_{-\xi} \Phi_\xi](x) - \frac{(\gamma - \hat{\alpha})}{2\gamma} [D_{-\zeta} \Phi_\zeta](x) \quad (6)$$

$$\Phi_\xi(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \frac{K(i\sqrt{u^2+s} + y_3)}{i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3} \right] \frac{ch(\gamma + \hat{\alpha})u}{\sqrt{u^2+s}} du, \quad (7)$$

$$D_{-\xi} \Phi_\xi(x) = (D\Phi_\xi + \Phi_\xi \cdot \xi) = \sum_{k=1}^3 i_k \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x_k} + \Phi_\xi \cdot \xi, \quad (8)$$

При  $f \in \ker D_\alpha \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha \in Q$  справедливо интегральная формула Коши

$$F(x) = (K_\alpha F)(x), \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

**Определение 2.** Функцией Карлемана задачи (1), (2) называется функция  $M_\alpha^\sigma$ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1) \quad K_\alpha^\sigma(x, y) = G_\alpha(x, y) + N_\alpha^\sigma(x, y),$$

где  $\sigma$  – положительный числовой параметр, функция  $N_\alpha^\sigma(x, y)$  по переменной  $y$  удовлетворяет системе (1) всюду в области  $\Omega$ ,  $G_\alpha(x, y)$  – фундаментальных решений оператора  $D_\alpha$ ;

2)  $\int_T |K_\alpha^\sigma| dS_y \leq \varepsilon(\sigma)$  при фиксированном  $x \in \Omega$ , где  $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ ; здесь и далее

$|K_\alpha^\sigma|$  означает евклидову норму, где

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+ K_\xi F + P^- K_\zeta F, & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha} \neq 0, \\ K_{\alpha_0} F + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [K_{\alpha_0} F], & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ K_{2\alpha} F + P^- K_0 F, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 F - V_0 F \alpha, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$(K_\alpha F)(x) := - \int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y) n(y) F(y) dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \partial\Omega, \quad (11)$$

$$(V_\mu F)(x) := \int_{\partial\Omega} h_\mu(x-y) n(y) F(y) dS_y, \quad \mu \in C, \quad x \in R^3, \quad (12)$$

$n(y)$ - внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ .

Положим

$$F_\sigma(x) = (\mathfrak{J}_\alpha^\sigma F)(x) = - \int_S K_\alpha^\sigma(x-y) n(y) g(y) dS_y, \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

Справедливо

**Теорема.** Пусть  $F \in \ker D_\alpha \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha \in Q$ . На части  $T$  границы  $\partial\Omega$  удовлетворяет условию

$$|F(y)| \leq B, \quad (14)$$

где  $B$  – заданное положительное число. Тогда для любого  $x \in \Omega$  и  $\sigma > 0$  справедливо формула Карлемана

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} F_\sigma(x) = F(x)$$

### Литература

1. V.V.Kravchenko, M.V.Shapiro Integral representations for spatial models of mathematical physics // Pitman Research Notes in Mathematics Series, Addison Wesley Longman Limited 1996, 246 pp.

2. Кравченко В.В., Шапиро М.В. Об обобщенной системе уравнений Коши-Римана с кватернионным параметром // ДРАН, 1993, т. 329, №5. С.
3. Klaus Gürlebeck, Wolfgang Sprößig Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems – Basel; Boston; Berlin : Birkhäuser, 1990.
4. Б.С.Владимиров Уравнения математической физики. М.:Наука, 1988. 512 с.

**Представление постоянного магнитного поля в виде аналога  
обобщенного интеграла типа Коши в ограниченной области**

**<sup>1</sup>Сатторов Э.Н., <sup>2</sup>Актамов Х.С.**

*e-mail: Sattorov-e@rambler.ru*

*<sup>1,2</sup> Узбекско-Финский педагогический институт*

Пусть  $R^3$  ( $n \geq 3$ ) – вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2), \quad y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = |y - x|^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2.$$

Рассмотрим трехмерную область  $\Omega$ , ограниченную с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  и заполненную намагниченными массами с интенсивностью намагничения (вектором намагниченности)  $\vec{I}(y) = (I_1(y), I_2(y), I_3(y))$ .

Будем предполагать, что  $\vec{I}(y)$  – непрерывно дифференцируемая функция всюду в области  $\Omega$  вплоть до ее границы моментов соответствующего объемного поляризованного источника при этом, как известно, равна

$$\vec{m}(y) = 4\pi \vec{I}(y). \quad (1)$$

Для магнитного потенциала справедливо формула как сумме простого объемного источника и простого слоя:

$$\vec{W}(y) = - \iint_{\partial\Omega} \frac{\vec{I}(y) \cdot \vec{n}}{|y - x|} dS_y + \iiint_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \vec{I}(y) \cdot \vec{n}}{|y - x|} dS_y. \quad (2)$$

Магнитное поле можно представить в виде [1, с.170]:

$$\vec{H}(y) = - \iint_{\partial\Omega} (\vec{I}(y) \cdot \vec{n}) \operatorname{grad}_x \frac{1}{|y - x|} dS_y + \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{I}(y) \operatorname{grad}_x \frac{1}{|y - x|} dS_y \quad (3)$$

Формула (3) справедливо при замене фундаментальное решение уравнения Лапласа на обобщенной фундаментальной решение, транспонированной системы [2]–[4], то интегральная формула Коши (11) остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на функцию Карлемана

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2 + \sigma\alpha^2 - \sigma y_3^2} \cdot \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(u, x, u)}{u^2 + r^2} e^{-\sigma u^2} \cos(ku) du, \quad (4)$$

где

$$\varphi_\sigma(u, x, y) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3.$$

### Литература

1. Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука. -1984. 326 с.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. – 92с.
3. Ш.Ярмухамедов Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв.АН УзССР. – 1980. – №6. – серия физико-математических наук, С. 34-40.
4. Сатторов Э. Н. О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана в пространстве // Математически заметки – 2009. – Т.85. –вып. 5. –С. 768-781.

## Регуляризация решения задачи Коши для гравитационного поля в ограниченной области

<sup>1</sup>Сатторов Э.Н., <sup>2</sup>Пулатов О.У.

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru oybekpulatov1987@gmail.com

<sup>1,2</sup> Узбекско-Финский педагогический институт

В ограниченной области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ , вещественном евклидовом пространстве  $R^3$  ( $n \geq 3$ ) задано непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ ,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2), \quad y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = |y - x|^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2.$$

При изучении геофизических полей в качестве области существования векторного поля  $\vec{F}$  обычно рассматривается все безграничное пространство, а источники и вихри поля полагают локализованными в некоторой конечной области  $\Omega$ .

Гравитационное поле  $\vec{g}(y)$  техмерного распределения масс с плотностью  $\rho(r)$  удовлетворяет уравнениям [1, с.154]

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\gamma\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{g} = 0, \quad (1)$$

где  $\gamma$ -универсальная гравитационная постоянная

Таким образом, плотность источников гравитационного поля

$$q = -4\pi\gamma\rho \quad (2)$$

Из (1) следует, что вне масс гравитационное поле – лапласово. Оно выражается через гравитационный потенциал  $U$  ( $\vec{g} = \operatorname{grad} U$ ), удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho \quad (3)$$

В данной работе при вычисление гравитационного поля однородного тела  $\Omega$ , заполненного массами плотности  $\rho_0$  и ограниченного кусочно – гладкой поверхностью  $S$  воспользуемся трехмерной формулой Помпей [1]

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} + (\vec{n} \times \vec{F}) \times \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} \right\} dS_y + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} dv = \begin{cases} \vec{F}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \bar{\Omega} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

предварительно переписав ее в виде

$$\begin{aligned} C^s(x, \vec{F}(y)) + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} dv &= \begin{cases} 0, & x \notin \bar{\Omega}, \\ \vec{F}(x), & x \in \Omega \end{cases} \\ C^s(x, \vec{F}(y)) &= \operatorname{grad}' \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{q^s}{|y-x|} dS_y - \frac{1}{4\pi} \iint_S m \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} dS_y \right\}, \end{aligned}$$

$$q^s = -(n \cdot \vec{F}), \quad m^s = -F q^s = -(n \cdot \vec{F}), \quad m^s = -F \vec{n}.$$

Положим в (7)

$$\vec{F} = \left( \frac{4\pi}{3} \right) \gamma \rho_0 \vec{r}. \quad (8)$$

Тогда  $\operatorname{div} \vec{F} = 4\pi\gamma\rho_0$  и (7) можно записать так:

$$\vec{C}^s(x, \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 y) + \gamma \iiint_D \rho_o \operatorname{grad} \frac{1}{|y-x|} dv = \begin{cases} 0, & x \notin \bar{\Omega}, \\ \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 x, & x \in \Omega \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что объемный интеграл в левой части (9) есть (со знаком минус) гравитационное поле  $\vec{g}(x)$  однородного тела  $\Omega$ , следовательно,

$$\vec{g}(x) = \begin{cases} \vec{C}^s(r'; \frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 y), & x \notin \bar{\Omega}, \\ -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 y + \frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 y(x; \frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 y), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

$$C^s(x, \frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 x) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 x, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (11)$$

Поскольку функция Карлемана-Ярмухамедова отличается от фундаментальных решений на решение, транспонированной системы, то интегральная формула Коши (11) остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на функцию Карлемана [2] – [4]:

$$2\pi^2 e^{\sigma y_3^2 + \sigma\alpha^2 - \sigma y_3^2} \cdot \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(u, x, u)}{u^2 + r^2} e^{-\sigma u^2} \cos(ku) du, \quad (12)$$

где

$$\varphi_\sigma(u, x, y) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3.$$

### Литература

1. Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука. -1984. 326 с.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. – 92с.
3. Ш.Ярмухамедов Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв.АН УзССР. – 1980. – №6. – серия физико-математических наук, С. 34-40.
4. Сатторов Э. Н. О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана в пространстве // Математически заметки – 2009. – Т.85. –вып. 5. –С. 768-781.

### Решение задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений с дополнительным членом

**Собиров Ш.К<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан.

e-mail: shexzod1994@mail.ru

В данной работе рассматривается следующая система интегро-дифференциальных уравнений

$$u_t + p(t)(6u^2 u_x + u_{xxx}) + q(t)u_x = \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k(t)(f_{k1}g_{k1} - f_{k2}g_{k2}) + i\chi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_1^2 - \phi_2^2) d\eta,$$

$$L(t)\phi = \eta\phi, L(t)f_k = \xi_k f_k, L(t)g_k = \xi_k g_k \quad (1)$$

где  $p(t), q(t), \chi(t)$  и  $\alpha_k(t)$   $k = \overline{1, 2N}$  заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^1, \quad (2)$$

где начальная функция  $u_0(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty; \quad (3)$$

2) Оператор  $L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$  имеет ровно  $2N$  простых собственных значений  $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$  и не имеет спектральных особенностей.

В рассматриваемой задаче  $f_k = (f_{k1}, f_{k2})^T$  собственная функция оператора  $L(t)$ , соответствующая собственному значению  $\xi_k$ , а  $g_k = (g_{k1}, g_{k2})^T$  решение уравнения  $Lg_k = \xi_k g_k$ , для которого справедливо

$$W\{f_k, g_k\} \equiv f_{k1}g_{k2} - f_{k2}g_{k1} = \omega_k(t) \neq 0, \quad k = \overline{1, 2N}, \quad (4)$$

где  $\omega_k(t)$  изначально заданные непрерывные функции  $t$ , удовлетворяющие условиям

$$\omega_n(t) = -\omega_k(t) \text{ для } \xi_n = -\xi_k, \quad \operatorname{Re} \left\{ \int_0^t \omega_k(\tau) d\tau \right\} > -\operatorname{Im} \{ \xi_k(0) \}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5)$$

при всех неотрицательных значениях  $t$ .

Для определенности будем считать, что в сумме, входящей в правую часть (1), слагаемые с  $\operatorname{Im} \xi_k > 0$ ,  $k = \overline{1, N}$  стоят первыми и  $\phi = (\phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t))^T$  имеет следующую асимптотику для  $x \rightarrow \infty$ .

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} h(\eta, t) e^{-i\eta x} \\ h(\eta, t) e^{i\eta x} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $h(\eta, t) = h(-\eta, t)$  непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\eta, t)|^2 d\eta < \infty \text{ при } t \geq 0. \quad (7)$$

Предположим, что функция  $u(x, t)$  имеет требуемую гладкость и достаточно быстро стремится к своим пределам при  $x \rightarrow \pm\infty$ , т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( (1+|x|)|u(x, t)| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty, \quad k = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Основная цель работы - получить представления для решения  $u(x, t), f_k, g_k, k = \overline{1, 2N}$ ,  $\phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t)$  задачи (1)-(8) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора  $L(t)$ .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** Если функции  $u(x, t), f_k, g_k, k = \overline{1, N}$ ,  $\phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t)$  являются решением задачи (1) – (8), то данные рассеяния оператора  $L(t)$  с потенциалом  $u(x, t)$  удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= \left[ 8i\xi^3 p(t) + \sum_{k=1}^N i\alpha_k(t)\omega_k(t) \left( \frac{1}{\xi + \xi_k} + \frac{1}{\xi - \xi_k} \right) - 2i\xi q(t) \right] r^+ + \\ &\quad + 2\chi(t)r^+ \left[ -\pi i h^2(\xi, t) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^2(\eta, t)}{\eta + \xi} d\eta \right], (\text{Im } \xi = 0). \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= i\alpha_n(t)\omega_n(t), \quad n = \overline{1, N}, \\ \frac{dC_n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) + i\alpha_n(t)\beta_n(t)\omega_n(t) \right) C_n + \\ &\quad + \left( -2i\xi_n q(t) + 2\chi(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta, t)}{(1 + r(\eta)r(-\eta))(\eta + \xi_n)} d\eta \right) C_n, \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(8).

### **Литература**

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys. Soc. Japan. 1972, vol. 32, pp. 1681.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 697 с.
3. Khasanov A. B, Hoitmetov U. A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2021, vol.38, pp. 19–35.
4. Хоитметов У.А, Собиров Ш. К. Интегрирование нагруженного уравнения мКдФ с источником в классе быстроубывающих функций. Математические заметки СВФУ. 2023, Том 30, № 2, стр. 75-91.

### **Прямая задача для двумерного волнового уравнения с дробным производным по времени Римана-Лиувилля**

Суяров Т. Р. <sup>1,2</sup>,

<sup>1</sup> Бухарский филиал Института математики имени В.И. Романовского в Академии наук Республики Узбекистан;

<sup>2</sup> Бухарский государственный университет; ул. М.Икбала 11, Бухара 200100, Узбекистан. Email: tsuyarov007@gmail.com

#### **Введение**

В области  $\Omega := D \times (0, T]$ ,  $D := \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$  рассмотрим волновое уравнение с дробным временем

$$(D_{0+t}^\alpha u)(x, y, t) - \Delta u + q(t)u(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$I_{0+t}^{(2-\alpha)} u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( I_{0+t}^{(2-\alpha)} u \right) (x, y, t) \Big|_{t=0} = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t), \quad u_x(1, y, t) = 0, \quad (y, t) \in [0, 1] \times [0, T], \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]. \quad (4)$$

Здесь дробно-дифференциальный оператор Римана-Лиувилля  $D_{0+,t}^\alpha$  порядка  $1 < \alpha < 2$  определяется следующим образом [[1], с. 69-72, [2], с. 62-65]

$$D_{0+,t}^\alpha u(\cdot, \cdot, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( I_{0+,t}^{(2-\alpha)} u \right) (\cdot, \cdot, t),$$

$$I_{0+,t}^\gamma u(x, y, t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u(x, y, \tau)}{(t - \tau)^{1-\gamma}} d\tau, \gamma \in (0, 1),$$

- дробный интеграл Римана-Лиувилля от функции  $u(x, y, t)$  по  $t$  [1, с. 69-72],  $\Gamma(\cdot)$  - гамма-функция Эйлера,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Везде в этой статье функции  $f(x, y, t), \varphi_1(xy), \varphi_2(x, y)$  являются известными функциями .

Поставим обратную задачу следующим образом: найти функцию  $q(t) \in C[0, T]$  в (1), если решение уравнения начально-краевая задача (1)-(4) удовлетворяет условию:

$$\int_0^1 \int_0^1 w(x, y) u(x, y, t) dx dy = h(t), 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

где  $w(x, y), h(t)$  - известные функции .

Предположим, что заданные в этой статье функции  $\varphi_1, \varphi_2, f, w$  и  $h$  удовлетворяют следующим условиям:

A1)  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in C^3([0,1] \times [0,1]), \{\varphi_1^{(4)}, \varphi_2^{(4)}\} \in L_2([0,1] \times [0,1]); \varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0, \varphi_x(0, y) = \varphi_x(1, y) = 0, \varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(1, y) = 0, \varphi(x, 0) = \varphi(x, 1) = 0, \varphi_y(x, 0) = \varphi_y(x, 1) = 0, \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, 1) = 0.$

A2)  $f(x, y, \cdot) \in C[0, T], t \in [0, T], f(\cdot, \cdot, t) \in C^3([0,1] \times [0,1]), f^{(4)}(\cdot, \cdot, t) \in L_2([0,1] \times [0,1]) f(0, y, t) = f(1, y, t) = 0, f_x(0, y, t) = f_x(1, y, t) = 0, f_{xx}(0, y, t) = f_{xx}(1, y, t) = 0, f(x, 0, t) = f(x, 1, t) = 0, f_y(x, 0, t) = f_y(x, 1, t) = 0, f_{yy}(x, 0, t) = f_{yy}(x, 1, t) = 0.$

A3)  $(x, y) \in C^2([0,1] \times [0,1]); w(0, y) = 0, w_x(0, y) = w_x(1, y) = 0, w_{xx}(0, y) = w_{xx}(1, y) = 0$ , and  $w(x, 1) = w(x, 0) = 0.$

A4)  $(D_{0+,t}^\alpha h)(t) \in C[0, T], |h(t)| \geq h_0 > 0, h_0$  заданное число:

$$\int_0^1 \int_0^1 w(x, y) \varphi_1(x, y) dx dy = \left( I_{0+,t}^{(2-\alpha)} h \right) (t)_{t=0+},$$

$$\int_0^1 \int_0^1 w(x, y) \varphi_2(x, y) dx dy = \frac{\partial}{\partial t} \left( I_{0+,t}^{(2-\alpha)} h \right) (t)_{t=0+}.$$

Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн широко исследованы. Нелинейные обратные коэффициентные задачи с различными типами условий переопределения часто встречаются в литературе [3]. В работе [4] изучалась обратные задачи определения неизвестных коэффициентов в задаче Коши для дробного уравнения волновой диффузии. Доказаны локальное существование и глобальная единственность, получены оценки условной устойчивости. В этой работе мы получаем следующую теорему

**Теорема 1.** Пусть выполнены А1)-А4). Тогда существует число  $T^* \in (0, T)$  такое, что существует единственное решение  $q(t) \in C[0, T^*]$  обратной задачи (1)-(5).

**Заключение.** В данной работе исследует с разрешимость нелинейной обратной задачи для двумерного волнового уравнения с дробной производной по времени Римана-Лиувилля с начальными нелокальными граничными и интегральными условиями переопределения. Нелокальные граничные условия, дробная производная Римана-Лиувилля и контрольный коэффициент усложнили нашу задачу. Условия существования, единственности и непрерывной зависимости от данных задачи установлены с помощью метода Фурье с некоторой биортогональной системой, связанной с ней дробной производной Римана-Лиувилля, содержащей начальные данные, и банаховой теоремы о неподвижной точке для произведения Банаха пространства.

### Литература

- 1.Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam-Tok yo,(2006).
- 2.Podlubny I. Fractional Differential Equations, of Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New York, NY, USA, 1999.
3. Дурдиев Д.К. О единственности определения ядра интегро-дифференциального уравнения параболического типа // Вестник Самарского

## ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

**Ф.Р. Турсунов, г. Самарканда, СамГУ**

**f**

В статье изучается задача продолжение решения задачи Коши для уравнения Лапласа в области  $G$  по ее известным значениям на гладкой части  $S$  границы  $\partial G$ . Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданными данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения. Также получены оценки отклонения производных первого порядка приближённого решения от производных точного решения в зависимости от расстояния до плоской части границы.

**u**

Пусть  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$  точки двумерного Евклидового пространства и

$G$  - неограниченная область в  $R^2$  лежащая внутри полосы  $0 < y_2 < h$ ,  $h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$

граница, которой состоит из прямой  $y_2 = 0$  и некоторой кривой  $S: y_2 = F(y_1)$  удовлетворяющей условиям  $0 < F(y_1) < h, |F'(y_1)| < M < \infty$ . Положим  $\bar{G} = G \cup \partial G, \partial G = S \cup T$ .

Предположим, что для некоторого  $b_0 > 0$  выполняется условия:

$$\int_{\partial G} \exp\{-b_0 ch\rho_1 |y'| \} dS < \infty, \quad 0 < \rho_1 < \rho.$$

В области  $G$  рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = 0. \quad (1)$$

Обозначим

$$K_\rho(G) = \{U(y) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) : U(y) + \operatorname{grad} U(y) \leq \exp[o(\exp \rho |y'|)], |y'| \rightarrow \infty, y \in G\}.$$

**Постановка задача.** Требуется найти гармоническую функцию  $U(y) \in K_\rho(G)$ ,

у которого известны значения на части  $S$  границы  $\partial G$ , т.е

$$U(y)|_S = f(y), \quad \frac{\partial U(y)}{\partial n}|_S = g(y). \quad (2)$$

Здесь  $f(y) \in C'(S)$  и  $g(y) \in C(S)$ -заданные функции и  $\partial/\partial n$  - оператор дифференцирования по внешней нормали к  $\partial G$ .

Рассматриваемая задача (1) - (2) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

В работе [1] рассматривается на части границы области по данным Коши задача приближенного восстановления гармонической функции и найдено регуляризованное решение.

Для рассматриваемой области функцию Карлемана впервые построил Ш. Ярмухамедов [2] в своей докторской диссертации следующим образом:

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi K(x_2)}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{K(w)}{w - x_2} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad K(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w - x_2 + 2h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{2h} e^{\sigma x_2}, \\ w &= i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, \quad \alpha = |y' - x'|, \quad x' = (x_1, 0), \quad y' = (y_1, 0), \quad 0 < x_2 < h. \end{aligned} \quad (4)$$

В формуле (4), выбираем

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2 + 3h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{3h} e^{\sigma x_2^2}$$

и отделяя мнимую часть с учетом (3) получим:

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma}(x, y) = & -\frac{3h}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)} \left[ \int_0^{\infty} \frac{2(y_2-x_2)e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} u du + \right. \\ & + \int_0^{\infty} \frac{3he^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} u du + \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2} e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} u du - \\ & \left. - \int_0^{\infty} \frac{(y_2-x_2+3h)(y_2-x_2)e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} \frac{u du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \right]. \quad (5)\end{aligned}$$

Если  $U(y) \in K_{\rho}(G)$  удовлетворяет условию роста

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq M \exp \left[ a \cos \left( y_2 - \frac{h}{2} \right) \exp \rho_1 |y'| \right], \quad a \geq 0, \quad y \in \partial G, \quad M = \text{const} \quad (6)$$

то справедлива интегральная формула Грина [2]

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \Phi_{\sigma}(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_{\sigma}(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \quad (7)$$

Предположим, что  $U(y) \in K_{\rho}(G)$  ограничена вместо с нормальной производной на части  $\partial G$ , т.е:

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \quad y \in T. \quad (8)$$

В этих предположениях в формулу (6) положим  $a=0$ . Обозначим

$$U_{\sigma}(x) = \int_S \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \Phi_{\sigma}(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_{\sigma}(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \quad (9)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $U(y) \in K_{\rho}(G)$  на части  $S$  границы  $\partial G$  удовлетворяет условие (2) и на части  $T$  границы  $\partial G$  выполнено неравенство (8). Тогда для любых  $x \in G$  и  $\sigma > 0$  справедливо оценки

$$|U(x) - U_{\sigma}(x)| \leq \psi_2(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{\sigma}(x)}{\partial x_i} \right| \leq \varphi_i(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

где  $M$  - положительное число и

$$\psi_2(\sigma, x_2) = \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2(3h-x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}(x_2+3h)}{\sqrt{\sigma}x_2(3h-x_2)^2} + \frac{h\sqrt{\pi}(6x_2\sigma+3)}{4\sqrt{\sigma}x_2}.$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(\sigma, x_2) = & \left( \frac{3h\sqrt{\sigma\pi}}{2} + \frac{9h\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \frac{9h^2\sqrt{\sigma\pi}}{4(3h-x_2)} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^3} + \right. \\ & + \frac{12h\sqrt{\sigma\pi}}{2(3h-x_2)} + \frac{21h\sqrt{\pi}+6h\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \frac{3hx_2\sqrt{\pi}+9h^2\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^3} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{x_2^2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \\ & \left. + \frac{9h^2\sqrt{\sigma\pi}}{(3h-x_2)^2} + \frac{27h^2\sqrt{\pi}}{2x_2^2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \frac{3hx_2\sqrt{\pi}+9h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^4} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}x_2^2} + \frac{9h\sqrt{\sigma\pi}}{2x_2} + 3h\sigma \right) e^{-\sigma x_2^2}, \\ \varphi_2(\sigma, x_2) = & \left( \frac{3h\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{3hx_2\sqrt{\sigma\pi}}{2(3h-x_2)} + \frac{6h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{27h^2\sqrt{\pi}}{4x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^3} + \right. \\ & + \frac{15h\sqrt{\sigma\pi}+24hx_2\sqrt{\sigma\pi}}{4(3h-x_2)} + \frac{6h\sqrt{\pi}}{x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{6hx_2\sqrt{\pi}}{x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^4} + \frac{6h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \\ & + \frac{3h\sqrt{\pi}}{2x_2^2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^3} + \frac{3hx_2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \frac{9h\sqrt{\pi}}{x_2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + 3h\sigma + \\ & \left. + 3h\sigma^2 + \frac{9h\sqrt{\sigma\pi}}{4x_2} + \frac{3h\sqrt{\pi}\sigma+3h\sqrt{\pi}\sigma^2x_2}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}\sigma+9h^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{x_2^2\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} \right) e^{-\sigma x_2^2}.\end{aligned}$$

**Следствие 1.** При каждом  $x \in G$  справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$$

## ЛИТЕРАТУРА

- Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши. // Математические заметки, 2008, Том 83, выпуск 5. С. 763-778.
- Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Дисс. докт. физ.-матем. наук, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, (1983).

## Обратная задача рассеяния для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником

Г.У. Уразбоев<sup>1</sup>, И.И. Балтаева<sup>1</sup>, Ш.Э. Атаназарова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Ургенчский государственный университет,

<sup>2</sup>Хорезмское отделение Института математики имени В.И. Романовского.

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ) отрицательного порядка с самосогласованным источником.

**Ключевые слова:** модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка, самосогласованный источник, данные рассеяния, собственное значение, собственная функция, потенциал.

Уравнение мКдФ отрицательного порядка билинейным методом Хироты изучено в работе [1, стр.1689-1697]. На сегодняшний день получены замечательные результаты по исследованию уравнения КдФ и мКдФ отрицательных порядков [2, стр.50003 ], [3, стр.50003], [4, стр.1371–1376]. В частности, в работах [5, стр.228-239], [6, стр.31-43] исследовано уравнение КдФ отрицательного порядка с источником методом обратной спектральной задачи.

В настоящей работе рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \rho_{xx} = -u^2 \\ u_{xt} + \alpha u + 2\rho_{xt}u = \sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2), \quad x \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{D}, t \geq 0, \\ L\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (1)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{D}, \quad (2)$$

где начальная функция обладает следующими свойствами

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty,$$

2. Оператор  $L_0$  в виде

$$L_0 = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0 \\ u_0 & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

не имеет спектральных особенностей и имеет ровно  $2N$  простых собственных значений  $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$  таких, что  $\operatorname{Im} \xi_k(0) > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

В рассматриваемой задаче  $\Phi_k = (\Phi_{k1}(x, t), \Phi_{k2}(x, t))^T$  собственная вектор-функция оператора  $L$  соответствующая собственному значению  $\xi_k$ . Комплекснозначная функция  $u = u(x, t)$  обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|) |u(x,t)| dx < \infty, \quad (3)$$

а функция  $\rho(x,t)$  удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \rho(0,t)=0, \rho_x(x,t) \rightarrow 1, & x \rightarrow \infty \\ \rho_{xx}(x,t) \rightarrow 0, \rho_{xt}(x,t) \rightarrow 0, u_{xt}(x,t) \rightarrow 0, & x \rightarrow \pm\infty. \end{cases} \quad (4)$$

Предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k1} \Phi_{k2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5)$$

где  $A_k(t)$  заданные непрерывные и ненулевые функции, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) \text{ при } \xi_k = -\xi_n.$$

Основная цель данной работы – получить представления для решений  $u(x,t)$ ,  $\rho(x,t)$ ,  $\Phi_k(x,t)$  задачи (1)-(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора  $L$ .

### Литература

1. Jingqun Wang, Lixin Tian, Yingnan Zhang. Breather solutions of a negative order modified Korteweg-de Vries equation and its nonlinear stability // *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, pp.1689-1697.
2. Qiao Z., Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // *Europhysics Letters*, 2011 vol. 94, pp. 50003.
3. Wazwaz A.M., Xu G.Q. Negative order modified KdV equations: multiple soliton and multiple singular soliton solutions // *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 2016, vol.39.
4. Wazwaz, AM. Negative-order integrable modified KdV equations of higher order // *Nonlinear Dyn*, 2018, vol. **93**, pp. 1371–1376.
5. Urazboev G. U., Khasanov M.M. Integration of the negative order Korteweg-De Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions // *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, pp.228-239.
6. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Baltaeva I. I. Integration of the Negative Order Korteweg-de Vries Equation with a Special Source // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2023, vol. 44, pp. 31–43.

# О связанных состояниях системы трех частиц на решётке

А.М. Халхужаев<sup>1</sup>, Ж.Х.Боймуродов<sup>2</sup>

*Институт математики им. В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан<sup>1</sup>*

*Навоинский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан<sup>2</sup>*

В работе [1, 488-b] рассматривается система трех частиц (две из них - бозоны, а третья -произвольная), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Описан существенный спектр ассоциированного этой системе трехчастичного оператора  $H_{\mu_1 \mu_3}(\mathbf{K})$ . Доказано существование эффекта Ефимова для  $H_{\mu_1 \mu_3}(\mathbf{0})$  в случаях, когда либо две, либо три двухчастичные подсистемы трех частиц имеют вертуальные уровни на левом крае трехчастичного существенного спектра (т.е. когда  $\mu_1 = \mu_1^0$  и  $\mu_2 \in [0, \mu_2^0)$  или  $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 3$ ), а также показана конечность числа связанных состояний при малых значениях параметра  $\mathbf{K} \neq 0$ , для любого фиксированного  $\gamma > 0$ . Рассматриваемый нами оператор  $H_{\mu, \lambda, \gamma}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{T}^3$  совпадает с оператором  $H_{\mu_1 \mu_3}(\mathbf{K})$ , если учитывать обозначения  $\mu = \mu_1$ ,  $\lambda = \mu_3$ .

Одна из «двухчастичных ветвей»  $[\tau_{min, \gamma}(\mu, \boldsymbol{\pi}), \tau_{max, \gamma}(\mu, \boldsymbol{\pi})]$  существенного спектра оператора  $H_{\mu, \lambda, \gamma}(\boldsymbol{\pi})$  сдвигается к  $-\infty$  с порядком  $\mu$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ , в результате которого бесконечное число собственных значений оператора "поглощаются" существенным спектром. Поэтому возникает естественный вопрос: существуют ли собственные значения оператора  $H_{\mu, \lambda, \gamma}(\boldsymbol{\pi})$ , лежащие левее существенного спектра при достаточно больших  $\mu$  и фиксированном  $\lambda > 0$ , и если существуют, то сколько?

В данной работе доказывается, что существует критическое значение отношений масс  $\gamma_1 \approx 4,7655$  такое, что при любом  $\lambda > 0$  и  $\gamma \in (0, \gamma_1)$  оператор  $H_{\mu, \lambda, \gamma}(\boldsymbol{\pi})$  имеет по крайней мере одно собственное значение, а  $\gamma > \gamma_1$  имеет не менее четырех собственных значений, лежащих левее существенного спектра для достаточно больших значений  $\mu > 0$ .

Пусть  $\mathbb{T}^3$  – трехмерный тор,  $L_2[(\mathbb{T}^3)^d]$ ,  $d = 1, 2$  – гильбертово пространство квадратично- интегрируемых функций, определенных на  $(\mathbb{T}^3)^d$  и  $L_2^{sym}[(\mathbb{T}^3)^2] \subset L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$  – подпространство симметричных функций относительно перестановки переменных.

Трехчастичный дискретный оператор Шредингера  $H_{\mu, \lambda, \gamma}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{T}^3$ , ассоциированный с системой трех частиц (две из них - бозоны с массой 1 и одна - произвольная с массой  $m = 1/\gamma < 1$ ), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов  $\mu > 0$  и  $\lambda > 0$  на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$ , действует в гильбертовом пространстве  $L_2^{sym}[(\mathbb{T}^3)^2]$  по формуле (см. напр. [1, 488-б])

$$H_{\mu, \lambda, \gamma}(\mathbf{K}) = H_{0, \gamma}(\mathbf{K}) - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3,$$

где

$$(H_{0, \gamma}(\mathbf{K})f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{\mathbf{K}, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$E_{\mathbf{K}, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma \varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\mathbf{s},$$

$$(V_3 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{s}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

На торе  $\mathbb{T}^3$  выбрана единичная мера  $d\mathbf{p}$ , т.е.

$$\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1.$$

Пусть

$$\gamma_1 = \left( \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_1 ds}{\varepsilon(\mathbf{s})} \right)^{-1} \approx 4,7655.$$

Основные результаты приводятся для случая  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\pi}$  и состоят из следующей теоремы:

**Теорема.** Пусть  $\lambda > 0$ . Если  $\gamma \in (0, \gamma_1)$ , то существует  $\mu(\gamma, \lambda) > 0$  такое, что для любого  $\mu > \mu(\gamma, \lambda)$  оператор  $H_{\mu, \lambda, \gamma}(\pi)$  имеет по крайней мере одно собственное значение, лежащее левее существенного спектра.

### Литература

1. Лакаев С. Н., Муминов М. Э., “Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке”, *TMФ*, **135** (2003), 478-503.
2. Abdullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M., Kuliev K.D., “The existence of eigenvalues of Schrödinger operator on three dimensional lattice”, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 28:3 (2002), 189-208.

## О НЕКОТОРОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, профессор,  
кан.ф.-м. наук, Самаркандский государственный университет,

Самарканда, Узбекистан.

Жураева Умидахон Юнусалиевна, докторант,  
Самаркандский государственный университет,  
Самарканда, Узбекистан.

**Аннотация:** Работа посвящена теореме типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, которая получена с помощью формул Карлемановского типа. Доказывается интегральное представление для бигармонических функций. При помощи этого интегрального представления получается некоторые свойства (оценка роста, формула Карлемана) бигармонических функций определенного класса в  $R^3$ .

**Ключевые слова:** теорема типа Фрагмена–Линделёфа, бигармоническая функция, функция Карлемана, интегральное представление.

Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа появились в литературе со временем знаменитой статьи Эдварда Фрагмена и Эрнста Линделофа 1908 года [1]. Теорема Фрагмена–Линделофа “на бесконечности” устанавливает существование

асимптотических пределов функции на бесконечности и дает представление о природе этих пределов, когда функция лежит в соответствующем классе решений.

Теоремы типа Фрагмена-Линдделёфа часто изучался в течение последнего столетия. Например Альфорс [2] расширил результаты из [1] к верхнему полупространству  $R^n$ , Гильбарг [3] и Серрин [4] рассмотрели более общие эллиптические уравнения второго порядка, а Витоло рассмотрел задачу в угловых секторах. Курта [5] и Джин-Ланкастер [6,7,8] рассматривали квазилинейные эллиптические уравнения и негиперболические уравнения, в то время как Капуццо-Витоло [9] и Армстронг-Сираков-Смарт [10] рассматривал полностью нелинейные уравнения. Адамович [11] изучал различные неограниченные области для подрешений уравнения р-Лапласа с переменным показателем, в то время как Бхаттачарья [12] и Гранlund-Марола [13] рассматривали бесконечно-гармонические функции в неограниченных областях. Аналогичные теоремы рассматривались в работах [14,15]. Эта задача встречается для гармонических функциях в работах Евграфова и И.А.Чегиса [16], А. Ф. Леонтьева [17]. И.С.Аршоном[18], Ш.Ярмухамедова [19] и З.Р.Ашуревой [20] - [23]. В статьях [24]-[25] получены подобные результаты для бигармонических функций.

В этой работе мы изучаем некоторые новые результаты: теорему типа Фрагмена-Линделофа для бигармонических функций заданных в  $R^3$ . Основной результат, приведенный в этой заметке, изложен в теореме 2.

Пусть  $R^3$  - трехмерное вещественное евклидово пространство  
 $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), x' = (x_1, x_2, 0), y' = (y_1, y_2, 0), r = |x - y|, \alpha = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \alpha^2 = s, D = \{y: y = (y_1, y_2, y_3), 0 < y_3 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\}.$

Пусть бесконечная область  $D$  двухмерного пространство и бигармоническая в  $D$  функция  $u(P)$ , непрерывная вплоть до границы со своими частными производными до третьего порядка включительно. Требуется показать, что если функция  $u(P)$ , ее нормальная производная, лапласиан функции и нормальная производная этого лапласиана ограничены на границе  $D$  и  $u(P)$  неограниченна

внутри, то при  $P \rightarrow \infty$  она должна расти внутри  $D$  со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Определяя функции  $\varphi_\sigma(y, x)$  и  $\Phi_\sigma(y, x)$ ,  $\alpha > 0$  следующими равенствами

$$\varphi_\sigma(y, x) = \frac{3 \exp(a \operatorname{ach} \rho_1(x_3 - h/2))}{2\rho \exp(\sigma x_3)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{\exp(\sigma\omega - a \operatorname{ch} \rho_1(\omega - h/2))}{(\omega - x_3 + 3h)(\omega - x_3)} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}}, \quad (1)$$

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0 r^2 \varphi_\sigma(y, x) \quad (2)$$

где  $\omega = y_3 + i\eta$ ,  $\eta^2 = t^2 + \alpha^2$ ,  $\rho, \rho_1$  — положительные числа, (в дальнейшем обозначим с помощью  $c_0$  все постоянные числа, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем).

**Теорема 1.** Для функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  определенная формулой (2), справедлива равенство  $\Phi_\sigma(y, x) = C_1(r + r^2 G_\sigma(y, x))$ , ( $C_1 \in R$ ), где  $G_\sigma(y, x)$  гармоническая функция по переменной включая  $y = x$  и при  $y \neq x$ ,  $\Phi_\sigma(y, x)$  является функцией Карлемана для области  $D$ .

**Теорема 2.** Пусть  $u(y)$  — бигармоническая функция определенная в  $D$ , имеющая непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы  $\partial D$  и

$$\sum_{k=0}^1 \left( |\Delta^k u(y)| + \left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} \right| \right) \leq c_0 \exp \exp \rho_2 |y|, \quad \forall y \in D, \quad \rho_2 < \rho_1 < \rho,$$

$$\forall y \in \partial D, \quad u(y) = 0, \quad \int_{\partial D} \left( \sum_{k=0}^1 (|\Delta^k u(y)| + |\operatorname{grad} \Delta^{1-k} u(y)|) \right) |ds| \leq c_0.$$

Тогда в любой точке  $y \in D$  выполняется  $u(y) = 0$ .

Теорема точно, так как можно построить пример бигармонической функции, которой устанавливает его точность.

Рассмотрим функцию  $u(y)$ , в области  $D \subset R^3$ , где  $D$ -неограниченная область,  $D = \{y = (y_1, y_2, y_3): y_1, y_2, y_3 \in R, 0 < y_3 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\}$  с границей  $\partial D$

$$u(y_1, y_2, y_3) = \operatorname{Re} \exp \left( e^{\frac{2\pi(y_2 + i(y_3 + \frac{b}{2}))}{b}} - \frac{\pi(y_2 + i(y_3 + \frac{b}{2}))}{b} \right), \quad b = \frac{\pi}{\rho}.$$

Введем следующее обозначения:

$$v(y_1, y_2, y_3) = e^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}(\cos \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} + i \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b}) - \frac{\pi y_2}{b} - i \frac{\pi y_3}{b}},$$

$$A = e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b}, \quad B = e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \cos \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi y_2}{b}.$$

Далее функцию  $v(y_1, y_2, y_3)$  перепишем в виде

$$v(y_1, y_2, y_3) = e^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \cos \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi y_2}{b}} \cos \left( e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} \right) +$$

$$ie^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \cos \frac{\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi y_2}{b}} \sin \left( e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} \right) = e^B \cos A + ie^B \sin A.$$

Тогда  $u(y_1, y_2, y_3) = e^B \cos A$ . Имея в виду равенства

$$\cos \left( e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi \frac{b}{2}}{b} - \frac{\pi \frac{b}{2}}{b} \right) = \cos \left( e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$\cos \left( e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{-2\pi \frac{b}{2}}{b} + \frac{\pi \frac{b}{2}}{b} \right) = \cos \left( -e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

получим  $u(y_1, y_2, 0) = 0$ ,  $u(y_1, y_2, \frac{\pi}{\rho}) = 0$ . Вычислим частные производные

первого и второго порядка функций  $A$  и  $B$ :

$$A'_{y_2} = \frac{2\pi}{b} e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b}, \quad A''_{y_2 y_2} = \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b},$$

$$A'_{y_3} = \frac{2\pi}{b} e^{\frac{2\pi t}{b}} \cos \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b} - \frac{\pi}{b}, \quad A''_{y_3 y_3} = - \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b},$$

$$B'_{y_2} = \frac{2\pi}{b} \cos \frac{2\pi y_3}{b} e^{\frac{2\pi y_2}{b}} - \frac{\pi}{b}, \quad B''_{y_2 y_2} = \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \cos \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b};$$

$$B'_{y_3} = - \frac{2\pi}{b} e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \sin \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b}, \quad B''_{y_3 y_3} = - \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 e^{\frac{2\pi y_2}{b}} \cos \frac{2\pi(y_3 + \frac{b}{2})}{b}.$$

Складывая полученные равенства, выводим

$$A''_{y_1 y_1} + A''_{y_2 y_2} + A''_{y_3 y_3} = 0, \tag{3}$$

$$B''_{y_1 y_1} + B''_{y_2 y_2} + B''_{y_3 y_3} = 0, \tag{4}$$

и кроме того

$$(B'_{y_2})^2 + (B'_{y_3})^2 - (A'_{y_2})^2 - (A'_{y_3})^2 = 0, \quad (5)$$

$$2A'_{y_2}B'_{y_2} + 2A'_{y_3}B'_{y_3} = 0. \quad (6)$$

Далее вычислим частные производные функции  $u(y)$ :

$$u'_{y_1} = 0, \quad u'_{y_2} = B'_{y_2}e^B \sin A + A'_{y_2}e^B \cos A, \quad u'_{y_3} = B'_{y_3}e^B \sin A + A'_{y_3}e^B \cos A.$$

А также находим частные производные второго порядка:

$$u''_{y_2 y_2} = e^B(B''_{y_2 y_2} \sin A + A'_{y_2} B'_{y_2} \cos A) + B'_{y_2} B'_{y_2} e^B \sin A + e^B(A''_{y_2 y_2} \cos A -$$

$$A'_{y_2} A'_{y_2} \sin A) + B'_{y_2} A'_{y_2} e^B \cos A,$$

$$u''_{y_3 y_3} = e^B(B''_{y_3 y_3} \sin A + A'_{y_3} B'_{y_3} \cos A) + B'_{y_3} B'_{y_3} e^B \sin A + e^B(A''_{y_3 y_3} \cos A -$$

$$A'_{y_3} A'_{y_3} \sin A) + B'_{y_3} A'_{y_3} e^B \cos A.$$

Складывая полученные равенства, выводим

$$\Delta u = u''_{y_1} + u''_{y_2 y_2} + u''_{y_3 y_3} = e^B \sin A (B''_{y_2 y_2} + B''_{y_3 y_3}) + e^B \cos A (A'_{y_2} B'_{y_2} + A'_{y_3} B'_{y_3}) + e^B \sin A (B'_{y_2} B'_{y_2} + B'_{y_3} B'_{y_3} - A'_{y_2} A'_{y_2} - A'_{y_3} A'_{y_3}) + e^B \cos A (A''_{y_2 y_2} + A''_{y_3 y_3}).$$

На основании равенств (3)-(6) окончательно имеем:  $\Delta u = 0$ , поэтому  $\Delta^2 u = 0$ , т.е  $u(y)$  бигармоническая функция.

Пример бигармонической функции  $u = \sin \rho y_2 \sinh \rho y_1$  показывает, что ограничение на рост нормальной производной, выражаемой интегральным неравенством, ослабить нельзя.

### Литература

1. Phragmen E. Lindelof E. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Math. 31. no 1. 1908. pp. 381-406.
2. Ahlfors L., On Phragmen-Lindelof's principle. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 1937, pp. 1-8.
3. Gilbarg D. The Phragmen-Lindelof theorem for elliptic partial differential equations. J. Rational Mech. Anal. 1. 1952. pp. 411-417.
4. Serrin J. On the Phragmen-Lindelof principle for elliptic differential equations. J. Rational Mech. Anal. 3. 1954. pp. 395-413.
5. Kurta V. V. Phragmen-Lindelof theorems for second-order quasilinear elliptic equations. Ukrain. Mat. Zh. 44. 10. 1992. pp 1376-1381.
6. Jin Z., Lancaster K. Theorems of Phragmen-Lindelof type for quasilinear elliptic equations. J. Reine Angew. Math. 514.1999. pp. 165-197.

7. Jin Z., Lancaster K. Phragmen-Lindelof theorems and the asymptotic behavior of solutions of quasilinear elliptic equations in slabs. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics 130. 2. 2000. pp. 335-373.
8. Jin Z., Lancaster K. A Phragmen-Lindelof theorem and the behavior at infinity of solutions of non-hyperbolic equations. Pacific journal of mathematics 211. no 1. 2003. pp. 101-121.
9. Capuzzo D., Vitolo A. A qualitative Phragmen-Lindelof theorem for fully nonlinear elliptic equations. Differential Equations 243. no 2. 2007. pp. 578-592.
10. Armstrong S. N., Sirakov B., Smart C. K. Singular solutions of fully nonlinear elliptic equations and applications. Arch. Ration. Mech. Anal. 205. no 2. 2012. pp. 345-394.
11. Adamowicz T. Phragmen-Lindelof theorems for equations with nonstandard growth. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 97. 2014. pp. 169- 184.
12. Bhattacharya T. On the behaviour of infinity-harmonic functions on some special unbounded domains. Pacific Journal of Mathematics 219. no 2. 2005. pp. 237-253.
13. Granlund S., Marola N. Phragmen-Lindelof theorem for infinity harmonic functions. Commun. Pure Appl. Anal. 14 (2015), pp. 127-132
14. Almefleh H., Lancaster K. Pragmen-Lindelof theorems in cylinders. Royal Society of Edinburgh. Proceedings A. 135. 2005 .3 . pp. 439 - 459.
15. Almefleh H., AlAhmad R. Pragmen-Lindelof type theorem at infinity. International Journal of Mathematics and Computer Science. 17. 2022.1. pp. 331-343.
16. Evgraphov M.A., Chegis I.A. Generalization of the Phragmen-Lindelof type theorem for analytic functions to harmonic functions in space. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1960, Vol.134, pp. 252-262.
17. Leontiev A.F. On Phragmen-Lindelof type theorems for harmonic functions in a cylinder. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. 1960. Vol. 27. pp. 661-676.
18. Arshon I.S., Evgraphov M.A. An example of a harmonic function in the whole space, bounded outside a circular cylinder. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1962 Vol. 143. pp. 231-234.
19. Yarmukhamedov Sh.Ya. The Cauchy problem for the polyharmonic equation. Reports of the Russian Academy of Sciences.2003. Vol.388. pp-162-165.
20. Ashurova Z.R., Juraeva N.Yu., Juraeva U.Yu. About some properties of the Yarmukhamedov kernel. nternational Journal of Innovative Research. 2021,Impact Factor 7.512. Vol. 10. pp. 84-90
21. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews. India 2020. DOI 10.31938.jcr.07.06.62. Vol. 7. pp. 371-378.
22. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function. Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal. Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra. 2020. URL <http://saarj.com> Vol.10. pp. 371-378.

23. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. The Carleman function and the Cauchy problem for polyharmonic functions. Lap LAMBERT Academic publishing Saabruen.2013. 96 p.
24. Jurayeva U.Yu . The Phragmen-Lindelof type theorems. Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 3, pp.54-61. DOI: 10.29229/uzmj.2022-3-7.
25. Жураева У. Ю., Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, Изв. вузов. Матем., 2022, номер 10, 42–65. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-10-42-65>

## **Интегрирование нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе периодических функций**

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор,

email: ahasanov2002@mail.ru.

Нормуродов Хожимурод Нормуминович, аспирант,

email: normurodov.96@bk.ru.

Рахматуллаева Нозима Шодикуловна,

email: nozima.raxmatullayeva@mail.ru

Самаркандинский государственный университет,

г. Самарканд (Узбекистан),

**Аннотация.** В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе периодических бесконечнозонных функций. Вводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом. Доказано разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формула первого следа, удовлетворяет уравнению типа синус-Гордона с дополнительным членом.

**Ключевые слова.** Уравнения типа синус-Гордона, оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

## 1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом вида:

$$q_{xt} = a(t)e^{mq} + b(t)e^{-mq} - c(t)q_{xx}, \quad q = q(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^3(R) \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных  $\pi$ -периодических по  $x$  функций:

$$q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad q(x, t) \in C_{x,t}^{1,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь  $a(t), b(t), c(t) \in C([0, \infty))$  – заданные непрерывные ограниченные функции и  $m < \infty$ ,  $m \in R \setminus \{0\}$ .

Нетрудно убедиться, что условия совместности линейных уравнений

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} mq_x & -2\lambda \\ 2\lambda & -mq_x \end{pmatrix} y, \\ y_t &= \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} 0 & a(t)e^{mq(x,t)} \\ b(t)e^{-mq(x,t)} & 0 \end{pmatrix} y + \frac{c(t)}{2} \begin{pmatrix} -mq_x & 2\lambda \\ -2\lambda & mq_x \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

эквивалентны уравнению (1) для функции  $q = q(x, t)$ ,  $x \in R$ ,  $t > 0$ .

Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного эволюционного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), синус-Гордона (сГ), уравнения Хирота и т.д. в классе периодических функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма-Лиувилля и Дирака.

С помощью метода обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля и Дирака с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах Итса-Матвеева [3], Дубровина-

Новикова [4], Итса-Котлярова [5], Смирнова [6], Матвеева-Смирнова [7], была установлена полная интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон, Хироты и т.д.) в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон и др.) была выведена явная формула через тета-функции Римана.

Таким образом, в этих работах (см. [3-8]) была доказана разрешимость задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон и др.) при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [9-10], а также в работе [11].

В связи с этим класс периодических функций удобно разбить на два множества:

1. Класс периодических конечнозонных функций;
2. Класс периодических бесконечнозонных функций.

Известно [12], что если  $q(x) = 2a\cos 2x$ ,  $a \neq 0$ , то в спектре оператора Штурма-Лиувилля  $Ly \equiv -y'' + q(x)y$ ,  $x \in R$  открыты все лакуны, иначе говоря,  $q(x)$  – периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [13].

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений  $q(x,t)$ ,  $x \in R$ ,  $t > 0$ , задачи (1)-(3) сведением ее к обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad \tau \in R, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} P(x, t) & Q(x, t) \\ Q(x, t) & -P(x, t) \end{pmatrix}, \quad P(x, t) \equiv 0, \quad Q(x, t) = \frac{m}{2}q'_x(x, t).$$

## 2. Эволюция спектральных данных

Обозначим через  $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  и  $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  решения уравнения (4) с начальными условиями  $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$  и  $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$ . Функция  $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$  называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака  $L(\tau, t)$  чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in R : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R \setminus \left( \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы  $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), n \in Z \setminus \{0\}$  называются лакунами, где  $\lambda_n$ , корни уравнения  $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$ . Они совпадают с собственными значениями периодической или антiperiodической  $y(0, \lambda, \tau, t) = \pm y(\pi, \lambda, \tau, t)$  задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что  $\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$ , т.е.  $\lambda = 0$  является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4).

Корни уравнения  $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$  обозначим через  $\xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$  и при этом  $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n \in Z \setminus \{0\}$ . Так как коэффициент в уравнении (4) имеет вид  $P(x, t) \equiv 0, Q(x, t) = \frac{m}{2} q'_x(x, t)$ , то справедливо  $\lambda_{-1} = \lambda_0 = \xi_0 = 0$ , т.е.  $\xi = 0$  является собственным значением задачи Дирихле.

Числа  $\xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$ , и знаки  $\sigma_n(\tau, t) = sign\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$ ,  $n \in Z \setminus \{0\}$  называются спектральными параметрами оператора  $L(\tau, t)$ . Спектральные параметры  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z \setminus \{0\}$  и границы спектра  $\lambda_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$ , называются спектральными данными оператора Дирака  $L(\tau, t)$ .

Задача восстановление коэффициента  $\Omega(x, t)$  оператора  $L(\tau, t)$  по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент  $\Omega(x, t)$

оператора  $L(\tau, t)$  определяются однозначно по спектральным данным  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1\}, n \in Z \setminus \{0\}$ .

Если с помощью начальной функции  $q_0(x + \tau), \tau \in R$ , построим оператор Дирака  $L(\tau, 0)$  вида

$$L(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in R, \tau \in R \quad (5)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_0(x) = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 0 & q'_0(x) \\ q'_0(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

то мы увидим, что границы спектра  $\lambda_n(\tau), n \in Z$ , полученной задачи не зависят от параметра  $\tau \in R$ , т.е.  $\lambda_n(\tau) = \lambda_n, n \in Z$ , а спектральные параметры от параметра  $\tau$  зависят:  $\xi_n^0 = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0 = \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$ , и являются периодическими функциями:

$$\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau), \quad \tau \in R, n \in Z.$$

Решая прямую задачу, находим спектральные данные  $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in Z \setminus \{0\}\}$  оператора  $L(\tau, 0)$ .

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $q(x, t), x \in R, t > 0$ , решение задачи (1)-(3). Тогда границы спектра  $\lambda_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$ , оператора  $L(\tau, t)$  не зависят от параметров  $\tau$  и  $t$  т.е.  $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in Z \setminus \{0\}$ , а спектральные параметры  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z \setminus \{0\}$  удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$1. \quad \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \xi_n(\tau, t), \quad n \in Z \setminus \{0\}; \quad (6)$$

$$2. \quad \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (7)$$

Здесь знак  $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z \setminus \{0\}$  меняется на противоположный при каждом столкновении точки  $\xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$  с границами своей лакуны  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ .

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t) \Big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t) \Big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (8)$$

где  $\xi_n^0(\tau)$ ,  $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$ ,  $n \in Z \setminus \{0\}$  – спектральные параметры оператора Дирака  $L(\tau, 0)$

. Последовательности  $h_n(\xi)$  и  $g_n(\xi)$ ,  $n \in Z \setminus \{0\}$  участвующие в уравнении (7) определяются по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t, \tau))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}}, \quad (9)$$

$$g_n(\xi) = \frac{ma(t)}{2\xi_n(\tau, t)} \exp \left\{ mq(\tau, t) \right\} + mc(t) \xi_n(\tau, t).$$

**Лемма 1.** Справедливы следующие формулы следов

$$q'_\tau(\tau, t) = \frac{2}{m} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \quad (10)$$

$$\left( \frac{m}{2} q_\tau(\tau, t) \right)^2 + \frac{m}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right). \quad (11)$$

Далее, учитывая формулы следов (10), систему (7) можно переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t, \tau))} \cdot f_n(\xi) \cdot g_n(\xi), \quad (12)$$

где

$$g_n(\xi) = \frac{ma(t)e^{mC(t)}}{2\xi_n(\tau, t)} \exp \left\{ 2 \int_0^\tau \left( \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s, t) h_k(\xi(s, t)) \right) ds \right\} + mc(t) \xi_n(\tau, t) \quad (13)$$

Здесь  $C(t)$  – некоторая ограниченная непрерывная функция.

В результате замены переменных

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in Z \setminus \{0\} \quad (14)$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (12) и начальные условия (8) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве  $K$ :

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, t) \Big|_{t=0} = x^0(\tau) \in K, \quad (15)$$

где

$$K = \left\{ x(\tau, t) = (\dots, x_{-1}(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots) : \|x(\tau, t)\| = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) |x_n(\tau, t)| < \infty \right\},$$

$$H(x) = (\dots, H_{-1}(x), H_1(x), \dots), \quad H_n(x) = (-1)^n \sigma_n(0) \cdot g_n(\dots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1(\tau, t), \dots) \times \\ \times f_n(\dots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1(\tau, t), \dots) = (-1)^n \sigma_n(0) g_n(x(\tau, t)) f_n(x(\tau, t)).$$

Известно, что если  $q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^3(R)$ , то  $(q_0(x))' \in C^2(R)$ . Поэтому для длины лакун оператора  $L(\tau, 0)$ , имеет место оценка (см. [15], стр. 98):

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^2|}{2|k|^2} + \frac{\delta_k}{|k|^3}, \quad (16)$$

где

$$\lambda_{2k} = k + \sum_{j=1}^3 c_j k^{-j} + 2^{-2} |k|^{-2} |q_{2k}^2| + |k|^{-3} \varepsilon_k^+,$$

$$\lambda_{2k} = k + \sum_{j=1}^3 c_j k^{-j} - 2^{-2} |k|^{-2} |q_{2k}^2| + |k|^{-3} \varepsilon_k^-,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_{2k}^2|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \quad \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-.$$

Отсюда, учитывая  $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ , получим

$$\inf_{k \neq n} |\xi_n(\tau, t) - \xi_k(\tau, t)| \geq a > 0.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (16), оценим функции

$$|f_n(x(\tau, t))|, \left| \frac{\partial f_n(x(\tau, t))}{\partial x_m} \right| \text{ и } |g_n(x(\tau, t))|, \left| \frac{\partial g_n(x(\tau, t))}{\partial x_m} \right|.$$

**Лемма 2.** Справедливы следующие оценки:

$$C_1 \leq |f_n(x(\tau, t))| \leq C_2, \quad \left| \frac{\partial f_n(x(\tau, t))}{\partial x_m} \right| \leq C_3 \gamma_m, \quad (17)$$

$$|g_n(x(\tau, t))| \leq C_4 |n|, \quad \left| \frac{\partial g_n(x(\tau, t))}{\partial x_m} \right| \leq C_5 \gamma_m, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (18)$$

где  $C_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , не зависят от параметра  $m$  и  $n$ .

**Лемма 3.** Если  $q_0(x+p) = q_0(x)OC^3(R)$ , то вектор-функция  $H(x(t, t))$  удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве  $K$ , т.е. существует константа  $L > 0$  такая, что для произвольных элементов  $x(\tau, t), y(\tau, t) \in K$  выполняется следующее неравенство

$$\|H(x(t, t)) - H(y(t, t))\| \leq L \|x(t, t) - y(t, t)\|,$$

где

$$L = C \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n \neq 0}}^{\infty} \gamma_n |n| < \infty. \quad (19)$$

**Замечание 1.** Теорема 1 и лемма 3 дает метод нахождения решения задачи (1)-(3). Сначала найдем спектральные данные  $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  оператора Дирака  $L(\tau, 0)$ . Обозначим спектральные данные оператора  $L(\tau, t)$  через  $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Решая задачу Коши (12), (8) при произвольном значении  $\tau$ , находим  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Из формулы следов (10) определим функцию  $q_\tau(\tau, t)$ , т.е. найдем решение задачи (1)-(3).

**Замечание 2.** Функция  $q_\tau(\tau, t)$  построенная с помощью системы уравнений Дубровина (7), (8) и формулы следа (10) действительно удовлетворяет уравнение (1).

**Замечание 3.** Равномерная сходимость рядов в (10), (11), (14) и (19) следует из равенств (16) и оценки (17).

**Теорема 2.** Если начальная функция  $q_0(x)$  удовлетворяет условию

$$q_0(x+p) = q_0(x)OC^3(R),$$

то существует решение  $q'_x(x, t), x \in R, t > 0$  задачи (1)-(3), которое однозначно задается формулой (10) и принадлежит классу  $C_{x,t}^{1,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ .

## Список литературы

1. Жибер А.В., Муртозина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. Характеристическое кольцо Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. Москва, Ижевск, 2012.
2. Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б., “Уравнения типа Лиувилля”, Докл. АН СССР, 249:1 (1979), 26–29.
3. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза // ТМФ, 23:1(1975), с.51-68.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза //ЖЭТФ, 67:12(1974), 2131-2143.
5. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера. Докл. АНУССР. Сер. А, 1976, №11, 965-968.
6. Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. //Матем. сб., 185:8 (1994), с.103-114
7. Матвеев В.Б., Смирнов А.О. Решения типа «волнубийц» уравнений иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура: единый подход.//ТМФ, 2016, Т.186, №2, с. 191-220.
8. Матвеев В.Б., Смирнов А.О. Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии. Зап. научн. Сем. ПОМИ, 2018, том 473, 205-227.
9. Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н (мл), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев: Наукова думка, 1987.
10. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. Наука, М., 1980.
11. Matveev V.B. 30 years of finite-gap integration theory. Phil. Trans. R Soc. A (2008) 366, p. 837-875.
12. Ince E.L. Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
13. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. // УМН. 2006, т.61, №4(370), стр. 77-182.
14. Маннонов Г.А., Хасанов А.Б. Задача Коши для нелинейного уравнения Хирота, в классе периодических бесконечнозонных функций. Алгебра и анализ. Том 34(2022), №5, с.139-172.
15. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, Теория функцией, функциональный анализ и их приложения, 30, ред. В.А. Марченко, Вища школа, Харьков, 1978, с.90-101; Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака II, 31, 1979, с. 102-109.

# О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

**Д.С. Шодиев, г. Самарканд, СамГУ**

dilshod.shodiev.76@mail.ru

Пусть  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in R^2$ ,  $G$  -ограниченная односвязная область в  $R^2$  с границей  $\partial G$ , состоящей из компактной части  $T = \{y_1 \in R : a_1 \leq y_1 \leq b_1\}$  и гладкой дуги кривой  $S : y_2 = h(y_1)$ , лежащей в полуплоскости  $y_2 > 0$ .  $\bar{G} = G \cup \partial G$ ,  $\partial G = S \cup T$ .

В области  $G$  рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0 \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$  оператор Лапласа.

**Задача.** Требуется найти бигармоническую функцию  $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ , у которого известны значения на части  $S$  границы  $\partial G$ , т.е

$$\begin{aligned} U(y_1, y_2)|_S &= f_1(y), \quad \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_2(y), \\ \frac{\partial}{\partial n} U(y_1, y_2)|_S &= f_3(y), \quad \frac{\partial}{\partial n} (\Delta U(y_1, y_2))|_S = f_4(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $f_j(y) \in C^{j-1}(S)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  заданные функции, а  $\frac{\partial}{\partial n}$  - оператор дифференцирования по внешней нормали к  $\partial G$ .

Рассматриваемая задача (1)-(2) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора была получена М.М. Лаврентьевым [1,2]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш.Я.Ярмухамедов [3,4] построил

функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области, является конической поверхностью либо гиперповерхностью.

Отметим, что при решении прикладных задач необходимо находить не только приближенные решения, но и производные приближенных решений. В работе [5] по данным Коши на гладкой части границы ограниченной области восстановлена не только сама гармоническая функция, но и ее производные, и получена оценка устойчивости производной приближенного решения.

**Конструкция функции Карлемана.** Пусть  $\sigma > 0$ . Определим при  $\alpha > 0$  функцию<sup>1</sup>  $\Phi_\sigma(x, y)$  следующим равенством.

$$-2\pi e^{\sigma x_2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2} \right] \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, \quad (3)$$

где

$$y' = (y_1, 0), \quad x' = (x_1, 0), \quad r = |y - x|, \quad \alpha = |y' - x'|.$$

Отделяя мнимую часть функции  $\Phi_\sigma(x, y)$  имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(x, y) = & \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2} u du}{u^2 + r^2} - \right. \\ & \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} (y_2 - x_2) \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе [4] доказано, что функция определенная равенством (3) при  $\sigma > 0$  представимо в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + G_\sigma(x, y), \quad (5)$$

где  $G_\sigma(x, y)$  - функция гармоническая по  $y$  в  $R^2$  включая  $y = x$ .

Если функция  $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ , тогда для любого  $x \in G$  справедливо следующая интегральная формула Грина:

<sup>1</sup>Функция  $\Phi_\sigma(x, y)$  определённая равенством (3) впервые построена Ш.Ярмухамедовым.

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[ U(y) \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ + \int_{\partial G} \left[ \Delta U(y) \frac{L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \quad (6)$$

здесь

$$L_\sigma(x, y) = r^2 \Phi_\sigma(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \sin \gamma,$$

$$\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} = \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} \sin \gamma,$$

$$\Delta(L_\sigma(x, y)) = \Delta(r^2 \Phi_\sigma(x, y)),$$

$\cos \gamma, \sin \gamma$  координаты единичной внешней нормали  $n$  в точке  $y$  границы  $\partial G$ .

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[ f_1(y) \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \varphi_1(y) \right] dS_y + \\ + \int_S \left[ f_2(y) \frac{L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \varphi_2(y) \right] dS_y, x \in G. \quad (8)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$  на части  $S$  границы  $\partial G$  удовлетворяет условие (2) и на части  $T$  границы  $\partial G$  выполнено неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial(U(y))}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right| \leq 1, \quad y \in T. \quad (9)$$

Тогда для любых  $x \in G$  и  $\sigma > 0$  справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq D(x_2, \sigma) e^{-\sigma x_2^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq D_i(x_2, \sigma) e^{-\sigma x_2^2}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где

$$D(x_2, \sigma) = \left[ \frac{21\sqrt{\pi\sigma}}{4\sigma} + \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{8\sigma^2} + \left( \frac{3\sqrt{\pi\sigma}}{4\sigma} + \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{8\sigma^2} + 20\sqrt{\pi\sigma} + 8\sqrt{\pi\sigma}\sigma \right) x_2 + \right. \\ \left. + \left( 2\sqrt{\pi\sigma} + 4\sqrt{\pi\sigma}\sigma \right) x_2^2 + \frac{9\sqrt{\pi\sigma}}{2} x_2^3 + \frac{9\sqrt{\pi\sigma}}{\sigma x_2} \right],$$

$$\begin{aligned}
D_1(x_2, \sigma) = & \left[ 10 + \frac{1}{\sigma} + \frac{13\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{165\sqrt{\pi}\sigma}{2\sqrt{\sigma}} + 16\sigma + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^3}{\sqrt{\sigma}} + \left( 44\sigma + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + 3 + \frac{2\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} \right) x_2 + \right. \\
& \left. + \left( \frac{17}{2} + \frac{9\sqrt{\pi}\sigma}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} + 4\sigma \right) x_2^2 + 9\sigma x_2^3 + \left( \frac{66\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2\sigma} + 8 \right) \frac{1}{x_2} + \frac{20\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2} \right], \\
D_2(x_2, \sigma) = & \left[ \frac{21\sqrt{\pi}\sigma}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{78\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \left( \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} \right) x_2 + \right. \\
& \left. + \left( \frac{29\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{58\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} \right) x_2^2 + \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2\sqrt{\sigma}} x_2^3 + \frac{10\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} x_2^4 + \frac{60\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2} \right].
\end{aligned}$$

**Следствие 1.** При каждом  $x \in G$  справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через  $\bar{G}_\varepsilon$  множество

$$\bar{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in G, \quad a > x_2 \geq \varepsilon, \quad a = \max_T h(x_1), 0 < \varepsilon < a, \right\}.$$

Легко заметить, что множество  $\bar{G}_\varepsilon \subset G$  является компактным.

**Следствие 2.** Если  $x \in \bar{G}_\varepsilon$ , то семейство функций  $\{U_\sigma(x)\}$  и  $\left\{ \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right\}$  сходится

равномерно при  $\sigma \rightarrow \infty$ , т.е.:

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что множество  $\Pi_\varepsilon = G \setminus \bar{G}_\varepsilon$  служить пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Рассмотрим множество

$$E = \left\{ U \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G}) : |U(y)| + \left| \left\{ \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right\} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \left\{ \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right\} \right| \leq M, M > 0, y \in T \right\}.$$

Положим

$$\max_T h(y_1) = a, \quad \max_T \sqrt{1 + \left( \frac{dh}{dy_1} \right)^2} = b$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $u(y) \in E$ , удовлетворяет уравнение (1) и на части  $S$  границы области  $G$  выполняется неравенство

$$|U(y)| + \left| \left\{ \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right\} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \left\{ \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right\} \right| \leq \delta, \quad y \in S.$$

Тогда для любого  $x \in G$  и  $\sigma > 0$  справедлива следующая оценка

$$|U(x)| \leq \Psi(\sigma, x_2) M^{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_2^2}{a^2}},$$

где

$$\Psi(\sigma, x_2) = \max(D(\sigma, x_2), \psi(\sigma, x_2)),$$

$$\begin{aligned} \psi(\sigma, x_2) = & \frac{3b}{\sigma} + \frac{19ab\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma} + 30a^2b + \frac{97ab(a-x_2)}{2} + \frac{ab\sqrt{\sigma\pi}}{2} + \frac{3ab}{2\sigma} + 4a^2b\sqrt{\sigma\pi} + \frac{b\sqrt{\sigma\pi}}{4\sigma}(a-x_2) + \\ & + \frac{21b\sqrt{\sigma\pi}}{4\sigma} + 20ab + 8ab\sigma\sqrt{\sigma\pi}(a-x_2) + \frac{5ab\sqrt{\sigma\pi}(a-x_2)}{\sigma} + 8a^2b\sigma(a-x_2) + 2b(a-x_2) + 16ab\sigma + \\ & + \frac{4ab\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma(a-x_2)} + \frac{2b}{\sigma(a-x_2)^2} + 4a^3b\sigma\sqrt{\sigma\pi} + 207ab\sqrt{\sigma\pi} + \frac{16ab\sqrt{\sigma\pi}}{(a-x_2)^2} + 5b\sqrt{\sigma\pi} + 48a^2b\sigma(a-x_2)^2 + \\ & + 16a^3b\sigma^2 + 2a^3b\sigma + 182a^2b\sigma + 8a^2b\sigma\sqrt{\sigma\pi} + 128ab\sigma(a-x_2) + 42b + \frac{24b\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma(a-x_2)} + 4b\sigma(a-x_2)^2 + \\ & + 16a^2b\sigma^2(a-x_2)^2 + 16ab\sigma(a-x_2)^3 + 4ab\sqrt{\sigma\pi}(a-x_2)^2 + 40ab(a-x_2)^3 + \frac{8ab\sqrt{\sigma\pi}}{a-x_2} + 16a^2b\sigma^2 + \\ & + \frac{8a^2b\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma}(a-x_2) + 4b\sqrt{\sigma\pi}(a-x_2) + 16a^2b\sigma\sqrt{\sigma\pi}(a-x_2) + \frac{2b\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma}(a-x_2)^2 + 16a^3b\sigma^2(a-x_2) + \\ & + 8ab\sigma\sqrt{\sigma\pi}(a-x_2)^2 + 4b(a-x_2)^2. \end{aligned}$$

### Литературы

1. М.М. Лаврентьев. О Задача Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР Сер. матем., 1956, том 20, выпуск 6, с. 819-842.
2. М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. --Изд. СО АН СССР Новосибирск, 1962 г.
3. Ш. Ярмухамедов. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы // Сибирский математический журнал, Том 43, № 1, 2002, с. 228-239.
4. Ш. Ярмухамедов. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши // Математические заметки, Том 83, выпуск 5, 2008, с. 763-778.
5. А.Б. Хасанов, Ф.Р.Турсунов. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Уфимский математический журнал, 2019, Том.11, N 4, С.92-106.

# ПЕРИДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Юлдашева А.В.

Филиал МГУ в городе Ташкенте

a\_v\_yuldasheva@mail.ru

*Аннотация.* В этой статье мы рассматриваем линейную перидинамическую модель одномерной пружинной системы.

*Ключевые слова:* перидинамика, сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, линейное приближение.

**Введение.** Перидинамика это теория, использующая нелокальную модель силового взаимодействия. В частности, значение деформации классической упругости заменяется интегральным оператором, который суммирует внутренние силы, разделенные конечным расстоянием [1]. Перидинамическая теория является альтернативой, описываемая интегральными уравнениями [2]. Цель перидинамической теории, состоит в том, чтобы обеспечить более обобщенный подход, чем классическая теория, для задач, связанных с разрывами или другими особенностями деформации. Интегральное уравнение выражает нелокальную силовую модель, описывающую дальнодействующее взаимодействие материалов. Но при этом, перидинамическая модель сходится к классической теории упругости в пределе малости горизонта, т.е. при  $\delta \rightarrow 0$  [3]. Такие свойства делают перидинамическую теорию мощным инструментом для моделирования проблем, связанных с трещинами, границами раздела или дефектами. В [4] объясняется, как общая модель перидинамического материала, сходится к модели континуальной упругости по мере того, как отношение перидинамического горизонта к масштабу эффективной длины уменьшается, предполагая, что лежащая в основе деформация достаточно гладкая.

**Перидинамическая модель.** Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_{\Omega} F(x, y, u(x, t), u(y, t)) dy + f(x, t) , \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность,  $u$  - поле смещений тела,  $F$  - парная силовая функция, описывающая внутренние силы,  $f$  - равнодействующая внешних сил на единицу объема. Через  $t > 0$  обозначается рассматриваемое время, а  $\Omega$  обозначает открытый шар радиуса  $\delta$ , где  $\delta > 0$  — так называемый перидинамический горизонт взаимодействия, такой что  $|x - y| \leq \delta$ .

Предположение об отсутствии явной зависимости от времени, и третий закон Ньютона приводят к

$$F(x, y, u(x, t), u(y, t)) = F(x - y, u(x, t) - u(y, t)) \quad (2)$$

и

$$F(x, y, -\eta) = -F(x, y, \eta),$$

для любых  $x, y$  и  $\eta = u(x, t) - u(y, t)$ .

Для перидинамической модели типично требовать  $F(x, y, \eta) = 0$ , если  $|x - y| > \delta$ .

Приближение первого порядка относительно малых смещений имеет вид

$$F(x, y, \eta) = F_0(x, y) + K(x, y)\eta, \quad (3)$$

с тензором жесткости (или функцией микромодуля) [5]  $K(x, y)$ , который должен быть симметричным относительно своих аргументов, а также относительно своей тензорной структуры. Тензор жесткости можно представить в виде

$$K(x, y) = \lambda_\delta(|x - y|)(x - y) \otimes (x - y). \quad (4)$$

В частном случае, для изотропных материалов равенство (4) принимает вид [6]:

$$K(x, y) = \frac{c_\delta}{|x - y|^3} (x - y) \otimes (x - y). \quad (5)$$

Линейное перидинамическое уравнение движения (1) теперь имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_\delta \int_{\Omega} \frac{(x-y) \otimes (x-y)}{|x-y|^3} (u(x, t) - u(y, t)) dy + f(x, t). \quad (6)$$

В этой статье мы обсуждаем случай стационарной, одномерной, однородной и линейной модели, уравнения (6) и уравнение (1) сводятся к:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} \frac{u(x, t) - u(y, t)}{|x-y|^3} dy + f(x, t). \quad (7)$$

Введем обозначение

$$L_\delta = \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} \frac{u(x,t) - u(y,t)}{|x-y|^3} dy . \quad (8)$$

Функция  $a(|x-y|) = \frac{1}{|x-y|^3}$  называется ядромperiдинамического интегрального оператора.

**Анализ periдинамической модели.** Выше мы определили смещение

$$\eta = u(x, t) - u(y, t) = (\nabla u)^T (x - y).$$

Поскольку мы рассматриваем деформацию упругого однородного материала, то  $(\nabla u)^T = (\nabla u)$ .

Рассмотрим разложение Тейлора

$$u(x) - u(y) = \frac{((x-y)\nabla)u}{1!} + \frac{((x-y)\nabla)^2 u}{2!} + \dots = \sum_{k=1}^m \frac{((x-y)\nabla)^k u}{k!}.$$

Подставляя последнее разложение в выражение (8), получим

$$L_\delta = \sum_{k=1}^m L_\delta^k u(x) , \quad (9)$$

где

$$L_\delta^k u(x) = \frac{1}{k!\delta^2} \int_{\Omega} \frac{((x-y)\nabla)^k u(x)}{|x-y|^3} dy . \quad (8)$$

Интегрируя  $L_\delta^k u(x)$  по частям, мы получим, что при нечетных  $k$  они равны 0, а при четных

$$L_\delta^k u(x) = \frac{1}{2\cdot k!} \delta^{k-2} u^{(k)}(x).$$

Таким образом мы можем определить (9) для точных полиномиальных решений.

Итак, сходимость ряда решений зависит от горизонта  $\delta$ , т.е. горизонт  $\delta$  контролирует сходимость решения модели (7).

### Литература

- 1] E. Askari, F. Bobaru, R.B. Lehoucq, M.L. Parks, S.A. Silling and O. Weckner, "Peridynamics for multiscale materials modeling", J. Phys. Conf. Ser. 125 (2008)
- 1] E. Askari, F. Bobaru, R.B. Lehoucq, M.L. Parks, S.A. Silling and O. Weckner, "Peridynamics for multiscale materials modeling", J. Phys. Conf. Ser. 125 (2008)
  - 1. E. Askari, F. Bobaru, R.B. Lehoucq, M.L. Parks, S.A. Silling and O. Weckner, Peridynamics for multiscale materials modeling // J. Phys. Conf. Ser. 125 (2008).

2. K. Dayal and K. Bhattacharya, Kinetics of phase transformations in the peridynamic formulation of continuum mechanics // J. Mech. Phys. Solids 54 (2006).
3. Silling, S.A., Weckner, O., Askari, E. et al. Crack nucleation in a peridynamic solid.// Int J Fract 162, 219–227 (2010).
4. S.A. Silling and R.B. Lehoucq, Convergence of peridynamics to classical elasticity theory // J. Elasticity, 93 (2008).
5. A. Silling, Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // Sandia National Laboratories, USA(1999).
6. Xi Chen and Max Gunzburger, Continuous and Discontinuous Finite Element Methods for a Peridynamics Model of Mechanics // Florida State University (2005).

**Классическая разрешимость смешанной задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с квадратом оператора Баренблатта-Желтовой-Кочиной**

Т. К. Юлдашев, Ташкентский государственный экономический университет,  
Ташкент, Узбекистан

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Ф. Д. Рахмонов, Национальный университет Узбекистана,  
Ташкент, Узбекистан  
E-mail: farxod\_frd@bk.ru

Изучены вопросы однозначной классической разрешимости и построения решения смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего квадрат оператора Баренблатта-Желтова-Кочиной. Использован метод ряда Фурье, основанный на разделение переменных. Получена счетная система нелинейных интегральных уравнений. Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной классической разрешимости смешанной задачи. При этом применяется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

**Ключевые слова:** Смешанная задача, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, уравнение четвертого порядка, квадрат оператора Баренблатта-Желтова-Кочиной, классическая разрешимость.

## 1. Постановка задачи

Задачи, с которыми сталкиваются в механике, часто оказываются начально-краевыми (смешанными). Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во

взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1,336-стр. 2, 58-73-стр.]. Много смешанных задач возникают в гидродинамике при решении задач гидроупругости.

В работах [3, 97-154-стр. 4, 111-стр.] изучены смешанные задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка параболического и гиперболического типов. В работах [5, 90-100-стр. 6, 248-стр. 7, 156-стр. 8, 41-48-стр. 9, 277-295-стр. 10, 238-249-стр. 11, 130-141-стр. 12, 114-130-стр.] изучены смешанные задачи для нелинейных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков. В настоящей работе рассматриваются вопросы классической разрешимости и построения решения смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с квадратом параболического оператора.

Итак, в области  $\Omega \equiv (0, T) \times (0, l)$  рассматривается уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 U(t, x) = f \left( t, x, \int_0^T \int_0^l K(s, y) U(s, y) dy ds \right) \quad (1)$$

со смешанными условиями

$$U(0, x) = \varphi_1(x), \quad U_t(0, x) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

$$U(t, 0) = U(t, l) = U_{xx}(t, 0) = U_{xx}(t, l) = 0, \quad (3)$$

где  $f(t, x, u) \in C(\bar{\Omega} \times R)$ ,  $\varphi_i(x) \in C(\Omega_l)$ ,  $0 < K(t, x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = \varphi_i''(0) = \varphi_i(l) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\bar{\Omega} \equiv \Omega_T \times \Omega_l$ ,  $\Omega_T \equiv [0, T]$ ,  $\Omega_l \equiv [0, l]$ ,  $0 < T < \infty$ ,  $0 < l < \infty$ .

**Задача.** Требуется найти функцию  $U(t, x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{t,x}^{2,4}(\Omega)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3).

Решение данной задачи ищем в виде ряда:

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \vartheta_n(x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (4)$$

где  $u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy$ ,  $\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x$ ,  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Заметим, что функции  $\vartheta_n(x)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$\vartheta_n(0) = \vartheta_n(l) = \vartheta_n''(0) = \vartheta_n''(l) = 0.$$

Следовательно, функции, определенные с помощью ряда (4), формально удовлетворяют условиям (3).

## 2. Сведение решения задачи (1)-(3) к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

**Теорема 1.** Пусть выполняются следующие условия:

1.  $Qf : B_2(T) \rightarrow L_2(\Omega)$  непрерывен;
2.  $U(t, x)$  является решением смешанной задачи (1)-(3).

Тогда коэффициенты Фурье  $u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy$  решения смешанной

задачи (1)-(3) по собственным функциям  $\vartheta_n(x)$  удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$u_n(t) = w_n(t) + \int_0^t \int_0^l P_n(t, s) Qf \vartheta_n(y) dy ds, \quad t \in \Omega_T, \quad (5)$$

где  $Q\vec{a}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \vartheta_n(x)$ ,  $w_n(t) = [\varphi_{1n} + t(\mu_n \varphi_{1n} + \varphi_{2n})] \cdot e^{-\mu_n t}$ ,

$$P_n(t, s) = (t - s) \cdot e^{-\mu_n(t-s)}, \quad \mu_n = \frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}, \quad Qf = f \left( s, y, \int_0^T \int_0^l K(\theta, z) Q\vec{a}(\theta) dz d\theta \right).$$

**Доказательство.** Подставляя ряд Фурье (4) в дифференциальное уравнение (1), придем к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$[1 + 2\lambda_n^2 + \lambda_n^4] u_n''(t) + 2\lambda_n^2 [1 + \lambda_n^2] u_n'(t) + \lambda_n^4 u_n(t) = \int_0^l Qf \vartheta_n(y) dy. \quad (6)$$

Правая часть уравнения (6) есть коэффициент Фурье от нелинейной функции  $f$ .

Решая счетную систему дифференциальных уравнений (6), получим

$$u_n(t) = (C_{1n} + C_{2n}t) \cdot e^{-\mu_n t} + \int_0^t \int_0^l P_n(t,s) Qf \vartheta_n(y) dy ds, \quad t \in \Omega_T. \quad (7)$$

Для того, чтобы определить коэффициенты  $C_{in}$  ( $i=1,2$ ), используем начальные условия  $u_n(0) = \varphi_{1n}$ ,  $u'_n(0) = \varphi_{2n}$ , где  $\varphi_{in} = \int_0^l \varphi_i(y) \vartheta_n(y) dy$ ,  $i=1,2$ . Тогда из (7) получим ССНИУ (5).

### 3. Однозначная разрешимость ССНИУ

Воспользуемся следующими известными банаховыми пространствами. Рассмотрим пространство  $B_2(T)$  последовательностей непрерывных функций  $\{u_n(t)\}_{n=1}^\infty$  на отрезке  $\Omega_T$  с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \max_{t \in \Omega_T} |u_n(t)| \right)^2} < \infty.$$

Координатное гильбертово пространство  $\ell_2$  числовых последовательностей  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2} < \infty.$$

Пространство  $L_2(\Omega_l)$  суммируемых с квадратом функций на отрезке  $\Omega_l$  с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int_0^l |\vartheta(y)|^2 dy} < \infty.$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются следующие условия:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n(t)| < \infty;$
2.  $\max_{0 \leq t \leq T} \left\| f \left( t, x, \int_0^t \int_0^l K(s,y) Q \vec{u}^0(s) dy ds \right) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \leq \Delta < \infty;$
3.  $|f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2)| \leq H(t,x) |u_1 - u_2|;$
4.  $M_1 T \alpha_0 < 1$ , где  $M_1 = \left\| \vec{P}(t,s) \right\|_{B_2(T)}$ ,

$$\alpha_0 = \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \alpha(s) ds, \quad \alpha(s) = \int_0^l H(s,y) \|K(s,y)\|_{L_2(\Omega_l)} dy.$$

Тогда ССНИУ (5) имеет единственное решение в пространстве  $B_2(T)$ .

**Доказательство.** Используем метод последовательных приближений:

$$\begin{cases} u_n^0(t) = w_n(t), \quad u_n^{k+1}(t) = w_n(t) + \\ + \int_0^t \int_0^l P_n(t,s) f\left(s, y, \int_0^T \int_0^l K(\theta, z) Q\vec{u}^k(\theta) dz d\theta\right) \times \\ \times \vartheta_n(y) dy ds, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t \in \Omega_T. \end{cases} \quad (8)$$

В силу первого и второго условий теоремы, для первой разности  $u_n^1(t) - u_n^0(t)$  применяем неравенство Коши-Буняковского. Тогда из (8) получаем

$$\begin{aligned} & \| \vec{u}^1(t) - \vec{u}^0(t) \|_{B_2(T)} \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \int_0^T \int_0^l K(\theta, z) Q\vec{u}^0(\theta) dz d\theta\right) P_n(t,s) \vartheta_n(y) dy \right| ds \leq \\ & \leq \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^l f\left(s, y, \int_0^T \int_0^l K(\theta, z) Q\vec{u}^0(\theta) dz d\theta\right) \vartheta_n(y) dy \right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(t,s)|^2} ds \leq \\ & \leq M_1 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left\| f\left(s, x, \int_0^T \int_0^l K(\theta, z) Q\vec{u}^0(\theta) dz d\theta\right) \right\|_{L_2(\Omega_l)} ds \leq M_1 T \Delta, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } M_1 = \left\| \vec{P}(t,s) \right\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |P_n(t,s)|^2}.$$

В силу второго и третьего условий теоремы для второй разности  $u_n^2(t) - u_n^1(t)$  получим следующую оценку

$$\begin{aligned} & \| \vec{u}^2(t) - \vec{u}^1(t) \|_{B_2(T)} \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t P_n(t,s) \int_0^l H(s,y) \int_0^T \int_0^l K(\theta,z) |Q\vec{u}^1(\theta) - Q\vec{u}^0(\theta)| dz d\theta \vartheta_n(y) dy \right| ds \leq \\ & \leq M_1 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^l H(s,y) \int_0^T \int_0^l K(\theta,z) |Q\vec{u}^1(\theta) - Q\vec{u}^0(\theta)| dz d\theta \vartheta_n(y) dy \right|^2} ds \leq \\ & \leq M_1 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left\| H(s,x) \int_0^T \int_0^l K(\theta,y) |Q\vec{u}^1(\theta) - Q\vec{u}^0(\theta)| dy d\theta \right\|_{L_2(\Omega_l)} ds \leq \\ & \leq M_1 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| \int_0^l H(s,y) \int_0^T \int_0^l K(\theta,z) \left| \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^1(\theta) - u_n^0(\theta)| \cdot \vartheta_n(z) \right| dz d\theta dy \right| ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_1 T \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \int_0^l H(s, y) \|K(s, y)\|_{L_2(\Omega_l)} dy \|\vec{u}^1(s) - \vec{u}^0(s)\|_{B_2(T)} ds \leq \\
&\leq M_1 T \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \alpha(s) \|\vec{u}^1(s) - \vec{u}^0(s)\|_{B_2(T)} ds \leq (M_1 T)^2 \alpha_0 \Delta, \\
\alpha_0 &= \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \alpha(s) ds, \quad \alpha(s) = \int_0^l H(s, y) \|K(s, y)\|_{L_2(\Omega_l)} dy.
\end{aligned} \tag{10}$$

Для произвольного натурального числа  $k$ , аналогично (10) получим

$$\|\vec{u}^{k+1}(t) - \vec{u}^k(t)\|_{B_2(T)} \leq (M_1 T)^{k+1} (\alpha_0)^k \Delta. \tag{11}$$

Так как  $M_1 T \alpha_0 < 1$ , то, переходя в предел в неравенстве (11), получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{u}^{k+1}(t) - \vec{u}^k(t)\|_{B_2(T)} = 0. \tag{12}$$

Из оценок (9) и (12) следует существование и единственность решения  $\vec{u}(t) \in B_2(T)$  ССНИУ (5).

#### 4. Смешанной задача

Подставляя ССНИУ (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1)-(3):

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left[ w_n(t) + \int_0^t \int_0^l P_n(t, s) Qf \vartheta_n(y) dy ds \right]. \tag{13}$$

Выясним условия, при которых формальное решение (13) будет решением смешанной задачи (1)-(3).

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия теоремы 2. Если  $\vec{u}(t) \in B_2(T)$  является единственным решением ССНИУ (5), то ряд (13) будет единственным решением смешанной задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда Фурье (13). Так как  $\vec{u}(t) \in B_2(T)$ , то имеем

$$\begin{aligned}
|U(t, x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)| \left[ |w_n(t)| + \int_0^t \int_0^l Qf \vartheta_n(y) dy ds \right] \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |w_n(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^l Qf \vartheta_n(y) dy ds.
\end{aligned} \tag{14}$$

По первому условию теоремы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n(t)| < \infty.$$

Аналогично оценке (9), к второму ряду применяем неравенство Коши-Буняковского:

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t,s) \left| \int_0^l Qf \vartheta_n(y) dy ds \right| \leq M_1 \int_0^t \|Qf\|_{L_2(\Omega_t)} ds \leq M_1 T \Delta < \infty.$$

Отсюда следует сходимость ряда (14). Сходимость производных решения (13) смешанной задачи (1)-(3), входящих в дифференциальное уравнение (1), доказывается аналогично доказательстве соответствующей теоремы из работ [11, 12]. Это и доказывает теорему.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
2. Баренблatt Г. И., Желтов Ю. П., Kochina I. N. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.
3. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.
4. Чернягин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: МГУ, 1992. 111 с.
5. Вагабов А. И. Обобщенный метод Фурье решения смешанных задач для нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 90–100.
6. Чандиров Г. И. Смешанная задача для квазилинейных уравнений гиперболического типа / Дисс. ... докт. физ.-мат. наук, 01.01.02. Баку, 1970. 248 с.
7. Шабадиков К. Х. Исследование решений смешанных задач для квазилинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей смешанной производной / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, 01.01.02. Фергана, 1984. 156 с.
8. Дыйканов Г. А. Смешанная задача для одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка // Вестник ОшГУ. 2017. № 2. С. 41–48.
9. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 277–295.
10. Юлдашев Т. К. Обобщенная разрешимость нелокальной задачи для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с вырожденным ядром // Вестник ОшГУ. 2017. № 4. С. 238–249.
11. Yuldashev T. K. On a nonlocal boundary value problem for a partial integro-differential equations with degenerate kernel // Владикавк. матем. журн. 2022. Т. 24. № 2. С. 130–141.
12. Юлдашев Т. К., Рахмонов Ф. Д., Исмоилов А. С. Интегро-дифференциальное уравнение Буссинеска с интегральными условиями и с малым параметром при смешанных производных // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2022. Т. 211. Москва: ВИНИТИ РАН, 2022. С. 114–130.

# ВТОРОЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

**Яхшимуратов А.Б.<sup>1</sup>, Матёкубов О.М.<sup>2</sup>, Хусаинов И.И.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Ургенчский филиал Ташкентского Университета Информационных Технологий имени Мухаммада Аль-Хорезми, г. Ургенч, Республика Узбекистан*

E-mail: albaron@mail.ru,

<sup>2</sup>*Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Республика Узбекистан*

E-mail: ollabergan2021@mail.ru,

<sup>3</sup>*Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Республика Узбекистан*

E-mail: islom\_xusainov@mail.ru

**Аннотация.** В этой работе, с помощью преобразования Крума-Крейна, вычислен второй регуляризованный след для задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях.

В работах [1] и [2], используя метод Б.М.Левитана [3], вычислен первый регуляризованный след задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях.

В этой работе, применяя преобразование Крума-Крейна, вычисляется второй регуляризованный след для следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < \pi \\ y'(0) - a\lambda y(0) = 0 \\ y'(\pi) + b\lambda y(\pi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $q(x) \in C^3[0, \pi]$  действительнозначная функция,  $\lambda \in C$  спектральный параметр,  $a < 0$ ,  $b < 0$ . Для полноты изложения приведем также первый регуляризованный след для задачи (1), этот след был вычислен в работе [4].

Нетрудно доказать, что собственные значения  $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$  задачи (1) действительные, простые, и их последовательность стремится к  $+\infty$ . Используя преобразование Крума-Крейно можно вывести следующую асимптотическую формулу

$$\lambda_n = (n-1)^2 + c_0 + \frac{c_1}{n^2} + \frac{\gamma_n}{n^3}, \quad \{\gamma_n\} \in l_2,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

$$c_1 = -\frac{1}{4} c_0^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi q^2(x) dx + \frac{1}{4\pi} [q'(0) - q'(\pi)] + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{a} q(0) + \frac{1}{b} q(\pi) \right] + \frac{2}{3\pi} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right).$$

**Теорема.** Для собственных значений задачи (1) имеют место следующие формулы регуляризованных следов

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n - (n-1)^2 - c_0] &= -\frac{1}{2} c_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{4} [q(0) + q(\pi)], \\ \lambda_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 - ((n-1)^2 + c_0)^2 - 2c_1] &= -\frac{1}{2} c_0^2 - c_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) + \\ &+ \frac{1}{a^2} q(0) + \frac{1}{b^2} q(\pi) + \frac{1}{2a} q'(0) - \frac{1}{2b} q'(\pi) - \frac{1}{4} [q^2(\pi) + q^2(0)] + \frac{1}{8} [q''(0) + q''(\pi)]. \end{aligned}$$

### Литература

1. Gulijev N.J. The regularized trace formula for the Sturm-Liouville equation with spectral parameter in the boundary conditions. // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2005. v. 22. P. 99-102.
2. Эткин А.Е., Эткина Г.П. Вычисление регуляризованного следа задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. //Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. матем. 2012. т. 5, N 2. С. 81-89.
3. Левитан Б.М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля. // УМН. 1964. т. 19, вып. 1(115). С. 161-165.
4. Yaxshimuratov A., Qo‘ziyeva K. Chegaraviy shartlari spektral parametrga bog‘liq bo‘lgan Shturm-Liuvill masalasi uchun izlar formulasi. // Ilm sarchashmalari. 2017. N 3. 5-10 b.

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ВТОРОЙ СЛЕД ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОБЩИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Яхшимуратов А.Б.<sup>1</sup>, Матёкубов О.М.<sup>2</sup>, Маткаримов С.А.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Ургенчский филиал Ташкентского Университета Информационных Технологий имени Мухаммада Аль-Хорезми, г. Ургенч, Республика Узбекистан*

E-mail: albaron@mail.ru,

<sup>2</sup>*Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Республика Узбекистан*

E-mail: ollabergan2021@mail.ru,

<sup>3</sup>*Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Республика Узбекистан*

E-mail: sanjar\_matkarimov86@mail.ru

**Аннотация.** В этой работе, с помощью преобразования Крума-Крейна, вычислен второй регуляризованный след для задачи Штурма-Лиувилля с общими разделенными граничными условиями.

В 1953 году И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном [1] была получена формула для суммы разностей собственных значений двух регулярных операторов Штурма-Лиувилля. Вскоре после этого Л.А.Дикий [2, 3] предложил другой метод, с помощью которого ему удалось дать рекуррентные формулы для вычисления регуляризованных следов всех степеней оператора Штурма-Лиувилля. Следующий важный шаг был сделан В.Б.Лидским и В.А.Садовничим [4]. Работы Б.М.Левитана [5], Г.Ш.Гусейнова, Б.М.Левитана [6] и П.Лакса [7] также посвящены регуляризованным следам оператора Штурма-Лиувилля. В случае оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом, формулы следов изучены в работах В.А.Садовничего [8], А.М.Савчука и А.А.Шкаликова [9]. Следует отметить подробный обзор В.А.Садовничего и В.Е.Подольского, посвященный формулам следов [10].

В этой работе вычисляется второй регуляризованный след для задачи Штурма-Лиувилля с разделенными общими граничными условиями. При этом применяя преобразование Крума-Крейна эту задачу переведем в задачу Штурма-Лиувилля с граничными условиями Дирихле.

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля с общими разделенными граничными условиями

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < \pi \\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $q(x) \in C^3[0, \pi]$  действительнозначная функция,  $\lambda \in C$  спектральный параметр,  $h, H \in R$ .

Обозначим собственные значения задачи (1) через  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , соответствующие им собственные функции через  $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$ .

Из теоремы об осцилляции следует, что  $y_0(x)$  не имеет нулей на отрезке  $[0, \pi]$ . Поэтому  $v(x) = y'_0(x) / y_0(x) \in C^1[0, \pi]$ . Для функции  $v(x)$  выполняются равенства

$$v' = q(x) - \lambda_0 - v^2, \quad v(0) = h, \quad v(\pi) = -H. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что собственные значения следующей задачи

$$\begin{cases} -z'' + \tilde{q}(x)z = \lambda z, & 0 < x < \pi \\ z(0) = 0 \\ z(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

состоят из чисел  $\lambda_n, n=1, 2, \dots$ , и им соответствуют собственные функции  $z_n(x) = y'_n(x) - v(x)y_n(x), n=1, 2, \dots$ . Здесь

$$\tilde{q}(x) = q(x) - 2v'(x). \quad (4)$$

Для задачи Дирихле (3) из работы [11] нетрудно вывести следующую асимптотику собственных значений

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + \frac{c_1}{n^2} + \frac{\gamma_n}{n^3}, \quad \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{q}(x) dx, \quad c_1 = -\frac{1}{4} c_0^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \tilde{q}^2(x) dx - \frac{1}{4\pi} [\tilde{q}'(\pi) - \tilde{q}'(0)].$$

В работе [3] для задачи Дирихле получены следующие формулы первого и второго регуляризованного следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c_0) = -\frac{1}{4} [\tilde{q}(0) + \tilde{q}(\pi)] + \frac{1}{2} c_0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 - (n^2 + c_0)^2 - 2c_1] = c_1 + \frac{1}{2} c_0^2 - \frac{1}{4} [\tilde{q}^2(0) + \tilde{q}^2(\pi)] + \frac{1}{8} [\tilde{q}''(0) + \tilde{q}''(\pi)].$$

Из этих соотношений, используя равенства (2) и (4) получим следующие формулы регуляризованных следов для задачи (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c_0) = \frac{1}{4} [q(0) + q(\pi)] - \frac{1}{2} (h^2 + H^2) - \frac{1}{2} c_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n^2 - (n^2 + c_0)^2 - 2c_1] = -c_1 - \frac{1}{2} c_0^2 + \frac{1}{2} (h^4 + H^4) - h^2 q(0) - H^2 q(\pi) +$$

$$+ \frac{1}{4} [q^2(0) + q^2(\pi)] + \frac{1}{2} [hq'(0) - Hq'(\pi)] - \frac{1}{8} [q''(0) + q''(\pi)],$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx + \frac{2}{\pi} (H + h),$$

$$c_1 = -\frac{1}{4} c_0^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi q^2(x) dx - \frac{2}{3\pi} (h^3 + H^3) + \frac{1}{\pi} [Hq(\pi) + hq(0)] + \frac{1}{4\pi} [q'(\pi) - q'(0)].$$

### Литература

- Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. // ДАН СССР. 1953. т. 88. N 4. С. 953-956.
- Дикий Л.А. Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке. // Изв. АН СССР, сер. Матем. 1955. т. 19. N 4. С. 187-200.
- Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля. // УМН. 1958. т. 13. N 3. С. 111-143.
- Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. // Функц. анализ и его прил. 1967. т. 1. N 2. С. 52-59.

5. Левитан Б.М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля. // УМН. 1964. т. 19, вып. 1(115). С. 161-165.
6. Гусейнов Г.Ш., Левитан Б.М. О формулах следов для оператора Штурма-Лиувилля. // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1978. N 1. С. 40-49.
7. Lax P.D. Trace formulas for the Schrödinger operator. // Comm. Pure and Appl. Math. 1994. v. 47. N 4. P. 503-512.
8. Садовничий В.А. О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношения для нулей функций Бесселя. // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, мат. мех., 1971. N 3. С. 77-86.
9. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами. // Мат. заметки. 2001. т. 69. вып. 3. С. 427-442.
10. Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов. // УМН. 2006. т. 61. вып. 5(371). С. 89-156.
11. Левитан Б.М., Гусейнов Г.Ш. Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма-Лиувилля. // СЕРДИКА Българско математическо списание. 1977. N 3. С. 273-280.

## Slindrik potensialli ikki fermionli Shryodinger operatorining invariant qism fazodagi xos qiymatlari

**J.I. Abdullayev <sup>1,2</sup>, A.M.Toshturdiyev <sup>1</sup>**

*Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti <sup>1</sup>*

*V.I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti Samarqand bo‘linmasi <sup>2</sup>*

Kvant mexanikasidan ma’lumki [1, 218-b] agar zarracha spini Plank doimiy sining yarim butun soniga teng bo‘lsa, bunday zarrachalar holati antisimmetrik funksiyalar orqali ifodalanadi. Antisimmetrik funksiyalar bilan tavsiflangan zarrachalar Ferma-Dirak taqsimatiga bo‘ysunadi va fermionlar deb yuritiladi.

Bir o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema Hamiltoniani  $h$  ning bog‘langan holatlari [2, 479-483-b] ishda, ikki o‘lchamli panjarada esa [3, 8-13-b] batafsil o‘rganilgan. Bir o‘lchamli panjarada ikki zarrachali Shryodinger operatorining xos qiymatlari qo‘zg‘alishlari [4, 1554-1557-b] ishda o‘rganilgan.

Ikkita bir xil zarrachali Shryodinger operatori  $h(\mathbf{k})$  ning invariant qism fazolari ([5, 5-8-b, 6, 4-9-b, 7, 39-46-b, 8, 731-735-b, 9, 3-8-b]) ishlarda qaralgan.

Ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatori  $h(\mathbf{k})$  ning invariant qism fazolari va diskret spektri chekli o‘lchamli potensial bilan [8, 730-736-b] ishda va maxsus silindrsimon potensial bilan [7, 43-47-b] va [10, 64-67-b] ishlarda o‘rganilgan.

Bu ishda uch o‘lchamli panjara  $\mathbb{Z}^3$  da harakatlanayotgan ikki fermionli sistema Hamiltoniani  $h$  ning bog‘langan holatlari qaraladi. Boshqacha qilib aytganda ikki fermionli sistema Hamiltoniani  $h$  ga mos Shryodinger operatori  $h(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ,  $k_i \in (-\pi; \pi]$  ning (1) maxsus potensial bilan  $L_3^-$  invariant qism fazodagi xos qiymatlari o‘rganiladi.

Ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatori  $h(\mathbf{k})$  ni tashuvchisi

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, |n_1| + |n_2| \leq 1\}$$

silindrda bo‘lgan

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & \text{agar } |n_1| + |n_2| \leq 1 \\ 0, & \text{agar } |n_1| + |n_2| \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

potensial bilan qaraymiz. Bu yerda  $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$ ,  $\bar{v}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan kamayuvchi funksiya

$$\bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \dots > 0 \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}^2(n) < \infty. \quad (2)$$

Soddalik uchun bu yerda ham  $\bar{v}(0) = 0$  deb qabul qilamiz, lekin bu bizning asosiy natijalarga ta’sir qilmaydi.

Ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatori  $h(\mathbf{k})$  Hilbert fazosi  $L_2^0(\mathbb{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-\mathbf{q}) = -f(\mathbf{q})\}$  da quyidagi formula orqali beriladi

$$h(\mathbf{k}) = h_0(\mathbf{k}) - v.$$

Bu yerda zarrachalarning kinetik energiyasiga mos operator  $h_0(\mathbf{k})$  dispersion funksiya

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}\right) + \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}\right) = 6 - 2 \sum_{i=1}^3 \cos \frac{k_i}{2} \cos p_i$$

ga ko‘paytirish operatori sifatida aniqlanadi.

Zarrachalarning potensial energiyasiga mos v operator esa  $L_2^0(\mathbb{T}^3)$  Hilbert fazosida quyidagicha ta'sir qiladi:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}f)(\mathbf{p}) = & \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} [\bar{v}(1) \sum_{i=1}^3 \sin p_i \sin q_i + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+1) \sum_{i=1}^2 (2 \cos np_3 \cos nq_3 \sin p_i \sin q_i + 2 \sin np_3 \sin nq_3 \cos p_i \cos q_i + \\
 & + \frac{1}{2} \sin(n+1)p_3 \sin(n+1)q_3)] f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.
 \end{aligned}$$

Faraz qilaylik,  $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = -f(p)\}$  sifatida  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$  dagi barcha toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazo va  $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = f(p)\}$  esa  $\mathbb{T}$  dagi juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazo bo'lsin.

Ma'lumki, [8, 732-b]-[9, 6-b],  $L_2^0(\mathbb{T}^3)$  fazoni

$$L_2^0(\mathbb{T}^3) = L_1^- \oplus L_2^- \oplus L_3^- \oplus L_{123}^-$$

ko'rinishda to'g'ri yig'indiga yoyish mumkin.

Bu yerda

$$\begin{aligned}
 L_1^- := & L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \quad L_2^- := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \\
 L_3^- := & L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}), \quad L_{123}^- = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}).
 \end{aligned}$$

ya'ni,  $L_i^-$ ,  $i = 1, 2, 3$  fazolar shunday qism fazolarki, ularning elementlari  $f \in L_2^0(\mathbb{T}^3)$  bo'lib, faqat  $p_i$  argumenti bo'yicha toq, qolgan ikki argumentlari bo'yicha juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazolar belgilangan.

**1-lemma.** Faraz qilaylik,  $\hat{v}$  potensial (1) ko'rinishda bo'lsin. U holda  $L_1^-$ ,  $L_2^-$ ,  $L_3^-$  va  $L_{123}^-$  qism fazolar  $h(\mathbf{k})$  operatorga nisbatan invariant bo'ladi.

Bu lemma [10, 62-b] ishdagi 2.1 - lemmaga o'xshash isbotlanadi.

**2-lemma.** Har bir  $\mathbf{k} \neq \boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi)$  uchun  $h(\mathbf{k})$  operatorning  $L_{123}^-$  qism fazodagi toraygani  $h_{123}(\mathbf{k})$  operator xos qiymatlarga ega emas.

Lemmaning isboti [10, 63-b] ishdagi 2.2 - lemmada keltirilgan.

Faraz qilaylik, sistema to‘la kvaziimpulsi  $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi)$ , bo‘lsin, u holda  $h(\boldsymbol{\pi}) = 6I - v$  operatorning spektri  $6, 6 - \bar{v}(n), n \in \mathbb{N}$  xos qiymatlar va  $\{6\}$  muhim spektrdan iborat bo‘ladi.

Agar (2) shart o‘rinli bo‘lsa, u holda  $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(1)$  soni  $h(\boldsymbol{\pi})$  operator uchun uch karrali xos qiymat va bu xos qiymatga mos xos funksiyalar

$$\sin p_1, \quad \sin p_2, \quad \sin p_3,$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Barcha  $n \geq 2$  lar uchun  $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(n)$  soni besh karrali xos qiymat bo‘ladi va bu xos qiymatga mos xos funksiyalar quyidagicha:

$$\begin{aligned} & \sin np_3, \quad \sin p_1 \cos(n-1)p_3, \quad \sin p_2 \cos(n-1)p_3, \\ & \sin(n-1)p_3 \cosp_1, \quad \sin(n-1)p_3 \cosp_2. \end{aligned}$$

Endi  $h_\alpha(\mathbf{k})$  operator bilan  $h(\mathbf{k})$  operatorning  $L_\alpha^-$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ , invariant qism fazolardagi torayganini belgilaymiz, ya’ni  $h_\alpha(\mathbf{k}) = h_0(\mathbf{k}) - v_\alpha = h(\mathbf{k})|_{L_\alpha^-}$ . Bu yerda  $h_0(\mathbf{k})$  operator  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  funksiyaga ko‘paytirish operatori sifatida aniqlanadi.

$h(\mathbf{k})$  operatorning  $L_1^-$  va  $L_2^-$  invariant qism fazolardagi toraygani  $h_1(k_1, k_2, k_3)$  va  $h_2(k_2, k_1, k_3)$  operatorlar unitar ekvivalent va bu operatorlarning diskret spektri haqidagi ma’lumotlar [10, 62-67-b] ishda bat afsil yoritilgan.

Biz bu ishda  $h(\mathbf{k})$  operatorning  $L_3^-$  qism fazodagi diskret spektrini ya’ni  $h_3(\mathbf{k})$  operatorning xos qiymat va xos funksiyalarini o‘rganamiz. Shu maqsadda fermionlarning o‘zaro ta’sir energiyasiga mos v operatorning  $L_3^-$  invariant qism fazodagi toraygani  $v_3$  operatorning  $f$  funksiyaga ta’sirini keltiramiz:

$$(v_3 f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \bar{v}(1) \sin p_3 \sin q_3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+1) [\sin np_3 \sin nq_3 \cosp_1 \cos q_1 \right. \\ \left. + \sin np_3 \sin nq_3 \cosp_2 \cos q_2 + \sin(n+1)p_3 \sin(n+1)q_3] \right\} f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Quyidagilarni kiritamiz: Ma’lumki,

$$\left\{ \psi_n^-(p) = \frac{\sin np}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

funksiyalar sistemasi  $L_2^-(\mathbb{T})$  qism fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi. Biz  $L^-(n), n \in \mathbb{N}$  bilan  $\psi_n^-$  vektorga tortilgan bir o‘lchamli qism fazoni belgilaymiz. U holda,  $L_2^-(\mathbb{T})$  qism fazoni quyidagicha to‘g‘ri yig‘indiga yoyish mumkin

$$L_2^-(\mathbb{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^-(n).$$

Bu yoyilmadan foydalanib  $L_3^-$  qism fazoni

$$L_3^- = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \{L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}_3(n),$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi. Bu yerda

$$\mathfrak{R}_3(n) = L_2^{++}(\mathbb{T}^2) \otimes L^-(n), \quad L_2^{++}(\mathbb{T}^2) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}).$$

Demak rejaga ko‘ra  $h_3(k_1, k_2, k_3)$  operatorning xos qiymatlarini o‘rganamiz. Agar to‘la kvaziimpuls  $\mathbf{k}$  ning uchinchi koordinatasi  $k_3 = \pi$  desak, u holda  $h_3(k_1, k_2, \pi)$  operator cheksiz ko‘p

$$\mathfrak{R}_3(n) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

invariant qism fazolarga ega bo‘ladi.

**3-lemma.** *Faraz qilaylik,  $\hat{v}$  potensial (1) ko‘rinishda bo‘lsin, u holda har bir  $n \in \mathbb{N}$  uchun  $\mathfrak{R}_3(n)$  qism fazo  $h_3(k_1, k_2, \pi)$  operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.*

Bu lemmanning isboti [10, 65-b] ishdagi 3.1-lemmaga o‘xshash isbotlanadi.

Endi  $h_3(k_1, k_2, \pi)$  operatorning  $\mathfrak{R}_3(n) = L_2^{++}(\mathbb{T}^2) \otimes L^-(n)$  invariant qism fazodagi torayganini  $h_{3n}(k_1, k_2, \pi)$  orqali belgilaymiz, ya’ni

$$h_{3n}(k_1, k_2, \pi) = h_3(k_1, k_2, \pi)|_{\mathfrak{R}_3(n)} = [2I + h_0(k_1, k_2) - v_3^{(n)}] \otimes I.$$

Bu yerda  $I$  bilan  $L^-(n)$  fazodagi birlik operator belgilangan.

$$h_3^{(n)}(k_1, k_2) := 2I + h_0(k_1, k_2) - v_3^{(n)}$$

esa  $L_{12}^+ := L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$  qism fazoda aniqlangan ikki fermionli Shryodinger operatori bo‘lib, bu operator  $f \in L_{12}^+$  elementga quyidagicha ta’sir qiladi:

$$\begin{aligned} (h_3^{(n)}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) &= \varepsilon_{\mathbf{k}}(p_1, p_2)f(\mathbf{p}) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} [\bar{v}(n) + \\ &\quad + 2\bar{v}(n+1)(\cos p_1 \cos q_1 + \cos p_2 \cos q_2)]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Bu yerda  $\varepsilon_{\mathbf{k}}(p_1, p_2) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2$ .

Demak,  $h_{3n}(k_1, k_2, \pi)$  operatorning xos qiymatlarini o‘rganish masalasi  $h_3^{(n)}(k_1, k_2)$  operatorning xos qiymatlarini o‘rganishga keltirildi, ya’ni uch o‘lchamli masala ikki o‘lchamli masalani yechishga keltirildi.

Endi kichik  $\beta$  ( $\beta \rightarrow 0$ ) qo‘zg‘alishlarda  $k_1 = k_2 = \pi - 2\beta$  deb  $h_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorning xos qiymatlarini o‘rganishni boshlaymiz. Shu maqsadda,  $h_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorga nisbatan yana bir invariant qism fazolar mavjudligini ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik

$$L_{12}^{+(s)} := \{f \in L_{12}^+ : f(p_1, p_2) = f(p_2, p_1)\}$$

va

$$L_{12}^{+(as)} := \{f \in L_{12}^+ : f(p_1, p_2) = -f(p_2, p_1)\}$$

fazolar  $L_{12}^+$  fazoning qism fazolari bo‘lsin, u holda  $L_{12}^+$  fazoni quyidagicha to‘g‘ri yig‘indiga yoyish mumkin.

$$L_{12}^+ = L_{12}^{+(s)} \oplus L_{12}^{+(as)}.$$

**4-lemma.**  $L_{12}^{+(s)}$  va  $L_{12}^{+(as)}$  qism fazolar  $h_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorga nisbatan invariaant bo‘ladi.

Lemma [8, 733-b] ishdagi 3-lemmaga o‘xshash isbotlanadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.  $h_3^{(n,s)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  va  $h_3^{(n,as)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  deb  $h_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorning  $L_{12}^{+(s)}$  va  $L_{12}^{+(as)}$  invariant qism fazolardagi toraygani (sujenie) ni belgilaymiz. Qo‘zg‘almas  $h_0(\mathbf{k})$  operatorning bu invariant qism fazolardagi toraygani o‘zgarmaydi. Shuning uchun biz faqat  $v_3^{(n,s)} = v_3^{(n)}|_{L_{12}^{+(s)}}$  va  $v_3^{(n,as)} = v_3^{(n)}|_{L_{12}^{+(as)}}$  operatorlarning  $f$  elementga ta’sirini beramiz:

$$(v_3^{(n,s)} f)(p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} [\bar{v}(n) + \bar{v}(n+1)(\cos p_1 + \cos p_2)(\cos q_1 + \cos q_2)] f(q) dq,$$

$$(v_3^{(n,as)} f)(p) = \frac{\bar{v}(n+1)}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} (\cos p_1 - \cos p_2)(\cos q_1 - \cos q_2) f(q) dq.$$

Ma'lumki [11, 52-b],  $h_3^{(n,s)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorning  $z < m(\beta) = 6 - 4\sin\beta$  dan kichik xos qiymatlarini topish masalasi, o'z-o'ziga qo'shma, kompakt  $T_n^s(\beta, z) = r_0^{\frac{1}{2}}(\beta, z)V_3^{(n,s)}r_0^{\frac{1}{2}}(\beta, z)$  operatorning 1 dan katta xos qiymatlarini topishga keltiriladi.

Bu yerda  $r_0^{\frac{1}{2}}(\beta, z)$  bilan  $h_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorning rezolventasi belgilangan.

Har bir  $z < m(\beta)$  uchun  $T_n^s(\beta, z)$  operator  $L_{12}^{+(s)}$  fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$(T_n^s(\beta, z)g)(p) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\varepsilon_\beta(p) - z}} \int_{\mathbb{T}^2} [\bar{v}(n) +$$

$$+ \bar{v}(n+1)(\cos p_1 + \cos p_2)(\cos q_1 + \cos q_2)] \frac{g(q)dq}{\sqrt{\varepsilon_\beta(q) - z}}$$

**5-lemma.**  $z < m(\beta)$  soni  $h_3^{(n,s)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni  $T_n^s(\beta, z)$  operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarli.

**6-lemma.** (Birman-Schwinger)  $h_3^{(n,s)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operatorning  $z < m(\beta)$  dan chapdagи xos qiymatlari soni  $T_n^s(\beta, z)$  operatorning 1 dan katta xos qiymatlari soniga teng.

Yuqorida keltirilgan tasdiq va mulohazalardan foydalanib quyidagi tasdiqni bevosita isbotlash mumkin bo'ladi.

**1-teorema.** Har bir  $n \in \mathbb{N}$  va  $\beta \in [0, \pi]$  lar uchun  $h_3^{(n,s)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operator muhim spektrdan chapda kamida bitta xos qiymatga ega.

Endi quyidagicha belgilash olamiz:

$$C = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{(\cos p_1 - \cos p_2)^2 dp}{2 - \cos p_1 - \cos p_2} \approx 0.546.$$

**2-teorema.** Faraz qilaylik,  $n \in \mathbb{N}$  va  $\bar{v}(n+1) > \frac{2}{C} \sin\beta$  bo'lsin. U holda  $h_3^{(n,as)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  operator yagona oddiy xos qiymatga ega bo'ladi.

Demak, xulosa o‘rnida aytish mumkinki,  $h_3(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$  operator cheksiz ko‘p xos qiymatlarga ega. Ya’ni boshqacha qilib aytganda  $h(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$  operatorning  $L_3^-$  qism fazodagi xos qiymatlari cheksiz ko‘p ekan.

### **Adabiyotlar**

1. M.M. Musaxanov, A.S. Rahmatov. Kvant mexanikasi. Darslik. T. Tafakkur bo‘stoni, 352 b. (2011).
2. Zh.I.Abdullaev. “Bound states of a system two fermions on a one-dimensional lattice.” Theoret. and Math. Phys., T.147, 1, 475-484, (2006).
3. J.I. Abdullaev, K.D. Kuliyev, and B.U. Mamirov, “Infinity the number of bound states of a system of two fermions on a two-dimensional lattice,” Uzb. Mat. Zh. 4, 3–15 (2016).
4. Zh.I. Abdullaev, “Perturbation theory for the two-particle Schrödinger operator on a one-dimensional lattice,” Theoretical and Mathematical Physics, 145 (2), 1551–1558 (2005).
5. Zh.I. Abdullaev, M.Sh. Fayziev and Y.S. Shotemirov, “Invariant of the subspace of the two-particle Schrödinger operator on the lattice,” Uzb. Mat. Zh. 3, 3–10 (2009).
6. J.I.Abdullaev., B.U. Mamirov. “Bound states of the system of two fermions on the three-dimensional lattice.” Journal of Physics Conference Series. 697(1):012022. 2016.
7. J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiev. “Bound States of a System of Two Fermions on Invariant Subspace.” Journal of Modern Physics. 2021. Vol 12. 35-49. 2021.
8. J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiev. “Invariant Subspaces of the Schrödinger Operator with a Finite Support Potential.” Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 728-737.
9. J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiev. “Bound states of a system of two fermions on invariant subspace.” AIP Conference Procedinges vol 2365. 2021.
10. A. Toshturdiev. “Eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator with a cylindrical potential”. Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti. 2023-yil, 5-son (121) 60-68 betlar.
11. Abdullaev J.I., Ikromov I.A., The finitness number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice. Theoretical and Mathematical Physics. T. 152, 2, 47-57. 2007.

# BIR JINSLI BO‘LMAGAN POLIANALITIK TENGLAMA

## YECHIMINI DAVOM ETТИRISH

**<sup>1</sup>T. Ishankulov, <sup>2</sup>N.A.Mukaramxodjayeva, <sup>3</sup>M. Mannonov.**

**<sup>1,2,3</sup>Samarqand davlat universiteti,**

E-mail: mukaramxodjayeva@samdu.uz

**Annotatsiya:** Bir jinsli bo‘lмаган polianalitik tenglama uchun chegaraviy davom ettirish masalasining yechiluvchanlik shartlari o‘рганилган, hamda bu tenglama uchun Karleman formulasining analogi hosil qilingan.

**Kalit so‘zlar:** Polianalitik tenglama, Dirixle masalasi, Borel-Pompey formulasi, Soxotskiy-Plemel formulasi, davom ettirish formulalari, Fok-Kuni teoremasi

### I. Kirish.

Kompleks o‘zgaruvchining  $z = x + iy$  tekisligida  $L$  oddiy yopiq egri chiziq bilan chegaralangan sohani  $D_i$  orqali,  $L$  ning tashqarisini  $D_e$  orqali belgilaymiz.  $\gamma_0(\zeta), \dots, \gamma_{n-1}(\zeta) - L$  da berilgan jamlanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Polianalitik funksiyalar nazariyasida muhim rol o‘ynaydigan Koshi tipidagi integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1)$$

ikkita regulyar polianalitik funksiyani tasvirlaydi. Ulardan biri  $D_i$  sohada, ikkinchisi esa  $D_e$  sohada aniqlangan. (1) Koshi tipidagi integral Koshi integraliga aylanishi uchun

$$\int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \zeta^n d\zeta, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (2)$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli [2]. Boshqacha aytganda, (2) shartlar (1) integralning va hosilalarining  $L$  ning deyarli hamma yerida mos ravishda  $\gamma_0(\zeta), \gamma_1(\zeta), \dots, \gamma_n(\zeta)$  bilan ustma-ust tushishi uchun zarur va yetarlidir. Bu holda  $D_e$  sohada (1) integral aynan nolga teng bo‘ladi. Ushbu maqolada bir jinsli bo‘lмаган polianalitik tenglama yechimini davom ettirish masalasini qaraymiz.

## II.Masalaning qo‘yilishi

**1-masala:** Bir jinsli bo‘limgan polianalitik tenglama uchun quyidagi masalasini qaraymiz:

$$\frac{\partial^n W(z)}{\partial \bar{z}^n} = f(z), \quad z \in D_i, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$W(z) = \gamma_0(z), \quad \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} = \gamma_1(z), \dots, \quad \frac{\partial^{n-1} W(z)}{\partial \bar{z}^{n-1}} = \gamma_{n-1}(z), \quad z \in L. \quad (4)$$

$f(z) = 0$  bo‘lgan holda (3), (4) masala [2] da qaralgan.

Bu masala bir jinsli polianalitik tenglamadagi kabi ortig’i bilan aniqlangan bo‘lib, nokorrekt masala hisoblanadi.

## III. Dirixle masalasining yechimi mavjudligi kritireyasi

(3)-(4) masalaning yechimi mavjudligi kriteriyasini keltiramiz.

**1-Teorema.**  $f \in L_p(D_i, \mathbb{C})$ , ( $p > 2$ ),  $\gamma_0 \in C^{n-1}(L, \mathbb{C}), \dots, \gamma_{n-1} \in C(L, \mathbb{C})$  uchun (3),

(4) masala yechimga ega bo‘ladi bo‘lishi uchun

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \zeta^n d\zeta - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \zeta^n d\xi d\eta = 0, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5)$$

shartlar bajarilishi zarur va yetarlidir. Bu shartlar bajarilganda yagona yechim

$$\begin{aligned} W(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in D_i \end{aligned} \quad (6)$$

formula bilan beriladi.

Isbot. Zarurligi. (3), (4) masalaning  $w(z)$  yechimi mavjud bo‘lsin. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan ma’lumki,  $F(z) \in C^1(D_i) \cap C(\overline{D_i})$  funksiya uchun Borel-Pompey formulasi o‘rinli [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \partial_{\bar{\zeta}} F(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} F(z), & z \in D_i, \\ 0, & z \in D_e. \end{cases} \quad (7)$$

(7) tenglikda

$$F(\zeta, z) = W(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} W(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}}$$

funksiyani qo‘yib, (3), (4) ni e’tiborga olsak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} w(z), & z \in D_i, \\ 0, & z \in D_e. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Yetarli katta  $|z|$  va barcha  $\zeta \in \overline{D}_i$  uchun  $\left| \frac{\zeta}{z} \right| < 1$  bo‘ladi.

Shuning uchun ham (8) dan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi iz} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{1 - \frac{\zeta}{z}} - \\ & - \frac{1}{\pi z} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1 - \frac{\zeta}{z}} = 0 \end{aligned}$$

tenglikni olamiz. Oxirgi tenglikni

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi iz^{n+1}} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \zeta^n d\zeta - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi z^{n+1}} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \zeta^n d\xi d\eta \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Darajali qatorga yoyilmaning yagonaligiga asosan (9) dan (5) ni hosil qilamiz. (3), (4) tengliklarga asosan (6) formulaning o‘rinli ekanligi (8) formuladan kelib chiqadi.

Yetarliligi.  $\gamma_0 \in C^{n-1}(L, \mathbb{C}), \dots, \gamma_{n-1} \in C(L, \mathbb{C})$  funksiyalar (5) shartlarni qanoatlantirsin. (3) tenglamанинг (4) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimining mavjudligini ko'rsatamiz. (8) formulaning chap tomonini (3) va (4) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma(\zeta_0) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Bu ifoda ikkita funksiyani aniqlaydi.  $D_i$  sohada bu ifoda (3) tenglamанинг yechimi bo'lgan  $W_1(z)$  funksiyani aniqlaydi.  $D_e$  sohada (10) ifoda  $W_2(z)$  polianalitik funksiyani aniqlaydi.  $f \in L_p(D_i, \mathbb{C}), (p > 2)$  bo'lganligidan (10) dagi ikkinchi qo'shiluvchi butun  $\mathbb{C}$  kompleks tekislikda uzlusiz bo'ladi [3]. Polianalitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning chegaraviy qiymatlari haqidagi Soxotskiy-Plemel formulasiga ko'ra [2]

$$\begin{aligned} W_1(\zeta) - W_2(\zeta) &= \gamma_0(\zeta), \quad \zeta \in L, \\ \frac{\partial W_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial W_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} &= \gamma_1(\zeta), \quad \zeta \in L, \\ \frac{\partial^{n-1} W_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} W_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} &= \gamma_{n-1}(\zeta), \quad \zeta \in L. \end{aligned} \quad (11)$$

tengliklar o'rinni bo'ladi. Ikkinci tomondan (5) tengliklardan moduli bo'yicha yetarli katta  $z \in D_e$  uchun (9) tenglik kelib chiqadi va yagonalik teoremasiga ko'ra (8) ning ikkinchi tengligiga kelamiz. Bu  $W_2(z) \equiv 0$  ekanligini bildiradi. U holda  $\zeta \in L$  uchun

$W_2(\zeta) \equiv 0, \frac{\partial W_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \equiv 0, \dots, \frac{\partial^{n-1} W_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} \equiv 0$  tengliklar o'rinni bo'ladi. Agar berilgan

masalasining izlanayotgan yechimi sifatida  $W = W_1(z)$  funksiyani olsak, bu funksiya (3) tenglamani va (11) tenglikka asosan (4) shartlarni qanoatlantiradi.

Teorema isbotlandii.

(3) tenglamaning yechimini regulyarlik sohasi chegarasi qismidagi qiymatlariga ko‘ra davom ettirish masalasini qaraymiz. Kompleks tekisligida bo‘lakli silliq chegarali  $D_1$  sohani qaraymiz. Uning chegarasi haqiqiy o‘qning  $AB$  kesmasidan va yuqori yarim tekislikda yotuvchi  $S$  egri chiziqdan iborat.

**2-masala:** Qanday shartlarda  $\varphi_0 \in C^{n-1}(S), \dots, \varphi_{n-1} \in C(S)$  funksiyalar bir jinsli bo‘lman polianalitik tenglama yechimi va hosilalarining izi bo‘ladi.

Bu masalani o‘rganish maqsadida bir jinsli bo‘lman polianalitik tenglama uchun Karleman formulasini keltiramiz.

**2-teorema.**  $f \in L_p(D_1)$ ,  $p > 2$  bo‘lsin.  $W(z) - (1)$  tenglamaning  $D_1$  sohadagi regulyar yechimi bo‘lib,  $\bar{D}_1 = D_1 \cup \partial D_1$  yopiq sohada o‘zining  $(n-1)$ -tartibgacha hosilalari bilan uzlusiz differensiallanuvchi va

$$W(z) = \varphi_0(z), \quad \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1(z), \dots, \frac{\partial^{n-1} W(z)}{\partial \bar{z}^{n-1}} = \varphi_{n-1}(z), \quad z \in S$$

bo‘lsin. U holda quyidagi ekvivalent davom ettirish formulalari o‘rinli:

$$\begin{aligned} W(z) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} & \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_S \exp[-i\sigma(\zeta - z)] \right. \\ & \left[ \varphi_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta})\varphi_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{D_1} \exp[-i\sigma(\zeta - z)] \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \Big\}, \quad z \in D_1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\left[ \varphi_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta})\varphi_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta) \right]}{\zeta - z} d\zeta -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \iint_{D_1} \frac{\frac{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta-z} + \int_0^\infty \left[ -\frac{1}{2\pi} \int_S \exp[-i\sigma(\zeta-z)] \right. \\
& \left. \left[ \varphi_0(\zeta) + (\bar{z}-\bar{\zeta})\varphi_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta) \right] d\zeta + \right. \\
& \left. + \frac{i}{\pi} \iint_{D_1} \exp[-i\sigma(\zeta-z)] \frac{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) d\xi d\eta \right] d\sigma, \quad z \in D_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Teoremaning isboti [2] da bir jinsli bianalitik tenglama uchun keltirilgan.

**3-teorema.**  $f \in L_p(D_1)$ ,  $p > 2$  va  $\varphi_0 \in L(S) \cap C^{n-1}(S^0), \dots, \varphi_{n-1} \in L(S) \cap C(S^0)$ ,

$S^0 = \text{Int } S$  bo'lsin. U holda:

1) Agar  $D_1$  sohada (3) tenglamani hamda S da

$$W(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \varphi_1(\zeta) \quad \frac{\partial^{n-1} W(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} = \varphi_{n-1}(\zeta) \quad \zeta \in S \tag{14}$$

cheagaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi  $W(z)$  funksiya mavjud bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_S \exp[-i\sigma(\zeta-z)] \left[ \varphi_0(\zeta) + (\bar{z}-\bar{\zeta})\varphi_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta) \right] d\zeta + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{i}{\pi} \iint_{D_1} \exp[-i\sigma(\zeta-z)] \frac{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) d\xi d\eta \right\} d\sigma \right| < \infty \tag{15}
\end{aligned}$$

xosmas integral har bir  $z \in \{\text{Im}z > 0\}$  nuqtalarda ( $K \subset \{\text{Im}z > 0\}$  kompaktlarda tekis) yaqinlashadi;

2) agar  $\varphi_0(\zeta), \dots, \varphi_{n-1}(\zeta)$  funksiyalar (15) shartlarni qanoatlantirsa, u holda (3) tenglananing  $D_1$  sohada  $S^0$  gacha (n-1)-hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan va (14) shartlarni

qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo‘lib, bu yechim (12) va (13) ekvivalent formulalar bilan beriladi.

Isbot. 1) (3) tenglamaning  $\bar{D}_1$  sohada (n-1)-hosilalari bilan uzluksiz, hamda (14) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi  $W(z)$  yechimi mavjud bo‘lsin. (15) shartni bajarilishini ko‘rsatamiz.  $f \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$  funksiyalar uchun o‘rinli bo‘lgan Grin formulasining kompleks analogi [3]

$$\iint_{D_1} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\xi d\eta = \frac{1}{2i} \int_{\partial D_1} f(\zeta) d\zeta$$

dan foydalanamiz. Bu formulada

$$f(\zeta) = F(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}}$$

funksiyani qo‘yamiz, bu yerda  $F(z)$  -(3) tenglamaning  $\bar{D}_1$  sohada (n-1) marta uzluksiz differensiallanuvchi yechimi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \int_{\partial D_1} \left[ F(\zeta) - (\bar{\zeta} - \bar{z}) \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} \right] d\zeta = \\ &= \iint_{D_1} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial \zeta^n} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikda

$$F(\zeta) = \frac{i}{\pi} W(\zeta) \exp[-i\sigma(\zeta - z)]$$

deb olsak

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1} \exp[-i\sigma(\zeta - z)] \left[ W(\zeta) - (\bar{\zeta} - \bar{z}) \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} W(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} \right] d\zeta \\ &+ \frac{i}{\pi} \iint_{D_1} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \exp[-i\sigma(\zeta - z)] \frac{\partial^n W}{\partial \zeta^n} d\xi d\eta = 0, \quad \text{Im}z > 0 \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan  $W(z)$  funksiya (3) va (14) masalaning yechimi bo‘lgani uchun

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \int_S \exp[-i\sigma(\zeta - z)] \times \\
& \times \left[ \varphi_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta})\varphi_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta) \right] d\zeta + \\
& + \frac{i}{\pi} \iint_{D_1} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \exp[-i\sigma(\zeta - z)] f(\zeta) d\xi d\eta = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \exp[-i\sigma(\xi - z)] \\
& \left[ W(\xi) + (\bar{z} - \bar{\xi}) \frac{\partial W(\xi)}{\partial \bar{\xi}} + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} W(\xi)}{\partial \bar{\xi}^{n-1}} \right] d\xi
\end{aligned}$$

tenglikni olamiz. Bu yerdan

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{2\pi} \int_S \exp[-i\sigma(\zeta - z)] \left[ \varphi_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta})\varphi_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta) \right] d\zeta + \right. \\
& \left. + \frac{i}{\pi} \iint_{D_1} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \exp[-i\sigma(\zeta - z)] f(\zeta) d\xi d\eta \right| \leq C_1 \exp[-\sigma Imz]
\end{aligned} \tag{16}$$

tengsizlikni olamiz, bu yerda  $C_1$  -musbat o‘zgarmas (16) tengsizlikdan (15) shartning bajarilishi kelib chiqadi.

2)  $\varphi_0(\zeta), \dots, \varphi_{n-1}(\zeta)$  funksiyalar teorema shartlarini qanoatlantirsin. (1)

tenglamaning (14) shartini qanoatlantiradigan  $W \in C^n(D_1) \cap C^{n-1}(D_1 \cup S^0)$  yechimi mavjud bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun (13) tenglikni o‘ng tomonidagi ifodani (\*) orqali belgilaymiz. (\*) dagi birinchi va ikkinchi qo‘siluvchilar Borel-Pompey tipidagi integral bo‘lib  $D_1$  sohada (3) tenglamani qanoatlantiradigan  $h_1(z)$  funksiyani va  $\{Imz > 0\} \setminus \overline{D}_1$  sohada bir jinsli polianalitik tenglamani qanoatlantiradigan  $h_2(z)$

funksiyani beradi. Bu funksiyalar va ularning hosilalarining  $S$  dagi chegaraviy qiymatlari Saxotskiy-Plemel formulasiga asosan

$$h_1(\zeta) - h_2(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \frac{\partial h_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial h_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \varphi_1(\zeta)$$

$$\dots, \frac{\partial^{n-1} h_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} h_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} = \varphi_{n-1}(\zeta), \quad \zeta \in S$$

tengliklarni qanoatlantiradi. (\*) dagi uchinchi xosmas integral teorema shartiga ko‘ra  $\operatorname{Im}\zeta > 0$  yuqori yarim tekislikda polianalitik funksiyani ifodalaydi. Shunday qilib (\*) ifoda  $D_1$  sohada (3) tenglamaning yechimi  $-W_1(z)$  funksiyani va  $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\} \setminus \overline{D}_1$  sohada polianalitik bo‘lgan  $W_2(z)$  funksiyani aniqlaydi. Bu funksiyalarning va hosilalarining  $S$  dagi chegaraviy qiymatlari

$$W_1(\zeta) - W_2(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \frac{\partial W_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial W_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \varphi_1(\zeta)$$

$$\dots, \frac{\partial^{n-1} W_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} W_2(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} = \varphi_{n-1}(\zeta), \quad \zeta \in S \quad (17)$$

tengliklarni qanoatlantiradi. Ikkinci tamondan (\*) ifoda (12) tenglikni o‘ng tomonidagi ifodaga teng. (12) formuladan  $\operatorname{Im}\zeta > \max_S(\operatorname{Im}\zeta)$  yarim tekislikda  $W_2(z) = 0$  ekanligi kelib chiqadi. Polianalitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasiga ko‘ra  $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\} \setminus \overline{D}_1$  sohada  $W_2(z) \equiv 0$  ekanligi kelib chiqadi. Bundan  $W_2(z)$  funksyaning hosilasi bilan  $(\{\operatorname{Im}\zeta > 0\} \setminus \overline{D}_i) \cup S^0$  ga uzluksiz davom etishligi kelib chiqadi. U holda  $W_1(z)$  funksiya ham hosilalari bilan  $D_1 \cup S^0$  ga uzluksiz davom etadi. (17) tengliklardan

$$W_1(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in S^0$$

$$\frac{\partial W_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \varphi_1(\zeta), \quad \zeta \in S^0$$

.....

$$\frac{\partial^{n-1} W_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n-1}} = \varphi_{n-1}(\zeta), \quad \zeta \in S^0$$

tengliklarning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Oxirgi tenglikdan teoremaning tasdig’i kelib chiqadi, (1) tenglamaning  $W(z)$  yechimi sifatida  $W_1(z)$  funksiyani olish mumkin. Teorema isbotlandi.

3-teoremada  $f \equiv 0$  bo‘lganda bir jinsli bianalitik tenglamalar uchun V.A.Fok va F.M.Kunilarning teoremasini umumlashtiradi [2], [5].

**Izoh 1.** Bir jinsli bo‘lmagan bianalitik tenglama uchun Dirixle masalasi [7], [8] da ko‘rib chiqilgan.

**Izoh 2.** Umumlashgan analitik funksiyalar uchun Fok-Kuni teoremasi [9] da olingan.

### **Foydalanimgan adabiyotlar**

1. I.I. Privalov, “Boundary Properties of Analytic Functions”. LGTI, **(1950)**, pp.336
2. Т.И. Ишанкулов, Д.Ш. Фозилов, “Продолжение полианалитических функций”. Известия высших учебных заведений. Математика (2021)
3. I.N. Vekua, “Generalized Analytic Functions”.-: Fizmatgiz, Moscow **(1959)**.
4. Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations, Fizmatgiz Moscow:, **(1962)**.
5. V.A. Fock, F.M. Kuni, “Introduction of a "Damping" Function into Dispersion Relationships” Papers of the Academy of Sciences of the USSR., vol.127, no. 6. **(1959)**, pp.1195-1198.
6. A.V. Bitsadze, “Fundamentals of the Theory of Analytic Functions of a Complex Variable”. Nauka, Moscow **(1984)**.
7. H. Begehr and A. Kumar, “Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation”, Analysis., vol 25 **(2005)**, pp. 55–71.
8. H. Begehr, “Boundary value problems in complex analysis” I, II, Boletin de la Asociación Matemática Venezolana, vol. 12 **(2005)**, pp. 65–85, 223–241.
9. T. Ishankulov, “On the possibility generalized analytical continuation in the domain functions given on a pieces of the boundary”, Siberian Mathematical Journal, vol. 1 no 2, **(2000)**, pp. 1350–1356.

# Уч ўлчовли соҳада эллиптик типли танегламалар системаси учун Коши

масаласининг регуляризацияси

**З.Маликов К.Зулқуфорова**

**Аннотация.** Бу ишда уч ўлчовли маҳсус соҳада эллиптик типли танегламалар системасигаранинг бир қисмида ечимнинг қийматлари берилган бўлса ,яне Коши масаласининг регуляризасияси қаралган.

**Калит сўзлар.** Эллиптик система ,Коши масаласи,фундамаетал ечим ,интеграл формула,регуляризасиялашган ечим.

Qo‘yidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$$

$$\alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, r^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2 = |y - x|$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T, \quad u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))^T, u^0 = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$$

$$E(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & x_2 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & x_n \end{pmatrix} \text{ diogonal matritsa, } n \geq 3$$

Faraz qilaylik  $G$  soha  $R^3$  fazodan olingan chegaralangan soha bo‘lib, uning chegarasi  $y_3 > 0$  yarim fazoda joylashgan S silliq sirtdan va  $y_3 = 0$  tekislikning bir qismidan iborat bo‘lsin.

$A_{l \times n}(x), l, n \geq 3$  deb shunday  $D(x^T)$  matritsalar oilasini belgilaymizki bu matritsaning har bir elementi chiziqli funksiyadan iborat bo‘lib koeffetsiyentlari haqiqiy yoki kompleks sonlardan tashkil topgan bo‘lsin. Bu matritsalar qo‘yidagi shartni qanoatlantirsin:

$$D^*(x^T) D(x^T) = E[(x^2 + \lambda^2) u^0]$$

Bu yerda  $D^*(x^T)$  matritsa  $D(x^T)$  matritsaga ermitli qo‘shma bo‘lgan matritsadan iborat.

$G$  sohada qo‘yidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0 \tag{1}$$

Bu yerda  $D(x^T)$  xarakteristik matritsa  $A_{l \times n}(x)$  dan iborat bo‘lgan matritsa bo‘lsin (1) sistema koeffetsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan Gel’mgol’s tenglamasibidan faktorizatsiyalanuvchi elliptik tipli sistema deyiladi.

Faraz qilayik  $u(x)$  (1) yechimi bo‘lib,  $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$  vektor funksiyani sohaning chegarasi  $S$  ning bir qismida  $u(x)$  vektor funksianing qiymati berilgan bo‘lsin, ya’ni

$$u(x)|_s = f(x) \quad (2)$$

(bu yerda  $f(x)$  uzluksiz berilgan vektor funksiyadan iborat).

$u(x)$  vektor funksianing  $S$  sohada qiymatini (2) dan foydalanib topish masalasiga birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi deyiladi.

Малумким бу масала коррект бўлмаган масалаларга киради, яне бу масаланинг ечими турғунлик шартини қаноатлантирумайди. Лекин ечимлар синфини компакт тўпламгача қисқартиrsак, у ҳолда масала шартли коррект масалага айланади. Коши масаласининг ечими учун қўйидаги теорема ўринлидир. Бунинг учун қўйидаги белгилашни киритамиз.

Agar  $u(x)$  vektor funksiya  $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$  sinfdan olingan vektor funksiya bo‘lib (1) sistemani qanoatlantirsin, u holda qo‘yidagi integral formula o‘rinli bo‘ladi:

$$u(x) = \int_{\partial G} N(x, y)u(y)dS, x \in G \quad (3)$$

Bunda

$$N(x, y) = \left( E \left( 4\pi e^{-i\lambda x} \frac{1}{r} \right) D^* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) D(t^T)$$

$t = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, \cos \theta)$  - sohaning chegarasida o‘tkazilgan tashqi birlik normaldan iboratdir. Ya’ni  $|t|^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \theta = 1$  (3) ga birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun integral formula deb aytildi.

$$u_\sigma(x) = \int_S N(x, y)u(y)dS, x \in G$$

**Теорема. 1.** Агар  $u(x)$  вектор функция  $u(x) \in C^1(G_\rho) \cap C(\overline{G_\rho})$  синфдан олинган бўлиб (1)системани ечимидан иборат бўлиб, қўйидаги чегаравий шартни қаноатлантируса

$$|u(y)|_T \leq 1, y \in T = \partial G_\rho \setminus S, \quad (4)$$

у ҳолда қўйидаги тенгсизликлар ўринлидир.

$$\begin{aligned} |u(y) - u_\sigma(y)| &\leq C_1(x) \sigma \exp(-\sigma x^2), x \in G, \sigma \geq \sigma_0 > 0, \\ \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| &\leq C_2(x) \sigma^2 \exp(-\sigma x^2), x \in G, \sigma \geq \sigma_0 > 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

### Адабиётлар

1. М.М.Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математического физики./Изд.СО.АН.СССР.Новосбриск.1962г.
2. Н.Н.Тарханов.Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа.Ин-т физики АН,СССР,Красноярск ,1980.С 147-160
3. Ш.Ярмухамедов.О продолжении решения уравнения Гельмгольца/ДАН.1997.Т.357.№3.С.320-323.

## BIR JINSLI DIFFERENTIAL TENGLAMALAR SISTEMASINING TRAEKTORIYALARINI TADQIQLASH

<sup>1</sup>*Muxtarov Ya.*, <sup>2</sup>*Miyassarov A.*

*Sharof Rashidov nomidagi Samarkand davlat universiteti*

*e-mail:* <sup>1</sup> [ya-muxtarov@rambler.ru](mailto:ya-muxtarov@rambler.ru); [azizkhujamiyassarov@gmail.com](mailto:azizkhujamiyassarov@gmail.com).

**Annotatsiya.** Innor matrisalarning katta ahamiyati shundaki, ular ikkita ko‘phadning eng katta umumiyligi bo‘lувchisini aniqlash, ko‘phadlarning nollarini taqsimlanishi va boshqa ko‘plab amaliy masalalarni yechish imkonini beradi. Maqolada bir jinsli tenglamalar sistemasini tadqiqlashda innor matritsalardan foydalanilgan va invariant nurlarning mavjudligi va maxsus nuqtaning atrofi elliptik, geperbolik va parabolik sektorlarning mavjudlik shartlar topilgan.

**Kalit so‘zlar:** Bir jinsli, differentzial tenglamalar sistemasi, integrallash, umumiyligi yechim, traektoriya, sektor, invariant nurlar, maxsus nuqta, innor matritsa.

Bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi berilgan

$$\frac{dx}{dt} = P^m(x, y), \frac{dy}{dt} = Q^m(x, y) \Bigg\}, \quad (1)$$

bunda

$$P^m(x, y) = \sum_{j=0}^m a_{m-j,j} x^{m-j} y^j, Q^m(x, y) = \sum_{j=0}^m b_{m-j,j} x^{m-j} y^j$$

va  $a_{m-j,j}, b_{m-j,j}$  -o`zgarmas sonlar

(1) sistemani differensial tenglama ko`rinishida yozib

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{Q^m(x, y)}{P^m(x, y)} \quad (2)$$

uning integral chiziqlarini o`rganamiz.

$y = cy_1, \quad x = cx_1$  almashtirish kiritganda (2) tenglama o`zgarmaydi, shu sababli bu almashtirish har qanday integral chiziqni yana integral chiziqqa olib keladi. (2)

tenglamaning izoklinasi  $\frac{y}{x} = k = const$  ko`rinishidagi to`g`ri chiziqdan iborat

bo`ladi.[3]. ga ko`ra,  $\frac{y}{x} = k_0$  izoklina chiziqlarini, agar bu chiziqlar (2) tenglamaning

yechimi bo`lsa invariant nur deb ataymiz ya`ni bu holda  $k = k_0$

$$f(k) = k \quad (3)$$

tenglamani yechimi bo`lishi kerak.

Barcha invariant nurlar sonini aniqlash masalasi, (3) tenglamaning barcha haqiqiy ildizlarini topish masalasi bilan teng kuchli. (3) tenglamani quyidagi ko`rinishda yozamiz:

$$\Phi(k) = f(k) - k = \sum_{j=0}^m [b_{m-j,j} - a_{m-j,j} k] \cdot k^j = 0. \quad (4)$$

Bunda,  $\Phi(k) - (m+1)$  chi darajali ko`phad va (4) tenglamani har xil haqiqiy ildizlari mavjud bo`lishining yetarli va zaruriy shartlarini aniqlash mumkin[2,3].

(4) tenglama  $k=k_0$  haqiqiy ildizga ega bo`lgan holni qaraymiz .(2) tenglamaga  $y=ux$ ,  $u=u(x)$  almashtirish kiritamiz .

$$x \frac{du}{dx} = \frac{\Phi(u)}{P^m(1, u)} \quad (8)$$

Koordinata boshini  $(0, k_0)$  nuqtaga ko`chirib, quyidagi tenglamaga kelamiz .

$$x \frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{\frac{1}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(k_0) \bar{u}^\nu + \dots + a_{0m} \bar{u}^{-m+1}}{P^m(1, \bar{u} + k_0)} \quad (9)$$

Bunda  $P^m(1, k_0) \neq 0$ ,  $\Phi^{(\nu)}(k_0) \neq 0$ ,  $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

(9) tenglama o`zgartirilgan Brio va Buke tenglamasi deyiladi va yakkalangan maxsus nuqta  $x = \bar{u} = 0$  bu holda quyidagicha sinflanadi:

- 1) Agar  $A = \Phi^\nu(k_0) P^m(1, k_0) > 0$ ,  $\nu = 2\nu_1 + 1$  bo`lsa  $0 = (0, 0)$  nuqta tugun tipli bo`ladi;
- 2) Agar  $A < 0$ ,  $\nu = 2\nu_1 + 1$  bo`lsa  $0 = (0, 0)$  nuqta egar tipli b`oladi;
- 3) Agar  $\nu = 2\nu_1$ , bo`lganda A ning ishorasiga bog`liq bo`lmagan holda  $0 = (0, 0)$  nuqta ochiq egar –tugun tipli(chapdan tugun o`ngdan esa egar yoki aksincha ).

A sonning ishoralariga va  $\nu$  ning juft toqligiga qarab  $y = k_0 x$  invariant nurni, mos ravishda I, II yoki III tipli bo`ladi:

- a) agar  $y = k_0 x$  I-tipli invariant nurning  $\varepsilon$  sektorini olsak, bunda integral chiziqlar koordinata boshiga yaqinlashadi va ularning urinmalari invariant nur bilan birlashishga intiladi. Bunday sektor parabolik deyiladi.
- b) agar II-tipli invariant nurning  $\varepsilon$  sektorini olsak, integral chiziqlarni tashkil qiluvchi  $ox$  o`qi bilan manfiy burchak hosil qiladi.  $\varphi \rightarrow 0$  da integral egri chiziq koordinata boshidan uzoqlashadi va  $\varepsilon$  sektordan chiqadi. Bu holda sektor giperbolik deyiladi.

III-tipli invariant nurning  $\varepsilon$ -sektori parabolik va geperbolik sektorlarning kombinatsiyasidan tuzilgan .Ikkita  $y = k_0 x$ ,  $y = k_1 x$  qo`shti invariant nurlar bilan chegaralangan G –sektorni olamiz .

Agar bu nurlar I-tipli bo`lsa, G-sektor elliptik sektor bo`ladi, invariant nurlar I-tipli va II-tipli bo`lsa unda G-sektor parabolik sektor bo`ladi, agar ikkala invariant nurlar II-tipli bo`lsa bunday sektor giperbolik sektor bo`ladi.

Shunday qilib (1) sistemani  $0 = (0, 0)$  maxsus nuqtaning atrofi elliptik, geperbolik va parabolik sektorlar kombinatsiyalaridan tashkil topgan bo`ladi.

**Teorema.** Agar  $\Delta'_{2m+1}$  [2] innorli musbat matritsa bo`lsa, bu holda (1) sistemada hech bo`lma ganda bir juft II-tipli invariant nurlar mavjud bo`ladi.

**Izbot.** Teoremaning sharti quyidagi tasdiqqa teng kuchli; agar (2.1.8) tenglama  $m+1$  ta yakkalangan maxsus nuqtalarga ega bo`lsa, ularning barchasi tugun tipli bo`la olmaydi, ya`ni kamida bittasi egar tipli bo`ladi.

$\Delta'_{2m+1}$  [2.3] matritsaning innorli musbat bo`lishidan (2.1.8) tenglama  $m+1$  ta yakkalangan maxsus nuqtalarga ega bo`ladi va ularning barchasi tugun tipli bo`la olmaydi. Haqiqatdan ham, agar  $m=2m_1+1$  bo`lsa. Bunda  $\Phi(u)$  funksiya  $a_{0m}<0+\infty$  dan  $+\infty$  gacha uzluksiz o`zgaradi. ( $a_{0m}>0$  bo`lganda  $-\infty$  dan  $-\infty$ ) hamda  $ou$  o`qni  $2m_1+2$  marta kesib o`tadi,  $P^m(1,u)$  funksiya esa  $a_{0m}<0$  bo`lganda  $+\infty$  dan  $-\infty$  gacha ( $a_{0m}>0$  bo`lganda  $-\infty$  dan  $+\infty$  gacha) uzluksiz o`zgaradi.

Egri chiziq  $ou$  o`qni bittadan  $2m_1+1$  martagacha kesib o`tishi (yoki urinib o`tishi) mumkin. Barcha yakkalangan nuqtalar  $(o,u_i)$  ( $i=\overline{1,2m_1+2}$ ) tugun tipli bo`lsin, bunda quyidagi tengsizlik bajarilishi kerak:  $a_{0m}>0$  bo`lganda

$$\begin{cases} \Phi^v(u_1) > 0, \Phi^v(u_2) < 0, \dots, \Phi^v(u_{2m_1+2}) < 0; \\ P^m(1, u_1) > 0, P^m(1, u_2) < 0, \dots, P^m(1, u_{2m_1+2}) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

$a_{0m}<0$  bo`lganda

$$\begin{cases} \Phi^v(u_1) < 0, \Phi^v(u_2) > 0, \dots, \Phi^v(u_{2m_1+2}) > 0; \\ P^m(1, u_1) < 0, P^m(1, u_2) > 0, \dots, P^m(1, u_{2m_1+2}) > 0 \end{cases} \quad (11)$$

(10) va (11) sartlardan quyidagiga kelamiz:  $P^m(1,u)$  funksiya  $a_{0m}>0$  holda  $u +\infty$  dan  $-\infty$  gacha o`zgaraganda  $ou$  o`qni  $2m_1+1$  marta kesib o`tadi ( $a_{0m}<0$  bo`lganda  $-\infty$  dan  $+\infty$  gacha o`zgaradi), bu esa  $P^m(1,u)$  funksiyani o`zgarishiga zid. Natijada (8) tenglamaning barcha maxsus nuqtalari, bir vaqtning o`zida tugun tipli maxsus nuqta bo`la olmaydi. Xuddi shunday  $m$  juft bo`lgan holda ham tasdiq isbotlanadi.

### Adabiyot:

- Шилов Г.Е Интегральных кривые однородного уравнения первого порядка УМН, 1950 г, Т.5, вып 5(39), стр. 193-203

2. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М. Наука, 1979 г.  
304c.

3. Muxtarov Ya., Qobilova D. Polinomial differensial tenglamalar sistemasini tadqiqlashda innorlarni qo'llanishi. Ilmiy tadqiqot va innovatsiya. Scientific Journal vol-2, issue-2. 2023/2, 39-44 b.

## OPERATOR USULI YORDAMIDA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI INTEGRALLASH

<sup>1</sup> *Muxtarov Ya.*, <sup>2</sup> *Obilov H.*

*Sharof Rashidov nomidagi Samarkand davlat universiteti*

*e-mail:* <sup>1</sup> [ya-muxtarov@rambler.ru](mailto:ya-muxtarov@rambler.ru);

<sup>2</sup> [obilovhasanbek08@gmail.com](mailto:obilovhasanbek08@gmail.com);

**Annotatsiya.** Operator (simvolik) usuldan foydalanish o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmanan differensial tenglamalarni yechish bo'yicha bir qator teoremlarni isbotlashni soddalashtirish va tenglamalarni integrallashning samarali usullarini ko'rsatish imkonini beradi. Maqolada teskari operatorning xossalardan foydalangan holda o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmanan differentsial tenglamalar sistemasini yechish usuli ko'rsatilgan.

**Kalit so'zlar:** Operator, simvolik, oddiy operator, chiziqli, bir jinsli, bir jinsli bo'lmanan, differentsial tenglamalar sistemasi, integrallash, umumiy yechim.

Operator usuli [1,2,3] bu algebraik tenglamalar sistemasi uchun Gauss usulini umumlashmasi bo'lib, bu usul yordamida operator ko'rinishida yozilgan differensial tenglamalar sistemasi asosiy yoki kengaytirilgan matritsasini elementar almashtirishlar bajarib uni diagonal shaklga kletirishdan iborat.

$t$  bo'yicha differensiallash  $D$  operatori  $D^n D^m = D^{n+m} = D^m D^n$  xossaga ega.

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 D^0, \quad a_i \in R, i = \overline{0, n}$$

chiziqli operator aynan nolga teng bo'lishi uchun  $a_i = 0$ , ( $i = \overline{0, n}$ ) bo'lishi zarur va yetrali.

Elementlari  $L_{ij}(D)$  bo'lgan  $A(D)$  matritsa  $D$  – matritsa deyiladi. Sistemaining  $A(D)$  matritsasini determinanti  $D$  – determinant deyiladi.

Elementar almashtirishlar bu:

1. Satrlar o'rnini almashtirish;
2. Biror satr elementlarini noldan farqli a songa ko'paytirish;
3. Biror satr elementlaridan boshqa satr elementlaridan olingan k -tartibli hosilalarini mos ravishda qo'shish;

Bu almashtirishlarni mos ravishda  $S_i \leftrightarrow S_j, \alpha S_i, S_i + D^k S_j$  lar bilan belgilaymiz, bu yerda  $D^k$ - k-tartibli differensial operator.

**Misol.** Quyidagi sistemani umumiyl yechimini topamiz

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} - 3\frac{d^2x_2}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + 9x_1 - 3x_2 = 0, \\ \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

**Yechilishi.** Qulaylik uchun sistemasni operator shaklida yozamiz:

$$\begin{cases} D^1 x_1 - 3D^2 x_2 + D^1 x_2 + 9D^0 x_1 - 3D^0 x_2 = 0, \\ D^1 x_1 + D^1 x_2 - D^0 x_1 - D^0 x_2 = 0, \end{cases}$$

bunda  $D^1 = \frac{d}{dt}$ ,  $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$  va hokozo.

$$\begin{cases} (D + 9D^0)x_1 + (-3D^2 + D - 3D^0)x_2 = 0 \\ (D - D^0)x_1 + (D - D^0)x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemani matritsasi  $A(D) = \begin{pmatrix} D + 9D^0 & -3D^2 + D - 3D^0 \\ D - D^0 & D - D^0 \end{pmatrix}$ .

Bu matritsan elementar almashtirishlar yordamida uchburchak shakliga keltiramiz.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} D + 9D^0 & -3D^2 + D - 3D^0 \\ D - D^0 & D - D^0 \end{pmatrix} \overrightarrow{S_2 - S_1} \begin{pmatrix} D + 9D^0 & -3D^2 + D - 3D^0 \\ -10D^0 & 3D^2 + 2D^0 \end{pmatrix} \\ & \overrightarrow{10S_1 + DS_2} \begin{pmatrix} 90D^0 & 3D^3 - 3D^2 + 12D - 30D^0 \\ -10D^0 & 3D^2 + 2D^0 \end{pmatrix} \overrightarrow{9S_2 + S_1} \\ & \begin{pmatrix} 90D^0 & 3D^3 - 3D^2 + 12D - 30D^0 \\ 0 & 3D^3 - 3D^2 + 12D - 12D^0 \end{pmatrix} \overrightarrow{\frac{1}{3}S_1, \frac{1}{3}S_2} \begin{pmatrix} 30D^0 & D^3 - 10D^2 + 4D - 10D^0 \\ 0 & D^3 - D^2 + 4D - 4D^0 \end{pmatrix} \\ & \overrightarrow{S_1 - S_2} \begin{pmatrix} 30D^0 & -9D^2 - 6D^0 \\ 0 & D^3 - D^2 + 4D - 4D^0 \end{pmatrix} \overrightarrow{\frac{1}{3}S_1} \begin{pmatrix} 10D^0 & -3D^2 - 2D^0 \\ 0 & D^3 - D^2 + 4D - 4D^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demak berilgan tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} 10x_1 + (-3D^2 - 2D^0)x_2 = 0 \\ (D^3 - D^2 + 4D - 4D^0)x_2 = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} -3 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - 2x_2 + 10x_1 = 0 \\ \frac{d^3 x_2}{dt^3} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 4 \frac{dx_2}{dt} - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga tengkuchli bo'ladi.

Sistemanı ikkinchi tenglamasi uchinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglama va bu tenglamani umumiylar yechimi [3]:  $x_2(t) = C_1 e^t + C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t$

Sistemanı birinchi tenglamasidan

$$x_1(t) = \frac{1}{10} \left( 3 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2x_2 \right),$$

ya'ni

$$x_1(t) = \frac{1}{2} C_1 e^t - C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t.$$

Natijada berilgan tenglamalar sistemasi umumiylar yechimi

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} C_1 e^t - C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t, \\ x_2(t) = C_1 e^t + C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

#### **Adabiyot:**

1. Малышев Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения // Известия РАН. Дифференциальные уравнения. 1999. № 2. С. 59-66.
2. Малышев Ю.В., Атаманов П.С. Интегрирование дифференциальных уравнений операторным методом. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011. 176 с.
3. Muxtarov Y., O'rroqov N.O. Chiziqli differensial tenglamalarni yechishda operator usulini qo'llash. Buxoro DU. Ilmiy Axboroti 2023, № 4, 33-36 b.

### **Начально-краевая задача для адвекции-дисперсионного уравнения дробного порядка**

Хасанов Иброхим Ихтиерович

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Узбекистана, ул.  
Университетская, 4б, Ташкент 100174, Узбекистан.

Значительный интерес представляет разработка физически обоснованных математических моделей, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на их водный и солевой режимы. Влажность почвы является одним из наиболее

быстро изменяющихся во времени  $t$  свойств почвы. На важность математического моделирования процессов поступления влаги и растворимых солей в почву, их перераспределение, расходование и совместное движение обратили внимание многие исследователи [1-3].

В настоящее время все больший интерес вызывает теория массопереноса во фрактальных средах, которая рассматривается в рамках физики открытых систем [4-6].

Рассмотрим Начально-краевую задачу для дробного дифференциального уравнения порядков  $0 < \beta, \alpha \leq 1$ :

$$u_t + D_{0+,t}^{1-\alpha} u - D_{0+,t}^{1-\beta} u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

где  $f(x, t)$  и  $\varphi(x)$  – заданные функции и  $(D_{0+,t}^\gamma g)(t)$  – дробная производная в смысле Римана-Лиувилля по переменной  $t$ , определяемая равенством ([6] стр. 69):

$$(D_{0+,t}^\gamma g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$D_{0+,t}^\gamma g(t) = g'(t), \quad \gamma = 1.$$

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ,  $\varphi(x) \in C^3([0, l])$ ,  $\varphi'''(x) \in L_2([0, l])$  и  $f(x, t) \in C^{3,0}(\Omega)$ ,  $f_{xxx} \in L_2(\bar{\Omega})$ . Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в классе  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C_\gamma([0, T])$ , удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3), и оно имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \varphi_n I_n(t) + \int_0^t I_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right) X_n(x), \quad (4)$$

где

$$I_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} E_{\beta, \alpha k+1}^{k+1}(-\lambda_n t^\beta), \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (5)$$

$$\gamma = \max\{1 - \alpha, 1 - \beta\}.$$

### Список литературы

1. *Беданкова С.Ю.* Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организацией: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Таганрог: Юж. фед. ун-т, 2007. — 16 с.
2. *Мейланов Р. П., Шабанова М. Р.* Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой. Современные научно-технические технологии, 2007. — № 8. — С. 84–85.
3. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. — М.: Наука, 2006. — 167 с.
4. *Р. И. Паровик.* Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1 (20), (2010), с. 127–132.
5. *Л И Сербина* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. Наука, (2007) 167 р.
6. *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, (2006) 523 p.

### **Обратная задача для уравнения колебания балки с дробным оператором**

**У.Д.Дурдиев<sup>1,2</sup>, А.А. Рахмонов<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

<sup>2</sup>Бухарское отделение института Математики имени В.И. Романовского,  
Ташкент, Узбекистан

<sup>3</sup>Институт Математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан  
Email: umidjan93@mail.ru, arahmonov@mail.ru

Рассмотрим следующее уравнения колебания балки с оператором дробной производной

$${}^cD_t^\alpha u + a^2 u_{xxxx} = F(x, t), 1 < \alpha < 2, \quad (1)$$

где

$${}^cD_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{1-\alpha} u_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области

$$\Sigma = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где  $l$  и  $T$  — заданные положительные числа, с начальными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (3)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

В прямой задаче требуется при заданных числах  $a, l, T$  и достаточно гладких функциях  $f(x, t), \varphi(x)$  и  $\psi(x)$  найти функцию

$$u(x, t) \in C(\bar{\Sigma}) \cap C_x^4(\bar{\Sigma}) \cap C_\gamma^{\alpha, 1}[0, T],$$

удовлетворяющую уравнению (1), при  $(x, t) \in \Sigma$  и условиям (3),(4). Дадим определение класса функций  $C_\gamma^{\alpha, n}[0, T]$  ([1], стр. 199):

$$C_\gamma^{\alpha, n}[0, T] = \{v(t): v(t) \in C^{(n)}[0, T], \text{ и } \partial_t^\alpha v(t) \in C_\gamma[0, T]\},$$

где  $\alpha > 0, n \in N, 0 \leq \gamma < 1$  такие, что  $\gamma \leq \alpha$  и здесь

$$C_\gamma[0, T] = \{f(t) : t^\gamma f(t) \in C[0, T]\}.$$

Основной целью этой работы является следующая обратная задача:

**Обратная задача:** Пусть  $F(x, t) = f(x)g(t)$  и пусть  $g(t)$  – известная функция.

Найти функцию  $f(x)$ , если относительно решения прямой задачи (1)-(4) известна следующая дополнительная информация:

$$u(x, t_0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t_0 \leq T. \quad (5)$$

В этой работе рассматривается прямая начально-краевая задача уравнения колебания балки с дробной производной Капуто и для этого уравнения исследуется обратная задача. Доказывается теоремы единственности и существования поставленной прямой и обратной задач.

### Литература.

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and application of fractional differential equations* (North-Holland Mathematical Studies), Amsterdam: Elsevier, 2006.

**A generalized  $(G'/G)$ -expansion method for the combined mKdV-nmKdV equation**

**Baltaeva I., Khasanov M. M., Rakhimov I.D.**

**Urgench state university, Urgench, Uzbekistan,**

**e-mail: iroda-b@mail.ru, hmuzaffar@mail.ru, ilham.rahimov.87@mail.ru**

**Keywords :** soliton solution, mKdV-nmKdV equation, nonlinear equations, expansion method

This paper is dedicated to find the solutions of the equation of the mKdV-nmKdV equation. It is shown to find the solutions via  $(G'/G)$ - expansion method that is one of the most effective way of finding solutions.

Consider the following mKdV-nmKdV equation

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + 6q^2q_x - q_{xxx}, \\ \mu_x = -q^2 \end{cases}, \quad (1)$$

where  $u(x, t)$  is an unknown function,  $x \in R$ ,  $t \geq 0$ .

### Description of the generalized $(G'/G)$ -expansion method

Let us be given a nonlinear partial differential equation in the form below

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2)$$

with two independent variables  $x$  and  $t$ .  $u = u(x, t)$  is a unknown function,  $F$  is a polynomial in  $q$  and its partial derivatives in which the highest order derivatives and nonlinear terms are involved. Now we give the main steps of the  $(G'/G)$ -expansion method [3]:

**Step 1.** We look for the  $u$  in the travelling form:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx - \Omega(t), \quad (3)$$

where  $\Omega(t)$  is parameter and  $\Omega(t)$  is a continuous function dependent on  $t$ . We reduce equation (2) to the following nonlinear ordinary differential equation:

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (4)$$

where  $P$  is a polynomial of  $q(\xi)$  and its all derivatives  $u' = du(\xi)/d\xi$ ,  $u'' = d^2u(\xi)/d\xi^2$ , .

**Step 2.** We assume that the solution of equation (4) has the form:

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^m a_j \left( \frac{G'}{G} \right)^j, \quad (5)$$

where  $G = G(\xi)$  satisfies the following second order ordinary differential equation

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (6)$$

where  $G' = dG(\xi)/d\xi$ ,  $G'' = d^2G(\xi)/d\xi^2$  and  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) are constants that can be determined later, provided  $a_m \neq 0$ .

**Step 3.** We determine the integer number  $m$  by balancing the nonlinear terms of the highest order and the partial product of the highest order of (4).

**Step 4.** Substitute (5) along with (6) into (4) and collect all terms with the same order of  $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ , the left-hand side of (4) is converted into a polynomial in  $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ . Then, set each coefficient of this polynomial to zero to derive a set of over-determined partial differential equations for  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) and  $\xi$ .

**Step 5.** Substituting the values  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) and  $\xi$  as well as the solutions of equation (6) into (5) we have the exact solutions of equation (2).

## REFERENCES

1. M. Allami, A. K. Mutashar, and A. S. Rashid, “On solutions of the combined KdV-nKdV equation”, *Al-Mustansiriyah Journal of Science*, vol. 30, no. 2, pp. 33–45, Sep. 2019.
2. S. Zhang, J. L. Tong, W. Wang, A generalized  $(G'/G)$ -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, *Phys. Lett. A*, 372, 2254 (2008).
3. M. Wang, X. Li, J. Zhang, The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *PhysLett. A.*, 372, 417 (2008).

## Finite Continued Fraction Approach to Solving Second Order Difference Equations with Variable Coefficients

**Shirali Kadyrov and Alibek Orynbassar**

### **Abstract:**

In this work, we investigate the solutions of second-order linear difference equations with variable coefficients. Our approach focuses on deriving closed-form solutions using finite continued fraction representations. The core of our method lies in the factorization of the quadratic shift operator into linear operators, enabling us to express solutions in terms of finite continued fractions. Furthermore, we extend our findings to establish new generalized continued fraction formulas for the mathematical constant  $\pi^2$ .

Our contributions encompass the formulation and resolution of second-order linear difference equations with variable coefficients. We introduce a factorization technique employing shift operators to achieve closed-form solutions. Additionally, we demonstrate the practical application of our results by deriving novel generalized continued fraction representations for  $\pi^2$ . Notably, our method offers insights into solving non-homogeneous difference equations featuring variable coefficients.

In summary, our work encapsulates the structure of our investigation, introduces key theorems, presents an overview of our methodologies, and outlines future research directions. This study sheds light on a less-explored aspect of difference equations, opening avenues for further exploration in the realm of mathematical constants and related theories.

### References

1. Buchberger, B. (1971). "O velichinakh si, opredelennykh rekursey  $s_{i+1} = u_i s_i + v_i s_{i-1}$ ." Tech. Rep.
2. Elaydi, S. (2005). **An Introduction to Difference Equations**. Springer.
3. Kelley, W. G., & Peterson, A. C. (2001). **Difference Equations: An Introduction with Applications**. Academic Press.
4. Kadyrov, S. and Mashurov, F., 2021. Generalized continued fraction expansions for  $\pi$  and e. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 24(6), pp.1809-1819.
5. Lu, Z. (2019). "Elementary proofs of generalized continued fraction formulae for e." arXiv preprint arXiv:1907.05563.
6. Mallik, R. K. (1997). "On the solution of a second order linear homogeneous difference equation with variable coefficients." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 215(1), 32-47.
7. Raayoni, G., Gottlieb, S., Manor, Y., Pisha, G., Harris, Y., Mendlovic, U., Haviv, D., Hadad, Y. and Kaminer, I., 2021. Generating conjectures on fundamental constants with the Ramanujan Machine. *Nature*, 590(7844), pp.67-73.
8. Sherman, T. (2000). "Summation of Glaisher and Apéry-like series."

## IV. SHO'BA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

### Предельные теоремы для критических отображений окружности с числом вращения алгебраического типа

**А.А. Джалилов, С.Х. Абдухакимов**

Рассмотрим пространство  $X_{cr}(\rho)$  вещественно-аналитических,

гомеоморфизмов окружности с числом вращения  $\rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots]$ ,  $k_1, k_2 \in N$ . и с одной критической точкой в которой производная рано нулю. Хорошо известно (см.[1]) что ренормализационное преобразование  $R_{cr} = R_{cr}(k_1, k_2)$  в  $X_{cr}(\rho)$  имеет единственную неподвижную точку  $T_{cr} = T_{cr}(k_1, k_2)$ . Обозначим через  $Cr(T_{cr})$  множество всех критических  $C^1$  – сопряженных с  $T_{cr}$  отображений окружности. В работе (см. [2],[3]) построена единственная пара потенциалов  $(U_{k_1}, U_{k_2})$  соответствующую всем отображениям из  $X_{cr}(\rho)$ . Основная цель настоящей работы поведение нормированных времени попадания в малые окрестности критической точки.

Пусть  $k_1 \in N$ . Рассмотрим пространство  $X$  пар  $(\xi(x), \eta(x))$  реал-аналитических функций, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой  $R^1$  удовлетворяющих следующим условиям (см. [1],[2],[3]):

- a)  $0 < \xi(0) < 1$ ;
- б)  $\xi(0) = \eta(0) + 1$ ;
- в)  $\xi(\eta(0)) = \eta(\xi(0))$ ;
- г)  $\xi(\eta(0)) < 0$ ,  $\xi^2(\eta(0)) < 0$ , ...,  $\xi^{k_1-1}(\eta(0)) < 0$ ;
- д)  $\xi^{k_1}(\eta(0)) > 0$ ;
- е)  $\xi'(0) = \eta'(0) = \xi''(0) = \eta''(0) = 0$ ;  $\xi'''(0) \neq 0$ ,  $\eta'''(0) \neq 0$ ;
- ф)  $(\xi \circ \eta)'''(0) = (\eta \circ \xi)'''(0)$ .

Здесь и далее  $f^i$  обозначает  $i$ -ую итерации  $f$ . Пусть  $(\xi, \eta) \in X$ . Условия (а)–(ф) позволяют построить гомеоморфизм единичной окружности  $[\eta(0), \xi(0))$ :

$$T_{\xi, \eta}(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{если } x \in [\eta(0), 0), \\ \eta(x) & \text{если } x \in [0, \xi(0)). \end{cases}$$

Пусть  $k_1, k_2 \geq 1$ ,  $k_1 \neq k_2$ . Мы обозначим через  $X_{cr}(\rho(k_1, k_2))$  подмножество  $X$ , содержащий пары  $(\xi, \eta)$  такие, что число вращения

$$\rho(k_1, k_2) := \rho(T_{\xi, \eta}(x)) = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - \frac{4k_2}{k_1}}}{2k_1}$$

Заметим, что разложение иррационального числа  $\rho(k_1, k_2)$  в непрерывную дробь имеет вид:  $\rho(k_1, k_2) = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots]$ ,  $k_1, k_2 \in N$ .

Обозначим через  $\frac{p_n}{q_n}$   $n$ -ую подходящую дробь числа  $\rho(k_1, k_2)$ . Числа  $q_n$

называются временами первого возвращения. Элементы последовательности  $\{q_n, n \geq 1\}$  удовлетворяют разностным уравнениям

$$q_{2n+1} = k_1 \cdot q_{2n} + q_{2n-1}, \quad q_{2n} = k_2 \cdot q_{2n-1} + q_{2n-2}$$

с начальными условиями.

Теперь мы определим два ренормализационные преобразования  $R_{k_1}$  и  $R_{k_2}$

$$R_{k_i}(\xi, \eta) = ((\alpha_i \xi^{k_i-1}(\eta(\alpha_i^{-1}x))), (\alpha_i \xi^{k_i-1}(\eta(\xi(\alpha_i^{-1}x))))),$$

где  $\alpha_i = \alpha_i(\xi, \eta) = (\xi^{k_i-1}(\eta(0)) - \xi^{k_i}(\eta(0)))^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ .

Используя условия *a)* и *в)* легко можно показать, что  $\alpha_i < -1$ ,  $i = 1, 2$ . Определим преобразование  $R := R_{k_2} \circ R_{k_1}$  на  $X_{cr}(\rho(k_1, k_2))$ .

Ренормализационное преобразование  $R$  обладает единственной гиперболической периодической точкой  $(\xi, \eta)$  (см. [4]). Отметим, что  $\xi(x)$  и  $\eta(x)$  являются аналитическими функциями от  $x^3$  т.е.

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta(0) + \frac{\eta^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{\eta^{(6)}(0)}{3!} \cdot x^6 + \dots + \frac{\eta^{(3n)}(0)}{3n!} \cdot x^{3n} + \dots, \\ \xi(x) &= \xi(0) + \frac{\xi^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{\xi^{(6)}(0)}{3!} \cdot x^6 + \dots + \frac{\xi^{(3n)}(0)}{3n!} \cdot x^{3n} + \dots, \end{aligned}$$

Рассмотрим единичную окружность  $[\eta(0), \xi(0))$  с отождествленными концами. Обозначим через  $T_{cr}$  отображение окружности  $[\eta(0), \xi(0))$  порожденное при помощи пары  $(\xi, \eta)$ .

**Определение 1.** Два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма окружности  $T_1$  и  $T_2$  называются  $C^r$  – сопряженными  $r \geq 1$ , если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности  $T_\varphi \in C^r(S^1)$  (при  $r \geq 1$  необходимо, чтобы  $T_\varphi^{-1} \in C^r(S^1)$ ) такой, что выполняется следующее равенство:

$$T_\varphi \circ T_1 = T_2 \circ T_\varphi.$$

Рассмотрим критическую точку  $x_0 = 0 \in S^1$  и определим ее орбиту

$$O(x_0) = \{x_i = T^i x_0, i \geq 0\}.$$

Обозначим через  $C^r(T_{cr})$  множество всех критических отображений окружности  $C^1$  – сопряжённых с  $T_{cr}$ .

Заметим, что точки  $x_{q_n} = T^{q_n}(x_0)$  для каждого лежать по разным сторонам точки  $x_0$ . Более точно,  $x_{q_n}$  лежат слева от  $x_0$ , если  $n$  нечетное, справа в случае нечетного  $n$  (см. [5]).

**Определение 2.** Отрезок соединяющий точки  $x_{q_n}$  и  $x_{q_{n+1}}$  называется  $n$ -ой ренормализационной окрестностью точки  $x_0$  и обозначается через  $V_n(x_0)$ .

Теперь определим понятие функции первого попадания в окрестность  $V_n(x_0)$ .

**Определение 3.** Функция  $E_n^{(1)} : S^1 \rightarrow N$  определяемая по формуле

$$E_n^{(1)}(x) = \min\{i \geq 1 : T^i x \in V_n\}$$

называется функцией первого попадания в окрестность  $V_n(x_0)$ .

Функция первого попадания в  $E_n^{(1)}(x)$  принимает значения  $1, 2, \dots, q_n$ . Для функций первого попадания справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Для всех  $n \geq 1$  справедливы следующие соотношения:

$$E_n^{(1)}(x) = \begin{cases} q_n - i, & \text{агар } x \in \Delta_i^{(n-1)}, 1 \leq i \leq q_n - 1, \\ q_{n+1} - j & \text{агар } x \in \Delta_j^{(n)}, 1 \leq j \leq q_{n+1} - 1. \end{cases}$$

Определим нормированные функции попадания  $\bar{E}_n^{(1)}(x) := q_n^{-1} E_n^{(1)}(x)$ . Далее, введем функцию распределения для случайной величины  $\bar{E}_n^{(1)}(x)$  по мере Лебега  $l$  на окружности  $\{P_n, n \geq 1\}$ :

$$\Phi_n^{(1)}(t) = l\{x : \bar{E}_n^{(1)}(x) < t\}$$

Хорошо известно ( см. [6]), что при помощи орбиты критической точки можно определить последовательность конечных разбиений окружности.

Обозначим через  $\Delta_0^{(n)}$  соединяющий точки  $x_{q_{n-1}}$  и  $x_{q_n}$ . Положим  $\Delta_i^{(n)} = T^i \Delta_0^{(n)}$ ,  $i \geq 1$ .

Функцию распределения  $\Phi_n^{(1)}(t)$  соответствующую функцию первого попадания  $E_n^{(1)}(x)$  можно выразить при помощи длин отрезков элементов динамического разбиения  $P_n$ .

Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

**Теорема 2.** Рассмотрим критическое отображение  $T \in Cr(T_{cr})$ . и последовательность функций распределений  $\{\Phi_n^{(1)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$  соответствующих нормированную функции первого попадания  $\bar{E}_n^{(1)}(x)$  в  $n$ -ую ренормализационную окрестность особой точки  $x_0$ .

Тогда

- 1) Для всех  $t \in R^1$  существуют конечные пределы и справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{2n-1}^{(1)}(t) = \Phi_{k_1}^{(2)}(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{2n}^{(1)}(t) = \Phi_{k_2}^{(2)}(t);$$

$$2) \Phi_{k_1}^{(2)}(t) = 0, \Phi_{k_2}^{(2)}(t) = 0, \text{ если } t \leq 0 \text{ и } \Phi_{k_1}^{(2)}(t) = 1, \Phi_{k_2}^{(2)}(t) = 1, \text{ если } t \geq 1$$

$$3) \text{ Обе функции } \Phi_{k_1}^{(2)}(t) \text{ и } \Phi_{k_2}^{(2)}(t) \text{ являются непрерывными на прямой.}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ostlund R., Rand D., Sethna J., Sigga E. Physica D. 1983. V. 8.303.
2. Abdukhakimov S.X., Khomidov M.K. The orbit of critical point and thermodynamic formalism for critical circle maps without periodic points. Uzbek Mathematical Journal, 2020 № 3pp. 4-15.
3. А.А. Джалилов, Предельные законы времени попадания для критических отображений окружности, ТМФ, 2004, том 138, номер 2, 225-245.
4. de Faria E., de Melo W. Rigidity of critical mappings I. Preprint № 16. IMS Stony Brook, 1997.
5. Корнфельд И.П., Синай Я.Г, Фомин С.В. Эргодическая теория. - М.: Наука. 1980.
6. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. -М.: Изд.фирмы “Физико-математическая литература”, 1995.

# Аппроксимация случайных полей операторами Джексона в равномерной метрике

Шамшиев Абдивали

Доцент кафедры методики преподавания математики, ДжГПУ

**Аннотация:** В работе исследуется равномерное приближение субгауссовых случайных полей операторами Джексона.

**Ключевые слова:** субгауссовская случайная величина, субгауссовское случайное поле, класс  $C_{\Omega}^{2\pi}(R^2)$  -  $2\pi$  периодических по каждой переменной случайных полей, приближение (аппроксимация), оператор Джексона.

Вначале приводим некоторые понятия и вспомогательные результаты, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Случайная величина (сл.вел.)  $\tilde{Z}$  называется субгауссовой [13], если существует  $a \geq 0$  такое, что  $M\exp\{\tilde{Z}\lambda\} \leq \left\{ \frac{a^2 \lambda^2}{2} \right\}$  для всех  $\lambda \in R^1$ .

Обозначим  $\tau(\tilde{Z}) = \inf \{ a \geq 0 : M\exp\{\tilde{Z}\lambda\} \leq \left\{ \frac{a^2 \lambda^2}{2} \right\}, \lambda \in R^1 \}$ .

Известно [3], что сл.вел.  $\tilde{Z}$  является субгауссовой тогда и только тогда, если  $M\tilde{Z} = 0$  и  $\tau(\tilde{Z}) < \infty$ . В работе [3] также показано, что  $\tau(\tilde{Z}) = \sup_{\lambda \neq 0} \left\{ \frac{2 \ln M\exp\{\tilde{Z}\lambda\}}{\lambda^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$  и пространство всех субгауссовых сл.вел.  $\tilde{Z}$  с нормой  $\|\tilde{Z}\|_{sub} = \tau(\tilde{Z})$  является банаховым пространством.

Случайная функция  $\tilde{Z}(t)$ ,  $t \in T \subset R^m$ ,  $m \in N$ , называется субгауссовой [3], если  $M\tilde{Z}(t) = 0$  и  $\sup_{t \in T} \tau(\tilde{Z}(t)) < \infty$ .

Случайная функция  $\tilde{Z}(t)$ ,  $t \in T \subset R^m$ ,  $m \in N$  называется предгауссовой [4],[5], если существуют константы  $k$  и  $K$  ( $0 < k, K < \infty$ ) такие, что  $M\exp\{k\tilde{Z}(t)\} \leq K$ .

Пусть предгауссовская случайная функция  $\tilde{Z}(t)$ ,  $t \in T$  такая, что  $M\tilde{Z}(t) = 0$ ,  $\sup_{t \in T} M\tilde{Z}^2(t) > 0$ . Тогда функция

$\phi(\lambda) = \max_{|x|=\lambda} \sup_{t \in T} \ln M\exp\{x\tilde{Z}(t)\}$  определена, непрерывна, монотонно

возрастает и выпукла на  $[0, \Lambda]$ , для каждого  $\lambda \in [0, \Lambda]$  существуют правая и левая производные функции  $\phi(\lambda)$ , где  $\Lambda = \sup\{\lambda : \phi(\lambda) < \square\}$  [5].

В работе [5] также показано, что функция  $f(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda}$  монотонно

возрастает на  $[0, \Lambda]$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \square} f(\lambda) = L$ ,  $0 < L \leq \square$ , функция

$\rho(t, s) = \sup_{x \neq 0} |x|^{-1} \chi(\ln M \exp\{x[\zeta(t) - \zeta(s)]\})$  является полуметрикой

на  $T$ , где  $\chi(x)$  обратная к  $\phi(\lambda)$  функция. Метрику  $\rho$  называют естественной метрикой случайной функции  $\zeta(t)$ .

Пусть  $(T, \rho)$  соответствующее метрике  $\rho$  топологическое пространство,  $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$  -  $\varepsilon$  – энтропия пространства  $(T, \rho)$ , где  $N(\varepsilon)$  минимально возможное число числа точек в  $\varepsilon$  – сети  $S(\varepsilon)$  пространства  $(T, \rho)$ .

Введем функцию  $\Psi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon H(x)[\chi(H(x))]^{-1} dx$ .

**Теорема Д [5].** Пусть  $\zeta(t)$ ,  $t \in T$  – предгауссовская сепарабельная, относительно некоторого сепарабельного на  $(T, \rho)$  множества, случайная функция,  $L = \square$ ,  $\Psi(\varepsilon) < \square$ . Тогда  $\zeta(t)$  ограничен, непрерывен на  $(T, \rho)$  с вероятностью единица и для всех

$$u \geq \inf_{p \in (0, 1)} \left[ \frac{2}{p(1-p)} \Psi(p) + \frac{1}{1-p} \varphi' \left( \frac{\lambda(H(p)-0)}{2(1-p)} \right) \right]$$

справедлива оценка

$$P \left\{ \sup_{t \in T} \zeta(t) \geq u \right\} \leq \exp \{-\varphi^*(u - \Psi^*(u))\}, \text{ где}$$

$\Psi^*(u) = \inf_{p \in (0, 1)} [up + \frac{2}{p} \Psi(p)]$ ,  $\varphi^*(x) = \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda x - \varphi(\lambda))$ ,  $x \geq 0$  - преобразование Юнга-Фенхеля.

**З а м е ч а н и е 1.** Любая субгауссовская случайная функция  $\zeta(t)$ ,  $t \in T$ ,

является предгауссовской и для нее  $\varphi(\lambda) = \tau \frac{\lambda^2}{2}$ ,  $\chi(x) = \sqrt{\frac{2x}{\tau}}$ ,  $L = \square$ ,

$\varphi^*(x) = \frac{x^2}{2\tau}$ , естественная метрика  $\rho(t, s) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|\zeta(t) - \zeta(s)\|_{sub}$ , где

$$\tau = \sup_{t \in T} \|\zeta(t)\|_{sub}.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Любая центрированная гауссовская случайная функ-

ция  $\zeta(t)$  является субгауссовой и норма  $\|\zeta(t)\|_{sub} = \{M\zeta^2(t)\}^{\frac{1}{2}}$ .

В дальнейшем будем пользоваться следующей оценкой, которая вытекает из теоремы Д.

**Следствие Д.** Пусть  $\zeta_0(t)$ ,  $t \in T$ , субгауссовская сепарабельная относительно некоторого сепарабельного на  $(T, \rho_0)$  множества, случайная функция, где  $\rho_0(t, s) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|\zeta_0(t) - \zeta_0(s)\|_{sub}$ ,  $t, s \in T$ ,  $\tau = \sup_{t \in T} \|\zeta(t)\|_{sub}$ . Если  $0 < \tau \leq 1$  и  $\Psi(1) < \square$ , то для всех  $u \geq 16 \Psi(1)$

$$P\{\sup_{t \in T} \zeta_0(t) \geq u\} \leq \exp\left\{-\frac{u^2 - 6u^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Psi(1)}}{2}\right\}.$$

**Доказательство следствия Д.** Согласно замечанию 1  $L = \square$ , т.е. для субгауссовой случайной функции  $\zeta_0(t)$  применима теорема Д. Так как

$$\begin{aligned} & \inf_{p \in (0,1)} \left[ \frac{2}{p(1-p)} \Psi(p) + \frac{1}{1-p} \varphi' \left( \frac{\lambda(H(p))}{2(1-p)} - 0 \right) \right] = \\ &= \inf_{p \in (0,1)} \left[ \frac{2}{p(1-p)} \Psi(p) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\tau H(p)}}{(1-p)^2} \right] \text{ и } \varphi^*(x) = \frac{x^2}{2\tau}, \text{ то согласно} \\ & \text{теореме D } P\{\sup_{t \in T} \zeta_0(t) \geq u\} \leq \exp\left\{-\frac{u^2 - 2u\Psi^*(u) + [\Psi^*(u)]^2}{2\tau}\right\} \leq \\ & \leq \exp\left\{-\frac{u^2 - 2u\Psi^*(u) + [\Psi^*(u)]^2}{2}\right\} \text{ для всех} \\ & u \geq \inf_{p \in (0,1)} \left[ \frac{2}{p(1-p)} \Psi(p) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\tau H(p)}}{(1-p)^2} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\Psi(p) = \frac{\sqrt{2\tau}}{2} \int_0^p \sqrt{H(x)} dx \geq \frac{p\sqrt{2\tau H(p)}}{2}$ , т.е.

$$\begin{aligned} H(p) &\leq \Psi^2(p) \frac{2}{p^2\tau}, \text{ следовательно, } \inf_{p \in (0,1)} \left[ \frac{2}{p(1-p)} \Psi(p) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\tau H(p)}}{(1-p)^2} \right] \leq \\ &\leq \inf_{p \in (0,1)} \left[ \frac{2\Psi(p)}{p(1-p)} + \frac{\Psi(p)}{(1-p)^2} \right] \leq 16 \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \leq 16 \Psi(1). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для всех  $u \geq 16 \Psi(1)$

$$P\{\sup_{t \in T} \zeta_0(t) \geq u\} \leq \exp\left\{-\frac{u^2 - 2u\Psi^*(u) + [\Psi^*(u)]^2}{2\tau}\right\}.$$

Если учесть, что  $\Psi^*(u) \leq 6\sqrt{u\Psi(1)}$  и  $\exp\left\{-\frac{u^2 - 6u^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Psi(1)}}{2}\right\} \leq 1$ , при

$u \geq 16 \Psi(1)$ , то приходим к утверждению следствия Д.

### Следствие Д доказано.

Переходим к изложению основных результатов работы.

Обозначим через  $C_\Omega^{2\pi}(R^2)$  класс  $2\pi$ -периодических по каждой переменной сл.п.  $\tilde{\zeta}(t, s)$  заданных на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,

$$D_{n,n}(\tilde{\zeta}; t, s) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\zeta}(t+x) \tilde{\zeta}(s+y) D_n(x) D_n(y) dx dy \quad (1)$$

оператор Джексона на  $C_\Omega^{2\pi}(R^2)$ , где  $D_n(x)$ -ядро Джексона:

$$D_n(x) = \frac{3}{2\pi(2n^2+1)n} \left( \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^4.$$

Пусть сепарабельное субгауссовское сл.п.  $\tilde{\zeta}(t, s) \in C_\Omega^{2\pi}(R^2)$ .

Предположим, что выполнено условие

$$(A) : \|\tilde{\zeta}(t, s) - \tilde{\zeta}(t', s')\|_{sub} \leq \varrho \left( \sqrt{(t-t')^2 + (s-s')^2} \right), \quad (t, s), (t', s') \in R^2,$$

где  $\varrho(x)$  – некоторый модуль непрерывности, для которой существует обратная функция  $\varrho^{-1}(x)$  и интеграл  $\int_0^1 \frac{\varrho(z)}{z\sqrt{|\ln z|}} dz < \infty$ .

Из результатов [11] следует, что сл.п.  $\tilde{\zeta}(t, s)$  – непрерывен с вероятностью единица.

Рассмотрим приближение  $\tilde{\zeta}(t, s)$  оператором Джексона (1). Исследуем нормированное поле уклонений

$$\hat{\eta}_n(t, s) = \frac{\tilde{\zeta}(t, s) - D_{n,n}(\tilde{\zeta}; t, s)}{2C_0\varrho(1/n)}, \quad \text{где } C_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + 1.$$

**Теорема.** Если выполнено (A), то для всех  $z > 64$  имеет место неравенство

$$P\left\{\max_{\substack{|t| \leq \pi \\ |s| \leq \pi}} \left| \frac{\hat{\eta}_n(t, s)}{\hat{\gamma}_n} \right| \geq z \right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{z^2}{6}\hat{\gamma}_n^2\right\}, \quad \text{где}$$

$$\hat{\gamma}_n = \sqrt{\ln(\pi\sqrt{2} + 2)} + \sqrt{\ln n} + \frac{1}{2\omega(1/n)} \int_0^{1/n} \frac{\varrho(z)}{z\sqrt{|\ln z|}} dz.$$

**Доказательство теоремы.** Очевидно, что  $M\hat{\eta}_n(t, s) = 0$ ,

$$\hat{\tau}_n = \|\hat{\eta}_n(t, s)\|_{sub} \leq 1 \text{ и естественная метрика сл.п. } \hat{\eta}_n(t, s) \quad \hat{\rho}_n(t, s; t', s') \leq \frac{\sqrt{(t-t')^2 + (s-s')^2}}{\sqrt{\hat{\tau}_n}}. \quad (2)$$

Используя (2), для  $\varepsilon$  – энтропии  $\hat{H}_n(\varepsilon)$  пространства  $([-\pi, \pi]^2, \hat{\rho}_n)$  получаем, что

$$\hat{H}_n(\varepsilon) \leq 2[\ln(\pi\sqrt{2}) + 2\varepsilon^{-1} \left( \sqrt{\hat{\tau}_n} \varepsilon \right) + \ln \frac{1}{\varepsilon^{-1}(\sqrt{\hat{\tau}_n} \varepsilon)}].$$

$$\text{Поэтому } \hat{\Psi}_n(1) = \frac{\sqrt{2\hat{\tau}_n}}{2} \int_0^1 \sqrt{\hat{H}_n(\varepsilon)} d\varepsilon \leq \hat{\gamma}_n < \infty, \text{ для каждого } n \in N. \quad (3)$$

Отсюда, применяя следствие Д, получаем, что для всех  $u \geq 36\hat{\Psi}_n(1)$

$$P\left\{\max_{\substack{|t| \leq \pi \\ |s| \leq \pi}} \hat{\eta}_n(t, s) \geq u\right\} \leq \exp\left\{-\frac{u^2 - 6u^2 \sqrt{\hat{\Psi}_n(1)}}{2}\right\}.$$

$$\text{Согласно (3) для } u \geq 36\hat{\Psi}_n(1) \quad P\left\{\max_{\substack{|t| \leq \pi \\ |s| \leq \pi}} \hat{\eta}_n(t, s) \geq u\right\} \leq \exp\left\{-\frac{u^2 - 6u^2 \sqrt{\hat{\gamma}_n}}{2}\right\}.$$

После замены  $u = z\hat{\gamma}_n$ , отсюда следует, что для всех  $z \geq 36$

$$P\left\{\max_{\substack{|t| \leq \pi \\ |s| \leq \pi}} \hat{\eta}_n(t, s) \geq z\right\} \leq \exp\left\{-\gamma_n^2 \left(\frac{z^2}{2} - 3z^{\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

Если будем считать, что  $z \geq 64$ , то  $z^2 - 6z^{\frac{3}{2}} \geq \frac{z^2}{4}$ , следовательно,

для любого  $z \geq 64$  имеет место неравенство

$$P\left\{\max_{t \in [0, T]} \eta_h(t) \geq z\right\} \leq \exp\left\{-\frac{z^2}{8}\gamma_n^2\right\}, \text{ которое приводит к утверждению}$$

теоремы.

**Теорема доказана.**

**Следствие.** Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \delta < 0$ ,  $\varepsilon(1/n)\hat{\gamma}_n \downarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  и выполнены условия теоремы 2. Если

$$n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) = \min\{n \in N : 2C_0 \varepsilon(1/n) \left[64\hat{\gamma}_n + 2\sqrt{\ln \frac{2}{\delta}}\right] \leq \varepsilon\},$$

то для всех  $n \geq n_0 + 1$

$$P\left\{\max_{\substack{|t| \leq \pi \\ |s| \leq \pi}} |\tilde{z}(t, s) - D_{n,n}(\tilde{z}; t, s)| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \delta.$$

**Доказательство следствия** вытекает из теоремы, если положить

$$z = 64 + \frac{2}{2\sqrt{2\ln\frac{2}{\delta}}}.$$

Рассмотрим пример применения теоремы.

Пусть  $\tilde{z}_0(t, s)$  – центрированное гауссовское однородное  $2\pi$ -периодическое по каждой переменной действительное сл.п. с корреляционной функцией

$$r(t, s) = M\tilde{z}_0(t, s) \quad \tilde{z}_0(0, 0) = 1 - c(t^2 + s^2)^\alpha + f(t, s)$$

где  $c > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  и непрерывная функция  $f(t, s)$  такая, что

$$f(t, s) = o((t^2 + s^2)^\alpha) \text{ при } t^2 + s^2 \rightarrow 0 \quad [8].$$

Нетрудно показать, что сл.п.  $\tilde{z}_0(t, s)$  удовлетворяет условию (A), причем  $\mathbb{E}(z) = C_1 z^\alpha$ ,  $0 < C_1 < \infty$ . Применяя следствие, заключаем, что для любых  $n > 3$  и  $\delta > 0$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{\substack{|t| \leq \pi \\ |s| \leq \pi}} |\tilde{z}_0(t, s) - D_{n,n}(\tilde{z}_0; t, s)| \geq 2C_0 C_1 [64n^{-\alpha}\sqrt{\ln n} + \right. \\ \left. + n^{-\alpha} \left( 64\sqrt{\ln(\pi\sqrt{2} + 2)} + 2\sqrt{2\ln^2 \frac{2}{\delta}} \right) + \frac{32n^{-\alpha}}{\alpha\sqrt{\ln n}} ] \right\} \leq \delta. \end{aligned}$$

В заключении отметим, что равномерная аппроксимация случайных функций рассмотрены также в работах [1], [2], [9] - [12].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Ю.К., Симонян А.Х., Асимптотика числа уклонений гауссовского процесса от аппроксимирующей случайной кривой, Тезисы докладов II Вильнюсской конференции по теор. вер. и мат. статистике, Т.И, Вильнюс, 1977, с.31-32.
2. Беляев Ю.К., Симонян А.Х., Красавкина В.А., Квантование по времени реализаций недифференцируемых гауссовских процессов. Изв. АН СССР. Тех. кибернетика, 1976, М 4, с. 139-147.

3. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.. О субгауссовых случайных величинах. Украинский мат.журн. 32, 1980, №2, с.723-730.
4. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей. Теория вероятн. и математич. статистика, 1974, вып.10, с.39-47.
5. Дмитровский В.А., О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовых полей. Теория вероятн. и математич. статистика, 1981, вып.25, с. 154-164.
6. Дрожжина Л.В., О линейной аппроксимации случайных полей. Теория вероятн. и математич. статистика, 1975, вып. 13, с. 46-52.
7. Дрожжина Л.В., Совместное приближение. Случайных процессов и их производных линейными положительными операторами. Доклады АН УССР, А, 1984, № с.7-8.
8. Беляев Ю.К., Питербарг В.И. Асимптотика среднего числа A - точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень, Доклады АН СССР, 203, 1972, с.9-12.
9. Селезнёв О.В., Приближение периодических гауссовых процессов тригонометрическими полиномами. Доклады АН СССР, 1980, 250, I, с. 35-38.
10. Селезнёв О.В., О приближении непрерывных периодических гауссовых процессов случайными тригонометрическими полиномами. В сб.: "Случайные процессы и поля", Изд-во МГУ, 1979, с. 84-94.
11. Симонян А.Х., О вероятности уклонения гауссового случайного процесса от аппроксимирующей случайной кривой. Доклады АН Арм. ССР. XVI, 2, 1978, с. 84-90.
12. Симонян А.Х., Исследование уклонений гауссовых случайных процессов от аппроксимирующих их случайных кривых. Автореферат дисс. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, Москва, 1979.
13. Kahane J.P. Proprietes locales des Punctions a series de Fourier allatoires. Studia Math., 1960, 19, No 1, p.1-25.

## **Тасодифий жараёнларнинг характеристика ва хоссалари**

***Абдуллаев Умид(1- курс магистрант), Остонов Қ.***

***(Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университети)***

**ostonovk@mail.ru**

Тасодифий жараёнлар назарияси тасодифий ҳодисаларнинг қонуниятларини динамикада уларнинг ривожланишида ўрганадиган математика фанидир.

Атрофдаги олам ҳодисаларини ўрганишда инсоният кўпинча боришини олдиндан аниқ айтиш мумкин бўлмаган жараёнларга дуч келади. Бу ноаниқлик (башорат қилиб бўлмайдиган) жараённинг боришига таъсир қилувчи тасодифий омиллар таъсиридан келиб чиқади.

Тасодифий жараёнларга мисоллар [13].

1. Тармоқдаги кучланиш номинал ўзгармас ва 220 В га тенг, аслида вақт ўтиши билан ўзгаради, тармоққа уланган қурилмаларнинг сони ва тури, уларни ёкиш ва ўчириш моментлари ва бошқалар каби тасодифий омиллар таъсири остида номинал атрофида ўзгариб туради.

2. Шаҳар (ёки вилоят) аҳолиси вақт ўтиши билан туғилиш, ўлим, миграция ва бошқалар каби омиллар таъсири остида тасодифий (башоратсиз) тарзда ўзгаради.

3. Дарёдаги (ёки сув омборидаги) сув сатҳи об-ҳаво, ёғингарчилик, қор эриши, суғориш интенсивлиги ва бошқаларга қараб вақт ўтиши билан тасодифий ўзгаради.

4. Микроскоп қўриш соҳасида Броун ҳаракатини амалга оширувчи заррача суюқлик молекулалари билан тўқнашув натижасида ўз ўрнини тасодифий ўзгартиради.

5. Космик ракетанинг парвозини тасаввур қиласиз, уни зарур тезлик векторининг маълум бир йўналиши ва мутлақ қиймати билан маълум бир моментда фазонинг маълум бир нуқтасига чиқариш зарур.

Ракетанинг ҳақиқий ҳаракати атмосфера турбулентлиги, ёқилғининг бир жинслимаслиги, буйруқларни бажаришдаги хатолар ва бошқалар каби тасодифий омиллар туфайли ҳисоблашлар билан устма-уст тушмайди.

Қатъий қилиб айтганда, табиатда мутлақо тасодифий бўлмаган, аниқ детерминистик жараёнлар мавжуд эмас, лекин шундай жараёнлар борки, уларнинг боришига тасодифий омиллар шунчалик заиф таъсир қиласиди, ҳодисани ўрганишда уларни эътиборсиз қолдириш мумкин (масалан: сайёralарнинг Қуёш атрофида айланиш жараёни). Лекин шундай жараёнлар ҳам борки, бунда тасодифийлик асосий роль ўйнайди (масалан: заррачанинг Броун ҳаракатининг юқорида кўриб чиқилган жараёни). Икки экстремал ўртасида тасодиф катта ёки камроқ роль ўйнайдиган жараёнларнинг бутун мажмуаси ётади. Жараённинг тасодифийлигини ҳисобга олиш (ёки ҳисобга олмаслик) тадқиқотчининг қандай амалий муаммони ҳал қилишига ҳам боғлиқ. Масалан, самолётларнинг икки нуқта орасидаги ҳаракатини режалаштиришда уларнинг траекторияларини тўғри чизиқли деб ҳисоблаш мумкин ва ҳаракат бир хил бўлади; агар самолётнинг парвозини бошқариш учун автопилотни лойиҳалаш муаммоси ҳал этилса, худди шу фаразлар ишламайди.

Ҳар қандай физик тизимда содир бўладиган  $S$  тасодифий жараён тизимнинг ҳолатдан ҳолатга тасодифий ўтишларини ифодалайди. Тизимнинг ҳолатини баъзи сонли ўзгарувчилар ёрдамида тавсифлаш мумкин: энг оддий ҳолатда - битта, мураккаброқ - бир нечта. 1-мисолда жараён вақт бўйича тасодифий ўзгариб турадиган ягона ўзгарувчи (кучланиш  $U$ ) билан тавсифланади, бу вақт  $U(t)$  функсиясидир. Худди шундай, 2-мисолда ахоли  $N$  вақт ўтиши билан тасодифий ўзгаради:  $N(t)$ . Худди шундай, 3-мисолда тасодифий жараён бир  $H(t)$  функсия билан тавсифланади, бу эрда  $H$ - дарёдаги сув сатҳидир. Бу учта функсия  $t$  вақтнинг тасодифий функсияларидир. Рухсат этилган  $t$  учун уларнинг ҳар бири оддий тасодифий ўзгарувчига айланади. Тажриба натижасида (агар у аллақачон бажарилган бўлса) тасодифий функсия оддий тасодифий бўлмаган функсияга айланади. Мисол учун, агар сиз тармоқдаги кучланишни вақт ўтиши билан доимий равишда ўлчасангиз,  $w_0$  қиймати атрофида тебранувчи тасодифий бўлмаган функсия  $u(t)$  ни оламиз.

4-мисолдаги вазият бироз мураккаброқ: заррачанинг ҳолати аллақачон бир эмас, балки иккита тасодифий функсия  $X(t)$  ва  $Y(t)$  – микроскоп майдонидаги заррачанинг координаталари билан тавсифланади. Бундай тасодифий жараён вектор деб аталади, у  $X(t)$ ,  $Y(t)$  компонентлари вақт ўтиши билан ўзгариб турадиган ўзгарувчан тасодифий вектор билан тавсифланади. Аргументнинг белгиланган қиймати учун тасодифий жараён  $XOY$  текислигида тасодифий нуқта (тасодифий вектор  $Q(t)$ ) билан ифодаланган иккита тасодифий  $X(t)$ ,  $Y(t)$  системасига айланади. Аргумент  $t$  ўзгарганда,  $Q(t)$  нуқта текислик бўйлаб ҳаракатланади ("айёрлик"). Вазият 5-мисолда янада мураккаброқ. Ракетанинг  $t$  вақтидаги ҳолати нафақат ракетанинг масса марказининг учта координатаси  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  билан тавсифланади, балки шунингдек, унинг тезлигининг учта компоненти, ракета йўналишининг учта бурчаги, масса маркази атрофида ҳаракатланишнинг бурчак тезлиги, ёқилғи таъминоти ва бошқаларга боғлиқ. Мана кўп ўзгарувчили стохастик жараёнга мисол: юриш кўп ўлчовли фазода содир бўлган  $t$  вақтдаги тизимнинг ҳолатини тавсифловчи нуқта. Бундай жараёнларни ўрганиш билан боғлиқ қийинчиликлар катталashiб бораётган ўлчов билан ўсиб боради[1].

Детерминистик жараён  $t$  аргументининг қиймати билан тўлиқ аниқланади. Тасодифий жараён учун аргумент ва функсия қийматлари ўртасида бирма-бир мосликларни ўрнатиш мумкин эмас. Аргументнинг битта қиймати функсиянинг кўплаб қийматларига мос келиши мумкин, уларнинг баъзилари эҳтимоли кўпроқ, бошқалари камроқ. Тасодифий жараён  $\xi(t)$ ( вақт функсияси бўлиб, у ҳар қандай вақт  $t$  учун тасодифий миқдордир. Тажриба давомида тасодифий жараённинг  $x(t)$  нинг конкрет қийматлари кузатилади, улар тасодифий жараённинг реализациялари деб аталади. Тасодифий жараён  $\xi(t)$  фазо-вақт ва эҳтимолий характеристикалар бўйича синфларга ажратилади[2],[3],[4].

Тасодифий жараён моментлар деб аталадиган статистик **характеристикалар** билан тавсифланади. Бундан ташқари, тасодифий жараённинг энг муҳим **характеристикалари** унинг статсионарлиги ва эргодиклиги, шунингдек, қувват спектридир.

Моментларни аниқлаш. Бир ўлчовли эҳтимоллик тақсимот зичлиги  $W(x, t)$

$$W(x, t) = P\{x \leq \xi(t) \leq x + dx\} \quad (1)$$

$\xi(t)$  тасодифий миқдор  $x \leq \xi(t) \leq x + dx$  оралиқда ётиш эҳтимолини аниқлады,  $W(x, t)$  функциясидан фойдаланған ҳолда  $\xi(t)$  тасодифий миқдорни ҳам, унинг исталған функциясини ҳам ўртачасини ҳисоблаш мүмкін.

Тасодифий жараённинг ўртача қиймати ёки унинг биринчи моменти деб

$$\bar{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x, t) dx \quad (2)$$

интегралга айтилади.

Тасодифий жараённинг иккінчи бошланғич моменти

$$\overline{\xi^2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 W(x, t) dx \quad (3)$$

интеграл билан тавсифланади ва тасодифий жараённинг ўртача қувватини аниқлады.

Тасодифий жараёнларни таҳлил қилишда күпинча флюктуация компоненти қизиқиши уйғотади. Марказлаштирилған тасодифий жараён  $\xi_0 = \xi - \bar{\xi}$  түшунчасини киритайлик [5],[6].

Иккінчи марказий момент тасодифий жараённинг флюктуация компонентининг қувватини аниқлады ва дисперсия деб аталади

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^2 W(x, t) dx \quad (4)$$

Худди шундай, тасодифий жараённинг юқори тартибли моментларини аниқлаш мүмкін.

Шундай қилиб, бир ўлчовли эҳтимоллик  $W(x, t)$  тақсимот зичлигидан фойдаланиб, тасодифий жараённинг параметрларини олиш мүмкін, улар маълум бир тасодифий жараённи унинг қандайдыр "кесимида" да, яъни тайинланған  $t$  вақтда амалга оширишлар түплами (жамланмаси) бўйича ўртачasi ҳисобланади. Аммо бир ўлчовли эҳтимоллик тақсимот зичлигини берилиши тасодифий жараённинг вақт бўйича ўзгариши характеристини аниқлашга имкон бермайди ва тасодифий жараённинг вақтнинг турли моментларида ўзаро боғланишини тавсифламайди. Бунинг учун ихтиёрий  $t_1$  ва  $t_2$  вақт моментларидаги иккита  $\xi(t_1)$

ва  $\xi(t_2)$  қийматлар боғланишини тавсифловчи икки ўлчовли эҳтимоллик тақсимот зичлиги  $W(x_1, x_2, t_1, t_2)$  тушунчаси киритилади [7],[8].

$$W(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{x_1 \leq \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1\} \cap P\{x_2 \leq \xi(t_2) \leq x_2 + dx_2\} \quad (5)$$

Икки ўлчовли эҳтимоллик тақсимот зичлигидан фойдаланиб, автокоррелятсия (ковариация) функцисини аниқлаш мумкин.

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (6)$$

шунингдек марказлаштирилган тасодифий жараённинг автокоррелятсия функцияси

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \bar{\xi}(t_1))(x_2 - \bar{\xi}(t_2)) W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (7)$$

ёки

$$R(t_1, t_2) = B(t_1, t_2) - \bar{\xi}(t_1)\bar{\xi}(t_2) \quad (8)$$

Тасодифий жараённинг стационарлиги. Тасодифий жараён статсионар дейилади, агар бир ўлчовли эҳтимоллик зичлиги тақсимоти ва демак, тасодифий жараённинг ўртача қиймати ва дисперсияси вақтга боғлиқ бўлмаса ва икки ўлчовли эҳтимоллик тақсимоти зичлиги ва автокоррелятсия функцияси фақат вақт аргументлари  $B(t_1, t_2) = B(\tau)$  айирмасига боғлиқ бўлса, бу ерда  $\tau = t_1 - t_2$ .

Агар кўп ўлчовли эҳтимоллик тақсимоти қонуни вақтнинг турли моментларида олинган оний қийматлар қабул қилинган бошланғич саноқ системасига боғлиқ бўлмасдан, фақат танланган моментлар оралиқларига

$W_k(x_1, t_1, \dots, x_k, t_k) = W_k(x_1, t_1 + \Delta, x_2, t_2 + \Delta, \dots, x_k, t_k + \Delta)$ ,  
боғлиқ бўлса, унда бундай жараён тор маънода стационардир. Агар саноқ системасига боғлиқ бўлмаслиги фақат иккинчи (коррелятсия) моментгача (шу жумладан биринчисини ҳисобга олган ҳолда) бажарилса, бундай жараён кенг маънода статсионар деб аталади.

$$R_k(t_1, t_2) = R_k(t_2 - t_1) = R_k(\tau)$$

Тасодифий жараённинг эргодиклиги. Тасодифий жараён биринчи тартибли эргодик деб аталади, агар унинг (2) амалга оширишлар тўплами бўйича ўртачалаштириш натижасида олинган биринчи моменти етарлича бирга яқин

эҳтимоллик билан етарлича узоқ вақт давомида ўртачалаштириш билан олинган ўртача қиймат билан устма-уст тушса [9],[10].

Тасодифий жараён иккинчи тартибли эргодик деб аталади, агар унинг коррелятсия функцияси (6) етарлича бирга яқин эҳтимоллик билан етарлича узоқ вақт давомида ўртачалаштириш билан олинган силжиган аргументлардаги тасодифий жараён қўпайтмасининг ўртача қиймати билан устма-уст тушса.

Эргодик тасодифий жараённинг параметрларини қуидагича аниқлаш мумкин:

$$\bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(t) dt, \bar{\xi}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^2(t) dt, \sigma^2(t) = \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2 .$$

Вақт бўйича ўртачалаштириш билан эргодик тасодифий жараённинг автокоррелятсия функцияларини ҳам топиш мумкин

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(t) \xi(t + \tau) dt \quad (10)$$

$$R(t) = B(\tau) - \bar{\xi}^2 \quad (11)$$

Ушбу мақолада фойдали сигналга аддитив қўшилган "шовқин" эргодик, тасодифий жараён бўлади деб фараз қилинади.

Коррелятсия функцияларининг хоссалари. Корреляция функциялар- тасодифий жараёнларнинг энг муҳим бхарактеристикалари ҳисобланади[11],[12].

Уларнинг асосий хоссаларини келтирамиз:

1-хосса.  $R(\tau) = R(-\tau)$  .

2-хосса.  $\sigma^2 = R(0) \geq R(\tau)$ .

3-хосса.  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$  .

Формал равища, детерминистик жараён учун (10) автокоррелятсия функциясини ҳам ҳисоблаш мумкин, масалан,  $f(t) = a \sin(\omega t)$  даврий функция учун автокорреляция функция қуидаги кўринишда бўлади

$$R(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

Шунга ўхшаш Фурье қаторига ёйилувчи

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t)$$

даврий функция учун

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \cos(\omega_n \tau)$$

автокорреляция функция ифодасини оламиз [13],[14].

Шундай қилиб, жорий  $t$  вақтнинг даврий функцияси автокорреляцион функцияси ҳам  $\tau$  аргумент - вақт силжиш катталигининг даврий функцияси бўлади.

#### **Адабиётлар рўйхати:**

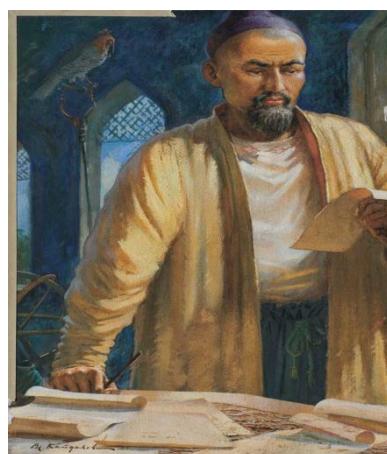
1. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 236 с.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – М.: Наука, 1996. – 320 с.
3. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
4. Клинов Г.П. Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями / Г.П. Клинов, А.Л. Кузьмин. – М.: изд. МГУ, 1985. – 232 с.
5. Крамер Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. – М.: Мир. 1969. – 400 с.
6. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
7. Нatan А.А. Случайные процессы: Учебное пособие / А.А. Нatan. – М.: МФТИ, 1978. – 118 с.
8. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1979. – 1984 с.
12. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В.Н. Тутубалин. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
13. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход – М.: Наука, 1977. – 568 с.
14. Вишневский Л.Д. Математическая статистика и случайные процессы: Практикум / Л.Д. Вишневский, Д.В. Гусак, Т.А. Погребецкая, Г.Л. Тер-Саакянц. – К.: Вища школа, 1992. – 530 с.

**O‘rta osiyolik alloma Ali Qushchining hayoti va matematika bo‘yicha asarlari**

***Q. Ostonov, R. Tilavov (Sharof Rashidov nomidagi Samaqand davlat universiteti,***

***ostonovk@mail.ru)***

*Alouddin Abulqosim Ali ibn Muhammad al-Qushchi (usmonli fors. 1403-1474);  
Samarqand, 1403-yil - Konstantinopol, 1474-yil 16-dekabr) - o‘rta osiyolik matematik va  
temuriylar sultanati astronomi. Ulug‘bek, al-Koshiy va Qozizoda ar-Rumiyning shogirdi.  
Qozizoda ar-Rumiyning vafotidan keyin u Samarqand rasadxonasiga rahbarlik qildi,  
“Зиёзи Кўрагонийни” tugatishda qatnasgan.*



### **Aloviddin Ibn Muhammad Ali Qushchi**

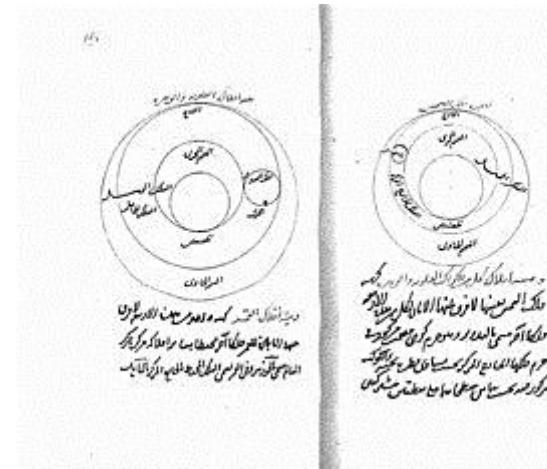
Rasm <https://arboblar.uz/ru/people/alouddin-ali-ibn-mukhammad-al-kushchi>  
saytidan olingan

Ulug‘bek ilmiy maktabining atoqli namoyondalaridan biri, Ulug‘bekning yaqin shogirdi, mashhur olim Aloviddin Ibn Muhammad Ali Qushchi 1403 yili Samarqandda tug‘ildi. U boshlang‘ich ma’lumotini Samarqandda olib, 1414 yilgacha o‘qishni davom ettiradi. O‘z ma’lumotini oshirish uchun 1414 yilda Eron, Kirmon shahriga jo‘naydi va u y erda 3 yil tabiiy fanlarni puxta o‘rganadi. Kirmon shahridagi madrasada ta’lim oladi.

Ali Qushchi 1417- yilda yana Samarqand shahriga qaytadi. Bu vaqtida Samarqandda Ulug‘bek madrasasi qurilmoqda edi. U Ulug‘bek madrasasida ham ta’lim oladi, uning o‘qituvchilari Qozizoda Rumiy va G‘iyosiddin Koshiylar edi. Ulug‘bek madrasasini bitirib, shu madrasada matematika va astronomiyadan mashg‘ulot olib boradi va o‘zining ilmiy ishlarini davom ettiradi. Ko‘p o‘tmay uning shahrati Samarqand olimlari orasiga tarqaladi. 1420-1430 yillar orasida Ulug‘bek madrasasida mashg‘ulotlar o‘tkazish va

ilmiy ishlar bilan mashg‘ul bo‘lish bilan birga Ulug‘bek rasadxonasini qurish ishlariga ham faol qatnashadi. Uning «Hisob risolasi» va «Astronomiya risolasi» asarlari yozilgandan so‘ng, u olimlar orasida katta obro‘ga ega bo‘ldi. 1449 yili mashhur olim Ulug‘bek vahshiyarcha o‘ldiriladi va bu voqeadan so‘ng, turli fitnachi ruhoniylar uning ilmiy maktabi a’zolariga, Ulug‘bek shogirdlarga qarshi xuruj qila boshlaydilar. Shu sababli, Ali Qushchi Samarqanddan chiqib ketishga majbur bo‘ladi. Ali Qushchi avval Kirmon shaqrida va boshqa shaharlarda bir necha yil yashab, so‘ngra 1465 yilda Turkiyaga boradi va Istambulda yashaydi. Bu yerda Muhammad II hukmdorlik qilar edi. Ali Qushchining talantli olim ekanligi bilgan Muhammad II uni o‘z saroyiga chiqarib, olimlarning rahbari qilib tayinlaydi. Shuningdek ayo-Sufiyo madrasasida ilmiy maktab tashkil etilib, uning rahbarligini ham Ali qushchiga topshiradi. Qushchi 21 dan ortiqroq asarlar yozgan, bu asarlar ayo-Sufiyo madrasa kutubxonasida saqlanib qolgan[1],[3],[4],[9].

Ali Qushchi 1474 yil 16 dekabrda Istambulda vafot etgan. U Ayub masjididagi qabristonga dafn etilgan. Masjidga kiraverishda marmar plitaga “Ali Qushchi - ilm arbobi” degan yozuv o‘yib yozilgan.



*«al-Risala al-Fathiyya» kitobidan olingan parcha*

Ali Qushchining ba’zi asarlari bilan tanishib o‘tamiz:

1. «Hisob risolasi». Bu asarni Qushchi 1425 yilda Samarqandda fors-tojik tilida yozgan. Bu asar 3 qismdan iborat bo‘lib, hindlar arifmetikasi (o‘nlik sanoq sistemasi), astronomlar arifmetikasi (oltmishlik sanoq sistemasi) va geometriyadan iborat. Bu asar

O‘rtal Osiyo madrasalarida o‘quv qo‘llanmasi sifatida foydalanilgan. Asarning qo‘lyozmalari Toshkent, Dushanbe, Sankt-Peterburg, Mashhad, Istambul, Oksford kutubxonalarida saqlanmoqda.

2. «Kasrlar haqida risola». Kasrlarga bag‘ishlangan bu fors-tojik tilida 1430 yilda yozilgan. Unda oddiy va o‘nli kasrlar haqida to‘liq ma’lumotlar berilgan. Asarning yagona qo‘lyozmasi Sankt-Peterburgdagi Sharq xalqlari kutubxonasida saqlanmoqda.

3. «Kitobul Muhammadiya». Bu asarni birinchi marta Qushchi «Hisob risolasi» nomida fors-tojik tilida yozgan. Asar arifmetika, algebra, geometriya va trigonometriya bo‘limlarini o‘z ichiga oladi.

Qushchi Istambulga kelgach, bu asarni arab tiliga tarjima qiladi va Sulton Muhammad II ga taqdim etadi. Asar qo‘lyozma shaklida Toshkentda Sharqshunoslik institutida, Miden (Niderlandiya) kutubxonasida va Ayo-Sufiyo kutubxonasida saqlanmoqda.

«Kitobul - Muhammadiya» asari ikki qismidan iborat bo‘lib, birinchi qismi arifmetikaga bag‘ishlangan. Bu qism besh bobdan iborat: birinchi bobda hindlar arifmetikasi, ikkinchisida astronomolar arifmetikasi, uchinchisida algebra, to‘rtinchisida «ikki xatoga yo‘l qo‘yish usuli» bilan noma’lumlarni aniqlash va beshinchi bobda ba’zi bir arifmetik qoidalar bayon etilgan.

Ikkinci qismda geometriya va trigonometriya bayon etilgan. Bu asarda Qushchi kvadrat ildizni taqribiy hisoblash uchun quyidagi formulani beradi.

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{r}{2n+1}$$

$$\sqrt{A} \approx n + \frac{A-n^2}{2n+1}$$

Masalan,  $\sqrt{3} = 1,73205$  hisoblangan.

Kub ildizni taqribiy hisoblash uchun Qushchi quyidagi formulani beradi:

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[n^3 + r]{} \approx a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3}$$

yoki

$$\sqrt[3]{A} = a + \frac{A - a^3}{3a^2 + 3a + 1}$$

Qushchi umuman  $n$ -darajali ildizni taqribiy hisoblash uchun quyidagi formulani beradi:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

yoki

$$\sqrt[n]{A} \approx a + \frac{A - a^n}{(a+1)^n - a^n}$$

Shuni aytish kerakki, hozirgi ildiz ishorasi O'rta Osiyo olimlari asarlarida qo'llanilmagan. Ildiz ishorasini birinchi marta nemis matematiga Rudolf 1525 yilda  $\sqrt{\phantom{x}}$  shaklda qo'llagan. 1637 yilda esa fransuz matematigi R.Dekart hozirgi belgi  $\sqrt{\phantom{x}}$  ni fanga kiritgan. Bu asarda «Mezon olish» usuli haqida fikr yuritilgan. Biror sonning 9 bilan olingan mezoni deb, shu sonning raqamlari yig'indisidan, agar yig'indi 9 dan katta yoki 9 ga teng bo'lsa, 9 larni chiqarib tashlaganda, qolgan qoldiqqa aytildi. Masalan, 1523748 sonining mezoni  $1+5+2+3+7+4+8=30$ . 30 dan  $3 \cdot 9 = 27$  ayirilsa qoldiq 3 bo'ladi. Demak bu sonning mezoni 3.

Masalan:  $572 + 667 = 1239$

$$5 + 7 + 2 = 14, \quad 14 - 9 = 5.$$

$$6 + 6 + 7 = 19, \quad 19 - 2 \cdot 9 = 1.$$

$$5 + 1 = 6.$$

$1239 = 1 + 2 + 3 + 9 = 15, \quad 15 - 9 = 6, \quad 6 = 6$ . Demak, qo'shish to'g'ri bajarilgan.

Uchinchi bobda algebra bayon etilgan. Ali Qushchi bu bobda matematika tarixida birinchi bo'lib, hozirgi «musbat» va «manfiy» atamalarini kiritadi.

Ali Qushchi ilmiy merosini akademik I.M. Mo'minov bataffsil o'rganib chiqqan. Shunga qaramay bu allomaning koplab qo'lyozmalarini o'rganish va ularni yosh avlodga etkazish vazifasi matematik tarixchi olimlar oldida turibdi.

## **Adabiyotlar ro'yxati**

1. Ahadova M. O'rta Osiyolik olimlarning matematikaga doir ishlari. «O'qituvchi», Т., 1984.
2. Джалаев Г. Д. Некоторые замечательные высказывания астрономов Самаркандской обсерватории. Историко-астрономические исследования, вып. IV, 1958, с. 381—386
3. Матвиевская Г. П. Учение о числе в средневековом Востоке. «Фан», Ташкент, 1965
4. Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А. Математики и астрономы мусулманского средневековья и их труды. М.: Наука, 1967.
5. Matematika va uni o'qitish metodikasi taraqqiyoti tarixi. Uslubiy qo'llanma. /Tuzuvchi, Q.Ostonov. - Samarqand:SamDU nashri, 2006.-87 b.
6. Matematika tarixi. Uslubiy qo'llanma. /Tuzuvchilar : E.M.Mardonov, Q.Ostonov. - Samarqand:SamDU nashri, 2012.-160-bet.
7. Matematika tarixi va matematika o'qitish metodikasi. Uslubiy qo'llanma./Tuzuvchilar:E.M.Mardonov,Q.Ostonov - Samarqand:SamDU nashri, 2012 .-160 bet.
8. Nazarov X.I, Ostonov Q. Matematika tarixi. O'quv qo'llanma.-Toshkent: O'qituvchi, 1996.
9. Юшкевич А. П. История математики в Средние века. М.: Физматгиз, 1961.
10. Ragep F. J. Tusi and Copernicus: The Earth's motion in context. Science in Context, 14, 2001, p. 145—163.
11. Vikipediya materiallaridan foydalanilgan.

### **Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi.**

**<sup>1,2</sup>Quljonov O'.N., <sup>3</sup>Abduraximova D.**

**<sup>1,3</sup>Samarqand davlat universiteti,**

**<sup>2</sup>Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti Samarqand filiali**

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizlik tushunchasi ehtimollar nazariyasidagi eng muhim tushunchalardan biri bo'lib, u hodisalarining bog'liqsizligini tasodifiy miqdorlarga ko'chirishdan iborat.

**1-ta'rif.**  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  lar  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $B_k \in \mathcal{B}(R)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) Borel to'plamlari uchun

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in B_n) \quad (1)$$

tenglik o'rinni bo'lsa, u holda  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

**1-misol.** Ehtimollar fazosi – simmetrik tangani ikki marta tashlash tajribasidan iborat bo‘lsin.  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $B = \{\omega_2, \omega_3\}$  hodisalar bo‘lsin.  $\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarni quyidagicha aniqlaymiz.

$$\begin{aligned}\xi_1(\omega) &= I_A(\omega) - I_{\bar{A}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ -1, & \omega \in \bar{A}, \end{cases} \\ \xi_2(\omega) &= I_B(\omega) - I_{\bar{B}}(\omega).\end{aligned}$$

$\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarni bog’liqsizlikka tekshiring.

**Yechish.** Har ikkala diskret tasodifiy miqdorlar  $x_1 = -1$  va  $x_2 = 1$  qiymatlarni  $\frac{1}{2}$  ehtimollik bilan qabul qiladi, ya’ni

$$\begin{aligned}P(\{\omega: \xi_1(\omega) = -1\}) &= P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{\omega: \xi_1(\omega) = 1\}) = P(A) = \frac{1}{2}, \\ P(\xi_2 = 1) &= P(B) = \frac{1}{2} = P(\bar{B}) = P(\xi_2 = -1).\end{aligned}\tag{2}$$

Diskret tasodifiy miqdorlarning bog’liqsizligi ta’rifiga (1-ta’rifga qarang) ko‘ra, barcha  $x_i$  va  $y_j$  lar uchun

$$P(\{\omega: \xi_1(\omega) = -1, \xi_2(\omega) = -1\}) = P(\{\omega: \xi_1(\omega) = -1\})\tag{3}$$

tenglikning bajarilishini tekshirish kifoya. Tushunarli bo‘lishi uchun

$$\begin{aligned}P(\{\omega: \xi_1(\omega) = -1, \xi_2(\omega) = -1\}) &= P(\{\omega: \xi_1(\omega) = -1\})P(\{\omega: \xi_2(\omega) = -1\}) \\ \text{tenglikning bajarilishini tekshiramiz:}\end{aligned}$$

$$P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -1\}) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}.\tag{4}$$

Xuddi shunday

$$\begin{aligned}P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\}) &= P(\bar{A} \cdot B) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} \\ P(\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -1\}) &= P(A \cdot \bar{B}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \\ P(\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\}) &= P(A \cdot B) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}.\end{aligned}\tag{5}$$

(2), (3) va (4) dan

$$P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -1\}) = P(\{\xi_1 = -1\}) \cdot P(\{\xi_2 = -1\}) = \frac{1}{4}$$

tenglik kelib chiqadi. Qolgan uch tenglik

$$P(\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}) = P(\{\xi_1 = x_i\}) \cdot P(\{\xi_2 = y_j\})$$

(2) va (5) tengliklardan kelib chiqadi.

Demak,  $\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarni bog'liqsiz ekan.

Xususan  $B_k = (-\infty, x_k]$ ,  $F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$

**2-ta'rif.** Agar ixtiyoriy  $n$  va  $1 \leq i_1 < \dots < i_n < \infty$  sonlar uchun  $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz bo'lsa, u holda  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz deyiladi.

Endi berilgan tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiya yordamida, ya'ni 2-ta'rifdan foydalanib bog'liqsizlikka tekshiramiz.

**2-misol.**  $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ -elementar hodisalar fazosi.  $\sigma$  – algebra  $\mathcal{A}$  sifatida  $\Omega$  dagi Borel to'plamlari sistemasini qaraymiz, ehtimol o'lchovi  $P$  sifatida  $P(A) = \mu(A)$  ni olamiz. Bu yerda  $\mu(A)$  bilan  $A$  to'plamning tekislikdagi Lebeg o'lchovi belgilangan.  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ehtimolliklar fazosida

$$\xi_1(\omega) = \xi_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$$

va

$$\xi_2(\omega) = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

tasodifiy miqdorlarni qaraymiz. Bu yerda

$$A = [0; 1] \times \left[0; \frac{1}{2}\right).$$

$\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarni bog'liqsizlikka tekshiring.

**Yechish.** Tasodifiy vektor  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  ning taqsimot funksiyasini topamiz:

$$\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \leq x, \xi_2(\omega) \leq y\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \\ [0; x] \times \left[0; \frac{1}{2}\right), & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ [0; x] \times [0; 1], & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ \bar{A}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ \Omega, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

(6) tenglikning ikkala tomonidan ehtimol olib,  $\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi  $F_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$  ni olamiz:

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1 \\ x, & 0 \leq x < 1, \quad y \geq 1 \\ \frac{1}{2}, & x \geq 1, \quad 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1, \quad y \geq 1 \end{cases}.$$

Endi  $\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini topamiz.

$$F_{\xi_1}(x) = P(\{\omega: \omega_1 < x\}) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_2(y) = P(\{\omega: \omega_2 < y\}) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

Bevosita tekshirish mumkinki,  $\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlarning birgalikfagi taqsimot funksiyasi  $F_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$  ular har birining taqsimot funksiyari  $F_{\xi_1}(x)$  va  $F_2(y)$  larning ko‘paytmasiga teng, ya’ni  $F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_2(y)$ . Demak,  $\xi_1$  va  $\xi_2$  tasodifiy miqdorlar bog’liqsiz ekan.

Endi ixtiyoriy sondagi bo‘gliqsiz hodisalar ketma-ketligini quramiz:

**Lemma.**  $\Omega = [0,1], \mathcal{A} - o‘lchovli to‘plam, P(A) = \mu(A) - Lebeg o‘lchovi.$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – ehtimollar fazosi. Quyidagi hodisalarni bog’liqsizdir.

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right],$$

$$A_4 = \left[\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right] \cup \left[\frac{5}{16}, \frac{7}{16}\right] \cup \left[\frac{9}{16}, \frac{11}{16}\right] \cup \left[\frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right],$$

...

$$A_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right] \cup \left[\frac{5}{2^n}, \frac{7}{2^n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^n - 3}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}\right],$$

bu yerda

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-2}} A_n^{(k)}, \quad A_n^{(k)} = \left[ \frac{4k-3}{2^n}, \frac{4k-1}{2^n} \right]$$

bo‘ladi.

**Isbot.** Qurilishiga ko‘ra  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalarining ehtimollari  $\frac{1}{2}$  ga teng, ya’ni  $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{2}$ .  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli  $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{2^n}$ . Shunday qilib  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalarining ehtimollari ko‘paytmasi va ularning ko‘paytmasining ehtimoli teng ekan. Demak  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalar bog’liqsiz ekan.

### **Adabiyotlar.**

1. J.I.Abdullayev, O‘N.Quljonov, «Ehtimollar nazariyasidan masalalar to‘plami» O‘quv qo‘llanma. Samarqand, 2021.
2. A.Abdushukurov, T.Zuparov. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» Darslik. Tafakkur Bo‘stoni. Toshkent, 2015.
3. Sh.Q. Farmonov, R.M. Turgunbayev, L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika». Pedagogika oliy ta’lim muassasalari talabalari uchun darslik. Toshkent, 2010.

### **M|M|1|N sistema bandlik davri va bu davrda xizmat ko‘rsatilgan talablar sonining birgalikdagi taqsimoti haqida.**

H.Qurbanov, O‘.Bozorova  
(Sharof Rashidov nomidagi SamDU)

Birkanalli xizmat ko‘rsatish sistemasiga  $\lambda$  parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo‘lsin. Talablarga  $\mu$  parametrli ko‘rsatkichli taqsimot bo‘yicha xizmat ko‘rsatilsin. Kutish joylar soni  $N$  ( $N < \infty$ )ga teng bo‘lsin, ya’ni sistemada xizmat ko‘rsatilayotgan talab bilan birgalikda ko‘pi bilan  $N+1$  ta talab mavjud bo‘lishi mumkin. Ushbu sistema D.G.Kendall [1] tomonidan kiritilgan belgilarga ko‘ra M|M|1|N deb belgilanadi.

Faraz qilaylik, xizmat jarayoni  $t = 0$  momentda sistemada  $j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) talab bo‘lgan holda boshlansin va talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko‘rsatilsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\zeta_N^{(j)}$  – sistemaning bandlik davri, ya’ni sistema xizmat bilan uzlucksiz band bo‘lgan vaqt uzunligi,  $X_N^{(j)}$  – bandlik davrida xizmat ko‘rsatilgan talablar soni.

$$g_N^{(j)}(y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \int_0^{\infty} e^{-st} dP(\zeta_N^{(j)} < t, X_N^{(j)} = n), \operatorname{Re} s \geq 0$$

$g_N^{(j)}(y, s)$  funksiya X.Tashmanov [2] tomonidan  $j=1$  bo‘lgan holda o‘rganilgan, shuningdek,  $N$  va  $\rho = \lambda\mu^{-1}$  larning har xil o‘zgarishlaridagi ( $N \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 1$ ) asimptotik holatlari ham topilgan edi.

Ushbu ishda ixtiyoriy  $j = \overline{1, N}$  uchun  $g_N^{(j)}(y, s)$  funksiyaning aniq ko‘rinishi topiladi.

Teorema. Qaralayotgan sistemada  $g_N^{(j)}(y, s)$  funksiya ushbu ko‘rinishga ega:

$$g_N^{(j)}(y, s) = u_1^j + \frac{u_1^{N+1}(1 - u_1)(u_1^j - u_2^j)}{u_2^{N+1}(1 - u_2) - u_1^{N+1}(1 - u_1)}, \quad (1)$$

bu yerda

$$u_{1,2} = \frac{s + \lambda + \mu \mp \sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu y}}{2\lambda}.$$

Izoh. Yuqoridagi teoremani isbotlash uchun [3] ishda qo‘llangan metodlar yordamida

$$P(\xi^{(j)}(t) = k, N(t) = n), \quad k = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, N}$$

taqsimot tahlil qilinadi. Ushbu taqsimotni aniqlovchi funksiyada  $g_N^{(j)}(y, s)$  ishtirok etadi. Analitiklik xossalardan foydalanib (1) formulani keltirib chiqarish mumkin.

### Adabiyotlar

1. Кендалл Д.Г. Стохастические процессы встречающиеся в теории очередей и их анализ методом вложенках цепей Маркова. Сб.переводов «Математика», т.3, №6, 1959, 97-111.

2. Ташманов Х.Т. Асимптотический анализ система массового обслуживания M|M|1|N. «Предельные теорема и математическая статистика», Ташкент, «Фан», 1976.

3. Курбанов Х. Переходные явления для распределения периода занятости системы массового обслуживания M|G|1|N. «Предельные теорема для случайных процессов и статистические выводы», Сб.трудов ИМ АН УзССР, 1981, 108-122.

## Kutish joylari soni chekli bo‘lgan absolyut imtiyozli xizmat ko‘rsatish

### sistemasining bandlik davri taqsimoti

H.Qurbonov, O‘.Bozorova, D.Absalamova

(Sharof Rashidov nomidagi SamDU)

Birkanalli xizmat ko‘rsatish sistemasiga  $\lambda_1$  va  $\lambda_2$  parametrli ikki xil Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo‘lsin. Birinchi turdagи talablar ikkinchi turdagи talablarga nisbatan absolyut imtiyozga ega deb faraz qilamiz, ya’ni agar sistemada har ikkala turdagи talablar mavjud bo‘lsa, xizmat ko‘rsatish qurilmasi avval birinchi turdagи talablarga xizmat ko‘rsatadi. Ikkinci turdagи talabning xizmat paytida sistemaga birinchi tur talablar kelib tushsa, qurilmadagi talabning xizmati uzib qo‘yiladi va birinchi tur talabga xizmat ko‘rsatiladi. Sistema birinchi turdagи talablardan bo‘shagandan keyin xizmati uzib qo‘yilgan talabning xizmati uzib qo‘yilgan joydan davom ettiriladi. Bundan keyin birinchi tur talablarni “shoshilinch”, ikkinchi tur talablarni esa “oddiy” talablar deb ataymiz. Talablarga xizmat ko‘rsatish vaqtı uzunliklari o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, mos holda  $B_1(x)$  va  $B_2(x)$  taqsimot funksiyalari va  $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}$  o‘rta qiymatlarga ega bo‘lsin.

Shoshilinch talablar uchun kutish joylari soni chekli  $N$  ( $N \geq 1$ ) miqdorga teng deb faraz qilamiz. Ya’ni agar sistemada xizmat ko‘rsatilayotgan talab bilan birlashtirilganda  $N + 1$ ta shoshilinch talab mavjud bo‘lsa, yangi kelgan shoshilinch talab sistemaga qabul qilinmaydi va keyingi xizmat jarayoniga ta’sir ko‘rsatmaydi. Oddiy talablarning navbat uzunligi cheklanmagan. Qaralayotgan sistema Kendall tomonidan kiritilgan belgilashlarga ko‘ra  $\vec{M}_2 | \vec{G}_2 | 1 | N, \infty$  deb belgilanadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\zeta$  – sistemaning bandlik davri, ya’ni sistema uzlusiz xizmat bilan band bo‘lgan vaqt uzunligi;

$\zeta_N$  – sistemaning faqat shoshilinch talablar xizmati bilan uzlusiz band bo‘lgan vaqt uzunligi;

$$\bar{b}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_i(x), \quad Re s \geq 0, i = 1, 2;$$

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta < x), \quad Re s \geq 0;$$

$$\bar{g}_N(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_N < x), \quad Re s \geq 0.$$

Sistemaga bir xil talablar kelib tushadigan hol, ya'ni M|G|1|N sistema uchun  $\bar{g}_N(s)$  funksiyani aniqlovchi munosabat T.I.Xarris [3] tomonidan topilgan edi:

$$\bar{g}_N(s) = \frac{\Delta_{N-1}(s)}{\Delta_N(s)}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k(s) = \frac{v\bar{b}_1(s) - \bar{b}_1(s + \lambda_1 - \lambda_1 v)}{(1-v)[v - \bar{b}_1(s + \lambda_1 - \lambda_1 v)]}.$$

Ushbu ishda  $\bar{g}(s)$  funksiyani aniqlovchi munosabatlar qaralgan, ya'ni absolyut imtiyozli xizmat ko'rsatish sistemasi bandlik davri taqsimotining Laplas – Stiltes almashtirishi o'r ganiladi.

Teorema. Quyidagi munosabat o'r inli:

$$\bar{g}(s) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{f}(s) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{b}_1[s + \lambda_2 - \lambda_2 \bar{f}(s)], \quad (2)$$

bu yerda  $\bar{f}(s) - x = \bar{b}_2[s + \lambda_1 - \lambda_1 \bar{g}_N(s) + \lambda_2 - \lambda_2 x]$  tenglamaning  $|\bar{f}(s)| \leq 1$  shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi  $\bar{g}_N(s) - (1)$  tenglik bilan aniqlangan funksiya.

Izoh. Xususiy holda,  $B_2(x) = 1 - e^{-\mu_2 x}, x > 0$  bo'lsa, u holda ushbu tengliklar o'r inli bo'ladi:

$$\begin{aligned} \bar{g}_N(s) &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\alpha_1^N(1-\alpha_1) + \alpha_2^N(\alpha_2-1)}{\alpha_1^{N+1}(1-\alpha_1) + \alpha_2^{N+1}(\alpha_2-1)}, \\ \alpha_{1,2} &= \frac{\lambda_1 + \mu_1 + s \pm \sqrt{(\lambda_1 + \mu_1 + s)^2 - 4\lambda_1\mu_1}}{2\lambda_1}, \end{aligned}$$

$$\bar{f}(s) = \frac{\lambda_2 + \mu_2 + s + \lambda_1[1 - \bar{g}_N(s)] - \sqrt{[\lambda_2 + \mu_2 + s + \lambda_1[1 - \bar{g}_N(s)]]^2 - 4\lambda_2\mu_2}}{2\lambda_2}$$

Ispot. Xizmat ko'rsatish jarayoni sistemada bitta shoshilinch va oddiy talab bo'lgan holda boshlanish hodisaning mos holda  $A_1$  va  $A_2$  deb belgilaylik. U holda to'la ehtimollik formulasiga ko'ra ushbu tenglikga ega bo'lamiz:

$$P(\zeta < x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P(\zeta < x/A_2) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P(\zeta < x/A_1) \quad (3)$$

Faraz qilaylik,  $c$  – oddiy talab xizmatining boshlanish momentidan xizmat tugagan momentgacha bo'lgan vaqt uzunligi bo'lsin. Agar xizmat jarayoni tarmoqga oddiy talab kelib tushishi bilan boshlansa, u holda xizmat ko'rsatish tarmog'ini talablarga  $P(c < x)$  qonuniyat bo'yicha xizmat ko'rsatilayotgan oddiy Sistema sifatida qarash mumkin. Shunday qilib,  $P(\zeta < x/A_2)$  xizmat ko'rsatish vaqtin uzunliklari umumiy  $P(c < x)$  taqsimotga ega bo'lgan sistemaning bandlik davri taqsimotidir. Agar

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta < x/A_2), \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \\ \bar{c}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dP(c < x), \quad \operatorname{Re} s \geq 0 \end{aligned}$$

bo'lsa, u holda  $\bar{f}(s) - x = \bar{c}(s + \lambda_2 - \lambda_2 x)$  ([1], 62-bet) tenglamaning  $|\bar{f}(s)| \leq 1$  shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi bo'ladi. Geyver [2] tomonidan isbotlangan

$$\bar{c}(s) = \bar{b}_2[s + \lambda_1 - \lambda_1 \bar{g}_N(s)]$$

munosabatga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x = \bar{b}_2[s + \lambda_1 - \lambda_1 \bar{g}_N(s) + \lambda_2 - \lambda_2 x]. \quad (4)$$

$P(\zeta < x/A_1)$  ehtimollik xizmat ko'rsatilgan talablar oqimi  $dP(\zeta_N < x)$  va  $P(c < x)$  taqsimotlarga ega bo'lgan kechikkan rekkurent oqimni tashkil qiluvchi sistemaning bandlik davri taqsimot funksiyasidir. [1] ishdagi (63-bet) mulohazalar yordamida

$$\int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta < x/A_2) = \bar{g}_N(s + \lambda_2 - \lambda_2 \bar{f}(s)) \quad (5)$$

tenglik o'rinni ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

(4) va (5) munosabatlarga asosan (3) tenglikda Laplas – Stiltes almashtirishiga o‘tib, teoremaning tasdiqiga ega bo‘lamiz.

### **Adabiyotlar**

1. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. – М. Наука, 1966, с.62-68.
2. Gaver D.P. Impraded Markov chain analysis of a waiting – line process in continueus time. Ann.Math., 30, 1959, 698-720.
3. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue. Oper.Res., v.19, 1971, 219-223.

## **UZLUKSIZ VAQTLI VOLTERRA KVADRATIK STOXASTIK OPERATORINING ANALITIK VA SONLI YECHIMLARI HAMDA QO‘ZG‘ALMAS NUQTALARI HAQIDA**

**Rasulov Xaydar Raupovich,**

dotsent, fizika-matematika fanlari nomzodi, Buxoro davlat universiteti,

Matematik analiz kafedrasи dotsenti

xrasulov71@mail.ru

**Muzaffarova Mohinur Umarovna,**

Buxoro davlat universiteti, Fizika-matematika fakul’teti talabasi

**Annotatsiya.** Maqolada uzlusiz vaqtli volterra kvadratik stoxastik operatorining analitik va sonli yechimlari hamda qo‘zg‘almas nuqtalari topilgan. Sonli va analitik yechimlar MathCAD matematik redaktori yordamida taqqoslangan va tegishli xulosalar keltirilgan.

**Kalit so‘zlar:** kvadratik stoxastik operatorlar, dinamik sistema, sonli yechim, analitik yechim, qo‘zg‘almas nuqta.

### **KIRISH**

Tirik mavjudotlarning rivojlanishi har xil jarayonlarda turli yo‘llar bilan namoyon bo‘ladi. Bunda tug‘ilish, o‘sish, individuallik, individlarning o‘limi, tashqi muhit va shu kabilar ta’sir qiladi. SHu holatlar inobat olinib populyasiyaning matematik modeli quriladi.

Populyasiya sonining o‘zgarishi uning dinamikasini tashkil qiladi. Populyasiviy dinamika matematik biologiyaning qismi bo‘lib, o‘z vaqtida populyasiyaning holatini aniqlashga qaratilgan «matematik poligon» hisoblanadi. Chunki, matematik modellashtirish o‘rganilayotgan jarayon haqida to‘liq ma’lumot olishga, uning o‘sish yoki kamayishi to‘g‘risida xulosa chiqarishga imkoniyat beradi.

Mualliflar tomonidan hal qilingan masalaning boshqa o‘rganilgan masalalardan farqini ko‘rsatish maqsadida o‘rganilgan ilmiy izlanishlar tarixi va olingan natijalar batafsil bayon qilinadi.

## **ASOSIY QISM**

Matematik modellar oddiy differensial tenglamalar sistemalari va tengsizliklar yig‘indisidan iborat bo‘lib, ularning yechimlari yordamida u yoki bu omilning ta’sir kuchi o‘zgarishini oldindan aytib berish mumkin. Masalan, populyasiya jarayoni oddiy differensial tenglamalar sistemalari orqali ifodalangan bo‘lsa, bu kabi tenglamalarni sifatiy tahlil qilish orqali kerakli natijalarni olish mumkin.

Matematik modellarda populyasiyaning miqdoriy dinamikasi uning jinsiy va yosh tuzilmasi, tashqi muhit ta’siri, evolyusiyaning har xil omillari ta’sirida o‘tadigan genetik shakl va odamzod faoliyati natijalari bilan bog‘lab o‘rganiladi. Jonsiz olamda dinamik jarayonlar juda ko‘p uchratiladi. Ularni modellashtirish ham oson. Ammo tirik organizmlar uchun dinamik modellar yaratish nisbatan ancha qiyin. Shuning uchun dinamik modellar yaratishdan avval statik modellar bilan shug‘ullaniladi, ya’ni bir qator omillar ideallashtirib olinadi, ayrimlari inobatga olinmaydi. Statik modellarga o‘simlik barglarining joylashish tartibi yoki mollyuska chig‘anoqlarining tuzilishini spiral chiziqlar konuniyati yordamida tushuntirishga harakat qilish misol bo‘ladi.

Populyasiya o‘zgaruvchan bo‘lgani uchun olimlarni faqat uning soni va zichligining ma’lum o‘zgarishi emas, balki qanday omillar ta’sirida o‘zgarishi, ya’ni dinamikasi ham qiziqtiradi. Populyasiyaning dinamik tavsifini tug‘ilish, mahsuldarlik, nobud bo‘lish, hayotchanlik, emigratsiya va immigratsiya kabilar belgilaydi. Haqiqiy populyasiyalarda ko‘payish va o‘lim darajasi turli guruhlarda turlichalbo‘ladi. Masalan, hasharotlar tuxum qo‘yadi va dushmanlari lichinkalarni o‘ldirib yuboradi, bundan

tashqari, ularga atrof-muhitdagi metabolik mahsulotlar, kannibalizm va zaharlanishlar, yosh bosqichlari va ularning intensivligi ta'sir ko'rsatadi.

O'z navbatida ikki jinsli populyasiyaning dinamikasi tahlili ham nazariy, ham amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega. Zararkunanda hashararotlarning ko'payishini boshqarish usullari (bepusht erkak hasharotlarni chiqartirish, feromon tuzoqlar va shu kabilar) populyasiya strukturasida ma'lum bir disbalansni paydo qilishga qaratilgan bo'lib, ularning ko'payishini sekinlashi hamda buzilishiga olib keladi. Ushbu masalalar epidemiologiyaning dolzarb masalalaridan biri hisoblanadi.

Ikki jinsli populyasiyaning dinamikasi modelning uzliksiz vaqtli holida o'rganilgan [1-3]. Oddiy differential tenglamalar sistemasi asosida qurilgan bu modellar boshqa juda ko'plab turlarning mavsumiy ko'payishi dinamikasini ifodalashda ijobiy (ko'payish jarayoni diskret bo'lganligi uchun) natijalar bermaydi.

Ushbu turdag'i jarayonlarni impulsli oddiy differential tenglamalar sistemasi orqali ifodalangan matematik modellari [4] eng ma'qul modellar hisoblanadi va o'rganilayotgan jarayonni haqiqiy jarayonga yaqin ifodalaydi. Xususan, biologiyada populyasiya evolyusiyasining matematik modeli kvadratik stoxastik operatorlar orqali ifodalanadi [5].

Ikki jinsli populyasiyaning dinamikasini o'rganishga bag'ishlangan [6] maqolada ikki jinsli populyasiyaning (matematik modeli) ta'rifi berilgan va ushu maqolada o'rganilayotgan hol uchun shu turdag'i populyasiyani ifodalovchi kvadratik stoxastik operatorlarning ko'rinishlari keltirilgan.

Umumiy evolyusiya tenglamasi quyidagicha qurib olinadi. Faraz qilamiz, qaralayotgan populyasiya ikki jinsli bo'lsin.  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$  – ayol tipi to'plami,  $\mathfrak{W} = \{M, \dots, M_\nu\}$  erkaklar tipi to'plami.  $n + \nu$  populyasiyaning o'lchami. Populyasiyaning holati deb  $\mathcal{F}$  va  $\mathfrak{W}$  to'plamlardagi ehtimolliklar taqsimoti  $x = (x_1, \dots, x_n)$  va  $y = (y_1, \dots, y_\nu)$  juftligiga aytildi:

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1; y_k \geq 0, \sum_{k=1}^\nu y_k = 1.$$

$\Delta^{n-1} - (n-1)$  o‘lchamli  $\Delta^{v-1} - (v-1)$  o‘lchamli simplekslarning dekart ko‘paytmasi  $S = \Delta^{n-1} \times \Delta^{v-1}$  populyasiyaning holatlar fazosi hisoblanadi.

$F$  avloddagи ixtiyoriy  $z = (x, y)$  holatda  $F'$  chatishuv va tabiiy tanlanish natijasida bir qiymatli  $z' = (x', y')$  holat aniqlansa, bu populyasiyaning differensiatsiyasi irlsiy deyiladi.

$$z' = Vz \quad (z \in S)$$

tenglama bilan aniqlanadigan  $V: S \rightarrow S$  akslantirish evolyusion operator deyiladi, tenglama esa populyasiyaning evolyusiya tenglamasi deb ataladi. Bu akslantirish koordinatalarda quyidagi tenglamalar sistemasiga aylanadi:

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_v) \quad (1 \leq i \leq n), \\ y'_i &= g_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_v) \quad (1 \leq k \leq v). \end{aligned}$$

Endi o‘zbek olimlari tomonidan kiritilgan ikki jinsli populyasiyani ifodalovchi kvadratik stoxastik operator [7] haqida ma’lumotlar keltiramiz. Erkin populyasiyaning kvadratik stoxastik operatorlari quyidagi ma’noga ega: faraz qilamiz, erkin populyasiya  $m$  ta elementdan iborat bo‘lsin. U holda

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}, \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

to‘plam  $(m-1)$  – o‘lchamli simpleks deyiladi.

$S^{m-1}$  simpleksni o‘z-o‘ziga akslantiruvchi kvadratik stoxastik operator  $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ ,  $V: x_k' = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, k = 1, \dots, m$  ko‘rinishga ega bo‘ladi, bunda,  $p_{ij,k}$  – irlsiylik koefitsienti va

$$p_{ij,k} \geq 0, \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} = 1, i, j, k = 1, \dots, m.$$

Ushbu kvadratik stoxastik operator  $x^{(0)} \in S^{m-1}$  uchun  $\{x^{(n)}\}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , traektoriya  $x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Ifoda orqali topiladi.

Kvadratik stoxastik operatorlar bo‘yicha olib borilgan izlanishlar masaladan kelib chiqib,  $p_{ij,k} = 0$ , agar  $k \notin \{i, j\}$  sharti ostida o‘rganilgan.

Faraz qilamiz,  $G$  avlodni holati  $(x, y) - \text{bo'lsin}$ . Uning keyingi holati quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$W := \begin{cases} x_j' = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}^{(f)} x_i y_k & 1 \leq j \leq n, \\ y_l' = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}^{(m)} x_i y_k & 1 \leq l \leq v. \end{cases} \quad (1)$$

**Ta'rif:** (1) evolyusion operator ikki jinsli volterra tipidagi kvadratik stoxastik operator deyiladi, agarda

$$p_{ik,j}^{(f)} = 0, j \in \{i, k\} \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq v$$

va

$$p_{ik,l}^{(m)} = 0, l \in \{i, k\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, l \leq v.$$

[7] da 16 ta chetki ikki jinsli volterra tipidagi kvadratik stoxastik operatorlar mavjudligi ko'rsatilgan.

[7] da kiritilgan ikki jinsli populyasiyani ifodalovchi diskret vaqtli kvadratik stoxastik operatorlarning uzlusiz vaqtli analogini o'rganamiz.

Dinamik sistemalar o'rganilayotgan jarayondan kelib chiqib, diskret vaqtli va uzlusiz vaqtli sistemalar orqali o'rganiladi. Kaskadlar deb ataladigan diskret vaqtli sistemalarda sistemaning hatti-harakatlari (yoki bir xil bo'lsa, fazali fazosidagi sistemaning traektoriyasi) holatlar ketma-ketligi bilan tavsiflanadi. Oqim deb ataladigan uzlusiz vaqtli dinamik sistemalarda sistemaning holati vaqtning har bir lahzasi uchun aniqlanadi. Maqolada dinamik sistemaning uzlusiz vaqtli holi o'rganiladi.

Faraz qilamiz,  $n = v = 2$  bo'lsin. U holda (1) ning sakkizinch chetki uzlusiz vaqtli analogi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = 0, \\ \dot{y}_1(t) = x_1(t)y_1(t) - y_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = x_2(t)y_1(t). \end{cases} \quad (2)$$

Masala shartidan  $x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0, y_1(t) \geq 0, y_2(t) \geq 0$  va  $x_1(t) + x_2(t) = 1, y_1(t) + y_2(t) = 1$  ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, dinamik sistemaning muvozanat holati differensial tenglamaning kritik (singulyar, qo'zg'almas) nuqtalariga, yopiq fazali egri chiziqlari esa uning davriy yechimlariga to'g'ri keladi.

Ushbu sistema quyidagi umumi yechimlarga ega:

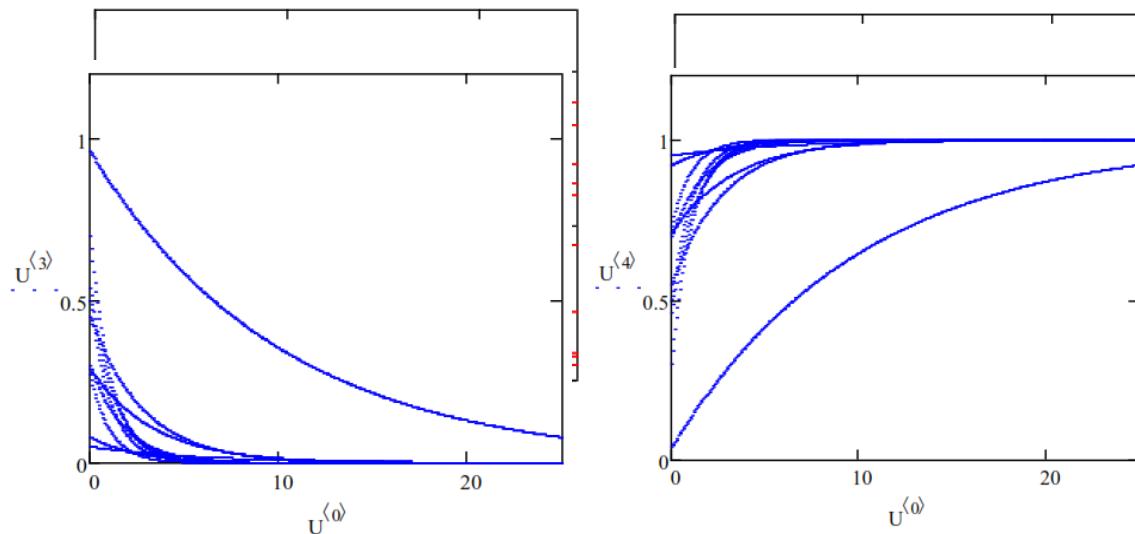
$$1) \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = c_3, \\ y_2 = (1 - c_1)c_3 t + c_4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = 0, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 1 - c_1, \\ y_1 = c_3 e^{(c_1-1)t}, \\ y_2 = -c_3 e^{(c_1-1)t} + c_4, \end{cases} \quad (3)$$

bu erda  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – o'zgarmas sonlar,  $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_3 \geq 0, c_4 \geq 0$  va  $c_1 + c_2 = 1$  va  $c_3 + c_4 = 1$ .

(2) sistema  $M_1(c_1, 1 - c_1; 0, 1)$  va  $M_2(1, 0; c_3, 1 - c_3)$  qo'zg'almas nuqtalarga ega. Sistemanini chiziqlashtirish yordamida  $M_1$  – noturg'un,  $M_2$  – turg'un (lekin asimptotik turg'un emas) nuqta ekanligi aniqlangan.

MathCAD matematik redaktori yordamida (2) sistemaning sonli yechimi topilgan (1,2,3,4-rasmlar).

Boshlang'ich qiymatlar sifatida



$$C1 = \begin{pmatrix} 0.19 & 0.11 & 0.22 & 0.32 & 0.44 & 0.38 & 0.67 & 0.71 & 0.25 & 0.77 \\ 0.81 & 0.89 & 0.78 & 0.68 & 0.56 & 0.62 & 0.33 & 0.29 & 0.75 & 0.23 \\ 0.45 & 0.14 & 0.33 & 0.24 & 0.15 & 0.5 & 0.59 & 0.28 & 0.9 & 0.46 \\ 0.55 & 0.86 & 0.67 & 0.76 & 0.85 & 0.5 & 0.41 & 0.78 & 0.1 & 0.54 \end{pmatrix}$$

oltingan, bunda  $C1 = (C_1, C_2; C_3, C_4)^T$ .

$U^{<0>} -$  oraqli  $t -$  vaqt,  $U^{<1>} -$  orqali  $x_1(t)$ ,  $U^{<2>} -$  orqali  $x_2(t)$ ,  $U^{<3>} -$  orqali  $y_1(t)$ ,  $U^{<4>} -$  orqali  $y_2(t)$  belgilangan. Sonli yechimlarning grafiklari 1,2,3,4-rasmlarda keltirilgan.

MathCAD matematik redaktorida (2) sistemaning analitik va sonli yechimlari taqqoslandi. Natijada analitik va sonli yechimning  $t \leq 7$  gacha o‘zaro farqi 0,001 dan oshmasligi va  $t \geq 7$  dan so‘ng ustma-ust tushishi aniqlandi. Berilgan boshlang‘ich qiymatlarda yechim  $M_1(0, 10; 0, 1)$  qo‘zg‘almas nuqtaga intilishi kuzatildi. 5-6-rasmdagi grafiklar  $C_1 = 0.22, C_2 = 0.78, C_3 = 0.33, C_4 = 0.67$  boshlang‘ich qiymatlarda chizilgan.

Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

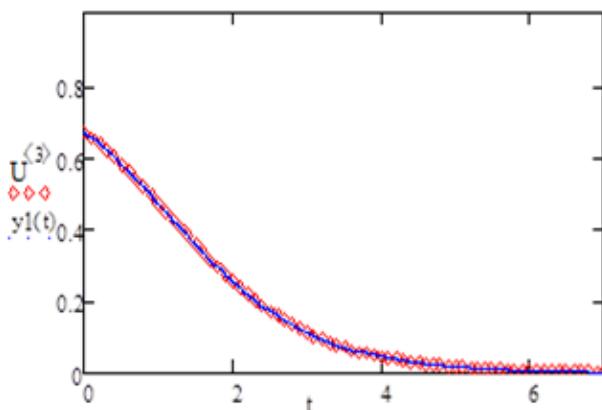
**Teorema.** 1<sup>0</sup>. (2) sistemaning umumi yechimi (3) ko‘rinishda bo‘ladi va  $M_1$  – noturg‘un,  $M_1$  – turg‘un (lekin asimptotik turg‘un emas) qo‘zg‘almas nuqta.

2<sup>0</sup>. Agar  $y_1(t) + y_2(t) = 1$  bo‘lsa, u holda

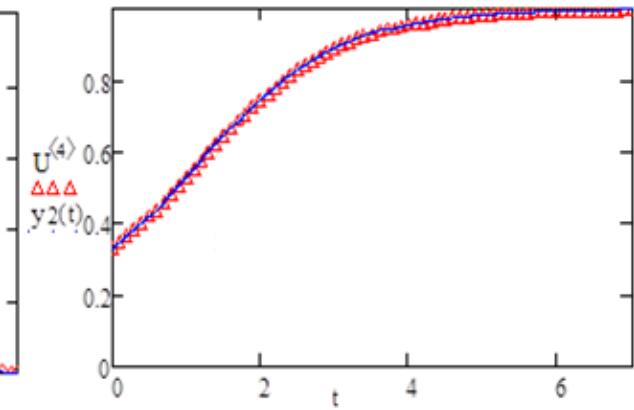
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_1(t), y_2(t)) = (1, 0)$$

bo‘ladi.

### XULOSA



5-rasm



6-rasm

Yuqorida keltirilganlardan shuni xulosa qilish mumkinki, olimlar ko‘pincha o‘zlari o‘rganayotgan biologik modellarda asosan «tortuvchi» muvozanat nuqtalarini muhim deb hisoblashadi, chunki ular o‘zgarishlar ta’sirida haqiqiy sistema tomonidan kuzatilishi mumkin. Bu ushbu o‘rganilgan masalada ham yaqqol ko‘rinadi.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. А.С.Исаев, Р.Г.Хлебопрос, Л.В.Недорезов и др. Популяционная динамика лесных насекомых. М.: Наука, 2001 г., с. 374.
2. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.
3. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
4. Недорезов Л.В. Моделирование массовых размножений лесных насекомых. Новосибирск, Наука, 1986 г., с.125.
5. Розиков У.А., Жамилов У.У. F-квадратичные стохастические операторы // Математические заметки, 83:4 (2008), с. 606-612.
6. Lyubich Yu. I. Mathematical structures in population genetics // Biomathematics. – 1992. – 22.
7. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские КСО двуполой популяции // Украинский математический журнал, 63:17 (2011), с.985-998.

## BA’ZI TENGSIKLARNI ISBOTLASHNING LAGRANJ

KO’PAYTUVCHILARI USULI

K.O.Sadikov<sup>1</sup>, G.T.Aytjanova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*President maktabi, Nukus, o’qituvchi*

<sup>2</sup>*O’zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O’zbekiston*

*E-mail:* <sup>1</sup>*k.sadikov@nukuspm.uz*

<sup>2</sup>*gulaim2003qar@gmail.com*

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada o’zgaruvchilariga bog’liq funksiyasi ma’lum shartlarni qanoatlantiruvchi va o’zgaruvchilarga bog’liq qo’shimcha shartlar bilan berilgan tengsizliklarni isbotlash usulini ko’rib o’tamiz. Bunda berilgan tengsizlik funksiyasi orqali yangi qo’shimcha funksiya yaratish talab etiladi. Bunday tengsizliklarga [1] va [2] adabiyotlarda ham misollar keltirilgan.

**Kalit so‘zlar:** tengsizlik, funksiya, uzluksizlik, Lagranj funksiyasi, differensial, xususiy hosila, lokal ekstremum, Koshi tengsizligi.

## THE METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS FOR PROVING CERTAIN INEQUALITIES

**Abstract:** In this article, we will consider the method of proving inequalities in which functions of their variables are continuous and differentiable and for those variables are given some conditions. In this given inequality, it is required to create a new additional function through the function. Examples of this kind of inequality are also given in the literature [1] and [2].

**Keywords:** inequality, function, continuity, Lagrange function, differential, partial derivative, local extremum, AM-GM inequality.

## МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА

**Аннотация:** В данной статье мы рассмотрим метод доказательства неравенств в которых функции своих переменных непрерывны и дифференцируемы, а также для тех, переменным заданы некоторые условия. В данном неравенстве необходимо создать новая дополнительная функция через функцию неравенства. Примеры такого рода неравенств также приведены в литературе [1] и [2].

**Ключевые слова:** неравенство, функция, непрерывность, функция Лагранжа, дифференциал, частная производная, локальный экстремум, неравенство Коши.

**Teorema.** (Lagranj ko‘paytuvchilari teoremasi)  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$   $I \subseteq \mathbb{D}^m$  ajralmaydigan sohada uzlusiz, differensiallanuvchi funksiya bo‘lsin, shuningdek  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  (bu yerda  $k < m$ ) shartlar qanoatlantirilsin. U holda  $f$  funksiya  $I$  sohaning chetki nuqtalarida yoki  $L = f - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i$  Lagranj funksiyasining xususiy hosilalari  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  bo‘yicha nolga teng nuqtalarida  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  shartlar bilan berilgan shartli ekstremumga erishadi [1, 177-b.].

Yuqoridagi teoremaga binoan tongsizliklarni isbotlashga doir bir qancha misol-larni ko‘rib o‘tamiz:

1.  $x, y, z \leq 1$  haqiqiy sonlari  $x + y + z = 1$  tenglikni qanoatlantiradigan bo‘lsin. U holda quyidagi tongsizlikni isbotlang [1, 185-b.]:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}$$

**Isbot.**  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} - \frac{27}{10}$  va  $x + y + z = 1$  dan foydalanib Lagranj

funksiyasini tuzamiz:

$$L(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} - \lambda(x + y + z - 1)$$

$f(x, y, z)$  funksiya  $I \subseteq \mathbb{D}^3$  sohada uzlusiz va differensiallanuvchi.  $L(x, y, z)$  funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \lambda \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} - \lambda \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} - \lambda$$

Teoremaga asosan  $M(x, y, z)$  nuqtani topishimiz kerak, ya’ni  $M$  nuqtada  $L$  funk-

siyaning xususiy hosilalari nolga teng:  $\frac{\partial L}{\partial x}(M) = \frac{\partial L}{\partial y}(M) = \frac{\partial L}{\partial z}(M) = 0 \Rightarrow$

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \lambda = 0 \quad -\frac{2y}{(1+y^2)^2} - \lambda = 0 \quad -\frac{2z}{(1+z^2)^2} - \lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{2x}{1+x^2} = -\frac{2y}{1+y^2} = -\frac{2z}{1+z^2} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$x(1+y^2)^2 = y(1+x^2)^2 \Rightarrow (x-y)(xy(x^2+xy+y^2)+2xy-1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = y \text{ yoki } xy(x^2+xy+y^2)+2xy-1 = 0$$

Xuddi shunday, quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} y &= z \text{ yoki } yz(y^2 + yz + z^2) + 2yz - 1 = 0 \\ x &= z \text{ yoki } xz(x^2 + xz + z^2) + 2xz - 1 = 0 \end{aligned}$$

Izlanayotgan nuqtalarni topish uchun quyidagi holatlarni qarash maqsadga muvofiq bo‘ladi:

$$1) \quad x = y = z \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = -\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{1}{9}\right)^2} = -\frac{27}{50} \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$2) \quad x \neq y \neq z \Rightarrow \begin{cases} xy(x^2 + xy + y^2) + 2xy - 1 = 0 \\ yz(y^2 + yz + z^2) + 2yz - 1 = 0 \\ xz(x^2 + xz + z^2) + 2xz - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ushbu sistemadagi tenglamalarni}$$

bir-biridan ayiramiz:

$$xy(x^2 + xy + y^2) + 2xy - 1 - yz(y^2 + yz + z^2) - 2yz + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 2) = 0$$

$$xy(x^2 + xy + y^2) + 2xy - 1 - xz(x^2 + xz + z^2) - 2xz + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 2) = 0$$

$$yz(y^2 + yz + z^2) + 2yz - 1 - xz(x^2 + xz + z^2) - 2xz + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(y-x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 2) = 0$$

(1) tenglik va  $x+y+z=1$  bo‘yicha  $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ . Shuningdek,  $x \neq y \neq z$  ligi dan ko‘rishimiz mumkinki:  $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 2 = 0 \Rightarrow$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = -4$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 = -4$$

Yuqoridagi tenglama yechimga ega emasligidan,  $M_1$  nuqta  $f$  funksiya shartli ekstremumga erishadigan yagona nuqta. Endi esa,  $f$  funksiya shu nuqtada eng katta qiymatiga yoki eng kichik qiymatiga erishishini aniqlash lozim. Buning uchun  $L$  Lagranj funksiyasining ikkinchi tartibli differensialining  $M_1$  nuqtadagi ishorasini aniqlash zarur.

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{27}{50}(x+y+z-1) \\ dL &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} dx - \frac{2y}{(1+y^2)^2} dy - \frac{2z}{(1+z^2)^2} dz + \frac{27}{50}(dx+dy+dz) \\ d^2L &= -2 \left( \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} dx^2 + \frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3} dy^2 + \frac{1-3z^2}{(1+z^2)^3} dz^2 \right) \\ d^2L(M_1) &= -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9^3}{10^3} (dx^2 + dy^2 + dz^2) = -\frac{243}{250} (dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0 \end{aligned}$$

Demak,  $M_1$  nuqta  $f$  funksiya shartli lokal maksimumga erishadigan nuqta.

$$\begin{aligned} f(M_1) &= f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3^2}} = \frac{27}{10} \Rightarrow f(x, y, z) \leq \frac{27}{10} \\ \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} &\leq \frac{27}{10} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.  $a, b, c > 0$  haqiyqiy sonlar hamda  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  bo‘lsin. U holda, quyidagi tengsizlikni isbotlang [1, 185-b.]:

$$a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b) \leq 6$$

**Isbot.**  $f(a, b, c) = a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b)$  va  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  ekanligidan foydalanib Lagranj funksiyasini tuzib olamiz:

$$L(a, b, c) = a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b) - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 3)$$

Endi esa,  $L$  funksiyasi uchun xususiy hosilalarni topib, nolga tenglaymiz:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 3a^2(b+c) + b^3 + c^3 - 2a\lambda \Rightarrow 3a^2(b+c) + b^3 + c^3 - 2a\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = a^3 + 3b^2(c+a) + c^3 - 2b\lambda \Rightarrow a^3 + 3b^2(c+a) + c^3 - 2b\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = a^3 + b^3 + 3c^2(a+b) - 2c\lambda \Rightarrow a^3 + b^3 + 3c^2(a+b) - 2c\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{3a^2(b+c) + b^3 + c^3}{2a} = \frac{a^3 + 3b^2(c+a) + c^3}{2b} = \frac{a^3 + b^3 + 3c^2(a+b)}{2c}$$

$$(3a^2(b+c) + b^3 + c^3)b = (a^3 + 3b^2(c+a) + c^3)a \\ 3a^2b^2 + 3a^2bc + b^4 + bc^3 = a^4 + 3b^2ca + 3b^2a^2 + c^3a \\ (b-a)(-3abc + c^3 + (b+a)(b^2 + a^2)) = 0$$

Bundan ko‘rishimiz mumkinki,  $a=b$  yoki  $(a^2 + b^2)(a+b) + c^3 = 3abc$ .

$$(a^2 + b^2)(a+b) > (a^2 - ab + b^2)(a+b)$$

$$(a^2 + b^2)(a+b) > a^3 + b^3$$

*Koshi tengsizligi* bo‘yicha quyidagi natijalarga ega bo‘lamiz:

$$(a^2 + b^2)(a+b) + c^3 > a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \Rightarrow (a^2 + b^2)(a+b) + c^3 \neq 3abc$$

Xuddi shunday,  $b=c$  va  $a=c$  tengliklari kelib chiqadi. Demak,  $a=b=c=1$ .

$$\lambda = \frac{3 \cdot 2 + 1 + 1}{2} = 4 \quad M(1,1,1) \Rightarrow L(a,b,c) = a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) - 4(a^2 + b^2 + c^2 - 3)$$

$$dL = (3a^2(b+c) + b^3 + c^3 - 8a)da + (a^3 + 3b^2(c+a) + c^3 - 8b)db + (a^3 + b^3 + 3c^2(a+b) - 8c)dc$$

$$d^2L = (6a(b+c)da + 3a^2(db+dc) + 3b^2db + 3c^2dc - 8da)da + \\ + (3a^2da + 6b(c+a)db + 3b^2(dc+da) + 3c^2dc - 8db)db + \\ + (3a^2da + 3b^2db + 6c(a+b)dc + 3c^2(da+db) - 8dc)dc$$

$$d^2L(M) = 4da^2 + 4db^2 + 4dc^2 + 12dad + 12dbdc + 12dac$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow 2ada + 2bdb + 2cdc = 0$$

$M$  nuqta uchun  $da + db + dc = 0 \Rightarrow da = -(db + dc)$ .

$$d^2L(M) = 4(db+dc)^2 + 4db^2 + 4dc^2 + 12(db+dc)(-db-dc) + 12dbdc \Rightarrow$$

$$d^2L = -4(db^2 + dbdc + dc^2) < 0$$

Bundan ko‘rinib turibdiki,  $M$  nuqta lokal maksimum va  $f(a,b,c) \leq f(M)$ .

$$f(1,1,1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6 \Rightarrow a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) \leq 6$$

■

3.  $a, b, c > 0$  haqiyqiy sonlar hamda  $a+b+c=1$  bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizlikni isbotlang [2, 9-b.]:

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1$$

**Isbot.**  $f(a,b,c) = 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a^3 + b^3 + c^3)$  va  $a+b+c=1$  ligidan foydalaniib

Lagranj funksiyasini tuzib olamiz:

$$L(a, b, c) = 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a^3 + b^3 + c^3) - \lambda(a + b + c - 1)$$

$L$  funksiyaning xususiy hosilalarini nolga tenglaymiz:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 10a - 18a^2 - \lambda \Rightarrow 10a - 18a^2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 10b - 18b^2 - \lambda \Rightarrow 10b - 18b^2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = 10c - 18c^2 - \lambda \Rightarrow 10c - 18c^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda = 10a - 18a^2 = 10b - 18b^2 = 10c - 18c^2$$

$$10(a-b) = 18(a-b)(a+b) \Rightarrow a=b \text{ yoki } a+b = \frac{5}{9} \Rightarrow c = \frac{4}{9}$$

Xuddi shunday:

$$b=c \text{ yoki } a=\frac{4}{9} \text{ va } a=c \text{ yoki } b=\frac{4}{9}$$

Quyidagi holatlarni qaraymiz:

$$1) \quad a=b=c=\frac{1}{3} \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{3}$$

2)  $M_2\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right), M_3\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right), M_4\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$  nuqtalar uchun  $\lambda$  ning qiymati bir xil:

$$\lambda_2 = 10a - 18a^2 = 10b - 18b^2 = 10c - 18c^2 = \frac{8}{9}$$

$$L(a, b, c) = 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a^3 + b^3 + c^3) - \lambda(a + b + c - 1)$$

$$dL = 10ada + 10bdb + 10cdc - 18a^2da - 18b^2db - 18c^2dc - \lambda da - \lambda db - \lambda dc$$

$$d^2L = (10 - 36a)da^2 + (10 - 36b)db^2 + (10 - 36c)dc^2$$

$M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow d^2L(M_1) = -2(da^2 + db^2 + dc^2) < 0 \Rightarrow M_1$  nuqta lokal maksimum.

$$f(M_1) = 5 \cdot \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) - 6 \cdot \left( \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \right) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow f(a, b, c) \leq f(M_1)$$

Endi esa, boshqa nuqtalarni ham ko'rib chiqamiz:

$$a+b+c=1 \Rightarrow da+db+dc=0. \quad M_2 \text{ nuqta uchun: } d^2L(M_2) = 6da^2 - 6db^2 - 6dc^2 = 12dbdc$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow M_2$  nuqta uchun funksiya shartli ekstremumga ega emas

[3, 106-b.]

Xuddi shunday,  $M_3, M_4$  nuqtalarda ham shartli ekstremum mavjud emas.

Demak,  $M_1$  nuqta yagona ekstremumga erishiladigan nuqta va quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1$$

### **Adabiyotlar**

1. Zdravko Cvetkovski. *Inequalities* – Berlin: <<Springer>>, 2012, – P. 177, 185.
2. Andresscu T., Cirtuoaje V., Dospinescu G., Lascu M. *Old and New inequalities* – Romania: <<GIL Publishing House>> 2004, – P. 9.
3. G. Xudoyberganov, A.K. Vorisov, X.T. Mansurov, B.A. Shoimqulov. *Matematik analizdan ma’ruzalar II* – Toshkent: <<Voris-nashriyot>>, 2010, –B. 106.

# V. SHO'BA. HISOBBLASH MATEMATIKASI VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

## Numerical Solution of Anomalous Solute Transport Problem in a Fractured Porous Medium

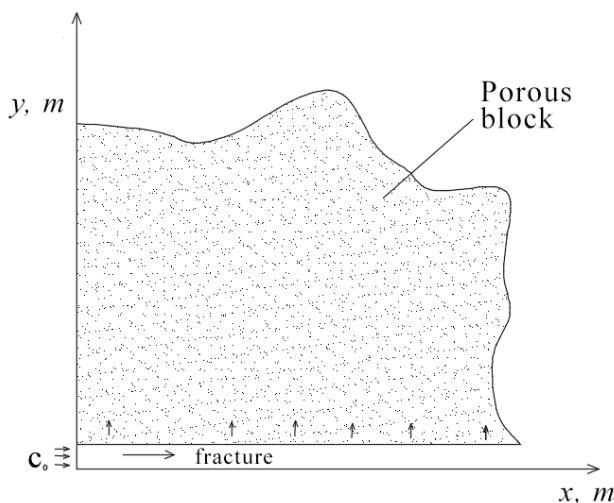
<sup>1</sup>Khuzhayorov B.Kh.,<sup>1</sup>Eshdavlatov Z.Z.

<sup>1</sup>Samarkand State University, Samarkand

b.khuzhayorov@mail.ru;z.eshdavlatov@mail.ru

In numerous studies about groundwater flows in fractured media, it was accepted that the effective permeability of the medium is overwhelmed by fractures [1, 2]. In spite of the fact that fractures are the most pathways for water flow and solute transport, diffusion in neighboring porous matrix can play a significant role in general solute transport through the medium [1, 2]. One-dimensional flow through a single fracture can be described by the Navier–Stokes equations for nonturbulent flows of a viscous incompressible fluid in the space between two parallel planes, neglecting the inertial terms.

This paper presents a solution of solute transport problem in a fractured porous medium (FPM), when the FPM is modeled as a single fracture and an adjacent single porous block (matrix) in Fig 1.



**Figure 1.** Schematic representation of solute transport in the element of fractured porous medium.

Both in the fracture and in the porous block, the solute transport process is described by equations of the convective-diffusion type, and mass transfer between the fracture and porous block is taken into account. In the fracture, one-dimensional convective-diffusion, and in the porous block, two-dimensional convective-diffusion equations are considered [3].

Since we are modeling anomalous solute transport, this physical process described using fractional derivatives

$$\begin{cases} \frac{\partial c_f}{\partial t} + v \frac{\partial c_f}{\partial x} = D_f \frac{\partial^2 c_f}{\partial x^2} + m_0 D_m \frac{\partial^{1-\gamma}}{\partial t^{1-\gamma}} \left( \frac{\partial^\delta c_m}{\partial y^\delta} \right) \Big|_{y=0}, & 0 < x < +\infty \\ \frac{\partial c_m}{\partial t} = D_m \frac{\partial^{1+\delta} c_m}{\partial y^{1+\delta}}, & 0 < \delta \leq 1 \end{cases}, \quad (1)$$

The initial and boundary conditions

$$\begin{cases} c_f(0, x) = 0 \\ c_f(t, 0) = c_0 \\ c_m(t, x, 0) = c_f(t, x) \end{cases}, \quad \begin{cases} c_m(0, x, y) = 0 \\ c_f(t, \infty) = 0 \\ c_m(t, x, \infty) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

where  $c_f = c_f(t, x)$  is the concentration of the solute in the fractures  $m^3/m^3$ ;  $c_m = c_m(t, x, y)$  is the concentration of the solute in the matrix  $m^3/m^3$ ;  $D_f$  is the diffusion coefficient in the fracture,  $m^2/s$ ;  $v$  is the velocity of fluid,  $m/s$ ;  $D_m$  is the anomalous diffusion coefficient in the matrix,  $m^{1+\delta}/s$ ;  $\gamma, \delta$  are the orders of derivatives,  $0 < \gamma, \delta \leq 1$ ;  $m_0$  is the coefficient of matrix porosity;  $t$  is time,  $s$ ;  $x, y$  are coordinates,  $m$ .

In order to apply finite difference method to (1)-(2) problem we introduced a net in the considering region as following

$$\bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau} = \{(x_i, y_k, t_j), i = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, J; x_i = i h_1; y_k = k h_2; t_j = j \tau; \tau = T/J\}.$$

where  $h_1$  is the net step in the  $x$  direction,  $h_2$  is the net step in the  $y$  direction,  $\tau$  is the time step of the net,  $J$  is the number of net intervals of  $t$ ,  $T$  is the maximum time during which the process is studied.

Caputo's definition was used to approximate fractional derivatives in this problem. Systems of equations are approximated the implicit and explicit scheme of the first and second equations respectively, we obtain the following system of equations

$$\begin{cases} b \left( \frac{(c_f)_i^{j+1} - (c_f)_i^j}{\tau} + g \frac{(c_f)_{i+1}^{j+1} - (c_f)_{i-1}^{j+1}}{2h_1} \right) = b D_f \frac{(c_f)_{i-1}^{j+1} - 2(c_f)_i^{j+1} + (c_f)_{i+1}^{j+1}}{h_1^2} + m_0 D_m \frac{(c_m)_{i,1}^j - (c_m)_{i,0}^j}{\Gamma(2-\delta)\tau^\delta} \\ \frac{(c_m)_{i,k}^{j+1} - (c_m)_{i,k}^j}{\tau} = D_m \frac{1}{\Gamma(2-\delta)h_2^{1+\delta}} \cdot \sum_{k=0}^{k-1} ((c_m)_{i,k-(l-1)}^j - 2(c_m)_{i,k-l}^j + (c_m)_{i,k-(l+1)}^j) \times [(l+1)^{1-\delta} - l^{1-\delta}] \end{cases}$$

Let's approximate the initial condition

$$(c_f)_i^0 = 0; \quad (c_m)_{i,k}^0 = 0$$

and boundary conditions

$$(c_f)_0^j = c_0 \quad (c_m)_{i,0}^j = (c_f)_i^j$$

$$(c_f)_N^j = 0 \quad (c_m)_{i,M}^j = 0$$

In order to development of an algorithm for solving the problem using the obtained approximations.

$$\underbrace{\left( \frac{bD_f}{h_1^2} + \frac{v}{2h_1} \right)}_A (c_f)_{i-1}^{j+1} - \underbrace{\left( \frac{2bD_f}{h_1^2} - \frac{b}{\tau} \right)}_B (c_f)_i^{j+1} + \underbrace{\left( \frac{bD_f}{h_1^2} - \frac{v}{2h_1} \right)}_C (c_f)_{i+1}^{j+1} = - \underbrace{\left( \frac{b}{\tau} (c_f)_i^j + m_0 D_m \frac{(c_m)_{i,1}^j - (c_m)_{i,0}^j}{\Gamma(2-\delta) h_2^\delta} \right)}_{F_i} \quad (3)$$

$$(c_m)_{i,k}^{j+1} = (c_m)_{i,k}^j + \tau D_m \frac{1}{\Gamma(2-\delta) h_2^{1+\delta}} \cdot \sum_{k=0}^{k-1} ((c_m)_{i,k-(l-1)}^j - 2(c_m)_{i,k-l}^j + (c_m)_{i,k-(l+1)}^j) \times [(l+1)^{1-\delta} - l^{1-\delta}]$$

To solve equation (3), we use the Thomas' algorithm.

$$A = \frac{bD_f}{h_1^2} + \frac{v}{2h_1}, B = \frac{2bD_f}{h_1^2} - \frac{b}{\tau}, C = \frac{bD_f}{h_1^2} - \frac{v}{2h_1}, F_i = \frac{b}{\tau} (c_f)_i^j + m_0 D_m \frac{(c_m)_{i,1}^j - (c_m)_{i,0}^j}{\Gamma(2-\delta) h_2^\delta}$$

We obtain a solution to the problem, has the following form,

$$(c_f)_i^{j+1} = \alpha_{i+1} (c_f)_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}$$

coefficients are defined as follows.

$$\alpha_{i+1} = -\frac{C}{A\alpha_i - B}, \quad \beta_{i+1} = -\frac{F_i - A\beta_i}{A\alpha_i - B}$$

We will find starting values of the coefficients  $\alpha_i$  and  $\beta_i$  from the left boundary condition

$$(c_f)_0^{j+1} = c_0, \quad (c_f)_0^{j+1} = \alpha_1 (c_f)_1^{j+1} + \beta_1, \text{ and looks like } \alpha_1 = 0, \beta_1 = c_0.$$

Let us find the values necessary to run the reverse run program  $(c_f)_M^j = 0$ .

According to taken results it is concluded that, decreasing the orders of derivatives with respect to space coordinates on the equation of solute transport in the porous block, “fast”-diffusion process is observed in the same zone.

## References

1. Grisak G.E. and Pickens J.F. An analytical solution for solute transport through fractured media with matrix diffusion, Journal of Contaminant Hydrology, 52(1/2), 1981, 47-57 pp.
2. Economides, M.J.; Nolte, K.G. Reservoir Stimulation; John Wiley and Sons Ltd.: Chichester, UK, 2000.
3. Unsal, E.; Matthaii, S.K.; Blunt, M.J. Simulation of multiphase flow in fractured reservoirs using a fracture-only model with transfer functions. Comput. Geosci. 2010, 14, 527–238.

# On the approximation algorithms for solving Bernoulli differential equations using piecewise constant argument method

Mukhiddin I. Muminov<sup>a</sup>, Zafar Z. Jumaev<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Mathematics, Samarkand State University, University boulevard, 15, Samarkand, 140110, Samarkand, Uzbekistan.

<sup>b</sup> Faculty of Intelligent Systems and Computer Technologies, Samarkand State University, University boulevard, 15, Samarkand, 140100, Samarkand, Uzbekistan.

## 1. Introduction

In this paper, a new method is presented for solving an approximate solution of the following Bernoulli differential equation:

$$\begin{aligned} y' &= P(t) + Q(t)y + R(t)y^m, \quad t \in [0,1] \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $P(\cdot), Q(\cdot)$  and  $R(\cdot)$  are real variable continuous functions on  $[0,1]$ , which plays a significant role in many fields of applied science [1].

## 2. Differential equations with piecewise constant arguments

Let  $N$  be a positive integer number. Consider the following differential equation with piecewise constant arguments of the form

$$\begin{aligned} y'(t) &= P(t) + Q(t)y\left(\frac{k-1}{N}\right) + R(t)y^m\left(\frac{k-1}{N}\right), \quad t \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right] \\ y(0) &= y_0, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{2}$$

A solutions of (2) is defined as follows.

**Definition 1** A function  $y(t) := y_N(t)$  is called a solution of the initial value problem (2) if the following conditions are satisfied:

(i)  $y(t)$  is continuous on  $[0,1]$ ;

(ii)  $y'(t)$  exists and continuous in  $[0,1]$  with possible exception at points  $\frac{k}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , where one-sided derivatives exist;

(iii)  $y(t)$  satisfies initial value problem (2) in  $(0,1)$ , with the possible exception at the points  $\frac{k}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

The equation (2) is called differential equations with piecewise constant argument corresponding to the non-linear differential equation (1).

**Theorem 1** *For any positive integer number  $N$  the initial value problem (2) has a unique solution  $y_N$  defined in (3).*

The following theorem claims that the function  $y_N$  can be approximated solution of the initial value problem (1).

**Theorem 2** *For any  $\varepsilon > 0$  there exist a positive number  $N_0 = N(\varepsilon)$  such that for any positive integer number  $N$  with  $N > N_0$  the inequality*

$$\sup_{t \in [0,1]} |y_N'(t) - Q(t)y_N(t) - R(t)y_N^m(t) - P(t)| < \varepsilon \quad (3)$$

holds, where  $y_N$  is solution of the initial value problem (2).

**Example 1.** Let the Bernoulli equation with initial value has the form

$$y' = P(t) + \sin(5t)y + e^t y^4, \quad y(0) = 1,$$

where  $P(t) = -\frac{\sin(\pi t)\pi}{1+t} - \frac{\cos(\pi t)}{(1+t)^2} - \frac{\sin(5t) \cdot \cos(\pi t)}{1+t} - e^t \frac{\cos(\pi t)^4}{(1+t)^4}$ . Note that the function  $P(t)$  is chosen so that the function  $y(t) = \frac{\cos(\pi t)}{1+t}$  is exact solution of this problem. In this case, the graphs of the approximate solution  $y_N$  and the exact solution  $y(t)$  of the equation (1) are compared in Figure 1.

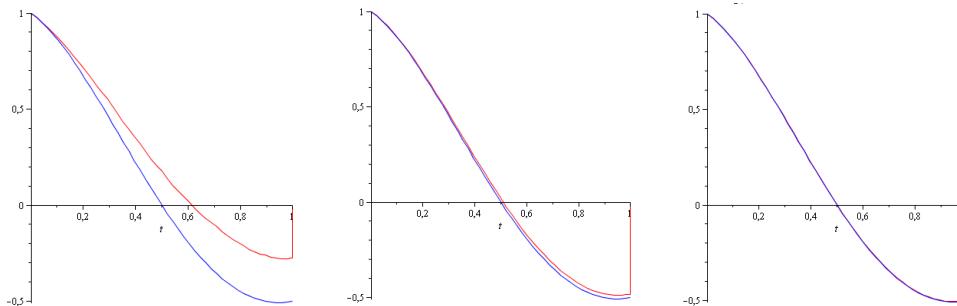


Figure 1: The graphs of original (blue color) and approximate (red color) solutions for Example 1, respectively as  $N = 10$ ,  $N = 100$  and  $N = 1000$ .

N	$\max  y(t) - y_N(t) $
N=10	0.250492116401980991
N=100	0.0240505723392285264
N=1000	0.00239314484074404366
N=10000	0.000239190865432281630

Table 1: The absolute errors of approximate and exact solutions for Example 1.

**Example 2.** Let the Bernoulli equation with initial value has the form

$$y' = P(t) + (\sin(2t) - \cos(t))y + (t^2 + 2t^2 - 6)y^3, \quad y(0) = 0$$

where  $P(t) = \frac{2\cos(2\pi t)\pi}{1+e^t} - \frac{\sin(2\pi t)e^t}{(1+e^t)^2} - \frac{(-\cos(t) + \sin(2t))\sin(2\pi t)}{1+e^t} - \frac{(3t^2 - 6)\sin(2\pi t)^3}{(1+e^t)^3}$ . Note

that the function  $P(t)$  is chosen so that the function  $y(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{1+e^t}$  is exact solution of this problem. In this case, the graphs of the approximate solution  $y_N$  and the exact solution  $y(t)$  of the equation (1) are compared in Figure 2.

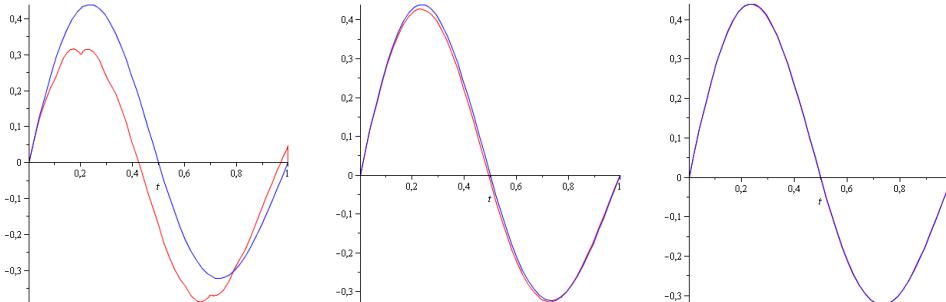


Figure 2: The graphs of original (blue color) and approximate (red color) solutions for Example 2, respectively as  $N = 10$ ,  $N = 100$  and  $N = 1000$ .

N	$\max  y(t) - y_N(t) $
N=10	0.183864297467776605
N=100	0.0168889503605433312
N=1000	0.00168113626121049744
N=10000	0.000168041632121238018

Table 2: The absolute errors of approximate and exact solutions for Example 2.

## References

1. W.T. Reid, Riccati Differential Equations, Academic Press, New York, 1972.

**ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ  
ПРИКЛАДНЫХ РЕШЕНИЙ**

**Бреев Андрей Анатольевич**

аспирант

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина  
Braaand@gmail.com

**Аннотация:** Статья посвящена описанию системы моделирования прикладных решений, которые будут построены на базе платформы «1С:Предприятие 8». Проводится сравнительный анализ преимуществ данного механизма и способы его применения. Показана логическая модель в системе проектирования прикладных решений, которая строится с использованием методологии IDEF0.

**Ключевые слова:** прикладные решения, моделирование систем, проектирование систем, конфигурация.

**DESCRIPTION OF THE SYSTEM FOR MODELING AND DESIGNING  
APPLICATION SOLUTIONS**

**Breev Andrey Anatolevich**  
graduate student  
Bunin Yelets State University  
Braaand@gmail.com

**Abstract:** The article is devoted to a description of the system for modeling application solutions that will be built on the basis of the «1C:Enterprise 8» platform. A comparative analysis of the advantages of this mechanism and methods of its application is carried out. A logical model is shown in the application solution design system, which is built using the IDEF0 methodology.

**Keywords:** applied solutions, system modeling, system design, configuration.

Система моделирования и проектирования прикладных решений базируется на платформе «1С:Предприятие 8». Система проектирования прикладных решений может быть использована как в качестве инструмента для проектирования новых информационных систем, разрабатываемых в среде «1С:Предприятия 8», так и для описания и документирования существующих систем, разработанных ранее без использования Системы проектирования прикладных решений. Система моделирования и проектирования прикладных решений разработана как конфигурация на платформе «1С: Предприятие 8.3».

Использование системы проектирования прикладных решений позволяет:

Руководителям проекта: организовать централизованный учет требований и пожеланий к информационной системе; выстроить целостную модель системы, отталкиваясь от автоматизируемых процессов, с возможностью проверки корректности модели; управлять изменениями в проекте; формировать план выполнения проекта; контролировать выделение ресурсов в рамках проектов и конкретных задач; анализировать завершенность проекта (выполнение необходимых задач, отсутствие ошибок).

Разработчикам: спроектировать функциональность в общем контексте проекта; учитывать при проектировании зафиксированные требования и пожелания; единообразно документировать проект; планировать собственную работу; отслеживать необходимость собственного участия в смежных проектах; организовать обмен сообщениями с участниками проекта, в контексте интересующих объектов.

Техническим писателям: упростить подготовку справочной информации в едином стиле, с учетом структуры конфигурации и взаимосвязей различных объектов конфигурации; использовать проектные материалы при подготовке документации и других материалов.

Внедренцам: разобраться в типовом решении, используя проектную документацию; соотнести реальные процессы предприятия с моделью системы, проанализировав покрытие процессов функционалом и выявив необходимость доработок; органично внести собственные доработки в типовую функциональность с выверкой полученной модели; упростить освоение конфигурации пользователями, формировать инструкции по работе с конкретной функциональностью.

Проектирование и моделирование при помощи системы проектирования прикладных решений охватывает следующие этапы:

- описание автоматизируемых процессов;
- создание логической модели проектируемой системы;
- разработка архитектуры;
- подготовка справки;
- управление проектом и изменениями;
- работа с ошибками;
- тестирование и прочие возможности.

При моделировании информационной системы описываются автоматизируемые процессы. Исходя из описания процессов, строится логическая модель проектируемой системы. На основании логической модели строится физическая модель, воплощаемая в метаданных разрабатываемой конфигурации.

При необходимости внесения изменений в проект используется механизм технических проектов. Изменения основываются на принятых требованиях и документируются с привязкой к изменяемым процессам, а также объектам логической и физической модели.

При проектировании конфигурации важно, чтобы ее функциональность отвечала реальным потребностям предприятий. Поэтому важно очертить тот круг процессов, которые позволяет автоматизировать информационная система. Система проектирования прикладных решений позволяет зафиксировать перечень автоматизируемых процессов, процессы при этом могут быть сгруппированы по усмотрению пользователя.

При описании процесса фиксируется его описание, отражающее суть процесса, события начала и окончания процесса (рис.1).

Рис.1 Описание процесса

Процесс детализируется до отдельных шагов, исполняемых конкретным исполнителем (рис.2).

Наименование	Состояние...	Описание	Функция	Исполнитель
Шаги процесса				
Подготовка данных	Добавлено	Выполнение необходимых настроек НСИ, создание параметризуемых ресурсной спецификации	Управление ресурсными спецификациями	Администратор
Формирование заказа клиента	Добавлено	Создание заказа клиента на 1 позиции Товар1 - для потребности в производстве	Формирован...	Администратор
Формирование заказа на производство	Добавлено	Оформление заказа на производство по заказу клиента - ввод на основании, установка статуса к производству для последующего формирования...	Формирован...	Администратор
Передача производственного заказа к исполнению	Добавлено	Передача производственного заказа к исполнению - формирование этапов (формирование этапов, передача этапов к выполнению, формирование ...)	Формирован...	Администратор этапов
Формирование заказов по потребностям	Добавлено	Формирование заказов по потребностям для обеспечения материальными	Формирован...	Администратор заказов на ...
Формирование заказа поставщику	Добавлено	Формирование заказа поставщику	Формирован...	Администратор
Поступление материалов от поставщика на склад	Добавлено	Поступление материалов от поставщика на склад	Регистрация ...	Администратор
Установка отгрузки материалов	Добавлено	Распоряжение в этапе для отгрузки материалов	Передача эт...	Администратор
Передача материалов в производство	Добавлено	Передача поступивших материалов в производство для его обеспечения.	Движение продукции и ...	Администратор
Производство	Добавлено	Отражение выполнения этапа, потребление материалов, выпуск этапом продукции	Выполнение этапов ...	Администратор
Передача продукции из производства на склад	Добавлено	Передача продукции из производства на склад	Движение пр...	Администратор

Рис.2 Шаги процесса

Логическая модель системы позволяет описать функциональность конфигурации, увязав ее с составом обрабатываемой информации и исполнителями. Логическая модель в системе проектирования прикладных решений строится с использованием методологии IDEF0. В рамках создания логической модели описываются функции системы, и производится их декомпозиция.

Основой описания функции является ее IDEF-схема. Схема позволяет в наглядной форме отразить взаимосвязь отдельных (дочерних) функций, потоков данных и исполнителей.

Разработка архитектуры конфигурации выполняется на основе логической модели. При этом метаданные загружаются из разрабатываемой конфигурации в процессе разработки (рис.3).

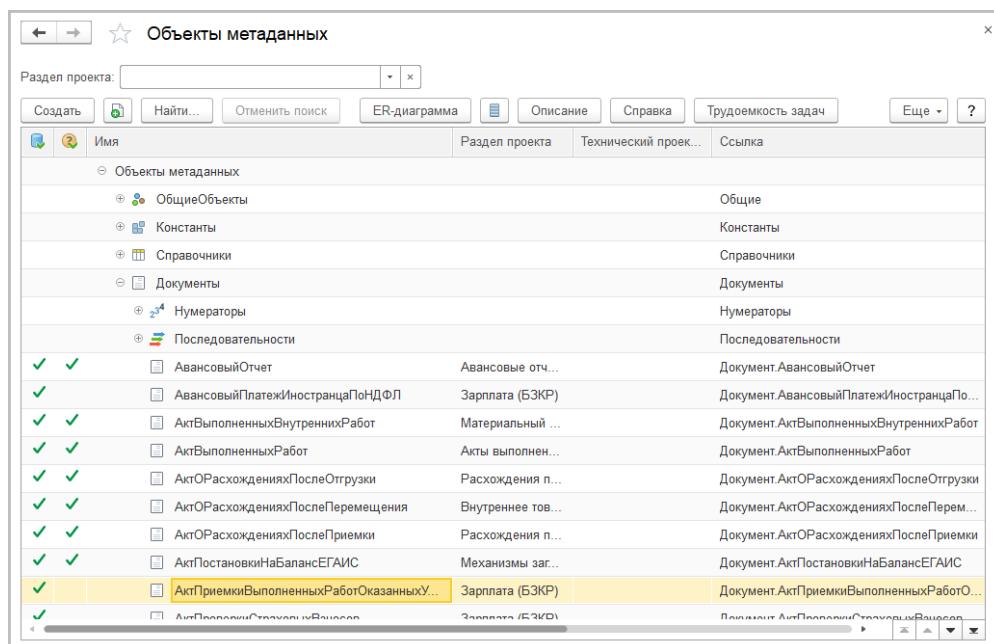


Рис.3 Объекты метаданных

Система проектирования прикладных решений позволяет автоматически формировать тексты справки для разрабатываемой конфигурации.

Подготовленные тексты справки в формате html могут быть выгружены из системы проектирования прикладных решений и загружены в конфигурацию штатными средствами конфигуратора.

Справка формируется в едином стиле, с использованием единой структуры описания, исходя из взаимосвязей подсистем, объектов метаданных и операций функций. Стили оформления справки (шрифты, отступы, выделения) могут настраиваться непосредственно в системе проектирования прикладных решений. Для управления проектом и изменениями в системе проектирования прикладных решений используется функциональность ведения технических проектов. Данная

функциональность позволяет организовать коллективную работу над проектом, с отслеживанием прохождения различных этапов проекта. При этом возможна гибкая настройка этапов, согласование этих этапов, уведомление участников команды разработки об изменениях.

Использование технических проектов обеспечивает внесение изменений в имеющийся проект таким образом, чтобы эти изменения были увязаны с логической моделью, были прозрачны и информативны для других участников проекта. Механизм работы с задачами позволяет удобным образом выстроить процесс управления, согласования ресурсов, контроля над выполнением проектов. Система проектирования прикладных решений позволяет организовать автоматизированное тестирование: подготовку тестовых сценариев, автоматический прогон тестов, регистрацию ошибок (рис.4).

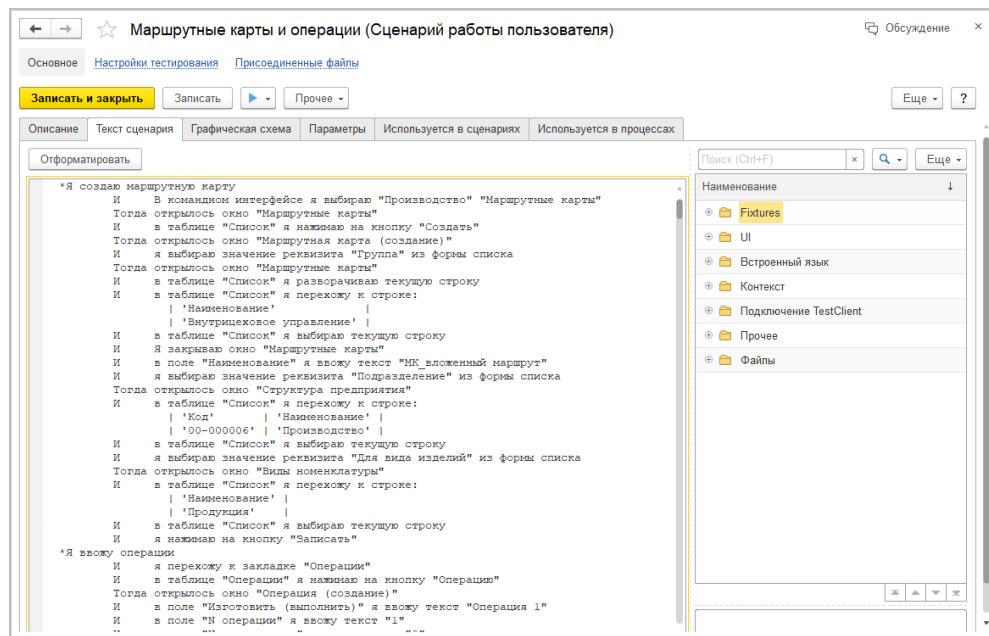


Рис.5 Сценарий работы пользователя

Информация об ошибках ведется по разрабатываемым проектам, в разрезе версий, сроков исправления, разделов проекта, статусов и т. д. Функционал системы предлагает готовую методику работы с ошибками, с возможностью формирования различных отчетов, публикации информации об ошибках. Система позволяет настроить связи между проектами, указать, какие проекты-библиотеки включаются в проект, с учетом конкретных версий проектов. Это позволяет получать информацию о наличии в проекте ошибок, источниками которых являются используемые библиотеки.

## Литература

1. Козырев И. В. Проектирование прикладного решения в системе программ 1С: Предприятие 8 / И. В. Козырев, В. Н. Леванцов // Новые математические методы

и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XVI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов в 2 ч. , Гомель, 25–27 марта 2013 года. Том Часть 2. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины ГГУ им. Ф. Скорины ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – С. 81-83.

2. Корниенко, Д. В. Особенности настройки клиент-серверного взаимодействия системы 1С / Д. В. Корниенко, С. В. Мишина, М. О. Мельников // Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии. – 2021. – № 2. – С. 22-30.

3. Маркова М. О. Использование инструментария 1С при разработке корпоративных информационных систем / М. О. Маркова, Г. Б. Долгова // Интерактивная наука. – 2016. – № 3. – С. 135-138.

4. Остроух А. В. Проектирование системы распределенных баз данных / А. В. Остроух, А. В. Помазанов. – Saarbrucken : Palmarium Academic Publishing, 2015. – 117 с.

5. Поллак Г. А. Интеллектуальные информационные системы / Г. А. Поллак. – Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 136 с.

6. Информационно-технологическое сопровождение пользователей 1С [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://its.1c.ru/> (06.09.2023).

7. S. V. Mishina and D. V. Kornienko. Setting up data exchange between information systems that automate accounting at the enterprise. Journal of Physics: Conference Series. 2021, 2094(3), 032018.

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

**Бурнашев В.Ф<sup>1</sup>, Кайтаров З. Д<sup>2</sup>.**

<sup>1</sup>Samarkand State University

Samarkand – 140100, Uzbekistan

e-mail: vladimirburnash@mail.ru

<sup>2</sup>Samarkand State University

Samarkand – 140100, Uzbekistan

e-mail z.qaytarov@gmail.com

**Аннотация.** В статье рассматривается процесс двухфазной фильтрации в пористой среде с учетом сжимаемости среды. Подходящая для процесса математическая модель была создана и решена методом крупных частиц. Исследовано влияние изменения расстояния между нефтяными скважинами на процесс фильтрации. Согласно полученным результатам правильный выбор расстояния между нефтяными скважинами положительно влияет на процесс добычи нефти.

**Введение.** Когда жидкость движется через пористую среду, градиент давления, вызывающий этот поток, может быть достаточным для деформации пористой среды. В качестве альтернативы, если пористая среда сжимается, внутренняя жидкость вынуждена двигаться. При этом сжатии изменяются свойства материала, в частности проводимость. Уплотнение снижает пористость среды и увеличивает сопротивление прохождению жидкости. Следовательно, существует сложное взаимодействие между деформацией твердого тела и движением жидкости [1].

В данной статье исследуется влияние изменения расстояния между двумя скважинами в нефтяном пласте на двухфазный процесс фильтрации в деформируемой пористой среде. Математическая модель, подходящая для процесса была создана и численно решена.

**Постановка задачи.** Рассмотрим пласт, в котором вскрыты две нефтяные скважины. Мы предполагаем, что в процессе фильтрации в деформируемой пористой среде участвуют нефтяная и водная фазы.

Для описания процесса будем использовать одномерную математическую модель двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде:

Уравнение сохранения массы первой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1 s_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1) = 0 \quad (1)$$

где  $s_1$  - насыщенность первой фазы,  $\rho_1$  - плотность первой фазы,  $m$  - пористость,  $u_1$  - скорость первой фазы.

Уравнение сохранения массы второй фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2 s_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) = 0 \quad (2)$$

где  $s_2$  - насыщенность второй фазы,  $\rho_2$  - плотность второй фазы,  $u_2$  - скорость второй фазы.

Полагая  $\rho_1 = const$ ,  $\rho_2 = const$  перепишем уравнение (1) - (2) в следующем виде.

Уравнение сохранения массы первой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1) + \frac{\partial}{\partial x}(u_1) = 0, \quad (3)$$

Уравнение сохранения массы водной фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_2) + \frac{\partial}{\partial x}(u_2) = 0, \quad (4)$$

Скорости фильтрации фаз будем определять по закону Дарси

$$u_1 = -\frac{Kk_1}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{Kk_2}{\mu_2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5)$$

где  $K$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  – абсолютная и относительные фазовые проницаемости,  $\mu_1$  - вязкость нефти,  $\mu_2$  - вязкость воды,  $p$  – давление.

Изменение пористости учтем также как и в [2]

$$m = m_0 + \beta_m (p - p_0), \quad (6)$$

где  $p_0$  –фиксированное давление,  $m_0$  – коэффициент пористости при  $p = p_0$ ,  $\beta_m$  – коэффициент упругости пласта.

Экспериментально показано, что не только пористость, но и проницаемость значительно меняются при изменении пластового давления [2]

$$K = K_0 (1 - a_K (p_0 - p)), \quad (7)$$

Добавим к системе уравнений очевидное равенство

$$s_1 + s_2 = 1, \quad (8)$$

зависимости для вязостей

$$\mu_1 = const, \quad \mu_2 = const \quad (9)$$

и относительных фазовых проницаемостей [2]

$$k_1 = \begin{cases} \left( \frac{0,85 - s_2}{0,8} \right)^{2,8} \cdot (1 + 2,4 \cdot s_2), & 0 \leq s_2 \leq 0,85, \\ 0 & 0,85 \leq s_2 \leq 1; \end{cases} \quad (10)$$

$$k_2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq s_2 \leq 0,85, \\ \left( \frac{s_2 - 0,2}{0,8} \right)^{3,5}, & 0,85 \leq s_2 \leq 1; \end{cases} \quad (11)$$

Для вывода уравнения для давления просуммируем уравнения (3)-(4). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} [m(s_1 + s_2)] + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2) = 0.$$

(6) va (8) ifodalardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (m_0 + \beta_m (p + p_0)) = \beta_m \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Окончательно уравнение давления примет вид

$$\beta_m \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{Kk_1}{\mu_1} + \frac{Kk_2}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (15)$$

Задавая начальные

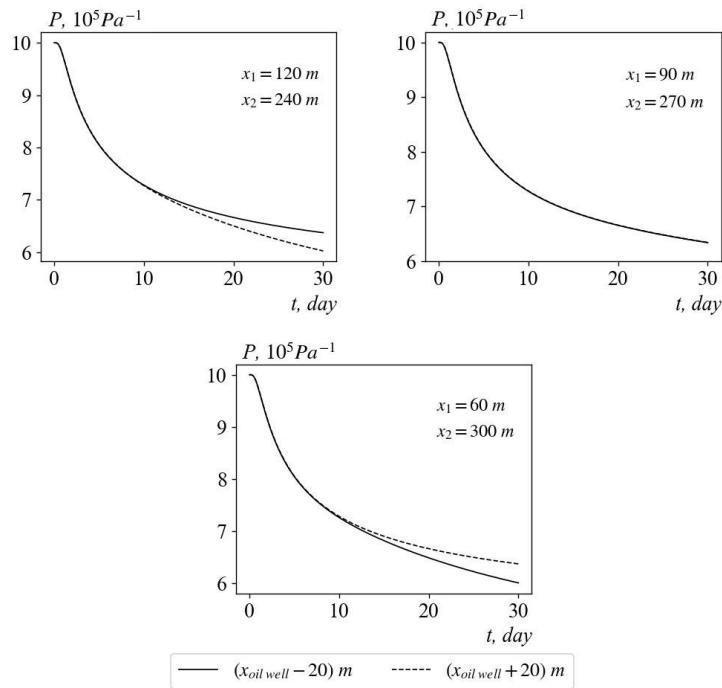
$$p(x,0) = p^0, \quad s_1(x,0) = s_1^0, \quad s_2(x,0) = s_2^0 \quad (16)$$

и граничные условия

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad p(x_1, t) = p_1^*, \quad p(x_2, t) = p_2^*, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (14)$$

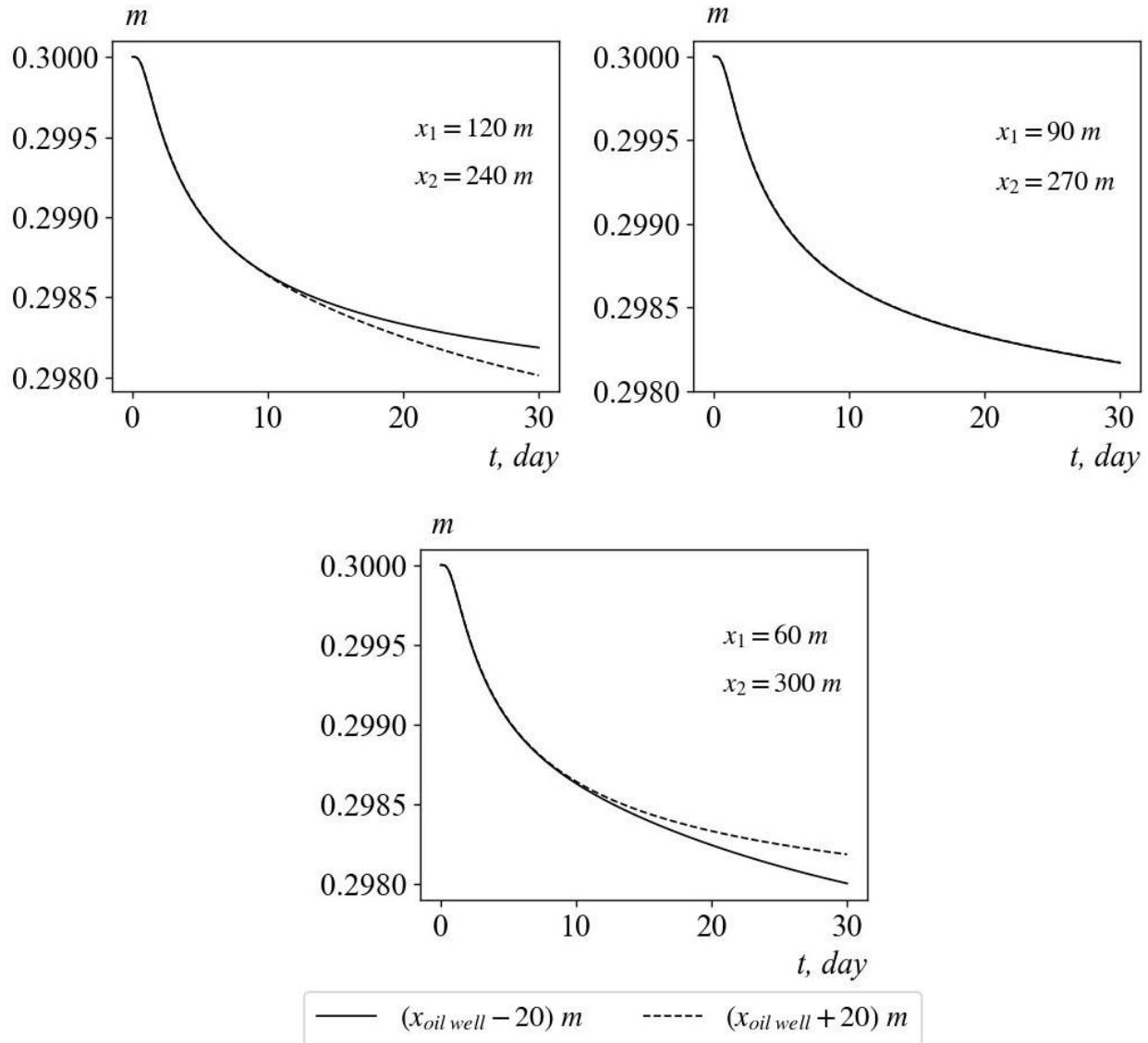
где  $p^0$  - начальное давление,  $s_1^0, s_2^0$  - начальные нефте-насыщенности первой и второй фаз,  $x_1$  - координата первой скважин,  $x_2$  - координата второй скважины,  $L$  - длина области фильтрации,  $p_1^*$  - забойное давление первой скважины,  $p_2^*$  - забойное давление второй скважины. (3) – (14) – замкнутая система уравнения, который описывает двухфазную фильтрацию в деформируемой пористой среде.

**Результаты и обсуждения.** Для решения задачи (3)-(14) воспользуемся методом крупных частиц [3] и получил следующие результаты.



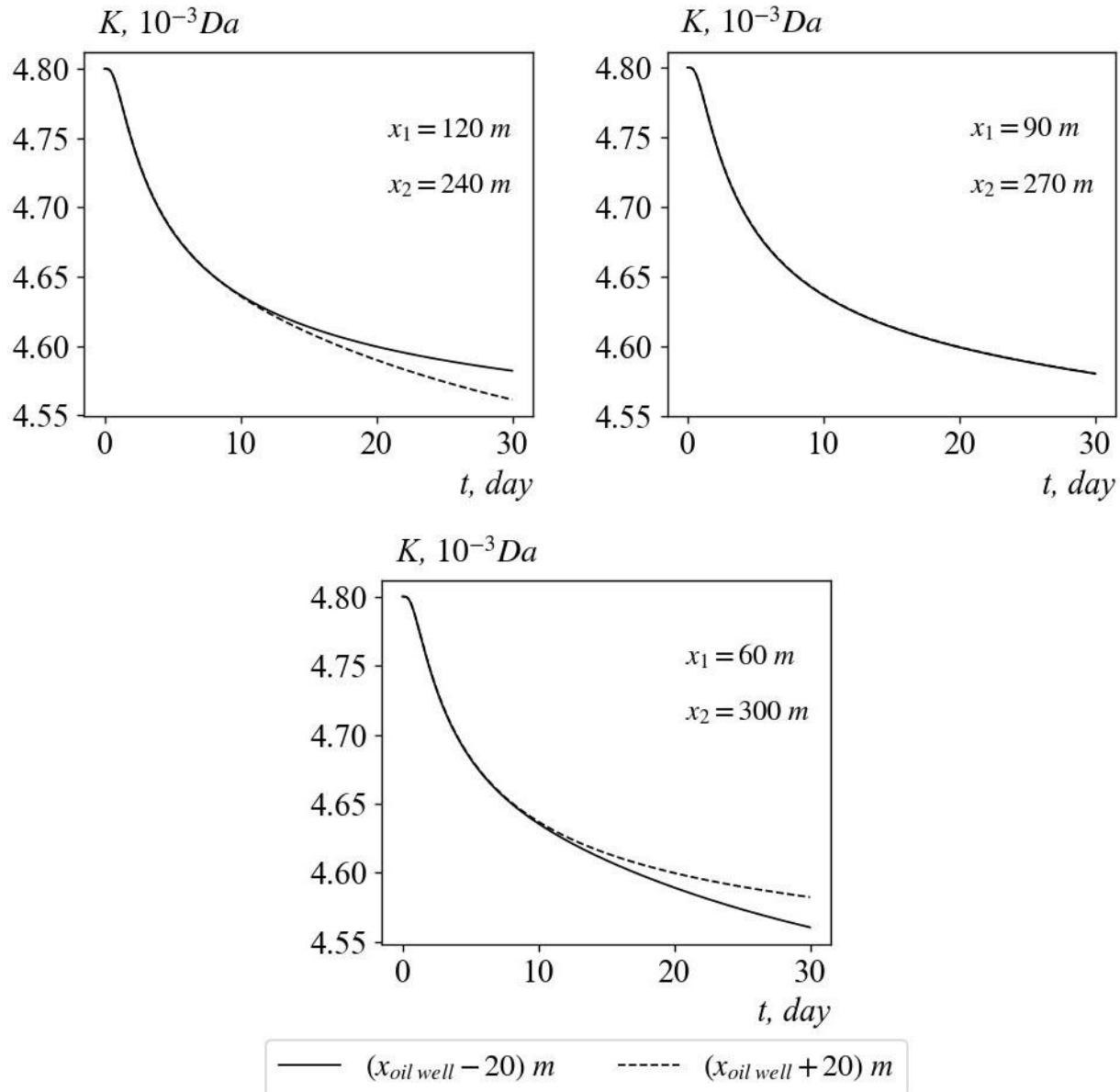
**Рис 1.** Динамика влияния расстояние между скважинами на поле давления

На рис. 1 представлена динамика изменения пластового давления в выбранных точках в 20 метрах от левого и правого сторон первой нефтяной скважины при разном расстоянии между двумя нефтяными скважинами. Из графика видно, что при близких расстояниях между скважинами ( $x_1=120$ м,  $x_2=240$ м) пластовое давление снижается больше в межскважинной зоне, при симметричных расстояниях между скважинами ( $x_1=90$ м,  $x_2=270$ м) по обеим сторонам нефтяной скважины видно, что пластовое давление уменьшалось равномерно, а при увеличении расстояния между скважинами ( $x_1=60$ м,  $x_2=300$ м), наоборот, пластовое давление уменьшалось меньше в межскважинной зоне.



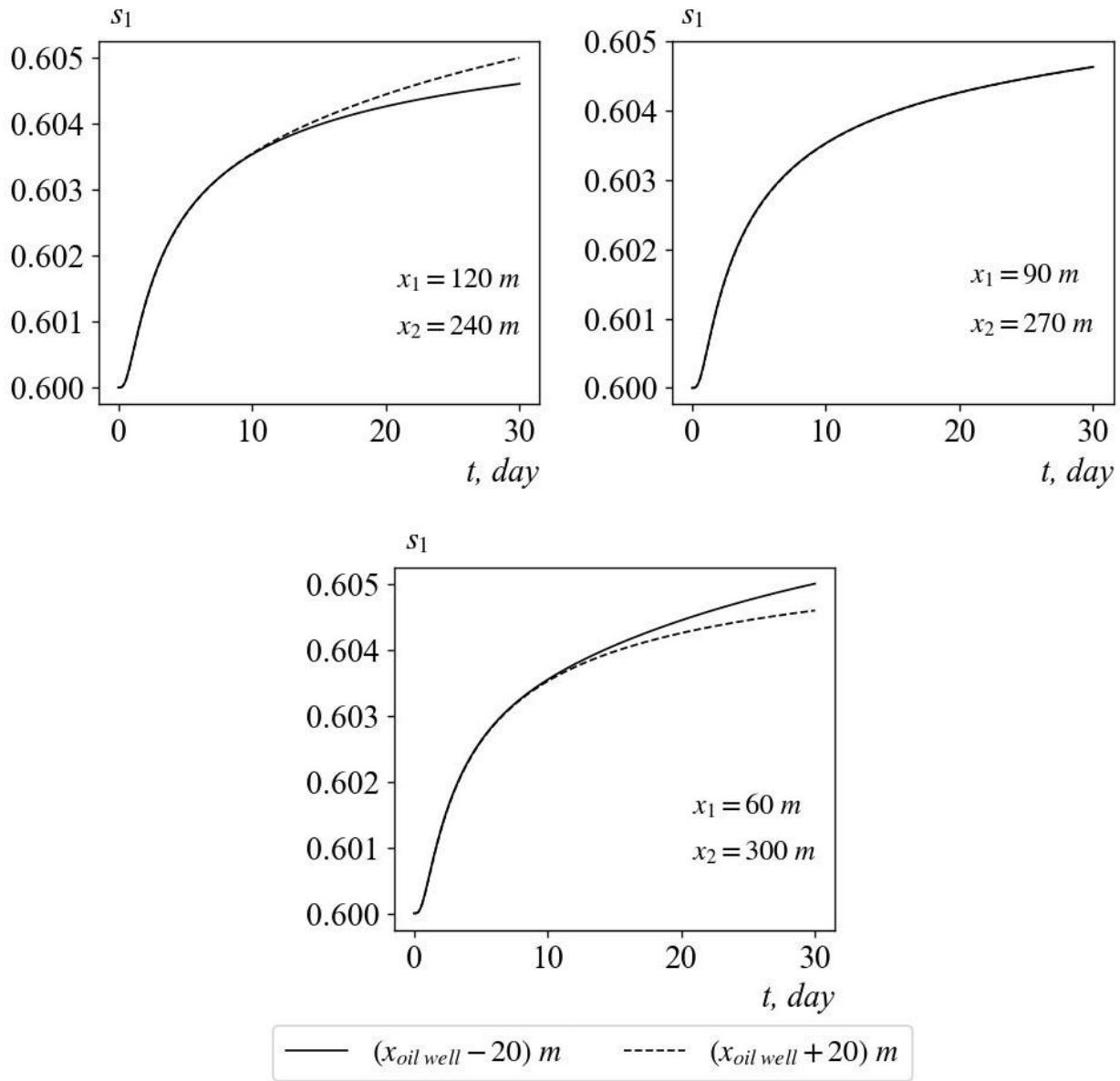
**Рис 2.**Динамика влияния расстояние между скважинами на пористость

На рис. 2 представлена динамика изменения пористости среды в точках, выбранных в 20 метрах от левого и правого сторон первой нефтяной скважины при разном расстоянии между двумя нефтяными скважинами. По графикам при расстоянии между скважинами 120 м видно, что пористость среды уменьшается быстрее, чем при симметричных расстояниях между скважинами, а при расстоянии 240 м пористость среды уменьшается медленнее в межскваженной зоне.



**Рис 3.** Динамика влияния расстояние между скважинами на проницаемость

На рис. 3 представлена динамика изменения абсолютной проницаемости среды в точках, выбранных на расстоянии 20 м от левого и правого сторон нефтяной скважины при различном расстоянии между двумя нефтяными скважинами (120 м, 180 м, 240 м). По графикам видно, что абсолютная проницаемость среды в межскважинной зоне быстрее уменьшается при близком расстоянии между скважинами, и медленнее уменьшается при дальнем.



**Рис4.**Динамика влияния расстояние между скважинами на насыщенность

На рис. 4 представлена динамика изменения нефтенасыщенности при разном расстоянии между двумя нефтяными скважинами. Мы видим, что нефтенасыщенность увеличивалась быстрее при сужении межскважинной зоны и медленнее увеличивалась при расширении межскважинной зоны.

По полученным результатам при уменьшении расстояния между скважинами видно, что снижение пластового давления, пористости и проницаемости в межскважинной зоне уменьшается быстрее, чем при симметричном расстоянии между ними, а при удалении между ними увеличивается, снижение значений этих гидродинамических параметров замедляется. Наоборот, было замечено, что нефтенасыщенность увеличивается быстрее в межскважинной зоне при уменьшении расстояния между скважинами и медленнее увеличивается при увеличении расстояния между ними.

## Литература

1. Barry, I.S. Flow in a Deformable Porous Medium. PhD, University of New South Wales, Sydney, Australia, 1990. -148 p
2. Басниев К. С, Kochin И. Н., Максимо В. М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов.-М.: Недра, 1993.— 416 с: и ISBN 5-247-02323-4
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике // М. Наука, 1982. 392 с.

## Релаксационная модель фильтрации жидкости в пористой среде

Джиянов Т.О.<sup>1</sup>, Зокиров М.С.<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Самаркандский государственный университет

t.djiyanov@mail.ru; mzokirov45@gmail.com

Известно, что при фильтрации высоковязких нефти в пористых средах проявляется ряд аномальных явлений. Одной из известных аномалий является проявление предельного градиента давления, оригинальное изучение которого непосредственно связано с именем А.Х. Мирзаджанзаде. Учет неравновесности в законах фильтрации также одним из первых осуществлен А.Х. Мирзаджанзаде [1]. Неравновесность связи между скоростью фильтрации и градиентом давления обусловлена многими факторами, одним из которых является сложность структуры пористой среды и запаздывание установления равновесного состояния в ее микропорах [2].

В одномерном случае закон фильтрации с учетом релаксации скорости фильтрации и градиента давления может быть записан в виде

$$v + \lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (1)$$

где  $v$  - скорость фильтрации,  $p$  - давление  $k$  - проницаемость среды,  $\lambda_v$ ,  $\lambda_p$  - времена релаксации скорости фильтрации и давления, соответственно,  $t$  - время,  $x$  - координата.

На основе (1) решался ряд задач. Дальнейшее развитие релаксационной теории фильтрации нашло свое отражение в [3]. С недавнего времени в релаксационной теории фильтрации стал использоваться аппарат дробного дифференцирования [4]. С учетом этого (1) записываем в обобщенном виде

$$v + \lambda_v D_t^\beta v = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \lambda_p D_t^\alpha p), \quad (2)$$

где  $D_t^\beta$ ,  $D_t^\alpha$  - операторы дробной производной порядка  $\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ) и  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) в смысле Капуто [5]. Следует отметить, что в (2) параметры  $\lambda_v$  и  $\lambda_p$  следует понимать как фрактальные времена релаксации с размерностью  $[\lambda_v] = \beta$  и  $[\lambda_p] = \alpha$ , соответственно.

Здесь на основе (2) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v D_t^{\beta+1} p = \chi \left(1 + \lambda_p D_t^\alpha\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где  $\chi$  - коэффициент пьезопроводности.

Для уравнения (3) рассмотрена задача фильтрации в конечном пласте  $[0, L]$  с условиями

$$p(0, x) = 0, \quad \frac{\partial p(0, x)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$p(t, 0) = p_0 = \text{const}, \quad p(t, L) = 0. \quad (5)$$

Задача (3)-(5) решена численно и анализировано влияние  $\lambda_p$ ,  $\lambda_v$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  на распределение давления и скорости фильтрации в пласте. Проведенный численный анализ показывает, что при уменьшении  $\alpha$  от 1 наблюдается более интенсивное распределение давления  $p$ . А также оценено влияние  $\lambda_v$  и  $\lambda_p$  на распределение давление и скорости фильтрации для различных значений  $\alpha$ . Приведены выводы о совместном влияние  $\alpha$ ,  $\lambda_v$  и  $\lambda_p$ .

#### Литература

1. Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изд. Вузов. Нефть и газ. 1975, № 6. С. 71-74.
2. Мирзаджанзаде А.Х, Хасанов М.М, Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. - Москва- Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2004. -368 с.
3. Болкович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. 136 с.
4. Булавацкий В.М. Математические модели и задачи дробно дифференциальной динамики некоторых релаксационных фильтрационных процессов // Кибернетика и системный анализ, 2018, том 54, № 5.С. 57-60.
5. Caputo M. Models of flux in porous media with memory // *Water Resources Research*, 2000, Vol. 36, №3. P. 693-705.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ ОРГАНИЗАЦИИ

**Корниенко Дмитрий Васильевич**

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

dmkornienko@mail.ru

**Аннотация:** В статье рассматривается механизм моделирования бизнес-процессов организаций. Описываются его преимущества при создании программных продуктов.

**Ключевые слова:** бизнес-процесс, маршрутизация, моделирование, 1С.

# MODELING OF BUSINESS PROCESSES OF AN ORGANIZATION

Kornienko Dmitriy Vasilevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Bunin Yelets State University

dmkornienko@mail.ru

**Abstract:** The article discusses the mechanism for modeling an organization's business processes. Its advantages when creating software products are described.

**Keywords:** business process, routing, modeling, 1C.

Бизнес-процесс – это совокупность взаимосвязанных мероприятий или работ, направленных на создание определенного продукта или услуги для потребителей. Сейчас бизнес-процессы являются важным элементом предприятий и организаций, управление ими является одной из ключевых организационных систем.

Существует три вида бизнес-процессов:

- управляющие (корпоративное управление, стратегический менеджмент);
- операционные – (снабжение, производство, маркетинг и т.д.);
- поддерживающие – обслуживающие организацию (бухгалтерский учет, подбор персонала, техническая поддержка).

Последний вид бизнес-процессов можно осуществлять с помощью автоматизированных программ, подразумевающих под собой определенный алгоритм последовательных действий, позволяющий сократить затраты временных и трудовых ресурсов на определенные операции. По сути бизнес-процесс - это определенная последовательность хозяйственных операций, направленная на достижение определенной цели. Для этого в 1С был разработан специальный механизм ведения бизнес-процессов.

Преимущества использования механизма регулирования бизнес-процессов в 1С:

- системный и формализованный подход к бизнес-процессам, осуществляющийся посредством заранее заданной структуры бизнес-процесса;
- малая вероятность возникновения ошибок;
- оперативный контроль осуществления и прохождения этапов бизнес-процесса;
- выявление неэффективных решений с последующей оптимизацией бизнес-процессов в 1С;
- моделирование всей структуры бизнес-процессов для общего понимания принятых управленческих решений на разных уровнях организации.

Самая очевидная польза от автоматизации бизнес-процессов состоит в том, что система помогает следить за регламентом выполнения работ, снимая нагрузку с сотрудников и высвобождая ресурсы для основной работы. Также эффективность взаимодействия повышается за счет продвижения бизнес-процесса по маршруту (по статистическим данным на передачу и поиск информации во время работы тратится от 20 до 40% рабочего времени).

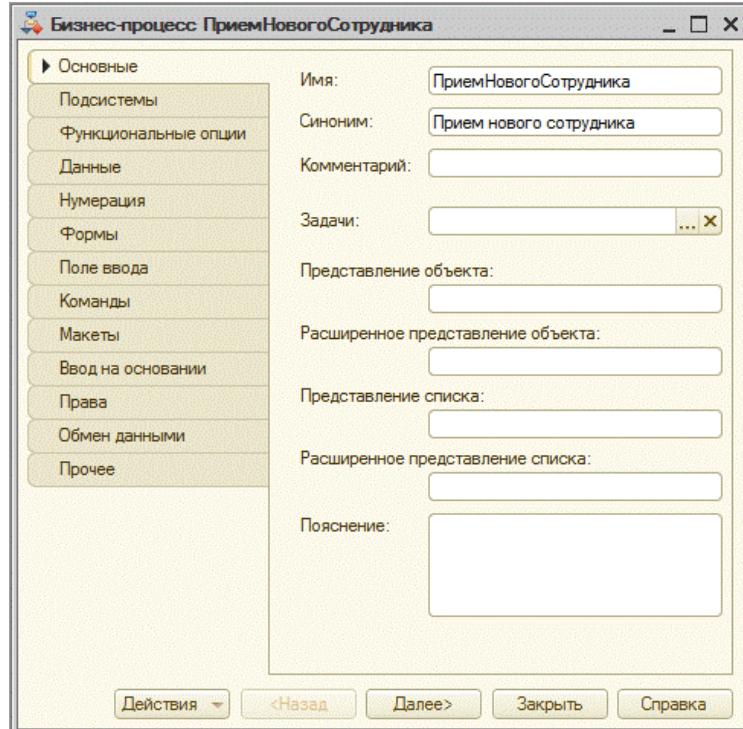


Рис.1. Создание бизнес-процесса

Весь цикл бизнес-процесса в 1С отображается в виде блок-схемы, которая именуется картой маршрута и дает наглядное представление последовательности действий и условий их выполнения. Карта маршрутов разделена на этапы. Этап в 1С отделен точкой маршрута, в которой необходимо выполнить определенную задачу.

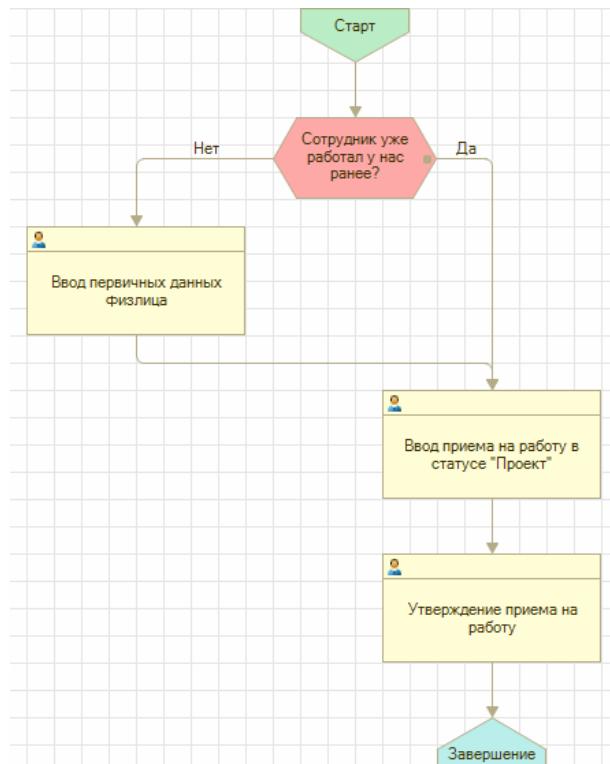


Рис.2. Блок-схема бизнес-процесса

Реализация бизнес-процесса осуществляется с помощью следующих видов маршрутизации задач:

- жесткая – бизнес-процесс выполняется строго по определенному маршруту;
- условная – реализация бизнес-процесса зависит от выполнения поставленных условий. Условий может быть несколько, подразумевающих от двух и более условий выбора. В зависимости от выбора строится маршрут.
- параллельная – бизнес-процесс 1С может разделиться и следовать по параллельным путям маршрута до конца маршрута, либо соединиться на каком-либо этапе.
- свободная – бизнес-процесс 1С не имеет маршрута, выполняется в зависимости от поставленных задач, автоматически или вручную пользователем.

Сам по себе механизм бизнес-процессов в 1С:Предприятие не имеет отраслевой специфики вследствие того, что бизнес-процессы специфичны как для разных отраслей, так и для разных предприятий. Поэтому бизнес-процессы разрабатываются под конкретного заказчика.

Нотация описания бизнес-процессов в 1С: Предприятие разрабатывалась с учетом ГОСТ 19.003-80 «Схемы алгоритмов и программ. Обозначения условные графические» и использует интуитивно понятные элементы и обозначения. Схемы читабельны и компактны.

Механизм бизнес-процессов в 1С обеспечивается сразу несколькими объектами конфигурирования: бизнес-процессы, задачи, регистр сведений и параметр сессии. Типы реквизитов задачи и измерений регистра сведений назначаются ссылками на соответствующие справочники, в связи с этим необходим еще один объект конфигурирования – справочники.

Основные объекты механизма бизнес-процессов – бизнес-процессы и задачи. Они используют друг друга и три вспомогательных объекта – параметр сеанса, регистр сведений и справочники. Вспомогательные объекты не нуждаются в использовании основных объектов и друг друга.

Задача необходима для учета заданий и описывает способ их распределения по исполнителям с учетом организационной структуры предприятия. Адресация заданий исполнителям определяется реквизитами, в которых можно предусмотреть многомерную ролевую маршрутизацию (по рабочим группам, по ролям, помещениям, подразделениям и т.д.). следует отметить, что задачи могут создаваться не только бизнес-процессами, но также и другими объектами информационной базы и непосредственно пользователями. В общем случае исполнителем задания помимо сотрудника может быть и любая внешняя система.

Понятие задачи фактически определяет лишь интерфейс взаимодействия бизнес-процесса с заданием, выполнение которого может быть не связано с выполнением операции в самой системе. То есть сотруднику поступает задача, которую он выполняет любыми другими способами: по электронной почте, телефону и т.д. По результатам выполнения в систему вносят сведения о получении нужного результата, тогда задача считается выполненной.

Операции, выполняемые в ходе бизнес-процесса, представлены на карте маршрута точками действий, которые содержат информацию о том, что необходимо сделать определенному исполнителю на данном этапе действий. При переходе бизнес-процесса на точку действия он автоматически формирует задачи, устанавливая в них предусмотренные реквизиты адресации. После того как задачу отметят выполненной, бизнес-процесс автоматически переходит к следующей точке маршрута в соответствии с картой.

Одним из важных пунктов построения бизнес-процесса является адресация, под которой подразумевают объект, которому необходимо выполнить конкретную задачу. Адресация бывает жесткой (объект адресации назначается при ее формировании) и произвольной (задаче назначается объект адресации, косвенно обозначающий круг объектов адресации, для которых формируется задача).

Для описания правил адресации используется регистр сведений. Система ориентируется на измерение регистра, ресурсы и реквизиты самой системой для адресации не используются, но могут присутствовать в регистре. Одним из измерений регистра должно быть измерение, хранящее конкретных исполнителей, дополнительные измерения используются для произвольной адресации. Регистр сведений, хранящий правила адресации, должен быть не периодическим.

Механизм бизнес-процессов — составная часть технологической платформы, а это означает, что его возможности могут стать доступными всем прикладным решениям, созданным на основе 1С:Предприятия 8. В целом Механизм бизнес-процесса нацелен на повышение эффективности разработки и сопровождения прикладных решений. Однако опыт его применения показывает, что наложение бизнес-процессов поверх готовых приложений вызывает определенные трудности: зачастую приходится по-новому смотреть на проектные решения и кое-что переделывать. Конечно же, в этом нет ничего удивительного - точно так же автоматизация предприятия, как правило, требует пересмотра общей схемы его функционирования. Для эффективного применения механизма бизнес-процессов, желательно, чтобы процессная модель управления была изначально заложена в прикладное решение.

Несмотря на кажущуюся простоту механизма бизнес-процессов в 1С:Предприятие 8, с его помощью можно автоматизировать и довольно сложную бизнес-логику, такую, как множественное ветвление бизнес-процедур, декомпозиция, многократное прохождение циклов, роботизированное выполнение задач, методика «согласен, если не отвечаю» и многое другое. Поскольку бизнес-процессы — это полноценная единица учета в 1С: Предприятие (так же, как справочники или документы), к ним можно применять все аналитические механизмы системы, строить разнообразные отчеты и графики.

Как показывает опыт, наибольший эффект дает автоматизация регулярных бизнес-процессов, которые происходят ежедневно и связаны с основной деятельностью организации. Важные условия для существования бизнес-процесса - наличие потока работ и регламента их выполнения; в их отсутствие бизнес-процесс выглядит неубедительным и со временем вырождается.

Бизнес-процессы в 1С:Предприятие 8 способны придать жесткость прикладному решению, конкретизировать его под нужды конкретной организации, нанизывая информационные потоки на цепочки операций. При этом бизнес-процессы не могут служить средством «наведения порядка», но позволяют автоматизировать сложившиеся потоки работ и повысить их эффективность, а также предоставляют новые возможности (например, процессного анализа деятельности предприятия), превращая любую организацию в хорошо отлаженный и четко работающий механизм.

### **Литература**

1. Ковалев С.М. Настольная книга аналитика. Практическое руководство по проектированию бизнес-процессов и организационной структуры / С.М. Ковалев, В.М. Ковалев. – Москва: 1С-Паблишинг, 2020. – 360 с.
2. Возможности платформы 1С по описанию бизнес-процессов. – URL: <https://grandproject.ru/blog/opisaniyu-biznes-protsessov-1s/> (дата обращения: 04.09.2023).
3. Механизм бизнес-процессов в программах 1С. – URL: <http://e-1c.ru/node/184> (дата обращения: 04.09.2023).

## **ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ МИКРОСЕРВИСНОЙ АРХИТЕКТУРЫ**

**Никулин Александр Валерьевич**

аспирант

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

**Аннотация:** В статье рассмотрен метод подготовки данных для построения формальной модели микросервисной архитектуры в целях дальнейшего расчета и мониторинга показателей связанности и сопряжения. Многие метрики связанности, которые были предложены для объектно-ориентированных или сервисно-ориентированных парадигм были адаптированы и теперь применяются для микросервисной архитектуры. Большинство этих показателей основаны на подсчете доказательств связи, таких как количество зависимостей между сервисами или количество программных элементов, участвующих в зависимостях. Таким образом, наиболее подходящей формальной моделью видится ориентированный граф.

**Ключевые слова:** микросервисная архитектура, ориентированный граф, связанность, сопряжение, декомпозиция.

## **BUILDING A MODEL OF MICROSERVICE ARCHITECTURE**

**Nikulin Aleksandr Valerevich**

graduate student

Bunin Yelets State University

**Abstract:** The article discusses a method for preparing data for constructing a formal model of microservice architecture for the purpose of further calculation and monitoring of connectivity and interface indicators. Many coupling metrics that have been proposed for object-oriented or service-oriented paradigms have been adapted and are now applied to microservice architectures. Most of these metrics are based on counting evidence of connectivity, such as the number of dependencies between services or the number of software elements involved in dependencies. Thus, a directed graph seems to be the most suitable formal model.

**Keywords:** microservice architecture, directed graph, connectivity, interface, decomposition.

С каждым днём увеличивается потребность общества к более быстрому и качественному получению информации и услуг средствами информационных технологий. В свою очередь поставщики таких услуг постоянно стремятся к расширению и улучшению функциональности и адаптации своих систем к быстрому внедрению изменений в целях привлечения к ним большего числа пользователей. Помимо этого, осуществляется колоссальная автоматизация процессов производств, управления, сбора, хранения, анализа информации во многих сферах деятельности общества. Автоматизированные системы становятся сложнее, приобретая все больше набор функций и объемы информации, которые необходимо обрабатывать. Во многих случаях сейчас даже самые простые системы помимо автоматизации задач предметной области дополнительно решают задачи безопасности, уведомлений, сбор статистики, анализа данных, ведения отчетности, журналирования, контроля и управления функционированием, поддержки пользовательских интерфейсов на различных типах устройств. Основным требованием в дополнении к сложности стало готовность к изменениям и внедрению этих изменений в эксплуатацию достаточно быстро.

Сложные задачи всегда решались методом декомпозиции. Не составляет для декомпозиции исключение и применение в проектировании и разработки автоматизированных систем. Декомпозиция - научный метод позволяющий заменить решение одной большой задачи решением подмножества меньших задач, связанных, но простых. Декомпозиция выполняется как правило по функциям или по данным системы или комбинацией того и другого. Применение декомпозиции со временем перешло от многомодульного программного обеспечения в рамках одной вычислительной машины к распределенным среди вычислительных машин системам, основанных на сервисах. Такой архитектурный подход получил своё название как сервисно-ориентированная архитектура. За последнее десятилетие наибольшую популярность приобрела микросервисная архитектура, которая является подмножеством сервисно-ориентированной архитектуры. Именно микросервисная архитектура позволяет на данный момент более эффективно создавать большие и сложные системы, распараллеливать процесс разработки и более быстро внедрять изменения без сильного влияния на множество компонентов

внутри системы. В микросервисной архитектуре применяется определенный набор шаблонов проектирования, разработки и эксплуатации системы, которые явно выделяют данную архитектуру от сервисно-ориентированной в целом. Среди таких шаблонов можно выделить как стремление к децентрализации и дубликации данных и применение предметно-ориентированного проектирования, что в конечном счете должно обеспечить хорошие показатели микросервисной архитектуры такие как слабая связанность, сильное сопряжение и автономность.

Связанность – мера взаимозависимости между программными компонентами. Сопряжение - мера взаимосвязанности элементов внутри программного компонента. На уровне микросервисов программным компонентом выступает сервис или группа сервисов, таким образом связанность определяется между сервисами или группой сервисов ограниченного контекста, а сопряжение внутри сервиса или группы сервисов ограниченного контекста. Слабая связанность и сильное сопряжение являются показателями хорошего качества спроектированной и реализованной архитектуры системы, и наоборот сильная связанность и слабое сопряжение рассматривается как серьёзный недостаток системы, поскольку затрудняет понимание реализации и логики, затрудняет ведение изменений, масштабирования, автономного тестирования и возможного переиспользования. Связанность и сопряжение представлены на рисунке 1.

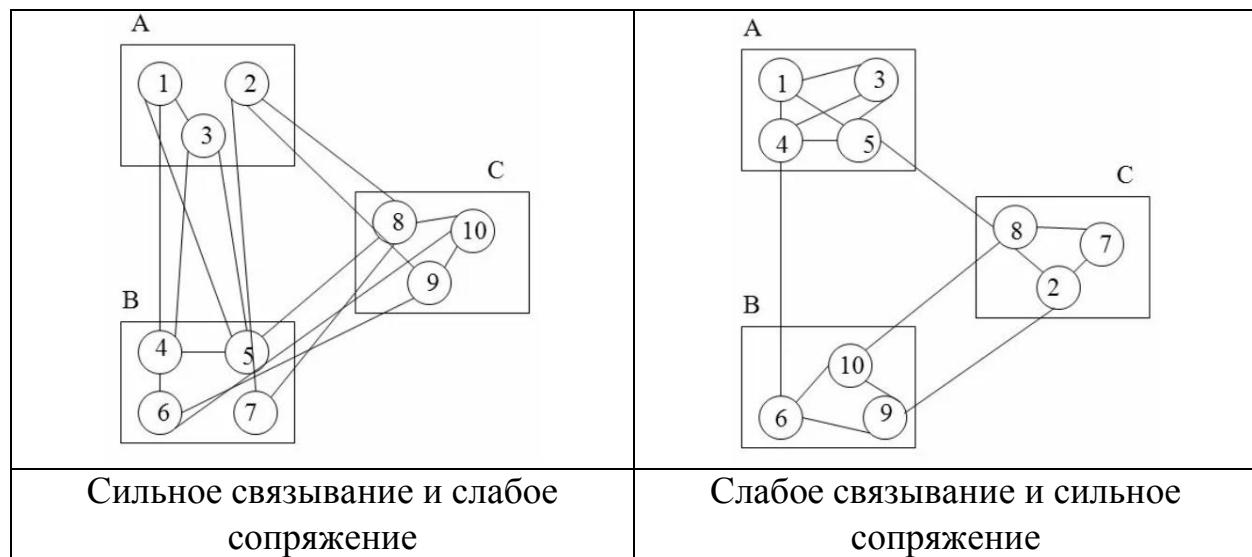


Рис. 1 - Связанность и сопряжение микросервисов

Сервис с низкой степенью связанности не зависит от большого количества других сервисов и имеет следующие свойства:

- малое количество зависимостей между сервисами;
- изменения одного сервиса не приводят к большим изменениям другого или не приводят вовсе;
- возможность повторного использования сервисов.

Имеются разные виды связанности программных компонентов, которые также можно применить и к связанности сервисов:

- Связанность содержимого (content coupling) - один сервис может изменять данные другого сервиса или полагается на внутренние особенности другого сервиса. Например, сервис напрямую подключается к базе данных другого сервиса и меняет или получает данные. Это самый наихудший вид связанности, который стоит избегать;
- Связанность через общее (common coupling) - более одного сервиса работают с общими данными. Например, имеется общая база данных или система кеширования из которых сервисы получают информацию из общей структуры данных. Наихудшим сценарием связанности через общее является еще и запись многих сервисов в общую структуру данных;
- Связанность через внешнее (external coupling) – более одного модуля используют навязанные извне формат данных, протокол связи, общие библиотеки или технологии. Например, частным случаем может быть проприетарная общая шина данных, служащая для обмена информации между сервисами. Необходимость смены шины приведет к изменениям во всех сервисах.
- Связанность по управлению (control coupling) – сервис передаёт другому сервису данные, которые влияют на поведение последнего. Например, передача управляющих команд, стратегий выборки, сортировки данных.
- Связанность по структуризованным данным (data-structured coupling, stamp coupling) – сервисы используют общую структуру данных (универсальные объектные структуры, массивы, коллекции, объединения разных объектов) для обмена информацией, при этом каждый сервис может использовать только её часть.
- Связанность через данных (data coupling) – сервисы взаимодействуют передачей данных. Например, через параметры вызовов сервисных методов и их результатов: идентификаторы объектов, фильтры, коллекции объектов. Данная связанность считается наилучшей среди других видов;
- Отсутствие связанности (no coupling) – сервисы никак не взаимодействуют.

На рисунке 2 представлены виды связанности в порядке от наилучшего к наихудшему использованию.

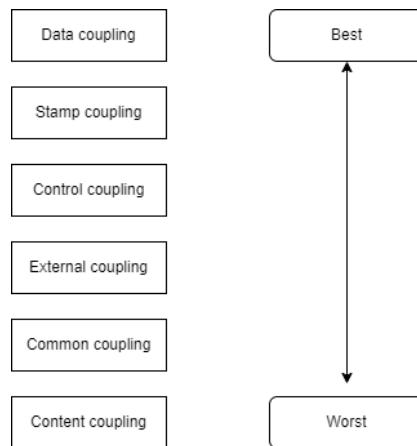


Рис. 2 Виды связанности в порядке от наилучшего к наихудшему использованию

Связанность и сопряжение меры взаимосвязаны. Чем больше связанность сервисов, тем меньше сопряжение внутри сервисов, т.е. меры обратно пропорциональны друг другу:

$$Coupling \sim \frac{1}{Cohesion} \quad (1)$$

Сервис обладает высоким сопряжением, если его обязанности хорошо согласованы между собой, и он не выполняет огромный набор работ. Сервис с низким сопряжением выполняет много разнородных функций или не связанных между собой задач. Имеются разные виды сопряжение программных компонентов, которые можно применить в микросервисной архитектуре:

- Случайное сопряжение (*coincidental cohesion*) – элементы сервиса сгруппированы случайным образом и не имеют никакой концептуальной связи, кроме местоположения в исходном коде. Это наихудший вид сопряжения;
- Логическое сопряжение (*logical cohesion*) – элементы сервиса делают похожие логически связанные функции, которые могут быть подфункциями задач разной предметной области. Например, общий сервис реализующий уровень хранения данных для всех других сервисов через общий интерфейс, или сервис, реализующий подготовку данных для отчетности разных не связанных бизнес-процессов;
- Сопряжение по времени (*Temporal Cohesion*) – элементы сервиса объединены вместе с целью выполнения функций в одном промежутке времени. Такая сопряженность может быть частью задач инициализации, к примеру сервис для версионной миграции баз данных других сервисов;
- Процедурное сопряжение (*Procedure Cohesion*) – элементы сервиса сгруппированы вместе потому, что они связаны порядком выполнения и выполняют одну конечную задачу. Например, обработка файла платежных операций, состоит из последовательных процедур чтения файла, парсинга файла, обработки записей, вычисления, формирования отчета и рассылки отчета;
- Коммуникационное сопряжение (*Communication Cohesion*) – элементы сервиса объединены потому, что выполняют функции над одним и тем же классом входных и выходных данных или над одной структурой данных. Например, структура данных, представляющая содержимое покупательской корзины, может использоваться множеством элементов в одном сервисе. Элементы могут рассчитывать скидки, стоимость доставки и налоги на основе одной и той же структуры данных;
- Последовательное сопряжение (*sequential cohesion*) – элементы сервиса выполняют последовательные действия над данными, где в последовательности выходные данные являются входными для последующих элементов. Например, сервис потоковой обработки данных и трансформации, вычисления и загрузки;
- Функциональное сопряжение (*functional cohesion*) – элементы сервиса соединены вместе для выполнения единой конечной бизнес-задачи. Например, сервис доставки, сервис регистрации пользователя, сервис инвентаризации, сервис поиска, сервис оплаты. Данное сопряжение считается наилучшим видом сопряжения.

На рисунке 3 представлены виды сопряжения в порядке от наилучшего к наихудшему использованию.

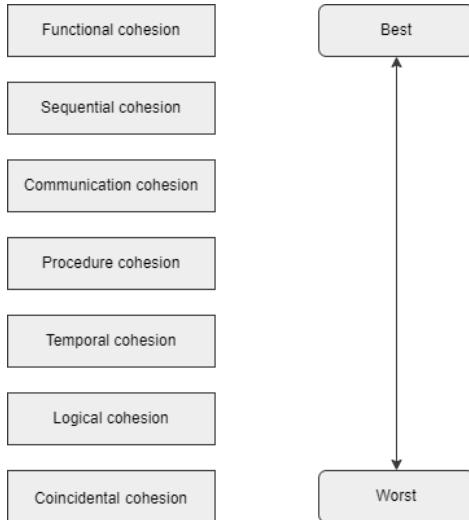


Рис. 3 Виды сопряжения в порядке от наилучшего к наихудшему использованию

Слабая связанность и сильное сопряжение являются важными показателями в микросервисной архитектуре. Именно благодаря поддержанию хороших показателей связанности и сопряжению система на микросервисах позволяет вести независимую разработку, быстрое внедрение изменений, хорошее масштабирование и отказоустойчивость. Необходимо контролировать эти показатели на протяжении всего жизненного цикла системы. Также необходимо определять виды связанности и сопряжение для установления лучших или худших применяемых практик в проектировании и разработке. Связанность и сопряжение можно определять по формальным моделям полученных на этапе проектирования или методом обратной инженерии из исходного кода. Метод обратной инженерии для получения формальной модели системы в целях определения показателей связанности и сопряжения можно выделить как подзадачу верификации программной архитектуры. Именно применения обратной инженерии будет являться наиболее достоверным методом для верификации, так как в большинстве случаях при работе в системах на микросервисной архитектуре, в которой часто применяется гибкая методология разработки реальные формальные модели описанные в документации системы в большинстве случаях отстают от действительности или слабо поддерживаются.

## Литература

1. Василенко С. В. Переход от монолитной архитектуры к микросервисной архитектуре веб-приложения / С. В. Василенко // Наука и инновации XXI века : Сборник статей по материалам IX Всероссийской конференции молодых ученых. В 4-х томах, Сургут, 02 ноября 2022 года. Том I. – Сургут: Сургутский государственный университет, 2023. – С. 205-209.
2. Врублевская, Е. А. Проектирование веб-приложения для мониторинга потребления с использованием микросервисной архитектуры / Е. А. Врублевская, Е. А. Левчук // Научные исследования XXI века. – 2023. – № 1(21). – С. 35-39.

3. Каражанова А. А. Анализ микросервисной архитектуры, монолитных приложений, архитектуры SOA / А. А. Каражанова // Синергия Наук. – 2020. – № 46. – С. 255-262.
4. Никитин, И. В. Сравнение подходов монолитной архитектуры и микросервисной архитектуры при реализации серверной части веб-приложения / И. В. Никитин, Т. Ю. Гриценко // Дневник науки. – 2020. – № 3(39). – С. 22.
5. Титов Д. А. Исследование принципов построения микросервисной архитектуры информационных систем и возможности её применения для метаконфигурирования программных сервисов / Д. А. Титов, А. Н. Алпатов // Передовые инновационные разработки. Перспективы и опыт использования, проблемы внедрения в производство : Сборник научных статей по итогам десятой международной научной конференции, Казань, 30 ноября 2019 года. Том Часть 2. – Казань: Общество с ограниченной ответственностью "КОНВЕРТ", 2019. – С. 136-137.
6. Шамышева Е. А. Применение микросервисной архитектуры в реализации мобильного банка / Е. А. Шамышева // Наукосфера. – 2023. – № 6-1. – С. 222-227.
7. Barabanov A. V. Method for collecting architecture security-specific information for microservice-based systems / A. V. Barabanov // Secure Information Technologies, 06–07 апреля 2021 года, 2021. – Р. 27-31.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА «ИНТЕРКАМПАНИ»**

**Попов Дмитрий Иванович**

аспирант

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

diman-pm@mail.ru

научный руководитель **Корниенко Дмитрий Васильевич**

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

dmkornienko@mail.ru

**Аннотация:** В данной статье приводится процесс моделирования и реализации механизма «Интеркампани». Для предприятий, представленных несколькими юридическими лицами, «Интеркампани» обеспечивает доступность для продажи товаров, принадлежащих другой организации. Механизм межфирменных продаж реализован в соответствии с новой методикой и позволяет осуществлять компаниям, состоящим из нескольких юридических лиц, передавать товары между организациями и оформлять по этим операциям регламентированные документы.

**Ключевые слова:** межфирменные продажи, Интеркампани, 1С:ERP, передача товаров.

**Popov Dmitriy Ivanovich**  
graduate student  
Bunin Yelets State University  
diman-pm@mail.ru

scientific adviser **Kornienko Dmitriy Vasilevich**  
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor  
Bunin Yelets State University  
dmkornienko@mail.ru

## MODELING OF THE INTERCAMPANY MECHANISM

**Abstract:** This article describes the process of modeling and implementing the Intercampaign mechanism. For enterprises represented by several legal entities, Intercompany ensures availability for sale of goods belonging to another organization. The intercompany sales mechanism is implemented in accordance with a new methodology and allows companies consisting of several legal entities to transfer goods between organizations and draw up regulated documents for these operations.

**Keywords:** intercompany sales, Intercampany, 1C:ERP, transfer of goods.

«1C:ERP Управление предприятием 2» - это инновационное и эффективное решение от компании «1С» для создания комплексной информационной системы управления любым предприятием [2]. Этот продукт позволяет автоматизировать основные бизнес-процессы, контролировать ключевые показатели деятельности предприятия, организовать взаимодействие служб и подразделений, координировать деятельность производственных подразделений, оценивать эффективность деятельности предприятия, отдельных подразделений и персонала.

«1C:ERP» был создан с учетом лучших мировых и отечественных практик автоматизации крупного и среднего бизнеса, а также при непосредственном участии представителей крупных промышленных предприятий [1]. Благодаря экспертному подходу к разработке и поэтапному тестированию «1C:ERP» получил именно те функциональные возможности, которые наиболее востребованы в крупных предприятиях с различными направлениями деятельности, в том числе в технически сложных многопередельных производствах.

Данное программное обеспечение крайне универсально и может быть использовано в любой сфере деятельности предприятия. Сегодня невозможно себе представить работу различных отделов организации без программы 1С. Ее участие в бизнес-процессах настолько велико, что эта программа становится одним из важнейших инструментов эффективного управления предприятием и принятия решений для руководителей разного уровня.

Одним из интересных механизмов, реализованном в данном прикладном решении является механизм межфирменных продаж «Интеркампани» [3].

Для предприятий, представленных несколькими юридическими лицами, «Интеркампани» обеспечивает доступность для продажи товаров, принадлежащих другой организации [4].

Вот один из возможных примеров такой схемы продажи:

- закупкой товаров на склады предприятия занимается одна фирма (организация) холдинга;
- продажи товаров могут выполняться той фирмой (организацией) холдинга, которой разрешено продавать товары фирмы-закупщика;
- в момент продажи конечному покупателю контролируется возможность продажи товаров другой организации в соответствии с настроенной схемой продаж между организациями;
- документы продажи между фирмой-закупщиком и фирмой-продавцом оформляются по результатам продаж товаров конечному пользователю.

Использование механизма межфирменных продаж определяется функциональной опцией НСИ и администрирование – Настройка НСИ и разделов – Финансовый результат и контроллинг – Учет товаров – Передача товаров между организациями.

В рамках механизма межфирменных продаж обеспечиваются:

- реализация товаров других организаций;
- межфирменная передача товаров, в т. ч. по результатам продаж;
- выбор вариантов и правил межфирменной передачи для случаев продажи и передачи на комиссию;
- межфирменный возврат, в т. ч. по данным возвратов от клиентов;
- контроль остатков товаров организаций с учетом правил межфирменных операций;
- автоматическое заполнение документов межфирменных операций по данным продаж и возвратов;
- оформление межфирменных продаж в рамках договоров между организациями;
- выбор способа зачета оплаты (как на стороне комитента, так и на стороне комиссионера);
- оформление межфирменных операций через посредника (непрямые расчеты).
- Правила оформления межфирменных операций определяют вариант передачи товаров (продажа или комиссия) и возможность использования межфирменных возвратов. Они регистрируются в рабочем месте Финансовый результат и контроллинг – См. также – Настройка передачи товаров между организациями.
- При настройке передач товаров между организациями можно указать договор между организациями и вид цены (поля Договор и Вид цены). Данные настройки по умолчанию будут использоваться при оформлении документов внутрифирменных продаж в рамках рабочих мест Оформление передач и возвратов и Оформление отчетов по комиссии.

- Рекомендуется установить функциональную опцию НСИ и администрирование – Настройка НСИ и разделов – Финансовый результат и контроллинг – Учет товаров – Контролировать остатки товаров организаций. При оформлении продажи будут проверяться остатки не только организации-продавца, но и других организаций с возможностью межфирменных продаж. В случае, когда остаток есть только по организации с установленным для нее вариантом передачи товаров Не передается (межфирменные продажи товаров запрещены), проведение документа будет заблокировано. В остальных случаях реализация пройдет успешно, и позднее согласно выбранному варианту можно будет оформить документы Передача товаров между организациями.

В списке CRM и маркетинг – Настройки и справочники – Цены и скидки – Виды цен для любого элемента можно установить признак использования При передаче между организациями. Этот вид цены будет доступен для выбора при оформлении документов межфирменных операций как цена передачи. Если признак установлен только для одного вида цен, он будет подставляться автоматически.

Внутрифирменные продажи можно оформлять в рамках договоров между организациями.

Договоры между организациями регистрируются в списке Финансовый результат и контроллинг – Товародвижение между организациями – Договоры между организациями.

Использование договоров между организациями определяется функциональной опцией НСИ и администрирование – Настройка НСИ и разделов – Финансовый результат и контроллинг – Финансовый результат – Договоры между организациями.

Договоры между организациями могут быть двух типов (поле Тип):

- Договор купли-продажи – в рамках такого договора можно отражать операцию продажи товаров в другую организацию. Договор заключается между организацией-поставщиком и организацией-покупателем.
- Договор комиссии – в рамках такого договора можно отражать операцию передачи товаров на комиссию в другую организацию. Договор заключается между организацией-комитентом и организацией-комиссионером.

Договоры между организациями можно использовать при оформлении следующих документов продажи между организациями (поле Договор):

- Передача товаров;
- Отчет по комиссии между организациями о продажах;
- Отчет по комиссии между организациями о списании;
- Возврат между организациями.

Для расчетов между организациями договоры между организациями можно использовать в качестве объектов расчетов в платежных документах при оформлении следующих операций:

- Оплата другой организации (документы Заявка на расходование ДС/Списание безналичных ДС, Расходный кассовый ордер).

- Поступление от другой организации (документ Поступление безналичных ДС, Приходный кассовый ордер).
- Погашение дебиторской и кредиторской задолженности (документ Взаимозачет задолженности).
- Списание дебиторской и кредиторской задолженностей, возникших при оформлении хозяйственных операций между организациями предприятия (документ Списание задолженности).

Оформление продажи товаров от имени другой организации не отличается от реализации собственных товаров. Если у организации-продавца нет необходимого количества, система автоматически списует недостающие товары с организации, для которой в настройках передачи разрешены межфирменные операции.

Для оформления документов между организациями предусмотрено рабочее место Финансовый результат и контроллинг – Товародвижение между организациями – Документы между организациями (все). В рамках рабочего места можно оформлять документы с соответствующими типами хозяйственных операций:

- документ Передача товаров между организациями (Реализация товаров в другую организацию, Передача на комиссию в другую организацию);
- документ Отчет по комиссии между организациями (Отчет по комиссии между организациями);
- документ Отчет по комиссии между организациями о списании (Отчет по комиссии между организациями о списании);
- документ Возврат товаров между организациями (Возврат товаров между организациями, Возврат товаров по комиссии между организациями).

В рамках рабочего места хранятся все оформленные документы (передачи товаров между организациями, отчеты по комиссии между организациями, возвраты товаров между организациями) и соответствующие им хозяйственные операции, отраженные этими документами.

Новые документы между организациями создаются в общем журнале документов. Если в списке присутствует много видов документов, то они показываются в виде раскрывающегося меню: сначала вид документа, а затем хозяйственная операция. При создании нового документа в нем автоматически устанавливаются выбранный вид документа и выбранная хозяйственная операция.

В журнале документов можно настроить список используемых документов (гиперссылка Настроить). Отобрать список используемых документов можно как по хозяйственным операциям (режим По хоз. операциям), так и по видам документов, которыми оформляются хозяйственные операции (режим По видам документов) – форма Выбор хозяйственных операций и документов.

В шапке рабочего места по результатам отбора используемых документов будет показываться надпись о количестве выбранных документов и хозяйственных операций (например, «Показаны 2 хоз. операции по 2 документам»). Если выбран только один вид документа, то при создании нового документа будет отображаться только список возможных хозяйственных операций этого документа.

Из общего списка документов между организациями можно перейти к рабочим местам по оформлению документов между организациями на основании ранее выписанных распоряжений. Переход к рабочим местам выполняется по соответствующим гиперссылкам:

- Передачи – обеспечивается переход к рабочему месту по оформлению документов Передача товаров между организациями;
- Отчеты по комиссии – обеспечивается переход к рабочему месту по оформлению документов Отчеты по комиссии между организациями о продажах, Отчет по комиссии между организациями о списании.

Возврат в общий журнал документов между организациями выполняется по гиперссылкам Документы между организациями (оформленные отчеты по комиссии) и Документы между организациями (оформленные передачи товаров).

При создании документа Передача товаров между организациями необходимо выбрать одну из хозяйственных операций: Реализация товаров в другую организацию или Передача на комиссию в другую организацию. Это зависит от того, какой способ передачи нужно использовать при передаче товаров между организациями: продажу или передачу на комиссию. Будет создан новый документ Передача товаров между организациями (рис. 1), в котором будет установлен соответствующий вид операции в зависимости от выбранного вида создаваемого документа.

The screenshot shows the 'Передача товаров между организациями (создание)' (Delivery between organizations (creation)) window. At the top, there are standard window controls (Home, Back, Forward, Close) and a title bar. Below the title bar is a toolbar with buttons for 'Провести и закрыть' (Post and close), document navigation, and printing. The main area has tabs: 'Основное' (Main), 'Товары (3)' (Goods (3)), and 'Дополнительно' (Additional). A 'Добавить' (Add) button is available. A dropdown menu labeled 'Заполнить' (Fill) is open, showing four options: 'Подобрать по остаткам товаров у отправителя' (Match by remaining goods at the sender), 'Подобрать по отрицательным остаткам у получателя' (Match by negative remaining goods at the receiver), 'Заполнить цены по виду цен' (Fill prices by price type), and 'Заполнить цены выделенных строк по виду цен' (Fill selected rows by price type). The bottom of the window displays tax information: НДС: 3 294,91, Всего с НДС: 21 600,00 RUB.

Рис. 1. Передача товаров между организациями

В новом документе необходимо заполнить список товаров, которые нужно передать в другую организацию, и цены, по которым товар передается.

При заполнении списка товаров можно подобрать те товары, которые имеются в остатках организации-отправителя, и передать их в другую организацию.

Предусмотрена также возможность заполнить список товаров отрицательными остатками, которые имеются у организации-получателя. Следует отметить, что отрицательные остатки у организации-получателя могут возникнуть только в том случае, если в торговом предприятии не используется схема

«Интеркампани» и организациям позволено отгружать товар «в минус» (флажок Контролировать остатки организаций не установлен).

При передаче товаров между организациями предусмотрена возможность сохранения информации о назначении товара.

#### Пример

Клиент заказывает товар у одной организации, этот товар заказывается у поставщика под конкретный заказ клиента. При передаче товаров в другую организацию информацию о заказе клиента можно сохранить, указав ее в поле Назначение.

При выборе назначения открывается форма, в которой можно выбрать обособленный товар, зарезервированный под конкретное назначение.

Выбор назначения производится вручную из списка Все обособленные заказы. Выбор назначения возможен только при включенной функциональной опции НСИ и администрирование – Настройка НСИ и разделов – Закупки – Обеспечение потребностей – Не контролировать превышение обособленного обеспечения.

Контроль указанного в документе назначения производится в момент проведения документа.

На закладке Дополнительно можно заполнить всю необходимую информацию по доставке товаров в другую организацию (адрес доставки, доверенность) и указать информацию о дате платежа и виде оплаты.

Оформленные документы передачи товаров можно распечатать для организации-продавца (форма ТОРГ-12) и для организации-получателя (форма М-15). Также по документу передачи можно зарегистрировать счет-фактуру.

#### Список литературы.

1. Асатрян А. Методическое пособие по эксплуатации крупных информационных систем на платформе 1С: Предприятие 8 / А. Асатрян, А. Голиков, А. Морозов. М.: *ООО «1С-Паблишинг»; СПб.: Питер, 2017.* – 220 с.
2. Корниенко Д.В. Автоматизация бизнес-процессов в 1С:ERP Управление предприятием 2 / Д.В. Корниенко – ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина», 2019 – 85 с - Учебно-методическое пособие.
3. Печерских В. Внедрение ERP-решений на платформе 1С:Предприятие 8 / В. Печерских, Г. Бельцев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2015. – 146 с.
4. Информационно-технологическое сопровождение пользователей 1С [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://its.1c.ru/> (05.09.2023)

**Численное решение задачи Коши для уравнения Гельмгольца  
Эрмаматова З.Э.**

**Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического  
университета, ул. Профессоров 51, г. Самарканд, Узбекистан**

Хорошо известно, уравнения Гельмгольца является важным объектом для рассматривание многих практических задач и проводится исследование. В данной работе рассматривается задача продолжения решения уравнения Гельмгольца в прямоугольной области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши. Задача численно решена с использованием метода конечных разностей. При решение задачи Коши в последнее время были предложены разные методы. По вычислительным аспектам можно отметить некоторые работы [1]–[5].

**Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение Гельмгольца в прямоугольнике  $\bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

с условиями

$$u(0, y) = f_0(y), \quad u(1, y) = f_1(y), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = g_0(x), \quad u(x, 1) = g_1(x), \quad (3)$$

где  $f_0(y), f_1(y), g_0(x), g_1(x)$  – заданные функции,  $k^2$  – волновое число.

Задача (1)-(3) является корректно поставленной и имеет единственное решение.

Будем рассматривать обратную задачу по определению одной из граничных функций, например  $g_1(x)$ . Для этого в качестве дополнительной информации используем решение прямой задачи (1) – (3) в определенной части области.

Пусть известны

$$u(x, y_*) = v_0(x), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_*) = v_1(x), \quad 0 < y_* < 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где функции  $v_0(x), v_1(x)$  считаются заданными. Они определяются из решения прямой задачи (1)–(3).

Уравнение (1) рассматриваем с условиями (2), (4), (5), что является задачей Коши. Необходимо определить решение в области  $\bar{\Omega}_* = [0,1] \times [y_*, 1]$ , включая граничную функцию  $g_1(x)$ .

Сначала рассматриваем исходную прямую задачу в дискретной постановке. Проводим численное исследование устойчивости задачи в дискретной постановке.

В заключение можно сказать, что продолжение решения даёт удовлетворительные результаты в случае, когда начальные данные взяты недалеко от неизвестной границы. Ситуация ухудшается с уменьшением значения  $y_*$ .

## Литература

1. Hào D.N., Lesnic D., The Cauchy problem for Laplace's equation using the conjugate gradient method, IMA J. Appl. Math. 65 (2000) 199–217.
2. Reinhardt H.J., Han H., Hào D.N., Stability and regularization of a discrete approximation to the Cauchy problem of Laplace's equation, SIAM J. Numer. Anal. 36 (1999) 890–905.
3. Cheng J., Yamamoto M., Unique continuation on a line for harmonic functions, Inverse Probl. 14 (1998) 869–882.
4. Hon Y.C., Wei T.O, Backus–Gilbert algorithm for the Cauchy problem of Laplace equation, Inverse Probl. 17 (2001) 261–271.
5. Демидова А.Н., Жилейкин Я.М. Об устойчивости задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном цилиндре // Вычислительные методы и программирования. 2018, Т.9. С.163-169.

### Ishlab chiqarish funksiyasi uchun deterministik model orqali samadorlik baholash Bakoev M.T., Sharipova M.O.

Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti

Sharof rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti

Qaror samadorligini baholashning ikki turi mavjud. Birinchisi nazariy samaradorlik bo'lib, unga ko'ra yaxshi variant asoslanadi va tatbiq etishga tavsiya beriladi. Ikkinchisi esa, haqiqiy samaradorlik bo'lib, qaror ijrosidan keyin baholanadi. Qaror samaradorligini baholashda deterministik modelni ko'rib chiqamiz. Buning uchun Cobb-Duglas funksiyasidan foydalanamiz. Cobb-Duglas ishlab-chiqarish funksiyasining ko'rinishi quyidagicha

$$Y_i = AX_{1i}^{\beta_1} X_{2i}^{\beta_2} u_i \quad (1)$$

bu yerda  $Y_i$  – ishlab chiqarish xajmi,  $X_{1i}$  – kapital sarflari,  $X_{2i}$  – ishchi kuchi sarfi,  $u_i$  texnologik yoki texnik samaradorlik(uni ko'pincha  $TE_i$  deb ham belgilashadi)  $0 < u_i \leq 1$  va  $A, \beta_1, \beta_2$  – ishlab chiqarish funksiyasining koeffitsientlari (1) ni logorifmlab quydag'i umumiy (1) da  $k = 2$ , munosabatni olamiz

$$\ln Y_i = \alpha + \sum_{k=1}^k \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i = \alpha + \sum_{k=1}^k \beta_k X_{ki} - u_i$$

bu yerda quyidagi belgilashlar kiritiladi.  $\alpha = \ln A$ ,  $X_{ki} = \ln X_{ki}$  va  $\varepsilon_i = \ln u_i$ .

Bu modeldag'i  $u_i = -\ln u_i$  nomani fiy sonlar boy berilgan imkoniyatlarni bildiradi. Parametrlarni ikkita usul orqali baholash mumkin. Birinchi usulda chiziqli dasturlash orqali quyidagi optimizatsion masala yechiladi

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \text{ chegaraviy shart: } \ln Y_i - \alpha - \beta^T X_i \leq 0 \quad \forall i$$

va ikkinchi usul kvadratik dasturlash

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \text{ chegaraviy shart: } \ln Y_i - \alpha - \beta^T X_i \leq 0 \quad \forall i$$

ikkala holda ham  $u_i$  larni baholashga imkon beradi. Bular yordamida texnik samaradorlik baholanadi

$$\hat{u}_i = \hat{T} E_i = e^{-\hat{i}_i}.$$

Texnik samaradorligi kattaroq bo'lgan karxona yaxshiroq faoliyat olib borgan bo'ladi. Bizning maqsadimiz  $R$  paketida texnologik samaradorlikni baholash.

#### Adabiyotlar

1. Bakoev M.T. Boshqaruv qarorlari samaradorli va uni baholash usullari, Jamiyat va boshqaruv, 2015, T.2, 2-24 bet.
2. Aigner, D., K. Lovell, and P. Schmidt "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models," Journal of Econometrics, 6, 1977, 21-37.
3. Jondrow, J., K. Lovell, I. Materov and P. Schmidt "On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model," Journal of Econometrics, 19, 1982, pp. 233-238.
4. William H, Greene Efficiency of Public Spending in Developing Countries, A Stochastic Frontier Approach" Stern School of Business, New York University, 2007, 2, pp. 107-117.

### **G'ovak muhitda modda ko'chishi gibrild modelini sonli tadqiq etish**

***Bekzodjon Fayziev***

Samarqand davlat universiteti

fayzievbm@mail.ru

**Annotatsiya.** Ushbu ishda g'ovak muhitlarda modda ko'chishining gibrild modeli tuzilgan. Bunda keyk qatlam hosil qilib suspenziya suzulishi (cake filtration) matematik modeli muhitning ichki qismida cho'kma hosil bo'lib birjinslimas suyuqliklar sizishi (deep bed filtration) modellari bilan "tikilgan". Natijada cake filtration va deep bed filtration ni bir vaqtning o'zida hisobga oluvchi yangi "gibrild" model tuzilgan. Bunday gibrild model asosida tuzilgan masalalarni yechish uchun samarali sonli algoritmlar yaratilgan. G'ovak muhitlarda modda ko'chishining yaratilgan yangi va takomillashtirilgan modellari asosida masalalar yechilgan.

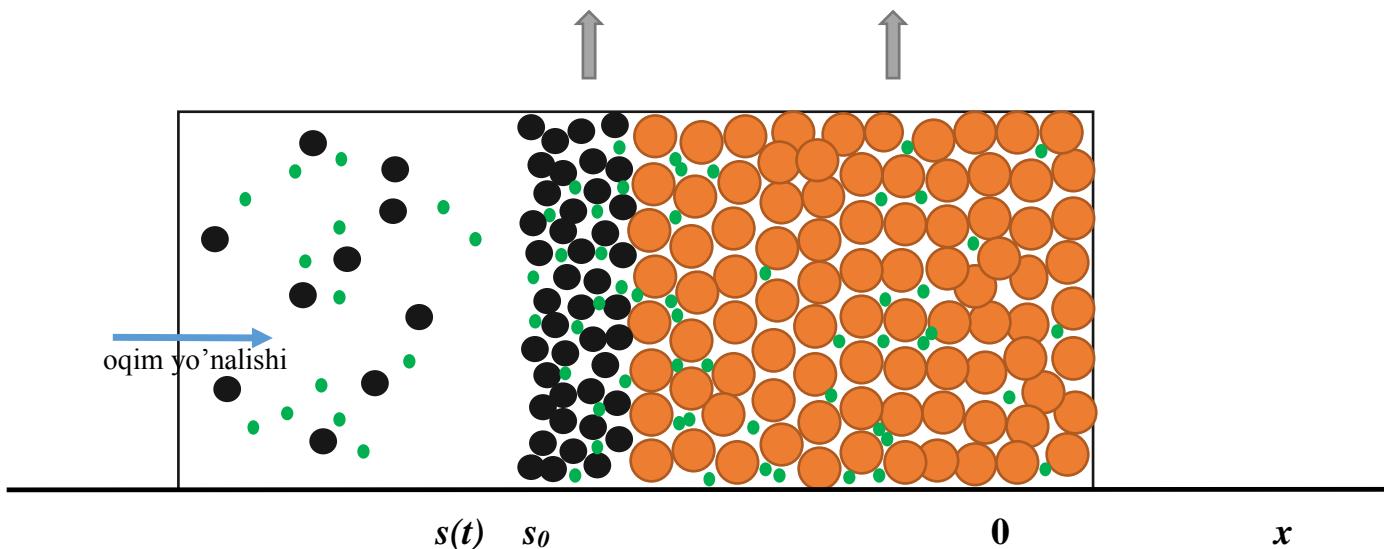
## KIRISH

Tarkibida muallaq zarrachalar bo`lgan suspenziyalarning g`ovak muhitlarda sizishi va modda ko'chishi masalalari turli sohalarda muhim rol o'ynaydi. Atrof-muhit himoyasi va ekologiya sohasida suspenziyalar tarkibidagi qattiq zarrachalarning tashilishi yer osti suvlari resurslarining yomonlashishiga to'g'ridan-to'g'ri ta'sir qilishi mumkin, chunki ba'zi zarralar ichki ifloslantiruvchi moddalardir yoki bilvosita ularning yuzasiga o'tirib qolgan ifloslantiruvchi moddalarni, masalan, bakteriyalar va viruslar, pestitsidlar, metallar, radioaktiv elementlar va boshqalarni tashish orqali ular ifloslanishga xizmat qilishi mumkin [1-4]. Suspenziya tarkibidagi muallaq zarrachalarning to'yingan g`ovak muhitda tashish, o'tirib qolishi va qayta suyuqlik oqimiga qo'shilish mexanizmlari murakkab va ko'plab omillarga bog'liq, jumladan, fizik-kimyoviy sharoitlar, muallaq zarrachalar hajmi, kontsentratsiyasi, g`ovak muhit o'lchamlari va g`ovak muhitni devorlarining yuzasi silliqqlik darajasi va hokazo [5-9].

Tabiiy g`ovak muhitlar juda xilma-xil va murakkab. Sohada qilingan sa'y-harakatlarga qaramay, suspenziyadagi zarrachalarning ko'chishi bilan bog'liq turli mexanizmlar va jarayonlar hali ham to'liq tushunilmagan, shuning uchun eksperimental va nazariy tadqiqotlar hali ham zarur. Bu borada ayniqsa g`ovak muhitlarda keyk qatlam hosil bo'luvchi sizish va chuqur qatlamli sizish jarayonlarining birgalikda modellashtirish masalasi yetarlicha o'r ganilgan emas [10-13].

### G`ovak muhitda modda ko'chishi gibrid matematik modeli

*Keyk qatlam G`ovak muhit*



1.-rasm. "Gibrid" model uchun masalaning sxematik qo'yilishi

Vaqtning dastlabki qiymatida g`ovakligi  $m_2$  bo`lgan va birjinsli suyuqlik (ya`ni, tarkibida muallaq zarrachalar bo`lmagan suyuqlik) bilan  $s_0$  uzunlikdagi chekli qatlamni qaraymiz.  $x=0$  nuqtada,  $t > 0$  dan boshlab qatlamga tarkibida  $c_0$  ( $c_0 = c_{10} + c_{20}$ )

konsentratsiyali ikki xil qattiq zarrachalar bo`lgan birjinlimas suyuqlik  $v(t) = v = \text{const}$  tezlik bilan kira boshlaydi. Bunda suspenziya tarkibidagi katta zarachalar g'ovak muhit yuzasida o'tirib qoladi va keyk qatlam hosil qiladi, kichik zarrachalar esa g'ovak muhit ichkarisiga kiradi va chuqur qatlami filtratsiya jarayonida ishitrok etadi. Shuningdek keyk qatlamda ham kichik o'lchamli zarrachalarning o'tirib qolishi kuzatiladi.

G'ovak muhit ( $x \in [0, s_0]$ ) uchun chuqur qatlamlari filtlash tenglamalari

$$m_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} + v \frac{\partial c_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \quad x \in [0, s_0], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \begin{cases} k_{2r} v \sigma_2, & 0 < \sigma_2 \leq \sigma_{2r}, \\ k_{2a} v c_2 - k_{2d} \sigma_2, & \sigma_{2r} < \sigma_2 < \sigma_{20}, \quad x \in [0, s_0], \\ 0, & \sigma_2 = \sigma_{20}, \end{cases} \quad (2)$$

bu yerda  $c_2$  – suspenziya tarkibidagi kichkina zarachalar konsentratsiya,  $v$  – sizish tezligi,  $m_2$  – g'ovak muhitning g'ovaklik koeffitsienti,  $\sigma_2$  – g'ovak muhitda hosil bo`lgan cho'kma kontsentratsiyasi,  $D_2$  – g'ovak muhitdagi diffuziya koeffitsienti, bu yerda  $\sigma_{20}$  – filtrning umumiy sig'imi,  $\sigma_{2r}$  –  $\sigma_2$  ning yuklanish chegarasi xarakterlovchi parametr,  $k_{2r}$  – g'ovak muhitda “yuklanish” ta'siri bilan bog'liq kinetik koeffitsient,  $k_{2a}$  – g'ovak muhitda qattiq zarrachalarning o'tirib qolishini harakterlovchi koeffitsient,  $k_{2d}$  – g'ovak muhitda qattiq zarrachalarning qayta oqimga qo'shilishni harakterlovchi koeffitsient.

Keyk qatlam o'sishini xarakterlovchi tenglama

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c_1 v}{(1 - m_1)}, \quad x = s(t), \quad (3)$$

bu yerda  $c_1$  – suspenziya tarkibidagi katta zarachalar konsentratsiya,  $s(t)$  – keyk qatlam qalinligi,  $m_1$  – keyk qatlam g'ovaklik koeffitsienti.

Keyk qatlamda ( $x \in [0, s_0]$ ) uchun chuqur qatlamlari filtlash tenglamalari

$$m_1 \frac{\partial c_2}{\partial t} + v \frac{\partial c_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \quad x \in [s_0, s(t)], \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \begin{cases} k_{1r} v \sigma_1, & 0 < \sigma_1 \leq \sigma_{1r}, \\ k_{1a} v c_2 - k_{1d} \sigma_1, & \sigma_{1r} < \sigma_1 < \sigma_{10}, \quad x \in [s_0, s(t)], \\ 0, & \sigma_1 = \sigma_{10}, \end{cases} \quad (5)$$

bu yerda  $\sigma_1$  – keyk qatlamda hosil bo’lgan cho’kma kontsentratsiyasi,  $D_1$  –keyk qatlamdagi diffuziya koeffitsienti, bu yerda  $\sigma_{10}$  – keyk qatlamda hosil bo’lishi mumkin bo’lgan cho’kmaning maksimal qiymati,  $\sigma_{1r}$  –  $\sigma_1$  ning yuklanish chegarasi xarakterlovchi parametr,  $k_{1r}$  – keyk qatlamdada “yuklanish” ta’siri bilan bog’liq kinetik koeffitsient,  $k_{1a}$  – keyk qatlamdada qattiq zarrachalarning o’tirib qolishini harakterlovchi koeffitsient,  $k_{1d}$  – keyk qatlamdada qattiq zarrachalarning qayta oqimga qo’shilishni harakterlovchi koeffitsient.

Boshlang’ich va chegaraviy shartlar

$$s(t) = s_0, \quad t = 0, \quad (6)$$

$$c_2(x, 0) = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_2(x, 0) = 0 \quad (8)$$

$$c_1(x, 0) = 0 \quad (9)$$

$$\sigma_1(x, 0) = 0 \quad (10)$$

$$c_1(0, t) = c_{10}, \quad t = 0 \quad (11)$$

$$c_1(s(t), t) = c_{10}, \quad t > 0 \quad (11)$$

$$c_2(0, t) = c_{20}, \quad t = 0 \quad (12)$$

$$c_2(s(t), t) = c_{20}, \quad t > 0 \quad (13)$$

$$c_2|_{x=+0} = c_2|_{x=-0} \quad (14)$$

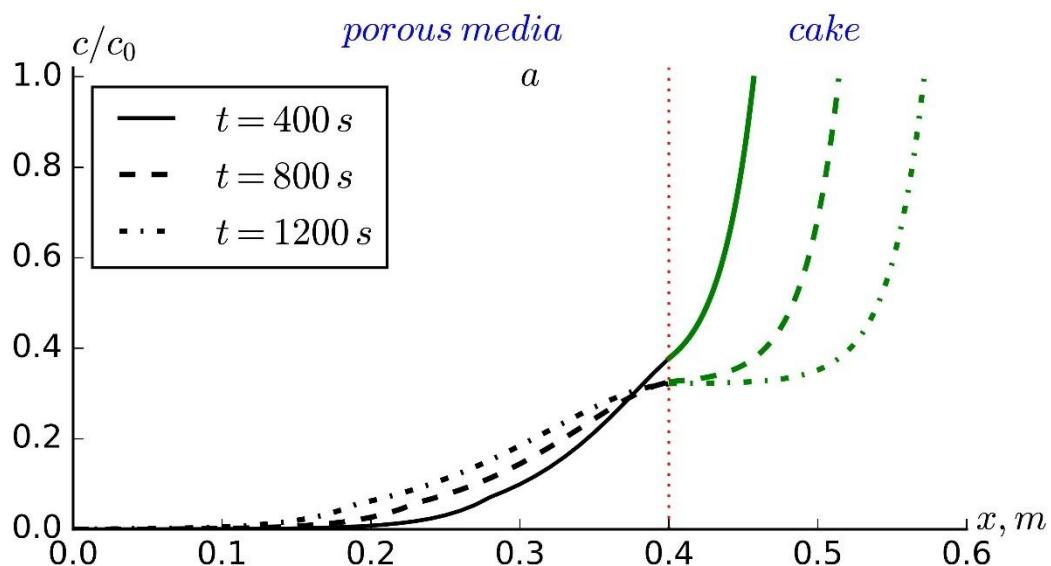
$$\left. \left( v c_2 + D_1 \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) \right|_{x=+0} = \left. \left( v c_2 + D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) \right|_{x=-0} \quad (15)$$

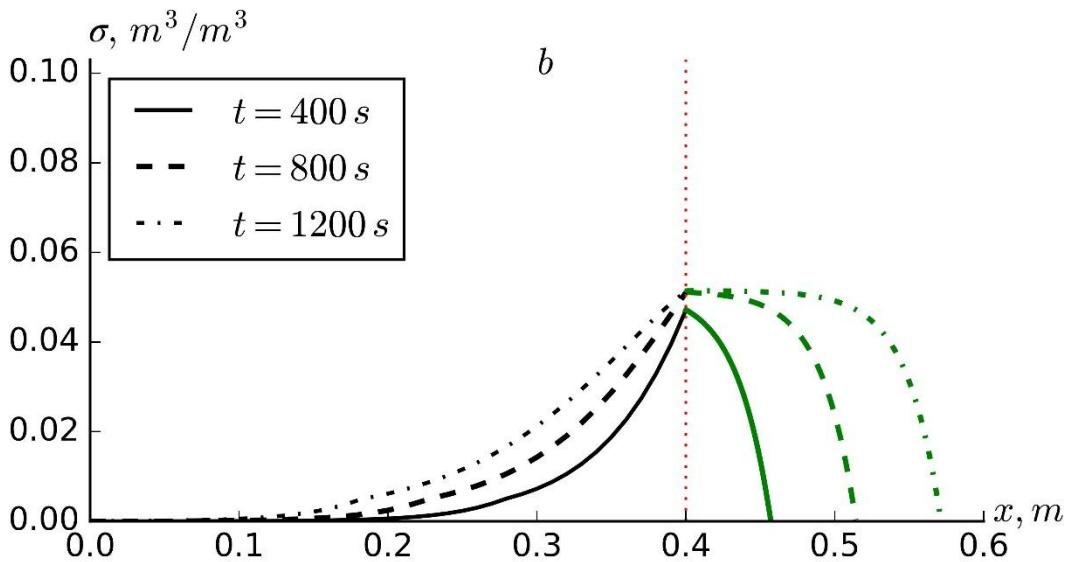
$$\frac{\partial c_2}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad (18)$$

## G'ovak muhitda modda ko'chishi gibrild matematik modeli asosida olingan natijalar tahlili

Qo'yilgan masala chekli ayirmalar usuli bilan sonli yechildi. 2-5-rasmlarda g'ovak muhitda modda ko'chishi gibrild matematik modelini sonli yechish asosida olingan natijalar keltirilgan. Grafiklarda keyk qatlam va g'ovak muhitda muallaq zarrachalar konsentratsiyasi hamda cho'kma konsentatsiya aks ettirilgan bo'lib, g'ovak muhitdagi konsentratsiyalar qora rangda, keyk qatlamdagilari esa yashil rangda chizilgan.

Natijalar tahlili shuni ko'rsatadi, vaqt o'tishi bilan keyk qatlam o'sib boradi, unga mutanosib ravishda ham keyk qatlamda, ham g'ovak muhitda muallaq zarrachalar konsentratsiyasi va cho'kma konsentatsiya ortib boradi.

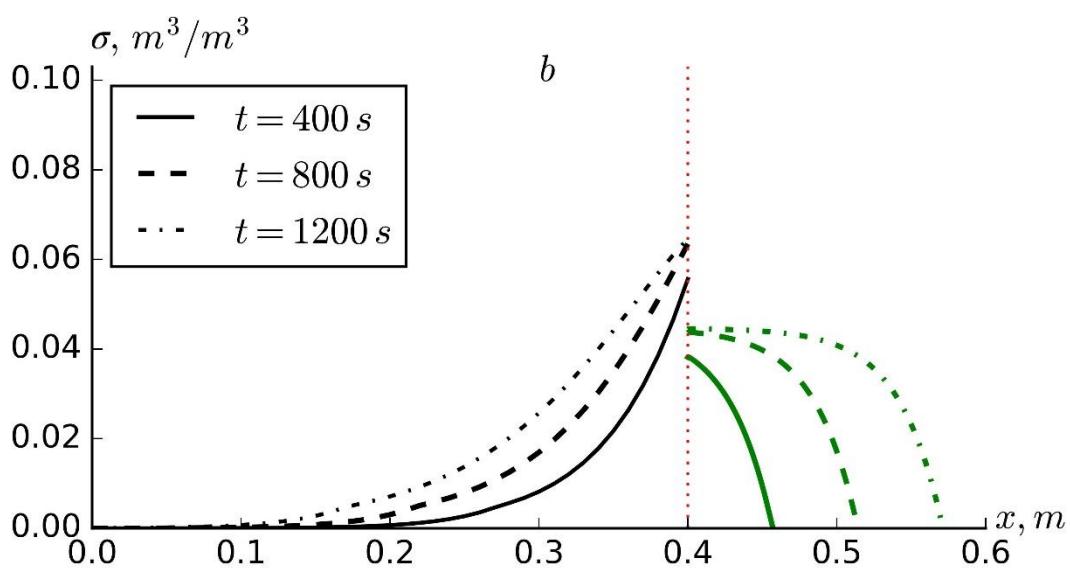
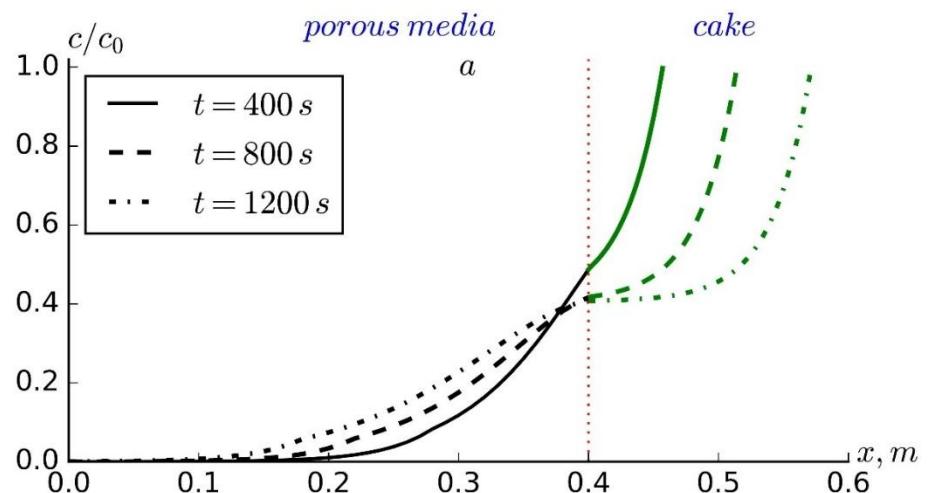




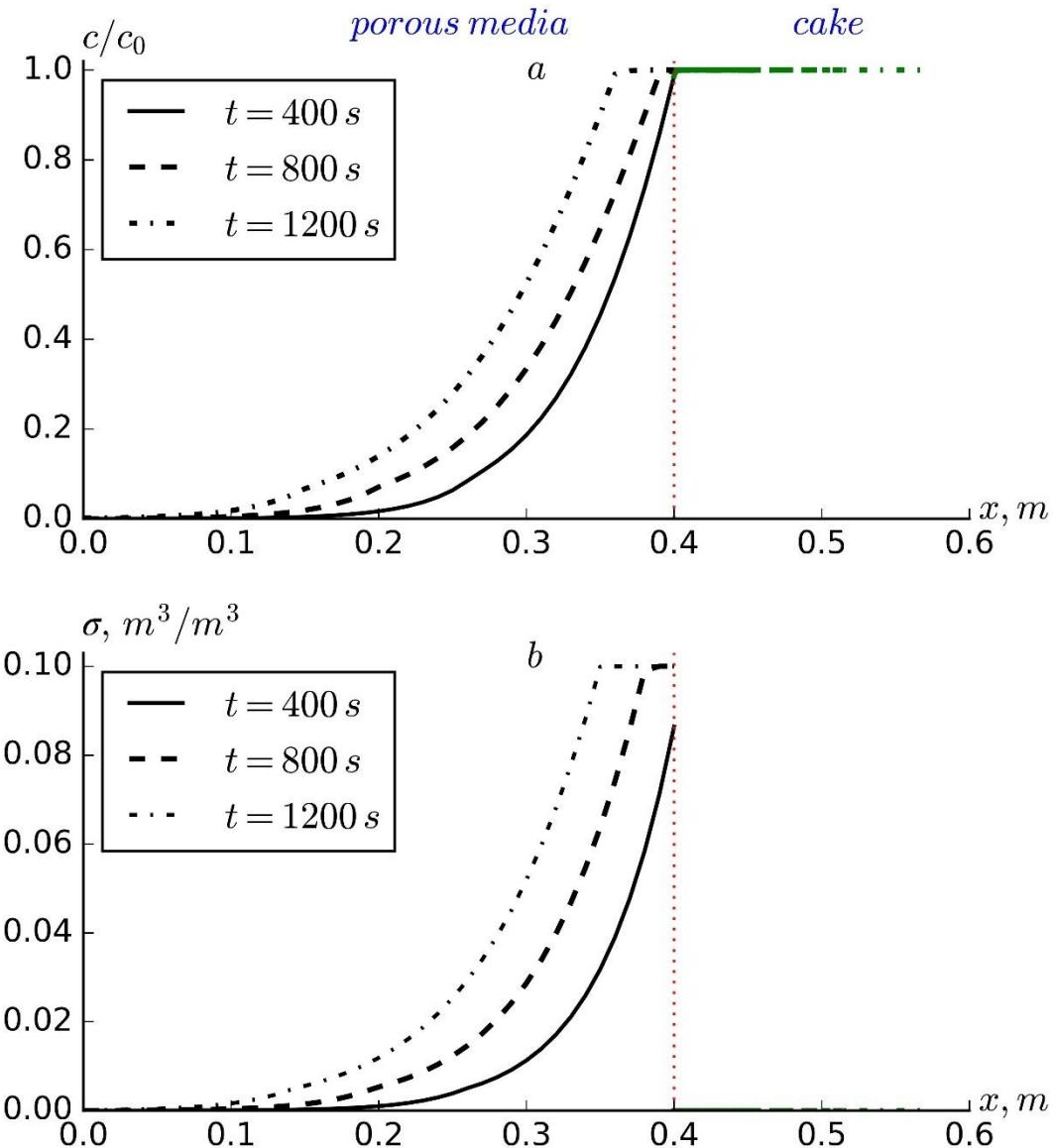
2-rasm.  $c/c_0$  (a),  $\rho$  (b) lar qiymatlarning vaqtning turli qiymatlarida o'zgarish profillari.

Keyk qatlam ortib borishi bilan, kiruvchi oqim fronti ham dastlabki  $s_0 = 0,4$  nuqtadan asta sekin uzoqlashib boradi, xususan,  $t = 400\text{ s}$  da  $s(t) \approx 0,457\text{ m}$  nuqtagacha,  $t = 800\text{ s}$  da  $s(t) \approx 0,514\text{ m}$  gacha va  $t = 1200\text{ s}$  da  $s(t) \approx 0,571\text{ m}$  nuqtagacha yetib boradi (2a-rasm). Keyk qatlamda muallaq zarrachalar konstratsiyasining tarqalishida vaqt o'tishi bilan front surilishi natijasida fiksirlangan nuqtalarda kamayish kuzatiladi (2a-rasm). Bu xususiyat g'ovak muhitning faqat  $s_0 = 0,4$  nuqtaga yaqin nuqtalardagina saqlanadi, undan uzoqlashganda esa aksincha, vaqt ortishi bilan konsentratsiya oshishini kuzatish mumkin. Cho'kma konsentratsiyasida esa ham g'ovak muhitda, ham keyk qatlamda vaqt o'tishi bilan faqat o'sish kuzatiladi (2b-rasm).

2-rasmida keyk qatlam va g'ovak muhitning filtratsion xususiyatlari bir xil deb olingan edi, 3-rasmida esa, keyk qatlamda zarrachalarning o'tirib qolishi koeffitsiyentlari g'ovak muhitdagiga nisbatan kichikroq deb olingan, natijada keyk qatlamda o'tirib qolgan zarrachalar konsentratsiyasi sezilarli kamayganligini kuzatish mumkin (3b-rasm). Bu es muallaq zarrachalar konsentratsiyasi ham keyk qatlamda, ham g'ovak muhitda oshishiga olib keladi (3a-rasm). Natijada g'ovak muhitda o'tirib qolgan zarrachalar konsentratsiyasi sezilarli oshgan (3b-rasm).

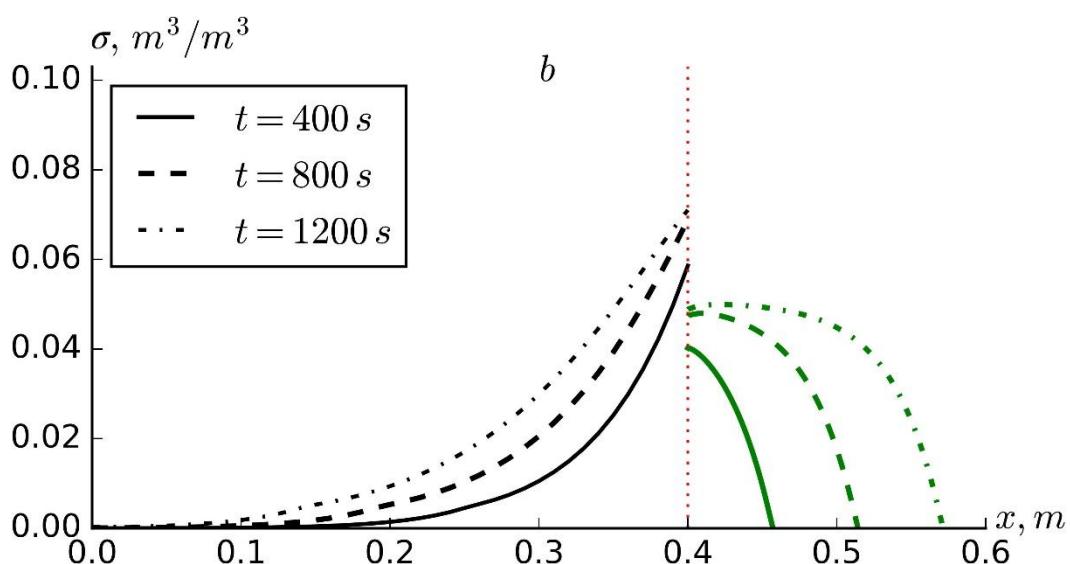
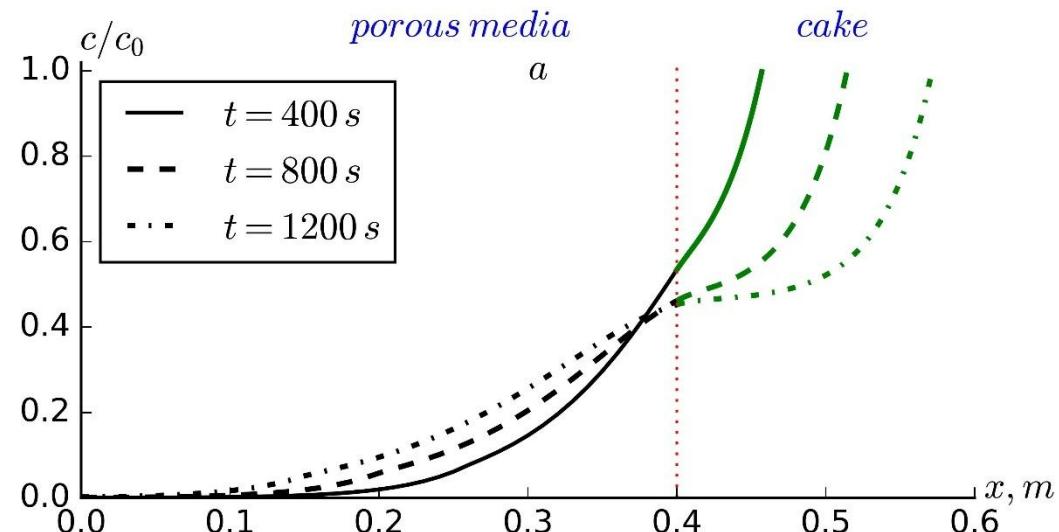


3-rasm.  $c/c_0$  (a),  $\rho$  (b) lar qiymatlarning vaqtning turli qiymatlarida o'zgarish profillari.



4-rasm.  $c/c_0$  (a),  $\rho$  (b) lar qiymatlarning vaqtning turli qiymatlarida o'zgarish profillari.

4-rasmda keyk qatlamda zarrachalarning o'tirib qolishi inobatga olinmagan, ya'ni  $[s_0, s(t)]$  sohada faqat cake filtration,  $[0, s_0]$  sohada faqat deep bed filtration yuz beradi deb qaralgan, bu esa o'z navbatida gibrildan keskin farq qiladigan natijalarga olib kelgan. Bu holda  $s_0 = 0,4$  nuqtadan yaqin nuqtalarda g'ovak muhitda cho'kma konsentratsiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishayotganligini, ya'ni o'tirib qolish to'xtaganligini kuzatish mumkin (4b-rasm). Bu esa bizga filtrlash jarayonida suspenziyadagi keyk qatlam hosil qiluvchi zarrachalar filtr yordamchisi vazifasini bajarishi mumkinligini yana bir marta ko'rsatib turipti.



5-rasm.  $c/c_0$  (a),  $\rho$  (b) lar qiymatlarning vaqtning turli qiymatlarida o'zgarish profillari.

5-rasmda har ikkala muhitda diffuziya koefitsiyenti 10 barobar oshirilgan. Bu tarqalish jarayonining tezlashishiga va barcha konsentratsiyalarning ortishiga olib keladi.

### Xulosalar

Cake filtration va deep bed filtration modellar kesishmasidan iborat bo'lган gibrild modellar yaratish yo'li bu ikki masala birgalikda qaraldi.

G'ovak muhitlarda birjinslimas suyuqliklar sizishi gibrild modelini asosida masalani sonli yechishning samarali algoritmlari ishlab chiqildi.

Vaqt o'tishi bilan keyk qatlam o'sib borishi, unga mutanosib ravishda ham keyk qatlamda, ham g'ovak muhitda muallaq zarrachalar konsentratsiyasi va cho'kma konsentatsiya ortib borishi ko'rsatildi.

Keyk qatlamda muallaq zarrachalar konsentratsiyasining tarqalishida vaqt o'tishi bilan front surilishi natijasida fiksirlangan nuqtalarda kamayish kuzatilishi, bu xususiyat g'ovak muhitning faqat kirish nuqtasiga yaqin nuqtalardagina saqlanishi, undan uzoqlashganda esa aksincha, vaqt ortishi bilan konsentratsiya oshishi, cho'kma konsentratsiyasida esa ham g'ovak muhitda, ham keyk qatlamda vaqt o'tishi bilan faqat o'sish bo'lishi ko'rsatildi.

Keyk qatlamda zarrachalarning o'tirib qolishi inobatga olinmaganda, ya'ni cake filtration va deep bed filtration alohida-alohida qaralganda gibrid modeldan keskin farq qiladigan natijalarga olib kelishi, bu holda kirish nuqtasiga yaqin nuqtalarda g'ovak muhitda cho'kma konsentratsiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishayotganligini, ya'ni o'tirib qolish to'xtaganligini kuzatish mumkinligi, bu esa bizga filtrlash jarayonida suspenziyadagi keyk qatlam hosil qiluvchi zarrachalar filtr yordamchisi vazifasini bajarishi mumkinligi ko'rsatildi

G'ovak muhitlarda modda ko'chishi gibrid modeli asosida masalalarni yechish uchun dasturiy majmular yaratilgan.

### **Adabiyotlar ro'yxati**

1. Corapcioglu, M. Y., Abboud, X. M., and Haridas, A. Governing equations for particle transport in porous media. In Advances in transport phenomena in porous media, pages 269–342. Springer, 1987.
2. Olivier, J., Vaxolairo, J., and Vorobiov, E. Modelling of cake filtration: an overview. Separation Science and Technology, 42(8):1667–1700, 2007.
3. Tien, C. Introduction to cake filtration: analyses, experiments and applications. Elsevier, 2006.
4. Ruth, B. Correlating filtration theory with industrial practice. Industrial & Engineering Chemistry, 38(6):564–571, 1946.
5. Shirato, M., Sambuichi, M., Kato, H., and Aragaki, T. Internal flow mechanism in filter cakes. AIChE Journal, 15(3):405–409, 1969.
6. Wakeman, R. A numerical integration of the differential equations describing the formation of and flow in compressible filter cakes. Trans IChemE, 56:258–265, 1978.
7. Atsumi, K. and Akiyama, T. A study of cake filtration formulation as a Stefan problem. Journal of Chemical Engineering of Japan, 8(6):487–492, 1975.

8. Sprcnsn, P. B., Moldrup, P., and Hansen, J. Filtration and expression of compressible cakes. Chemical Engineering Science, 51(6):967 979, 1996.
9. Wakeman, R. The formation and properties of apparently incompressible filter cakes under vacuum on downward facing surfaces. Trans. I. Chem. Eng., 59:260 270, 1981.
10. Tholiandor, H. and Fathi-Xajafi, M. Simulation of the build-up of a filter cake. Filtration & separation, 33(5):417 421, 1996.
11. Xciva, A. C. and Goldstein, L. A procedure for calculating pressure drop during the build-up of dust filter cakes. Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, 42(6):495 501, 2003.
12. Corapcioglu, M. Y., Abboud, X. M., et al. Cake filtration with particle penetration at the cake surface. SPE Reservoir Engineering, 5(03):-317 326, 1990.
13. Abboud, X. M. and Corapcioglu, M. Y. Numerical solution and sensitivity analysis of filter cake permeability and resistance to model parameters. Transport in porous media, 10(3):235 255, 1993.

## **ATMOSFERADA IFLOSLANTIRUVCHI MODDALAR TARQALISH JFRFENINI MODELLASHTIRISH**

*Toshkent raqamli texnologiyalar va suniy intellektini rivojlantirish ilmiy tadqiqot instituti professori. f-m.f.d. Ravshanov N.*

*O'zMU Jizzax filiali amaliy matematika kafedrasи dotsenti, f-m.f.n Rustamov  
M.J.*

**Annotatsiya.** Atmosferada havoni ifloslantiruvchi voddalarni tarqalishini avvaldan aniqlash masalasi actual masaladir.Bu xolni elon qilingan ilmiy maqolalr orqali ham asoslash mumkin.SHu sababli havoni ifloslantiruvchi moddalarini tarqalish modelini ishlab chiqish masalasi qo`yildi .Bu moddalar texnogen va tabiiy ko`rinishlarga ega.Ular: aerazol zarralari, sanoat chiqitlari,kommunal xo`jalik chiqitlari va xokozolar.Bunda sonli algoritm yuqori aniqlikka ega hamda vaqt va fazoviy koordinatalarga ega approksimatsiya bo`lishi lozim.Echim algoritmi atmosferada aralash havoni tashkil qiluvchilarga ajratishga asoslangan. Hisoblash eksperimenti real metereologik parametrlar va ifloslantiruvchi manba ma`lumotlariga asoslangan.Hisoblash amallari natijalari taxlili boshqa mualliflar natijalariga yaqin ekanini ko`rsatdi. Bunda fizik faktirlar:advektsiya,diffuziya va aralash havoni yutilishi qaralgan.

**Kalit so`zlar:**matematik model, taqrifiy xisoblash usullari, xisoblash eksperimenti, ifloslantiruvchi moddalar ko`chishi va ifloslantiruvchi moddalar diffuziyasi,klimatik havo faktori,matematik fizika masmlasi Fur`e usuli,taqrifiy echish –qo`shma operator usuli.

**1.Masalaning dolzarbligi.** Sanoat ob`ektlarini ko`payishi havoni ifloslanishini kuchaytiradi.Bu esa ekologik xavf.Bu xolat turli xil agregat xolatlarni toza havoga qo`shilishidan hosil bo`ladi.Ular: organic,noorganik,gaz ko`rinishli,aerozol va xokozolar.Ularni manbalari:transport,energetika ob`ektlari,canoat ob`ektlari va xokozolar.

Qo`yilgan masalani integrallashda mualliflar turli xil(to`g`ri,taqrifiy,qo`shma operator)usullarni qo`llashdi.[8]

Yuqoridagilardan kelib chiqib bu ishda maqsad effektli sonli algoritmni qurish bo`li,,u ko`p o`lchamli masalani,bir o`lchamli masalaga keltirish ga asoslangan.Bunda shamol tezligi hisobga olingan[5].

Oxirgi paytlarda aksariyat joylarda ichishga yaroqli er osti suvlarini pasayib ketishi kuzatilmogda.Bu esa ommaviy tashkilotlar va turar joy binolarini suvli joylarga ko`chirish masalasini qo`ymoqda.Ular kata sanoat va energetika binolari atrofidir.Bunda qaysi binoni yuqorida ko`rsatilgan binolardan qanchalik uzoqlikda va qanday balandlikda qurish masalasini qo`yadi.Bu masala esa havo ifloslanishi yahash uchun be zarar masofa va balandlikni aniqlash masalasidir[5].

## 2. Masalani qo`yilishi

Atmosferada aerosol zarralari tarqalishi matematik modelini qaraymiz.U gidromexanika tenglamasi yordamida quyidagicha yoziladi[6-9].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \sigma \theta + \alpha \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ = \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \delta Q \end{aligned} \quad (1)$$

Boshlang`ich va chegaraviy shartlar quyidagicha.

$$\theta|_{t=0} = \theta^0; \quad (2)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \xi(\theta_E - \theta); \quad \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \xi(\theta_E - \theta); \quad (3)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \xi(\theta_E - \theta); \quad \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \xi(\theta_E - \theta); \quad (4)$$

$$-\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\beta \theta - f_0); \quad \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \xi(\theta_E - \theta). \quad (5)$$

Bunda,  $\theta$ —atmosferada zararli moddalar konsentratsiyasi; $t$ —vaqt;  $\theta^0$ —atmosferada zararli voddalar boshlang`ich konsentratsiyasi;  $\theta_E$ —qaralayotgan soha chegarasidan o`tuvchi konsentratsiyasi;  $x, y, z$  —koordinatalar sistemasi;  $u, v, \omega$ —uch yo`nalish bo`yicha shamol tezligi;  $w_g$ —zarralarni cho`kish tezligi;  $\sigma$  — atmosferada zararli moddalarni yutilishi;  $\alpha(z)$  — o`simliklar elementi bilan yutilish koeffisienti;  $\mu, \kappa$  —diffuziya va turbulentlik koeffisienti;  $Q$ —manba quvvati;  $\delta$ —Dirak funksiyasi;  $\xi$ —soha chegarasidan o`tishda massa almashinuvicoxa koeffisienti;  $\beta$ —yer yuzasi bilan zarralarni o`zaro ta`sir yuzaro koeffisienti;  $f_0$ —yer yuzasi zararli moddalarni chiqarilishi statsionar manbasi[7].

## 3. Yechish usuli

Qaralgan masala (1) - (5) uch o`lchovli xsusiy xosilali va mos boshlang`ich hamda chegaraviy shartlarga ega differesial tenglama tkanidan uni yagona echimini to`g`ri va taqribiy[9] usullarda toppish mumkin bo`ladi[9]. Xsusun boshlang`ich shart o`z tasirini yo`qotmagan bo`lsa,u bir jinsli bo`lmagan diffuziya tenglamasi ro`rinishida echiladi va u yagona echimga ega.Yo`qotgan bo`lsa,qo`shma operator yordamidakuzatish masalasi ko`rinishida taqribiy echiladi va u yana tchimga tga bo`lib,tchim xatoligi aniq ko`rsatiladi[2].

Qaralgan masala (1) - (5) ni sonli echish uchun izlanayotgan echimni butun fazoda silliq deb faraz qilamiz.Aralash havoni siljishi va diffuziyasi turli fizik jarayonlari additivligini qo`llab atmosfera da kichik oraliq  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ ,da ularni alohida masala ko`rinishida qarash mumkin[1].

### **Adabiyotlar**

1. Havasi A., Bartholy, J Farago I. Musicales influences on wind fields // Idojaras. 2001. Vol. 105, № 1. P. 39–58.  
P. 1–21.
2. Ekkachai T., Suttida W. Modeling and numerical experiments of air pollution on a complex Modeling and numerical experiments of air pollution on a complex terrain . // J. Phys. Conf. Ser. 2021. P. 1–12.
3. Zhou H., Song W., Xiao K. Simulating Flow and Hazardous Gas Dispersion by Using WRF–CFD Coupled Model under Different Atmospheric Stability Conditions // Atmosphere (Basel). 2022. Vol. 13, № 7.
4. Сухинов А., Хачунс Д., Чистяков А.. Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы и ее программная реализация на многопроцессорной вычислительной системе // Вестник УГАТУ. Т. 19, № 1(67). 2015. P. 213–223.
5. Ravshanov N., Ravshanov Z., Bolnokin V. Modeling the salt-dust aerosols distribution in the atmosphere, taking into account the soil erosion // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 862. P. 62004.
6. Ravshanov N., Shafiev T. Nonlinear mathematical model for monitoring and predicting the process of transfer and diffusion of fine-dispersed aerosol particles in the atmosphere // IOP Conf. Ser. J. Phys. Conf. Ser. 2019. Vol. 1260.
7. Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N. A Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // Am. J. Model. Optim. Science and Education Publishing, 2015. Vol. 3, № 2. P. 35–39.
8. M.Rustamov. The problem of restoring the change in temperature from indirect observations. International Center for Science. co-worker-Science and education' Penza 2019 December 15;
9. M.Rustamov The problem of monitoring the diffusion process. ASEAN Journal on Science and Technology for Development Vol 39, No 4, 2002,121-127, DOI 10.5281/zenodo/6480913;

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

**Наврузов К., Абдикаримов Н.И.**

Практический интерес предоставляет изучение пульсирующего течения вязкоупругой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе под воздействием гармонических колебаний градиента давления или при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. В связи с этим, решены задачи пульсирующего течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями. Обозначены расстояния между стенками через  $2h$ . Ось  $Ox$  проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось  $Oy$  направлена перпендикулярно к оси  $Ox$ . Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала.

Реологическое уравнение состояния жидкости принимается в виде обобщенного уравнения Максвелла [1,2]

$$\tau = \tau_s + \tau_p, \tau_s = -\eta_s \frac{\partial u}{\partial y}, \lambda \frac{\partial \tau_p}{\partial t} + \tau_p = -\eta_p \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  - время релаксации;  $\tau_s$  - касательная напряжения Ньютона жидкости;

$\tau_p$  - касательная напряжения Максвелловской жидкости;  $\tau$  - касательная

напряжения раствора;  $\eta_s$  - динамическая вязкость Ньютона жидкости;  $\eta_p$  - динамическая вязкость Максвелловской жидкости. Между динамическими вязкостями выполняется равенство

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p$$

где  $\eta_0$  - динамическая вязкость раствора.

Уравнение движения для скорости жидкости получаем [3,4]

$$\rho(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u}{\partial t} = -(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

Считаем, что колебательное течение вязкоупругой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебания расхода жидкости или продольной скорости осредненной по сечению канала.

$$Q = a_Q \cos \omega t = \operatorname{Re} a_Q e^{i\omega t}, \quad \langle u \rangle = a_u \cos \omega t = \operatorname{Re} a_u e^{i\omega t}$$

где  $a_Q$  и  $a_u$  - амплитуды расхода жидкости и амплитуды продольной скорости осредненной по сечению канала. В данном случае течение происходит симметрично по оси канала, а стенке канала удовлетворяется условия прилипания. В силу линейности уравнение (1) продольной скорости, давления, касательного напряжения на стене можно записывать следующим образом:

$$u(y, t) = \operatorname{Re} u_1(y) e^{i\omega t}, p(x, t) = \operatorname{Re} p_1(x) e^{i\omega t}, \tau(t) = \operatorname{Re} \tau_1 e^{i\omega t}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i \omega}{\eta_0} \left( X + \frac{Z}{(1+i\omega\lambda)} \right)^{-1} u_1(y) = \frac{1}{\eta_0} \left( X + \frac{Z}{(1+i\omega\lambda)} \right)^{-1} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \quad (3)$$

$$\text{Здесь } X = \frac{\eta_s}{\eta_0}, Z = \frac{\eta_p}{\eta_0}, X + Z = \frac{\eta_s}{\eta_0} + \frac{\eta_p}{\eta_0} = 1$$

Решение уравнения (3) будет

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left( 1 - \frac{\cos\left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h}\right)}{\cos(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega))} \right) \quad (4)$$

где  $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega}{V_0}} h$  - колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний);  $V_0$

- кинематическая вязкость раствора. С помощью решения (3) определяем передаточную функцию  $W_{\tau,u}(i\omega)$  для касательного напряжения на стенки, как

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h}{3\eta_0} \frac{\tau_1(i\omega)}{u_1(i\omega)} = - \frac{\left(\frac{3}{i^2} \alpha_0\right)^2 \sin\left(i^2 \alpha_0 \eta(i\omega)\right)}{3(i^2 \alpha_0 \eta(i\omega)) \cos\left(i^2 \alpha_0 \eta(i\omega)\right) - \sin\left(i^2 \alpha_0 \eta(i\omega)\right)} \quad (5)$$

Передаточная функция (5) иногда называется амплитудно-фазовой частотой характеристикой (АФЧХ). Эта функция позволяет определить зависимость касательного напряжения на стенке канала от времени при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала.

#### Литература

1. Casanellas L., Ortin J. Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 166. (2011). – p.1315-1326.
2. Ding Z., Jian Y. Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis // J. Fluid. Mech., 2021,.vol. 919, A20. Doi:10.1017/jfm.2021.380 A20.1-31.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.–М.: Дрофа, 2003.-840 с.
4. Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих течений в трубопроводах. – Ташкент, “Фан”, 1986. – 112 с.

# **VI. SHO'BA. MIRZO ULUG'BEK MAK TABI VA ALI QUSHCHI ILMIY MERO SING ASTRONOMIYA FANINING RIVOJLANISHIDAGI O'RNI**

## **Great Turkic astronomers Tusi, Ulugh Beg and Ali Qushji and their influential scientific schools**

**Elchin Babayev**

Baku State University (BSU), rector@bsu.edu.az

**Shuhrat Ehgamberdiev**

Ulugh Beg Astronomical Institute (UBAI),

Uzbekistan Academy of Sciences, shuhrat@astrin.uz

Throughout history, mankind has been intrigued by the perpetual pursuit of comprehending the cosmos. The groundbreaking research, which originated during the prosperous scientific renaissance of the Islamic Golden Age, played a significant role in establishing the foundation for contemporary astronomy. Nasiraddin Tusi, Ulugh Beg, and Ali Qushji are renowned astronomers of Turkic origin who made significant contributions to the ongoing quest for knowledge by authoring a significant chapter in the field.

The purpose of this study is to explore the significant scientific schools established by these astronomers, with the aim of analyzing their respective contributions and the intricate interplay of concepts and hypotheses that characterized their reciprocal impact, with a particular emphasis on the innovative contributions that each school made to the field of astronomy and the theoretical frameworks that they established. The impact of their contributions extended far beyond their specific domain, as they both shaped and were shaped by the subsequent work of their peers.

The present study underscores the importance of the scientific schools of Tusi, Beg, and Qushji, not only as historical artifacts but also as significant milestones in the trajectory of scientific progress. The enduring impact of their contributions serves as a poignant reminder that the pursuit of knowledge is a collaborative endeavor that transcends temporal and spatial boundaries.

The interconnection of these scientific institutions is intricate and warrants a comprehensive investigation into their modes of communication for a better understanding. Furthermore, it is possible to delve deeper into the broader sociopolitical context that influenced these scientific schools, providing valuable perspectives on the mechanisms through which scientific ideas develop within specific historical contexts.

Moreover, a more comprehensive understanding of the evolution of science worldwide could be attained through the conduct of focused research that delves into the influence of these institutions in other regions of the Islamic world and Europe.

## **OBSERVATIONAL AND ENERGETIC PROPERTIES OF GRAVITATIONAL COMPACT OBJECTS**

*Bobomurat Ahmedov*

*Ulugh Beg Astronomical Institute, Astronomy St. 33, Tashkent 100052, Uzbekistan  
Institute of Fundamental and Applied Research, National Research University  
TIIAME, Kori Niyoziy 39, Tashkent 100000, Uzbekistan  
National University of Uzbekistan, Tashkent 100174, Uzbekistan*

Astronomy has made great strides in recent years, with modern observations on the international level providing a wealth of information about the universe. The use of both ground and space telescopes has allowed astronomers to study celestial objects with unprecedented accuracy, including black holes.

Black holes are mysterious objects that are difficult to observe directly due to their intense gravitational pull, which warps the fabric of space-time. However, recent astronomical observations have provided convincing evidence of their impact on nearby objects. For example, black holes are known to emit powerful gamma-ray bursts, which are high-energy explosions that release more energy in a fraction of a second than the sun will release in its entire lifetime. These bursts can have a profound impact on their surroundings, potentially triggering the formation of new stars and influencing the evolution of nearby galaxies.

In addition to their impact on the surrounding areas, black holes are also known to absorb stars, adding to their mass and increasing their gravitational pull. The study of these processes has provided astronomers with valuable insights into the nature of black holes and the role they play in the evolution of the universe.

Another area of recent discovery has been the role that black holes play in stimulating the growth of newborn stars in their surrounding areas. The intense gravitational pull of black holes can cause nearby gas and dust to collapse, leading to the formation of new stars. This process has been observed in a number of regions of the universe, providing further evidence of the impact that black holes can have on their surroundings.

Modern astronomical observations have provided a wealth of information about black holes and their impact on the universe. Through the use of ground and space telescopes, astronomers have been able to study black holes in detail, providing valuable insights into the nature of these mysterious objects and their role in the evolution of the universe.

The study of the motion of photons around rotating black holes is one of the most

important tasks of modern astrophysics. The analysis of the form of silhouettes of these objects, known as black hole shadows, provides valuable information about the nature of black holes and their impact on their surroundings. To study the motion of photons around black holes, astronomers have been using radio astronomical observations in international projects such as the Black Hole Cam (BHC) and the Event Horizon Telescope (EHT).

The EHT, in particular, has been instrumental in providing proof of the existence of the black hole horizon and in retrieving information about events on the central object in our galaxy. This has been achieved through the effective implementation of relevant radio astronomical observations, which have allowed astronomers to study the motion of photons around black holes in detail.

The culmination of these efforts was the release of the first image of the "shadow" of the supermassive black hole candidate in the galaxy M87 in April 2019 and of the image of Sgr A\* in 2022 by the EHT collaboration. This groundbreaking discovery provided the first direct evidence of the existence of black holes and confirmed many of the predictions made by previous studies. The image showed the distinctive features of a black hole, including an inner edge for the accretion disk and the existence of an infinitely red-shifted surface.

The release of these images marked a major milestone in the study of black holes and provided valuable information about the nature of these objects. It also demonstrated the effectiveness of radio astronomical observations in providing proof of the existence of black holes and in retrieving information about events on the central object in our galaxy.

The study of the motion of photons around rotating black holes and the analysis of their silhouettes is one of the most important tasks of modern astrophysics. The recent discovery of the first image of the "shadow" of a supermassive black hole in the galaxy M87 has provided valuable information about the nature of black holes and confirmed many of the predictions made by previous studies. This discovery demonstrates the effectiveness of radio astronomical observations in providing proof of the existence of black holes and in retrieving information about events on the central object in our galaxy.

Then gravitational lensing in the vicinity of a slowly rotating massive object surrounded by plasma has been studied. The obtained deflection angle of the light ray in the presence of plasma depends on (i) the frequency of the electromagnetic wave, due to the dispersion properties of the plasma; (ii) the gravitational mass  $M$ ; and (iii) the angular momentum of the gravitational lens. We have studied photon motion around axially symmetric rotating (i) Kerr black hole, (ii) wormhole in the presence of a plasma with radial power-law density. It is shown that in the presence of a plasma, the observed shape and size of the shadow of rotating (i) Kerr black hole, (ii) wormhole changes depending on the (i) plasma parameters, (ii) gravitational object spin, and (iii) inclination angle between the observer plane and the axis of rotation of the black hole/wormhole.

We have developed a general formalism to describe the black hole shadow as an arbitrary polar curve expressed in terms of a Legendre expansion. New developed

formalism does not presume any knowledge of the properties of the shadow, e.g., the location of its center, and offers a number of routes to characterize the distortions of the curve with respect to reference circles. These distortions can be implemented in a coordinate independent manner by different teams analyzing the same data. It has been shown that the new formalism provides an accurate and robust description of noisy observational data, with smaller error variances when compared to previous measurements of the distortion.

Finally, I will discuss the end state of the evolution of massive stars, and various observational properties of magnetized neutron stars. The energetics of rotating black holes and neutron stars is also in the scope of my talk.

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НОВЫМ  
МАСШТАБОМ**  
**Ибадов Рустам**

Кафедра теоретической физики и квантовой электроники Самаркандского  
государственного университета имени Шарафа Рашидова, г. Самарканд,  
Узбекистан.

Одной из побудительных причин для квантования пространства-времени является трудности с ультрафиолетовыми расходимостями в квантовой теории поля (КТП). Параметр типа фундаментальной длины  $l$  (или фундаментальной массы  $M$ ) непременно возникал в так называемых нелокальных вариантах КТП, тоже нацеленных на избавление теории от ультрафиолетовых расходимостей. Несмотря на определенные успехи, это направление так и не вышло за рамки феноменологического подхода, поскольку формфакторы, подавляющие расходимости, в нелокальных теориях необходимо извлекать из опытных данных. Известно, однако, что наиболее важные реалистические теории поля-квантовая электродинамика, квантовая хромодинамика, модель Салама-Вейнберга-Глэшоу и т.д., принадлежат к классу т. н. нормируемых теорий, в которых существование расходимостей не мешает проведению количественных расчетов с любой степенью точности. Успехи этих теорий в описании имеющихся на сегодня

экспериментальных данных не являются аргументом против существования фундаментальной длины  $l$ . Они свидетельствуют лишь о том, что современная физика высоких энергий еще далеко отстоит от того рубежа, за которым могут проявиться новые геометрические свойства пространства-времени. С позиции сегодняшнего дня многим теоретикам представляется весьма вероятным, что «истинная» теория поля, способная дать адекватное описание всех взаимодействий элементарных частиц, будет, по меньшей мере перенормируемой лагранжевой теорией, обладающей локальной калибровочной (супер)симметрией. Спрашивается, может ли такая схема содержать параметр типа фундаментальной длины? Ответ на этот вопрос могут дать лишь будущие эксперименты в области сверхвысоких энергиях.

Идея о наличии в природе новой универсальной постоянной размерности массы или длины, которая бы фиксировала определенный масштаб в области высоких энергий (или на малых пространственно-временных расстояниях), многократно обсуждалась в литературе в самых различных текстах. Хорошо известным примером является квантование пространственно-времени направление в квантовой теории поля (КТП), основанное гипотезе о дискретной (квантованной) структуре пространственно-временного мира в области малых масштабов. Линейный размер “кванта-пространства” интерпретируется как новая универсальная постоянная-фундаментальная (также элементарная, минимальная) длина  $l$ . Обратная величина  $M = 1/l$  выступает, соответственно, в роли «фундаментальной массы». С точки зрения данного подхода стандартной КТП отвечает предельный  $l = 0$  (или  $M \rightarrow \infty$ ). Но, на сегодняшний день, в экспериментах в пределах  $l \geq 10^{-20}$  метр еще  $l$  не обнаружена. Но, этот рубеж еще чрезвычайно далеко отстоит от «планковской длины»  $l \approx 10^{-35}$  метр, определяющей пространственные масштабы эффектов квантовой гравитации. По мере преодоления колоссального интервала  $10^{-20} - 10^{-35}$  метр будут открыты новые физические явления и закономерности, ассоциированные с новым

«масштабом природы»- фундаментальной длиной  $l$ , или фундаментальной массой  $M = \frac{\hbar}{c l}$ .

В.Г.Кадышевский и М.Д.Матеев основываясь гипотезе о фундаментальную длину, облачая  $l$  в геометрическую форму получили новую КТП для скалярного поля [1]. При этом, по соображениям размерности, в  $p$  –представлении теории роль нового универсального масштаба наложена на фундаментальной массе  $M$ . Пусть параметр  $M$  имеет непосредственное отношение к геометрии импульсного 4-пространства теории, определяя его крупномасштабную структуру, т.е. строение области «больших» импульсов  $|p| \geq M$ . Область «малых» импульсов  $|p| \ll M$  при этом должна оставаться приближенно евклидовой, чтобы не нарушилась соответствие со стандартной евклидовой КТП [2]. Именно, такой геометрией обладают простейшие римановы 4-пространства, имеющие постоянную (положительную или отрицательную) кривизну [3] Рассмотрены гиперсфера в пространстве 5- измерений, отождествляя радиусы гиперсферы фундаментальной массой  $M$ .

Углубляясь формулировке КТП с фундаментальной массой [4] мы с самого начала будем разворачивать в конфигурационном представлении, переходя от  $p$  –пространства Минковского к  $p$  –пространству де-Ситтера с достаточно большим радиусом  $M$ . Пространство де-Ситтера обладает постоянной кривизной. В соответствии с ее знаком имеются две возможности:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 = M^2 \quad (1)$$

(кривизна положительна)

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 = -M^2 \quad (2)$$

(кривизна отрицательна)

Неевклидово 4-пространство (2) называются также мнимым 4-пространством Лобачевского. Естественно, что КТП, опирающаяся на импульсное пространство вида (1)-(2), должна предсказать новые физические явления при  $E \geq M$ . В принципе

$M$  может оказываться близким к планковской массе  $M_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \approx 10^{19}$  ГэВ.

Тогда эта новая схема обязана включить в себе квантовую теорию гравитации. Стандартной КТП отвечает приближение «малых» 4-импульсов которое во многих случаях формально достигается при  $M \rightarrow \infty$  («плоский предел»). Далее рассмотрим квантовую версию уравнения (2). С помощью стандартной для квантовой теории постановки  $p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  и  $p_5 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^5}$  получим следующую полевое уравнение в 5 измерениях:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x^\mu, x^5) = 0 \quad (3)$$

Здесь мы умышленно использовали нормальные единицы, чтобы подчеркнуть, что три универсальные постоянные  $\hbar, c$  и  $M$  группируя в один параметр-фундаментальную длину  $l = \hbar/Mc$ . На само уравнение (3) естественно также распространяя термин «фундаментальной». Этому уравнению обязаны подчиняться все поля, независимо от их тензорной размерности. Переходя в (3) к смешанному  $(p, x_5)$ -представлению, получим уравнению

$$\left[ p^\mu p_\mu + \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} + M^2 \right] \Phi(p, x_5) = 0 \quad (4)$$

имеющий решение при всех  $p^\mu p_\mu = p^2$ , включая область  $p^2 + M^2 < 0$ .

Следовательно,  $p_5 = \sqrt{p^2 + M^2}$  теперь принимает как вещественные, так и чисто мнимые значения. Если мы определим эту величину как обобщенную функцию:

$$p_5 = \sqrt{(p^2 + M^2 + i0)} = \begin{cases} \sqrt{p^2 + M^2}, & \text{если } p^2 + M^2 > 0 \\ i\sqrt{-p^2 - M^2}, & \text{если } p^2 + M^2 < 0 \end{cases} \quad (5)$$

С помощью (5) записываем общее решение уравнении (4):

$$\Phi(p, x_5) = \cos[x_5\sqrt{(p^2 + M^2 + i0)}] \Phi(p, 0) + \frac{\sin[x_5\sqrt{(p^2 + M^2 + i0)}]}{\sqrt{(p^2 + M^2 + i0)}} \frac{\partial \Phi(p, 0)}{\partial x_5} \quad (6)$$

где «начальные данные»  $\Phi(p, 0)$  и  $\frac{\partial \Phi(p, 0)}{\partial x_5}$  определены при всех значениях 4-импульсов. Производя над (10) преобразование Фурье, находим формальное решение уравнение (3). Необходимо подчинить произвольные функции  $\Phi(p, 0)$  и  $\frac{\partial \Phi(p, 0)}{\partial x_5}$  по меньшей мере экспоненциальным условием убывания в области  $p^2 + M^2 < 0$  при  $|p| \rightarrow \infty$ . Можно сказать и так: удовлетворяющие указанному критерию  $\Phi(p, 0)$  и  $\frac{\partial \Phi(p, 0)}{\partial x_5}$  образуют класс функций, в пределах которого допустима корректная постановка задачи Коши для фундаментальной уравнение (3) по переменной  $x_5$ :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x^\mu, x^5) = 0, \\ \Phi(x^\mu, x^5)|_{x^5=0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \Phi(p, 0) d^4 p, \\ \frac{\partial \Phi(x^\mu, x^5)}{\partial x^5}|_{x^5=0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \frac{\partial \Phi(p, 0)}{\partial x^5} d^4 p \end{cases} \quad (7)$$

Если задача Коши (7) корректна, то решение фундаментальной уравнение дается интегралом Фурье, причем по самому построению оно является единственным. Следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие

$$\Phi(x^\mu, x^5) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi(x^\mu, 0) \\ \partial \Phi(x^\mu, 0) / \partial x^5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi(x^\mu) \\ \chi(x^\mu) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Иными словами, утверждение о том, что всем полям в 5-пространстве сопоставляется своя волновая функция  $\Phi(x, x^5)$ , подчиняющаяся фундаментальной уравнение (3), равносильно утверждению, что каждое из этих полей в обычном пространстве-времени описывается волновой функцией с удвоенным, по сравнению с прежним, числом компонент:

$$\Phi(x, x^5) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$$

Далее естественно предположить, начальные данные подчиняются лагранжевым уравнениям движения, которые следуют из соображения стационарности действия

$$S = \int d^4x L \left[ \Phi(x, 0), \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial x^5} \right] \quad (9)$$

Главная задача этой теории состоит в том, чтобы построить конкретные выражения для лагранжианов  $L \left[ \Phi(x, 0), \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial x^5} \right]$  в физически интересных случаях, выяснить смысл дополнительных полевых переменных и дать описание новых физических эффектов в области сверхвысоких энергиях  $E \geq M$ . В этой связи заметим, что, положив в основы КТП задачу Коши (7), мы фактически ввели концепцию поля. При преобразованиях группы де Ситтера  $O(1,4)$ , являющейся группой движений пространства отрицательной кривизной (2), величины  $(i \frac{\partial}{\partial x_\mu}, i \frac{\partial}{\partial x^5})$  при «вращениях» в  $(\mu 5)$ -плоскостях

$$i \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{q_\mu}{M} \left[ -i \frac{\partial}{\partial x^5} + \frac{q^v}{M-q_5} i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right], \quad i \frac{\partial}{\partial x^5} = -\frac{i q^v}{M} \frac{\partial}{\partial x_v} - i \frac{q_5}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \quad (10)$$

где  $q^2 - q_5^2 = -M^2$ .

В плоском пределе  $M \rightarrow \infty$  эти соотношения должны выражаться в преобразования сдвига псевдоевклидова  $p$ -пространства  $i \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + q_\mu$ . С учетом  $|p_0|, |\vec{p}| \ll M$ , и  $p^5 = g^{55} p_5 \cong M$ , заключаем, что при  $M \rightarrow \infty$

$$\left| i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi(x, x^5) \right| \ll M |\Phi(x, x^5)| \quad \text{отсюда имеем } i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi(x, x^5) \cong -M \Phi(x, x^5).$$

Далее эту соотношению можно проинтегрировать,  $\Phi(x, x^5) \cong e^{iMx_5} \Phi(x, x^5)$ . Таким образом, в плоском пределе  $M \rightarrow \infty$  зависимость от дополнительной координаты  $x^5$  исчезает, если в качестве пятимерной волновой функции использовать  $e^{-iMx_5} \Phi(x, x^5)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^5} \Big|_{M \rightarrow \infty} [e^{-iMx_5} \Phi(x, x^5)] \cong 0. \quad (11)$$

Это соотношение (11) одновременно является предельной формой фундаментально уравнения (3) при  $M \rightarrow \infty$ . Видим теперь, что начальные условия задачах Коши в плоском пределе принимают  $\Phi(x^\mu, x^5)|_{x^5=0} = \Phi(x, 0)$  и  $\frac{\partial}{\partial x^5}\Phi(x^\mu, x^5)|_{x^5=0} = iM\Phi(x, 0)$ . Таким образом, характерное для новой схемы удвоение числа полевых степеней свободы исчезает при  $M \rightarrow \infty$ . Отсюда, в частности  $\lim_{M \rightarrow \infty} L[\Phi(x, 0), \frac{\partial}{\partial x^5}\Phi(x, 0)] = L[\Phi(x, 0)]$ , т.е. при конечном  $M$  аналогом обычной полевой переменной следует считать  $\Phi(x, 0)$ . Если мы при постановке задачи Коши задавали начальные условия при произвольном фиксированном значении  $x^5 = const$  вместо (9) действия имели бы:

$$S = \int_{x^5=const} d^4x L \left[ \Phi(x, x^5), \frac{\partial \Phi(x, x^5)}{\partial x^5} \right]. \quad (12)$$

Далее, сознаваясь на (12) приведем некоторые действия в нашем подходе для полей, например для свободных скалярных  $\varphi(x, x^5)$ , спинорных  $\psi(x, x^5)$ , и векторных полей  $A_\mu(x, x^5)$ .

Действия для поля невзаимодействующих нейтральных скалярных частиц с нулевой массой:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[ \frac{\partial \varphi(x, x^5)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi(x, x^5)}{\partial x_\mu} + \left| -i \frac{\partial \varphi(x, x^5)}{\partial x^5} - M\varphi(x, x^5) \right|^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu} + M^2 \left| -i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^5} - \varphi(x) \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Действия для свободных спинорных полей:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^4x \{ \bar{\psi}(x, x^5)(i\hat{\partial} + M) \left[ \frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x_5} \psi(x, x^5) \right] + \\ &+ M \left[ \frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x_5} \psi(x, x^5) \right] (i\hat{\partial} + M)\psi(x, x^5) - \left[ \frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x_5} \psi(x, x^5) \right] \left[ \frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x_5} \psi(x, x^5) \right] \\ &- \bar{\psi}(x, x^5) [M + \frac{(i\hat{\partial})^2}{M}] \psi(x, x^5) \} \end{aligned} \quad (14)$$

Действия для свободных векторных полей:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \{ F_{KL}(x, x^5) F^{KL}(x, -x^5) + 2 \left| \frac{\partial A^\mu(x, x^5)}{\partial x^\mu} - M A_5(x, x^5) - \frac{\partial A_5}{\partial x^\mu} \right|^2 \} \quad (15)$$

где  $A^\mu(x, x^5)$  и  $A_5(x, x^5)$  -векторные поля,  $F_{KL}(x, x^5) = \frac{\partial}{\partial x^K} [e^{-iMx^5} A_L(x, x^5)] - \frac{\partial}{\partial x^L} [e^{-iMx^5} A_K(x, x^5)]$  -тензор векторного поля в 5-мерном пространстве, а  $K, L = 0, 1, 2, 3, 5$ .

В итоге, хотя перенормируемость этой нашей теории еще не доказана, в принципе в древесном приближении можем вычислять сечение некоторых ядерных реакций и выделить роль нового масштаба фундаментальной массой. Результаты расчетов в рамках нашей теории процессов рассеяния поляризованных электронов в области сверхвысоких энергиях можем рекомендовать экспериментаторам [5].

### Список литературы

1. Kadyshevsky V.G., and Mateev M.D. , Quantum field theory and a new universal high-energy scale. II: Gauge vector fields // Nuovo Cimento, A 87, 324, p.139 (1985).
2. Chizhov M.V., Donkov A.D., Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G. and Mateev M.D., *Quantum Field Theory and a New Universal High Energy Scale. Dirac Fields//* Nuovo Cimento. **87A**, No.3 (1985), p.350. Chizhov M.V., Donkov A.D., Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G. and Mateev M.D., *Quantum Field Theory and a New Universal High Energy Scale. Gauge Vector Fields//* Nuovo Cimento. **V.87A**, No.4 (1985), p.375.
3. Rodionov V. N. , Kravtsova G. A., An Algebraic PT-Symmetric Quantum Theory with a Maximal Mass// Physics of Particles and Nuclei, 2016, Vol. 47, No. 2, pp. 135–156.
4. Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G., New formulation of Quantum field theory with Fundamental mass// in: Proceedings 5th International Symposium on Selected Topics in Statistical Mechanics, Dubna, (World Scientific, Singapore (1989), p.131).
5. Ibadov R., Tuhtamishev S., Khodjaeva U. Some experimental consequences hypotheses about Fundamental Mass// European Science 2017, № 2 (24), 6-13.

# ASYMMETRY AT CONJUGATE FOOTPOINTS OF SOLAR FLARES

M. M. Mirkamalov<sup>1,2</sup>, Z. D. Mirtoshev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PhD student, University of Science and Technology of China, Hefei, China

<sup>2</sup>Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

<sup>1</sup>abbos.astrin@gmail.com, <sup>2</sup>zmirtoshev@gmail.com

**Key words:** flares; particles acceleration; HXR emission; magnetic fields; corona; chromosphere; photosphere.

**Introduction.** Solar flares have several observational characteristics, including the flare loops and twisted magnetic field (MF) lines [1], identified as the flux rope. In the classical picture of flares (CSHKP), magnetic reconnection (MR) occurs high in the corona in flaring loops, resulting in the energetic phenomena (plasma heating and particle acceleration). A significant portion of electrons accelerated in the less dense corona to a high (non-thermal) energy due to MR, move down MF lines to the denser chromosphere where they become collisionally stopped when they hit a thermal plasma and deposit their energy. Part of their energy is converted via the thick-target bremsstrahlung process to hard X-ray (HXR) emission in transition region and chromosphere [2]. As a result, during the impulsive phase of a flare, double HXR sources often appear, located on either side of the magnetic neutral line or polarity inversion line (NL or PIL), i.e., in regions of different magnetic polarity. They are two magnetically conjugate (paired) footpoints (FPs) of a newly reconnected single loop [3], which are interpreted as regions where non-thermal electrons precipitate after travelling along the magnetic loop legs [4]. Conjugate FPs usually have different HXR emissions, i.e., tend to show asymmetry in HXR emission [5].

Flare ribbons are also a consequence of the impact at the chromosphere of energetic particles launched from the coronal reconnection site [6], as they are the locations for the largest radiative emission increase of flares in ultraviolet (UV), extreme ultraviolet (EUV) and in soft X-rays (SXRs). Consequent energy redistribution in the lower atmosphere along the arcade of loops produces them. As flare proceeds, MR occurs at higher altitudes, involving higher located loops in interaction; the loop top (LT) sources are observed to move upward [7]. Thus, the HXR FPs and ribbons are usually seen to move away from

each other. During a flare, a two-ribbon structure is often observed [8], with a typical J-shape for both ribbons in the different MF polarities [9]. The strong distortions of the MF line mapping – quasi-separatrix layers (QSLs) and current density structures show time evolutions and shapes similar to ribbons [10]. Strong current density regions develop at QSLs locations [11].

**Factors causing asymmetry.** The behavior of HXR FP asymmetry caused by several effects simultaneously and cannot be attributed to a single effect easily. An asymmetry feature could be associated with the acceleration process, the transport process from the corona to the chromosphere, and the precipitation process in the chromosphere depending on the MF configurations and plasma conditions of flaring loops. If the injection site of accelerated electrons is not located at the LT, then the FP closer to the particle injection site could have stronger HXR emission due to the shorter distance between the injection and collision regions. Moreover, different plasma densities in the two legs of a flaring loop could cause different pitch-angle scattering, and thus different distributions of energetic electrons would precipitate. If the column density in one leg is small enough, then more electrons would precipitate and produce stronger HXR FP emission there. In addition, the brighter HXR FP emission appearing at the weaker MF region can be result of magnetic mirroring (MM), scenario where in a leg with a weaker MF (less effective MM) more electrons are able to reach the chromosphere. However, not all flares fit the above scenarios. Even their combination together might not provide a full explanation. There are also flares where asymmetry changes during flare evolution. In our vision, the asymmetric HXR FPs can be result of electric fields (EFs) associated with coronal electric currents (ECs) as well.

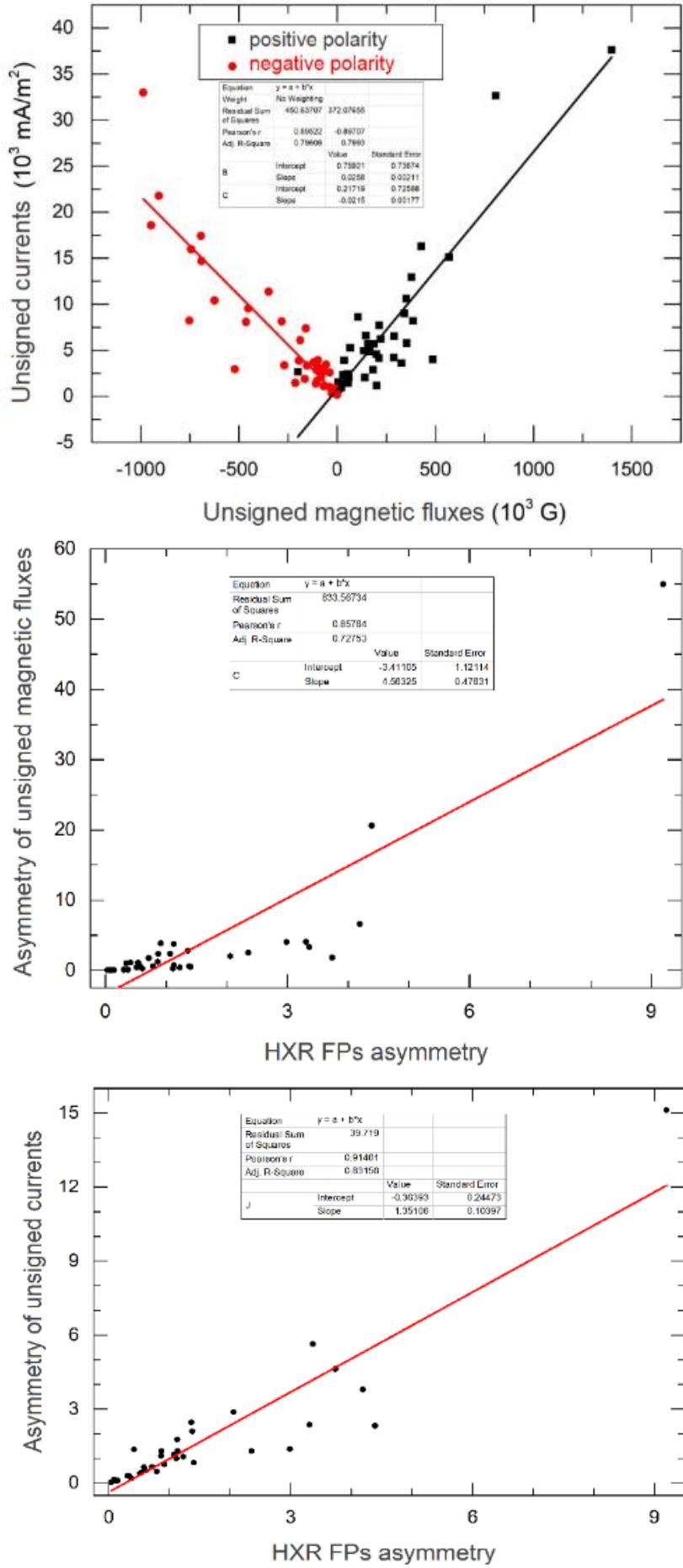
**The observations and data analysis.** Nowadays, the polarimetric measurements obtained continuously with a high cadence and spatial resolution by the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) on Solar Dynamics Observatory (SDO) provides maps of MF that allows through magnetic curl calculate photospheric vertical electric currents (PVECs) for flaring ARs. The combination of the HMI measurements in ARs and HXR observations of flares obtained with the Reuven Ramaty High Energy Solar Spectroscopic

Imager (RHESSI) provides new possibilities to study more systematically asymmetry of conjugate FPs and in greater detail the relation between the location of HXR sources (and electron precipitation sites) with MFs and the PVEC densities. We reconstructed HXR FPs images from the RHESSI and projected them on MF and PVEC density maps, calculated from the measurements of the HMI. HXR images are also compared with ultraviolet (UV) ribbons images from the SDO Atmospheric Imaging Assembly (AIA) to complement the flares analysis. Ratios of different parameters are calculated.

The goal is to understand mechanisms of the energetic particles interaction sites in the solar atmosphere, generating asymmetric HXR FPs in two-ribbon flares, associated MFs and currents, as well as the magnitudes of PVEC densities. Statistical study containing 35 time intervals in 24 X- and M-class flares with available pre-flare HMI magnetograms are investigated, and process of selection more events are ongoing.

Our statistics provide a unique opportunity to track the trends of the paired HXR FPs and their associated MFs (Figure). Asymmetry calculations reproduce the observed ratios within the error limits in both FPs for each of the analysed events.

**Acknowledgements.** We acknowledge the support by the Indo-Uzbek joint research project No. UZB-Ind-2021-95.



**Figure.** Some of the scatter plots for calculated physical parameters.

## References:

1. Cheng, X., Zhang, J., Liu, Y., Ding, M. D., & Hansen, W. W. (2011). Observing flux rope formation during the impulsive phase of a solar eruption. *The Astrophysical Journal Letters*, 732(6pp), 25
2. Brown, J. C. (1971). The deduction of energy spectra of non-thermal electrons in flares from the observed dynamic spectra of hard X-ray bursts. *Solar Physics* 1971 18:3, 18(3), 489–502.
3. Sakao, T., Kosugi, T., Masuda, S., Yaji, K., Inda-Koide, M., & Makishima, K. (1996). Characteristics of hard X-ray double sources in impulsive solar flares. *Advances in Space Research*, 17(4–5), 67–70.
4. Aschwanden, M. J., Fletcher, L., Sakao, T., Kosugi, T., & Hudson, H. (1999). Deconvolution of Directly Precipitating and Trap-precipitating Electrons in Solar Flare Hard X-Rays. III. Yohkoh Hard X-Ray Telescope Data Analysis . *The Astrophysical Journal*, 517(2), 977–989.
5. Goff, C. P., Matthews, S. A., van Driel-Gesztelyi, L., & Harra, L. K. (2004). Relating magnetic field strengths to hard X-ray emission in solar flares. *Astronomy & Astrophysics*, 423(1), 363–372.
6. Reid, H. A. S., Vilmer, N., Aulanier, G., & Pariat, E. (2012). Astrophysics X-ray and ultraviolet investigation into the magnetic connectivity of a solar flare. *A&A*, 547, 52.
7. Gallagher, P. T., Dennis, B. R., Krucker, S., Schwartz, R. A., & Tolbert, A. K. (2002). Rhessi and Trace Observations of the 21 April 2002 x1.5 Flare. *Solar Physics* 2002 210:1, 210(1), 341–356.
8. Ding, M. D., Chen, Q. R., Li, J. P., & Chen, P. F. (2003). H $\alpha$  and Hard X-Ray Observations of a Two-Ribbon Flare Associated with a Filament Eruption. *The Astrophysical Journal*, 598(1), 683–688.
9. Warren, H. P., O'brien, C. M., & Sheeley, N. R. (2011). Observations of Reconnecting Flare Loops with the Atmospheric Imaging Assembly. *The Astrophysical Journal*, 742(8pp), 92.

10. Dudík, J., Janvier, M., Aulanier, G., Zanna, G. del, Karlick'y, M., Karlick'y, K., Mason, H. E., & Schmieder, B. (2014). Slipping Magnetic Reconnection during an X-class Solar Flare Observed by SDO/AIA. *The Astrophysical Journal*, 784(21pp), 144.
11. Janvier, M., Aulanier, G., Pariat, E., & Démoulin, P. (2013). The standard flare model in three dimensions - III. Slip-running reconnection properties. *Astronomy & Astrophysics*, 555, A77.

## **HAT-P-3B VA HAT-P-44b EKZOSAYYORALARNING RAVSHANLIK EGRI CHIZIG'I TAHLILI NATIJALARI**

**S.Sh.Ergashev<sup>1</sup>, O.A.Burxonov<sup>2</sup>, R.G.Karimov<sup>2</sup>**

*Sh.Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti<sup>1</sup>*

*M.Ulug'bek nomidagi Astronomiya instituti<sup>2</sup>*

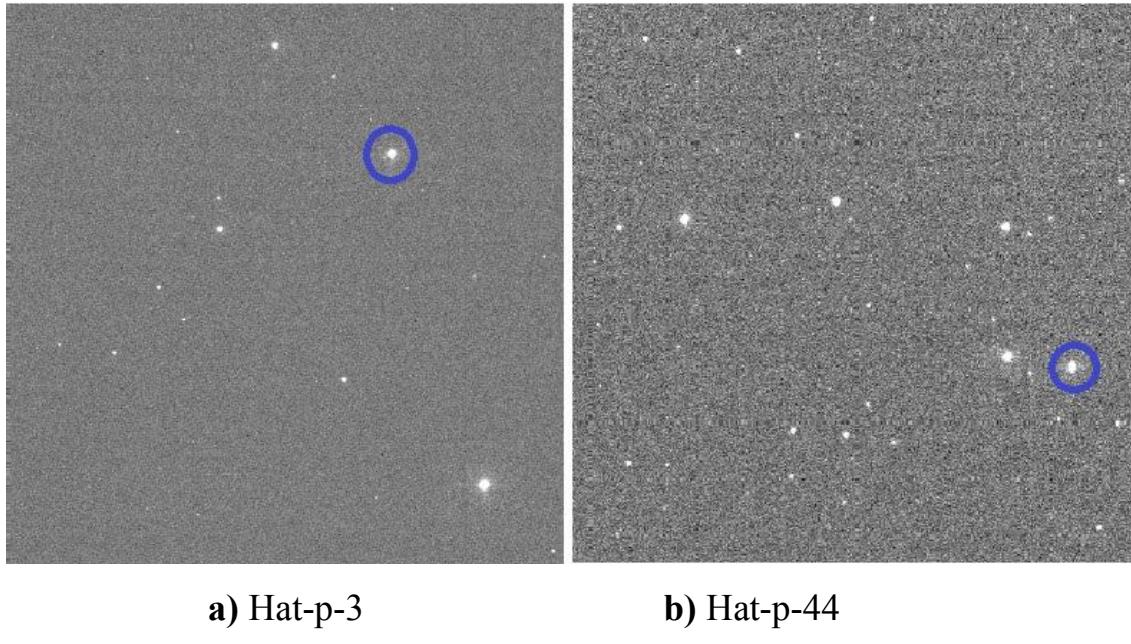
**Krish.** Ekzosayyoralar bu boshqa yulduzlar atrofida aylanuvchi sayyoralardir, “ekzo” lotincha “tashqari” degan ma’noni beradi. Birinchi tan olingan ekzosayyora 1995 yilda ochildi. Kashfiyat Dopler chizig‘ining siljishini 13 m/sek aniqlikda o‘lchay oluvchi spektrometr yordamida amalga oshirildi. [1, 355-b]. Ekzosayyoralar topishning bir necha usullari mavjud: Radial tezlik usuli, tranzit usuli, gravitatsion mikrolinzalanish usuli, astrometriya usuli, timing usuli va xokazo. Biz o‘z tadqiqotlarimizda to‘liq **tranzit** usulidan foydalanamiz. [2, 6-b].

M

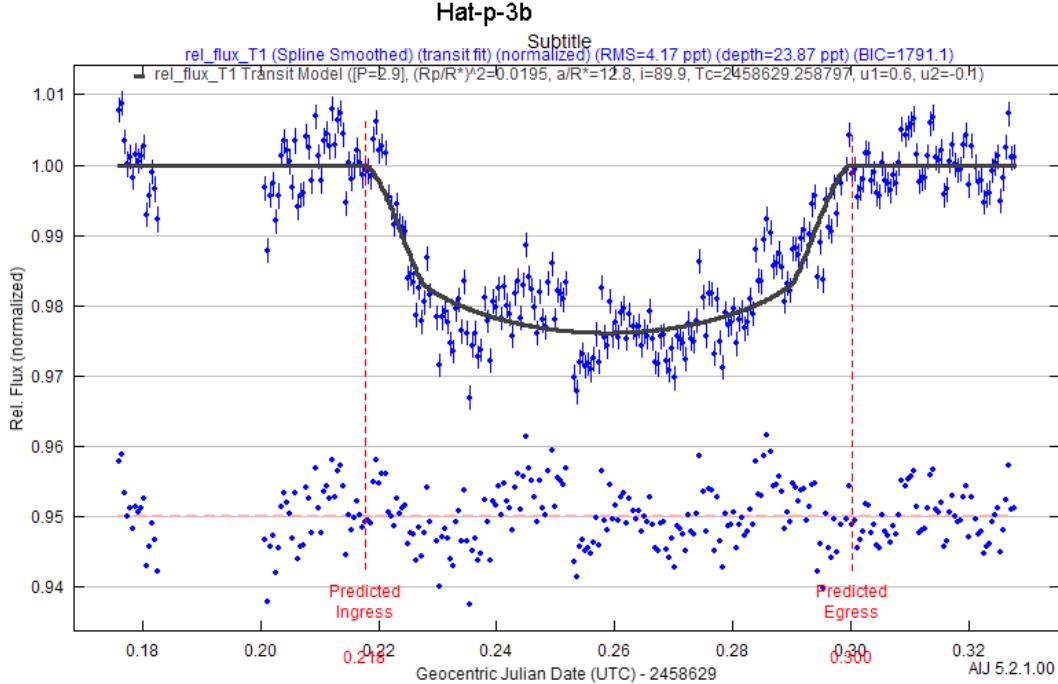
- a 1) Tasvir maydonida 0 punktning siljishini (bias) xisobga olish,
- ’ 2) tasvir maydonining qorong‘ulik tokini korreksiyalash (dark)
- 3) tasvir yuza tekisligini tuzatish (flat) ishlari olib borildi.

Ma’lumki, har bir obyektni o‘rganishda shu obyekt kuzatilgan maydonda mavjud bo‘lgan yulduzlardan solishtirma yulduzlar tanlab olinadi. Bu yulduzlar obyekt o‘zgarishlarini aniqlash uchun juda muhim bo‘lib, solishtirma yulduzlarning o‘z yorqinliklari o‘zgarmas bo‘lishi talab etiladi [3, 4-b]. Maydanak observatoriyasida olingan tasvirda ko‘k rang bilan aylanaga olingan Hat-p-3b (I-a rasm) va Hat-p-44b (II-b rasm) atrofidagi yulduzlardan 5 tadan 12 tagacha yulduzlarni solishtirma yulduz sifatida

tanlab oldik. Kuzatilgan obyektlarni ravshanlik egri chizig‘ini hosil qilish va orbital parametirlarini aniqlashda WINDOWS operatsion sistemasida ishlovchi AstroImageJ dasturidan foydalanildi. Quyida II-rasmda Hat-p-3b ni va III-rasmda Hat-p-44b ning kuzatuvlari asosida olingan ravshanlik egri chiziqlari keltirilgan.



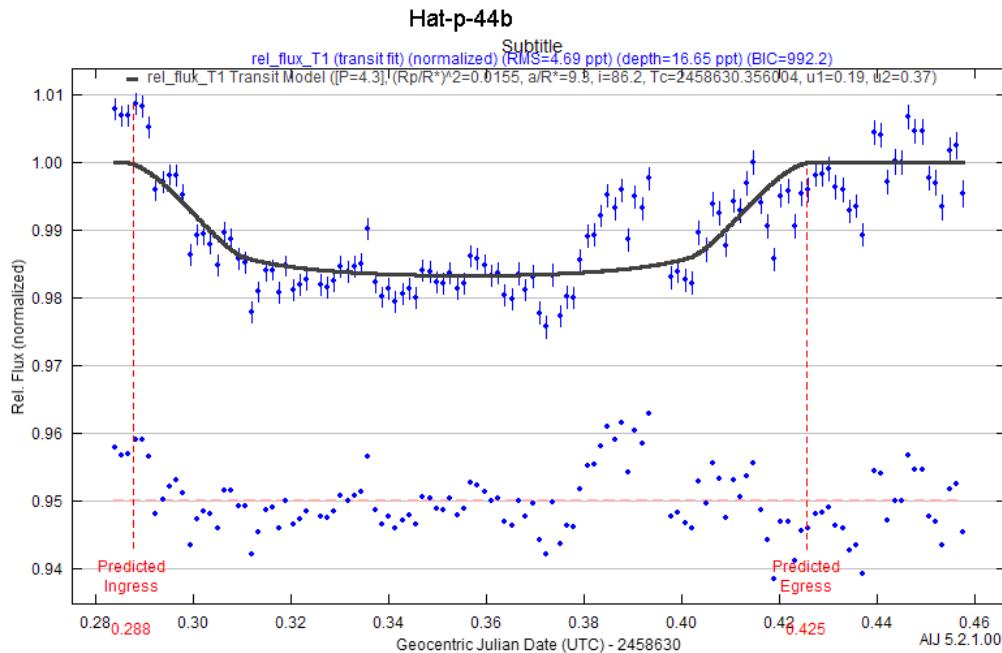
**I-rasm** Maydanak observatoriyasida olingan ekzosayyorali yulduzlar tasviri



**II-rasm.** Hat-p-3b ni ravshanlik egri chizig‘i.

Sayyoraning o‘z yulduzi gardishidan o‘tishiga **tranzit** deyiladi. Boshqacha qilib aysak, Yerdan turib kuzatilayotgan yulduzni sayyora to‘sib qo‘yadi. Albatta, sayyoraning

o‘lchami yulduznikiga nisbatan ancha kichik bo‘lgani uchun u yulduzni to‘la to‘sib qo‘ya olmaydi, lekin bunda yulduzning ravshanligi o‘zgaradi. Ravshanligining o‘zgarishiga ko‘ra uning orbital parametrlari hisoblanadi. Quyidagi jadvalda AstroImageJ dasturi yordamida aniqlangan Hat-p-3b va Hat-p-44b ekzosayyoralarining asosiy orbital parametirlari keltirilgan. [4, 5].



**III-rasm.** Hat-p-44b ni ravshanlik egri chizig‘i.

Kuzatilgan ekzosayyoralarining aniqlangan asosiy orbital parametirlari quyidagi I-jadvalda keltirilgan.

Nomi	Orbitaning qiyaligi (gradiusda)	Radiusi (Yupiter radiusida)	Orbita koeffitsienti $a/R^*$	Tranzit chuqurligi
Hat-p-3b	89.85	1.14	12.79	0.0195
Hat-p-44b	86.18	1.04	9.275	0,0155

**I-jadval** Asosiy orbital parametirlar

**Xulosa.** Hat-p-3b va Hat-p-44b ekzosayyoralarining kuzatilgan ZAQ tasvirlaridan foydalanib, ularning ravshanlik egri chiziqlari olindi. Ravshanlik egri chiziqlarini tahlil qilish orqali ularning orbita qiyaligi, radiusi, sayyora orbitasining katta yarim o‘qining yulduz radiusiga nisbati ( $a/R^*$ ) , Tranzit chuqurligi kabi parametirlari topildi.

## Adabiyotlar

1. M
2. Jason T. Wright, B. Scott Gaudi. "Exoplanet detection methods" October 11, 2012.
- M 3. Fiorucci&Tosti. 1996, A&AS 116, p.403
- a 4. B
- r 5. Khan, Amina "Milky Way may host billions of Earth-size planets". Los Angeles Times. Retrieved 5 November 2013.

n  
az **QUYOSH AKTIVLIGI SIKLIDA KUZATILGAN GEOMAGNIT  
BO'RONLARNING QUYOSH DOG'LARI BILAN BOG'LIQLIGI**  
n D.Po'latov, Z.Mirtoshev  
n . Samarqand davlat universiteti Muhandislik fizikasi instituti  
P diyorbekpolatov2002@gmail.com, zmirtoshev@gmail.com  
a) **Abstrakt.** Koronal massa tashlanmalar (KMT) geomagnit bo'ronlarga va Quyosh  
tū dog'lariga bog'liq. KMTlarning quyoshdan ajralib chiqgan oqimi va KMT tomonidan  
boshqariladigan zarba o'rtasidagi maydonda joylashgan sayyoralararo magnit  
2 maydonning janubiy komponenti bilan ta'sirlashishi natijasida yer magnitosferasining  
1 g'alayonlanishi kuzatiladi. Odatda bo'ronga olib keladigan KMTlar 1) tezlikning yuqori  
Manligi, 2) KMT larning ajralib chiqish burchag kengligi (asosan halo va qisman halo)  
va 3) yer magnit maydonining  $B_z$  komponentiga va 4) Quyosh dog'larining markaziyl  
r meridianga yaqin joylashishiga bog'liq bo'ladi. Biz ushbu maqolada aynan 24-quyosh  
ç siklini tanglashimizga sabab bu davrda quyosh aktivligining eng minimmal davri  
Bo'lganligi sabab bo'ldi.

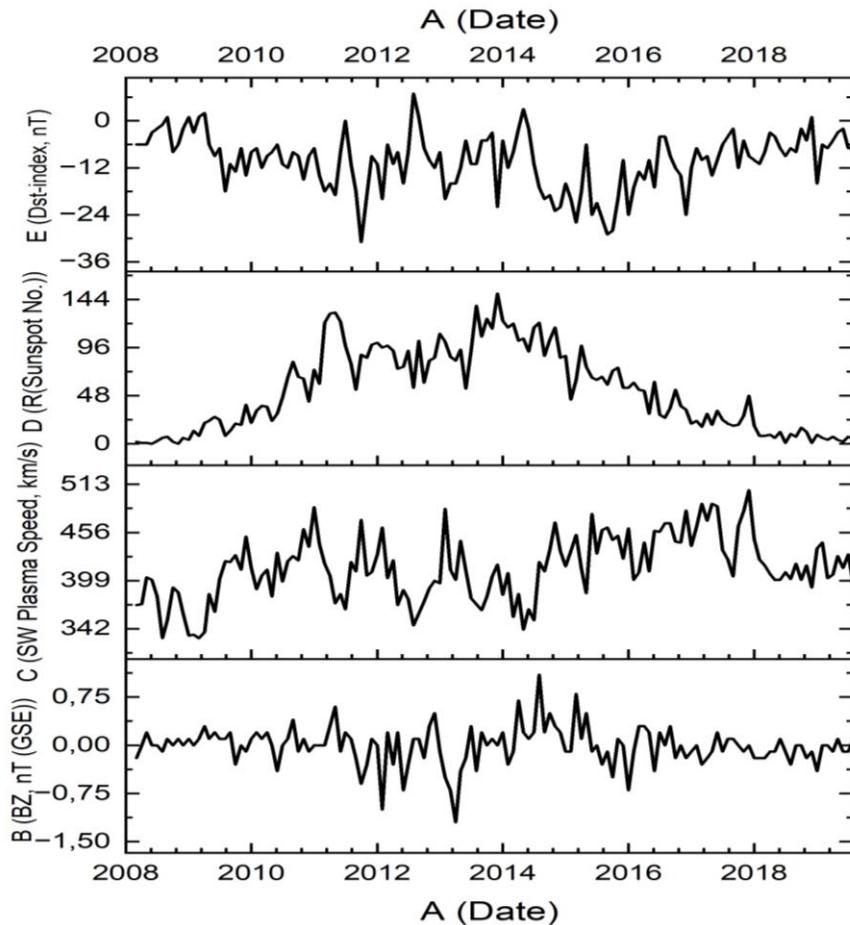
2 **Kirish.** Geomagnit bo'ron sayyoralararo strukturaning janubiy magnit maydon  
0 komponenti ( $B_z$ ) va Yerning magnit maydon komponentasi bilan ta'sirlashganda sodir  
Bo'ladi va bu quyosh shamoli energiyasini magnitosferaga kirishiga imkon beradi.  
Geomagnit bo'ronning intensivligi bir qator indekslar yordamida ifodalanadi. Bu erda biz  
QMNI<sup>2</sup> kuzatuv ma'lumotlar bazasidan 23-quyosh siklida 24-quyosh siklida bo'lgan  
HYPERLINK "https://exoplanets.nasa.gov/news/1702/cosmic-milestone-nasa-confirms-5000-

§ <https://omniweb.gsfc.nasa.gov>

barcha geomagnit bo'ronlarni ko'rib chiqdik va natijada 23-chi quyosh siklining oxirida kuzatilgan pasayish 24-chi quyosh siklining dastlabki boshlanish jarayoni uchun asos bo'lganligi aniqlandi. Biz OMNI kuzatuv ma'lumotlar bazasidan olingan Dst (nT) natija qiymatlarini Kyoto<sup>3</sup> kuzatuv ma'lumotlar bazasidan olingan ma'lumotlar bilan solishtirdik. Quyosh siklining 24-chi so'nggi 100 yildagi eng zaif quyosh sikli bo'lib, faollik avvalgi 23-chi quyosh sikliga nisbatan 1/3 baravar kam bo'lgan. Kuzatish ma'lumotlarini tahlil qilish jarayonida biz 2008-2020 yilda sodir bo'lgan barcha geomagnit bo'ronlarning Dst qiymatlarini o'rghanib chiqish natijasida uning qiymatlarini minimal qiymatdan Dst  $\leq -50$  nT past bo'lganligi kuzatildi. Quyosh shamolidagi alfven to'lqinlari, korotatsiya qiluvchi o'zaro ta'sir hududlari (CIRs) va koronal massa ejeksiyonlari (KMT) magnit maydonidagi  $B_z$  komponentaning asosiy manbalaridir [1, 2, 3]. Ushbu maqolaning asosi geomagnit bo'ronlarning xavflilik darajasini aniqlash va uni geomagnit bo'ronlarning Quyosh dog'lari soniga bog'liqligini o'rghanishdir. 1-rasmdan ko'rishimiz mumkinki, agar geomagnit bo'ronlarning Dst indeksiga qarasak, eng yuqori qiymati Dst  $\leq -50$  nT dan past bo'lganligini kuzatamiz va bu esa past geomagnit bo'ronga to'g'ri keladi. 1-rasm quyosh dog'lari maksimal qiymatiga ( $N_s = 150$ ) etganida Dst qiymati minimal ( $Dst = -22$  nT) qiymatni ko'rsatdi. Bu paytda quyosh moddasining quyoshdan ajralib chiqish tezligi  $U = 418 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  ni tashkil etdi.

---

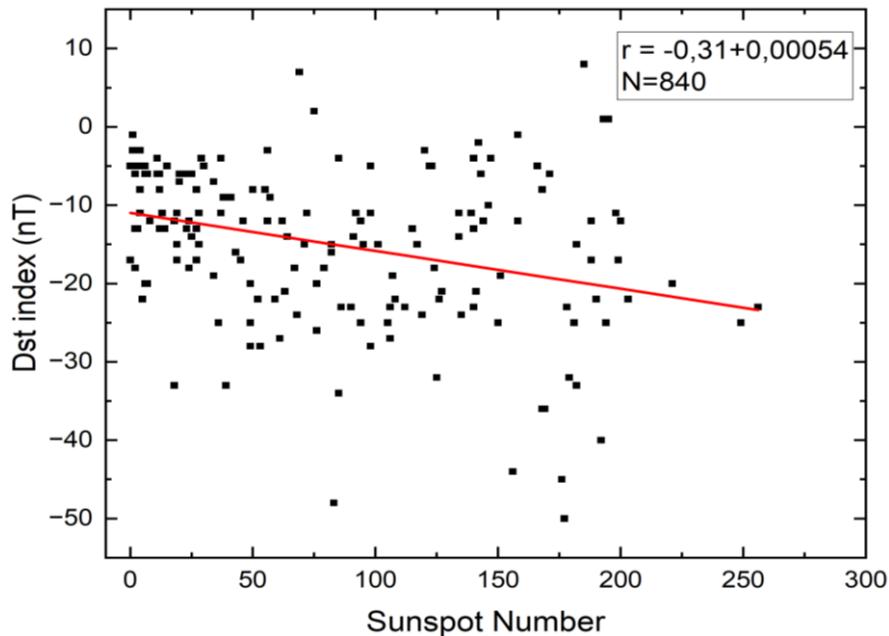
<sup>3</sup> [https://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/dst\\_final/index.html](https://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/dst_final/index.html)



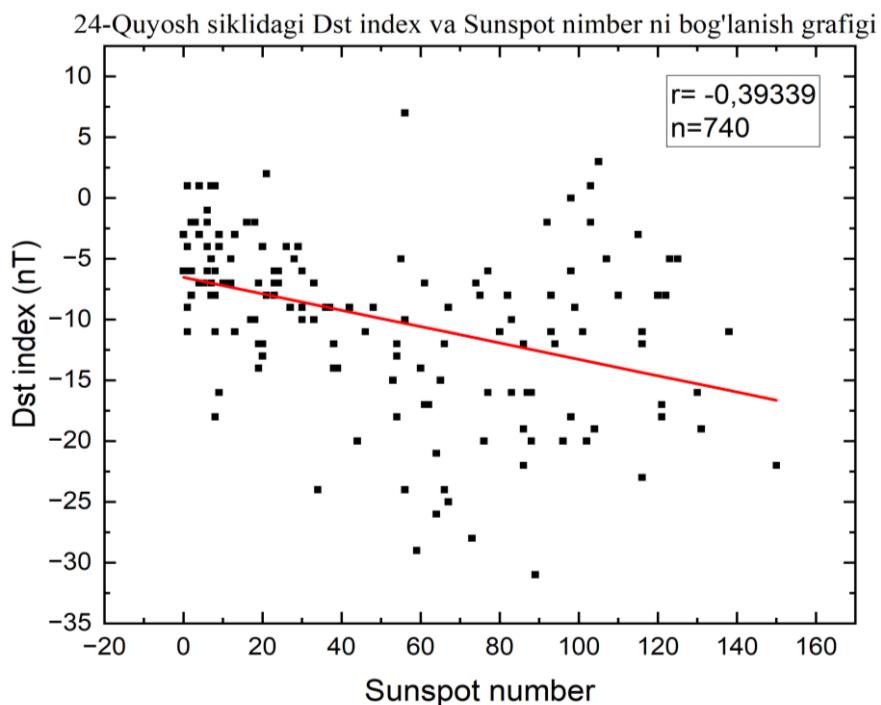
**1-rasm:** Ushbu grafik 24-Quyosh sikli davomida o'changan ma'lumotlarning qiymatlarini ko'rsatadi. 1-grafik Dst qiymatini ko'rsatadi, 2-grafik Quyosh dog'lari sonini esa Quyoshdan ajralib chiqayotgan protonlar tezligini, 3-grafik esa Magnit maydon indiksiyasining  $B_z$  komponentasini o'zgarish grafigini bildiradi. Rasm OMNI veb-saytidan olingan natijalar asosida tahrirlangan.

### Quyosh dog'lari soni va Koronal massa tashlanmalari orasidagi bog'liqlik

[4] birinchi marta KMT darajasi Skylab KMTlaridan foydalangan holda quyosh dog'lari soni bilan bog'liqligini ta'kidladi. Bu P78-1 [5, 6] va SOHO bortidagi koronagraflar tomonidan kuzatilgan ko'proq KMTlari bilan tasdiqlandi [7]. 1-rasmdan ko'rindiki quyosh aktivlik sikli ortganda va uning yuzasida dog'lar soni ko'payganda quyosh moddasining quyoshdan ajralib chiqish tezligining sezilarli darajada past bo'lishi kuzatildi. Bu o'z navbatida quyosh dog'lari juda katta magnit maydonga ega ekanligini va bu maydon o'z navbatida quyoshdan ajralib chiqayotgan protonlarning tezligiga tasir qilishligi kuzatildi.



**2-rasm.** 23-quyosh siklida o'lchangan Dst indeksi va quyosh dog'lari soni o'rtasidagi chziqli bog'lanish grafigi. Grafik 1996-2008 yillar oralig'idagi ma'lumotlar asosida hosil qilingan. Ma'lumotlarning barchasi OMNI websitedan olingan.



**3-rasm.** 24-quyosh siklida o'lchangan Dst indeksi va quyosh dog'lari soni o'rtasidagi chziqli bog'lanish grafigi. Grafik 2009-2020 yillar oralig'idagi ma'lumotlar asosida hosil qilingan. Ma'lumotlarning barchasi OMNI websitedan olingan.

2-rasmida 23-quyosh sikli uchun Quyosh dog'lari soni va Dst o'rtasidagi korrelyatsiya (Person koefitsienti  $r = -0.31 \pm 0.00054$ ) regressiya chizig'i bilan chiziqli bog'liq ekanligini ko'satdi. 2-rasmida shuningdek 23-sikldagi Dst indeksi va Quyosh

dog'lari soni solishtirildi va korrelyatsiyaning sikllararo o'zgarishi aniqlandi. 23-siklda Quyosh dog'lari soniga normallashtirilgan Dst indeksi 24-siklda Quyosh dog'lari soniga nomallashtirilgan Dst indeksiga qaraganda ikki baravar yuqori ekanligi kuzatildi. Biz bunda umumiy hisobda 840 ta xodisani o'rganib chiqdik va ular o'rtasidagi bog'liqlikni aniqladik. Quyosh siklining alohida sikllari uchun korrelyatsiya tahlili amalga oshirilganda 24-siklda korrelyatsiya koeffitsientlari sezilarli farqni ko'rsatadi va bu oldingi natijani tasdiqladi [7].

3-rasmda 23-quyosh sikli uchun Quyosh dog'lari soni va Dst o'rtasidagi korrelyatsiya ( $r = -0.39 \pm 0.00339$ ) regressiya chizig'i bilan chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsatdi. Bu grafikni hosil qilishda umumiy hisobda 740 ta hodisani tahlil qilib chiqdik va ular o'rtasidagi bog'lanishni aniqladik. Kuzatuv natijalarimizdan ko'rindan 23 va 24-quyosh sikllari davomida o'lchangan korrelyatsiyalar miqdori  $\sim 0,08$  ga farq qilishligi kuzatildi.

**Xulosa.** 23- va 24-quyosh sikllari davrida Quyosh dog'lari soni va Dst indeks orasidagi bog'liqlik ancha murakkab xususiyatni ko'rsatdi. Katalog bo'yicha Quyosh dog'lari soni va Dst orasidagi chiziqli korrelyatsiya koeffitsiyenti 23- Quyosh siklida  $r = -0,31 \pm 0,00054$  va 24-quyosh siklida esa  $r = -0,39 \pm 0,00339$  ga tengligi aniqlandi. Biz bu kuzatuvlarimizda 23-quyosh siklidagi korrelyatsiya 24-quyosh sikliga qaraganda yaxshiroq korrelyatsiyani ko'rsatdi.

#### **Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Lindsay, G. M., Russell, C.T., & Luhmann, J.G. 1995, J. Geophys. Res. 100, 16999
2. Echer, E., Gonzalez, W. D., & Alves, M. V. 2006, Space Weather 4, S06001
3. Xu, D., Chen, T., Zhang, X.X. & Liu, Z. 2009, J. Atmos. Sol.-Terr. Phy. 57, 1500
4. Hildner, E., Gosling, J.T., MacQueen, R.M, et al. 1976, Solar Phys., 48, 127
5. Webb, D. F. 1991, Adv. Space Res., 11, 37
6. Webb, D. F., & Howard, R. A. 1994, JGR, 99, 4201
7. Gopalswamy, N., Lara, A., Yashiro, S., Nunes, S., & Howard, R. A. 2003a, Solar Variability as an Input to the Earth's Environment, ESA-SP, 535, 403

**Али Қушчининг Усмонлилар салтанатининг илмий салоҳиятига  
таъсири**

**Абдуллаев Ботиржон  
ЎзР ФИ ШИ кичик илмий ходими**

**Аннотация:** Уибу тадқиқот иши “Улугбек академияси”нинг етук намояндаси, қомусий олим Али Қушчининг Истанбулга келиши ва бу ерда ўз йўналиши бўйича эришган ютуқлари, хусусан, унинг Усмонлилар салтанатининг илмий салоҳиятига таъсирига багишланади.

**Калит сўзлар:** “Зижс”, астрономия, Али Қушчи, “Иккинчи Птолемей”, Аё София, , математика, Муҳаммад Фотиҳ, Али ал-Қумнатий, Шамс ад-Дин ал-Фанорий, Қозизода Румий, Мирим Чалабий.

Улуғбек вафотидан кейин Самарқанд олимлари Яқин ва Ўрта Шарқ тарафларга тарқалиб кетдилар. Улар ўzlари борган ерларда, таъбир жоиз бўлса, “Улуғбек академияси” олимларининг илм-фан соҳасида эришган ютуқларини кенг тарғиб этдилар.

Хусусан, Али Қушчи (1404, Самарқанд – 1474, Истанбул) орқали математика ва астрономияга оид кашфиётлар, масалан, устози Жамшид Кошийнинг ўнлик касрларга оид ишлари, Улуғбекнинг “Зиж”и Туркияга ва у орқали Европа мамлакатларига ҳам етиб борди.

“Иккинчи Птолемей” номини олган [1] буюк аллома Али Қушчининг ҳаёти ва фаолияти тўғрисидаги маълумотлар асосан умрининг охирги икки йилига оид бўлиб, Усмонлилар даври олимлари томонидан ёритилган.

Али Қушчи яшаган даврни учга бўлиш мумкин: Самарқанддаги ўсмирлик даври, Улуғбек вафотидан кейинги Мовароуннаҳр ва Хурросонда яшаган даври, ва ниҳоят Усмонлилар давлати Султони Муҳаммад Фотиҳ ҳомийлигидаги Истанбул шаҳрида яшаган даври. Олим учун бу уч даврнинг ҳар бири ўзига хос илмий ютуқларга бой бўлгани табиий, албатта. Чунки Али Қушчининг табиий, ижтимоий, тафсир, фиқҳ ва ақоид илмларига оид 30 га яқин асар ёзгани маълум[4: 146-147].

Бу ерда биз баҳс этмоқчи бўлган нарса Али Қушчининг Усмонлилар салтанатидаги дунёвий илмлар, хусусан математика ва астрономия ривожига таъсири қандай эканини ўрганишдир.

Султон Муҳаммад Фотиҳ Али Қушчини олимларга раҳбар ва Аё София мадрасасига бош мударрис этиб этиб тайинлади.

Али Қушчи Истанбулга келиши билан Аё София жомеъсида астрономик кузатишлар олиб боради. Бу кузатишларда у билан бирга Самарқанддан келган ва кўплаб маҳаллий ҳамда хорижий шогирдлар ҳам иштирок этади. Кўп муаллифларнинг хабар беришича Истанбулда астрономик кузатишларни Али Қушчи бошлаб берган.

Ҳозирги замон турк тарихчиларининг эътироф этишича, Истанбулда Али Қушчи келгунига қадар астрономия соҳасида унинг даражасидаги олим мавжуд эмас эди. Лекин, шаксиз халифалик маркази сифатида у ерда ҳар соҳада йирик олимлар фаолият олиб боришгани маълум. Бунга мисол сифатида қуйидаги алломаларни эслашимиз мумкин:

Астроном, Али ал-Қумнатий (ваф. 1397), Қозизода Румийнинг устози Мавлоно Муҳаммад Шоҳ ибн ал-Мавло Шамс ад-Дин ал-Фанорий (ваф. 1435), Улуғбекнинг устози Салоҳиддин Мусо ибн Муҳаммад ибн Маҳмуд Қозизода Румий (1360-1437), географ Аҳмад Ёзувчи ўғли Бижон (15 аср).

Истанбулга Али Қушчи келиши билан бу мамлакатда қисқа муддат ичida астрономия фани соҳасидаги ишлар йўлга қўйилди ва пировард натижада кўплаб атоқли олимлар юзага келди.

Ўша олимлардан бир нечтасини санаб ўтамиз:

1. Синан ад-Дин Юсуф ибн Хидрбек ибн Жалол ад-Дин (ваф. 1486). У Синон Пошо ёки Ҳожа Пошо номлари билан машхур. Математикага иккита ва астрономияга оид учта асари мавжуд[3: 509].
2. Сидий Ҳасан ибн Сидий Али Қумнатий ас-Сивосий (Али Қумнатийнинг ўғли) астроном, битта астрономияга оид асари бор.
3. Лутфуллоҳ ибн Ҳасан ат-Туқотий (ваф. 1494), Мулло Лутфий номи билан машхур, Али Қушчининг шогирди, математик. Битта математикага оид асари мавжуд.
4. Мұхаммад ибн Иброҳим ан-Никусорий (ваф. 1495), астроном. Битта астрономияга оид асар сохиби.
5. Мустафо ал-Қасталоний ар-Румий (ваф. 1495), битта астрономик асари бор.
6. Мұхайдиддин Мұхаммад ибн ал-Қосим ал-Ахвин (ваф. 1499), астрономияга оид иккита асари мавжуд.
7. Ҳаттобий ал-Ҳусайн (ваф. 15 аср охири), математик ва астроном, битта математикага оид асар ёзган.
8. Фасих ад-Дин Мұхаммад ибн Абд ал-Карим Низомий ал-Қўҳистоний (ваф. 1530), Али Қушчининг шогирди, Алишер Навоийнинг астрономия ўқитувчиси, битта математикага иод ва бешта астрономияга оид асар ёзган.
9. Абд ал-Қодир ибн Ҳасан Рӯёний Лоҳижий (ваф. 1519), Али Қушчининг шогирди, тўртта астрономияга оид асари бор.
10. Ҳусомиддин Ҳусайн ибн Абд ар-Раҳмон ат-Туқотий Наълбандзода (ваф. 1519 ёки 1539), физик, битта физикага оид асари бор.
11. Ҳожи Мұхайдиддин Мұхаммад ибн Ҳожи Атможа (15-16 аср), математик, иккита математикага оид асари бор.
12. Мұхаммад ибн Ҳожи Сулаймон Афозода ал-Бурсавий (15-16 аср), астроном, битта асари бор.
13. Пир Маҳмуд Сарофий Афанди (15-16 аср), математик.
14. Мұхайдиддин Мұхаммад Шоҳ ибн Аҳмад Фанорийзода (ваф. 1523 ёки 1547).
15. Мұхаммад ибн Абд ал-Ҳамид ал-Лозикий (15-16 аср),
16. Мұхаммад ибн Котиб Синон ал-Қунавий (15 аср), битта математикага ва саккизта астрономияга оид асар ёзган.
17. Аҳмад ибн Котиб Синон (15 аср), Мұхаммад Қунавийнинг укаси. Астрономияга оид битта асари бор.
18. Шиҳобиддин Аҳмад ибн Абу Бакр Али ибн ас-Саррож ал-Ҳамавий (15 – 16 аср), тўртта астрономияга оид асар сохиби.
19. Муслиҳиддин ибн Синон (15 – 16 аср).
20. Маҳмуд ибн Мұхаммад ибн Қозизода Румий (ваф. 1515), Мирим Чалабий номи билан машхур, Қозизода Румий ва Али Қушчиларнинг невараси. Астрономияга оид ўн иккита асар ёзган.
21. Абу Исҳоқ Абдуллоҳ (15 – 16 аср), Али Қушчининг шогирди, битта математикага доир асари мавжуд.

22. Мустафо ибн Али ас-Салимий (ваф. 1538), битта математикага ва ўн бешта астрономияга оид асар муаллифи.
23. Мұхайдиддин ибн Мұхаммад Пири Раис (1470-1554) [3: 552].

Бу рўйхатдаги олимларнинг кўпи Али Қушчининг бевосита шогирдларири.

Али Қушчининг Истанбулга келиши нафақат усмонли турк фани тарихида, балки дунё фанида мухим бир воқеа бўлди. Чунки усмонли турклар 1453 йили Истанбулни фатҳ этганидан сўнг бироз ўтмай бу шаҳар Шарқ ва Ғарб маданиятларининг учрашув жойи бўлиб қолди.

Маълумки, ўша даврда Европада Шарқ фани ва маданиятига қизиқиши жуда катта бўлиб, Европа Шарқнинг илмий ютуқларини чанқоқлик билан ўзига сингдираётган эди. Истанбулга Италия, Германия, Австрия ва Голландиядан рассомлар, мұхандислар, ҳарбий мутахассислардан ташқари астрономия ва математика мутахассислари ҳам тўпланган эди. Биринчи бўлиб Самарқанд олимларининг ютуқларидан ана ўшалар баҳраманд бўлдилар.

Али Қушчи бош мударрислик лавозимида узоқ фаолият кўрсатмаган бўлса ҳам унинг зиммасига бир шарафли тарихий ролни ижро этиш тушади. У мадрасада астрономия ва математикадан Самарқанд олимларининг, асосан, Коший, Румий ва Улугбекларнинг илмий ютуқлари асосида маъruzalар ўқииди, Улугбек “Зижи”га Али Қушчи ёзган шарҳларини ўқиб беради ва уни тарғиб қиласди. Хусусан, Германиядан ҳисобдон «косистлар» келган эди. Улар “жайб ал-маъкус” - “косинус” деган сўзни кўп ишлатганлари учун Германияда уларни кейинчалик “косистлар” деб атаганлар) Булар Самарқанд олимларининг ютуқлари ҳақидаги маълумот ва хабарларни Европага олиб бордилар<sup>4</sup>. Бу жиҳатдан Али Қушчи Европа илмининг ривожига бевосита ва билвосита, яъни Истанбулда тарбиялаб этиштирган шогирдлари воситасида таъсир кўрсатган деб ҳам айти оламиз.

#### Адабиётлар рўйхати:

1. Ахмедов А. Улугбек Мұхаммад Тарагай. Тошкент. 2011.
  2. Бартольд В.В. “Улугбек и его время”.
- <http://www.alexarapov.narod.ru/Library/bbl02.html>
3. Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII XVII вв.).- М.: Наука, 1983. -Кн. 2.
  4. Тоҳиров Ж. Мовароуннахр калом илмининг ривожланишида Али Қушчининг ўрни. Имом Абу Мансур Мотуридий ва мотуридия таълимоти: ўтмиш ва бугун. (халқаро конференция материаллари тўплами).

<sup>4</sup> Аҳмедов А.А. Улугбек Мұхаммад Тарагай. Тошкент. 2011.Б.43-44.

# **ALI QUSHJI'S ESSENTIAL CONTRIBUTION TO THE DEVELOPMENT OF WORLD SCIENCE.**

**Buronova Nafosat Davronovna**

*Samarkand State Institute of Foreign Languages,  
Samarkand, Uzbekistan, bndrayhon@gmail.com*

**Abstract:** The Great Amir Temur was a skilled commander and one of the most educated people of his time. He had special respect for people of science and created ample opportunities for their free creativity. Mirzo Ulugbek, the beloved grandson of the Great A. Temur, paid a lot of attention to people of science. Mirzo Ulugbek founded such a scientific center in Samarkand - the Samarkand Academy. Famous scientists and thinkers of their time studied and worked at this academy. Under the influence of scientists, carriers of advanced knowledge grew up. Ali Qushji was educated at the Samarkand Academy and left his name in history with its development, the preservation of a rich scientific heritage, his contribution to astronomical science in the Usmanian state, and his great contribution to the development of exact sciences in the West. Ali Qushji's research developed in the fields of theology, grammar, mathematics and astronomy.

The full name of Ali Qushchi, known as the "Knowing Age", is Alauddin Ali ibn Muhammad al-Qushchi. Although his date of birth is unknown, it is believed that he was born in the late 14th and early 15th centuries. He was the son of a man who looked after the birds of falcon named Muhammad in the palace of Ulugbek, so he was given the nickname Qushji by Ulugbek. Left orphaned by his father, he was raised by Uyugbek. Ulugbek calls him "beloved child" in the preface of his "Zij". Ali Qushji received elementary and regional knowledge from Samarkand scientists, and mathematical and astronomical knowledge from Kazizade Rumi and Ulugbek. According to one source, in his youth he disappeared from Samarkand without permission, studied for some time in Kermon with local scientists, and then returned to Samarkand to Ulugbek, apologized and wrote in Kermon about the shapes of the moon. Ulugbek founded his famous observatory in 1424, Jamshid Koshiy died immediately after the work began, and Kazizade Rumi died a few years later. Then Ulugbek entrusts the supervision of the construction of the observatory and astronomical observations to the young scientist Ali Qushji.

Ali Qushji spends most of his life in Samarkand. Only in 1449, Ulugbek was killed, regretting the dispute between the Mirzas, he was forced to gradually stop his scientific work here, but when he managed to obtain permission from them to go on pilgrimage, from here he went to Azerbaijan and stayed in Tabriz for some time. There, the local ruler, Uzun Hassan, invited him to his palace and showed him great respect. We have no information about whether Ali Qushji performed the Hajj or not. But at the end of his journey, he arrives at the palace of the Ottoman Sultan Mohammed II. The Sultan received him very well, kept him with him and invited him to stay in Istanbul for permanent residence. Ali Qushji accepts this offer and, with the permission of the Sultan, returns to Tabriz and brings about two hundred of his relatives and friends to Istanbul. The Sultan welcomes him with great pomp. From the spring of 1472, Ali Qushji was appointed director of the Hagia Sophia madrasah with a daily payment of 200 coins. His

relatives and friends are also assigned to appropriate tasks. Although Ali Qushji's year of birth is not clear, the date of his death is very clear. This date corresponds to December 17, 1474 AD 878 AH, given in these Persian verses by his daughter's granddaughter Miram Chalabi. He was buried in the Abu Ayyub Ansari Mausoleum in Istanbul. As Hussein Efendi Ayvansarayi reports in his work, Ali Qushji was buried in the harem of the Ayup Sultan mausoleum. The tomb existed until 1230-1235, then disappeared.

Although the scientific works of Ali Qushji did not gain the fame of Ulugbek "Zija", his works occupy an extremely important place in the history of science. He was the last of the great scientists in the field of exact sciences that flourished in Movarunnahr in the Middle Ages, and the first and most eminent scientist of the Ottoman Turks. The conqueror Sultan Mehmed Ali admires Qushji's knowledge, offers him many services and asks him to stay in Istanbul. Ali Qushji accepted this request from Fatih, who wanted to gather together with him famous scientists and artists of the East and West. Fatih says that this request can only be fulfilled after fulfilling his ambassadorial duties. Ali Qushji returns to Tabriz after fulfilling his ambassadorial duties and was received with respect everywhere. Uzun asks Hassan for permission and tells him to return to Istanbul. After admission, he moves to Istanbul.

Modern Turkish historians admit that before Ali Qushji arrived in Istanbul, there was no such great scientist in the field of science. A. A. Adivar says in his work: "The bright period of the Ottoman Turks from the point of view of mathematics and astronomy begins with Alaeddin Ali bin Muhammad Qushji (Ali Kushchu), who came to Istanbul from Turkestan during the Fatih period." With the arrival of Ali Qushji in Istanbul, work in the field of astronomy began in this country in a short period of time, as a result of which Miram Chalabi and other famous scientists appeared. But since he was in Istanbul for a short time, it was not possible to carry out major work here. However, this short period and his arrival in Istanbul became an important event not only in the history of Ottoman-Turkish science, but also in world science. Because soon after the Ottoman Turks conquered Istanbul in 1453, the city became a meeting point between Eastern and Western cultures. It is known that at that time in Europe there was great interest in the science and culture of the East, and Europe greedily absorbed the scientific achievements of the East. In addition to artists, engineers, and military specialists from Italy, Germany, Austria and the Netherlands, specialists in the field of astronomy and mathematics also gathered in Istanbul. In particular, scientists from Germany took advantage of the first achievements of Samarkand scientists. Thus, news of Ulugbek and his "Zij" reached Europe at the end of the 15th century AD. The great merit of Ali Qushji is great for this. Ali Qushji conducted scientific discussions with the Sultan. He even accompanied the Sultan on his campaign against Uzun Hasan. During the trip, he wrote a historical work about this march. This work, written in Ali Qushji's own hand, was combined with a work entitled "Fatih, Muhammadiyah" and placed in his library.

Ali Qushji's works are as follows. "Risola fi-l-hisab" ("Treatise on Accounting"), "Risolai Kusur" ("Treatise on Fractions"), "Risola at-Fathiya" ("Treatise on Victory"), "Risola al-Muhammadiyya fil- hisab" ("On calculation"), ("Treatise on measuring the shape of the crescent"), "Sharhi Miftah al-ulumi Taftazani" ("Taftazani's commentary on

Miftah al-ulum"), "Risala dar ilmi hayat" ("Astronomical treatise on science"), "Sharkhi "Zij Ulugbek" ("Commentary on "Zij" Ulugbek"), "Sharkhi risolai "Tuhfay shahiya" ("Commentary on the treatise "The Royal Gift")", "Sharkhi risolai "Sullam as-samo" ("Commentary on the brochure "Sullam as-samo")", . "Khitoinama", "Risolai Mantik", "Sharkhi Tajvidi Khoja" ("Commentary on "Tajvidi" Khoja"), "Risola al-Mufradiyah", "Mahbub ul-Hamail fi kashfil masa'il" ("About those who love to solve problems"), "Risala Mutaalliqa bi Kalimat at-Tahwid" ("Treatise related to the word of monotheism"), " Risala tatallaq bi kuya" ("Agreement on Society"), "Sharh ar-risala al-Azudiyya" ("Commentary on the treatise "Al-Azudiyyah"), "Al-unut wa zawahir fi nazmil jawahir", "Risala al-mujas fit-tibb" ("Wonderful treatise on medicine"), "Sharh risola al-fiqh" ("Commentary on the treatise on fiqh"), "Risala fi hall al-misal al-handasa" ("Treatise on solving a problem related to geometry").

His manuscripts are in the University of Oxford, the Tehran University Library, the Leiden University Library, the Paris National Library, the libraries of St. Petersburg, Dushanbe, Mashhad, Istanbul and England, the Imam Reza Club in Mashhad, the Oxford University Library, the British Museum, the Cambridge University Library, the German the state in Berlin is stored in the Hagia Sophia library and in Istanbul, the Academy of Sciences of Uzbekistan and other famous libraries in the world.

**Summary.** During his life, the scientist worked fruitfully. Ali Qushji's works on astronomy and mathematics were also taught as textbooks in madrasas. Ali Qushji not only wrote works related to astronomy and mathematics, he also wrote works in the field of theology and philosophy. The scientist, who first worked in the Timurid palace, continued his work in the Ottoman Empire. The scientist was the leading scientist of two great kingdoms. One of the great merits of Ali Qushji is that he preserved the scientific heritage of Mirza Ulugbek and his time and introduced it to the Western world. He contributed to the development of exact sciences on Ottoman soil. Ali Qushji's entire life and work was devoted to science. Thanks to his works and collaboration with his teacher Ulugbek, he forever inscribed his name on the pages of history.

## **Али аль-Кушчи и его Астрономический трактат**

**А.Солеев, Т.Э.Буриев**

Одним из видных ученых эпохи тимуридов был Али аль-Кушчи (1402-1474), прозванный Птолемеем Востока за великие заслуги в науке. Благодаря ему мир узнал о выдающемся научном подвиге Мирзо Улугбека.

Его полное имя – Алауддін Абу аль-Касым Алі ибн Мухаммад аль-Кушчи. Родился и вырос он в Самарканде. Научная деятельность охватывала, в основном, математику и астрономию. Знаниям по математике и астрономии он обучался у корифеев наук своего времени – Казизода аль-Руми и Мирзо Улугбека. В 1424 году когда Улугбек последний приступил к строительству своей известной

обсерватории, куда привлек и Али аль-Кушчи для управления строительными работами, осуществления астрономических наблюдений. Известно также, что он был его придворным библиотекарем.

Однако в 1449 году, после убийства Мирзо Улугбека его обсерватория была подвергнута погрому, а все созидавшие здесь учёные были разогнаны. Создававшееся годами книгохранилище было разграблено и расхищено. Это обстоятельство вынудило Али аль-Кушчи приостановить научную работу и переселиться в Тебриз (Персия). В 1465 году он переезжает в Константинополь и возглавляет научную школу при медресе Айя-София. С весны 1472 года Али аль-Кушчи назначается главным мударрисом Медресе Айя София и управляющим одноименной мечетью. Несмотря на то, что в Константинополе учёный прожил всего лишь два года оставшейся жизни, этот отрезок времени был насыщен активной научной и образовательной деятельностью. В частности, будучи верным учеником Улугбека, Али аль-Кушчи сохранил его ценный труд «Зиджи Гураган» или «Зидж Улугбека» («Каталог звездного неба Улугбека»), размножил его в многочисленных экземплярах, перевел на тюркский язык и написал к нему комментарии. Таким образом, впоследствии этот труд стал достоянием учёных Европы и Азии. Источники свидетельствуют, что Али аль-Кушчи написал комментарии к «Зиджи Гурагани» Улугбека а также оставил после себя около 30 трактатов по математике, астрономии, языкоznанию, опубликовал астрономический трактат Улугбека, комментировал сочинения своих учителей – Казизода аль-Руми и Мирзо Улугбека. Рукописи этих трудов хранятся ныне в различных книжных фондах и библиотеках ведущих научно-исследовательских институтов планеты.

Всю свою сознательную жизнь и творчество учёный посвятил науке. Но самыми познавательными и плодотворными для него были годы, проведенные им вместе с Мирзо Улугбеком в самаркандской обсерватории, благодаря чему его имя золотыми буквами вписано в летопись истории наук.

Али Кушчи приобрел мировое признание как яркое светило самаркандской астрономической школы, ближайший соратник и ученик Мирза Улугбека.

Самое главное — он успел подготовить многочисленных последователей самаркандской школы. Не случайно, что он считается основоположником оттоманской астрономической и математической научных школ. Благодаря Али аль-Кушчи «Зидж» Улугбека через Стамбул попал в Европу и получил всемирную известность.

Астрономический трактат «Рисолаи дар фалакиёт» написан на таджикско-персидском языке в 841 году хиджры, т.е. в 1438 году нового стиля, («сочинение были завершены в начале месяца мухаррам 841 –го года хиджры»). Трактат посвящен разъяснению теоритической части «Зиджи Курагани» Улугбека.

Одним из первых изучавших научное наследие Али Кушчи в Узбекистане был академик И. М. Муминов. В 1968 году был издан узбекский перевод трактата издательством в Ташкенте.

Также изучение научного наследия Али Кушчи были проведены в Самаркандском Университете под руководством профессора А.Э.-А Хатипова. Старшим преподавателем СамГУ А.У.Усмановым «Трактат об астрономии» Али аль-Кушчи был переведен на русский язык и в 1970 году издан издательством Университета. Трактат состоит из введения, двух разделов и заключения.

Во введении излагаются вещи (определения и понятия), которые необходимо изучить прежде, чем изучать астрономическую науку.

Введение подразделяется на две части. Первая часть содержит понятия и определения относящиеся к геометрическим задачам. Даётся определения основных геометрических понятий: точки, линии, плоскости, поверхности, тело и основные геометрические фигуры. Всё это приводится в духе «Начал Евклида».

Вторая часть введения относится к вопросам природы. Приводится определение тел, движения небесных тел и ее основные свойства. *Например «если тело складывается из разных по природе и состоянию вещей, его называют составным телом, в противном случае - простым» телом. Простое тело делится на небесное и элементарное, а составное тело делится на полное и неполное. Небесное движение делится на простое и на переменное. Простое движение таково, что каждая точка, действующая с таким движением, на окружности на окружности небесного центра (центра небосвода) за равные промежутки времени образует равные углы.*

*Небесное движение ещё делится на единичное (единственное) и составное. Движение, происходящее только от одного неба является единичным движением и движение, происходящее от более одного неба – составным.*

Первый раздел трактата состоит из шести глав, в которых охарактеризованы состояния вселенной.

Первая глава –«об общем количестве (числе) небес и их положении. Необходимо знать, что вся вселенная есть шар, центром которого является Земля. Всего девять небес (небесных сфер), из которых каждая, как оболочка луковицы, входит во внутрь другой и глубинная поверхность каждой составляет выпуклую поверхность одной сферы (небес), входящей в нее.

Первая сфера (из девяти небесных сфер) является сферой всех сфер (небом всех небес). Она содержит в себе все сферы. Ее также называют также величайшей сферой или небесным атласом.

Вторая – сфера зодиакальных созвездий, все неподвижные небесные светила находятся в ней. Третья - сфера Сатурна; четвертая – сфера Юпитера; пятая – сфера Марса; шестая – сфера Солнца; седьмая – сфера Венеры; восьмая – сфера Меркурия; девятая – сфера Луны.

Сфера Луны была принята за начало отсчета всех сфер. Поэтому сферу всех сфер считали девятой сферой. В девятой сфере находятся четыре основных элемента (сфер), одним из которых является сфера Земли.

Вторая глава - о больших и малых известных кругах. В главе приводится описание десяти больших известных кругах и их расположение в небесной сфере. Первая из известных больших кругов есть пояс величайшей сферы. Его также называют небесным экватором. Его два полюса называются полюсами вселенной (полюсами мира), из них полюс расположенный в сторону созвездия «Большой медведицы», называется северным полюсом, а другая- южным полюсом.

Второй из известных больших кругов есть пояс сферы неподвижных светил – пояс зодиакальных созвездий, его также называют эклиптикой. Он с экватором пересекается в двух точках. Эти две точки называются точками равноденствия – весеннего и осеннего.

Третья глава о восьмой и девятой сферах и о положении неподвижных звезд на звездном небе. Четвертая и пятая глава о формах планет и движения сфер планет. Шестая глава о положении планет и является основной частью первого раздела. Эта глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе излагается вопросы о положении планет по долготам. Его называют долготой или же эклиптической долготой (это одна из эклиптических координат светила) светила. Она являясь дугой пояса зодиакальных созвездий, находится между началом созвездия Овен и местом светила, расположенного в продолжительности порядка знаков Зодиака.

Доказывается, что у каждой из планет имеются несколько сфер и приводится подробное описание всех сфер планет солнечной системы и их движения.

Во втором параграфе излагается вопросы о положении планет по широте.

Третий параграф посвящен вопросам положении планет по долготе и по широте.

В четвертом параграфе излагается вопрос о положении каждого из планет относительно другой, в том числе положение Луны относительно Солнца. А именно: Луна является плотным и гладким телом. Так как она расположена против Солнца, то она освещается Солнцем. Луна имеет форму шара и меньша Солнца, около половины ее, обращенная к Солнцу, освящена, почти половина является темной. Приводится описание новолуния, полнолуния, солнечного и лунного затмения, имеются рисунки расположения планет при этих явлениях. Даны расчеты и таблицы о движении звезд и планет, малых (перигей), больших (апогейных) расстояниях, положении каждой планеты в пространстве, удалении Солнца, а также вопросы лунных и солнечных затмений очень четко, правильно и научно, по результатам наблюдений, произведенных в обсерватории Улугбека.

Во втором разделе излагается вопросы о строении формы Земли, деления ее на климатические пояса и вещи, которые будут необходимыми о форме Земли в соответствии с положением верхних светил (планет). Этот раздел состоит из одиннадцати глав. В первых восемь глав излагаются вопросы о строении Земли и о климатических поясах, об особенностях земного экватора, об особенностях наклонных горизонтов и ее частей, особенности местностей, о восхождении зодиакальных созвездий и о видим

ом смещении светила, его места восхода и захода.

Девятая глава о летоисчислении, где, месяце и его части, состоящие из суток и часов. Поскольку Солнце и Луна являются видимыми и более яркими среди всех небесных тел, годовое вращение отнесли к вращению (периоду)

Солнца. Течение одного кругооборота (вращения) Солнца считали одним годом. Вращение Луны отнесли к кругообороту диска Луны (фазы Луны), т.е. отрезок времени выделения Луны от положения соединения с Солнцем или быть молодой луной (месяцем, полумесяцем) считали одним месяцем. Поскольку двенадцать месяцев подходит близко к одному кругообороту Солнца, то некоторые двенадцать месяцев считали одним годом, это называется лунным годом (летоисчислением) и другой называется солнечным годом (летоисчислением). Т.к. один кругооборот (вращение) диска Луны близка времени прохождения Солнца через отдельные знаки Зодиака, этот промежуток времени считали одним месяцем. Это называется солнечным месяцем, другой называется лунным месяцем. Значит год и месяц является солнечным и лунным.

День и ночь (сутки) бывают двоякими: одни действительные (истинные) другие средними сутками. У астрономов Малой Азии и Запада от одного полудня до другого полудня. У китайских и уйгурских астрономов от одной полуночи до другой полуночи и в обоих пониманиях величина сутки в зависимости от изменения горизонтов не изменяется. У арабов и мусульман сутки с начала ночи до начала другой ночи.

Средними сутками являются величиной одного кругооборота самого большого круга величайшей сферы в среднем движении Солнца, состоит из пятидесяти девяти минут, восьми секунд и двадцати терции.

Каждая из средних и истинных суток делят на двадцать четыре равные части, эти части называются равными или умеренными часами.

Начало года, в котором происходит какое-то большое событие берут за начало летоисчисления, времена появления других событий сохраняют посредством того начала и его называют «эрой». Эта эра по пониманиям каждой народности отличается одна от другой. Из них известными являются мусульманская эра (хиджры), иранская эра, греческая эра и меликшахская эра. В трактате приводится название двенадцати месяцев и количество дней каждого месяца Иранской и меликшахской эры.

Десятая и одиннадцатая главы об измерителе тени и о вещах связанных с ней и об определении меридиана и направления киблы.

В заключении определяются расстояния и размеры небесных тел (планет). Как выяснено с помощью наблюдения и вычисления (расчетов), окружность Земли, т.е. большая окружность, которая предполагается охватившей Земли, являлась восемь тысяч фарсанг – каждый фарсанг – три мили, каждая миля – три тысячи аршин, каждый аршин – тридцать две пальца, каждый палец (перст) – размер ширины шести средних ячменей, ширина каждого ячменя – размер шести волосов гриды коня. Диаметр Земли – две тысячи четыреста сорок пять фарсангов. Площадь обитаемой части земной поверхности – четыре миллиона шестьсот семьдесят шесть тысяч девятьсот сорок квадрат фарсангов.

Диаметр Солнца – семнадцать тысяч пятьсот тридцать восемь фарсангов. Его вместимость (объем) к Земле (относительно Земли) в триста двадцать шесть раз.

Диаметр Луны – семьсот двадцать шесть фарсангов. Ее вместимость около одной шестой части одной седьмой вместимости Земли.

Диаметр – Сатурна – четырнадцать тысяч пятьсот девяносто шесть фарсангов, его вместимость к Земле сто восемьдесят восемь раз.

Диаметр Юпитера – четырнадцать тысяч пятьсот девяносто шесть фарсангов, вместимость к Земле сто восемьдесят восемь раз.

Диаметр Марса - семьсот девяносто пять фарсангоов и его объем к Земле три раза.

Диаметр Венеры – девятьсот шестьдесят фарсангов и ее объем около одной третьей части одной девятой объема Земли.

Диаметр Меркурия – сто девять фарсангов его объем около одной части от двенадцати тысячи семисот шестидесяти девяти частей Земли.

Самое большое из наблюдаемых неподвижных светил к Земле двести двадцать раз, самое малое из наблюдаемых неподвижных светил к Земле двадцать три раза.

В своих астрономических работах Али аль-Кушчи обсуждал возможность суточного вращения земли вокруг своей оси, полагая, что она не противоречит данным опыта и отвергая использование натурфилософии Аристотеля для решения этой проблемы.

Али аль-Кушчи в своем труде «Трактат по астрономии» дал расчеты и таблицы о движении звезд и планет, малых (перигей), больших (апогейных) расстояниях, положении каждой планеты в пространстве, удалении Солнца, а также вопросы лунных и солнечных затмений очень четко, правильно и научно, по результатам наблюдений, произведенных в обсерватории Улугбека

Астрономический трактат , а также другие трактаты Али аль-Кушчи были широко известны в научных кругах не только Мавераннахра, но и Европы, Ближнего и Среднего Востока и послужили основой для дальнейшего развития выдвинутых Али аль-Кушчи исследовательских направлений. Также данные труды сыграли заметную роль в преподавании математики и астрономии в странах Среднего и Ближнего Востока в XVI-XVII веках.

Использование фактов и научных результатов из истории математики Средней Азии в процессе обучения оживляют преподование и повышают интерес учащихся к математике, точным наукам и технике, расширяют их умственный кругозор. Помогают им лучше уяснить связь между различными разделами математики и тем самым способствуют, развитию учащихся трудолюбия.

## MUNDARIJA

<b>Рустам Халмуродов.</b> Али Қушчи – Мирзо Улугбек илмий мактабининг буюк элчиси	<b>3</b>
<b>I. SHO'BA. MATEMATIK ANALIZ</b>	
<b>Abdullayev J.I., Ergashova Sh.H.</b> Eigenvalues of the Schrödinger operator corresponding to a system of three fermions on a one dimensional lattice	<b>5</b>
<b>Absalamov A.T.</b> Dynamics of a Cooperative Discrete System with order one in the Plane	<b>11</b>
<b>I. N.Bozorov, A. M. Khurramov, M. I.Muminov.</b> Existence conditions of eigenvalues and virtual levels for a two-particle Hamiltonian on a $d$ -dimensional lattice	<b>13</b>
<b>E.B.Dilmurodov.</b> About a regular point of the lattice spin-boson model with at most two photons	<b>20</b>
<b>I.A.Ikromov, A.R.Safarov, O.T.Mamatkulov.</b> Oscillatory integrals for Mittag-Leffler functions with two variables	<b>24</b>
<b>Ikromova D.I.</b> Estimates for convolution operators with convex phase function.	<b>29</b>
<b>K.Kuliev, M.Eshimova, G.Kulieva, T.Turaqulov.</b> About best constants for Hardy type inequalities with some weights	<b>31</b>
<b>Sh.Kurbanov, S.Dustov.</b> Some Spectral Properties of The Generalized Friedrichs Model under Rank One Perturbation.	<b>36</b>
<b>S.N.Lakaev, M.O.Akhmadova.</b> Spectral properties of two-particle Hamiltonians with interactions up to next-neighboring sites	<b>43</b>
<b>S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov, M.O.Akhmadova.</b> Spectral properties of discrete Schrödinger operators with interactions up to next-neighboring sites	<b>46</b>
<b>M.I.Muminov, I.A.Mukhammadiev.</b> Existence conditions for eigenvalues of the lattice Schrödinger operator	<b>50</b>
<b>M.A.Pardabaev, F.M. Almuratov.</b> Asymptotics for discrete spectrum of Schrödinger operator in one dimensional lattice	<b>52</b>
<b>T.Rasulov.</b> Spectral relations for the closure of an unbounded operator matrices	<b>57</b>
<b>U.A.Rozikov, E.T.Aliev.</b> On dynamical systems of a rational function	<b>61</b>
<b>Absalamov T, Fayzullayeva B, O'ktamova S.</b> Разрешимость нелинейного бисингулярного интегрального уравнения в пространстве $H_{\varphi_1 \psi_1}^{p, \alpha_1} + H_{\varphi_2 \psi_2}^{p, \alpha_2}$	<b>63</b>
<b>Аиурова З.Р., Ибрагимов А.</b> Об одной оценки функции Карлемана для бигармонических функций, определенных в $D \subset R^3$ .	<b>66</b>

<b>Болтаев А.Т, Кудратова Д.</b> Связанные состояния двухчастичного оператора типа Шредингера, ассоциированного с $s-d$ обменной моделью на решетке	72
<b>И.А. Икромов, А.М. Баракаев.</b> Об ограниченности максимальных операторов для выпуклых функций, не имеющих конечный линейный тип	74
<b>Расулов К., Гадаев С.</b> Сепаратно вещественно аналитические функции двух переменных	79
<b>Т.М. Тұхтамуродова.</b> Детерминант и собственное значение некоторого частичного интегрального оператора с вырожденным ядром.	81
<b>Abduxakimov S.</b> Panjaradagi bir zarrachali diskret Schrödinger operatori xos qiyatlarining mavjudligi	83
<b>Bahronov B.I.</b> Panjaradagi uch zarrachali sistemalarga mos model operatorning muhim spektrining joylashuv o'rni	86
<b>Mardiyev R, Sayfiddinova Z.</b> Uzluksiz funksiyalar fazosida siljishli singulyar integral operatorlarning yarim nyuterlik shartlari	91
<b>M.Muminov. Z.Asrorova.</b> Uch o'lchamli panjaradagi uchta bir xil zarrachali Shredinger operatori disket spektri haqida	92
<b>A.J. Jo'raqulov.</b> Regulyarlashtirilgan o'lchovning bahosi haqida	94
<b>S.S.Khudayarov.</b> Quadratic stochastic processes of permutation matrix	100
<b>Z.I. Muminov, F. Madatova.</b> On the Discrete Spectrum of the One-dimensional Discrete Schrödinger Operator Depending on Three Parametres	104
<b>II. SHO'BA. ALGEBRA VA GEOMETRIYA</b>	
<b>F.G.Abdullayev, C.D.Gün.</b> Bernstein-Nikolskii type inequalities for algebraic polynomials in regions with cusps	113
<b>Aiken Kazin, F.Mashurov.</b> Note on Binary Leibniz Algebras	114
<b>E. T. Aliev.</b> On $p$ -adic dynamical systems of a rational function	115
<b>Batkhan A.B, Khaydarov Z.Kh.</b> Formal stability investigation for Hamiltonian system with three degrees of freedom	118
<b>G'I.Botirov, Z.E.Mustafoyeva.</b> Translation-invariant Gibbs measures for the potts model on the Cayley tree	127
<b>U.U. Jamilov, N. R.O'roqova.</b> On dynamica of a quadratic operator	132
<b>G.S.Makeev.</b> Cycles and extensions in E-theory	134
<b>G.S.Makeev.</b> Roe functors preserve homotopies	135
<b>Mizomov I.E.</b> New example of Koszul Calabi-Yau algebra of global dimension 5.	137
<b>Ro'zimurodov X.X.</b> On an upper bound of the norm of a matrix basis of an algebraic lattice	140
<b>Ekrem Savaş.</b> On $q$ - lacunary strong invariant summability of weight $g$	145

<b>Норов Г.М., Худайбердиев О.Ж., Рахматов С.Х., Мехмонов М.Р.</b> Построение выпуклой формы траектории борта карьера методом кубических сплайнов	<b>146</b>
<b>E.Q.Qurbanov, A.SH.Shamshiev.</b> Sferik ko‘pburchak yuzalarini hisoblash usullari va sferik tasvirlar	152
<b>A.Sh.Shamshiev, E.Q.Qurbanov.</b> Proyektiv tekislikdagi nuqtaning affin va proyektiv koordinatalari orasidagi bog‘lanishlar	158
<b>Usmanov S.E, Abdanov S.Q.</b> Ba’zi singulyar sirtlar haqida	164
<b>III. SHO‘BA. DIFFERENTIAL TENGLAMALAR VA MTEMATIK FIZIKA</b>	
<b>Akhundov A.Ya.</b> On an inverse problem for an elliptic equation	166
<b>Ato耶ev D D.</b> Inverse problem of determining the kernel in an integro - differential equation of parabolic type with nonlocal conditions	167
<b>Baltaeva I.I, Azimov D.</b> Bintegration the combined kdv-nkdv equation with a self-consistent source	170
<b>B.Babajanov, F.Abdikarimov, Z.Shakirov.</b> Soliton wave solutions of the fractional korteweg-de vries equation with additional term	172
<b>D.K. Durdiev, Z.R. Bozorov, A.A. Boltayev.</b> Convolution kernel determination problem in the third order Moore-Gibson-Thompson equation	175
<b>D. K. Durdiev, H.H. Turdiev.</b> Initial boundary value problems for time fractional wave equation with generalized fractional derivative	176
<b>Ermamatova F.E.</b> Carleman’s formula for the generalized Cauchy-Riemann system in a bounded domain	178
<b>Z.K.Eshkuvatov, G.Mamatqulova, Kh.Mamatova.</b> Comparative analysis of Homotopy Perturbation Method and Adomian Decomposition Method for Solving Nonlinear Fredholm Integral Equations of the Second Kind	180
<b>Z.K.Eshkuvatov, G.Mamatqulova, Kh.Mamatova.</b> Homotopy perturbation method for solving nonlinear Fredholm integral equations of the second kind	181
<b>J.J.Jumaev, Z.R.Bozorov.</b> Inverse problem of determining the kernel of integro-differential fractional diffusion equation in bounded domain	181
<b>Khasanov A.B., Eshbekov R.</b> About a nonlinear Hirota equation with finite density	184
<b>M.M.Khasanov, O.Y.Ganjaev, Sh.Sh.Omonov</b> Solitary and periodic wave solutions of the loaded modified Burgers–KdV equation by functional variable method	189
<b>M.M.Matyakubov.</b> Integration of the type loaded second-order Korteweg-de Vries equation with a free term independent of the spatial variable	191

<b>Г.У.Уразбоев, М.М.Хасанов, О.Б.Исмоилов.</b> Интегрирование объединенного уравнения мКдФ-нмКдФ в классе периодических функций	<b>194</b>
<b>М.Муминов, Т.Ражабов.</b> Condition for the existence of a periodic solution of a differential equation with a piecewise constant argument	<b>196</b>
<b>Ж.И. Абдуллаев, А.М. Халхужаев, Х.Ш.Махмудов.</b> Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке	<b>202</b>
<b>З.Р.Ашурова, Жураева У.Ю.</b> Некоторые свойства функции Карлемана	<b>208</b>
<b>Ашурова З.Р, Жураева Н.Ю. Маллаева Ф.У.</b> Некоторые свойства функция Карлемана бигармонических функций	<b>219</b>
<b>А.Х.Бегматов, А.С.Исмоилов.</b> Задача интегральной геометрии по семействам сфер в пространстве	<b>228</b>
<b>Б.И.Исломов, А.З. Турдибоев.</b> Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа в бесконечной цилиндрической области, когда нагруженной часть уравнения содержит след оператора дробного порядка в смысле Капuto	<b>231</b>
<b>Ишанкулов Т., Маннонов М.</b> Устойчивость решения задачи продолжения полианалитических функций	<b>239</b>
<b>Г.К.Кылышбаева.</b> Краевая задача с нелокальным граничным условием второго рода для смешанной уравнения третьего порядка в прямоугольной области	<b>242</b>
<b>Ж.А.Мардонов.</b> Задача Коши для неоднородного Лапласова поля	<b>245</b>
<b>М. М.Матякубов.</b> Периодические решения уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником возникающего в артериальной механике	<b>251</b>
<b>О.Э.Мирзаев.</b> Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке	<b>254</b>
<b>Муминов У.Б.</b> Интегрирование дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом	<b>263</b>
<b>М.Э.Муминов_З.Х.Очилов.</b> О точнее решения задача Радона	<b>267</b>
<b>Рустамов С.У.</b> О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана с кватернионным параметром	<b>268</b>
<b>Сатторов Э.Н., Актамов Х.С.</b> Представление постоянного магнитного поля в виде аналога обобщенного интеграла типа Коши в ограниченной области	<b>272</b>
<b>Сатторов Э.Н, Пулатов О.У.</b> Регуляризация решения задачи Коши для гравитационного поля	<b>273</b>
<b>Собиров Ш.К.</b> Решение задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений с дополнительным членом	<b>275</b>
<b>Суяров Т Р.</b> Прямая задача для двумерного волнового уравнения с дробным производным по времени Римана-Лиувилля	<b>278</b>

<b>Ф.Р.Турсунов.</b> Задачи Коши для уравнения Лапласа	<b>281</b>
<b>Г.У.Уразбоев, И.И.Балтаева, Ш.Э.Аманазарова.</b> Обратная задача рассеяния для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником	<b>284</b>
<b>А.М.Халхужаев, Ж.Х.Боймуродов.</b> О связанных состояниях системы трех частиц на решётке	<b>287</b>
<b>Хасанов А.Б., Жураева У.Ю.</b> О некоторой теореме типа Фрагмена-Линделёфа для бигармонических функций	<b>289</b>
<b>Хасанов А.Б., Нормуродов Х., Рахматуллаева Н.Ш.</b> Интегрирование нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе периодических функций.	<b>295</b>
<b>Д.С.Шодиев.</b> О регуляризации решение задачи Коши для бигармонического уравнения на плоскости	<b>304</b>
<b>Юлдашева А.В.</b> Периодическая модель волнового уравнения	<b>308</b>
<b>Т.К.Юлдашев, Ф.Д.Рахмонов.</b> Классическая разрешимость смешанной задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с квадратом оператора Баренблатта-Желтовой-Кочиной	<b>312</b>
<b>Яхшимуратов А.Б, Матёкубов О.М, Хусаинов И.И.</b> Второй регуляризованный след для задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях	<b>319</b>
<b>Яхшимуратов А.Б, Матёкубов О.М, Маткаримов С.А.</b> Регуляризованный второй след для задачи Штурма-Лиувилля с общими граничными условиями	<b>321</b>
<b>J.I. Abdullayev, A.M.Toshturdiyev.</b> Slindrik potensialli ikki fermionli Shryodinger operatorining invariant qism fazodagi xos qiymatlari	<b>324</b>
<b>T. Ishankulov, N.A.Mukaramxodjayeva, M. Mannonov.</b> Bir jinsli bo‘lмаган polianalitik tenglama yechimini davom ettirish	<b>331</b>
<b>З.Маликов, К.Зулқуфорова.</b> Уч ўлчовли соҳада эллиптик типли танегламалар системаси учун Коши масаласининг регуляризацияси	<b>342</b>
<b>Muxtarov Ya. Miyassarov A.</b> Bir jinsli differential tenglamalar sistemasining traektoriyalarini tadqiqlash	<b>344</b>
<b>Muxtarov Ya, Obilov H.</b> Operator usuli yordamida differential tenglamalar sistemasini integrallash	<b>348</b>
<b>Хасанов И.И.</b> Начально-краевая задача для адвекции-дисперсионного уравнения дробного порядка	<b>350</b>
<b>У.Д.Дурдиев, А.А.Рахмонов.</b> Обратная задача для уравнения колебания балки с дробным оператором	<b>352</b>
<b>Baltaeva I., Khasanov M. M., Rakhimov I.D.</b> A generalized $(G'/G)$ -expansion method for the combined mKdV-nmKdV equation	<b>353</b>

<b>Sh. Kadyrov, A. Orynbassar.</b> Finite Continued Fraction Approach to Solving Second Order Difference Equations with Variable Coefficients	<b>355</b>
<b>IV. SHO'BA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA</b>	
<b>A.А.Джалилов, С.Х.Абдухакимов.</b> Предельные теоремы для критических отображений окружности с числом вращения алгебраического типа	<b>357</b>
<b>Шамиев А.</b> Аппроксимация случайных полей операторами Джексона равномерный	<b>361</b>
<b>Абдуллаев У, Остонов К.</b> Тасодифий жараёнларнинг характеристика ва хоссалари	<b>368</b>
<b>Q. Ostonov, R. Tilavov.</b> O'rta osiyolik alloma Ali Qushchining hayoti va matematika bo'yicha asarlari	<b>375</b>
<b>Quljonov O'.N., Abduraximova D.</b> Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi	<b>379</b>
<b>H.Qurbanov, O'.Bozorova.</b> M M 1 N sistema bandlik davri va bu davrda xizmat ko'rsatilgan talablar sonining birgalikdagi taqsimoti haqida	<b>383</b>
<b>H.Qurbanov, O'.Bozorova, D.Absalamova.</b> Kutish joylari soni chekli bo'lgan absolyut imtiyozli xizmat ko'rsatish sistemasining bandlik davri taqsimoti	<b>385</b>
<b>Rasulov X.R.</b> Uzluksiz vaqtli volterra kvadratik stoxastik operatorining analitik va sonli yechimlari hamda qo'zg'almas nuqtalari haqida	<b>388</b>
<b>K.O.Sadikov, G.T.Aytjanova.</b> Ba'zi tengsizliklarni isbotlashning Lagranj ko'paytuvchilari usuli	<b>395</b>
<b>V. SHO'BA. HISOBBLASH MATEMATIKASI VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH</b>	
<b>Khuzhayorov B.Kh., Eshdavlatov Z.Z.</b> Numerical Solution of Anomalous Solut	<b>402</b>
<b>Mukhiddin I. Muminov, Zafar Z. Jumaev.</b> On the approximation algorithms for solving Bernoulli differential equations using piecewise constant argument	<b>405</b>
<b>Бреев А.А.</b> Описание системы моделирования и проектирования прикладных решений	<b>408</b>
<b>Бурнашев В.Ф, Кайтаров З.Д.</b> Численное исследование многофазной фильтрации в деформируемых пористых средах	<b>413</b>
<b>Джиянов Т.О, Зокиров М.С.</b> Релаксационная модель фильтрации жидкости в пористой среде	<b>420</b>
<b>Корниенко Д.В.</b> Описание системы моделирования и проектирования прикладных решений	<b>422</b>

<b>Никулин А. В.</b> Описание системы моделирования и проектирования прикладных решений	<b>426</b>
<b>Попов Д.И.</b> Моделирование механизма «Интеркампани»	<b>432</b>
<b>Эрмаматова З.Э.</b> Численное решение задачи Коши для уравнения Гельмгольца	<b>439</b>
<b>Bakoev M.T, Sharipova M.O.</b> Ishlab chiqarish funksiyasi uchun deterministik model orqali samadorlik baholash	<b>440</b>
<b>Fayziev B.</b> G'ovak muhitda modda ko'chishi gibrild modelini sonli tadqiq etish	<b>441</b>
<b>Ravshanov N, Rustamov M.J.</b> Atmosferada ifloslantiruvchi moddalar tarqalish jrfenini modellashtirish	<b>451</b>
<b>Наврузов К., Абдикаримов Н.И.</b> Математическое моделирование гидродинамических сопротивлений при колебательном течении упруговязкой жидкости в плоском канале	<b>454</b>
<b>VI. SHO'BA: MIRZO ULUG'BEK MAKTABI VA ALI QUSHCHI ILMIY MEROSI VA ULARNING ASTRONOMIYA FANINING RIVOJLANISHIDAGI O'RNI</b>	
<b>E.Babayev, Sh.Ehgamberdiev.</b> Great Turkic astronomers Tusi, Ulugh Beg and Ali Qushji and their influential scientific schools.	<b>456</b>
<b>Bobomurat Ahmedov.</b> Observational and energetic properties of gravitational compact objects	<b>457</b>
<b>Р.Ибадов.</b> Фундаментальное уравнение теории поля с новым масштабом.	<b>459</b>
<b>M.Mirkamalov, Z.Mirtoshev.</b> Asymmetry at conjugate footpoints of solar flares.	<b>467</b>
<b>S.Ergashev, O.Burxonov, R.Karimov.</b> HAT-P-3B va HAT-P-44B ekzosayyoralarning ravshanlik egri chizig'i tahlili natijalari.	<b>472</b>
<b>D.Po'latov, Z.Mirtoshev.</b> Quyosh aktivligi sikelida kuzatilgan geomagnit bo'ronlarning quyosh dog'lari bilan bog'liqligi.	<b>475</b>
<b>Абдуллаев Ботиржон.</b> Али Қушчининг Усмонлилар салтанатининг илмий салоҳиятига таъсири	<b>479</b>
<b>Buronova N.D.</b> Ali Qushji's essential contribution to the development of world science.	<b>483</b>
<b>А.С.Солеев, Т.Э.Буриев.</b> Али аль-Кушчи и его Астрономический трактат	<b>485</b>

**ALI QUSHCHINING 620 YILLIK TAVALLUDIGA  
BAG‘ISHLANGAN “ALI QUSHCHI – MIRZO ULUG‘BEK  
ILMIY MAKTABINING BUYUK ELCHISI”  
MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY ANJUMAN  
MATERIALLARI**

**2023-yil 21-22 sentyabr  
Samarqand, O‘zbekiston**

Muharrir  
Musahhih  
Texnik muharrir

N.K. Choriyev  
O. Sharapova  
O. Mirzayev

2023 yil 12-sentyabrdan Tahririy-nashriyot bo‘limiga qabul qilindi.  
2023 yil 19-sentyabrdan original-maketedan bosishga ruxsat etildi.  
Qog‘oz bichimi 60x84. 1/16. “Times New Roman” garniturasi.  
Offset qog‘ozi. Sharthli bosma tabog‘i - 31,125.  
Adadi 50 nusxa. Buyurtma №587

---

SamDU Tahririy nashriyot bo‘limi bosmaxonasida chop etildi.  
140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 1

