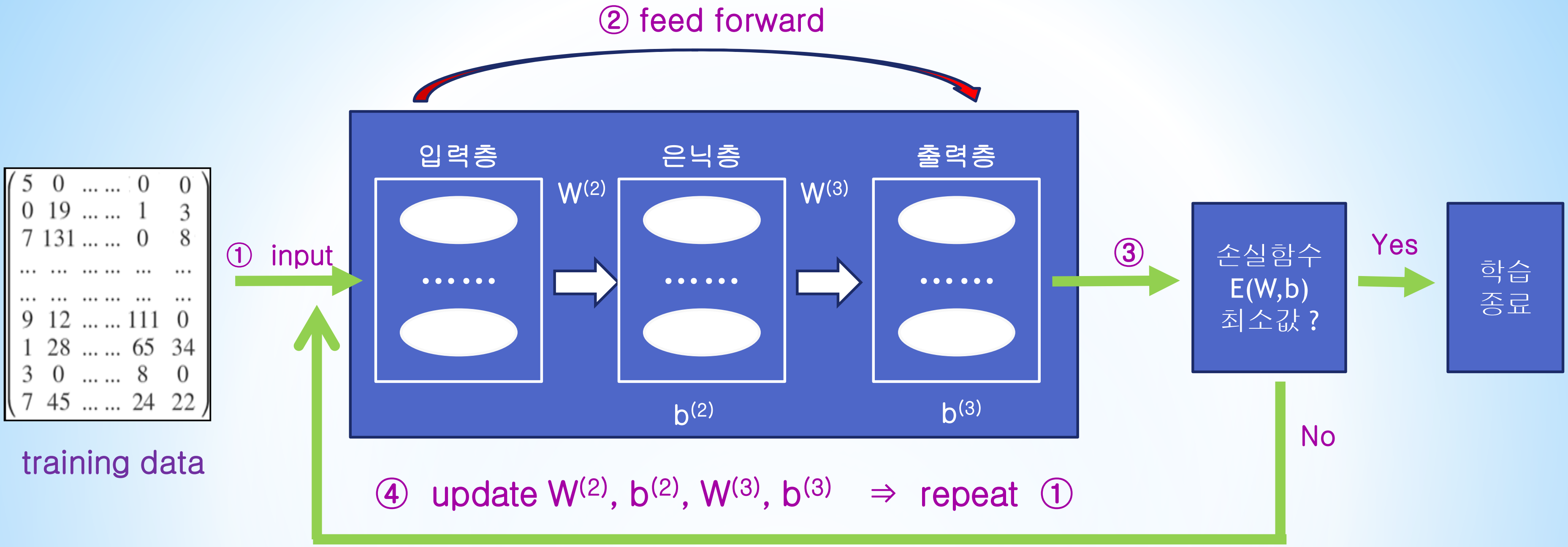
파이썬(Python)으로 구현하는

오차역전파
(Back Propagation)

– 개념 • 원리 –

Review – 수치미분 문제점



$$W^{(2)} = W^{(2)} - \alpha \frac{\partial E(W,b)}{\partial W^{(2)}}$$

$$b^{(2)} = b^{(2)} - \alpha \frac{\partial E(W,b)}{\partial b^{(2)}}$$

$$W^{(3)} = W^{(3)} - \alpha \frac{\partial E(W,b)}{\partial W^{(3)}}$$

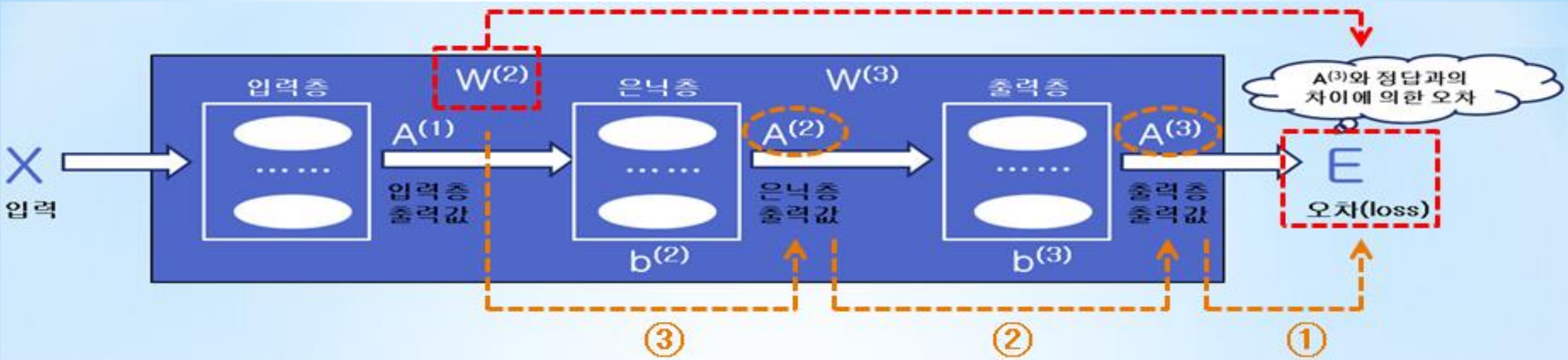
$$b^{(3)} = b^{(3)} - \alpha \frac{\partial E(W,b)}{\partial b^{(3)}}$$

문제점

수치미분으로 가중치/바이어스 업데이트 시 <u>많은 시간 소요</u> 됨

[예] 784X30X10 딥러닝 아키텍처에서 60,000 만개의 데이터를 학습할 경우, 컴퓨터 환경에 따라서는 20시간 이상 소요 !!

오차역전파 (Back Propagation) – 개념 및 원리



$$W^{(2)} = W^{(2)} - \alpha \frac{\partial E}{\partial W^{(2)}} = W^{(2)} - \alpha\left(\frac{\partial E}{\partial A^{(3)}} \cdot \frac{\partial A^{(3)}}{\partial A^{(2)}} \cdot \frac{\partial A^{(2)}}{\partial W^{(2)}}\right)$$

체인 룰에 의해 ① ② ③ 으로 분리

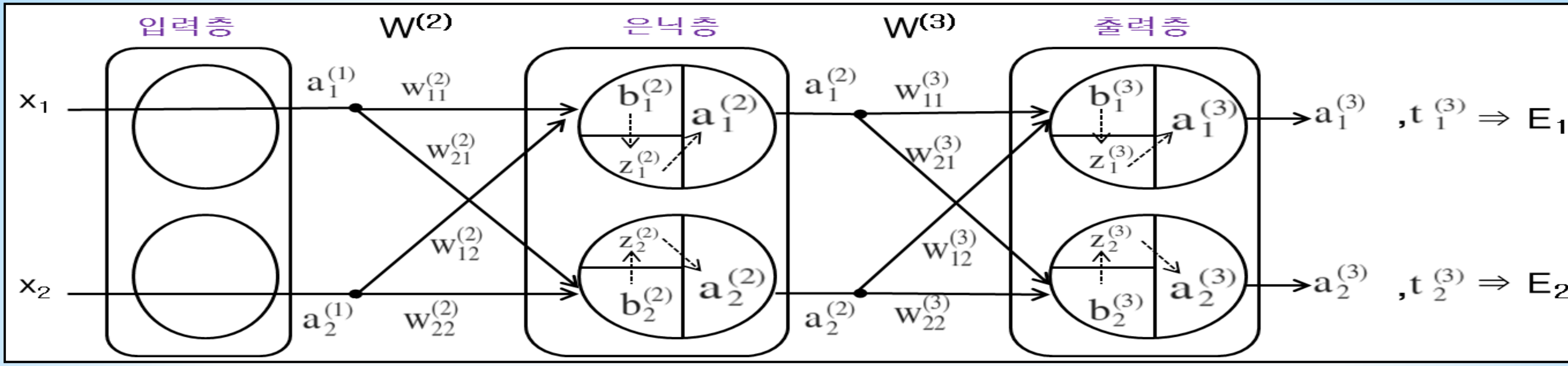
① ② ③

➢ 오차역전파 (Back Propagation) 개념 및 동작원리

- 가중치나 바이어스가 변할 때 최종오차가 얼마나 변하는지를 나타내는 $\frac{\partial E}{\partial W^{(2)}}$ 같은 편미분을,
- 체인 룰(chain rule)을 이용하여 위 식의 ①, ②, ③ 처럼 국소(local) 미분으로 분리 한 후에,
- 이러한 국소 미분을 수학 공식으로 나타내서 계산하는 방법을 **오차역전파** 라고 함

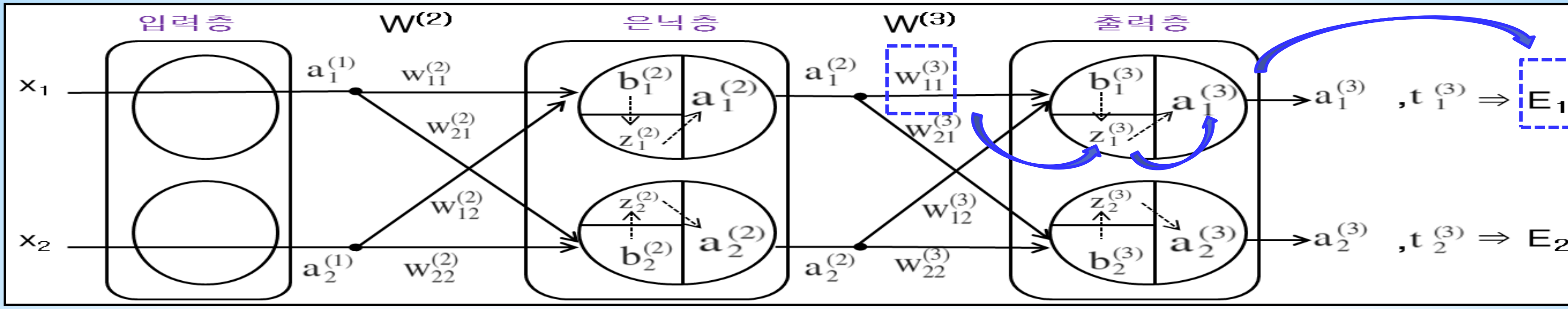
※ 오차역전파는 수치미분을 사용하지 않고 행렬로 표현되는 수학공식을 계산하기 때문에 빠른 계산이 가능함

오차역전파 (Back Propagation) – 각 층의 선형회귀 값 (z) / 각층의 출력 값 (a)



	선형 회귀 값 (z)	출력 값 (a)
입력층	입력 층에는 가중치가 없기 때문에 선형회귀 값은 적용하지 않음	$a_1^{(1)} = x_1$ $a_2^{(1)} = x_2$
은닉층	$z_1^{(2)} = a_1^{(1)} w_{11}^{(2)} + a_2^{(1)} w_{12}^{(2)} + b_1^{(2)}$ $z_2^{(2)} = a_1^{(1)} w_{21}^{(2)} + a_2^{(1)} w_{22}^{(2)} + b_2^{(2)}$	$a_1^{(2)} = \mathrm{sigmoid}(z_1^{(2)})$ $a_2^{(2)} = \mathrm{sigmoid}(z_2^{(2)})$
출력층	$z_1^{(3)} = a_1^{(2)} w_{11}^{(3)} + a_2^{(2)} w_{12}^{(3)} + b_1^{(3)}$ $z_2^{(3)} = a_1^{(2)} w_{21}^{(3)} + a_2^{(2)} w_{22}^{(3)} + b_2^{(3)}$	$a_1^{(3)} = \mathrm{sigmoid}(z_1^{(3)})$ $a_2^{(3)} = \mathrm{sigmoid}(z_2^{(3)})$

오차역전파 (Back Propagation) – 시그모이드 함수 미분



$$\frac{\partial \mathrm{sigmoid}(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)$$

지수표현

$$= \frac{\partial}{\partial z}(1+e^{-z})^{-1}$$

체인 룰 이용한 미분

$$= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2}$$

분모분리

$$= \frac{1}{(1+e^{-z})} \times \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})}$$

분자에 +1-1 해줌

$$= \frac{1}{(1+e^{-z})} \times \frac{(1+e^{-z})-1}{(1+e^{-z})}$$

약분 및 식 정리

$$= \frac{1}{(1+e^{-z})} \times \left(1 - \frac{1}{(1+e^{-z})}\right)$$

$$= \boxed{\mathrm{sigmoid}(z) \times (1 - \mathrm{sigmoid}(z))}$$

적용 사례

$$\frac{\partial E_1}{\partial w_{11}^{(3)}} = \frac{\partial E_1}{\partial a_1^{(3)}} \times \boxed{\frac{\partial a_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}}} \times \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{11}^{(3)}}$$

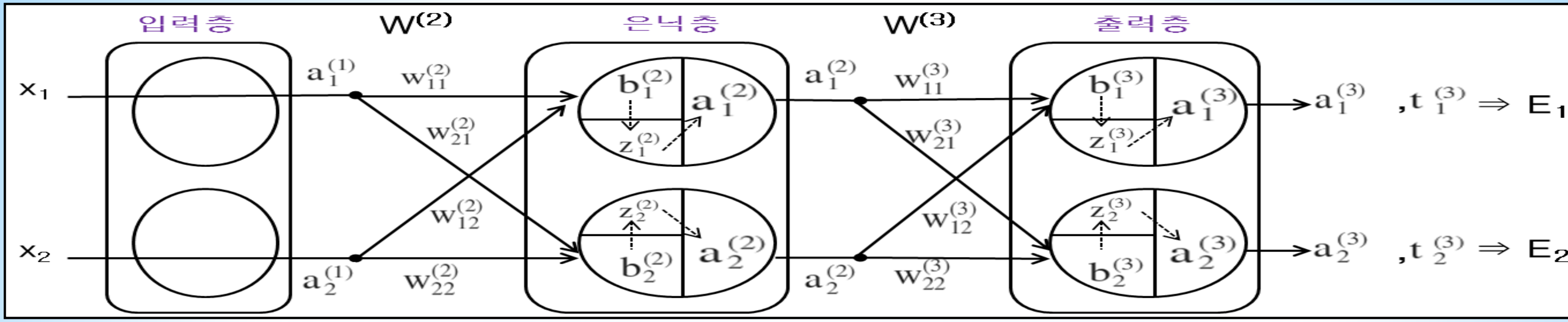
$$a_1^{(3)} = \mathrm{sigmoid}(z_1^{(3)})$$

$$= \frac{\partial E_1}{\partial a_1^{(3)}} \times \boxed{\frac{\partial \mathrm{sigmoid}(z_1^{(3)})}{\partial z_1^{(3)}}} \times \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{11}^{(3)}}$$

$$= \frac{\partial E_1}{\partial a_1^{(3)}} \times \boxed{\mathrm{sigmoid}(z_1^{(3)}) \times (1-\mathrm{sigmoid}(z_1^{(3)}))} \times \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{11}^{(3)}}$$

$$= \frac{\partial E_1}{\partial a_1^{(3)}} \times \boxed{a_1^{(3)} \times (1-a_1^{(3)})} \times \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{11}^{(3)}}$$

오차역전파 (Back Propagation) – 최종 손실(에러) 값 E / 가중치 W / 바이어스 b



최종 손실값

$$E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i^{(3)} - a_i^{(3)})^2 = \frac{1}{2}\{(t_1^{(3)} - a_1^{(3)})^2 + (t_2^{(3)} - a_2^{(3)})^2\} = E_1 + E_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(t_1^{(3)} - a_1^{(3)})^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2}(t_2^{(3)} - a_2^{(3)})^2$$

W(2), W(3)

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{21}^{(2)} \\ w_{12}^{(2)} & w_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad W^{(3)} = \begin{pmatrix} w_{11}^{(3)} & w_{21}^{(3)} \\ w_{12}^{(3)} & w_{22}^{(3)} \end{pmatrix}$$

b(2), b(3)

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} & b_2^{(2)} \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(3)} & b_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

업데이트

$$W^{(2)} = W^{(2)} - \alpha\boxed{\frac{\partial E}{\partial W^{(2)}}} \qquad W^{(3)} = W^{(3)} - \alpha\boxed{\frac{\partial E}{\partial W^{(3)}}}$$

$$b^{(2)} = b^{(2)} - \alpha\boxed{\frac{\partial E}{\partial b^{(2)}}} \qquad b^{(3)} = b^{(3)} - \alpha\boxed{\frac{\partial E}{\partial b^{(3)}}}$$

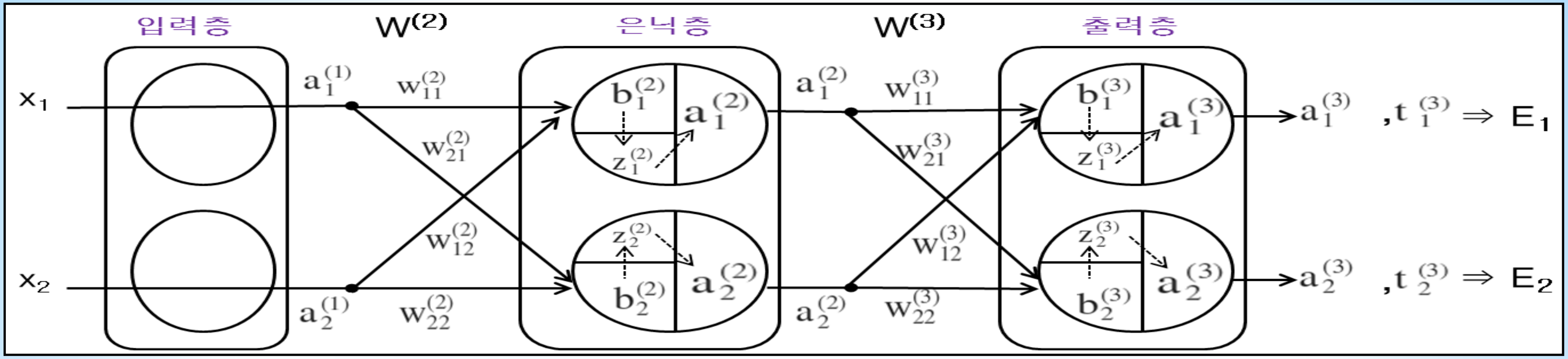
$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{21}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{22}^{(2)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{21}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{22}^{(3)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial b_2^{(2)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial b_2^{(3)}}$$

오차역전파 (Back Propagation) – 가중치 / 바이어스 업데이트



$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(2)}},\ \frac{\partial E}{\partial w_{21}^{(2)}},\ \frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(2)}},\ \frac{\partial E}{\partial w_{22}^{(2)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(3)}},\ \frac{\partial E}{\partial w_{21}^{(3)}},\ \frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(3)}},\ \frac{\partial E}{\partial w_{22}^{(3)}}$$

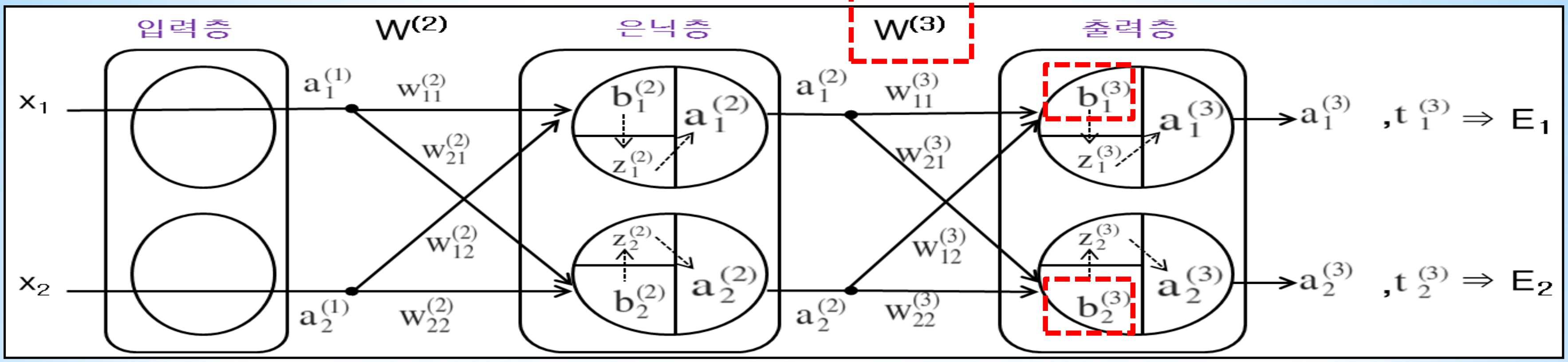
$$\frac{\partial E}{\partial b_{1}^{(2)}},\ \frac{\partial E}{\partial b_{2}^{(2)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_{1}^{(3)}},\ \frac{\partial E}{\partial b_{2}^{(3)}}$$

이러한 가중치 $W^{(2)}$ / 가중치 $W^{(3)}$ / 바이어스 $b^{(2)}$ / 바이어스 $b^{(3)}$ 미분 값을

수치미분이 아닌 행렬 기반의 수학공식을 이용하는 오차역전파 구현

출력층 오차역전파 공식 유도 – 출력층 가중치 $W^{(3)}$ / 출력층 바이어스 $b^{(3)}$



$$W^{(3)} = W^{(3)} - \alpha \frac{\partial E}{\partial W^{(3)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{21}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{22}^{(3)}}$$

출력층 가중치 $W^{(3)}$

$$b^{(3)} = b^{(3)} - \alpha \frac{\partial E}{\partial b^{(3)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_{1}^{(3)}}, \frac{\partial E}{\partial b_{2}^{(3)}}$$

출력층 바이어스 $b^{(3)}$

$\partial E/\partial W^{(3)}$, $\partial E/\partial b^{(3)}$ 오차역전파 공식 유도

$$W^{(2)} = W^{(2)} - \alpha \frac{\partial E}{\partial W^{(2)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{21}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial w_{22}^{(2)}}$$

은닉층 가중치 $W^{(2)}$

$$b^{(2)} = b^{(2)} - \alpha \frac{\partial E}{\partial b^{(2)}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_{1}^{(2)}}, \frac{\partial E}{\partial b_{2}^{(2)}}$$

은닉층 바이어스 $b^{(2)}$

$\partial E/\partial W^{(2)}$, $\partial E/\partial b^{(2)}$ 오차역전파 공식 유도