1 Условие задачи

Входные данные: два рациональных набора чисел $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$.
Задача. Построить функцию $S(x) : [x_0; x_n] \to \mathbb{Q}$, такая что

(i) $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \overline{0, n}$;

(ii) $S(x) \in C^2[x_0, x_n]$;

(iii) $S(x)$ является кусочной функцией

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ P_2(x), & x \in (x_1, x_2] \\ & \vdots \\ P_i(x), & x \in (x_{i-1}, x_i] \\ & \vdots \\ P_n(x), & x \in (x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

где $P_i(x)$ — многочлен третьей степени, причём $P_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$.

2 Решение

Для построения функции $S(x)$ требуется найти n многочленов. $P_i(x) = A_i + B_i x + C_i x^2 + D_i x^3$. Каждый многочлен содержит 4 неизвестных коэффициента, иными словами требуется найти $4n$ неизвестных.

По условию $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1},\ S_i(x_i) = y_i \ \ \forall i \in \overline{1, n}$. Тем самым, возможно составить $2n$ уравнений на коэффиецинты многочленов.

По условию $S(x) \in C^2[x_0, x_n]$; так как многочлены всюду бесконечно дифференцируемы, имеет смысл рассматривать точки смены аналитического представления кусочной функции. Для выполнения условия необходимо

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \quad P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i), \quad \forall i \in \overline{1, n-1} \tag{1}$$

Имеем ещё $2(n-1)$ уравнений. Остальные 2 возьмём из такого условия

$$P_1''(x_0) = 0, \quad P_n''(x_n) = 0 \tag{2}$$

Будем искать многочлены в специальном виде:

$$P_i(x) = \alpha_{i-1} + \beta_{i-1}(x - x_{i-1}) + \gamma_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + \delta_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^3}{6}$$

Продифференцируем дважды:

$$P_i'(x) = \beta_{i-1} + \gamma_{i-1}(x - x_{i-1}) + \delta_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2};$$

$$P_i''(x) = \gamma_{i-1} + \delta_{i-1}(x - x_{i-1})$$

Так как по (1), то

$$P_i''(x_{i-1}) = \gamma_{i-1}$$
$$P_i''(x_i) = \gamma_i$$

Вспомним формулу нахождения линейной функции по двум заданным точкам

$$\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{P_i''(x) - \gamma_{i-1}}{\gamma_i - \gamma_{i-1}} \iff$$
$$P_i''(x) = \frac{(x - x_{i-1})(\gamma_i - \gamma_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \gamma_{i-1} \iff$$
$$P_i''(x) = \frac{\gamma_i(x - x_{i-1}) - \gamma_{i-1}(x - x_{i-1}) + \gamma_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \iff$$
$$P_i''(x) = \gamma_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \gamma_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Проинтегрируем равенство дважды

$$\int P_i''(x)\mathrm{d}x = P_i'(x) = -\frac{\gamma_{i-1}}{2(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^2 + \frac{\gamma_i}{2(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^2 + C$$
$$P_i(x) = \gamma_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \gamma_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + Cx + D$$

Получаем многочлен с двумя новыми константами. Нам будет удобнее представить выражения с константами в несколько другом виде

$$P_i(x) = \gamma_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \gamma_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + K_1(x_i - x) + K_2(x - x_{i-1}) \quad (3)$$

Вопрос, законен ли переход? Можно ли выразить K_1 и K_2 через C и D однозначно?

$$\begin{cases} C = -K_1 + K_2 \\ D = K_1 x_i - K_2 x_{i-1} \end{cases} \quad (4)$$

Детерминант матрицы коэффициентов системы

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x_{i+1} & -x_i \end{vmatrix} = x_i - x_{i+1} \neq 0$$

По правилу Крамера система (4) определена.
Для определения K_1 подставим в (3) $x = x_{i-1}$

$$P_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = \frac{\gamma_{i-1}}{6}(x_i - x_{i-1})^2 + K_1(x_i - x_{i-1})$$

откуда

$$K_1 = \frac{y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{\gamma_{i-1}}{6}(x_i - x_{i-1})$$

Аналогично, подставим в (2) $x = x_i$ для определения K_2

$$K_2 = \frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{\gamma_i}{6}(x_i - x_{i-1})$$

Подставим константы и определим $h_i = x_i - x_{i-1}$

$$P_i(x) = \frac{\gamma_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \frac{\gamma_i(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i-1}}{6}h_i)(x_i - x) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{\gamma_i}{6}h_i)(x - x_{i-1}) \quad (5)$$

Распишем чуть по-другому

$$\begin{aligned} P_i(x) = y_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + \gamma_{i-1}(\frac{(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)}{6h_i}) + \\ + y_i\frac{(x - x_{i-1})}{h_i} + \gamma_i(\frac{(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})}{6h_i}) \end{aligned}$$

Продифференцируем функцию

$$P_i'(x) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i-1}}{6h_i}(3(x_i - x)^2 - h_i^2) + \frac{\gamma_i}{6h_i}(3(x - x_{i-1})^2 - h_i^2) \quad (6)$$

В текущей формуле (6) произведём смещение индекса на один

$$P_{i+1}'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{\gamma_i}{6h_{i+1}}(3(x_{i+1} - x)^2 - h_{i+1}^2) + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_{i+1}}(3(x - x_i)^2 - h_{i+1}^2)$$

Воспользуемся условием (1): $P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$.

$$P_i'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i-1}}{6h_i}(3 \cdot 0 - h_i^2) + \frac{\gamma_i}{6h_i}(3h_i^2 - h_i^2) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{\gamma_{i-1}h_i}{6} + \frac{\gamma_i h_i}{3}$$

$$\begin{aligned} P_{i+1}'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{\gamma_i}{6h_{i+1}}(3h_{i+1}^2 - h_{i+1}^2) + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_{i+1}}(3 \cdot 0 - h_{i+1}^2) = \\ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \gamma_i\frac{h_{i+1}}{3} - \gamma_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} \end{aligned}$$

Значения $\gamma_0 = P_1''(x_0) = 0$ и $\gamma_n = P_n''(x_n) = 0$ нам известны по (2). Приравнивая $P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$, получаем

$$\begin{cases} \gamma_{i-1}\frac{h_i}{6} + \gamma_i\frac{h_i+h_{i+1}}{3} + \gamma_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}, \quad i \in \overline{1, n-1} \\ \gamma_0 = \gamma_n = 0 \end{cases}$$

Это СЛУ относительно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ Обозначим величины $a_i = h_i/6$, $b_i = (h_i + h_{i+1})/3$, $c_i = h_{i+1}/6$ и $d_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$. Тогда СЛУ можно написать так

$$\begin{cases} b_1\gamma_1 + c_1\gamma_2 + 0\gamma_3 + \ldots + 0\gamma_{n-2} + 0\gamma_{n-1} = d_1 \\ a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 + \ldots + 0\gamma_{n-2} + 0\gamma_{n-1} = d_2 \\ \vdots \\ 0\gamma_1 + 0\gamma_2 + 0\gamma_3 + \ldots + a_{n-1}\gamma_{n-2} + b_{n-1}\gamma_{n-1} = d_{n-1} \end{cases}$$

Через наборы длины n:
$a = (0, 0, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$,
$b = (0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$,
$c = (0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, 0)$,
$d = (0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1})$
выражаем $\gamma = (0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1})$ за $O(n)$.

Как выглядят коэффициенты у многочленов? Для этого представим многочлен $P_i(x)$ из (5) в каноническом виде

$$P_i(x) = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{6h_i}x^3 + \frac{\gamma_{i-1}x_i - \gamma_i x_{i-1}}{2h_i}x^2 + \\ + \left(\frac{\gamma_i x_{i-1}^2 - \gamma_{i-1}x_i^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{(\gamma_{i-1} - \gamma_i)h_i}{6}\right)x + \\ + \left(\frac{\gamma_{i-1}x_i^3 - \gamma_i x_{i-1}^3}{6h_i} + \frac{y_{i-1}x_i - y_i x_{i-1}}{h_i} + \frac{(\gamma_i x_{i-1} - \gamma_{i-1}x_i)h_i}{6}\right)$$

Ещё можно представить многочлен со сдвигом на x_{i-1}. Для этого можно воспользоваться формулой Тейлора. А именно

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$$

Получается

$$P_i(x) = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \left(\frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{2h_i}x_{i-1} + \frac{x_i\gamma_{i-1} - x_{i-1}\gamma_i}{2h_i}\right)(x - x_{i-1})^2 + \\ +(\frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{2h_i}x_{i-1}^2 + \frac{x_i\gamma_{i-1} - x_{i-1}\gamma_i}{h_i}x_{i-1} + \\ + \frac{x_{i-1}^2\gamma_i - x_i^2\gamma_{i-1}}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2h_i} + \frac{h_i(\gamma_{i-1} - \gamma_i)}{6})(x - x_{i-1}) + y_{i-1}$$