

УД621.375+535

Овечко В.С., професор

## Ортонормованный базис для радиосигналов

В роботі запропоновано розклад радіосигналів, зокрема надширокополосних, в ортонормований ряд елементарних хвильових пакетів (ЕХП)

Ключові слова: ортонормований базис, радіосигнали, елементарні хвильові пакети, спектр.

mail:ovs@univ.kiev.au

Статтю представив д.ф.-м.н. Левицький С.М.

Ovechko V.S., professor

## Orthogonal normalized base for radio signals

It has been proposed orthogonal normalized series of the elementary wave packets (EWP) for radio signals presentation, moreover, super wideband ones

Key Words: Orthogonal normalized base, radio signals, the elementary wave packets, spectrum

### Вступ

Задачі аналізу і синтезу сигналів, в тому числі радіосигналів, були і залишаються традиційними для радіолокації, зв'язку, теорії інформації, тощо. Нові проблеми настали у зв'язку з розвитком методів надширокополосної радіолокації, розробкою техніки генерації і вимірювання лазерних імпульсів надкороткої тривалості, оптичних стандартів частоти, часу і довжини [1,2].

Найбільш поширеним методом дослідження радіосигналів – електромагнітних полів, що поширюються в просторі, є метод Фур'є-аналізу [3,4]. Поряд з багатьма перевагами, однією з яких є наочність спектрів, в які розкладаються часові сигнали, перетворення Фур'є (ПФ) має суттєві недоліки.

Зокрема, обмежені в часі сигнали розкладаються в гармонічні функції, визначені на нескінченному інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Отже, по-суті, розклад відбувається за „нефізичними” базовими функціями. По-друге, для знаходження окремої спектральної компоненти ( $A_\omega, \omega$  – частота) треба врахувати поведінку сигналу на всій часовій осі. Це значно ускладнює розрахунки і, до того, робить неможливим розділення в часі. До речі, для подолання останнього недоліку, розроблена методика вейвлет-перетворення [5].

Метою даної роботи є розробка представлення (розкладу) радіосигналів, яке б врахувало властивості реальних (фізичних) електромагнітних полів.

### 1. Властивості радіосигналів (РС) – електромагнітних хвиль (ЕМХ)

Електромагнітні хвилі (ЕМХ) – це розв'язок хвильового рівняння, зокрема, для електричної компоненти  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  електромагнітного поля. Характерною особливістю ЕМХ є те, що їх джерелом у вільному просторі є струми зміщення [6]. Це була чи не найважливіша гіпотеза, що дозволила Дж. Максвеллу сформулювати його відому систему диференціальних рівнянь в частинних похідних. Струми зміщення з'являються тоді, коли поле змінюється в просторі (і в часі). Таким чином поширюються електромагнітні хвилі. Якщо обмежитись фінітним рухом заряджених частинок, то саме завдяки йому формуються ЕМХ, в яких відсутня постійна складова поля. Ця умова може бути записана як

$$I = E_0 \int_0^\tau f(t) dt = 0, \quad (1)$$

де  $E_0$  – амплітуда поля,  
 $\tau$  – тривалість імпульсу,  
 $f(t)$  – форма імпульсу.

В роботі [10] величина  $I$  одержала назву „параметр дивності”, що означає, що звичайні генератори ЕМХ (атоми, молекули, електронні пучки в резонаторах і таке інш.) генерують правильні „не дивні” імпульси. До цього питання ми ще повернемося в подальшому.

До умови (1) можна додати природню умову обмеженості ЕМ імпульсу в часі

$$f(0) = f(\tau) = 0. \quad (2)$$

Нарешті, якщо звернутись до розв'язку задачі дифракції ЕМХ (див. наприклад, [7]), то можна додати ще одне обмеження – на швидкість зміни амплітуди ЕМХ в моменти часу  $t = 0$  і  $t = \tau$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=\tau} = 0. \quad (3)$$

Якби умова (3) не виконувалась, то в момент досягнення фронту імпульсу певної точки дифракційного поля, спостерігався б скачок амплітуди, що не є фізичним.

Таким чином, будь-яке представлення (розклад) ЕМХ має задовольняти вимогам (1)–(3). Сукупність умов (1)–(3) було використано в роботах [11], [12] автора для опису фемтосекундних оптичних імпульсів.

Якщо звернутись до умов, за якими функція може бути розкладена в інтеграл Фур'є [4], а це „її неперервність і абсолютна інтегрованість”, то практично будь-який фізичний РС задовольняє їм. В той же час, базові функції Фур'є – представлення – гармонічні не задовольняють умовам (1)–(3) і не є фізичними, таким чином, реалізуємими в експерименті. Складається „дивна” ситуація, коли для аналізу фізичного сигналу використовується його розклад за „нефізичними” функціями.

Таким чином, метою цієї роботи є розробка ортонормованого представлення (ряду), яке б автоматично враховувало умови (1)–(3), для подальшого його використання в аналітичних та чисельних методах аналізу і синтезу радіосигналів. Як це буде з'ясовано далі, таке представлення, на відміну від відомого розкладу Фур'є, є особливо актуальним в граничних випадках: 1) лазерних імпульсів фемтосекундної тривалості, 2) лазерних стандартів часу (і довжини), 3) розробки методів надширококутної радіолокації і таке інш.

## 2. Базові ортонормовані хвильові функції-елементарні хвильові пакети (ЕХП)

В курсі математичного аналізу доводиться [4], що ортонормований узагальнений ряд Фур'є забезпечує мінімізацію середньоквадратичного відхилення часткових сум, що апроксимують функцію, та його рівномірну збіжність. Але цього не є достатнім, оскільки залишаються не врахованими фізичні умови (1)–(3). Їх врахування складає мету даного розділу.

Для задоволення умови (1) достатньо розклад функції  $f(t)$  вести за сумою добутків ортогональних функцій, як це було

запропоновано в роботі [11]. В якості таких функцій виберемо гармонічні функції. Тоді послідовність функцій  $\varphi_{nm}(x)$ , які є добутком гармонічних функцій, набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \sin x \sin 2x, \quad \sin x \sin 3x, \dots \\ & \sin 2x \sin 3x, \quad \sin 2x \sin 4x, \dots \\ & \sin 3x \sin 4x, \quad \sin 3x \sin 5x, \dots \\ & \sin 4x \sin 5x, \quad \sin 4x \sin 6x, \dots \\ & \text{де } x = \pi \frac{t}{\tau}. \end{aligned}$$

Не важко перевірити, що кожна з цих функцій  $\varphi_{nm}(x)$  окрім (1) задовільняє і умовам (2), (3):

$$\varphi_{nm}(0) = \varphi_{nm}(\pi) = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_{nm}(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi_{nm}(x)}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0 \quad (5)$$

Наступним кроком має бути формування з функцій  $\varphi_{nm}(x)$  ортонормованого ряду. Для цього скористаємось процесом ортогоналізації Грама-Шмидта [8]. По-перше, покладемо  $V_1(x) = \varphi_1(x)$ . Далі для побудови  $i+1$  ортонормованої функції використаємо рекурентну формулу

$$V_{i+1}(x) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (U_k, \varphi_{i+1}) U_k(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де  $(U_k, \varphi_{i+1}) = \int_0^\pi U_k(x) \varphi_{i+1}(x) dx$  – скалярний добуток.

В формулі (6) ми врахували, що функції  $U_i(x)$  є не тільки ортогональними, а і нормованими

$$U_i = \frac{V_i(x)}{\sqrt{(V_i, V_i)}}. \quad (7)$$

Таким чином, застосувавши алгоритм (6), (7) одержимо наступну ортонормовану послідовність функцій, наприклад, непарних одержимо наступну ортонормовану послідовність



$$U_1(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} [\cos(x) - \cos(3x)],$$

$$U_3(x) = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \left[ \frac{1}{2} (\cos(x) + \cos(3x)) - \cos(5x) \right],$$

$$U_5(x) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left[ \frac{1}{3} (\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)) - \cos(7x) \right],$$

$$U_7(x) = \sqrt{\frac{8}{5\pi}} \left[ \frac{1}{4} (\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)) - \cos(9x) \right],$$

...

Як можна побачити, загальна формула для  $2n_0 + 1$ -го доданку ряду набуває вигляду

$$U_{2n_0+1}(x) = \sqrt{\frac{2(n_0+1)}{\pi(n_0+2)}} \left[ \frac{1}{n_0+1} \sum_{n=0}^{n_0} \cos[(2n+1)x] - \cos[(2n_0+3)x] \right], \quad (8)$$

$n_0 = 0, 1, \dots$

Аналогічно можна одержати загальну формулу для парних доданків ряду

$$U_{2n_0+2}(x) = \sqrt{\frac{2(n_0+1)}{\pi(n_0+2)}} \left[ \frac{1}{n_0+1} \sum_{n=0}^{n_0} \cos[(2n+2)x] - \cos[(2n_0+4)x] \right], \quad (9)$$

$n_0 = 0, 1, \dots$

До того як записати остаточний вигляд ряду, розрахуємо суми в виразах (8), (9), для чого скористаємося табличним виразом для

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos(\alpha + i\delta) \quad [9].$$

Тоді остаточно одержимо вираз для будь-якого радіосигналу  $f(x)$  у вигляді ортонормованого на проміжку  $[0, \pi]$  ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} U_{2n+1}(x) + B_{2n+2} U_{2n+2}(x)), \quad (10)$$

де

$$U_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)}} \left[ \frac{\sin[x(2n+2)]}{2(n+1)\sin[x]} - \cos[x(2n+3)] \right], \quad (11)$$

$$U_{2n+2}(x) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)}} \left[ \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin[x(2n+3)]}{\sin[x]} - 1 \right) - \cos[x(2n+4)] \right], \quad (12)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Коефіцієнти  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+2}$  як і в будь-якому ортонормованому ряду, визначаються скалярними добутками

$$A_{2n+1} = \int_0^{\pi} f(x) U_{2n+1}(x) dx, \quad (13)$$

$$B_{2n+2} = \int_0^{\pi} f(x) U_{2n+2}(x) dx, \quad (14)$$

Ряд (10) завдяки тому, що його доданки задовольняють умовам (1)–(3) і є ортонормованим, може бути названий як розклад за елементарними хвильовими пакетами (ЕХП), а відповідний розподіл амплітуд  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+2}$  – ЕХП-спектром. Відмітимо, що незважаючи на те, що ми розкладаємо відокремлений радіоімпульс, його розклад (10) має вигляд ряду, а не інтегралу. Це є наслідком умов (1)–(3). Якщо знехтувати поведінкою РС в околі точок  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $x_2 \rightarrow \pi$ , і розглядати квазімонохроматичне наближення ( $n \gg 1$ ), то одержимо розклад за гармонічними функціями:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[x(2n+3)], \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[x(2n+4)],$$

які в перетворенні Фур'є.

У виразах для ЕХП (11,12) в знаменнику розташована функція  $\sin[x]$ , яка  $\rightarrow 0$  в т.т.  $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pi$ . Але ніякої особливої точки немає, оскільки маємо невизначеність типу  $0/0$ . За правилом Лопіталя вона прямує до

$$\lim_{x \rightarrow 0, \pi} \frac{\sin[x(2n+2)]}{\sin[x]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, \pi} \frac{(2n+2) \cos[x(2n+2)]}{1 \cdot \cos[x]} = \pm 2(n+1)$$

Теж саме стосується і поведінки функції для  $U_{2n+2}(x)$  в т.т.  $x_{1,2} = 0, \pi$ . Отже, вирази в квадратних дужках в (11), (12) прямують до нуля в т.т.  $x_{1,2} = 0, \pi$ .

### 3. Розв'язок деяких „проблем” оптики

Ефективність застосування ЕХП – розкладу покажемо на прикладі розв'язку двох відомих проблем. Перша, – це оптимізація форми фемтосекундних оптичних імпульсів. Оптимізація з точки зору знаходження форми надкороткого оптичного імпульсу певної тривалості, що забезпечує мінімальну необхідну швидкість зміни амплітуди у часі і, отже, потужність і смугу частот. Зрозуміло, що цим вимогам можуть задовольняти ЕХП нижчих порядків. На рис.1. побудовано непарні ЕХП, на рис. 2 – парні. Нас цікавить поведінка першої похідної по часу від амплітуди. Відповідні залежності побудовано на рис.3, рис.4. Видно, що оптимальним є непарний ЕХП імпульс нульового порядку  $U_1(x) (n=0)$ .

$U(2n+1, X), n=2, 1, 0$

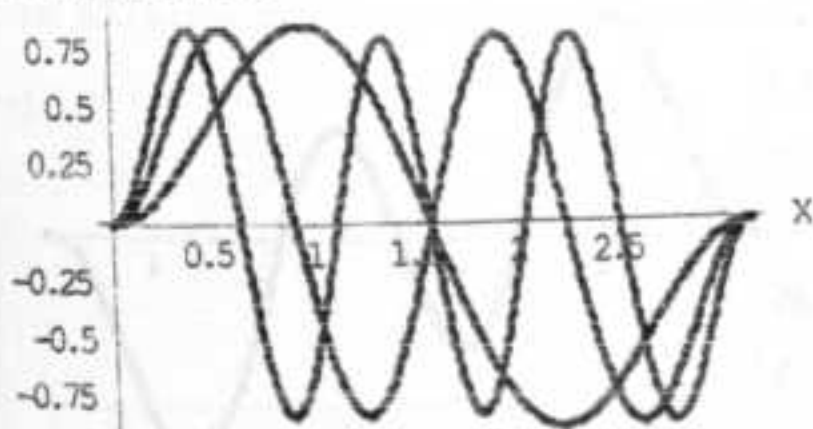


Рис.1. Непарні ЕХП:  $n=0, 1, 2$

$U(2n+2, X), n=2, 1, 0$

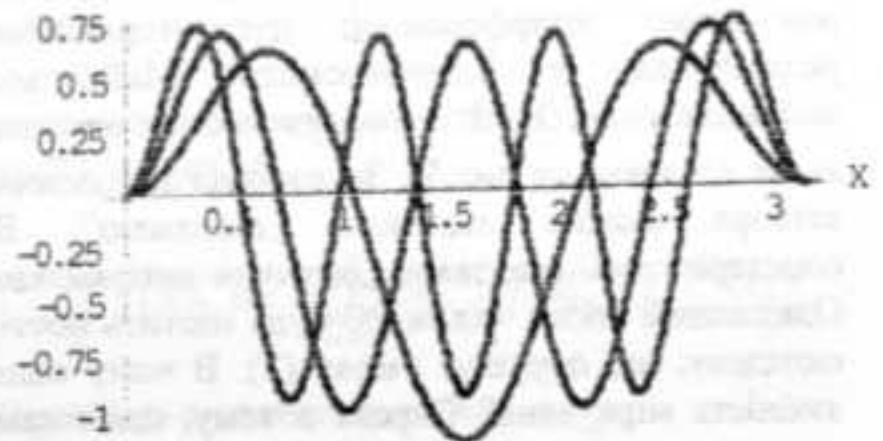


Рис.2. Парні ЕХП:  $n=0, 1, 2$

$dU(2n+1, X)/dx, n=2, 1, 0$

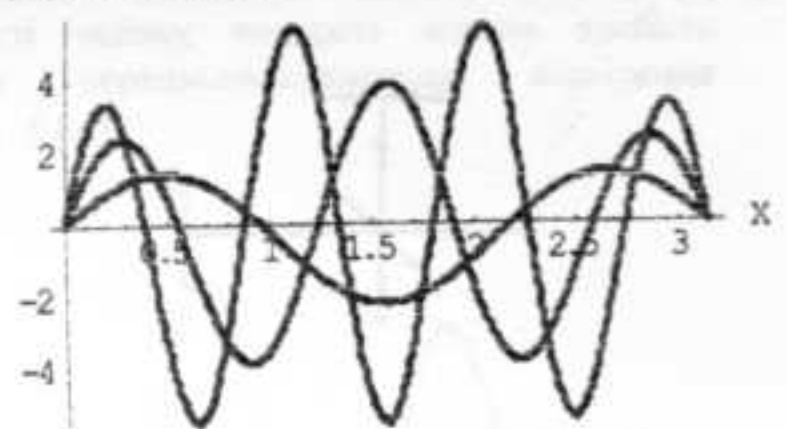


Рис.3. Швидкість зміни амплітуди ЕХП (непарні):  $n=0, 1, 2$

$dU(2n+2, X)/dx, n=2, 1, 0$

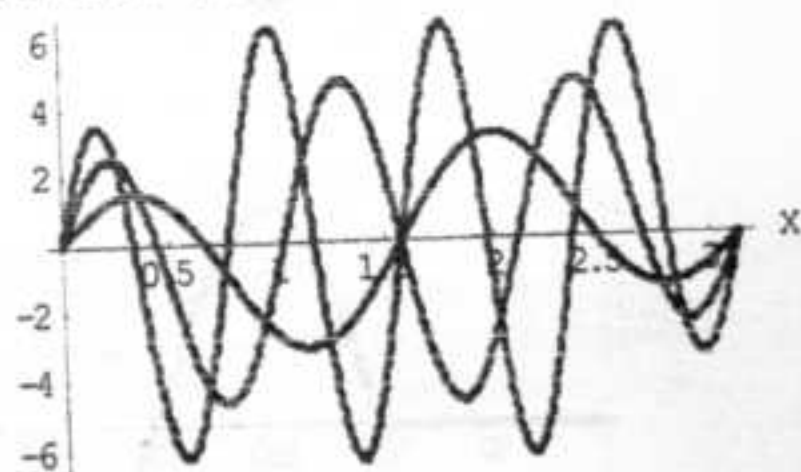
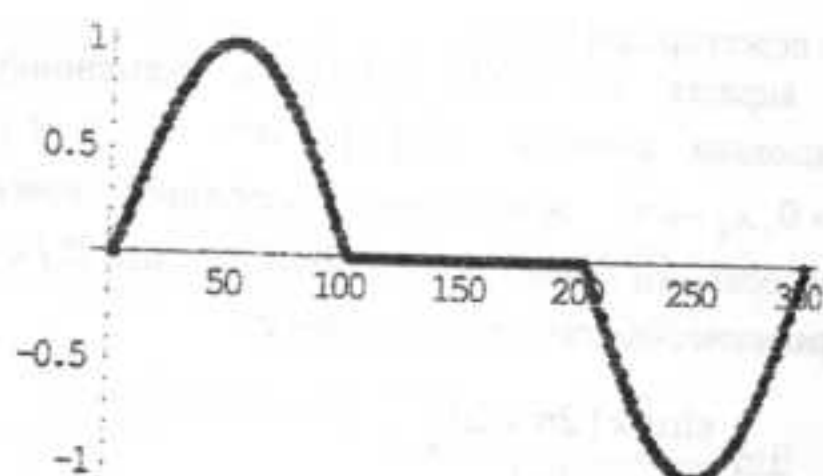


Рис.4. Швидкість зміни амплітуди ЕХП (парні):  $n=0, 1, 2$

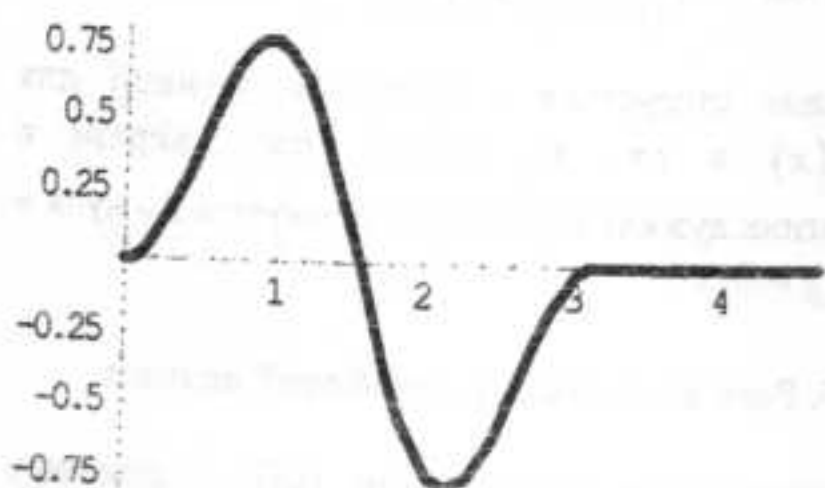
Ще одна проблема стосується так званих „дивних”, за термінологією автора роботи [10], електромагнітних імпульсів. Параметр „дивності”



$I(1)$  має дорівнювати нулю. Але, якщо ми розглянемо інтерференцію цуга гармонічного радіосигналу в інтерферометрі Майкельсона, затриманого на  $\lambda/2$ , то одержимо дві напівхвилі як це показано на рис.5а. За допомогою оптичного затвора можна виділити „півхвилю”. Буде спостерігатись так зване „оптичне випрямлення”. Одержаний таким чином РС буде містити постійну складову, що порушує умову (2). В чому полягає хибність міркувань? Справа в тому, що з самого початку вибрана нефізична форма РС-цуг гармонічного сигналу. Насправді, якщо її вибрати у вигляді ЕХП, наприклад, нульового порядку, то одержимо інтерференційний сигнал так, як це розраховано на рис.5б. Ніякої невідповідності умові (1) немає, якщо РС вибрати у вигляді розкладу за елементарними хвилювими пакетами (10)-(12).



а)



б)

Рис.5. Інтерференція цугів: а) монохроматичного сигналу,  $\Delta l = \lambda/2$ ; б) ЕХП,  $n=0$ ,  $\Delta l = \lambda/2$ ,

Більш загальною проблемою, яка пов'язана з використанням гармонічного наближення для РС, є вимога щодо відповідності самого сигналу і процесів його взаємодії з речовиною, принципу причинності. Зокрема, для того, щоб зберегти фізичність відгуку речовини (осциляторна модель) на дію гармонічних РС, Крамерсом і Кронігом були одержані додаткові співвідношення, що пов'язують між собою дійсну ( $\epsilon'$ ) і уявну ( $\epsilon''$ ) частини діелектричної проникненості. Але в рамках цієї роботи ця проблема не може бути розглянута.

#### 4. Моделі радіосигналів (РС)

Висновок, що може бути зроблений за результатами попередніх розділів, - це очевидна перевага ЕХП-перетворення порівняно наприклад, до перетворення Фур'є. В цьому розділі розглянемо приклади його застосування для опису амплітудно-модульованого (АМ) та частотно-модульованого (ЧМ) радіосигналів.

Методика ЕХП-аналізу РС полягає у наступному:

- 1) перевірка РС на відповідність умовам (1)-(3),
- 2) знаходження ЕХП-спектру  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+2}$ ,
- 3) перевірка розкладу РС в ряд на повноту,
- 4) відтворення форми РС за допомогою ЕХП-розкладу.

Першим розглянемо АМ РС:

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin[6x]$$

Як не важко перевірити, він задовольняє умовам (1)-(3). Підставимо  $f(x)$  у вирази (13),(14) і знайдемо ЕХП-спектр. Він представлений на рис.6.

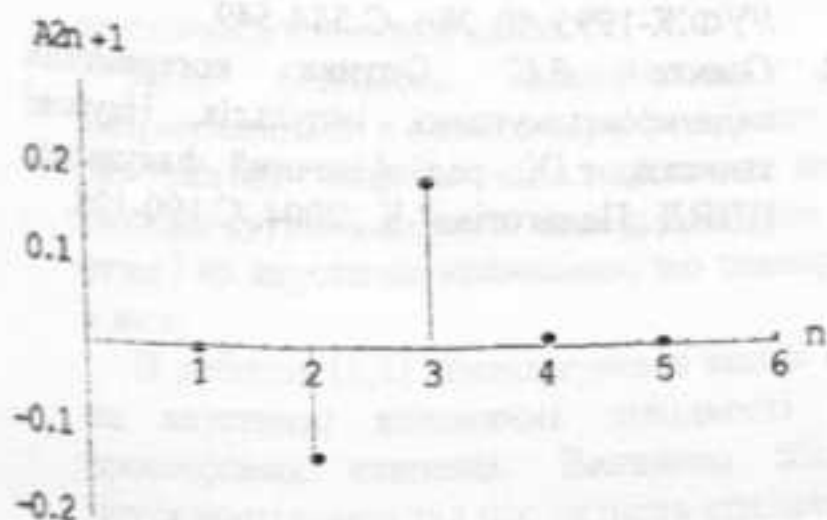


Рис.6. ЕХП - спектр АМ сигналу:

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin[6x].$$

Для перевірки розкладу на повноту, застосуємо рівність Парсеваля [4]

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1}^2 + B_{2n+2}^2) \quad (15)$$

і переконаємося в повноті розкладу.

Останній крок - це побудова функції  $f_N(x)$  з застосуванням базових функцій (10)-(12). На рис.7. представлена функція  $f(x)$ , знайдена за допомогою ЕХП-представлення  $f_N(x)$ . Видно, що відтворення  $f(x)$  з застосуванням „спектральних” компонент досить якісне. За необхідності оцінку точності можна зробити розрахував середньоквадратичне відхилення  $f_N(x)$  від  $f(x)$ .

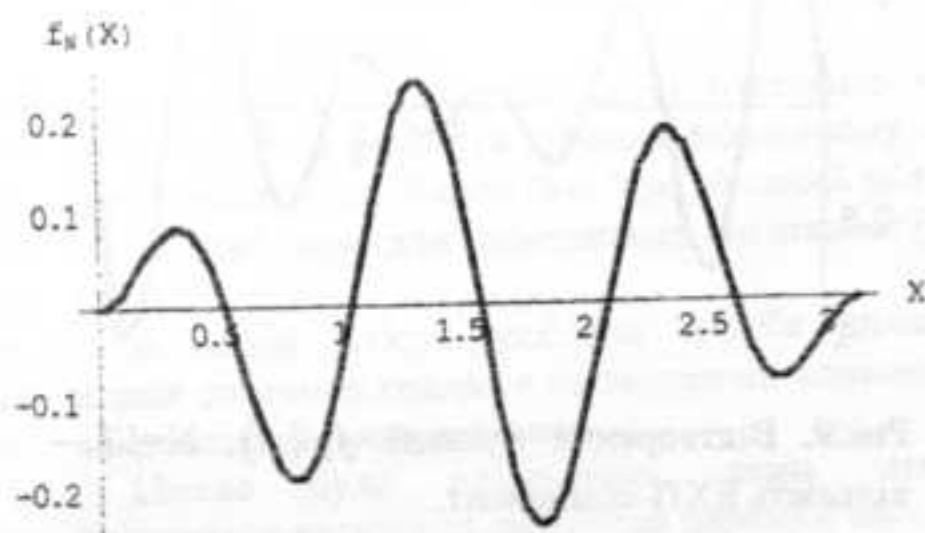


Рис.7. Відтворення функції  $f_N(x)$ ,  $N=5$  - кількість ЕХП-компонент.

Наступний радіосигнал частотно-модульований:

$$f(x) = \left(1 - \frac{2.25x}{\pi}\right) \sin\left[8x\left(1 + \frac{0.125x}{\pi}\right)\right]$$

Цікаво відмітити, що для задоволення вимогам (1)-(3) ЧМ сигнал повинен мати додаткову амплітудну модуляцію, як і передбачено при записі  $f(x)$ .

Знаходимо ЕХП-спектр (див.рис.8). На рис.9. зображено результат відтворення функції  $f(x)$  за допомогою ЕХП-ряду:  $f_N(x)$ . Використано - 17 компонент ЕХП-спектру.

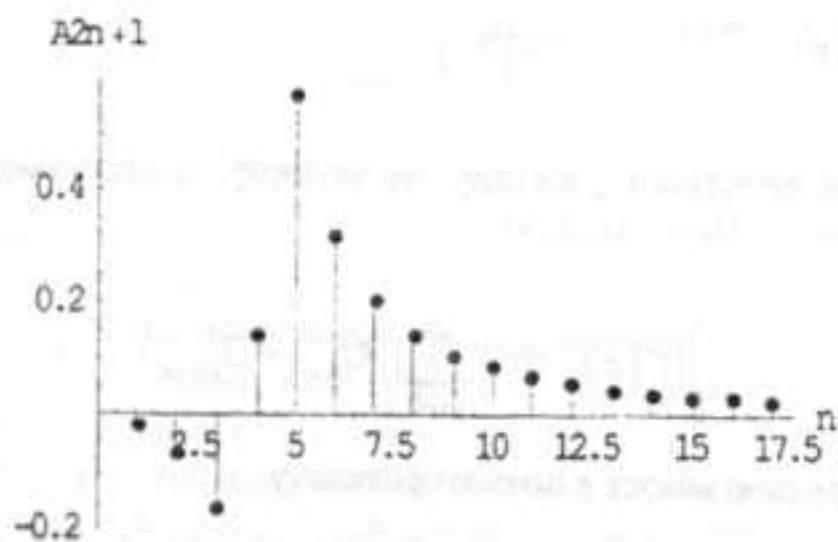


Рис.8. ЕХП-спектр ЧМ сигналу:

$$f(x) = \left(1 - \frac{2.25x}{\pi}\right) \sin\left[8x\left(1 + \frac{0.125x}{\pi}\right)\right]$$

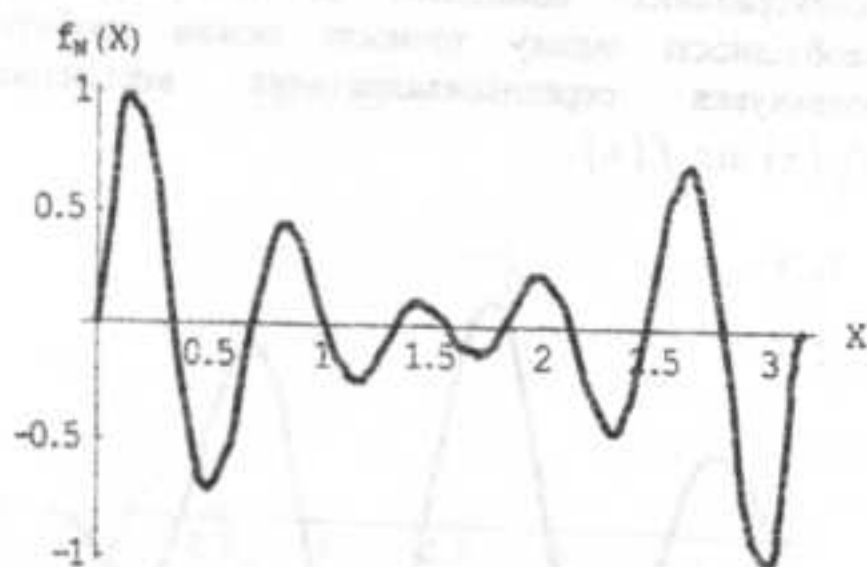


Рис.9. Відтворення функції  $f_N(x)$ ,  $N=17$  – кількість ЕХП-компонент.

Для апаратного відтворення ЕХП-аналізатора необхідно мати:

1) генератор базисних функцій (11),(12), 2) пристрій для перемноження досліджуваної функції  $f(x)$  на базисні, 3) інтегратор, 4) вимірювальний прилад. Очевидно, складнощі з його технічної реалізації можуть зростати при переході від радіодіапазону і НВЧ до оптичного діапазону.

#### Висновки

Запропонований розклад в ряд імпульсних радіосигналів РС – ряд елементарних хвилевих пакетів (ЕХП), забезпечує аналіз і синтез РС з застосуванням фізично реалізуємих базисних функцій. Це дозволяє

уникнути деяких „парадоксів”, що є характерними, наприклад, для Фурє – перетворення, коректно записати надширокополосні (поза квазімонохроматичного наближення) радіосигнали, дослідити їх взаємодію з речовиною і т інш.

#### Список використаних джерел

1. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений.-М: Радио и связь, 1989, 192 с.
2. Ахманов С.А., Выслоух Б.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов.-М: Наука, 1988, 312 с.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. Изд-во «Наука», Москва, 1979, 383 с.
4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд-во «Наука», Москва, 1967, 607 с.
5. Чуи К. Введение в вэйлеты. Изд-во «Мир», Москва, 2001, 412 с.
6. Каценельбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. Изд-во «Наука», Москва, 1966, 240 с.
7. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. Изд-во «Мир», Москва, 1971, 495 с.
8. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., Атомиздат, 1970, 712с.
9. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд-во «Наука», Москва, 1973, 227 с.
10. Бессонов Е.Г. Условно-странные электромагнитный волны. //Квантовая электроника, 19, №1, 1992, 35-39.
11. Овечко В.С. Поширення та дифракція на діафрагмі оптичних відеоімпульсів //УФЖ-1995-40, №6.-С.544-549.
12. Овечко В.С. Оптика когерентних надширокополосних імпульсів. Наукові записки, т.IX, радіофізичний факультет, НПВД „Педагогіка” К., 2004, С.190-198.

Надійшла до редколегії 27.02.2009г.