В данной работе в отличие от [12] рассматриваем обобщенную релаксационую дробно-дифференциальную модель. На основе такой обобщенной модели выведены уравнения фильтрации. Поставлена и численно решена задача аномальной фильтрации жидкости в пористой среде с учетом предельного градиента давления. Оценено влияние порядков дробных производных на скорости фильтрации в среде в различные моменты времени.

Вывод уравнений. Модель фильтрации с двойной релаксацией в одномерном случае с учетом ПГД примем в виде

$$\overline{w}+\lambda_v\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}=\begin{cases}0 \quad при \quad |\nabla p|\le g_0\,,\\ -\dfrac{k}{\mu}\cdot\left[\dfrac{|\nabla p|-g_0}{|\nabla p|}\nabla p+\lambda_p\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{|\nabla p|-g_0}{|\nabla p|}\nabla p\right)\right] \quad при \quad |\nabla p|>g_0.\end{cases} \tag{6}$$

где g_0 – ПГД, λ_v, λ_p – времена релаксации скорости фильтрации v и давления p, k – проницаемость среды, μ – вязкость жидкости $|\nabla p|$ – модуль градиента давления.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}=0, \tag{7}$$

где β^* – коэффициент упругоемкости пласта.

Уравнение (6) записываем в дробно - дифференциальном виде

$$v+\lambda_v D_t^{\beta}v=\begin{cases}0 \quad при \quad \left|\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|\le g_0\,,\\ -\dfrac{k}{\mu}\left(\dfrac{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|-g_0}{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\lambda_p D_t^{\alpha}\left(\dfrac{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|-g_0}{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)\right) \quad при \quad \left|\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|>g_0\,,\end{cases} \tag{8}$$

где α, β – порядки дробных производных, D_t^{β} , D_t^{α} – операторы дробной производной по Капуто [13].

В (8) времена релаксации λ_v и λ_p имеют дробную размерность : $\lambda_v=T^{\beta}$, $\lambda_p=T^{\alpha}$, где T – размерность времени. Данный подход характеризует нелокальные во времени эффекты. Из (8) в частности имеем

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v = 0 \text{ при } \quad g_0 \le 0, \quad g_0 = \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| . \tag{9}$$

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v = -\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial x} - g_0 + \lambda_p D_t^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial x}\right] \text{ при } \quad \frac{\partial p}{\partial x} > 0 ,$$

(10)

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v = -\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + g_0 + \lambda_p D_t^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial x}\right] \text{ при } \quad \frac{\partial p}{\partial x} < 0 ,$$

(11)

Дифференцируя уравнение (8) по координате x получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot D_t^{\beta} v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| - g_0}{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|}\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p D_t^{\alpha}\left(\frac{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| - g_0}{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right) \quad \text{при} \quad \frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

(12)

Взяв из уравнения (7) производную порядка β по времени получим

$$D_t^{\beta}\frac{\partial v}{\partial x} + \beta^* D_t^{\beta+1} p = 0,$$

(13)

Используя уравнение (13) запишем уравнение (12) в следующем виде

$$-\beta^* \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \lambda_v \cdot \beta^* \cdot D_t^{\beta+1} p = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(-\frac{\partial p}{\partial x} - g_0\right) - \lambda_p D_t^{\alpha}\left(-\frac{\partial p}{\partial x} - g_0\right)\right],$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v D_t^{\beta+1} p = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p D_t^{\alpha}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)\right),$$

(14)

где $\varkappa = \dfrac{k}{\mu\beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности , $0 < \alpha \le 1, \quad 0 < \beta \le 1$.

При $\alpha = 1,\ \beta = 1$ из (11) получаем уравнение релаксационной фильтрации [12, 14]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}\right). \tag{15}$$

Постановка задачи и ее численное решение. Начальное и граничные условия для уравнения (14) при фильтрации в конечной среде [0, L] принимаются в следующем виде

$$p(0,x)=0, \tag{16}$$

$$p(t,0)=p_0, \quad p_0=const, \quad p(t,L)=0. \tag{17}$$

Для (14) при $\beta>0$ начальное условие (16) недостаточно. Надо добавить еще одно условие, например

$$\frac{\partial p(0,x)}{\partial t}=0. \tag{18}$$

Уравнение (14) решается при условиях (16), (17), (18).

Для численного решения задачи (14), (16), (17), (18) применяем метод конечных разностей. В области $\Omega=\{0\le x\le L\,,\,0\le t\le T_{max}\}$ введем равномерную сетку $\omega_{h\tau}=\{(t_j,\ x_i), x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ h=L/N,\ t_i=j\tau,\ i=\overline{0,M},\ \tau=T_{max}/M\}$, где h – шаг сетки по координату x, τ – шаг сетки по времени. Сеточную функцию в точке $(t_j,\ x_i)$ обозначим через p_i^j.

Разностная аппроксимация уравнения (14) имеет вид

$$\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\tau}+\lambda_v\cdot\frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_i^{k+1}-2\cdot p_i^k+p_i^{k-1}}{\tau^2}\cdot\left((j-k+1)^{2-\beta}-(k-1)^{2-\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{p_i^{j+1}-2\cdot p_i^j+p_i^{j-1}}{\tau^2}\right]=\varkappa\left(\frac{p_{i+1}^{j+1}-2\cdot p_i^{j+1}+p_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\lambda_p\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\cdot h^2}\cdot\left(S_1-2\cdot S_2+S_3\right)\right),$$

$$S_1=D_t^\alpha p_{i+1}^{j+1}=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i+1}^{k+1}-p_{i+1}^k}{\tau}\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right)+\frac{p_{i+1}^{j+1}-p_{i+1}^j}{\tau}\right], \tag{19}$$

$$S_2=D_t^\alpha p_i^{j+1}=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_i^{k+1}-p_i^k}{\tau}\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right)+\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\tau}\right],$$

$$S_3=D_t^\alpha p_{i-1}^{j-1}=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i-1}^{k+1}-p_{i-1}^k}{\tau}\cdot\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right)+\frac{p_{i-1}^{j+1}-p_{i-1}^j}{\tau}\right],$$

где $\Gamma(\cdot)$-гамма функция.

При аппроксимации дробных производных в (19) использована методология [15 – 24].