В данной работе в отличие от [17] рассматриваем обобщенную релаксационую дробно-дифференциальную модель, где учитываются одновременно релаксациенные явления как по скорости фильтрации, так и по градиенту давления. На основе такой обобщенной модели выведены уравнения фильтрации. Поставлена и численно решена задача фильтрации для этого уравнения. Оценено влияние порядков дробных производных на распределение давления и скорости фильтрации в среде в различные моменты времени.

Вывод уравнений и постановка задачи. Модель фильтрации с двойной релаксацией в одномерном случае имеет вид [16]

$$v+\lambda_v \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}\right), \tag{1}$$

λ_v , λ_p - времена релаксации скорости фильтрации v и давления p , k - проницаемость среды, μ - вязкость жидкости.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\beta^* \frac{\partial p}{\partial t}=0, \tag{2}$$

где β^* - коэффициент упругоемкости пласта.

Уравнение (1) здесь записываем в обобщенном виде

$$v+\lambda_v D_t^\beta v=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\lambda_p D_t^\alpha p\right), \tag{3}$$

где D_t^β , D_t^α - операторы дробной производной Капуто [8] .

Дифференцируя уравнение (3) по координате x получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\lambda_v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot D_t^\beta v=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p+\lambda_p D_t^\alpha p\right). \tag{4}$$

Взяв из уравнения (2) производную порядка β по времени получим

$$D_t^\beta \frac{\partial v}{\partial x}+\beta^* D_t^{\beta+1} p=0, \tag{5}$$

Используя уравнение (5) запишем уравнение (4) в следующем виде

$$-\beta^* \cdot \frac{\partial p}{\partial t}-\lambda_v \cdot \beta^* \cdot D_t^{\beta+1} p=-\frac{k}{\mu}\cdot\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\lambda_p D_t^\alpha\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)\right),$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\lambda_v D_t^{\beta+1} p=\varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\lambda_p D_t^\alpha\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)\right), \tag{6}$$

где $\varkappa=\frac{k}{\mu\beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности, $0<\alpha\le 1$, $0<\beta\le 1$.

При $\alpha = 1,\ \beta = 1$ из (6) получаем уравнение релаксационной фильтрации [4, 16]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} \right). \tag{7}$$

Начальное и граничные условия при фильтрации в конечной среде [0, L] принимаются в следующем виде

$$p(0, x) = 0, \tag{8}$$

$$p(t,0) = p_0, \quad p_0 = const\ , \quad p(t, L) = 0\,. \tag{9}$$

Для (6) при $\beta > 0$ начальное условие (8) недостаточно. Надо добавить еще одно условие, например

$$\frac{\partial p(0, x)}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (6) решается при условиях (8), (9), (10).

Численное решение задачи. Для численного решения задачи (6), (8), (9), (10) применяем метод конечных разностей. В области $\Omega = \{0 \le x \le L\ ,\ 0 \le t \le T\}$ введем равномерную сетку $\omega_{h\tau} = \left\{(x_i, t_j),\ x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = L/N,\ t_j = j\tau,\ j = \overline{0, M},\ \tau = T/M\right\}$, где h – шаг сетки по координату x, τ – шаг сетки по времени. Сеточную функцию в точке (x_i, t_j) обозначим через p_i^j.

Разностная аппроксимация уравнения (6) имеет вид

$$\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \lambda_v \cdot \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2 \cdot p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot \left((j-k+1)^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{p_i^{j+1} - 2 \cdot p_i^j + p_i^{j-1}}{\tau^2} \right] = \varkappa \left(\frac{p_{i+1}^{j+1} - 2 \cdot p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \lambda_p \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \cdot h^2} \cdot \left(S_1 - 2 \cdot S_2 + S_3 \right) \right),$$

$$S_1 = D_t^\alpha p_{i+1}^{j+1} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k}{\tau} \cdot \left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha} \right) + \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} \right], \tag{11}$$

$$S_2 = D_t^\alpha p_i^{j+1} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{\tau} \cdot \left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha} \right) + \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} \right],$$

$$S_3 = D_t^\alpha p_{i-1}^{j-1} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k}{\tau} \cdot \left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha} \right) + \frac{p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j}{\tau} \right],$$

где $\Gamma(\cdot)$-гамма функция.

При аппроксимации дробных производных в (11) использована методология [18-24].