

1 Условие задачи

Входные данные: два рациональных набора чисел (x_0, x_1, \dots, x_n) и (y_0, y_1, \dots, y_n) .
Задача. Построить функцию $S(x) : [x_0; x_n] \rightarrow \mathbb{Q}$, такая что

- (i) $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \overline{0, n}$;
- (ii) $S(x) \in C^2[x_0, x_n]$;
- (iii) $S(x)$ является кусочной функцией

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ P_2(x), & x \in (x_1, x_2] \\ \vdots & \\ P_i(x), & x \in (x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \\ P_n(x), & x \in (x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

где $P_i(x)$ — многочлен третьей степени, причём $P_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$.

2 Решение

Для построения функции $S(x)$ требуется найти n многочленов. $P_i(x) = A_i + B_i x + C_i x^2 + D_i x^3$. Каждый многочлен содержит 4 неизвестных коэффициента, иными словами требуется найти $4n$ неизвестных.

По условию $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $S_i(x_i) = y_i \quad \forall i \in \overline{1, n}$. Тем самым, возможно составить $2n$ уравнений на коэффициенты многочленов.

По условию $S(x) \in C^2[x_0, x_n]$; так как многочлены всюду бесконечно дифференцируемы, имеет смысл рассматривать точки смены аналитического представления кусочной функции. Для выполнения условия необходимо

$$P'_i(x_i) = P'_{i+1}(x_i), \quad P''_i(x_i) = P''_{i+1}(x_i), \quad \forall i \in \overline{1, n-1} \quad (1)$$

Имеем ещё $2(n-1)$ уравнений. Остальные 2 возьмём из такого условия

$$P''_1(x_0) = 0, \quad P''_n(x_n) = 0 \quad (2)$$

Будем искать многочлены в специальном виде:

$$P_i(x) = \alpha_{i-1} + \beta_{i-1}(x - x_{i-1}) + \gamma_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + \delta_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})^3}{6}$$

Продифференцируем дважды:

$$P'_i(x) = \beta_{i-1} + \gamma_{i-1}(x - x_{i-1}) + \delta_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2};$$

$$P_i''(x) = \gamma_{i-1} + \delta_{i-1}(x - x_{i-1})$$

Так как по (1), то

$$\begin{aligned} P_i''(x_{i-1}) &= \gamma_{i-1} \\ P_i''(x_i) &= \gamma_i \end{aligned}$$

Вспомним формулу нахождения линейной функции по двум заданным точкам

$$\begin{aligned} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} &= \frac{P_i''(x) - \gamma_{i-1}}{\gamma_i - \gamma_{i-1}} \iff \\ P_i''(x) &= \frac{(x - x_{i-1})(\gamma_i - \gamma_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \gamma_{i-1} \iff \\ P_i''(x) &= \frac{\gamma_i(x - x_{i-1}) - \gamma_{i-1}(x - x_{i-1}) + \gamma_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \iff \\ P_i''(x) &= \gamma_{i-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \gamma_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned}$$

Проинтегрируем равенство дважды

$$\begin{aligned} \int P_i''(x) dx &= P_i'(x) = -\frac{\gamma_{i-1}}{2(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^2 + \frac{\gamma_i}{2(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^2 + C \\ P_i(x) &= \gamma_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \gamma_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + Cx + D \end{aligned}$$

Получаем многочлен с двумя новыми константами. Нам будет удобнее представить выражения с константами в несколько другом виде

$$P_i(x) = \gamma_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \gamma_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + K_1(x_i - x) + K_2(x - x_{i-1}) \quad (3)$$

Вопрос, законен ли переход? Можно ли выразить K_1 и K_2 через C и D однозначно?

$$\begin{cases} C = -K_1 + K_2 \\ D = K_1 x_i - K_2 x_{i-1} \end{cases} \quad (4)$$

Детерминант матрицы коэффициентов системы

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x_{i+1} & -x_i \end{vmatrix} = x_i - x_{i+1} \neq 0$$

По правилу Крамера система (4) определена.
Для определения K_1 подставим в (3) $x = x_{i-1}$

$$P_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = \frac{\gamma_{i-1}}{6}(x_i - x_{i-1})^2 + K_1(x_i - x_{i-1})$$

откуда

$$K_1 = \frac{y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{\gamma_{i-1}}{6}(x_i - x_{i-1})$$

Аналогично, подставим в (2) $x = x_i$ для определения K_2

$$K_2 = \frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{\gamma_i}{6}(x_i - x_{i-1})$$

Подставим константы и определим $h_i = x_i - x_{i-1}$

$$P_i(x) = \frac{\gamma_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \frac{\gamma_i(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i-1}}{6}h_i\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{\gamma_i}{6}h_i\right)(x - x_{i-1}) \quad (5)$$

Распишем чуть по-другому

$$P_i(x) = y_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + \gamma_{i-1} \left(\frac{(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)}{6h_i} \right) + \\ + y_i \frac{(x - x_{i-1})}{h_i} + \gamma_i \left(\frac{(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})}{6h_i} \right)$$

Продифференцируем функцию

$$P'_i(x) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i-1}}{6h_i}(3(x_i - x)^2 - h_i^2) + \frac{\gamma_i}{6h_i}(3(x - x_{i-1})^2 - h_i^2) \quad (6)$$

В текущей формуле (6) произведём смещение индекса на один

$$P'_{i+1}(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{\gamma_i}{6h_{i+1}}(3(x_{i+1} - x)^2 - h_{i+1}^2) + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_{i+1}}(3(x - x_i)^2 - h_{i+1}^2)$$

Воспользуемся условием (1): $P'_i(x_i) = P'_{i+1}(x_i)$.

$$P'_i(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i-1}}{6h_i}(3 \cdot 0 - h_i^2) + \frac{\gamma_i}{6h_i}(3h_i^2 - h_i^2) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{\gamma_{i-1}h_i}{6} + \frac{\gamma_i h_i}{3} \\ P'_{i+1}(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{\gamma_i}{6h_{i+1}}(3h_{i+1}^2 - h_{i+1}^2) + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_{i+1}}(3 \cdot 0 - h_{i+1}^2) = \\ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \gamma_i \frac{h_{i+1}}{3} - \gamma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6}$$

Значения $\gamma_0 = P_1''(x_0) = 0$ и $\gamma_n = P_n''(x_n) = 0$ нам известны по (2). Приравнявая $P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$, получаем

$$\begin{cases} \gamma_{i-1} \frac{h_i}{6} + \gamma_i \frac{h_i + h_{i+1}}{3} + \gamma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, & i \in \overline{1, n-1} \\ \gamma_0 = \gamma_n = 0 \end{cases}$$

Это СЛУ относительно $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$. Обозначим величины $a_i = h_i/6$, $b_i = (h_i + h_{i+1})/3$, $c_i = h_{i+1}/6$ и $d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$. Тогда СЛУ можно написать так

$$\begin{cases} b_1 \gamma_1 + c_1 \gamma_2 + 0 \gamma_3 + \dots + 0 \gamma_{n-2} + 0 \gamma_{n-1} = d_1 \\ a_2 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + c_2 \gamma_3 + \dots + 0 \gamma_{n-2} + 0 \gamma_{n-1} = d_2 \\ \vdots \\ 0 \gamma_1 + 0 \gamma_2 + 0 \gamma_3 + \dots + a_{n-1} \gamma_{n-2} + b_{n-1} \gamma_{n-1} = d_{n-1} \end{cases}$$

Через наборы длины n :

$$a = (0, 0, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}),$$

$$b = (0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}),$$

$$c = (0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, 0),$$

$$d = (0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$$

выражаем $\gamma = (0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$ за $O(n)$.

Как выглядят коэффициенты у многочленов? Для этого представим многочлен $P_i(x)$ из (5) в каноническом виде

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{6h_i} x^3 + \frac{\gamma_{i-1}x_i - \gamma_i x_{i-1}}{2h_i} x^2 + \\ &+ \left(\frac{\gamma_i x_{i-1}^2 - \gamma_{i-1} x_i^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{(\gamma_{i-1} - \gamma_i)h_i}{6} \right) x + \\ &+ \left(\frac{\gamma_{i-1}x_i^3 - \gamma_i x_{i-1}^3}{6h_i} + \frac{y_{i-1}x_i - y_i x_{i-1}}{h_i} + \frac{(\gamma_i x_{i-1} - \gamma_{i-1}x_i)h_i}{6} \right) \end{aligned}$$

Ещё можно представить многочлен со сдвигом на x_{i-1} . Для этого можно воспользоваться формулой Тейлора. А именно

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$$

Получается

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{6h_i} (x - x_{i-1})^3 + \left(\frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{2h_i} x_{i-1} + \frac{x_i \gamma_{i-1} - x_{i-1} \gamma_i}{2h_i} \right) (x - x_{i-1})^2 + \\ &+ \left(\frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{2h_i} x_{i-1}^2 + \frac{x_i \gamma_{i-1} - x_{i-1} \gamma_i}{h_i} x_{i-1} + \right. \\ &\left. + \frac{x_{i-1}^2 \gamma_i - x_i^2 \gamma_{i-1}}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2h_i} + \frac{h_i(\gamma_{i-1} - \gamma_i)}{6} \right) (x - x_{i-1}) + y_{i-1} \end{aligned}$$

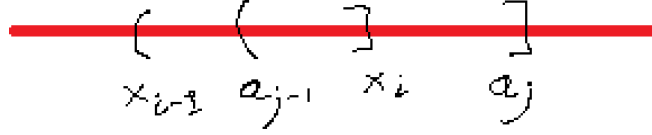


Рис. 1: Пересечение промежутков

2.1 Точка пересечение двух сплайнов.

Пусть у нас есть два сплайна

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ P_2(x), & x \in (x_1, x_2] \\ \vdots \\ P_i(x), & x \in (x_{i-1}, x_i] \\ \vdots \\ P_n(x), & x \in (x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

и

$$T(x) = \begin{cases} Q_1(x), & x \in [a_0, a_1] \\ Q_2(x), & x \in (a_1, a_2] \\ \vdots \\ Q_i(x), & x \in (a_{i-1}, a_i] \\ \vdots \\ Q_m(x), & x \in (a_{m-1}, a_m] \end{cases}$$

Найдем точки их пересечения. Для этого найдём два таких промежутка $(x_{i-1}, x_i]$ и $(a_{j-1}, a_j]$, показанным на Рис. 1. Рассмотрим многочлен $R(x) = P_i(x) - Q_j(x)$. Найдём его корни. Если существует вещественный корень на промежутке $(a_{j-1}, x_i]$, то этот корень является точкой пересечения сплайнов $S(x)$ и $T(x)$. Для решения задач в общем виде нужно перебрать всевозможные случаи расположения многочленов сплайнов и найти корни многочлена разности. Можно воспользоваться формулой Кардано.