Модель плоскорадиальной фильтрации с дробными производными

В данном параграфе рассматривается радиальная задача аномальной фильтрации однородной жидкости, аналогичная рассмотренной в § 2.1.

Область фильтрации показана на рис.2.3.1. Фильтрация жидкости происходит в радиальном направлении в сторону центра области. В центре находится скважина радиуса r_c. Внешний контур области имеет радиус R. Учитывая круговую симметрию считается, что показатели фильтрации не зависят от угловой координаты, а зависят от радиальной координаты r и времени t. Закон фильтрации в радиальном случае с учетом релаксации по скорости фильтрации и градиента давления с использованием дробных производных записывается в виде

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}+\lambda_p D_t^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\right), \qquad (2.3.1)$$

где $0<\alpha\le 1,\ 0<\beta\le 1$.

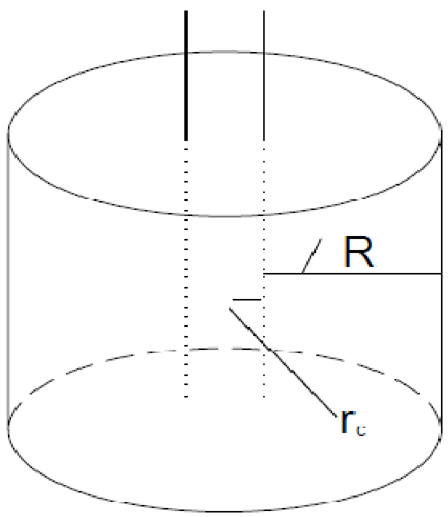

Рис.2.3.1. Область фильтрации.

Аналогично § 2.1 на основе (2.3.1) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}(p+\lambda_p D_t^{\beta} p)=\chi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(p+\lambda_v D_t^{\alpha} p)\right], \qquad (2.3.2)$$

где $\chi=\dfrac{k}{\mu\beta^*}$ – коэффициент пьезопроводности.

Пусть в начальный момент в области было постоянное давление p_k. Начиная с $t>0$ на скважине устанавливается постоянное давление p_c. На контуре пласта $r=R$ поддерживается первоначальное давление p_k, что соответствует режиму работы открытого пласта, где за счет притока жидкости из вне давление поддерживается на постоянном уровне.

При отмеченных условиях начальные и граничные условия принимаются в следующем виде

$$p(0,r)=p_k, \qquad D_t^{\beta}p(0,r)=0, \tag{2.3.3}$$

$$p(t,r_c)=p_c, \qquad p(t,R)=p_k. \tag{2.3.4}$$

Уравнение (2.3.2) решается при условиях (2.3.3), (2.3.4).

Задача (2.3.2) – (2.3.4) решается методом конечных разностей. При этом дробные производные в (2.3.2) аппроксимируем исходя из определения Капуто.

Численное решение задачи. В области $\Omega=\{0\le r\le R\ ,\ 0\le t\le T\}$ введем равномерную сетку $\Omega=\{(r_i,t_j)\ ,\ r=r_c+ih,\ i=\overline{0,N},\ h=R/N,\ t_j=j\tau,\ j=\overline{0,M},$ $\tau=T/M\}$, где h – шаг сетки по координате r, τ – шаг сетки по времени. Сеточную функцию в точке (r_i,t_j) обозначим через p_i^j.

Разностная аппроксимация уравнения (2.3.2) имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\tau}+\lambda_v\cdot\frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_i^{k+1}-2\cdot p_i^k+p_i^{k-1}}{\tau^2}\cdot\left((j-k+1)^{2-\beta}-(k-1)^{2-\beta}\right)+\right.\\
\left.+\frac{p_i^{j+1}-2\cdot p_i^j+p_i^{j-1}}{\tau^2}\right]=\chi\frac{1}{r}\left(\frac{r_{i+0.5}\cdot p_{i+1}^{j+1}-(r_{i+0.5}+r_{i-0.5})\cdot p_i^{j+1}+r_{i-0.5}\cdot p_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\right.\\
+\frac{\lambda_p}{h^2}\left(\frac{\tau^{1-\alpha}\cdot r_{i+0,5}\cdot S_1}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\tau^{1-\alpha}\cdot r_{i+0,5}}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\frac{p_{i+1}^{j+1}-p_{i+1}^j}{\tau}-\frac{\tau^{1-\alpha}\cdot\left(r_{i+0,5}+r_{i-0,5}\right)\cdot S_2}{\Gamma(2-\alpha)}-\right.\\
\left.\left.-\frac{\tau^{1-\alpha}\cdot\left(r_{i+0,5}+r_{i-0,5}\right)}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\tau}+\frac{\tau^{1-\alpha}\cdot r_{i-0,5}\cdot S_3}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\tau^{1-\alpha}\cdot r_{i-0,5}}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\frac{p_{i-1}^{j+1}-p_{i-1}^j}{\tau}\right)\right),
\end{gathered} \tag{2.3.5}$$

где

$$S_1=\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i+1}^{k+1}-p_{i+1}^{k}}{\tau}\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right),$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i}^{k+1}-p_{i}^{k}}{\tau}\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right),$$

$$S_3=\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i-1}^{k+1}-p_{i-1}^{k}}{\tau}\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right),$$

$$S_4=\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i}^{k+1}-2\cdot p_{i}^{k}+p_{i}^{k-1}}{\tau^2}\cdot\left((j-k+1)^{2-\beta}-(k-1)^{2-\beta}\right),$$

$$r_{i+0.5}=\frac{r_{i+1}+r_i}{2},\quad r_{i-0.5}=\frac{r_i+r_{i-1}}{2},\quad r_i=(i-1)\cdot h,\quad k_v=\frac{\lambda_v}{\Gamma(3-\beta)\cdot\tau^{\beta}},$$

$$k_p=\frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau^{\alpha}\cdot h^2},\quad r_1=\frac{2\cdot i\cdot h-h}{2},\quad r_0=\frac{2\cdot i\cdot h-3\cdot h}{2},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Разностная схема (2.3.5) приведена к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ap_{i-1}^{j+1}-Bp_i^{j+1}+Cp_{i+1}^{j+1}=-F_i^{\,j},\quad i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{0,M-1}, \tag{2.3.6}$$

где

$$A=\chi\frac{\left(\frac{r_0}{h^2}+k_p\cdot r_0\right)}{(i-1)\cdot h},$$

$$B=\chi\frac{\left(\frac{r_0+r_1}{h^2}+k_p\cdot(r_0+r_1)\right)}{(i-1)\cdot h}+k_v+\frac{1}{\tau},$$

$$C=\chi\frac{\left(\frac{r_1}{h^2}+k_p\cdot r_1\right)}{(i-1)\cdot h},$$

$$F_i^{\,j}=\frac{p_i^j}{\tau}-k_v\cdot S_4+2\cdot k_v\cdot p_i^j-k_v\cdot p_i^{j-1}+\frac{\chi\cdot k_p\cdot r_1\cdot S_1}{(i-1)\cdot h}-\frac{\chi\cdot k_p\cdot r_1\cdot p_{i+1}^j}{(i-1)\cdot h}$$

$$-\frac{\chi\cdot k_p\cdot(r_1+r_0)\cdot S_2}{(i-1)\cdot h}+\frac{\chi\cdot k_p\cdot(r_1+r_0)\cdot p_i^j}{(i-1)\cdot h}+\frac{\chi\cdot k_p\cdot r_0\cdot S_3}{(i-1)\cdot h}-\frac{\chi\cdot k_p\cdot r_0\cdot p_{i-1}^j}{(i-1)\cdot h}.$$

Систему (2.3.6) решаем методом прогонки при известных A, B, C и F_i^j, для чего решение представится в виде

$$p_i^{j+1} = \eta_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \mu_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{0, M-1},$$

Для прогоночных коэффициентов получены следующие рекуррентные формулы

$$\eta_{i+1} = \frac{E}{B - A\eta_i},\ \mu_{i+1} = \frac{A\mu_i + F_i^j}{B - A\eta_i},\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{0, M-1}.$$

Из граничного условия имеем

$p_0^{j+1} = \eta_1 p_1^{j+1} + \mu_1$, откуда $\eta_1 = 0$, $\mu_1 = p_c$.

При известном $p(t,r)$ скорость фильтрации определяется из (2.3.1), после дискретизации которого имеем

$$v_i^{j+1} + \frac{\lambda_v}{\Gamma(2-\beta)\cdot\tau^\beta} \sum_{k=0}^{j-1} \left(v_i^{k+1} - v_i^k\right) \cdot \left((j-k+1)^{1-\beta} - (j-k)^{1-\beta}\right) + \left(v_i^{j+1} - v_i^j\right) =$$

$$= -\frac{k}{\mu \cdot h}\left(\left(p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}\right) + \frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\left(p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k\right)\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}\right)\right.\right. \quad (2.3.7)$$

$$\left.\left. + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j - \sum_{k=0}^{j-1}\left(p_i^{k+1} - p_i^k\right)\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}\right) - p_i^{j+1} + p_i^j\right)\right).$$

Скорость фильтрации на верхнем временном слое из (2.3.7) определяется как

$$v_i^{j+1} = \frac{\tau}{\Gamma(2-\beta)\cdot\tau^\beta + \lambda_v}\left(-\frac{k}{\mu\cdot h}\left(\left(p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}\right) + \frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\left(p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k\right)\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - (j-k)^{1-\alpha}\right) + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j - \sum_{k=0}^{j-1}\left(p_i^{k+1} - p_i^k\right)\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}\right) - p_i^{j+1} + p_i^j\right)\right) - \quad (2.3.8)$$

$$\left. - \frac{\lambda_v}{\Gamma(2-\beta)\cdot\tau^\beta}\sum_{k=0}^{j-1}\left(v_i^{k+1} - v_i^k\right)\cdot\left((j-k+1)^{1-\beta} - (j-k)^{1-\beta}\right) + \frac{\lambda_v \cdot v_i^j}{\Gamma(2-\beta)\cdot\tau^\beta}\right).$$

Некоторые результаты численных расчетов по (2.3.5) и (2.3.8) показаны на рис.2.3.1-2.3.18. В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $k = 10^{-13}\ m^2$, $\mu = 10^{-2}\ Па \cdot с$, $p_k = 20 МПа$, $p_c = 15 МПа$, $\beta^* = 3\cdot 10^{-10}\ Па^{-1}$, $r_c = 0{,}1\ м$, $R = 40\ м$.