



# ВІСНИК

КІЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 1



**КІЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ВІСНИК**

**КІЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

**Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**

Наукова бібліотека  
ім. М. Максимовича  
**КНУ**

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



**14159JB**

45 - чит. зал періодики та дисерт. | 25.00

**ВИПУСК №1 2009**

## **Вісник Київського університету, випуск №1, 2009**

### **Серія: фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів.

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

#### **Редакційна колегія:**

- Анісимов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусайнов Денис Ях'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Адаменко Ірина Іванівна, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісимов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Гарашенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

#### **Редакційний відділ:**

- Анісимова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безушак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Верченко Андрій Петрович, **технічний редактор**, ap.verchenko@gmail.com.

#### **Адреса редакційної колегії:**

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142-67-9

ISSN 1812-5409

## ЗМІСТ

### АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Василік О.І., Козаченко Ю.В., Яковенко Т.О. Моделювання стаціонарних випадкових послідовностей	7
Вотякова Л.А. Елементарні функції тернарної змінної	11
Друшляк М.Г. Про норму абелевих нециклических підгруп у неперіодичних групах	14
Лучко В.С. Про дію диференціювань на нільпотентні ідеали асоціативних кілець	19
Моклячук О.М. Моделювання гаусових випадкових процесів у просторі $L_p(T)$	23
Овсієнко С.А., Роганов Ю.В., Роганова О.Ю. Нерозв'язні матричні поліноміальні рівняння	27
Рябухо О.М. Розвиток теорії подільності для кілець цілих алгебраїчних чисел в працях академіка Дмитра Граве	31

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Василевський Ю.Є., Лимарченко О.С. Нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною в околі критичних швидкостей течії	41
Калайда О.Ф. Про середню точку в теоремах про середнє.	47
Карнаухов В.Г., Січко В.М., Карпенюк О.С. Вплив температури дисипативного розігріву на пасивне демпфування вимушених резонансних коливань ізотропної в'язкопружної циліндричної панелі	51
Креневич А.П., Богоніс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь	55
Лимарченко О.С., Ружицький І.С. Побудова координатних функцій для нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі	59
Острик В.І., Улітко А.Ф., Улітко І.А. Вдачлення пружного клиноподібного індентора в пружний півпростір	63
Турбал Ю.В. Часткові розв'язки рівнянь газової динаміки галактик із збуренням типу б-солітонів	67

### КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Анісімов А.В., Кулябко П.П., Кулябко О.П. Мовні засоби для опису об'єктно-орієнтованих атрибутів граматик	75
Бойко Т.М., Гаращенко Ф.Г. Математичні моделі зі зміною вимірності фазового простору для опису діяльності фінансово-промислових структур	79
Бондарев Б.В., Козир С.М. До питання про $\varepsilon$ -достатнє управління в одній задачі Р.Мертона	82
Верченко А.П., Савка Ю.О. Сегментація рядків в рукописних документах на основі моделі Мамфорда-Шаха	88
Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах тепло-масопереносу з урахуванням контактного розмиву	92
Гук Л.М. Експериментальне дослідження методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії	97
Івохін Є.В., Аджубей Л.Т., Бабанін С.О. Алгоритм прийняття рішень в ситуації з нечіткими вихідними даними	102
Карнаух Т.О. Деякі властивості множин, заданих скінченими R-перетворювачами	106
Кулян В.Р., Рутицька В.В., Юнькова О.О. Про математичне моделювання динаміки портфеля активів	112
Машченко С.О. Відношення NE-переваги і домінування в некооперативних іграх та їх властивості	115
Назарага І.М. Монетарні моделі визначення обмінного курсу в умовах економіки України	121
Парфірова Т.С. Навчальні середовища як відкрито-замкнені системи	127
Процик П.П. Композиційно-номінативний підхід до специфікації програмних систем у мові Z-Notation	133
Розора І.В. Умови для знаходження моделі випадкового процесу із наперед заданою точністю та надійністю в просторі $C[0,T]$	139
Семенов В.В., Апостол Р.Я., Войтова Т.А. Варіант принципу Девілля-Годфруа-Зіслера для векторної оптимізації	145
Тикулов Є.В. Способи задання фігур фрактальної геометрії, індуковані ідеєю розпаду зірок	149

Швець Д.В. Чисельно-аналітичний підхід до моделювання динамічної взаємодії двох надпровідних кілець	153
Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Моделі для аналізу чутливості розривних динамічних систем зі змінною вимірювання фазового простору	158
Яценко В.О., Семенів О.В. Динамічний підхід до оцінювання параметрів біохімічних компонент в рослинності	163

## РАДІОФІЗИКА

Бунак С.В., Жарких Ю.С., Лисоченко С.В., Третяк О.В., Шкавро А.Г. Віртуальні вимірювання в симулаторах лабораторних робіт з фізики	171
Гайдай Ю.О., Маслюківський Р.М., Сирота А.В. Оптичний хвилеводний демультиплексор	176
Ільченко Л.М., Коленов С.О., Литвиненко С.В., Молочко П. В., Виноградов Ю.В. Про вклади у фазу диференційно-фазового фотовідповідного сигналу	180
Коваль І.П., Ніколайчик А.Е. Моделювання початкових стадій формування силіциду хрому на поверхні Si (001)	184
Коленов С.О., Денисенко П.І. Метод попередньої обробки диференційно-фазових даних, заснований на неперервному вейвлет-перетворенні	188
Коломієць А.Р. Модель системи елементарних частинок	193
Овечко В.С. Ортонормований базис для радіосигналів	196
Осіпов С. М., Маринець А. В. Вплив сонячних спалахів на характеристики п'ятихвилинних коливань сонячної фотосфери	203
Пономарьов О.П., Анісімов І.О. Двовимірна нестационарна чисрова модель жевріючого розряду	206
Прокопенко О. В. Підвищення ефективності алгоритму чисельного розрахунку власної частоти фундаментальної моди чвертьхвильового резонатора поверхневої хвилі	211
Савенков С.М., Клімов О.С., Оберемок Є.А. Стокс-поляриметр на рідкокристалічних комірках: аналіз похибок.	215

## СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д., Абдікарімов Б.Ж., Рудніков Є.Г., Білоус О.І., Скляров Ю.П. Теплоємність наносистем поблизу критичної точки	223
Віленський В.О., Демченко В.Л. Вплив величини напруженості постійного електричного поля на структуру, теплофізичні властивості та провідність нанокомпозитів поліепоксид – оксид металу	227
Дегода В.Я., Софієнко А.О. Вплив електричного поля на люмінесценцію селеніду цинку	233
Держипольська Л.А., Гнатовський О.В., Удалов Є.П., Єжов П.В. Новий підхід до вимірювання фазових збурень об'єктів за допомогою інтерферометричного панорамного корелятора	239
Копитков В.В., Селькин В.П., Гуринович Л.М., Кудіна О.Ф., Адаменко І.І., Королович В.Ф. Вивчення впливу солей на кислотність водних розчинів полімерів	245
Лисов В.І., Яриш В.В. Фазове розшарування рідких бінарних сплавів 3d-перехідних та благородних металів	251
Ломакіна О.В., Шайкевич І.А. Спектроеліпсометричні властивості тонких плівок молібдену з переходним шаром між плівкою і діелектричною підкладкою при збудженні поверхневих полярітонів	255
Мельниченко М.М. Вплив термічного відпалу на процеси формування та властивості наноструктурованого кремнію	259
Овсієнко І.В., Лень Т.А., Мацуй Л.Ю. Термоерс нановуглецевого матеріалу, що містить багатостінні вуглецеві нанотрубки	263
Онанко А.П. Вказівна поверхня пружно-непружного тіла сплаву Ag0.9Zn0.1	267
Пророк В.В. Пояснення закономірностей надходження $^{137}\text{Cs}$ та калію до рослини у природних умовах	271
Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Розрахунки енергії оптичного переходу лазерного барвника	275
Удалов Є.П. Електронні спекл-зсувні методи голограмічної інтерферометрії з застосуванням керованих світловодних трактів	281
Чалий О.В., Зайцева О.В. Коєфіцієнт дифузії в критичній області з урахуванням просторової дисперсії та низької кросоверної розмірності	287

# АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Підручник для 9 класу

загальної середньої освіти

для учнів з поглибленим вивченням

математики та інших предметів

загальнодержавного значення

для дистанційного навчання



УДК 519.21

О.І.Василюк, к.ф.-м.н., доцент,  
Ю.В.Козаченко, д.ф.-м.н., професор,  
Т.О. Яковенко, к.ф.-м.н., м.н.с.

## Моделювання стаціонарних випадкових послідовностей

У статті розглядаються стаціонарні в широкому розумінні випадкові послідовності, що можуть бути зображені у вигляді одностороннього ковзного підсумування. Для них вводиться модель та досліджується коли вона наближує ці послідовності з заданою точністю та надійністю при певних умовах.

**Ключові слова:** моделювання, стаціонарна випадкова послідовність,  $\varphi$ -субгауссова випадкова величина.

E-mails: ovasylyk@univ.kiev.ua, yvk@univ.kiev.ua, yata452@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

### 1 Вступ

У даній роботі розглядається задача моделювання стаціонарної в широкому розумінні випадкової послідовності  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  з заданою точністю та надійністю. Тобто, нехай відомо, що для всіх  $n, k \in \mathbb{Z}$

$$E\theta_n = 0, \quad E\theta_n\theta_k = B(k - n).$$

Припустимо, що послідовність  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  допускає зображення у вигляді одностороннього ковзного підсумування, а саме,

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{n-k}, \quad (1)$$

де  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ . Випадкові величини  $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$  центровані та некорельовані:

$$E\eta_i = 0, \quad E\eta_i\eta_j = \delta_{ij},$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

За модель послідовності  $\theta_n$  вибираємо

$$\hat{\theta}_n^N = \sum_{k=0}^N C_k \eta_{n-k}.$$

O.I. Vasylyk, Cand.Sci. (Phys.-Math.),  
Assistant Professor,  
Yu.V. Kozachenko, Doctor Sci.(Phys.-Math.),  
Professor,  
T.O. Yakovenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.),  
Junior Researcher.

### Simulation of the stationary random sequences

Stationary in wide sense random sequences are considered in the paper. It is assumed that they can be presented as a moving summation process. A model for their simulation is introduced. It is also investigated when this model approximates the sequence with given accuracy and reliability under some conditions.

**Key Words:** simulation, stationary random sequence,  $\varphi$ -sub-Gaussian random variable.

Тоді похибку моделі позначимо як

$$\Delta_n^N = |\theta_n - \hat{\theta}_n^N| = \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \eta_{n-k}.$$

Означення 1.1. Будемо говорити, що модель  $\hat{\theta}_n^N$  наближає послідовність  $\theta_n$ ,  $n = 1, \dots, m$  з заданою точністю  $\varepsilon > 0$  та надійністю  $1 - \gamma$ ,  $(0 < \gamma < 1)$  якщо виконується нерівність

$$P \left\{ \max_{n=1,m} |\theta_n - \hat{\theta}_n^N| > \varepsilon \right\} < \gamma.$$

### 2 Спектральне зображення стаціонарної послідовності

Як відомо, (див. наприклад, [1]) для того, щоб стаціонарна в широкому розумінні випадкова послідовність  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  мала зображення (1), необхідно і достатньо, щоб у цієї послідовності існувала спектральна щільність  $f(\lambda)$ , для якої

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f(\lambda)| d\lambda < \infty.$$

При цьому коефіцієнти  $a_k$  підраховуються наступним чином:

якщо  $\alpha(\lambda)$  – така функція, що  $f(\lambda) = \alpha(\lambda)\overline{\alpha(\lambda)}$ . Отже, та її можна розкласти в ряд Фур'є

$$\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ik\lambda},$$

де

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda,$$

то  $a_k = \sqrt{2\pi} C_k$ .

**Зauważення 1.** В подальшому ми не будемо кожного разу вказувати на стаціонарність в широкому розумінні, маючи на увазі саме такий вид стаціонарності.

**Приклад 1.** Нехай спектральна щільність деякої стаціонарної послідовності  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , має вигляд:

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - ae^{i\lambda}|^2},$$

де  $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ ,  $|a| < 1$  – деяке дійсне число.

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 - ae^{i\lambda}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{ik\lambda}. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнти  $a_k$  у зображені одностороннього ковзного підсумування послідовності  $\xi_n$  наступні:

$$a_k = a^k$$

та

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \eta_{n-k},$$

де  $\eta_n$  – деяка центрована та некорельована послідовність.

**Приклад 2.** Якщо спектральна щільність випадкової стаціонарної послідовності  $\xi_n$  має вигляд:

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \frac{1 - be^{i\lambda}}{1 - ae^{i\lambda}} \right|^2,$$

$-\pi \leq \lambda \leq \pi$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|a| < 1$ . тоді

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - be^{i\lambda}}{1 - ae^{i\lambda}} = \\ &= \frac{1 - be^{i\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{ik\lambda} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a^k e^{ik\lambda} \right]. \end{aligned}$$

$$a_0 = 1, a_k = \left( 1 - \frac{b}{a} \right) a^k, k \geq 1$$

та

$$\xi_n = \eta_n + \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \sum_{k=1}^{\infty} a^k \eta_{n-k},$$

де  $\eta_n$  – деяка центрована та некорельована послідовність.

### 3 $\varphi$ -субгауссові випадкові величини і процеси

Нагадаємо необхідні в подальшому означення і властивості випадкових величин і процесів із просторів  $Sub_\varphi(\Omega)$ .

**Означення 3.1.** Неперервна парна опукла функція  $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$  називається  $N$ -функцією Орліча, якщо  $\varphi(0) = 0$  та  $\varphi(x) > 0$ ,  $x \neq 0$ , та мають місце такі умови:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

**Означення 3.2.** Якщо  $\varphi \in N$ -функцією, тоді перетворенням Юнга-Фенхеля цієї функції називається функція

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} [xy - \varphi(y)].$$

**Приклад 3.** Функція  $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$  є  $N$ -функцією та перетворенням Юнга-Фенхеля цієї функції є  $\varphi^*(x) = \frac{|x|^q}{q}$ , де  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Умова Q.** Будемо казати, що для  $N$ -функції  $\varphi$  виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0. \quad (2)$$

Нехай  $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$  – стандартний імовірнісний простір.

**Означення 3.3.** [2] Припустимо, що для  $N$ -функції  $\varphi$  виконується умова Q. Випадкова величина  $\xi$  належить простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ , якщо  $E\xi = 0$ ,  $E \exp\{\lambda\xi\}$  існує для всіх  $\lambda \in \mathbb{R}$  та існує така стала  $a > 0$ , що для всіх  $\lambda \in \mathbb{R}$  виконується нерівність

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \quad (3)$$

**Теорема 3.1.** [2] Простір  $Sub_\varphi(\Omega)$  є банаховим простором з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda \xi\})}{\lambda},$$

де  $\varphi^{(-1)}(x)$  – функція, обернена до функції  $\varphi$  при  $x > 0$ .

Для послідовностей випадкових величин з простору  $Sub_\varphi(\Omega)$  справедливі наступні теореми.

**Теорема 3.2.** [2] Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_m$  – незалежні випадкові величини з простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ . Якщо функція  $\varphi(|x|^{1/r})$  є опуклою при деяких значеннях  $r \in [1, 2]$ , тоді буде виконуватись нерівність:

$$\left( \tau_\varphi \left( \sum_{k=1}^m \xi_k \right) \right)^r \leq \sum_{k=1}^m (\tau_\varphi(\xi_k))^r,$$

тобто

$$\tau_\varphi \left( \sum_{k=1}^m \xi_k \right) \leq \left( \sum_{k=1}^m (\tau_\varphi(\xi_k))^r \right)^{1/r}.$$

**Теорема 3.3.** [3] Нехай послідовність випадкових величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^m$  належить простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ ,  $x > 2$ ,  $M \geq \frac{\varphi^*(2)}{\ln m}$ ,  $b > 1$ . Тоді

$$P \left\{ \max_{n=1,m} |\xi_n| > xb \max_{n=1,m} \tau_\varphi(\xi_n) \varphi^{*(-1)}(M \ln m) \right\} \leq m^{1-M} \frac{b+1}{b-1} \exp\{-\varphi^*(x)\}.$$

Теорії  $\varphi$ -субгауссовых випадкових величин та процесів присвячено також книгу [4].

#### 4 Основні результати

Нехай випадкові величини  $\{\eta_k\}$  в розкладі (1) – це незалежні випадкові величини з простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ . Тоді похибка моделі  $\Delta_n^N$  буде також субгауссовою випадковою величиною.

Позначимо  $\delta_N := \max_{n=1,m} \tau_\varphi(\Delta_n^N)$ .

**Приклад 4.** Розглянемо випадкову послідовність  $\xi_n$ ,  $n = 1, \dots, m$  зі спектральною щільністю з прикладу 1. Нехай у зображені одностороннього ковзного підсумування цієї послідовності  $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  – це незалежні випадкові величини з простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ , причому такі, що  $\tau_\varphi(\eta_k) = \tau$

для всіх  $k$ . Якщо функція  $\varphi(|x|^{1/r})$  є опуклою при деяких значеннях  $r \in [1, 2]$ , тоді з теореми 3.2 випливає:

$$\begin{aligned} \delta_N &= \max_{n=1,m} \tau_\varphi(\Delta_n^N) = \\ &= \max_{n=1,m} \tau_\varphi \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} a^k \eta_{n-k} \right) \leq \\ &\leq \max_{n=1,m} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} (\tau_\varphi(a^k \eta_{n-k}))^r \right)^{1/r} = \\ &= \max_{n=1,m} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} |a|^{kr} (\tau_\varphi(\eta_{n-k}))^r \right)^{1/r} = \\ &= \tau \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} |a|^{kr} \right)^{1/r} = \tau \left( \frac{|a|^{(N+1)r}}{1 - |a|^r} \right)^{1/r} = \\ &= \frac{\tau |a|^{N+1}}{(1 - |a|^r)^{1/r}}. \end{aligned}$$

**Теорема 4.1.** Модель  $\widehat{\theta}_n^N$ ,  $n = 1, \dots, m$  наближує послідовність  $\theta_n$ ,  $n = 1, \dots, m$  з заданою точністю  $\varepsilon$  та надійністю  $1 - \gamma$  якщо

$$(i) \quad \delta_N \leq \frac{\varepsilon}{b \varphi^{*(-1)}(M \ln m) \varphi^{*(-1)} \left( -\ln \left( \frac{2mM-1(b-1)}{b+1} \right) \right)} \text{ при } \exp \left\{ \frac{\varphi^*(2)}{M} \right\} \leq m < \left( \frac{e^{-\varphi^*(2)}}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}},$$

$$(ii) \quad \delta_N \leq \frac{\varepsilon}{2b \varphi^{*(-1)}(M \ln m)} \text{ при } m \geq \left( \frac{e^{-\varphi^*(2)}}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}},$$

де  $M > 1$ ,  $b > 1$  – деякі фіксовані величини.

**Доведення.** Зафіксуємо довільне число  $M > 1$ . Припустимо, що  $m$  таке, що  $\frac{\varphi^*(2)}{\ln m} \leq M$ , тобто  $m \geq \exp \left\{ \frac{\varphi^*(2)}{M} \right\}$ .

Тоді, згідно теореми 3.3

$$\begin{aligned} P \left\{ \max_{n=1,m} \Delta_n^N > xb \times \right. \\ \left. \times \max_{n=1,m} \tau_\varphi(\Delta_n^N) \varphi^{*(-1)}(M \ln m) \right\} \leq \\ \leq m^{1-M} \frac{b+1}{b-1} \exp\{-\varphi^*(x)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо позначення:  $\varepsilon := xb \delta_N \varphi^{*(-1)}(M \ln m)$ . Якщо  $\varepsilon > 2b \delta_N \varphi^{*(-1)}(M \ln m)$ , тобто коли

$$\delta_N < \frac{\varepsilon}{2b \varphi^{*(-1)}(M \ln m)} =: A, \quad (5)$$

тоді нерівність (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} P \left\{ \max_{n=1,m} \Delta_n^N > \varepsilon \right\} &\leq \\ &\leq m^{1-M} \frac{b+1}{b-1} \times \\ &\times \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{b\delta_N \varphi^{*-1}(M \ln m)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, модель наближає послідовність з заданою точністю  $\varepsilon$  та надійністю  $1 - \gamma$  коли виконуються нерівності:

$$1) \delta_N < \frac{\varepsilon}{2b\varphi^{*-1}(M \ln m)};$$

$$2) S := m^{1-M} \frac{b+1}{b-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{b\delta_N \varphi^{*-1}(M \ln m)} \right) \right\} < \gamma.$$

Зауважимо, що коли  $\frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \geq 1$ , тобто, при  $m \geq \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1}\right)^{\frac{1}{M-1}}$ , то  $S \leq \gamma$  коли виконується умова 1). Тобто, маємо потрібну модель, коли  $\delta_N < A$ .

Якщо ж  $\frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} < 1$ , тобто, коли

$$\exp \left\{ \frac{\varphi^*(2)}{M} \right\} \leq m < \left( \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}}.$$

Тоді з того, що

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{b\delta_N \varphi^{*-1}(M \ln m)} \right) \right\} &\leq \\ &\leq \frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned} \varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{b\delta_N \varphi^{*-1}(M \ln m)} \right) &\geq \\ &\geq -\ln \left( \frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \right); \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{b\delta_N \varphi^{*-1}(M \ln m)} &\geq \\ &\geq \varphi^{*-1} \left( -\ln \left( \frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \right) \right); \end{aligned}$$

а, отже,

$$\delta_N \leq \min(A, B),$$

де

$$B := \frac{\varepsilon}{b\varphi^{*-1}(M \ln m)\varphi^{*-1} \left( -\ln \left( \frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \right) \right)}.$$

$B < A$  коли  $\varphi^{*-1} \left( -\ln \left( \frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \right) \right) > 2$ , тобто при

$$\exp \left\{ \frac{\varphi^*(2)}{M} \right\} \leq m < \left( \frac{e^{-\varphi^*(2)}}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}};$$

$A \leq B$  коли  $\varphi^{*-1} \left( -\ln \left( \frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \right) \right) \leq 2$ , тобто при

$$\left( \frac{e^{-\varphi^*(2)}}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}} \leq m < \left( \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}}.$$

Звідси отримуємо твердження теореми.  $\square$

## 5 Висновки

Отже, в роботі отримано умови при яких стаціонарна випадкова послідовність наближається запропонованою моделлю із заданою точністю та надійністю за припущення, що випадкові величини у зображені ковзного підсумування належать простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ .

## Список використаних джерел

- Гихмай И.И., Скороход А.В., Теория случайных процессов. т. I. – М.: Издательство “Наука”, 1971. – 664 с.
- Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence RI, 2000. – 264 p.
- Kozachenko Yu., Sottinen T. and Vasylyk O. Lipschitz conditions for  $Sub_\varphi(\Omega)$ -processes with application to weakly self-similar stationary increment processes // Preprint 483, University of Helsinki, 2008, 19pp.
- Василик О.І., Козаченко Ю.В., Ямніко Р.Є.  $\varphi$ -субгауссові випадкові процеси. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2008. – 232 с.

Надійшла до редколегії 27.12.2008

УДК 512.53

Леся А. Вотякова

### Елементарні функції тернарної змінної

В роботі розпочато побудову теорії функцій тернарної змінної.

**Ключові слова:** тернарні числа, степеневий ряд, функція тернарної змінної

E-mail: [votsa@list.ru](mailto:votsa@list.ru)

Lesya A. Votjakova

### Elementary functions of ternary variable

In the paper laid foundation of function theory of ternary variable.

**Key words:** ternary numbers, power series, elementary function of ternary variable.

Статтю представив доктор ф.-м. наук, професор Кириченко В.В.

**Вступ.** В роботі [1] побудовано повну нормовану алгебру рангу 3, елементи якої є матричним поданням тернарних чисел. Нами було закладено фундамент для побудови аналізу на алгебрі тернарних чисел. В даній роботі цей процес розпочато, а саме, визначено спосіб побудови елементарних функцій тернарної змінної, а також наведено приклади основних функцій.

**Основна частина.** Нехай маємо алгебру рангу 3 [1]

$$T = \{x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \mid x_0, x_1, x_2 \in R\},$$

у якій множення виконується згідно з таблицею

	$e_0$	$e_1$	$e_2$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_0$
$e_2$	$e_2$	$e_0$	$e_1$

Алгебра  $T$  – повна нормована алгебра тернарних чисел з нормою

$$\|t\| = \|x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2\| = \sqrt{3(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)}.$$

Насамперед зазначимо, що ряд з тернарними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{0n} e_0 + x_{1n} e_1 + x_{2n} e_2)$$

збігається тоді і лише тоді, коли збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{0n}, \sum_{n=1}^{\infty} x_{1n}, \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n},$$

і в подальшому зосередимо увагу на степеневих рядах вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (1)$$

де  $a_0, a_1, \dots \in R$ .

**Теорема 1.** Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2)$$

збігається на інтервалі  $(-r; r)$ , то ряд (1) збігається для всіх тих  $t$ , для яких

$$|x_0 + x_1 + x_2| < r,$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_1 x_2 < r^2,$$

причому коли сума ряду (2) рівняється  $S(x)$ , то сума ряду (1)

$$\begin{aligned} S(t) = & \frac{1}{3} ((S(\lambda_0) + (S(\lambda_1) + (S(\lambda_2))e_0 + \\ & + (S(\lambda_0) + \tau_2(S(\lambda_1) + \tau_1(S(\lambda_2)))e_1 + \\ & + (S(\lambda_0) + \tau_1(S(\lambda_1) + \tau_2(S(\lambda_2)))e_2), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\lambda_0 = x_0 + x_1 + x_2,$$

$$\lambda_1 = x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2,$$

$$\lambda_2 = x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2,$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \tau_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**Доведення.** Оскільки  $n$ -ту часткову суму ряду (1) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \sum_{k=0}^n a_k t^k = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3} ((\lambda_0^k + \lambda_1^k + \lambda_2^k) e_0 + \\ &\quad + (\lambda_0^k + \tau_2 \lambda_1^k + \tau_1 \lambda_2^k) e_1 + \\ &\quad + (\lambda_0^k + \tau_1 \lambda_1^k + \tau_2 \lambda_2^k) e_2), \end{aligned}$$

то послідовність таких часткових сум буде збігатись тоді і лише тоді, коли будуть збігатись послідовності

$$\left( \sum_{k=1}^n \lambda_0^k \right), \left( \sum_{k=1}^n \lambda_1^k \right), \left( \sum_{k=1}^n \lambda_2^k \right).$$

А це має місце, коли

$$\begin{aligned} |\lambda_0| &= |x_0 + x_1 + x_2| < r, \\ |\lambda_1| &= |\lambda_2| = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - \\ &\quad - x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} < r, \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_0^n &= S(\lambda_0), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_1^n = S(\lambda_1), \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_2^n &= S(\lambda_2). \end{aligned}$$

Отже, послідовність  $(S_n(t))$  збігається для вказаних  $t$ , причому її границя рівняється (3).

**Зauważення 1.** Якщо тернарні числа  $t$  розглядати як точки простору  $\mathbb{R}^3$  з стандартним базисом, то в ортонормованому базисі

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ &\left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

область збіжності ряду (1) визначається умовами

$$-r < \sqrt{3}x < r, \quad \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 < r^2.$$

**Зauważення 2.** Доведена теорема дас можливість будувати функції тернарної змінної, для яких має місце алгебраїчне подання, тобто

$$\begin{aligned} f(f) &= f_0(x_0, x_1, x_2)e_0 + \\ &\quad + f_1(x_0, x_1, x_2)e_1 + f_2(x_0, x_1, x_2)e_2. \quad (4) \end{aligned}$$

Для прикладу, маємо:

показникову функцію

$$\begin{aligned} e^t &:= \frac{1}{3} e^{x_0} \left( (e^{x_1+x_2} + 2e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_0 + \right. \\ &\quad + (e^{x_1+x_2} - e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) - \\ &\quad - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2))) e_1 + \\ &\quad \left. + (e^{x_1+x_2} - e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2))) e_2 \right) \end{aligned}$$

(при  $x_1 = x_2 = 0$  маємо звичайну експоненту,  $e^{t_1+t_2} = e^{t_1} e^{t_2}$ );

тригонометричні функції

$$\begin{aligned} \sin t &:= \frac{1}{3} (\sin(x_0 + x_1 + x_2) + \\ &\quad + 2 \sin(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_0 + \\ &\quad + \frac{1}{3} (\sin(x_0 + x_1 + x_2) - \\ &\quad - \sin(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) + \\ &\quad + \sqrt{3} \cos(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_1 + \\ &\quad + \frac{1}{3} (\sin(x_0 + x_1 + x_2) - \\ &\quad - \sin(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) - \\ &\quad - \sqrt{3} \cos(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_2, \\ \cos t &:= \frac{1}{3} (\cos(x_0 + x_1 + x_2) + \\ &\quad + 2 \cos(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_0 + \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3}(\cos(x_0 + x_1 + x_2) - \\
 & - \cos(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) - \\
 & - \sqrt{3} \sin(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_1 + \\
 & + \frac{1}{3}(\cos(x_0 + x_1 + x_2) - \\
 & - \cos(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) + \\
 & + \sqrt{3} \sin(x_0 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)) e_2
 \end{aligned}$$

(при  $x_1 = x_2 = 0$  маємо звичайні тригонометричні функції,  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ , також мають місце всі основні співвідношення).

Нехай маємо однозначну функцію комплексної змінної  $f(z)$ , визначену в області  $G$ , таку, що для всіх  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in G$

$$A_0 = f(\lambda_0) + f(\lambda_1) + f(\lambda_2),$$

$$A_1 = f(\lambda_0) + \tau_2 f(\lambda_1) + \tau_1 f(\lambda_2),$$

$$A_2 = f(\lambda_0) + \tau_1 f(\lambda_1) + \tau_2 f(\lambda_2)$$

мають дійсні значення. Тоді функцію

$$f(t) = \frac{1}{3}(A_0 e_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2), \quad (5)$$

визначену для кожного

$$t = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2$$

такого, що

$$x_0 + y_0 + z_0, \quad x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2,$$

$$x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2 \in G,$$

назовемо *елементарною функцією трінарної змінної* (приклади таких функцій приведені в роботі).

Неважко переконатись, що результат арифметичних операцій над елементарними функціями є елементарна функція. Так коли функції  $f(t)$  і  $g(t)$  мають вигляд (5), то

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1}{3} \left( \frac{f(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} + \frac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)} + \frac{f(\lambda_2)}{g(\lambda_2)} \right) e_0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \left( \frac{f(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} + \tau_2 \frac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)} + \tau_1 \frac{f(\lambda_2)}{g(\lambda_2)} \right) e_1 + \\
 & + \frac{1}{3} \left( \frac{f(\lambda_0)}{g(\lambda_0)} + \tau_1 \frac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)} + \tau_2 \frac{f(\lambda_2)}{g(\lambda_2)} \right) e_2. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Справді, врахувавши, що

$$\begin{aligned}
 \frac{f(t)}{g(t)} &= \frac{A_0 e_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2}{B_0 e_0 + B_1 e_1 + B_2 e_2}, \\
 \overline{B_0 e_0 + B_1 e_1 + B_2 e_2} &= (B_0^2 - B_1 B_2) e_0 + \\
 & + (B_1^2 - B_0 B_2) e_1 + (B_2^2 - B_0 B_1) e_2 = \\
 & = 3(g(\lambda_0)g(\lambda_1) + g(\lambda_0)g(\lambda_2) + \\
 & + g(\lambda_1)g(\lambda_2))e_0 + 3(g(\lambda_1)g(\lambda_2) + \\
 & + \tau_1 g(\lambda_0)g(\lambda_2) + \tau_2 g(\lambda_0)g(\lambda_1))e_1 + \\
 & + 3(g(\lambda_1)g(\lambda_2) + \tau_1 g(\lambda_0)g(\lambda_1) + \\
 & + \tau_2 g(\lambda_0)g(\lambda_2))e_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (B_0 e_0 + B_1 e_1 + B_2 e_2) \overline{B_0 e_0 + B_1 e_1 + B_2 e_2} &= \\
 & = 27 g(\lambda_0)g(\lambda_1)g(\lambda_2),
 \end{aligned}$$

і провівши необхідні виклади, дістанемо (6).

### Висновки

Таким чином, до класу елементарних функцій трінарної змінної входять функції, побудовані за правилом (5) на основі цілих і мераморфних функцій з дійсними коефіцієнтами.

### Список використаних джерел

1. Волякова Л.А. Нормована алгебра трінарних чисел. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – Випуск № 4. – 2008.

Надійшла до редакції 15.05.2008

УДК 512.544

Марина Г. Друшляк

## Про норму абелевих нециклических підгруп у неперіодичних групах

В даній роботі досліджуються властивості груп з вільною абелевою підгрупою рангу 2 залежно від властивостей норми абелевих нециклических підгруп.

**Ключові слова:** група, недедекіндова група, норма абелевих нециклических підгруп.

E-mail: [mathematicsspu@mail.ru](mailto:mathematicsspu@mail.ru)

Статтю представив проф. Кириченко В.В.

В сучасній теорії груп важливе місце займають результати, отримані при вивченні груп з умовою інваріантності підгруп виділеної системи  $\Sigma$ . Ефективним напрямом досліджень є також вивчення груп, в яких обмеження накладаються не на систему підгруп  $\Sigma$ , а на нормалізатори цих підгруп та на перетин даних нормалізаторів. Якщо система  $\Sigma$  містить всі підгрупи групи з деякою теоретико-груповими властивостями, то вище зазначений перетин називається  $\Sigma$ -нормою групи. Властивості  $\Sigma$ -норми суттєво впливають на властивості всієї групи, особливо у випадку, коли  $\Sigma$ -норма є недедекіндовою підгрупою. Умова співпадання груп зі своїми  $\Sigma$ -нормами рівносильно умові інваріантності всіх підгруп системи  $\Sigma$ . Вперше ситуацію, коли  $\Sigma$ -норма є власною підгрупою групи, досліджував Р.Бер [1]. В якості системи  $\Sigma$  обирається система всіх (циклических) підгруп групи. Відповідна  $\Sigma$ -норма називається нормою  $N(G)$  групи  $G$ .

В неперіодичних групах досліджувалися різні узагальнені норми групи, а саме, норма  $N_G(A_\infty)$  нескінчених абелевих підгруп [2], норма  $N_G(\infty)$  нескінчених підгруп [3], норма  $N_G(C_\infty)$  нескінчених циклических підгруп [4], норма  $N_G$  нециклических підгруп [3].

В даній роботі вивчається ще одне з можливих узагальнень норми групи – норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп групи  $G$ . Вперше поняття норми  $N_G^A$  було введено Т.Д. Лукашовою в роботі [5]. Згідно [5] нормою  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп групи  $G$  називається перетин нормалізаторів всіх абелевих нециклических підгруп групи  $G$  за умови, що система таких підгруп непорожня.

Марина Г. Друшляк

## On norm of Abelian non-cyclic subgroups in non-periodic groups

Properties of groups with free Abelian subgroup of rank 2 depending on properties of the norm of Abelian non-cyclic subgroups are investigated.

**Key Words:** group, non-Dedekind group, norm of Abelian non-cyclic subgroups..

Зрозуміло, що підгрупа  $N_G^A$  є характеристичною та містить центр групи  $G$ .

У випадку, коли  $G = N_G^A$ , в групі інваріантні всі абелеві нециклическі підгрупи групи. Такі групи вивчалися Ф.М.Ліманом [6] і були названі  $\overline{HA}$ -групами.

**Твердження 1** ([6]). Неперіодичні  $\overline{HA}$ -групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1)  $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ , де  $|a| = p^n$ ,  $n \geq 1$  (при  $p = 2$   $n > 1$ ),  $|b| = \infty$ ,  $[a, b] = a^{p^{n-1}}$ ;
- 2)  $G = H \times B$ , де  $H$  – група кватерніонів,  $B$  – нескінчена циклическа група або група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів;
- 3)  $G = A \lambda \langle b \rangle$ , де  $A$  – неперіодична нециклическа абелева група без інволюції.  $|b| = 2$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для будь-якого елемента  $a \in A$ ;
- 4)  $G = A \langle b \rangle$ , де  $A$  – неперіодична абелева група,  $|b| = 4$ ,  $b^2 \in A$ , інволюція  $b^2$  єдина у групі,  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для будь-якого елемента  $a \in A$ ;
- 5)  $G = A \lambda \langle b \rangle$ , де  $A$  – група, ізоморфна адитивній групі  $p$ -ових дробів,  $|b| = \infty$ ,  $b^{-1}ab = a^m$ ,  $m = \pm p^n$ ,  $n \geq 1$  для будь-якого елемента  $a \in A$ ;
- 6)  $G = A \lambda \langle b \rangle$ , де  $A$  – нескінчена циклическа група або група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів,  $|b| = 8$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для будь-якого елемента  $a \in A$ ;
- 7)  $G = A \lambda \langle b \rangle$ , де  $A$  – нескінчена циклическа група або група, ізоморфна адитивній групі  $p$ -ових дробів ( $p \neq 2$ ),  $|b| = 2p$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$  для будь-

якого елемента  $a \in A$ :

$$8) \quad G = (\langle a \rangle \lambda(c)) \lambda(b), \text{ де } |a| = p \neq 2, \quad |b| = 2, \\ |c| = \infty, \quad c^{-1}ac = a^{-1}, \quad [a, b] = 1, \quad b^{-1}cb = c^{-1}.$$

В даній роботі досліджуються властивості груп з вільною абелевою підгрупою рангу 2 залежно від властивостей норми  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп. Деякі результати роботи анонсовані в [7,8].

**Теорема 1.** Норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп неперіодичної групи  $G$  недедекіндо-ва в кожному з випадків:

1) група  $G$  містить абелеву нециклическу підгрупу  $M$ , що задовільняє умову  $M \cap N_G^A = E$ ;

2) норма  $N_G^A$  скінчена;

3) група  $G$  містить нескінченну циклическу інваріантну підгрупу  $\langle g \rangle$ , що задовільняє умову  $\langle g \rangle \cap N_G^A = E$ .

**Доведення.** Розглянемо кожен із зазначених у теоремі випадків. Покажемо, що в нормі  $N_G^A$  інваріантні всі циклическі підгрупи в кожному з випадків.

1) Оскільки підгрупа  $M$  абелева нециклическа, то вона інваріантна в групі  $G_1 = M \cdot N_G^A$  і

$$[M, N_G^A] \subseteq M \cap N_G^A = E.$$

Тому для довільного елемента  $x \in N_G^A$  маємо

$$\langle M, x \rangle \cap N_G^A = \langle x \rangle \triangleleft N_G^A.$$

Звідси норма  $N_G^A$  недедекіндо-ва.

2) Нехай  $1 < |N_G^A| < \infty$ . Оскільки  $N_G^A \triangleleft G$ , то  $[G : C_G(N_G^A)] < \infty$  і централізатор  $C_G(N_G^A)$  містить елемент  $g$  нескінченної порядку. Тоді для довільного елемента  $y \in N_G^A$  підгрупа  $\langle g, y \rangle \triangleleft G_1 = \langle g \rangle N_G^A$ . Звідси

$$\langle g, y \rangle \cap N_G^A = \langle y \rangle \triangleleft N_G^A,$$

отже, норма  $N_G^A$  недедекіндо-ва.

3) Нехай група  $G$  така, як зазначено в умові теореми. Тоді

$$[\langle g \rangle, N_G^A] \subseteq \langle g \rangle \cap N_G^A = E.$$

Якщо  $x \in N_G^A$  і  $1 < |x| < \infty$ , то  $\langle g, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle g \rangle N_G^A$ .

Звідси  $\langle g, x \rangle \cap N_G^A = \langle x \rangle \triangleleft N_G^A$ . Нехай  $|x| = \infty$ . Тоді

$$\langle g^n, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle g \rangle \times N_G^A$$

для довільного натурального числа  $n$ . Звідси

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle g^n, x \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$$

і далі  $\langle x \rangle \triangleleft N_G^A$ . Теорему доведено.

**Наслідок 1.** Якщо норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп групи  $G$  недедекіндо-ва, то кожна абелева нециклическа підгрупа  $B$  має з нормою  $N_G^A$  неодиничний перетин.

**Наслідок 2.** Якщо норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп неперіодичної групи  $G$  недедекіндо-ва, то вона нескінчена.

**Наслідок 3.** Якщо в неперіодичної групі  $G$  норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп недедекіндо-ва, то кожна інваріантна нескінчена циклическа підгрупа має з  $N_G^A$  неодиничний перетин.

**Наслідок 4.** Якщо неперіодична група  $G$  містить абелеву нециклическу підгрупу  $B$  без скруті та має періодичну норму  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп, то підгрупа  $N_G^A$  недедекіндо-ва.

**Наслідок 5.** Якщо норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп неперіодичної групи  $G$  недедекіндо-ва і періодична, то всі абелеві підгрупи без скруті групи циклическі і  $N_G^A$  нескінчена.

Очевидно, що в групах без скруті  $N_G(A_\infty) \subseteq N_G^A$  і враховуючи теорему 1 [9], маємо

$$N_G(\infty) = N_G(A_\infty) = N_G(C_\infty) = Z(G) \subseteq N_G^A.$$

**Теорема 2.** Якщо в неперіодичної групі  $G$  норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп недедекіндо-ва, містить абелеву нециклическу підгрупу і не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, то і група  $G$  не містить таких підгруп.

**Доведення.** За теоремою 1  $|N_G^A| = \infty$  і оскільки норма  $N_G^A$  містить абелеві нециклическі підгрупи, то всі такі підгрупи інваріантні в  $N_G^A$ . Тому за твердженням 1 норма  $N_G^A$  є розв'язкою  $\overline{HA}$ -групою без вільних абелевих підгруп рангу 2, тобто групою одного з типів 1), 2), 5) - 8) твердження 1, а також типів 3), 4) цього ж твердження за умови відсутності в них вільних абелевих підгруп рангу 2.

Нехай  $G \supseteq M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$ ,  $|x_1| = |x_2| = \infty$ . Тоді за наслідком 1  $M \cap N_G^A \neq E$  і за умовою теореми  $M \cap N_G^A = \langle y \rangle$ ,  $|y| = \infty$ .

Розглянемо підгрупу  $G_1 = M \cdot N_G^A$ . З умови  $M \cap N_G^A = \langle y \rangle$  випливає існування такої підгрупи

$\langle x \rangle \subset M$ , що  $\langle x \rangle \cap N_G^A = E$  і  $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ . Тоді  $\langle x, y^n \rangle \triangleleft G_1$  для довільного натурального числа  $n$ .

Тому  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, y^n \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$ . Тоді за теоремою 1 підгрупа  $N_G^A$  дедекіндова, що суперечить умові теореми. Теорему доведено.

**Теорема 3.** Якщо неперіодична група  $G$  містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 та її норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп недедекіндова і містить абелеву нециклическу підгрупу, то норма  $N_G^A$  також містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 і може бути групою лише одного з типів:

1)  $N_G^A = A\langle c \rangle$ , де  $A$  – абелева група, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2,  $|c| = 4$ ,  $c^{-1}ac = a^{-1}$  для довільного елемента  $a \in A$ ,  $c^2 \in A$  і є єдиною інволюцією в  $A$ ;

2)  $N_G^A = A\langle c \rangle$ , де  $A$  – абелева група без інволюцій, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2,  $|c| = 2$  і  $c^{-1}ac = a^{-1}$  для довільного елемента  $a \in A$ .

**Доведення.** Оскільки група  $G$  містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, то за теоремою 2 норма  $N_G^A$  також містить таку підгрупу. Тоді норма  $N_G^A$  є неабелевою неперіодичною  $\overline{HA}$ -групою. З опису таких груп (див. твердження 1) отримуємо твердження теореми 3. Теорему доведено.

**Лема 1.** Якщо неперіодична група  $G$  містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 та її норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклическу підгрупу та скінченну абелеву інваріантну в групі  $G$  підгрупу  $F$  і централізатор  $C_G(F)$  містить всі елементи нескінченного порядку групи, то  $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$ .

**Доведення.** Враховуючи умови леми, приходимо до висновку, що норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп є групою одного з типів теореми 3:

1)  $N_G^A = A\langle c \rangle$ , де  $A$  – абелева підгрупа, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2,  $|c| = 4$ ,  $c^{-1}ac = a^{-1}$  для довільного елемента  $a \in A$ ,  $c^2 \in A$  і є єдиною інволюцією в  $A$ ;

2)  $N_G^A = A\langle c \rangle$ , де  $A$  – абелева підгрупа без інволюцій, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2,  $|c| = 2$ ,  $c^{-1}ac = a^{-1}$  для довільного елемента

$a \in A$ .

Покажемо, що довільна нескінчена циклічна підгрупа  $\langle x \rangle$  групи  $G$  є  $N_G^A$ -допустимою. Якщо  $x \in N_G^A$ , то  $\langle x \rangle \triangleleft N_G^A$ , оскільки в  $N_G^A$  інваріантні всі нескінченні циклічні підгрупи. Нехай  $x \in G \setminus N_G^A$ . Далі проаналізуємо кожен з двох випадків.

1. Нехай норма  $N_G^A$  є групою першого типу.

Оскільки  $c^2$  – єдина інволюція в  $A$ , то силовська 2-підгрупа з  $A$  локально циклічна і інваріантна в  $G$ , бо підгрупа  $A$  характеристична в  $N_G^A$  як підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи  $N_G^A$ . Тоді  $c^2 \in Z(G)$  і, не порушуючи загальності міркувань,  $F = \langle c^2 \rangle$ .

Тоді  $\langle x, c^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ . Звідси  $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$  і за наслідком 3  $\langle x \rangle \cap N_G^A \neq E$ . Група  $G$  містить вільну абелеву підгрупу рангу 2  $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Підгрупа  $\langle x \rangle$  має хоча б з однією з підгруп  $\langle a \rangle$  або  $\langle b \rangle$  одиничний перетин. Нехай  $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq E$  і  $\langle x \rangle \cap \langle b \rangle = E$ . Тоді  $x^k = a^m$ . Оскільки  $\langle x, c^2 \rangle \triangleleft G_1$  маємо, що  $b^{-1}xb = x^a c^{2\beta}$ . В силу інваріантності підгрупи  $\langle x^2 \rangle$  в групі  $G_1$   $b^{-1}x^2b = x^{2a}$ ,

$$b^{-1}x^{2k}b = x^{2ak} = x^{2k},$$

$\alpha = 1$ . Отже,  $b^{-1}xb = xc^{2\beta}$ . Тоді  $b^{-2}xb^2 = x$  і підгрупа  $\langle x, b^2 \rangle$  інваріантна в групі  $G_1$  як абелева чециклическа. Звідси  $\langle x, b^{2n} \rangle \triangleleft G_1$  для довільного натурального числа  $n$  і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, b^{2n} \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

Таким чином, довільна нескінчена циклічна підгрупа  $\langle x \rangle$  групи  $G$  є  $N_G^A$ -допустимою і  $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$ .

2. Нехай норма  $N_G^A$  є групою другого типу.

За умовою норма  $N_G^A$  містить скінченну інваріантну в  $G$  абелеву підгрупу  $F$ . Очевидно, що  $F < A$  і  $[G : C_G(F)] < \infty$ . До того ж  $x \in C_G(F)$ . Розглянемо підгрупу  $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$  і два випадки залежно від будови підгрупи  $F$ . Якщо  $F \supseteq \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle$ ,  $|f_1| = p$ ,  $|f_2| = q$ , де  $p$  і  $q$  – прості

числа (не обов'язково різні), то  $\langle x, f_1 \rangle \triangleleft G_1$ ,  $\langle x, f_2 \rangle \triangleleft G_1$ . Тоді

$$\langle x, f_1 \rangle \cap \langle x, f_2 \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$$

і підгрупа  $\langle x \rangle \in N_G^A$ -допустимою.

Якщо  $F$  - примарна циклічна підгрупа, то  $F \supset F_1 = \langle f \rangle$ ,  $|f| = p > 2$ . Тоді  $\langle x, f \rangle \triangleleft G_1$  і  $\langle x^p \rangle \triangleleft G_1$ . За наслідком 3  $\langle x^p \rangle \cap N_G^A \neq E$  і тому  $\langle x \rangle \cap N_G^A \neq E$ . За умовою в нормі  $N_G^A$  міститься вільна абелева підгрупа рангу 2  $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Підгрупа  $\langle x \rangle$  має хоча б з однією з підгруп  $\langle a \rangle$  або  $\langle b \rangle$  одиничний перетин. Вважатимемо, що  $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq E$ ,  $x^k = a^\alpha$  і  $\langle x \rangle \cap \langle b \rangle = E$ . Оскільки  $\langle x, f \rangle \triangleleft G_1$ , то  $b^{-1}xb = x^\alpha f^\beta$ . Тоді

$$b^{-1}x^{kp}b = x^{kp\alpha} = x^{kp},$$

$\alpha = 1$  і  $b^{-1}xb = xf^\beta$ . В такому випадку  $b^{-p}xb^p = x$  і  $\langle x, b^p \rangle \triangleleft G_1$ . Отже,  $\langle x, b^{pn} \rangle \triangleleft G_1$  для довільного натурального числа  $n$ ,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, b^{pn} \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

Підгрупа  $\langle x \rangle \in N_G^A$ -допустимою і  $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$ . Лему доведено.

Якщо група  $G$  задоволяє умовам леми 1, то її норма  $N_G(C_\infty)$  нескінчених циклічних підгруп є недедекіндою групою. Використовуючи теорему 2 [4], отримуємо наступне твердження.

**Наслідок 6.** Якщо група  $G$  задоволяє умовам леми 1, то її елементи нескінченого порядку породжують інваріантну абелеву підгрупу  $B$  і

$$N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle,$$

$|d| = 2$  або  $|d| = 4$ ,  $d^2 \in B$  і  $d^{-1}bd = b^{-1}$  для довільного елемента  $b \in B$ .

**Лема 2.** Якщо в неперіодичній групі  $G$  має місце включення  $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$  і  $N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle$ , де  $B$  - абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченого порядку групи  $G$ ,  $|d| = 2$  або  $|d| = 4$ ,  $d^2 \in B$  і  $d^{-1}bd = b^{-1}$  для довільного елемента  $b \in B$ , то довільна абелева нециклическа підгрупа групи  $G$  міститься в  $N_G(C_\infty)$ .

**Доведення.** Нехай  $F$  - довільна абелева нециклическа підгрупа групи  $G$ , що задоволяє умовам леми.

Якщо підгрупа  $F$  - неперіодична, то вона

породжена всіма елементами нескінченого порядку і тому  $F \subset N_G(C_\infty)$ .

Якщо підгрупа  $F$  - скінчена, то вона  $N_G^A$ -допустима і її централізатор містить елемент  $x$  нескінченого порядку з  $N_G^A$ . Тоді для довільного елемента  $f \in F$  маємо:  $|fx| = \infty$ ,  $fx \in N_G(C_\infty)$ ,  $f \in N_G(C_\infty)$ ,  $F \subset N_G(C_\infty)$ .

Нехай підгрупа  $F$  є нескінченною періодичною абелевою підгрупою. Якщо  $F \supseteq \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle$ , де  $|f_1| = |f_2| = p$  - просте число, то для довільного елемента  $f \in F$  підгрупа  $\langle f, f_1, f_2 \rangle \in N_G^A$ -допустимою, містить в своєму централізаторі елемент нескінченого порядку з  $N_G^A$  і, враховуючи попередні міркування, належить до  $N_G(C_\infty)$ . Звідси  $F \subset N_G(C_\infty)$  і в цьому випадку.

Нехай  $F$  - нескінчена локально скінчена підгрупа і містить квазіциклическу підгрупу  $P$ . Тоді для довільного елемента  $f \in F$  підгрупа  $\langle f, P \rangle \in N_G^A$ -допустимою, централізатор елемента  $f$  містить елементи нескінченого порядку і тому  $f \in N_G(C_\infty)$  і  $F \subset N_G(C_\infty)$ .

Нехай  $F$  - нескінчена локально скінчена підгрупа, яка не містить квазіциклическої підгрупи. В цьому випадку для довільного елемента  $f \in F$  існує нескінчена нециклическа підгрупа  $F_1$  з  $F$  така, що  $\langle f \rangle \cap F_1 = E$  та  $\pi(\langle f \rangle) \cap \pi(F_1) = \emptyset$ . Тоді підгрупа  $\langle f, F_1 \rangle \in N_G^A$ -допустимою і тому підгрупа  $\langle f \rangle$  також  $N_G^A$ -допустима, як характеристична в  $\langle f, F_1 \rangle$ . Отже, централізатор елемента  $f$  містить елементи нескінченого порядку і тому  $f \in N_G(C_\infty)$  і далі  $F \subset N_G(C_\infty)$ . Лему доведено.

**Теорема 4.** Якщо неперіодична група  $G$  містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, а її норма  $N_G^A$  абелевих нециклических підгруп недедекіндоа, містить абелеву нециклическу підгрупу та скінчуна абелеву інваріантну в групі  $G$  підгрупу  $F$  і централізатор  $C_G(F)$  містить всі елементи нескінченого порядку групи, то

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle,$$

де  $B$  - абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченого порядку групи  $G$ ,  $|d| = 2$  або  $|d| = 4$ ,  $d^2 \in B$ ,  $d^2$  є єдину інволюцією в групі  $G$  і  $d^{-1}bd = b^{-1}$  для довільного елемента  $b \in B$ .

**Доведення.** За лемою 1 має місце включення  $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$ . За лемою 2 всі абелеві нециклічні підгрупи групи  $G$  містяться в нормі  $N_G(C_\infty)$  і інваріантні в ній. Отже,  $N_G(C_\infty) \subseteq N_G^A$ . Звідси  $N_G^A = N_G(C_\infty)$ . З огляду на наслідок 6 отримуємо, що норма  $N_G^A$  є групою типу, зазначеного в теоремі.

Якщо  $|d|=4$ , то норма  $N_G^A$  має єдину інволюцію  $d^2$ . Покажемо, що інволюція  $d^2$  єдина і в групі  $G$ . Припустимо, що існує інволюція  $i \in G \setminus N_G^A$ . Тоді  $\langle i, d^2 \rangle \subset B$ . Звідси підгрупа  $\langle i, d \rangle$

$$G = (((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle \times \langle a_5 \rangle \times \langle a_6 \rangle) \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle) \lambda \langle d \rangle,$$

де  $|a_i| = \infty$ ,  $i = \overline{1,6}$ ,  $|b| = 7$ ,  $|c| = 3$ ,  $|d| = 4$ ,

$b^{-1}a_i b = a_{i+1}$  для  $i = \overline{1,5}$ ,

$$b^{-1}a_6 b = a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1}a_6^{-1},$$

$$c^{-1}a_1 c = a_2, \quad c^{-1}a_2 c = a_1^{-1}a_2^{-1}, \quad c^{-1}a_3 c = a_4,$$

$$c^{-1}a_4 c = a_3^{-1}a_4^{-1}, \quad c^{-1}a_5 c = a_6, \quad c^{-1}a_6 c = a_5^{-1}a_6^{-1},$$

$$c^{-1}bc = b^2,$$

$$d^{-1}a_i d = a_i^{-1}, \quad i = \overline{1,6},$$

$$[d, b] = [d, c] = 1.$$

В цій групі

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d \rangle$$

і  $G/N_G^A \cong \langle b, c \rangle$  – неабелева група порядку 21.

## Література

- [1] Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. – 1934. – 1. – S. 254–283.
- [2] Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про норму нескінчених абелевих підгруп неперіодичних груп // Матеріали III Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, Суми, 2–8 липня 2001 р. – Суми: Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка. – 2001. – С.205-207.
- [3] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. Обобщённые нормы непериодических групп // Известия Гомельского университета. – 2003. - №4(19). – С. 62-67.
- [4] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. О норме бесконечных циклических подгрупп непериодических групп // Вестник ВГУ имени П.М.Машерова. –

абелева нециклічна і тому за лемою 3  $\langle i, d \rangle \subset B$ , що неможливо. Отже, елемент  $d^2$  є єдиною інволюцією в групі  $G$ . Теорему доведено.

**Наслідок 7.** Якщо  $G$  – неперіодична група, що має недедекіндовоу норму  $N_G^A$  і  $N_G^A = N_G(C_\infty)$ , то фактор-група  $G/N_G^A$  періодична.

Наступний приклад показує, що дана фактор-група може бути неабелевою, а норма  $N_G^A$  містить неінваріантні абелеві нециклічні підгрупи.

Приклад.

Вітебск. – 2006. – №4. – С. 108-111.

[5] Лукашова Т.Д. Про норму абелевих нециклічніх підгруп нескінчених локально скінчених  $p$ -груп // Вісник Київського університету, серія „Фіз.-мат. науки”. – 2004. - №3. - С. 35-39.

[6] Лиман Ф.Н. Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика. – 1968. – 7, № 4.– С.70–86.

[7] Drushlyak M.G., Lyman F.M. On conditions of coinciding of different  $\Sigma$ -norms in non-periodic groups // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. – Москва, 28 мая – 3 июня 2008г. – Москва. – 2008. – С.288-289.

[8] Drushlyak M.G., Lyman F.M. On norms of Abelian non-cyclic subgroups of non-periodic groups // Международная алгебраическая конференция, посвященная 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова «Классы групп, алгебр и их приложения». – Гомель, 9-11 июля 2007г. – Гомель. – 2007. – С. 10-11.

[9] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. О взаимосвязях между нормами некоторых систем бесконечных подгрупп в непериодических группах // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. – Москва, 28 мая – 3 июня 2008г. – Москва. – 2008. – С.156-157.

Надійшла до редколегії 28.10.2008

УДК 512.554

В. С. Лучко\*

Про дію диференціювань на нільпотентні ідеали асоціативних кілець

Серія: фізико-математичні науки

Вивчається поведінка нільпотентних ідеалів асоціативних кілець під дією (зовнішніх) диференціювань. Зокрема, доведено, що для нільпотентного ідеалу  $I$  індексу нільпотентності  $n$  асоціативного кільця  $R$  і диференціювання  $D \in \text{Der}(R)$  ідеал  $I + D(I)$  нільпотентний класу нільпотентності  $\leq n^2$ , якщо в фактор-кільці  $R/I$  не має елементів адитивного порядку  $\leq n$ .

**Ключові слова:** асоціативне кільце, диференціювання, нільпотентний ідеал, адитивний скрут

\*E-mail: [vsluchko@gmail.com](mailto:vsluchko@gmail.com)

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Кириченко В.В.

Нагадаємо, що відображення  $D : R \rightarrow R$  асоціативного кільця  $R$  називається диференціюванням, якщо 1)  $D(a+b) = D(a) + D(b)$ , 2)  $D(ab) = D(a)b + aD(b)$  для довільних елементів  $a, b \in R$ . Якщо  $I$  – ідеал кільця  $R$ , то, як неважко переконатися, сума  $I + D(I)$  також є ідеалом із  $R$  для довільного диференціювання  $D$  кільця  $R$ , тому цікавим є питання про властивості ідеала  $I + D(I)$  в залежності від властивостей  $I$ . Вивченю дій диференціювань на ідеали асоціативних кілець та алгебр Лі присвячені роботи [3], [1] і [6].

Дана робота присвячена вивченю дій диференціювань на нільпотентні ідеали асоціативних кілець і в ній продовжуються дослідження, розпочаті в роботі [5], де вивчалася дія диференціювань на нільпотентні ідеали асоціативних алгебр над полями (зокрема там відзначалося, що не завжди ідеал  $I + D(I)$  буде нільпотентним для нільпотентного ідеала  $I$  із алгебри  $R$ ).

Оскільки в асоціативних кільцях немає множення на скаляри із основного поля (а є тільки додавання), то виникають певні труднощі при вивчені дій диференціювань на добутки елементів (біноміальні коефіцієнти в пра-

V. S. Luchko\*

On action of derivations on the nilpotent ideals of associative rings

Series: Physics & Mathematics Sciences

The behaviour of nilpotent ideals of associative rings under action of (outer)derivations is studied. In particular, it is proved that for a nilpotent ideal  $I$  of nilpotency index  $n$  from an associative ring  $R$  and a derivation  $D \in \text{Der}(R)$  the ideal  $I + D(I)$  is nilpotent of nilpotency class  $\leq n^2$  provided that there is no elements of additive order  $\leq n$  in the quotient ring  $R/I$ .

**Key words:** associative ring, derivation, nilpotent ideal, additive torsion

вилі Лейбніца для диференціювання добутку

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^k(a) D^{k-i}(b),$$

взагалі кажучи, не можуть бути ототожнені з елементами кільця). Використовуючи дещо інші підходи порівняно з роботою [5], в даній роботі доведено, що для нільпотентного ідеалу  $I$  кільця  $R$  (індексу нільпотентності  $n(I) = n$ ) такого, що в фактор-кільці  $R/I$  немає елементів адитивного порядку  $\leq n$  ідеал  $I + D(I)$  нільпотентний індексу нільпотентності  $\leq n^2$ .

Позначення в роботі стандартні. Через  $\text{Der}(R)$  позначається множина всіх диференціювань кільця  $R$  (де кільце Лі відносно операції комутування  $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ ), дія диференціювання на ідеал  $I$  позначається  $D^0(I) = I$ ,  $D^k(I) = D(D^{k-1}(I))$  для  $k \geq 1$ . Адитивну групу кільця  $R$  будемо позначати через  $R^+$ .

Для зручності будемо користуватися термінологією пов'язаною з порядками елементів в адитивній групі кільця  $R$ .

Означення 1. Нехай  $R$  – довільне асоціативне кільце.

1) Елемент  $x \in R$  будемо називати адитивно періодичним, якщо існує натуральне число

$n \geq 1$  таке, що  $\underbrace{x + \dots + x}_n = 0$ . Найменше натуральне число  $n$  з такою властивістю будемо називати адитивним порядком елемента  $x$  і позначати  $|x|_{ad}$  (це порядок  $x$  в адитивній групі  $R^+$ ).

2) Елемент  $x \in R$  будемо називати елементом без скруту (або без адитивного скруту), якщо  $\underbrace{x + \dots + x}_n \neq 0$  для довільного натуральному числа  $n$ .

3) Кільце  $R$  будемо називати кільцем без скруту, якщо кожен його ненульовий елемент не має скруту (тобто  $R^+$  – абелева група без скруту).

Наступне твердження є аналогом добре відомого твердження із теорії груп про періодичну частину абелевої групи.

**Лема 1.** *Множина всіх адитивно періодичних елементів асоціативного кільця утворює двосторонній ідеал  $T = T(R)$  кільця  $R$ . Факторкільце  $R/T$  не має адитивного скруту.*

**Доведення.** Достатньо лише показати, що для довільного елемента  $x \in T$  і будь-якого  $r \in R$  елементи  $rx$  і  $xr$  належать  $T$ , тобто будуть адитивно періодичними. Дійсно, нехай  $|x|_{ad} = m$ . Тоді

$$\underbrace{rx + \dots + rx}_m = \underbrace{(x + \dots + x)r}_m = 0,$$

тобто  $rx \in T$ . Аналогічно доводиться, що  $rx \in T$ . Легко бачити також, що  $T$  – характеристичний ідеал. Для довільного  $D \in \text{Der}(R)$  і довільного  $x \in T$  адитивного порядку  $|x|_{ad} = m$ , маємо

$$D(\underbrace{x + \dots + x}_m) = 0 = \underbrace{D(x) + \dots + D(x)}_m.$$

Лему доведено.  $\square$

Позначимо через  $\pi(R)$  множину всіх простих дільників адитивних порядків елементів із  $R$ .

**Лема 2.** *Нехай  $R$  – асоціативне кільце,  $T$  – періодична частина  $R$ . Тоді  $T = \bigoplus_{p \in \pi(T)} T_p$  – пряма сума характеристичних ідеалів  $T_p$  кільця  $R$ , де  $T_p$  – силовська  $p$ -підгрупа адитивної групи  $T^+$ . Для довільного ідеала  $I$  кільця  $R$ , який лежить в  $T$  маємо  $I = \bigoplus_{p \in \pi(I)} I_p$ , де  $I_p = I \cap T_p$  – характеристичний ідеал кільця  $R$ .*

**Доведення.** Використовуючи стандартні результати із теорії груп (див., наприклад, [2], с.171) отримаємо в силу леми 1 необхідний розклад

$$T = \bigoplus_{p \in \pi(T)} T_p,$$

де  $T_p$  – силовська  $p$ -підгрупа із  $T$ .

Неважко переконатися (так само як в лемі 1), що  $T_p$  – характеристичний ідеал кільця  $R$ . Аналогічно доводиться існування розкладу  $I = \bigoplus_{p \in \pi(I)} I_p$ , де  $I_p = I \cap T_p$  для ідеала  $I$ . Легко бачити також, що  $I_p$  є характеристичним ідеалом кільця  $R$  для довільного  $p \in \pi(I)$ .  $\square$

Наступне твердження доводиться так само, як і лема 2 із роботи [5], де розглядалися асоціативні алгебри над полями.

**Лема 3.** *Нехай  $R$  – асоціативне кільце,  $I$  – ідеал із  $R$  і  $D \in \text{Der}(R)$ . Тоді для всіх натуральних чисел  $k, m$  таких, що  $k < m$  має місце співвідношення  $D^k(I^m) \subseteq I^{m-k}$ .*

**Лема 4.** *Нехай  $R$  – асоціативне кільце,  $I$  – ідеал із  $R$  і  $D \in \text{Der}(R)$ . Тоді для довільних елементів  $x_1, \dots, x_k \in I$  має місце співвідношення*

$$k!D(x_1) \cdots D(x_k) \in I + D^k(I^k).$$

**Доведення.** Індукцією по  $k$  покажемо, що

$$D^k(x_1 \cdots x_k) = k!D(x_1) \cdots D(x_k) + y_k,$$

де  $y_k$  – деякий елемент із  $I$ . Для  $k = 2$  маємо за правилом Лейбніца

$$D^2(x_1 x_2) = D^2(x_1)x_2 + 2D(x_1)D(x_2) + x_1 D^2(x_2).$$

Оскільки

$$D^2(x_1)x_2 \in I, \quad x_1 D^2(x_2) \in I,$$

то отримаємо потрібне співвідношення, поклавши  $y_2 = D^2(x_1)x_2 + x_1 D^2(x_2)$ .

Нехай вже доведено, що існує елемент  $y_{k-1}$  такий, що

$$D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1}) = (k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1}) + y_{k-1}.$$

Тоді, використовуючи правило Лейбніца, отримаємо

$$D^k(x_1 \cdots x_k) = D(D^{k-1}((x_1 \cdots x_{k-1})x_k)) =$$

$$\begin{aligned} &= D(D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1})x_k + \\ &+ (k-1)D^{k-2}(x_1 \cdots x_{k-1})D(x_k) + \dots + \\ &+ x_1 x_2 \cdots x_{k-1} D^{k-1}(x_k)). \end{aligned} \quad (1)$$

Розглянемо більш детально внутрішню суму

$$\begin{aligned} D^{k-1}(x_1 \cdots x_k) &= D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1})x_k + \\ &+ (k-1)D^{k-2}(x_1 \cdots x_{k-1})D(x_k) + \dots + \\ &+ x_1 \cdots x_{k-1} D^{k-1}(x_k). \end{aligned} \quad (2)$$

Всі доданки в правій частині (2), крім перших двох лежать в ідеалі  $I^2$ , оскільки з огляду на лему 3

$$\begin{aligned} D^{k-s}(x_1 \cdots x_{k-1}) &\in I^{k-1-(k-s)} = I^{s-1} \\ \text{i } I^{s-1} &\subseteq I^2 \text{ при } s \geq 3. \end{aligned}$$

Другий доданок в правій частині (2)

$$(k-1)D^{k-2}(x_1 \cdots x_{k-1})D(x_k)$$

при дії на нього диференціювання  $D$  дає вираз

$$\begin{aligned} &(k-1)D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1})D(x_k) + \\ &+ (k-1)D^{k-2}(x_1 \cdots x_{k-1})D^2(x_k). \end{aligned}$$

За індуктивним припущенням

$$D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1}) = (k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1}) + y_{k-1},$$

де  $y_{k-1} \in I$  і тому

$$\begin{aligned} &(k-1)D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1})D(x_k) = \\ &+ (k-1)(k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1})D(x_k) + y'_{k-1}, \end{aligned}$$

де  $y'_{k-1} \in I$ . Зауважимо також, що

$$(k-1)D^{k-2}(x_1 \cdots x_{k-1})D^2(x_k) \in I$$

з огляду на лему 3, яка застосована до виразу  $D^{k-2}(x_1 \cdots x_{k-1})$ .

Підсумовуючи все вищесказане, можна записати

$$\begin{aligned} &(k-1)D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1})D(x_k) + \\ &+ (k-1)D^2(x_1 \cdots x_{k-1})D^2(x_k) = \\ &= (k-1)(k-1)!D(x_1) \cdots D(x_k) + y''_{k-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $y''_{k-1} \in I$ . Перший доданок  $D^{k-1}(x_1 \cdots x_{k-1})x_k$  за індуктивним припущенням має вигляд

$$((k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1}) + y_{k-1})x_k =$$

$$(k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1})x_k + y_{k-1}x_k,$$

де  $y_{k-1}x_k \in I^2$ . Тому при дії  $D$  на праву частину останньої рівності отримаємо

$$(k-1)!D(D(x_1) \cdots D(x_{k-1}))x_k +$$

$$+ (k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1})D(x_k) + D(y_{k-1}x_k). \quad (4)$$

Перший доданок в цій сумі лежить, очевидно, в ідеалі  $I$ , третій доданок лежить в  $I$  за лемою 3, оскільки  $y_{k-1}x_k \in I^2$ , тому вся сума (4) може бути записана у вигляді

$$(k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1})D(x_k) + \tilde{y}_{k-1},$$

де  $\tilde{y}_{k-1} \in I$ . Приймаючи до уваги співвідношення (3) і (4), отримаємо з огляду на (1), що має місце рівність

$$\begin{aligned} D^k(x_1 \cdots x_k) &= (k-1)!D(x_1) \cdots D(x_{k-1})D(x_k) + \\ &+ (k-1)(k-1)!D(x_1) \cdots D(x_k) + y_k = \\ &= k!D(x_1) \cdots D(x_k) + y_k, \end{aligned}$$

де  $y_k$  – деякий елемент із  $I$ . Лему доведено.  $\square$

**Теорема 1.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце,  $I$  – нільпотентний ідеал індексу нільпотентності  $n$  із  $R$  і  $D \in \text{Der}(R)$ . Тоді ідеал  $I + D(I)$  нільпотентний індексу нільпотентності  $\leq n^2$  наступних випадках:

1) Кільце  $R$  без адитивного скруту;

2) Кільце  $R$  адитивно періодичне і  $n < p$ ,

де  $p = \text{шип}_{q \in \pi(R)} q$ .

**Доведення.** 1) Нехай  $R$  – кільце без скруту. Позначимо через  $\tilde{I} = \{x \in R \mid mx \in I \text{ для деякого } m \geq 1\}$ . Легко бачити, що  $\tilde{I}$  – ідеал кільця  $R$ . Покажемо, що  $\tilde{I}$  має індекс нільпотентності  $n$  (такий самий, як у ідеала  $I$ ). Дійсно, якщо  $x_1, \dots, x_n \in \tilde{I}$ , то існують натуральні числа  $m_1, \dots, m_n$  такі, що  $m_i x_i \in I$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тоді  $m_1 x_1 \cdots m_n x_n = 0$ , оскільки  $I^n = 0$ . Звідси випливає, що  $m_1 \cdots m_n (x_1 \cdots x_n) = 0$ . Оскільки кільце  $R$  без скруту, то звідси отримаємо, що  $x_1 \cdots x_n = 0$ . Елементи  $x_1, \dots, x_n$  вибралися довільно і тому  $\tilde{I}^n = 0$ . Оскільки  $I \subseteq \tilde{I}$ , то звідси отримаємо, що індекс нільпотентності ідеала  $\tilde{I}$  дорівнює  $n$ . Тому в подальшому будемо вважати, що  $\tilde{I} = I$ , тобто із умови  $mx \in I$  випливає, що  $x \in I$  для довільного елемента  $x \in R$  і довільного натурального  $m$ . Покажемо тепер, що  $D(I)^n \subseteq I$  (нагадаємо, що  $n$  – індекс нільпотентності нільпотентного ідеала  $I$ ). Дійсно, для

довільних елементів  $x_1, \dots, x_n \in I$  за лемою 4 маємо співвідношення

$$n!D(x_1) \cdots D(x_n) \in I + D^n(I^n) = I$$

(оскільки  $I^n = 0$ ). Тому за зазначенням вище  $D(x_1) \cdots D(x_n) \in I$ , тобто  $D(I)^n \subseteq I$ . Звідси легко випливає, що  $(I + D(I))^n \subseteq I$ . Але тоді  $(I + D(I))^{n^2} = 0$ , тобто  $I + D(I)$  – нільпотентний ідеал індексу нільпотентності  $\leq n^2$ .

2) Нехай  $R$  – адитивно періодичне кільце,  $I$  – нільпотентний ідеал із  $R$  індексу нільпотентності  $n$ ,  $p = \min_{q \in \pi(R)} q$  і  $n < p$ . Так само як і в п. 1 доведення теореми для довільних елементів  $x_1, \dots, x_n \in I$  отримаємо, що

$$n!D(x_1) \cdots D(x_n) \in I.$$

Оскільки  $n < p$ , то  $n!$  не ділиться на  $p$  і тому із умови  $n!D(x_1) \cdots D(x_n) \in I$  випливає, що  $D(x_1) \cdots D(x_n) \in I$ . Звідси випливає (див. п. 1 доведеної теореми), що  $I + D(I)$  нільпотентний ідеал індексу нільпотентності  $\leq n^2$ . Теорему доведено.  $\square$

В наступній теоремі вказана поведінка нільпотентних ідеалів без скруті в довільних асоціативних кільцях.

**Теорема 2.** Нехай  $I$  – нільпотентний ідеал без скруті в асоціативному кільці  $R$ ,  $n$  – індекс нільпотентності ідеала  $I$ . Нехай в фактор-кільці  $R/I$  немає елементів адитивного порядку  $\leq n$ . Тоді  $I + D(I)$  – нільпотентний ідеал індексу нільпотентності  $\leq n^2$  для довільного  $D \in \text{Der}(R)$ .

**Доведення.** Виберемо довільні елементи  $x_1, \dots, x_n$  із ідеала  $I$ . Тоді за лемою 4 виконується включення  $n!D(x_1) \cdots D(x_n) \in I$ . Це означає, що в фактор-кільці  $R/I$  елемент  $D(x_1) \cdots D(x_n) + I$  має адитивний порядок, який ділить  $n!$ . Нехай  $D(x_1) \cdots D(x_n) \notin I$ . Тоді, як неважко переконатися, в фактор-кільці  $R/I$  існує ненульовий елемент адитивного порядку  $\leq n$ . Це суперечить умовам теореми і тому  $D(x_1) \cdots D(x_n) \in I$ . Але тоді

$(I + D(I))^n \in I$  і тому, як і в попередньому пункти,  $(I + D(I))^{n^2} = 0$ . Це означає, що  $I + D(I)$  – нільпотентний ідеал індексу нільпотентності  $\leq n^2$ . Теорему доведено.  $\square$

Із теореми 1 можна отримати такий наслідок, який представляє самостійний інтерес.

**Наслідок 1.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце без скруті і  $N(R)$  – сума всіх нільпотентних ідеалів кільця  $R$ . Тоді  $N(R)$  – характеристичний ідеал кільця  $R$  (очевидно,  $N(R)$  – локально нільпотентний ідеал кільця  $R$ ).

Зауважимо, що в роботі [4] було показано, що в асоціативному кільці без скруті сума всіх локально нільпотентних ідеалів є характеристичним ідеалом всього кільця.

### Список використаних джерел

1. Hartley B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra// Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, 63. – С.257-272.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288с.
3. Lanski C. Left ideals and derivations in semi-prime rings// J. of Algebra, 2004, 277, №2. – P.658-667.
4. Letzter G. Derivations and nil ideals// Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1988, 37, no.2. – P.174-176.
5. Лучко В.С. О дії диференцірованій на нільпотентні идеали асоціативних алгебр// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2008, (прийнято до друку).
6. Petrușchuk A.P. On behavior of solvable ideals of Lie algebras under outer derivations// to appear in "Communications in Algebra".

Надійшла до редколегії 20.11.2008

УДК 519.21

О.М. Моклячук, аспірант.

## Моделювання гауссівих випадкових процесів у просторі $L_p(T)$

У даній роботі розглядається новий метод моделювання випадкових процесів, що дозволяє будувати моделі гауссівих процесів із заданими точністю та надійністю. Метод застосований для побудови декількох прикладів.

**Ключові слова:** моделювання, гауссіві випадкові процеси, модель Карунена-Лоєва.

E-mail: omoklyachuk@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

### 1 Вступ

У даній роботі розглядається метод моделювання випадкових процесів, що дозволяє будувати моделі із заданими точністю та надійністю. Нехай ми можемо представити центрований Гауссівий процес  $X(t)$ ,  $t \in [0, T]$  з кореляційною функцією  $B(t, s) = EX(t)X(s)$  у вигляді нескінченного ряду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t),$$

що збігається у середньому квадратичному. Модель процесу  $X(t)$  будемо називати сумою  $X_N = X_N(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k f_k(t).$$

Нехай випадковий процес  $X(t)$  та всі  $X_N(t)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  належать певному Банаховому простору  $B$  із нормою  $\|\cdot\|$ . Нехай числа  $\alpha$  та  $\delta$  ( $0 < \alpha < 1$ ,  $\delta > 0$ ) – задані.

**Означення 1.1.** Кажуть, що модель  $X_N(t)$  наближає випадковий процес  $X(t)$  із заданими надійністю  $1 - \alpha$  і точністю  $\delta$ , якщо виконується наступна нерівність:

$$P\{|X(t) - X_N(t)| > \delta\} \leq \alpha \quad (1)$$

О.М. Moklyachuk, PhD student.

## Simulation of gaussian random sequences in $L_p(T)$

New method of modeling of gaussian stochastic processes with given reliability and accuracy is considered. Few examples of this method application is given.

**Key Words:** simulation, gaussian stochastic processes, the Karhunen-Loeve model.

Іншими словами, для того, щоб побудувати модель випадкового процесу, нам необхідно знайти таке  $N$ , щоб для заданих  $\alpha$  та  $\delta$  нерівність (1) виконувалась. Нехай вдається встановити нерівність:

$$P\{|X(t) - X_N(t)| > \delta\} \leq W_N(\delta),$$

де  $W_N(\delta)$ ,  $\delta > 0$  – відома монотонна функція що спадає по  $N$  та  $\delta$ . Якщо ми знайдемо таке  $N$  що  $W_N(\delta) \leq \alpha$ , то тоді для всіх  $X_{N'}$  де  $N' \geq N$  нерівність (1) виконується. Іншими словами, щоб побудувати модель  $X_N$  котра наближає випадковий процес  $X$  із заданими надійністю  $1 - \alpha$  та точністю  $\delta$  в нормі простору  $B$ , достатньо знайти таке  $N$ , найменше по можливості, щоб нерівність  $W_N(\delta) \leq \alpha$  виконувалася.

### 2 Оцінка точності моделі випадкового процесу у просторах $L_p(0, T)$

Розглянемо модель випадкового процесу у просторі  $L_p(0, T)$ .

Як було згадано вище, для того, щоб модель  $X_N(t)$  наближала випадковий процес  $X(t)$  із заданими надійністю  $1 - \alpha$  і точністю  $\delta$ , потрібно, щоб виконувалася нерівність (1). У [2] було доведено наступне:

**Теорема 2.1.** Нехай  $\{T, \Lambda, M\}$  – вимірний простір,  $X = \{X(t), t \in T\} \subset Sub_{\varphi}(\Omega)$ ,

$\tau_\varphi(t) = \tau_\varphi(X(t))$ . Нехай існує  $\int_0^T (\tau_\varphi(t))^p d\mu(t) < \infty$ ,  $p \geq 1$ . Тоді з ймовірністю 1 існує  $\int_0^T |X(t)|^p d\mu(t) < \infty$  та  $\forall \delta : \delta > c(f(\frac{c^{1/p} p}{\delta^{1/p}}))^p$ , де  $c = \int_0^T (\tau_\varphi(t))^p d\mu(t)$ ,  $f$  - функція, така, що  $\forall u > 0 : \varphi(u) = \int_0^u f(v) dv$ . Тоді

$$P \left\{ \int_0^T |X(t)|^p d\mu(t) > \delta \right\} \leq 2 \exp \{-\varphi^*((\delta/c)^{1/p})\},$$

де  $\varphi^*$  - перетворення Юнга-Фенхеля  $\varphi$ .

Як відомо, перетворення Юнга-Фенхеля у даному просторі має вигляд  $\varphi^*(x) = \sup_{y \in R} (xy - \varphi(y))$ , причому супремум досягається у точці  $y = f^{-1}(x)$ . Тому

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) &= xf^{-1}(x) - \varphi(f^{-1}(x)) \\ &= xf^{-1}(x) - \int_0^x f(f^{-1}(v)) dv = \\ &= xf^{-1}(x) - \int_0^x \frac{v^2}{2} dv = xf^{-1}(x) - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

тобто,

$$\begin{aligned} 2 \exp \{-2\varphi^*((\delta/c)^{1/p})\} &= \\ &= 2 \exp \{-(\delta/c)^{1/p} f^{-1}((\delta/c)^{1/p}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta/c)^{2/p}\}, \end{aligned}$$

а, поклавши  $z = \delta^{1/p}$ , маємо

$$\begin{aligned} P\{|X(t)|_p > z\} &\leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{z}{c^{1/p}} f^{-1} \left( \frac{z}{c^{1/p}} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{c^{2/p}} \right\} \leq \alpha \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{z}{c^{1/p}} f^{-1} \left( \frac{z}{c^{1/p}} \right) - \frac{1}{2} \frac{z}{c^{2/p}} \geq \ln \frac{2}{\alpha}$$

Спираючись на наведене, можна сформулювати теорему

**Теорема 2.2.** Випадковий процес  $X_N$  наближає випадковий процес  $X$  з надійністю  $1 - \alpha$  та точністю  $\delta$  в просторі  $L_p(0, T)$ ,

$$P \left\{ \left( \int_0^T (X(t) - X_N(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} > \delta \right\} \leq \alpha,$$

якщо виконані наступні умови:

$$\frac{\delta}{c^{1/p}} f^{-1} \left( \frac{\delta}{c^{1/p}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\delta}{c^{2/p}} \geq \ln \frac{2}{\alpha}$$

та

$$\delta > c(f(\frac{c^{1/p} p}{\delta^{1/p}}))^p,$$

де  $f$  задане в теоремі 2.1.

Застосуємо отриману теорему у випадку Гауссовых випадкових величин. Покладемо  $\varphi(x) = x^2/2$ ,  $f(x) = x$ ,  $x > 0$ . Зрозуміло, що  $\tau_\varphi(\xi) = E\xi^2$ . З першої умови

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{c^{2/p}} \geq \ln \frac{2}{\alpha} \Rightarrow c \leq \left( \frac{\delta^2}{2} \ln \frac{2}{\alpha} \right)^{p/2}$$

З другої умови:

$$\delta > c \left( \frac{c^{1/p} p}{\delta^{1/p}} \right)^p \Rightarrow c < \frac{\delta}{p^{p/2}},$$

$$\text{де } c = \int_0^T (E(X(t))^2)^{p/2} dt.$$

Переформулюємо теорему 2.2 для даного випадку.

**Теорема 2.3.** Випадковий процес  $X_N$  наближає випадковий процес  $X$  з надійністю  $1 - \alpha$  та точністю  $\delta$  в просторі  $L_p(0, T)$ ,

$$P \left\{ \left( \int_0^T (X(t) - X_N(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} > \delta \right\} \leq \alpha,$$

якщо виконана наступна умова:

$$\left( \int_0^T (E\Delta_N(t))^2 dt \right)^{2/p} < \min \left\{ \frac{\delta^2}{2} \ln \frac{2}{\alpha}, \frac{\delta^{2/p}}{p} \right\},$$

$$\text{де } \Delta_N(t) = X(t) - X_N(t)$$

### 3 Приклади

**Приклад 1.** Модель Карунена-Лоєва.

Нехай  $[0, T]$ -інтервал в  $\mathbb{R}$ ,  $X = \{X(t), t \in [0, T], EX(t) = 0\}$  - неперервний у середньому квадратичному випадковий процес,  $B(t, s) = EX(t)X(s)$ ,  $t, s \in [0, T]$  - кореляційна функція цього процесу. Очевидно, що функція  $B(t, s)$  не від'ємно визначена. Так як  $X(t)$  неперервний у середньому квадратичному, то  $B(t, s) \in$  неперервною на квадраті  $[0, T] \times [0, T]$ .

Розглянемо однорідне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^T B(t, s) \varphi(s) ds.$$

Це рівняння має не більше як злічену сім'ю невід'ємних власних чисел. Нехай  $\lambda_n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  - власні числа рівняння, а  $\varphi_n(t)$  - відповідні їм власні функції. Занумеруємо  $\lambda_n$  так, щоби  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \dots$ ;  $\varphi_n(t)$

- неперервні функції, що утворюють ортонормовану послідовність

$$\int_0^T \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \delta_m^n,$$

де  $\delta_m^n$  - символ Кронекера.

**Означення 3.1.** Моделлю Карунена-Лоєва випадкового процесу  $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$  будемо називати випадковий процес  $X_N(t) = \{X_N(t), t \in [0, T]\}$ , де  $X_N(t) = \sum_{n=1}^N \xi_n \varphi_n(t)$ .

Знайдемо вираз для с:

$$\begin{aligned} c^{2/p} &= \left( \int_0^T (E(\Delta_N(t))^2)^{p/2} dt \right)^{2/p} = \\ &= \left( \int_0^T \left( \sum_{k=0}^N \left| \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\hat{\varphi}_k(t)}{\sqrt{\hat{\lambda}_k}} \right|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p} + \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \right|^{p/2} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^N \left( \int_0^T \left| \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\hat{\varphi}_k(t)}{\sqrt{\hat{\lambda}_k}} \right|^p dt \right)^{2/p} + \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \int_0^T \left| \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \right|^p dt \right)^{2/p} \end{aligned}$$

Застосовуючи оцінки для  $\varphi_k(t)$  та  $\lambda_k$ , отримані у [1], а також властивість власних функцій  $\|\varphi(t)\| = 1$ , маємо

$$\begin{aligned} c^{2/p} &\leq \sum_{k=0}^N \int_0^T \left| \frac{3\hat{\varphi}_k^{(m)}(t)(\sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta} - \sqrt{\lambda_k})}{3\sqrt{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta)}} \right|^p + \\ &\quad + \left| \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_k}(\hat{\varphi}_k^{(2m)}(t) - \hat{\varphi}_k^{(m)}(t))}{3\sqrt{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta)}} \right|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \end{aligned}$$

Отже, випадковий процес  $X_N$  наближає випадковий процес  $X$  з надійністю  $1 - \alpha$  та точністю  $\delta$  в просторі  $L_p(0, T)$ , якщо виконана наступна умова:

$$\sum_{k=0}^N \int_0^T \left| \frac{3\hat{\varphi}_k^{(m)}(t)(\sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta} - \sqrt{\lambda_k})}{3\sqrt{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta)}} \right|^p +$$

$$+ \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_k}(\hat{\varphi}_k^{(2m)}(t) - \hat{\varphi}_k^{(m)}(t))}{3\sqrt{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta)}} \Bigg|^p +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \min \left\{ \frac{\delta^2}{2} \ln \frac{2}{\alpha}, \frac{\delta^{2/p}}{p} \right\}$$

Де  $\hat{\varphi}_k^{(m)}(t)$  - наближення  $k$ -ї власної функції з кількістю вузлів  $m$ ,  $\eta$  - похибка наближення власних чисел.

**Приклад 2.** Розклад процесу за базисом у формі синуса.

Розглянемо модель для розкладу процесу за базисом у формі синуса, наведений у [3]. Нехай  $X(t)$  - центрований випадковий процес з кореляційною функцією

$$R(t, s) = EX(t)\overline{X(s)} \int_0^\infty f(t, s)\overline{f(t, s)} d\lambda$$

що може бути представлений у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k(t),$$

де

$$a_k(t) = \int_0^\pi f(t, \lambda) \sin k\lambda d\lambda.$$

За модель такого процесу візьмемо ряд

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k a_k(t).$$

Знайдемо вираз для с:

$$\begin{aligned} c^{2/p} &= \left( \int_0^T (E(\Delta_N(t))^2)^{p/2} dt \right)^{2/p} = \\ &= \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^\pi \left( \int_0^\pi f(t, \lambda) \sin k\lambda d\lambda \right)^2 dt \right)^{2/p} \end{aligned}$$

Отже, для того, щоби випадковий процес  $X_N$  наблизив випадковий процес  $X$  з надійністю  $1 - \alpha$  та точністю  $\delta$  в просторі  $L_p(0, \pi)$ , якщо виконана наступна умова:

$$\left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^\pi \left( \int_0^\pi f(t, \lambda) \sin k\lambda d\lambda \right)^2 dt \right)^{2/p} <$$

$$< \min \left\{ \frac{\delta^2}{2} \ln \frac{2}{\alpha}, \frac{\delta^{2/p}}{p} \right\}$$

Приклад 3. Розклад процесу за базисом на основі поліномів Чебишева-Герміта.

Нехай  $X(t)$  - центрований випадковий процес з кореляційною функцією

$$R(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} d\mu(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} q(\lambda) d\lambda,$$

де  $q$  - щільність міри  $\mu$ . Якщо

$$q(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\},$$

то послідовність функцій

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{H_k(\lambda)}{\sqrt{k!}}$$

є ОНБ в просторі  $(R, B_R, \mu)$ , де  $H_k(\lambda)$  - поліноми Чебишева-Герміта. Звідси, процес  $X(t)$  має представлення

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) \frac{H_k(\lambda)}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\} d\lambda.$$

Моделлю такого процесу будемо вважати ряд

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^N \xi_k \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) \frac{H_k(\lambda)}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\} d\lambda.$$

Нехай  $X(t)$  - стаціонарний дійснозначний випадковий процес для якого існує невід'ємна спектральна функція щільності  $f(\lambda) \geq 0, \lambda \in R$ . Тоді кореляційна функція випадкового такого процесу буде мати вигляд

$$R(t, s) = R(t-s) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda(t-s)) f(\lambda) q(\lambda) d\lambda$$

i, відповідно, процес буде мати наступне представлення:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k v_k(t)$$

де  $\xi_k$  та  $\eta_k$  центровані некорельовані випадкові величини,  $E\xi_k = E\eta_k = 0$ ,  $E\xi_k \xi_l = E\eta_k \eta_l = \delta_{kl}$ ,  $E\xi_k \eta_l = 0$ ,  $E\xi_k^2 = E\eta_k^2 = 1$ , та

$$z_k(t) = \int_0^{\infty} \sqrt{f(\lambda)} \cos(\lambda t) \frac{H_k(\lambda)}{\sqrt{k!}} q(\lambda) d\lambda$$

$$v_k(t) = \int_0^{\infty} \sqrt{f(\lambda)} \sin(\lambda t) \frac{H_k(\lambda)}{\sqrt{k!}} q(\lambda) d\lambda$$

Відповідний вираз для визначення  $N$  буде мати вигляд

$$\left( \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} (z_k^2(t) + v_k^2(t)) \right)^{p/2} dt \right)^{2/p} <$$

$$< \min \left\{ \frac{\delta^2}{2} \ln \frac{2}{\alpha}, \frac{\delta^{2/p}}{p} \right\}$$

#### 4 Висновки

Отже, в роботі отримано новий метод моделювання гауссових випадкових процесів у просторах  $L_p(T)$ , а також наведено приклади його застосування.

#### Список використаних джерел

1. Moklyachuk O. Simulation of random processes with known correlation function with the help of karhunen-Loeve decomposition / O. Moklyachuk // Theory of Stochastic Processes. - 2007. - vol 13(29) - pp. 163-169
2. Козаченко Ю.В. Апроксимація  $SSub_{\varphi}(\Omega)$  випадкових процесів у просторі  $L_p(T)$  / Ю.В. Козаченко, О.Є. Каменщикова // Теорія Ймовірностей та Математична Статистика. - 2008. - Вип. 79 - стор. 73-78
3. Kozachenko Yu.V. On expansion of random processes in series /, Yu.V. Kozachenko, I.V. Rozora, Ye.V. Turchyn // Random Operators and Stochastic Equations - 2007 - Vol 15 №1 - pp. 15-35
4. Козаченко Ю.В. Моделювання випадкових процесів / Ю. Козаченко, О. Пашко. - К.: ВПЦ "Київський університет", 1999. - 223 с.

Надійшла до редколегії 20.12.2008

УДК 512.5

С.А. Овсянко, д.ф.-м.н., професор,  
Ю.В. Роганов, к.ф.-м.н., провідний науковий  
співробітник,  
О.Ю. Роганова.

## Нерозв'язні матричні поліноміальні рівняння

У статті виводяться 2 критерії розв'язності поліноміальних матричних рівнянь. Доводиться, що існують 2 багатопараметричні множини матричних нерозв'язних поліноміальних рівнянь розмірності два.

**Ключові слова:** матричне рівняння, корінь.

E-mails: ovsienko.sergiy@gmail.com, yura@ukrdgri.go.ua, bybinka@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Кириченко В. В.

### 1 Вступ

У даній роботі розглядаються матричні рівняння виду:

$$L(X) = A_0 + A_1 X + \dots + A_{n-1} X^{n-1} + X^n = 0, \quad (1)$$

де  $A_i, X \in M_m(\mathbb{C})$ .

Методи розв'язку матричних рівнянь викладені в монографіях [1],[2],[3], та інших.

Використовуючи відомі алгоритми, можна для кожного конкретного рівняння знайти корені, або показати, що воно не має розв'язків. Але, описати всі матричні поліноміальні рівняння, що не мають розв'язків, використовуючи ці результати складно.

В данній статті виводяться два критерії нерозв'язності матричних рівнянь. На підставі цих критеріїв, знайдені 2 серії матричних рівнянь розмірності 2, які не мають коренів.

### 2 Критерії наявності коренів у матричних рівняннях

Кожному матричному рівнянню (1) можна співставити блочно-фробеніусову матрицю:

S. A. Ovsienko, Dr., Professor,  
Yu.V. Roganov, PhD, leading scientific  
researcher,  
O.Yu. Roganova.

## Unresolvable matrix polynomial equations

In this paper, two criteria of solvability of polynomial matrix equations are derived. It is proved that two multiparametric sets of unresolvable two-dimensional polynomial matrix equations exist.

**Key Words:** matrix equation, root.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \dots & -A_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{C}). \quad (2)$$

Координатні проекції  $p_k : \mathbb{C}^{mn} \rightarrow \mathbb{C}^m (k = 0, \dots, n-1)$  вектору  $\varphi \in \mathbb{C}^{mn} = (\mathbb{C}^m)^n$  співставляють  $n$  векторів  $\varphi^{(k)} = p_k(\varphi) \in \mathbb{C}^m$ . Відображення  $\varphi \mapsto (\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(n-1)})^T$  є ізоморфізмом.

**Теорема 2.1.** Матричне рівняння (1) має корені тоді і тільки тоді, коли існує  $n$ -вимірний підпростір  $K \subseteq \mathbb{C}^{mn}$ , інваріантний відносно оператора  $F : \mathbb{C}^{mn} \rightarrow \mathbb{C}^{mn}$  і базис  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in K$ , для якого вектори  $\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_m^{(0)} \in \mathbb{C}^m$  лінійно-незалежні.

**Доведення.** Якщо існує інваріантний підпростір  $K$ , то  $F\varphi_j \in K$  і, відповідно,

$$F\varphi_j = y_{1j}\varphi_1 + \dots + y_{mj}\varphi_m \quad (3)$$

для деяких  $y_{ij} \in \mathbb{C} (1 \leq i, j \leq m)$ .

Розглянемо матриці  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in M_{mn,m}(\mathbb{C})$ ,  $\Phi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_m^{(k)}) \in M_m(\mathbb{C}) (0 \leq k \leq n-1)$  і  $Y = (y_{ij})$ .

Співвідношення (3) можна представити матричною рівністю  $F\Phi = \Phi Y$ , або в розгорнуто-

му вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \dots & -A_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi^{(0)} \\ \Phi^{(1)} \\ \dots \\ \Phi^{(n-2)} \\ \Phi^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^{(0)} \\ \Phi^{(1)} \\ \dots \\ \Phi^{(n-2)} \\ \Phi^{(n-1)} \end{pmatrix} Y. \quad (4)$$

Отже, наявність інваріантного підпростору  $K$  еквівалентно системі рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi^{(1)} = \Phi^{(0)}Y \\ \Phi^{(2)} = \Phi^{(1)}Y \\ \dots \\ \Phi^{(n-1)} = \Phi^{(n-2)}Y \\ -A_0\Phi^{(0)} - A_1\Phi^{(1)} - \dots - A_{n-1}\Phi^{(n-1)} = \Phi^{(n-1)}Y \end{cases} \quad (5)$$

З перших  $(n-1)$  рівностей отримаємо, що  $\Phi^{(2)} = \Phi^{(0)}Y^2, \dots, \Phi^{(n-1)} = \Phi^{(0)}Y^{n-1}$ , а зостанньої, що  $A_0\Phi^{(0)} + A_1\Phi^{(0)}Y + \dots + A_{n-1}\Phi^{(0)}Y^{n-1} + \Phi^{(0)}Y^n = 0$ .

Умова лінійної незалежності  $\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_m^{(0)}$  рівносильна невиродженості матриці  $\Phi^{(0)}$ . В п'ятому випадку, можна розгляднути матрицю  $X = \Phi^{(0)}Y(\Phi^{(0)})^{-1}$ .

З попередньої рівності випливає, що  $A_0 + A_1X + \dots + A_{n-1}X^{n-1} + X^n = 0$ , тобто  $X$ -корінь матричного рівняння (1).

Обернене, якщо  $X \in M_m(\mathbb{C})$ -корінь матричного рівняння, то покладемо  $Y = X, \Phi^{(0)} = I, \Phi^{(k)} = X^k (1 \leq k \leq n-1)$ . Легко перевірити, що рівність (4) виконується, тобто стовпці матриці  $\Phi$  породжують інваріантний підпростір. Цей підпростір має розмірність  $m$  і задовільняє умові теореми, оскільки матриця  $\Phi^{(0)} = I \in M_m(\mathbb{C})$ -невироджена.  $\square$

Позначимо  $D$  нормальну Жорданову форму матриці  $F$  і нехай  $F = QDQ^{-1}$ , де  $Q = (q_j)_{j=1,mn} \in M_{mn}(\mathbb{C})$ -матриця, яка складається з ланцюгів власних та приєднаних векторствовиць  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_r\}$  матриці  $F$ .

Отже,  $F$ -інваріантні підпростори мають базиси, що складаються з векторів  $\varphi_0, \dots, \varphi_l$ , ( $l \leq r$ ), для різних Жорданових блоків.

Використовуючи теорему 2.1 отримаємо результат:

**Теорема 2.2.** Матричне рівняння (1) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли існує т векторів  $q_{j_1}, \dots, q_{j_m}$ , що складаються з різних ланцюгів  $\varphi_0, \dots, \varphi_l (l \leq r)$  і таких, що  $q_{j_1}^{(0)}, \dots, q_{j_m}^{(0)}$  є лінійно-незалежними.

**Означення 2.1.** Позначимо  $d$  дискримінант характеристичного многочлена  $\chi(\lambda) = \det(F - \lambda I)$ .

**Теорема 2.3.** Якщо  $d \neq 0$ , то рівняння  $L(X) = 0$  має корені.

**Доведення.** Якщо  $d \neq 0$ , то рівняння  $\chi(\lambda) = 0$  не має кратних коренів. Тому, матриця  $F$  має  $m$  власних векторів  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  з різними власними значеннями. Оскільки, ці вектори породжують  $\mathbb{C}^m$ , то з них можна вибрати  $m$  векторів  $\psi_1, \dots, \psi_m$ , для яких  $\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_m^{(0)}$  лінійно-незалежні. Вектори  $\psi_1, \dots, \psi_m$  є базисом  $F$ -інваріантного  $m$ -вимірного підпростору, що задовільняє умові теореми 2.2.  $\square$

### 3 Нерозв'язні рівняння при $X \in M_2(\mathbb{C})$

**Означення 3.1.** Позначимо  $\sigma_{m,n}$  елементарну симетричну функцію степеня  $m$  від змінних  $t_1, \dots, t_n$  тобто нехай  $(x+t_1)\dots(x+t_n) = x^n + \sigma_{1,n}x^{n-1} + \sigma_{2,n}x^{n-2} + \dots + \sigma_{n,n}$

Будемо також вважати, що  $\sigma_{i,j} = 0$  при  $i > j$ .

**Теорема 3.1.** Для будь-яких  $t_1, \dots, t_{n-2} \in \mathbb{C}$ ,  $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{C}$  і  $n \geq 2$ , матричне рівняння  $L(X) = 0$  з коефіцієнтами  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_i & \sigma_{n-i,n-2} \end{pmatrix}, 2 \leq i \leq n-1$  не має розв'язків.

**Доведення.** Будемо вважати, що  $t_i \neq t_j$  при  $i \neq j$  і  $t_i \neq 0$ . Нехай  $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Покажемо, що нормальнна Жорданова форма матриці  $F$  складається з одного блоку  $J_{n+2}(0)$  розмірності  $(n+2)$  з нульовим власним значенням і  $(n-2)$  одновимірними блоками  $J_1(-t_i) (1 \leq i \leq n-2)$  з власними значеннями  $-t_i$ .

Якщо позначити  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n+1}\}$  і  $\psi_1, \dots, \psi_{n-2}$  відповідні власні і приєднані вектори, то ми покажемо, що їх можна вибрати так, щоб:

$$\varphi_0^{(0)} = \psi_1^{(0)} = \dots = \psi_{n-2}^{(0)} = e_1, \varphi_1^{(0)} = 0,$$

$$\varphi_i^{(0)} = f_{i-2}e_2 (2 \leq i \leq n+1),$$

$$\varphi_i^{(j)} = \begin{cases} \varphi_{i-j}^{(0)}, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases}, \quad (6)$$

$$\psi_i^{(j)} = (-t_i)^{j-1} \psi_i^{(0)}. \quad (7)$$

Підстановка блочно-заданих значень (6), (7) векторів  $\varphi_i$  і  $\psi_i$  в співвідношення

$$F\varphi_0 = 0, F\varphi_i = \varphi_{i-1} (i = \overline{1, n+1}), F(\psi_i) = -t_i \psi_i,$$

що визначають структуру Жорданової форми матриці  $F$ , приводить до еквівалентної системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_0 \varphi_0^{(0)} = 0 \\ A_0 \varphi_1^{(0)} + A_1 \varphi_0^{(0)} = 0 \\ \dots \\ A_0 \varphi_{n-1}^{(0)} + \dots + A_{n-1} \varphi_0^{(0)} = 0 \\ A_0 \varphi_n^{(0)} + \dots + A_{n-1} \varphi_1^{(0)} + \varphi_0^{(0)} = 0 \\ A_0 \varphi_{n+1}^{(0)} + \dots + A_{n-1} \varphi_2^{(0)} + \varphi_1^{(0)} = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$[A_0 - A_1 t_i + A_2 t_i^2 - \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1} t_i^{n-1} + (-1)^n t_i^n] \varphi_0^{(0)} = 0 \quad (9)$$

при  $i = \overline{1, n-2}$ . Покажемо, що система (8), (9) виконується при деяких значеннях  $f_i$ . Для цього розглянемо матричний, векторний і скалярний многочлени від формальної змінної  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= A_0 + A_1 \lambda + \dots + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n, \\ v(\lambda) &= \varphi_0^{(0)} + \dots + \varphi_1^{(0)} \lambda + \varphi_{n+1}^{(0)} \lambda^{n+1}, \\ u(\lambda) &= u_1 + u_2 \lambda + \dots + u_{n-1} \lambda^{n-2}, \\ f(\lambda) &= f_0 + f_1 \lambda + \dots + f_{n-1} \lambda^{n-1}. \end{aligned}$$

З означення  $A_i$  та  $\varphi_i^{(0)}$  випливає, що

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ a(\lambda) & b(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де  $a(\lambda) = 1 + u_1 \lambda + \dots + u_{n-2} \lambda^{n-1} = 1 + \lambda u(\lambda)$ ,  $b(\lambda) = \lambda^2 \sigma_{n-2, n-2} + \dots + \sigma_{1, n-2} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \lambda^2 (\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-2})$  і

$$v(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 f(\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тому,

$$L(\lambda)v(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{n+2} f(\lambda) \\ c(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

де  $c(\lambda) = \lambda^2 f(\lambda) (1 + \lambda u(\lambda)) + \lambda^2 (\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-2})$ . З іншого боку, співвідношення (8) рівносильні тому, що векторний многочлен

$$L(\lambda)v(\lambda) = A_0 \varphi_0^{(0)} + (A_0 \varphi_1^{(0)} + A_1 \varphi_0^{(0)}) \lambda + \dots$$

має нульові коефіцієнти до степеня  $(n+1)$  включно, тобто він ділиться на  $\lambda^{n+2}$ . Отже, щоб виконувались співвідношення (8) потрібно підібрати коефіцієнти многочлена  $f(\lambda)$  так, щоб векторний многочлен  $L(\lambda)v(\lambda)$  ділився на  $\lambda^{n+2}$ . За рівністю (12) ця умова означає подільності многочлена

$$f(\lambda)(1 + \lambda u(\lambda)) + (\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-2}) \quad (13)$$

на  $\lambda^n$ . Розглянемо раціональний дріб

$$\tilde{f}(\lambda) = -\frac{(\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-2})}{1 + \lambda u(\lambda)} \quad (14)$$

і розкладемо його у формальний степеневий ряд по  $\lambda$ , скориставшись виразом:

$$(1 + \lambda u(\lambda))^{-1} = 1 - \lambda u(\lambda) + \lambda^2 u^2(\lambda) - \dots,$$

тобто будемо вважати, що  $\tilde{f}(\lambda) \in \mathbb{C}[[\lambda]]$ . Підставляючи (14) в (13), отримаємо, що

$$\tilde{f}(\lambda)(1 + \lambda u(\lambda)) + (\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-2}) = 0. \quad (15)$$

Одночлени лівої частини рівності (15), степеня що не перевищує  $(n-1)$ , залежать від одночленів ряду  $\tilde{f}(\lambda)$  також степенів, що не перевищують  $(n-1)$ -у степінь.

Якщо залишити початкову частину ряду  $\tilde{f}(\lambda)$  степеня  $(n-1)$  і рахувати, що це многочлен  $f(\lambda)$ , то ліва частина рівності (15) не буде мати одночленів до  $(n-1)$ -го степеня включно, тобто буде ділится на  $\lambda^n$ .

Отже, многочлен  $f(\lambda)$ , для якого виконується рівність (8) знайдений.

Рівністі (9) виконуються тому, що

$$\begin{aligned} L(\lambda)\varphi_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (-t_i)^2 (-t_i + t_1) \dots (-t_i + t_{n-2}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отже, матриця  $F$  дійсно має вказану вище Жорданову форму і у відповідності з теоремою 2.2, рівняння  $L(X) = 0$ , коли  $t_i \neq t_j$  і  $t_i \neq 0$  не має розв'язків. Якщо деякі  $t_i = 0$ , то нехай це будуть  $t_1 = \dots = t_k = 0$ ,  $k \leq n-2$ . В цьому випадку Жорданова форма матриці  $F$  має один блок розміру  $(n+2+k)$  з нульовим власним значенням і  $(n-2-k)$  одновимірних блоків з власними значеннями  $-t_i$ ,  $(k+1 \leq i \leq n-2)$ . У цьому випадку, рівняння (9) для кожного

$i = \overline{k+1, n-2}$  залишається в силі і доведення таке саме як було раніше. Але, до рівностей (8) додаються ще  $k$  рівностей, а  $f(\lambda)$  стає многочленом степеня  $n - 1 + k$ . Використовуючи початковий відрізок ряду  $\tilde{f}(\lambda)$  степеня  $n - 1 + k$  в якості многочлена  $f(\lambda)$ , з рівності (14) ми отримаємо, що многочлен  $f(\lambda)$  ділиться на  $\lambda^k$ , а  $L(\lambda)v(\lambda)$  ділиться на  $\lambda^{n+2+k}$ , тобто що рівняння (8) виконуються. Розглянемо випадок, коли деякі  $t_i$  одинакові, але не рівні 0. Нехай це будуть  $t_1 = \dots = t_k \neq 0$ . В цьому випадку Жорданова форма матриці  $F$  має блоки  $J_{n+2}(0), J_k(-t_1), J_1(-t_{k+1}), \dots, J_1(-t_{n+2})$ , до того ж  $k$ -вимірному блоку  $J_k(-t_1)$  відповідає ланцюг власних і приєднаних векторів  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  для яких  $\varphi_1^{(0)} = \dots = \varphi_k^{(0)} = 0$ . Дійсно, в цьому випадку змінюються тільки перші  $k$  рівнянь (9) на наступні:  $L(-t_1)\varphi_0^{(0)} = 0, L'(-t_1)\varphi_0^{(0)} = 0, \dots, L^{(k-1)}(-t_1)\varphi_0^{(0)} = 0$ , де  $L^{(p)} = \frac{d^p L}{d\lambda^p}$ . Вони виконуються, оскільки

$$L(\lambda)\varphi_0^{(0)} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^2(\lambda + t_1)^k(\lambda + t_{k+1}) \dots (\lambda + t_{n-2}) \end{pmatrix}.$$

Застосування теореми 2.2 повністю завершує доведення теореми 3.1.  $\square$

**Теорема 3.2.** Для будь-яких  $t_1, \dots, t_{n-3} \in \mathbb{C}$ ,  $u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathbb{C}$ ,  $u_1 \neq 0$  і  $n \geq 3$  матричне рівняння  $L(X) = 0$  з коефіцієнтами:  $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} u_2 & \frac{\sigma_{n-3,n-3}}{v_1} \\ u_1 v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} u_3 & \frac{\sigma_{n-4,n-3}}{v_1} \\ u_2 v_1 & \sigma_{n-3,n-3} \end{pmatrix}, \dots, A_{n-2} = \begin{pmatrix} u_{n-2} & \frac{\sigma_{1,n-3}}{v_1} \\ u_{n-3} v_1 & \sigma_{2,n-3} \end{pmatrix}.$$

не має розв'язків, якщо  $X \in M_2(\mathbb{C})$ .

**Доведення.** Спосіб доведення цієї теореми та-кий самий як теореми 3.1. Тому, розглянемо тільки відмінні ознаки. У випадку, коли всі  $t_i$  різні і не рівні 0, Жорданова форма матриці  $F$  має один блок  $J_{n+3}(0)$  розміру  $(n+3) \times (n-3)$  одновимірні блоки  $J_1(-t_i)$ , до того ж власні і приєднані вектори  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}\}$ ,  $\psi_1, \dots, \psi_{n-3}$  можна вибирати так, щоб виконувались співвідношення (6), (7) і наступні:  $\varphi_1^{(0)} = 0, \varphi_0^{(0)} = \psi_1^{(0)} = \dots = \psi_{n-3}^{(0)} = e_1, \varphi_i^{(0)} = f_{i-2}e_2 (2 \leq i \leq n+2)$ . В цьому випадку потрібно довести, що виконується рівняння (8), (9) при  $i = 1, \dots, n-3$ , а також рівняння:

$$A_0\varphi_{n+2}^{(0)} + \dots + A_{n-1}\varphi_3^{(0)} + \varphi_2^{(0)} = 0.$$

Для цього розглядаються многочлени:

$$f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + \dots + f_n\lambda^n, v(\lambda) = \\ = \varphi_0^{(0)} + \varphi_1^{(0)}\lambda + \dots + \varphi_{n+2}^{(0)}\lambda^{n+2} = \begin{pmatrix} \lambda^2 f(\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ u(\lambda) = 1 + u_1\lambda + \dots + u_{n-2}\lambda^{n-2}.$$

Не важко показати, що

$$\begin{aligned} L(\lambda) = \\ \begin{pmatrix} u(\lambda) + \lambda^n & \frac{\lambda^2}{v_1}(\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-3}) \\ v_1 u(\lambda) \lambda & \lambda^3(\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-3}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\psi_0^{(0)} = e_1$ , отримуємо рівність  $L(-t_1)\psi_0^{(0)} = 0$ . Оскільки,

$$L(\lambda)v(\lambda) = \\ = \begin{pmatrix} (u(\lambda) + \lambda^n)\lambda^2 f(\lambda) + \frac{\lambda^2}{v_1}(\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-3}) \\ v_1 u(\lambda) \lambda^3 f(\lambda) + \lambda^3(\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-3}) \end{pmatrix}$$

то многочлен  $f(\lambda)$  можна вибрати як початковий відрізок степеневого ряду раціонального дробу

$$\tilde{f}(\lambda) = -\frac{(\lambda + t_1) \dots (\lambda + t_{n-3})}{v_1(u(\lambda) + \lambda^n)}.$$

Всі інші випадки, коли деякі значення  $t_i$  співпадають або рівні 0, розглядаються аналогічно.  $\square$

#### 4 Висновки

У роботі отримані два критерії нерозв'язності матричних рівнянь. Знайдені дві багатопараметричні серії двовимірних матричних рівнянь над полем комплексних чисел, що не мають коренів.

#### Список використаних джерел

- Гантмахер Ф. Д. Теория матриц - М.: Издательство "Наука", -1967. - 576 с.
- Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений - М.: Издательство "Наука", -1984. - 191 с.
- Ingram M. N. Rational method in matrix equation // Bull. Amer. Math. Soc. -1941.- 47.-p.61-70.

Надійшла до редколегії 12.11.2008

УДК 51(091)

Олена М. Рябухо

Розвиток теорії подільності для кілець  
цілих алгебраїчних чисел в працях  
академіка Дмитра Граве

Проведено аналіз праць академіка Дмитрия Граве з алгебраїчної теорії чисел, присвячених проблемі розкладу на множники цілих алгебраїчних чисел в простих розширеннях поля рациональних чисел.

Ключові слова: теорія подільності, ідеальні множники, теорія ідеальних чисел.

tom.olena@gmail.com

**Вступ.** Традиційно вважається, що в свій київський період творчості професор Київського університету Дмитро Граве мало займався самостійними науковими дослідженнями, відаючи майже всю енергію на формування наукової школи, яка згодом стала всесвітньо відомою як Київська алгебраїчна школа професора Д.Граве. Так учень професора Граве видатний алгебраїст М.Г.Чеботарьов в своїй праці [1] пише: "Другий період підйому творчої діяльності Д.О.Граве починається з 1908 - 1910 років, коли він був уже професором Київського університету. Перебуваючи за кордоном Дмитро Олександрович захопився сучасним напрямом в алгебрі і теорії чисел і передав це захоплення своїм численним учням, зорганізувавши таким чином навколо себе сильну школу молодих алгебраїстів.

Самостійні роботи Дмитра Олександровича цього періоду носять характер методично спрощень; вони часто бувають дуже вищуканими, але не мають принципового значення. Цей факт легко зрозуміти, приймаючи до уваги, що Дмитро Олександрович віддавав всю свою енергію і весь свій ентузіазм на створення школи."

Таким чином М.Г.Чеботарьов трактує алгебраїчні праці Д.О.Граве як праці швидше методологічного, а не наукового характеру. Після цієї оцінки Чеботарьова жодних спроб переглянути і проаналізувати алгебраїчні праці Д.Граве не робилося, хоча, підходи, розроблені в цих працях безперечно представляють інтерес з ал-

Olena M. Ryabukho

The development of the divisibility theory for rings of algebraic integers in academician Dmytro Grave's papers

The papers of academician Dmytro Grave of the theory of algebraic integers which are devoted to the problem of decompositions on factors of algebraic integers in simple extensions of the rational numbers field are conducted.

**Key Words:** the divisibility theory, ideal factors, the theory of ideal numbers.

горитмічної точки зору, оскільки всі міркування, які в них розглядаються як правило доводяться до вигляду, коли наступним кроком є створення чіткого алгоритму.

А тому, на нашу думку, було би природно проаналізувати праці Дмитра Граве з алгебраїчної теорії чисел під кутом зору їх можливих зв'язків із сучасною алгоритмічною теорією чисел, яка нині бурхливо розвивається у зв'язку із застосуваннями в криптології.

Метою даної статті є аналіз праць Граве, присвячених теорії розкладу на прості множники в кільцях цілих алгебраїчних чисел.

В першому параграфі цієї статті ми подаємо короткі історичні відомості про проблематику, пов'язану з розкладом на множники в кільцях цілих алгебраїчних чисел, описуючи підходи Куммера, Кронекера, Золотарьова [2] - [5].

В другому параграфі ми коротко характеризуємо основні положення праці Д.Граве [6], а в третьому - обговорюємо алгоритм розкладу простих натуральних чисел на прості множники, запропонований в [7]. В четвертому параграфі дуже коротко зупиняємося на розгляді цих питань в монографії Граве [8] і на його інших роботах [9], [10], пов'язаних з вивченням ідеалів. Останній параграф присвячено аналізу розвинутих Граве підходів в теорії розкладу алгебраїчних чисел на множники в контексті досліджень з алгебраїчної теорії чисел.

На нашу думку, статті Дмитра Граве, які стосуються теорії розкладу на прості множники цілих величин в скінчених розширеннях поля

раціональних чисел містять цікаві ідеї щодо алгоритмічних підходів до побудови теорії подільності в кільцях цілих алгебраїчних чисел і забуті незаслужено, оскільки впроваджені в них підходи залишаються актуальними і по сьогоднішній день, особливо з точки зору сучасних розділів алгоритмічної теорії чисел.

Характеризуючи зміст робіт Д. Граве ми намагаємося всюди використовувати сучасну термінологію, визначаючи можливості необхідні терміни, щоб зробити читання статті незалежним. Для вивчення стандартних понять теорії алгебраїчних чисел див. [4], [11], [12].

**1. Проблема однозначності розкладу в кільцях цілих алгебраїчних чисел.** Нагадаємо, що комплексне число називається цілим алгебраїчним, якщо воно є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами зі старшим коефіцієнтом одиниця. Всі цілі алгебраїчні числа утворюють кільце; підкільця цього кільца називають кільцями цілих алгебраїчних чисел. Перша мета алгебраїчної теорії чисел - дослідження можливостей поширення арифметики на кільця цілих алгебраїчних чисел. Основною теоремою арифметики є теорема про однозначність розкладу на прості множники:

Довільне число  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$  однозначно з точністю до порядку множників записується у вигляді добутку

$$(-1)^\nu \prod_{p \in P} p^{\nu_p(n)}, \quad (1)$$

де  $P$  – множина всіх простих чисел,  $\nu \in \{0, 1\}$ ,  $\nu_p(n)$  – найвищий показник, для якого відповідний степінь  $p$  ділить  $n$ .

Для того, щоб можна було обговорювати розклади такого типу в кільцях алгебраїчних чисел, потрібно поширити на такі кільця теорію подільності. Поняття подільності в кільці всіх цілих алгебраїчних чисел вводиться природним чином [2], [3]: ціле алгебраїчне число  $\alpha$  ділиться на ціле алгебраїчне число  $\beta$ , якщо частка  $\frac{\alpha}{\beta}$  є цілим алгебраїчним числом. На основі так введеного поняття подільності можна досліджувати розклади елементів кільца на нерозкладні множники. Проте однозначність розкладу (з точністю до порядку множників і обертних елементів кільца) має місце далеко не в кожному кільці алгебраїчних чисел. Вперше з цією проблемою зіткнувся німецький математик Г. Куммер (G. Кіппер) будуючи арифметику в кільці цілих елементів поля  $\mathbb{Q}(\xi)$ , де  $\xi$  –

корінь степеня  $r > 3$  з одиницею ( $r$  – ціле число). З метою відновити таку однозначність він ввів до розгляду фіктивні множники, які назвав ідеальними числами. Виявляється, що якщо розглядати крім чисел кільца її такі ідеальні множники, то прості числа в кільці вже можуть і не бути нерозкладними, а розкладатимуться на ідеальні множники, серед яких будуть прості нерозкладні ідеальні множники. При цьому кожен елемент так розширеного кільца вже розкладатиметься на добуток простих множників і розклад є однозначним з точністю до обертних елементів (одиниць) кільца та порядку множників. Наприклад, в кільці цілих алгебраїчних чисел  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$  розклад числа 21 на нерозкладні множники неоднозначний:

$$21 = 3 \cdot 7 = (4 + \sqrt{-5}) \cdot (4 - \sqrt{-5}).$$

Щоб відштовигти однозначність треба ввести начебто фіктивні розклади  $3 = \alpha \cdot \beta$ ,  $7 = \gamma \cdot \delta$ , чисел 3 і 7 на ідеальні множники  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . Тоді повинні виконуватися рівності

$$4 + \sqrt{-5} = \alpha \cdot \beta, 4 - \sqrt{-5} = \gamma \cdot \delta,$$

і однозначність розкладу числа 21 на нерозкладні множники в такому розширеному ідеальному множниками кільці вже виконуватиметься.

Теорія Куммера була дуже не строгою і пізніше Л. Кронекер (L. Kronecker) та Р. Дедекінд (R. Dedekind) підвели строго логічну базу під поняття ідеального множника. А саме, вони ввели цілком чітко визначене поняття ідеалу як непорожньої сукупності чисел з даного кільца, яка замкнена щодо дій додавання, віднімання і множення на довільні елементи кільца. Дедекінд ввів до розгляду поняття найбільшого спільного дільника двох ідеалів (це найменший за включенням ідеал, який містить два задані ідеали) і добутку ідеалів (це множина найможливіших сум вигляду

$$\sum_i \alpha_i \beta_i,$$

де  $\alpha_i$  належать до одного з ідеалів, а  $\beta_i$  – до другого). На підставі цих понять дається визначення простого ідеалу і розкладу ідеалу на добуток простих. В таких термінах вже може бути сформульована теорема про однозначність розкладу. Вона не має місця для довільних кілець

цілих алгебраїчних чисел, а тому спочатку потрібно встановити, що є правильним узагальненням кільця  $\mathbb{Z}$  на довільне алгебраїчне розширення  $K$  поля рациональних чисел. Це повинно бути підкільце  $\mathcal{O} \subset K$  таке, що :

- 1)  $K$  є полем часток  $\mathcal{O}$ ;
- 2)  $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ;
- 3) Адитивна група  $\mathcal{O}$  є скінченнопородженою.

Кільця такого типу називаються порядками. При  $K \neq \mathbb{Q}$  в полі  $K$  існує безліч порядків, але множина всіх цілих алгебраїчних чисел в  $K$  буде максимальним порядком. Достатніми умовами однозначності розкладу на прості множники є евклідовість кільця  $\mathcal{O}$ ; у разі коли розклад чисел на прості в  $\mathcal{O}$  неоднозначний додіється переходити від чисел до ідеалів і вивчати розклад ідеалів кільця  $\mathcal{O}$  в добуток простих множників. При цьому аналог розкладу (1) при відповідній інтерпретації символів, які входять до цієї формулі, матиме місце для порядків в алгебраїчних розширеннях поля рациональних чисел (див. [4], [11], [13]).

Інший підхід до строгого обґрутування теорії ідеальних чисел дещо раніше від Кронекера і Дедекінда запропонував російський математик Є.І. Золотарьов. Цей підхід пов'язаний з використанням локальних властивостей алгебраїчних чисел, бо в основі його лежить поняття  $p$ -подільності алгебраїчних чисел ( $p$  — фіксоване просте число). Визначається воно таким чином:

Ціле алгебраїчне число  $\alpha$   $p$ -ділиться на ціле алгебраїчне число  $\beta$ , якщо існує взаємно просте з  $\beta$  ціле алгебраїчне число  $\gamma$  таке, що частка  $\frac{\alpha}{\beta}$  є цілим алгебраїчним числом.

Відношення  $p$ -подільності має властивості, подібні до властивостей звичайного відношення подільності:

- 1) кожне ціле алгебраїчне число  $p$ -ділиться на себе (рефлексивність);
- 2) якщо  $\alpha$   $p$ -ділиться на  $\beta$ , а  $\beta$   $p$ -ділиться на  $\gamma$ , то  $\alpha$   $p$ -ділиться на  $\gamma$  (транзитивність);
- 3) якщо  $\alpha$  і  $\beta$   $p$ -ділиться на  $\gamma$ , то  $\alpha \pm \beta$  також  $p$ -ділиться на  $\gamma$ .

Нагадаємо, що нормою  $N(\alpha)$  цілого алгебраїчного числа називається добуток всіх спряжених з ним чисел, тобто добуток всіх коренів рівняння найменшого степеня з цілими коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом одиниця, одним з коренів якого є число  $\alpha$ .  $p$ -порядком цілого ал-

гебраїчного числа  $\alpha$  називають найвищий степінь числа  $p$ , на який ділиться норма  $N(\alpha)$  цього числа.

На основі так визначеного  $p$ -порядку цілого алгебраїчного числа вводиться одне з ключових понять теорії Золотарьова — поняття найбільшого спільногого  $p$ -дільника цілих алгебраїчних чисел. А саме, найбільшим спільним  $p$ -дільником цілих алгебраїчних чисел  $\alpha$  і  $\beta$  називається такий їх спільний  $p$ -дільник  $\gamma$ , який має найбільший  $p$ -порядок. Доводиться, що найбільший спільний  $p$ -дільник існує для довільних двох цілих алгебраїчних чисел. Якщо показник степеня числа  $p$ , який ділить спільні дільники чисел  $\alpha$  і  $\beta$  дорівнює 0, то числа  $\alpha$  і  $\beta$  називаються взаємно  $p$ -простими.

Відношення взаємної  $p$ -простоти чисел також має звичайні властивості:

- 1) якщо добуток  $\alpha \beta$   $p$ -ділиться на  $\gamma$ , причому  $\alpha$  і  $\beta$  є взаємно  $p$ -простими, то  $\beta$   $p$ -ділиться на  $\gamma$ ;
- 2) якщо  $\alpha$ ,  $\beta$  є взаємно  $p$ -простими з  $\gamma$ , то  $\alpha \cdot \beta$  також буде взаємно  $p$ -простим з  $\gamma$ ;
- 3) якщо  $\alpha$   $p$ -ділиться на  $\beta$ ,  $\gamma$ , причому  $\beta$  і  $\gamma$  є взаємно  $p$ -прості, то  $\alpha$  ділиться на добуток  $\beta \cdot \gamma$ .

Далі можна природно визначити поняття  $p$ -простого цілого алгебраїчного числа. А саме, ціле алгебраїчне число  $\alpha$  називається  $p$ -простим, якщо для довільних алгебраїчних чисел  $\beta$ ,  $\gamma$  з того що добуток  $\beta \cdot \gamma$   $p$ -ділиться на  $\alpha$  випливає, що або  $\beta$  або  $\gamma$   $p$ -ділиться на  $\alpha$ .

Використовуючи властивості  $p$ -подільності на основі поняття  $p$ -простоти алгебраїчного числа можна побудувати строгу теорію  $p$ -розкладу цілих алгебраїчних чисел на  $p$ -прості множники ( $p$  — фіксоване просте число). Пізніше виявилося, що теорія  $p$ -подільності Золотарьова і теорія ідеалів Куммера-Дедекінда рівносильні (див. напр. [5]).

2. Основні положення теорії ідеальних чисел за Д. Граве. В своїй праці [6] проф. Д.О. Граве пропонує свій підхід до обґрутування теорії подільності в кільцях цілих алгебраїчних чисел, який ґрунтуються на понятті найбільшого спільногого дільника чисел. Слід зауважити, що спроба використання найбільшого спільногого дільника була зроблена дещо раніше петербурзьким математиком Сохацьким (див. [5]). В своїй праці Д.О.Граве пише, що досліджуючи існуючі теорії ідеальних чисел легко

дійти висновку, що всі вони ґрунтуються на понятті найбільшого спільного дільника. Його можна вводити таким чином. Розглядається символ  $(a, b, c, \dots)$  найбільшого спільного дільника як функція над заданим кільцем. Якщо  $a, b, c, \dots$  — натуральні числа, то  $(a, b, c, \dots)$  є деяким натуральним числом, яке можна обчислити за допомогою алгоритму Евкліда. Якщо значення символу  $(a, b, c, \dots)$  дорівнює  $d$ , то існують цілі числа  $x, y, z, \dots$  такі, що  $xa + yb + zc + \dots = d$ .

Якщо кільце цілих величин існує числових полів потребують для збереження однозначності розкладу введення ідеальних множників, то при переході до цих числових полів ми повинні розглядати також вишадок, коли значення символу  $(a, b, c, \dots)$  не дорівнює жодному числу із поля, тобто не можна підібрати жодних цілих величин  $x, y, z, \dots$  з даного поля так, щоб  $xa + yb + zc + \dots$  дорівнював деякому елементу поля. В останньому випадку такий символ можна вважати числом нової природи, яке Д. Граве називає ідеальним. Дій над ідеальними числами і їх властивості визначаються так як і дій над раціональними числами. Перевірка показує, що при цьому не виникає жодних суперечностей. Для того щоб ввести дії над символами виду  $(a, b, c, \dots)$ , тобто ідеальними числами, спочатку потрібно встановити існі властивості цих символів. Основними з них є такі.

1) З символу  $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots)$  можна вилучити довільний елемент  $a_k$ , який є лінійною комбінацією інших елементів: якщо  $a_k = xa_1 + ya_2 + \dots$ , то

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots) = \\ = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots).$$

2) До символу можна додати довільну лінійну комбінацію його символів.

3) Множення символів можна ввести подібно до множення многочленів:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)(b_1, b_2, b_3, \dots) = \\ = (a_1b_1, a_1b_2, \dots, a_2b_1, a_2b_2, \dots, a_3b_1, \dots).$$

Визначена в такий спосіб дія множення є асоціативною. За допомогою символу найбільшого спільного дільника поняття подільності можна поширити на ідеальні числа. А саме, вважаємо, що ідеальне число  $a$  є дільником ідеального числа  $b$  (коротко,  $a|b$ ), якщо  $(a, b) = a$ .

В загальному випадку, якщо  $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$  то

$$(a, b) = (a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots).$$

Наприклад, якщо  $\theta$  — корінь рівняння  $x^5 + 5 = 0$  і маємо ідеальні числа  $a = (3, 4 + \theta)$ ,  $b = (3, 4 - \theta)$ , то

$$a \cdot b = (9, 3(4 + \theta), 3(4 - \theta), (4 + \theta)(4 - \theta)) = \\ = 3(3, 4 + \theta, 4 - \theta, 7, 1) = 3(3, 4 + \theta, 4 - \theta, 7, 1) = 3.$$

З іншого боку, якщо  $c = (7, 4 - \theta)$ , то

$$a \cdot c = (21, 3(4 - \theta), 7(4 + \theta), (4 + \theta)(4 - \theta)) = \\ = ((1+2\theta)(1-2\theta), (2+\theta)(1-2\theta), (-2+3\theta)(1-2\theta)) = \\ = (1-2\theta)(1+2\theta, 2+\theta, -2+3\theta, 3, 8) = 1-2\theta.$$

Далі, після введення таким чином ідеальних чисел, які потім автор називає просто ідеалами, проводиться необхідна підготовча робота для того, щоб в так розширеному кільці цілих величин і заданого числового поля можна було сформулювати теорему про однозначність розкладу в добуток простих елементів.

Для цього спочатку потрібно встановити такі два факти:

1) існування простих ідеалів;

2) теорему, про те, що добуток двох ідеалів, взаємно простих з третім також буде взаємно простим з ним.

Простий ідеал  $j$  визначається як такий, що для кожного іншого ідеалу  $a$  має місце одно з двох — або  $a$  ділиться на  $j$ , або  $a$  є взаємно простим з  $j$ .

В [6] здійснюється перевірка цього факту для полів вигляду  $\mathbb{Q}(\theta)$ , де  $\theta$  є коренем незвідного алгебраїчного рівняння степеня  $n$  над  $\mathbb{Q}$ . В такому разі всі цілі числа поля  $\mathbb{Q}(\theta)$  зображуються у вигляді лінійних комбінацій

$$\omega(\theta) = b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}$$

де  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  — цілі числа. Якщо  $\theta, \theta', \dots, \theta^{(n-1)}$  всі корені рівняння

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} = 0,$$

то

$$\omega(\theta)\omega(\theta')\omega(\theta^{(n-1)}) = \Omega(\theta) = \\ = B_0 + B_1\theta + B_2\theta^2 + \dots + B_{n-1}\theta^{n-1},$$

причому коефіцієнти  $B_i$  ( $0 \leq i \leq (n-1)$ ) є раціональними числами.

Число  $\Omega(\theta)$  називається доповняльним до числа  $\omega(\theta)$ . Далі доводиться, що кожен простий

ідеал буде дільником певного простого натурального числа і розглядаються розклади простих чисел на добуток простих ідеалів. За допомогою теорії подільності Золотарьова встановлюється, що за сформульованих вище припущенням цей розклад буде однозначним. Наступний крок в міркуваннях автора стосується характеризації певного загального підходу до побудови розкладу цілих чисел з полів вигляду  $\mathbb{Q}(\theta)$  на прості множники. Встановлюється, що дане число може ділитися лише на прості ідеальні множники, які самі є дільниками норми  $N(\alpha)$  числа  $\alpha$  і оцінюється кратність входження простих дільників в розклад  $\alpha$ . Звідси робиться такий висновок:

"Ми бачимо, що за допомогою скінченого числа проб можна розкласти довільне число на прості ідеальні множники."

Тепер залишається обґрунтувати однозначність розкладу. Це здійснюється в такий спосіб. Нехай число  $\alpha$  містить в своєму розкладі простий ідеал  $j_1$  з показником  $k_1$ , простий ідеал  $j_2$  з показником  $k_2$  і т.д. і нарешті ідеал  $j_l$  з показником  $k_l$ . Досить переконатися, що формула

$$\alpha = j_1^{k_1} j_2^{k_2} \dots j_l^{k_l}$$

може бути одержана також і при розкритті добутку ідеалів за правилом множення ідеалів.

Доведення цього твердження розбито на кілька лем, які стосуються ідеалів, їх норм і показників входження в розклад даного числа. Після закінчення доведення теореми автор робить зауваження про можливість поширення розвинутої в праці техніки на числові поля, які не є простими розширеннями поля рациональних чисел. На його думку в таких випадках може застосовуватися теорія Золотарьова  $p$ -подільності алгебраїчних чисел (локальна теорія), оскільки для загальних розширень досить обмежитися розкладом на прості множники з кільця тих простих (натуральних) чисел, які входять до розкладу на прості множники ідеалу поля (див. [6]). Д.Граве називає такі прості числа особливими. Як саме розкладати особливі прості (натуральні) числа на нерозкладні множники в деякому кільці алгебраїчних чисел. Д.Граве досліджує в наступній статті [7], яка є безпосереднім продовженням праці [6].

3. Алгоритм побудови розкладу простих (натуральних) чисел в добуток нерозкладніх ідеальніх множників. На початку праці [7] автор пише, що в попередній

статті [6] він не зупинявся на перевірці теорії для випадку не найпростіших полів, а звернув увагу, що для таких полів досить розглянути лише розклади на добуток нерозкладніх ідеалів особливих простих (натуральних) чисел. Метою статті [7] є не поширення теорії, яка викладена в попередній публікації, а обговорення самих прийомів розв'язування задачі розкладу чисел на ідеальні множники.

В працях Е.І. Золотарьова і Л. Дедекінда було встановлено, що для розширення поля рациональних чисел, яке отримується додаванням коренів рівняння  $f(x) = 0$  степеня  $n$ , просте число  $p$  буде особливим в тому і лише тому разі, коли многочлен  $f(x)$  можна подати у вигляді

$$f(x) = [\varphi_1(x)^{l_1}] [\varphi_2(x)^{l_2}] \dots [\varphi_\lambda(x)^{l_\lambda}] + p\Psi(x) + p^2\Omega,$$

де  $\Psi(x)$  ділиться за модулем  $p$  принаймні на один з кратних (тобто таких, що  $l_i > 1$ ) незвідних множників  $\varphi_i(x)$ .

Наводиться ісзажис доведення цієї відомої теореми. Якщо числове поле  $K$ , яке розглядається, є простим розширенням, тобто має фундаментальну базу вигляду  $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ , де  $\theta$  — корінь незвідного над  $\mathbb{Q}$  многочлена  $f(x)$ , то розклад кожного простого (натурального) числа на ідеальні множники в цьому полі здійснюється таким чином:

1) розкладаємо многочлен  $f(x)$  на незвідні множники за модулем  $p$ :

$$f(x) = \varphi_1(x)^{l_1} \dots \varphi_\lambda(x)^{l_\lambda} (\text{mod } p);$$

2) враховуючи рівність  $f(\theta) = 0$  маємо

$$\varphi_1^{l_1} \varphi_2^{l_2} \dots \varphi_\lambda^{l_\lambda} \equiv 0 (\text{mod } p);$$

де  $\varphi_i = \varphi_i(\theta)$  ( $1 \leq i \leq \lambda$ ). А тому, як це встановлено в попередній статті, ідеали  $\rho_1 = (p, \varphi_1)$ ,  $\rho_2 = (p, \varphi_2)$ , ...,  $\rho_\lambda = (p, \varphi_\lambda)$  є простими і попарно різними;

3) маємо розклад

$$p = \rho_1^{l_1} \rho_2^{l_2} \dots \rho_\lambda^{l_\lambda}; \quad (2)$$

4) нехай  $m_i$  є степенем многочлена  $\varphi_i(x)$ ; для норм ідеалів  $\rho_i$  отримуємо рівності  $N(\rho_i) = p^{m_i}$  ( $1 \leq i \leq \lambda$ ) і взявши норми від обох частин рівності (2) дістанемо рівність

$$n = \sum_{i=1}^{\lambda} m_i l_i.$$

Дискриміант  $D$  поля  $K$  пов'язаний з дискримінантом  $\Delta(\theta)$  основного рівняння  $f(x) = 0$ ,

яке завдає поле  $K$ , рівністю  $\Delta(\theta) = (\text{ind}\theta)^2 \cdot D$ , де  $\text{ind}\theta$  — індекс числа  $\theta$ . (Для визначення див. [11].) А тому, якщо просте число  $p$  не є дільником дискримінанту поля  $D$ , то воно не є дільником і дискримінанту  $\Delta(\theta)$ . Це можливо лише тоді, коли всі числа  $l_i$  ( $1 \leq i \leq \lambda$ ) дорівнюють одиниці. Автор розглядає два випадки при знаходженні розкладу числа  $p$  в добуток нерозкладних ідеалів, які характеризують таким чином. Якщо розглядається ідеал  $p = [p, \varphi(\theta)]$ , де  $\varphi(x)$  — незвідний за модулем  $p$  многочлен степеня  $m$ , то в тому разі, коли  $p$  не є дільником індексу числа  $\theta$ , кожне число поля конгруентне за модулем  $p$  деякому цілому алгебраїчному числу виду  $x_0 + x_1\theta + \dots + x_{m-1}\theta^{m-1}$  з цілими коефіцієнтами  $x_i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ). А тому, в цьому випадку всі викладки, які потрібно провести, щоб знайти розклад числа  $p$ , як і відповідні викладки над визначеними вище ідеалами  $\rho_i$  будуть здійснюватися згідно з загальним методом Е. Золотар'єва.

Якщо ж  $p$  є особливим простим числом, то пропонується в процесі розкладу замінити число  $\theta$  на інше число, індекс якого число  $p$  вже не ділить. Проте це можна зробити не завжди: існують такі поля, індекси всіх цілих алгебраїчних чисел яких діляться на певне просте число.

Далі Д. Граве пише, що на цьому етапі досліджень можна скористатися результатом учня Д. Граве — Євстахія Жилінського, який встановив, що такі особливі прості числа не перевищують степеня даного поля над  $\mathbb{Q}$ . Таким чином, для квадратичних полів такі особливі прості числа не існують, а для кубічних полів лише число 2 може бути особливим. Але насправді можна скористатися й іншим підходом, який запропонуваний Гензелем і полягає у розширенні основного поля за допомогою впровадження нових змінних величин. Д. Граве характеризує цей метод і далі пише "обдумуючи ці питання я дійшов до деякого алгоритму, який проводить паралельно як до знаходження фундаментальної бази так і до розкладу на добуток нерозкладних ідеалів простих чисел — дільників індексу поля". Автор вважає відомою процедурою розкладу многочлена на незвідні множники за модулем простого числа  $p$ . він не наводить докладного обґрунтування запропонованого алгоритму, а вказує лише основні ідеї його побудови і ілюструє алгоритм на різних чи-

слових прикладах. Зокрема, розглядаються три приклади з дисертації Г. Вороного [14], причому автор демонструє силу свого алгоритму, оцінюючи довжину викладок при побудові розкладу для кубічних полів за алгоритмом Г. Вороного і власним алгоритмом. Одним з таких прикладів є кубічне поле, яке утворене додаванням до поля раціональних чисел кореня рівняння  $x^3 - 9x - 41 = 0$ .

Дискримінант поля в цьому випадку дорівнює  $3^3 \cdot 11^2 \cdot 13$ , а тому потрібно досліджувати на розкладність лише числа 3, 11. Для числа 3 дістаємо розклад

$$(x+1)^3 - 3(x^2+x+2) - 3^2(x+2) - 3^3 = 0,$$

звідки випливає, що 3 не є дільником індексу поля. Аналогічно, для числа 11 дістаємо розклад

$$(x+5^2)(x+1) - 11(x+5)(x-1) - 11^2 = 0,$$

а тому 11 є дільником індексу поля, тобто числом особливим. При цьому число

$$y = \frac{(x+5)(x+1)}{11}$$

є цілим числом поля. Складаємо рівняння для  $y$ :

$$y^3 - 3y^2 - 6y - 3 = 0.$$

За модулем 11 це рівняння має вигляд

$$(y-1)(y+2)(y-4) - 11 = 0,$$

отже 11 не є дільником індексу числа  $y$ , а тому подальше випробування не потрібні. Звідси дістаємо розклад  $11 = (y-1)(y+2)(y-4)$ , причому ідеали  $(y-1)$ ,  $(y+2)$ ,  $(y-4)$  є простими, оскільки  $N(y-1) = 11$ ,  $N(y+2) = 11$ ,  $N(y-4) = 11$ . Автор спеціально зазначає, що в цитованій вище дисертації Г. Вороного той самий розклад знаходитьться на шести сторінках.

Окрім прикладів Г. Вороного аналізується ще спеціальний, добре знаний, приклад Р. Дедекінда: кубічне поле, що утворюються приєднанням до  $\mathbb{Q}$  коренів рівняння  $x^3 - x^2 - 2x - 8 = 0$  та поле Гаусса періодів поділу круга, тобто таке, що утворюється приєднанням до  $\mathbb{Q}$  коренів рівняння

$$f(x) = x^3 + x^2 - \frac{p-1}{3}x - \frac{1}{9}(pa + \frac{p-1}{3}) = 0,$$

де  $p$  — просте число вигляду  $6k+1$ , а число  $a$  пов'язане з цілим розв'язком рівняння  $4p = A^2 + 27B^2$  співвідношенням  $A = 3a - 2$ .

Останній приклад, яким демонструється одночасно і технічна простота і сила методу є приклад рівняння степеня  $> 3$ . Автор розглядає рівняння  $x^7 - 7x - 3 = 0$ , яке є незвідним над полем  $\mathbb{Q}$  згідно з критерієм Ейзенштейна, застосовує до нього свій алгоритм. Знаходить всі виключені прості числа — такими є лише числа 3 і 7, і буде розклади цих чисел на добуток нерозкладних ідеальних множників.

**4. Проблема розкладу цілих алгебраїчних чисел в добуток незвідних (ідеальних) множників в монографічному викладі Д.Граве. Інші праці.** До проблеми обґрунтування теорії подільності в полях алгебраїчних чисел Д.О.Граве повертається у другому томі свого "Трактату" [8]. Спочатку доводиться теорема про примітивний елемент (§3), наводиться коротка історія впровадження поняття цілих алгебраїчних чисел, доводиться, що всі цілі алгебраїчні числа утворюють кільце. Окремо розглядаються квадратичні та кубічні розширення поля раціональних чисел, обговорюється поняття бази розширення і її геометричне тлумачення. наводиться формулювання знаменної теореми Г.Ф.Вороного про фундаментальні бази в кубічних розширеннях, яку було опубліковано в [14]. Далі описуються методи побудови розкладу коренів квадратного рівняння в неперервний дріб, розглядається задача знаходження алгебраїчних одиниць у квадратичному полі і показано, що вона рівносильна знаходженню розв'язків рівняння Пелля  $x^2 - dy^2 = \sigma$ , ( $d, \sigma$  — певні натуральні числа), а це, як відомо, пов'язано з розкладанням числа  $\sqrt{\alpha}$  у неперервний дріб. Після цього (§24) автор розглядає проблему впровадження ідеальних чисел. Він вибирає підхід своєї статті [6][6], проаналізований нами вище в п.3. У порівняння з початковим викладом у статтях [6], [7] монографічний виклад більш стислий, але одночасно й більш читкий, продуманий. Як і в праці [6] у цьому розділі наведено зв'язки вибраного автором підходу до впровадження ідеальних чисел за допомогою впровадження символу найбільшого спільного дільника з теорією Золотар'єва. Окремий підрозділ присвячено побудові теорії ідеалів на основі поняття функціоналу. Розділ закінчується характеризацією полів  $p$ -адичних чисел та викладом теорії скінчених полів. Слід зазначити, що вкладення теорії подільності основованої на понятті найбільшого спільного дільника,

в загальних контекстах теорії алгебраїчних полів, коли зіставляються різні проблеми і підходи до їх розв'язання, дуже позитивно впливає на розуміння підходу Д.Граве, демонструє його природність і відповідність іншим методам побудови теорії подільності. Кращому розумінню викладеної теорії сприяють також численні, вдало підібрані приклади, в яких будується розклади цілих алгебраїчних чисел в добутки нерозкладних (можливо ідеальних) множників. На прикладах, зокрема, досить ясно демонструються обчислювальні можливості алгоритмів розкладу, запропоновані Д.Граве.

Серед інших праць Д.Граве, присвячених проблемі побудови подільності в кільцях цілих алгебраїчних чисел, або близьким проблемам, зазначимо роботи [9], [10]. У праці [9] автор звертається до алгоритму Вороного, за допомогою якого можна знаходити одиниці (оборотні елементи) в кільцях цілих чисел кубічних розширень поля раціональних чисел. Цей алгоритм відразу зацікавив математиків, зокрема, Г.Мінковський навів його геометричну інтерпретацію. Граве вважає, що сам Вороний також знайшов цей алгоритм геометрично, але виклав його в аналітичному вигляді, бо так було прийнято в Петербурзькій школі з теорії чисел. В праці [10] Д.Граве розглядає деякі узагальнення алгоритму Вороного, які краще не тим, що може бути застосоване до широкого класу полів, а тим, що його час роботи значно менший, ніж час роботи алгоритму Вороного. Зокрема, Д.Граве розглядає приклад, який наводить Вороний, розв'язуючи його своїм алгоритмом, і показує, що модифікований алгоритм Граве приводить до мети значно швидше — за меншу кількість кроків. В праці [9] розглядаються деякі природні зв'язки теорії еліптичних функцій — функцій комплексної змінної, які є періодичними в двох напрямках, з теорією ідеалів в кільцях алгебраїчних чисел над полем комплексних чисел. До проблематики однозначності розкладу ця робота не має прямого відношення.

**Деякі висновки.** Особливістю праць Д.Граве присвячених теорії розкладності в кільцях цілих алгебраїчних чисел є їх відношено алгоритмічний характер. Хоча явні оцінки складності алгоритмів у прийнятих тепер термінах тоді не проводились, але складність алгоритмів, принаймні у порівнянні з іншими, по-

дібними алгоритмами проводилася. Такі порівняльні оцінки різних алгоритмів здійснювалися за допомогою порівняння перебігу виконання алгоритму на конкретних прикладах. Таку ж методику оцінки "сили" розроблених ним алгоритмів використовує також Д.Граве. Проаналізовані праці Д.Граве в алгоритмічному аспекті явно випереджали свій час: алгоритмічна теорія чисел розпочала свій тріумфальний розвиток лише після виникнення асиметричної криптографії (криптографії з відкритим ключем). Нині численні алгоритми для обчислень в кільцевих цілих алгебраїчних чисел, зокрема для знаходження розкладів на інерозкладні складні елементи є основою багатьох криптосистем і криптографічних протоколів. а дослідженням з алгоритмічної теорії чисел присвячуються сотні робіт математиків різних країн світу. Регулярно публікуються праці конференцій з цієї проблематики. Опубліковано вже кілька сучасних монографій (див., напр. [15], [16], [17]).

На жаль, праці Д.Граве, які були опубліковані значно раніше, причому в малодоступних журналах, залишилися поза увагою фахівців з алгоритмічної теорії чисел. Навіть побіжний аналіз змісту монографій [15] і [16] наводить на думку, що алгоритми, описані в працях Д.Граве повинні були би знайти в них своє місце. Важаємо, що при належному висвітленні результатів Д.Граве з алгебраїчної теорії чисел (як і його школи в цілому) воши займуть своє природне місце в науковій літературі.

#### Список використаних джерел

1. Чеботарев Н.Г. Академик Дмитрий Александрович Граве (1939-1983) В кн. "Сборник посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве". Под ред. О.Ю.Шмидта, Б.Н.Делоне и Н.Г.Чеботарева. Гос. издат. тех.-теорет. лит-ры. Москва-Ленинград. - 1940. - С. 3-14.
2. Лежен-Диригле П.Г. Лекции по теории чисел. Москва: ОНТИ НКТП СССР. - 1936. - 405 с.
3. Хассе Г. Лекции по теории чисел. Москва: ИЛ. - 1953. - 527 с.
4. Алгебраическая теория чисел / [ред. Каселс Дж., Фрелих А.]. - М.: - Мир. - 1969. - 483 с.
5. Делоне Б.Н. Петербургская школа теории чисел. Москва-Ленинград: Изд-во АН СССР. - 1947. - 422 с.
6. Граве Д.А. Об основных положениях теории идеальных чисел // Матем. сборник. - Т.32, вып 1. - М. - 1924. - С. 135-151.
7. Граве Д.А. О разложении простых чисел на идеальные множители. Матем. сборник. - Т.32, вып 3. - 1925. - С. 542-560.
8. Граве Д.О. Трактат з алгебраїчного аналізу. - Т.2. - Київ. - Вид-во АН УРСР. - 1939. - 386 с.
9. Граве Д. Зв'язок теорії еліптических функцій з теорією ідеалів. // Журнал математического циклу ВУАН. - Т.3, №2. - Київ. - 1933. - С. 3-13.
10. Граве Д. Про узагальнення алгоритму Вороного. // Журнал математического циклу ВУАН. - Т.3, №2. - Київ. - 1933. - С. 17-23.
11. Кох К. Алгебраическая теория чисел. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - Том 62. - М.: ВИНИТИ. - 1990. - 308 с.
12. Ленг Т. Алгебраические числа М.: Мир. - 1966. - 225 с.
13. Гекке Е. Лекции по теории алгебраических чисел М.-Л.: Гостехиздат. - 1940. - 240 с.
14. Вороной Г.Ф. О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнений 3-й степени. Варшава: Изд-во Варшавского университета. - 1897.
15. Bach E., Shallit J. Algorithmic Number Theory. Vol. 1. Efficient Algorithms Cambridge-Massachusetts The MIT Press. - 1997. - 512 p.
16. Cohen H. A Course of Computational Algebraic Number Theory. Berlin etc.: Springer-Verlag. - 1996. - 545 p.
17. Cohen H. Advanced Topics in Computational Number Theory. Berlin etc.: Springer-Verlag. - 1999. - 578 p.

Надійшла до редакції 25.09.2008

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ  
РІВНЯННЯ,  
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА  
ТА МЕХАНІКА**



УДК 519.9

Ю.Є. Василевський, аспірант  
О.С. Лимарченко, доктор технічних наук,  
професор

## Нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною в околі критичних швидкостей течії

Розроблено нелінійну модель динаміки трубопроводу при швидкісному русі рідини. На основі варіаційних методів побудовано нелінійну дискретну модель системи та чисельний алгоритм дослідження задач динаміки та динамічної стійкості трубопроводу. Розглянуто приклади динамічної поведінки системи при різних швидкостях течії рідини, включаючи випадок критичних швидкостей течії, коли можлива втрата прямолінійної форми трубопроводу.

**Ключові слова:** трубопровід, варіаційні методи, нелінійна дискретна модель, критична швидкість, втрата стійкості.

E-mail: olelim2000@yahoo.com

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ.

**Вступ.** Трубопровід з рідиною, що протікає, розглядається як система, що складається з пружної труби та рідини. Вважаємо, що поздовжній рух рідини заданий, рідина ідеальна, а трубу будемо розглядати на основі балочної моделі. Обмежимось розглядом плоского випадку руху системи.

Метою статті є розробка нелінійної моделі динаміки трубопроводу з рідиною і аналіз її вірогідності по відображенням поведінки системи при різних швидкостях течії, включаючи область критичних швидкостей, коли спостерігається втрата стійкості прямолінійної форми трубопроводу. Ця модель орієнтована на дослідження поведінки системи при переходних процесах, її побудова виконується на основі формулювання задачі у вигляді варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [1].

Поперечні деформації балки будемо описувати змінною  $u(x,t)$ , де  $x$  – поздовжня

Yu.E. Vasilevskiy, postgraduate student  
O.S. Limarchenko doctor of engineering,  
professor

## Nonlinear dynamics of pipeline with liquid in a vicinity of critical velocities of flow

We developed the nonlinear model of pipeline dynamics with high-speed liquid motion. On the basis of the variational methods we constructed the nonlinear discrete model and numerical algorithm for investigation of problems of dynamics and dynamical stability of pipeline. We considered examples of dynamical behavior of the system for different velocities of liquid flowing, including the case of critical velocity of flow, when loss of straight line stability of pipeline is possible.

**Key Words:** pipeline, variational methods, nonlinear discrete model, critical velocity, loss of stability.

координата (кінці балки відповідають координатам  $x = 0$  і  $x = l$ ),  $t$  – час.

Рівняння руху системи отримуються за допомогою варіаційних методів механіки. Враховуються всі відомі в літературі нелінійні механізми, які визначають рух трубопроводу з рідиною, а саме, сили інерції, пружні сили, коріолісові сили, сили внутрішнього тиску в трубі, сили поздовжнього розтягу труби, а також нелінійні механізми їх взаємного впливу. Функцію Лагранжа системи рідина-трубопровід будуємо з точністю до величин четвертого порядку малості [2], при цьому рівняння моделі одержуються з точністю до величин третього порядку малості включно. Зauważимо, що на основі розвиненої методики можна будувати моделі і більш високих порядків нелінійності. Запишемо функцію Лагранжа для трубопроводу з рідиною (1) і рівняння руху системи (2) [2].

$$L = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \mu \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} E J \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{4} E J \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \\ - \frac{1}{2} E F \int_0^l u'^3 u dx + \frac{1}{4} \rho V^2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{16} \rho V^2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \rho \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \quad (1)$$

$$+\rho V \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} dx + \frac{1}{2} PF \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^l dx.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tilde{A}(x, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tilde{B}(x, t) = \rho V \tilde{C}(x, t) + \rho V^2 \tilde{D}(x, t) + \rho \dot{V} \tilde{E}(x, t) +$$

$$+ PF \tilde{F}(x, t) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EJ \tilde{K}(x, t) - EFL(x, t). \quad (2)$$

$$\tilde{A} = -\mu - \rho - \frac{1}{2} (\mu + \rho) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \tilde{B} = -EJ - \frac{EJ}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \tilde{C} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

$$\tilde{D} = -3 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \tilde{E} = -2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tilde{F} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тут  $\rho$  і  $\mu$  відповідно поздовжні густини рідини та труби,  $EJ$  і  $F$  відповідно згинна жорсткість та площа поперечного перерізу балки,  $V = V(t)$  – задана швидкість течії рідини,  $P$  – внутрішній тиск в рідині. Рівняння руху (2) є нелінійними і містять нелінійності до третього порядку малості. Породжуючим рівнянням для рівняння (2) є бігармонічне рівняння руху балки. Аналітичне розв'язання такої нелінійної задачі для різних випадків збурення руху практично неможливе і тому ставиться задача побудови наближеного методу дослідження динамічної поведінки системи на основі методів модальної декомпозиції [3].

Розглянемо задачу про побудову дискретної моделі системи на основі методу Канторовича з використанням розкладу руху системи по формах

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \dot{c}_i^2 N_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k c_l d_{ijkl}^2 - \frac{1}{2} \frac{EJ}{\rho + \mu} \sum_i c_i^2 \kappa_i^4 N_i - \frac{1}{4} \frac{EJ}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^6 -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{EF}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^3 - \frac{13}{16} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 + \frac{7}{4} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_j c_i c_j \beta_j^2 + \frac{2\rho V}{\rho + \mu} \sum_j \dot{c}_i c_j \beta_j^1 - \frac{1}{2} \frac{PF}{\rho + \mu} \sum_j c_i c_j \beta_j^1 \quad (4)$$

$$N_i = \int_0^l A_i^2 dx, \quad d_{ijkl}^2 = \int_0^l A_i' A_j' A_k A_l dx, \quad d_{ijkl}^6 = \int_0^l A_i'' A_j'' A_k' A_l' dx$$

$$d_{ijkl}^3 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l dx, \quad d_{ijkl}^4 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx, \quad \beta_j^1 = \int_0^l A_i' A_j dx, \quad \beta_j^2 = \int_0^l A_i' A_j' dx. \quad (5)$$

Побудуємо рівняння Лагранжа другого роду для функції Лагранжа (4). Після розв'язання системи рівнянь відносно других похідних амплітудних параметрів, яке робиться на основі методів нелінійної механіки з використанням тієї

власних коливань (варіант методу Канторовича [3])

$$u(x, t) = \sum_i c_i(t) A_i(x). \quad (3)$$

Тут  $c_i(t)$  – амплітудні параметри коливань залежні від часу,  $A_i(x)$  – форми коливань, які є повною ортогональною системою функцій [4].

Підставляємо таку форму розв'язку у функцію Лагранжа (2) і після виконання інтегрування по просторовій координаті  $x$  одержимо дискретну функцію Лагранжа, в якій використані позначення різних коефіцієнтів, що представляють собою квадратури від відомих форм коливань і їх похідних на відрізку  $[0, l]$  і можуть бути легко обчислені

власливості, що система рівнянь відносно амплітудних параметрів містить лише члени першого і третього порядків малості, а члени другого порядку малості відсутні, одержимо рівняння руху системи у вигляді

$$\ddot{c}_r = -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{nr}^1 - \beta_{ir}^1) - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 -$$

$$-\frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \sum_{ijk} c_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left( d_{ijk}^2 - \frac{1}{2} d_{kij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^6 -$$

$$-\frac{2EF}{(\rho+\mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^3 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} c_i c_k \left( -\frac{E'}{\rho+\mu} \chi_p^4 c_p + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 + \right. \\ \left. - \frac{PF}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \right) \quad (6)$$

Система рівнянь (6) є рівняннями нелінійної дискретної моделі системи трубопровід рідини в амплітудних параметрах. Перші шість членів цієї системи є лінійними, а решта – нелінійними членами третього порядку малості. Ці рівняння шляхом пониження порядку похідних за рахунок введення нових змінних легко зводиться до форми Коши, що надалі дозволяє використати чисельні методи для дослідження переходних режимів руху.

На основі розвиненого підходу було досліджено поведінку труби з рідиною при різних швидкостях течії рідини. Інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь проводилося методом Рунге-Кутта на основі моделі, яка враховує десять форм коливань.

У випадку шарнірного закріплення граничні умови на кінцях мають вигляд

$$u(x,t)|_{x=0,l} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=0,l} = 0. \quad (7)$$

Такі граничні умови будуть прийматися у наведених нижче прикладах, хоча розвинений метод може бути застосований для довільних випадків закріплення кінців труби.

Розглядаємо шарнірно закріплену з обох боків циліндричну сталеву трубу довжиною 1 м (трубопровід), внутрішній радіус – 2 см, товщина труби – 1 мм. Початковий рух системи зумовлений відхиленням по другій формі коливань. Тоді початкові умови задачі можна записати у вигляді

$$c_2(0) = 0,02, \quad c_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,10} \quad (i \neq 2); \\ \dot{c}_i(x,0) = 0, \quad i = \overline{1,10}. \quad (8)$$

В чисельних прикладах розглядається рух із сталою швидкістю, фізичні параметри для рідини приймаються як для води.

Відомо [5, 6], що в системі трубопровід – рідина існує критична швидкість, при якій частота коливань труби з рідиною, що тече, обертається в нуль. Критична швидкість визначається на основі лінійної моделі і є порогом втрати стійкості прямолінійної форми трубопроводу. Випишемо лінеаризоване дискретне рівняння руху системи для першої форми коливань.

$$\ddot{c}_1 = \omega^2 c_1, \quad (9)$$

де на основі лінеаризованих рівнянь руху значення частоти визначається за формулою

$$\omega^2 = -\frac{EJ}{(\rho+\mu)} \chi_1^4 + \frac{7\rho V^2}{2(\rho+\mu)N_1} \beta_{11}^2 - \frac{PF}{(\rho+\mu)N_1} \beta_{11}^2$$

Критичну швидкість  $V_{kp}^1$  отримаємо за умови рівності нулю частотного параметра  $\omega$ . Тоді

$$V_{kp}^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{7\rho} \left( \frac{EJ N_1 \chi_1^4}{\beta_{11}^2} + PF \right)}. \quad (10)$$

Для чисельного моделювання розглянемо три випадки руху рідини:

$$1 - V = 0; \quad 2 - V = 0,5 V_{kp}^1; \quad 3 - V = V_{kp}^1.$$

По аналогії з роботою [7] будемо розглядати початковий рух системи зумовлений збуренням лише другої форми коливань. Для випадку  $V = 0$  перерозподіл енергії відбувається переважно між другою та шостою модами, що зумовлено тим, що кубічна нелінійність для подвоєної частоти визначає взаємодію з частотою, яка в шість разів більша за частоту коливань основного тона, і є достатньо незначною. Коливальний процес є стійким і за 10 періодів коливань за першою формою ніякі ознаки нестійкості не проявлялися.

У випадку, коли рідина рухається із швидкістю, що дорівнює половині першої критичної швидкості, процес залишається стійким. Енергія перерозподіляється між всіма модами, але максимальні амплітудні параметри притаманні другій, початково збуренній моді. Суттєвими (співрозмірними) є також збурення першої та третьої форми. Наступні форми коливань збурюються несуттєво.

У випадку руху з критичною швидкістю, процес докорінно змінюється і перестає бути стійким. Початкове відхилення по другій формі з часом приводить до коливань великої амплітуди по першій формі (на інтервалі розрахунків до 8 см), які зростають з часом. Тобто в околі руху рідини з першою критичною швидкістю має місце передбачена на основі лінійної моделі нестійкість руху [5, 6]. По іншим формам коливання відбуваються з невеликими амплітудами.

На рисунках 1–3 показано зміни в часі амплітуд першої, другої та третьої форми, відповідно. Зауважимо, що для нульової швидкості руху рідини перша форма не збуджується. Цифрою 1 позначено криві амплітуд коливань системи при нульовій швидкості протікання

рідини, 2 – половина критичної швидкості та 3 – коли рідина протікає з критичною швидкістю.

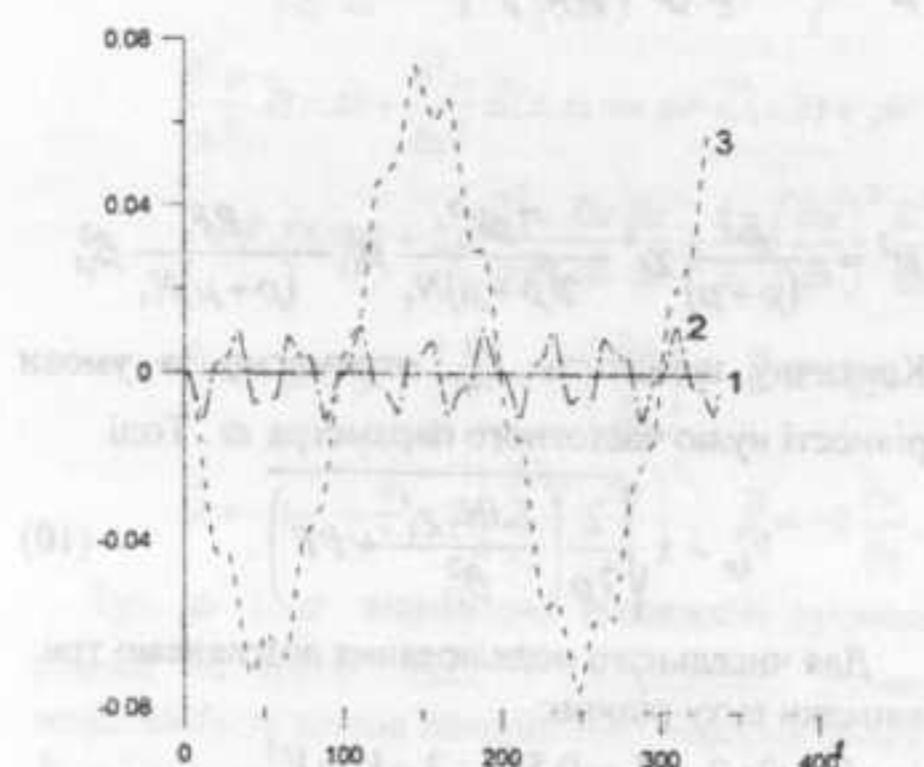


Рис. 1. Амплітуди першої форми коливань

Рис. 1-3 містять залежність від часу перших трьох амплітуд коливань балки для різних швидкостей течії рідини. На всіх трьох рисунках криві пронумеровані відповідно до обраних трьох випадків зміни швидкості. При відсутності руху рідини коливання за першою формою не збуджуються, у випадку напівкритичної швидкості коливання збуджуються незначно (30% від значення амплітуди другої форми), проте істотно помітний нелінійний негармонічний закон залежності від часу. Суттєво відрізняється поведінка системи в околі критичної швидкості. Амплітуди по першій формі значно збільшуються, їхній внесок стає домінуючим, створення гармонічного закону стають ще більш помітними (видно прояв супергармонік).

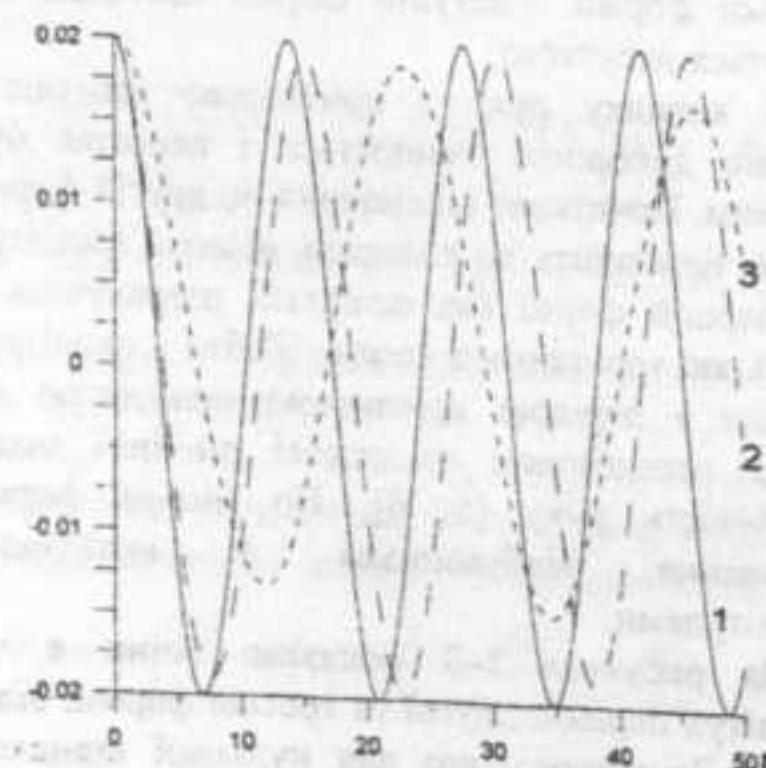


Рис. 2. Амплітуди другої форми коливань

Аналіз зміни другої форми (Рис. 2) вказує, що вплив вищих гармонік є несуттєвим, залежність амплітуди цієї гармоніки від швидкості рідини незначна, проте при збільшенні швидкості течії проявляється як зменшення частоти коливань, так і інтенсивність енергообміну між формами коливань в системі (про це свідчить спадаючий характер модуляції кривих 2 і 3). Крива 3, що відповідає критичному значенню швидкості вказує на суттєву модуляцію і зміну середнього значення коливань вже на початковому етапі розвинення процесів.

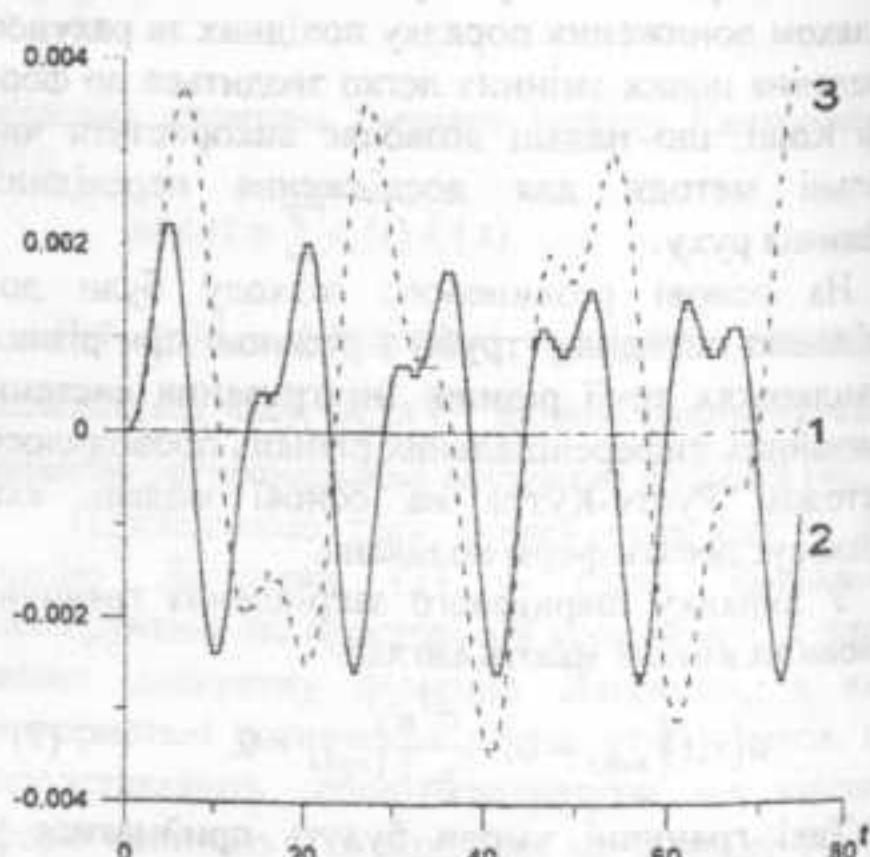


Рис. 3. Амплітуди третьої форми коливань

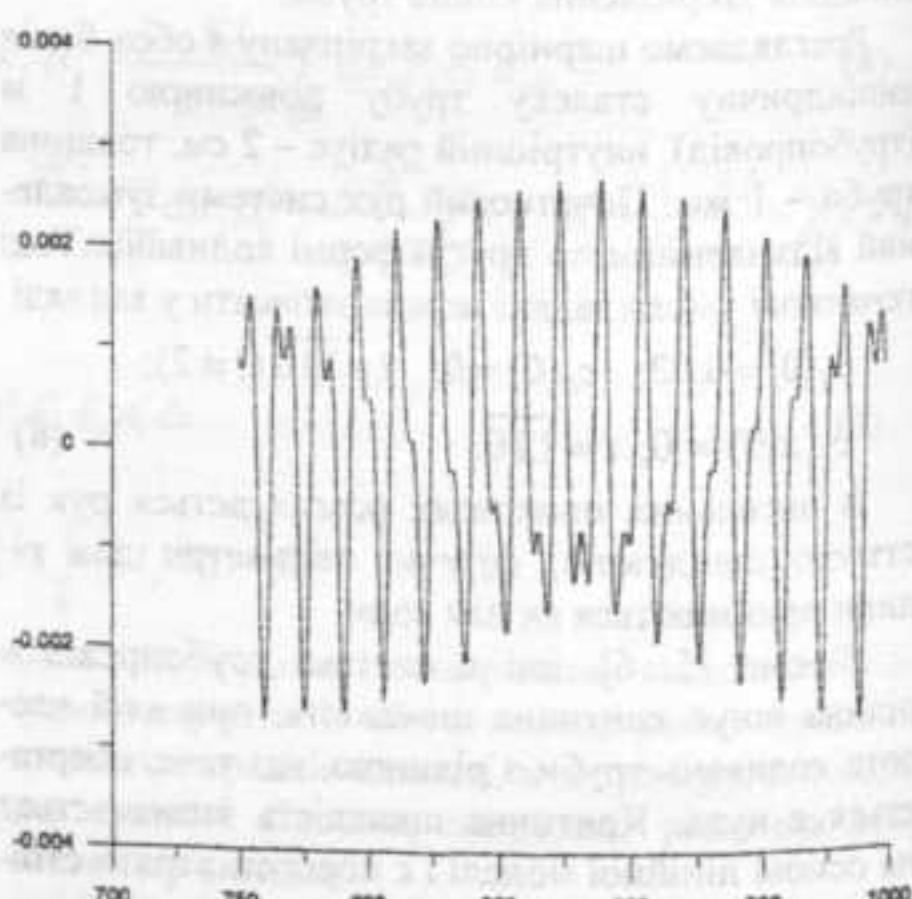


Рис. 4. Вплив супергармонік на амплітуди третьої форми коливань

При аналізі зміни третьої форми привертає увагу те, що при відсутності руху рідини ця

форма не збуджується. Крім того для третьої форми більш суттєво проявляється вплив супергармонік. Якщо розглянути коливання на збільшенному проміжку часу (15 періодів коливань), то чітко видно, що в системі спостерігається вплив гармоніки з більшою частотою – Рис. 4. Такий перехід зумовлений проявом внутрішніх комбінаційних резонансів, які відповідають енергообміну, що спостерігається.

На Рис. 5 на збільшенному проміжку часу проілюстровано ефект модуляції коливань амплітуди третьої форми в часі. Ефекти модуляції для інших форм проявляються не так відчутно. Наявність модуляції підтверджує необхідність моделювання поведінки системи на основі багатомодового підходу. Цей підхід особливо важливий при вивченні переходів режимів руху системи, коли, по-перше, зовнішнє збурення має багаточастотний характер, а, по-друге, інтенсивні зміни динамічних параметрів системи вимагають включати до розгляду високі форми коливань, які мають забезпечити високу крутину зміни параметрів коливань в системі.

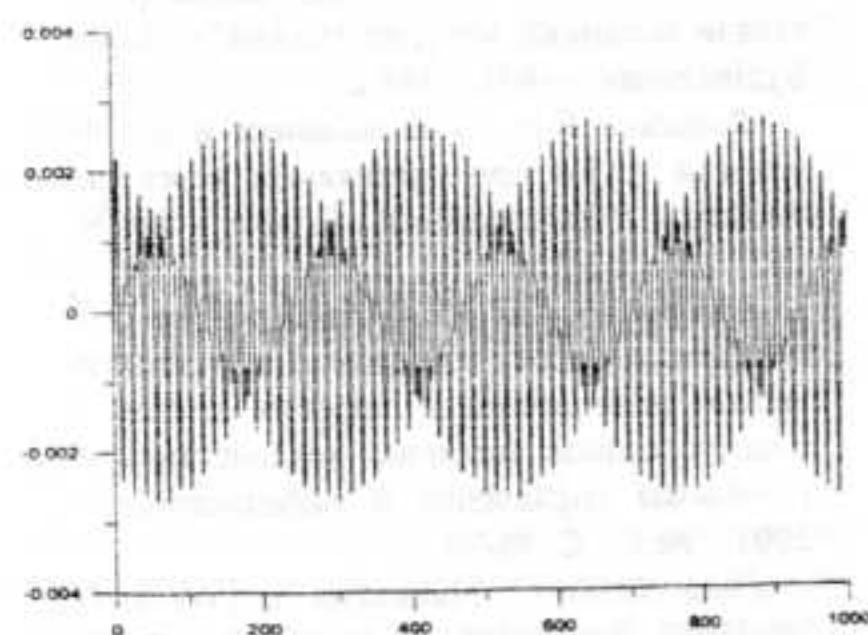


Рис. 5. Прояв ефекту модуляції третьої форми

У всіх трьох випадках домінують коливання зумовлені початковими збуреннями другої форми. Проте у випадку руху системи в околі критичної швидкості течії домінує перша (симетрична) форма коливань, зростання якої саме і приводить до втрати стійкості прямолінійної форми трубопроводу з рідиною.

На Рис. 6-7 приведено зміни амплітуд форм коливань перших трьох форм від часу для напівкритичної і критичної швидкостей, відповідно. Коли швидкість течії не наближається до критичної, коливання за другою формою домінують, енергообмін в системі сприяє нелінійному механізму збудження першої та третьої форм, що відображені в характері їх залежності від часу. В

зміні амплітуд коливань за першою і третьою формами суттєво проявляється вплив супергармонік, для другої форми такий вплив є незначним, і її зміна в часі незначно відрізняється від гармонічного закону..

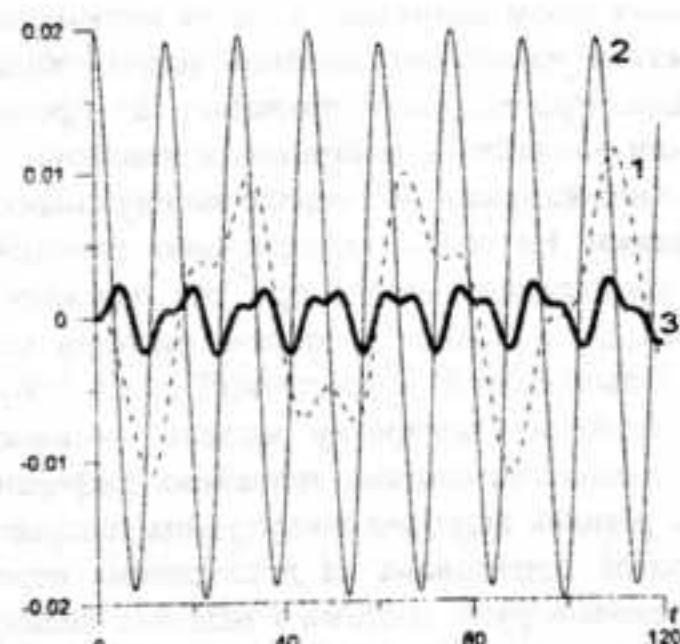


Рис. 6. Амплітуди  $c_1, c_2, c_3$  при  $V = 0.5V_{kp}$

Характер поведінки системи суттєво змінюється при наближенні до критичних швидкостей течії рідини. Тепер амплітуда першої форми стає домінуючою, а друга і треті форми коливань набувають змінні в часі середні значення. Внесок третьої форми несуттєвий, проте демонструє складні нелінійні механізми збудження коливань. Зміна середнього значення другої форми відбувається корельовано із зміною швидкості першої форми.

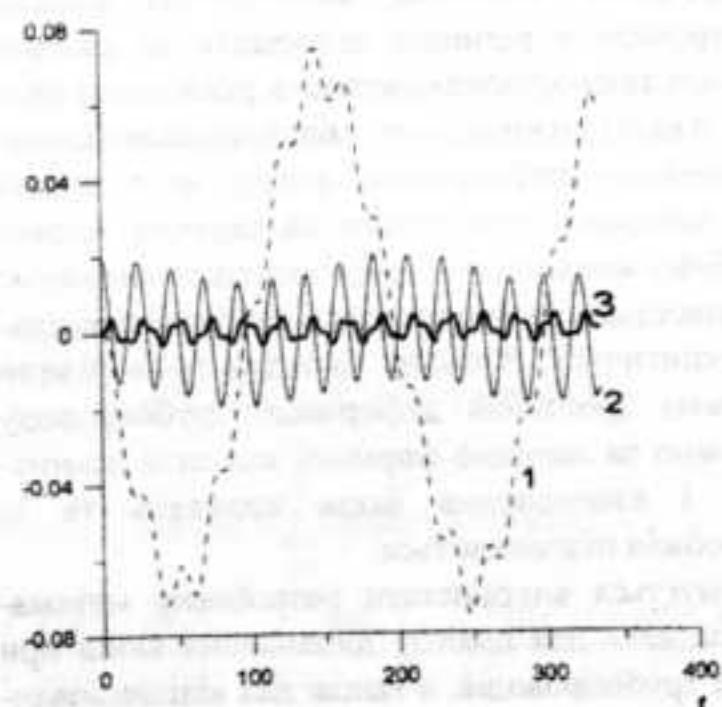


Рис. 7. Амплітуди  $c_1, c_2, c_3$  при  $V = V_{kp}$

Для всіх прикладів суттєвим є прояв взаємозалежності амплітуд форм коливань і

енергообмін між цими формами. Ця властивість свідчить про розвинення нелінійних механізмів взаємодії в системі, які істотно підсилюються за рахунок руху рідини. При цьому процеси значно послаблюються в околі критичних значень швидкостей течії за рахунок прояву нестійкості відповідних форм коливань. Хоча ця нестійкість визначається на основі лінійної теорії, збільшення амплітуд коливань приводить до прояву нелінійних механізмів внутрішньої взаємодії, а тому і до нових механізмів перерозподілу енергії.

**Висновки.** На основі використання варіаційного формулювання задачі про рух пружного трубопроводу з рідиною, що тече, методом модальної і амплітудної декомпозиції рухів побудовано нелінійну дискретну модель динаміки системи (нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів). Модель орієнтована на дослідження переходних режимів руху системи і включає велику кількість форм коливань системи (для чисельних прикладів розглядалося врахування десяти перших форм коливань). Розглянуті задачі свідчать про доцільність включення до розгляду значної кількості форм коливань. Зокрема, саме нелінійна взаємодія між формами коливань визначає ефекти типу модуляції коливань і наявності супергармонік в результатуючих зонах змін амплітуд. При початковому збуренні коливань по першій антисиметричній формі (друга форма коливань) істотно збуджуються коливання по шостій формі, що зумовлене частотним співвідношенням між цими формами, яке визначається присутністю кубічних нелінійностей.

Розроблена нелінійна математична модель трубопроводу з рідиною приводить до результатів, що якісно узгоджуються з реальними явищами. Аналіз енергообміну між першими формами коливань трубопроводу вказує на суттєвий вплив швидкості течії рідини на характер прояву нелінійних механізмів. Поведінка системи значно ускладнюється коли швидкість течії наближається до критичної. В цьому випадку течія рідини спричиняє зростання деформації трубопроводу переважно за першою формою, яка стає домінуючою, і взаємовплив форм коливань та їх енергообмін підсилюються.

Планується використати розроблену математичну модель для аналізу динамічних явищ при розриві трубопроводів, а також для відправлення нових перспективних типів демпфуючих пристріїв (сили однобічного тертя і однобічна поновлююча сила для динамічного розлагодження резонансних явищ [7, 8]) з метою зменшення негативного впливу наближення швидкості до

критичної, а також для оцінки впливу імпульсних і вібраційних навантажень на трубопроводи.

## Список використаних джерел

1. Лимаренко О.С., Матараццо Дж., Ясинський В.В., Динаміка вращаючихся конструкцій зі залежністю. –Киев: ГНОЗІС. - 2002. - 306 с.
2. Василевский Ю.Е., Лимарченко О.С. Нелинейная модель динамики трубопровода при скоростном течении жидкости // Комплексний аналіз і течії з вільними границями, Збірник праць Інституту математики НАН України. - 2, № 4. – Київ: Інститут математики НАН України. – 2006. - С. 322-334.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М: Наука, 1970, 512 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М: Наука. – 1968. - 560 с.
5. Бондарь Н.Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. - Київ: Будівельник. - 1971. - 265 с.
6. Федосеев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инженерный сборник. - 10, М: 1951. - С. 251-257.
7. Митропольский Ю.А., Лимарченко О.С. Матараццо Дж., Тоскано Л. Математическое моделирование упругих систем с односторонним внешним воздействием // Проблемы управления и информатики. - 2001. - № 5. - С. 48-70.
8. Limarchenko O., Matarazzo G., Fedullo A. Nonlinear mechanism of purposeful energy redistribution for suppression of oscillations of structures on moving foundation // Комплексний аналіз і течії з вільними границями, Збірник праць Інституту математики НАН України. - 1, № 3. – Київ: Інститут математики НАН України. – 2004. - С. 136-143.

Надійшла до редколегії 18.03.2009

УДК 517.(075.8)

Олексій Ф. Калайда, к.ф.-м.н., доцент

### Про середню точку в теоремах про середнє

Невідома середня точка в теоремах про середнє, як функція довжини відрізка, будується і досліджується методом степеневих рядів.

Ключові слова: теорема, точка, середнє.

E-mail: akalayda@i.com.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор  
Приказчиков В.Г.

#### Вступ.

Як відомо, теореми про середнє посідають важливе місце в математичному аналізі та його застосуваннях (зокрема, в обчислювальній математиці). Питанню дослідження, знаходження середньої точки та її оцінок математики впродовж багатьох років приділяли пильну увагу. Одним з дійових методів дослідження середньої точки виявився метод степеневих рядів. У даній статті основну увагу теж приділено саме методу степеневих рядів.

Теорема Коши [1] про середнє виражається рівністю

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+h\zeta)}{g'(a+h\zeta)}, \quad (1)$$
$$a+h=b, 0 < \zeta < 1,$$

де  $a+h\zeta$  – так звана середня точка ( $\zeta$  – так звана відносна середня точка), являється узагальненням теореми Лагранжа (рівність (1) при  $g(x)=x$ ) і виражає, як частинний випадок [2] при  $f'(x)=p(x)q(x)$  та знакосталій функції  $g'=q$ , також першу теорему про середнє в інтегральному численні [1]

$$\int_a^b p(x)q(x)dx = p(a+h\zeta) \int_a^b q(x)dx.$$

Легко переконатись також, що справедлива аналогічна (1) рівність (узагальнення відомої рівності)

$$Af(a) + Bf(b) = (A+B)f(a+h\zeta), \quad f \in C[a, b], \zeta \in [0, 1]$$

$$\frac{Af(a) + \sum_{j=1}^n A_j f_j + Bf(b)}{Ag(a) + \sum_{j=1}^n A_j g_j + Bg(b)} - \frac{f(a+h\zeta)}{g(a+h\zeta)} = 0, \quad (1')$$

O. F. Kalayda, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

### About a middle point in theorems about middle

Unknown middle point in theorems about middle, how the function of the run length is, is built and explored by the method of sedate rows.

Key Words: theorem, point, middle.

$$A \geq 0, B \geq 0, A_j \geq 0, A + B + \sum_{j=1}^n A_j \neq 0$$

(без обмеження загальності можна вважати, що

$$A + B + \sum_{j=1}^n A_j = 1$$

$$r_j = r(x_j), x_j \in (a, b), x_j < x_{j+1}, \zeta \in [0, 1]$$

(доводиться традиційно: у загальному випадку одна з умов є: при  $\zeta=0$  та  $\zeta=1$  в (1') мусить бути нерівності протилежних знаків: при  $n=0$  це виконується завжди, а при  $n>0$  достатньо умовою, наприклад, є монотонність та знакосталість функцій  $f, g$ ). Рівності (1), (1') відносно  $\zeta$  є скінченні рівняння виду

$$R(\zeta) - Z = 0, \quad Z = \text{const}$$

(тому при умові

$$Z \in [\min_{x \in [a, b]} R(x), \max_{x \in [a, b]} R(x)]$$

розв'язок цих рівнянь для неперервної функції  $R$  існує, а у випадку монотонної функції і єдиний; при  $g(x) = \text{const}$  в рівності (1') для функції  $f$  це виконується), а їх розв'язок  $\zeta$  є функція змінної  $h$ . Оскільки ж існує монотонна функція, що в сумі з немонотонною функцією є теж монотонна функція, а отже, немонотонна функція є різниця монотонних функцій, то наведені теореми для монотонних функцій можна узагальнити і для немонотонних функцій. Тому з огляду на це рівність (1') матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{Af(a) + \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) + Bf(b)}{Ag(a) + \sum_{j=1}^n A_j g(x_j) + Bg(b)} = \\ & = \left( \frac{f(c) + \varphi(c)}{g(c) + \psi(c)} - \frac{\varphi(c_1)}{g(c_1) + \psi(c_1)} \right) \frac{g(c_2) + \psi(c_2)}{g(c_2)}, \\ & c, c_1, c_2 \in [a, b], \end{aligned}$$

де  $\varphi, \psi$  – монотонні функції, такі що функції, відповідно,  $f + \varphi$  та  $g + \psi$  монотонні.

Для аналітичних функцій  $f, g$  функцію  $\zeta$ , аналогічно [3] для теореми Лагранжа (про перші дослідження теореми Лагранжа та залишкового члена в формі Лагранжа формули Тейлора див. [4 - 6], про останні - [7]), шукатимемо у вигляді степеневого ряду

$$\zeta(h) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j \quad (2)$$

(може бути й так, що усі, крім першого, коефіцієнти ряду (2) дорівнюють нулю, як-от, наприклад, при  $f(x) = \sin x, g(x) = x, a = 0, h = \pi$ ).

Для визначення невідомих в (2) коефіцієнтів, згідно з методом степеневих рядів та методом невизначених коефіцієнтів, необхідно з врахуванням (2) розгорнути в околі певної точки  $c = a + ah, 0 < \alpha < 1$ , відрізка  $[a, b]$  в ряди усі чинники рівності (1): ліву частину - за степенями  $h$ , праву - за степенями  $h\zeta(h)$ . Для цього рівність (1) слід подати у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{(f(c + h(1-\alpha)) - f(c)) - (f(c - ah) - f(c))}{(g(c + h(1-\alpha)) - g(c)) - (g(c - ah) - g(c))} = \\ & = \frac{f'(c + h(\zeta(h) - \alpha))}{g'(c + h(\zeta(h) - \alpha))}. \end{aligned} \quad (3)$$

Звідси слідує, що коефіцієнти ряду (2) є функції змінної  $c$  (змінної  $\alpha$ ).

Виконавши в (3) згадані розвинення і зведення до спільного знаменника та виділення певних чинників, матимемо рівність

$$\begin{aligned} & \sum_{l=2}^{\infty} h^l ((1-\alpha)^l - (-\alpha)^l) (g' f^{(l)} - f' g^{(l)}) \Big|_{x=c} / l! = \\ & = \left( \sum_{k=1}^{\infty} h^k \frac{((1-\alpha)^k - (-\alpha)^k)}{k!} g^{(k)}(c) \right) \times \\ & \times \left( \sum_{l=2}^{\infty} h^{l-1} \frac{(\zeta(h) - \alpha)^{l-1}}{(l-1)!} f^{(l)}(c) \right) - \\ & - \left( \sum_{k=1}^{\infty} h^k \frac{((1-\alpha)^k - (-\alpha)^k)}{k!} f^{(k)}(c) \right) \times \\ & \times \left( \sum_{l=2}^{\infty} h^{l-1} \frac{(\zeta(h) - \alpha)^{l-1}}{(l-1)!} g^{(l)}(c) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

З (4) легко переконатись, що при умові

$$\gamma_2(c) = f''(c)g'(c) - f'(c)g''(c) \neq 0 \quad (5)$$

коефіцієнти в розгортанні (2) є (далі позначено

$$\gamma_i(x) = f^{(i)}(x)g'(x) - f'(x)g^{(i)}(x), \quad a_0 = 1/2,$$

$$a_1 = \frac{1}{24} \frac{\gamma_3(c)}{\gamma_2(c)} = \frac{1}{24} \frac{f''(c)g'(c) - f'(c)g''(c)}{f''(c)g'(c) - f'(c)g''(c)},$$

$$a_2 = \frac{1}{24} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \left( \frac{\gamma_4(c)}{\gamma_2(c)} - \left( \frac{\gamma_3(c)}{\gamma_2(c)} \right)^2 \right), \quad (6)$$

$$a_3 = \frac{1}{48} \left( \left( \frac{11}{40} - \alpha(1-\alpha) \right) \frac{\gamma_5}{\gamma_2} - 3 \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)^2 \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_2^2} + \right. \\ \left. + \frac{48(0.5 - \alpha)^2 - 1}{24} \left( \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right)^3 \right),$$

і т.д. (якщо ж, замість умови (5), виконуються умови

$$\gamma_2(c) = \dots = \gamma_{k+1}(c) = 0, \gamma_{k+2}(c) \neq 0,$$

то

$$a_n = \alpha + \left( \frac{(1-\alpha)^{k+2} - (-\alpha)^{k+2}}{k+2} \right)^{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Як бачимо, при  $\alpha = a_0 = 1/2$  ряд (2) доречно розглядати у вигляді

$$\zeta(h) - 1/2 = \theta(h) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j h^j. \quad (7)$$

З рівності (3) слідує, що при такому значенні параметра  $\alpha$  ліва частина є парна функція змінної  $h$ , а тому такою ж функцією має бути (з врахуванням рівності (7)) і права частина цієї рівності. А це може бути лише тоді, коли функція  $\theta$  непарна (або тотожний нуль). Отже, ряд (7) у цьому випадку має вигляд (див. (6))

$$\theta(h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} h^{2k+1}.$$

Можна у такий же спосіб досліджувати й рівність (1'). Так, при  $p=0$  та умові виду (5)

$$\hat{\gamma}_1(\bar{n}) = f'(c)g(c) - f(c)g'(c) \neq 0, c = a + ah, (5')$$

(далі  $\gamma_i(x) = f^{(i)}(x)g(x) - f(x)g^{(i)}(x), i \geq 1$ ) маємо

$$a_0 = B/(A+B),$$

$$a_1 = \frac{A\alpha^2 + B(1-\alpha)^2 - (a_0 - \alpha)^2}{2(A+B)} \frac{\hat{\gamma}_2(c)}{\hat{\gamma}_1(c)},$$

$$a_2 = \frac{-A\alpha^3 + B(1-\alpha)^3 - (a_0 - \alpha)^3}{6(A+B)} \frac{\hat{\gamma}_3(c)}{\hat{\gamma}_1(c)} -$$

$$-(a_0 - \alpha)a_1 \frac{\hat{\gamma}_2(c)}{\hat{\gamma}_1(c)}, \dots,$$

а функція  $\theta$  (див. (7)) при  $A=B, \alpha=1/2$  теж непарна (або тотожний нуль).

Аналогічно у випадку узагальнення рівності (1) у вигляді [3]

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+h) - T_m(a+h, a; f)}{g(a+h) - T_n(a+h, a; g)} = \\ & = \frac{h^{m+1} f^{(m+1)}(a+h\zeta_{m,n}) / (m+1)!}{h^{n+1} g^{(n+1)}(a+h\zeta_{m,n}) / (n+1)!}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $T_k(x, a; r)$  – многочлен Тейлора  $k$ -го порядку з центром  $a$  функції  $r$ , а також другої теореми про середнє в інтегральному численні – формул Бонне (O. Bonnet) [1]

$$\int_a^b p(x)q(x)dx = q(a+0) \int_a^{a+\kappa} p(x)dx, 0 < \kappa < 1, \quad (9)$$

для невід'ємної монотонно спадної функції  $q$ ,

$$\int_a^b p(x)q(x)dx = q(b-0) \int_a^{a+\kappa} p(x)dx, 0 < \kappa < 1, \quad (10)$$

для невід'ємної монотонно зростаючої функції  $q$ , а якщо умову невід'ємності функції  $q$  не вимагати, то

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)q(x)dx &= q(a+0) \int_a^{a+\mu} p(x)dx + \\ &+ q(b-0) \int_{a+\mu}^b p(x)dx, 0 < \mu < 1. \end{aligned} \quad (11)$$

При цьому матимемо: у випадку (8) тотожність

$$\sum_{i=0}^k \left( \frac{f^{(m+k-i)}(a)}{n!(m+k-i)!} L_{i,n} g(a) - \frac{g^{(n+k-i)}(a)}{m!(n+k-i)!} L_{i,m} f(a) \right) = \frac{f^{(m)}(a)g^{(n+k-1)}(a)}{m!(n+k+1)!} - \frac{f^{(m+k-1)}(a)g^{(n)}(a)}{n!(m+k+1)!}, k \geq 0.$$

$$L_{i,n} g(a) = \sum_{j=0}^i \frac{g^{(n+i-j)}(a)}{(j+1)!} a_{i-j,j},$$

$$L_{i,m} f(a) = \sum_{j=0}^i \frac{f^{(m+i-j)}(a)}{(j+1)!} a_{i-j,j},$$

$$a_{i-j,j} = \sum_{p=0}^{i-j} a_{p,0} a_{i-j-p,j-1}, a_{p,0} = a_p, j = \overline{0, i},$$

з якої послідовно знаходимо коефіцієнти ряду виду (2)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{m+1} + \frac{n-m}{(m+1)(n+1)} \times \\ &\times \frac{f^{(m)}(a)g^{(n+1)}(a)}{f^{(m+1)}(a)g^{(n)}(a) - f^{(m)}(a)g^{(n+1)}(a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( -a_0 \frac{(n-m)(f^{(n+1)}(a)g^{(m+1)}(a))}{(n+1)(m+1)} + \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{(n+1)(m+1)} - \frac{a_0^2}{2!} \right) AA \right) / BB, \end{aligned}$$

$$AA = f^{(m+2)}(a)g^{(n)}(a) - f^{(n+1)}(a)g^{(m)}(a),$$

$$BB = f^{(m+1)}(a)g^{(n+1)}(a) - f^{(m)}(a)g^{(n+1)}(a),$$

у випадку (9) – тотожність

$$(p(x)q(x))_{x=a}^{(k)} = q(a) \sum_{i=0}^k \frac{p^{(i)}(a)}{(i+1)!} a_{k-i,i}.$$

з якої дістаемо

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = \frac{1}{2} \frac{q'(a)}{q(a)}, a_2 = \frac{1}{3} a_1 \left( \frac{q''(a)}{q'(a)} - \frac{f'(a)}{f(a)} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{12} a_1 \left( \frac{q'''}{q'} - \left( \frac{q''}{q'} \right)^2 + \frac{q''}{q'} \left( \frac{q''}{q'} - \frac{f'}{f} \right) - \right. \\ &\left. - 3 \frac{f'}{f} \left( \frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q} \right) \right)_{x=a}, \end{aligned}$$

у випадку (10) – тотожність

$$(p(x)q(x))_{x=a}^{(k)} = q(b) \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{p^{(i)}(b)}{(i+1)!} a_{k-i,i},$$

з якої маємо

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = \frac{1}{2} \frac{q'(b)}{q(b)}, a_2 = -\frac{1}{3} a_1 \left( \frac{q''(b)}{q'(b)} - \frac{f'(b)}{f(b)} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{12} a_1 \left( \frac{q'''}{q'} - \left( \frac{q''}{q'} \right)^2 + \frac{q''}{q'} \left( \frac{q''}{q'} - \frac{f'}{f} \right) - \right. \\ &\left. - 3 \frac{f'}{f} \left( \frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q} \right) \right)_{x=b}, \end{aligned}$$

а у випадку (11), замінивши в (10)  $q(x)$  на  $q(x) - q(a)$  (або в (9) на  $q(x) - q(b)$ ), дістанемо

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = \frac{1}{2} \frac{q'(a)}{q(a) - q(b)}, \\ a_2 &= \frac{1}{3} a_1 \left( \frac{q''(a)}{q'(a)} - \frac{f'(a)}{f(a)} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{12} a_1 \left( \frac{q'''}{q'} - \left( \frac{q''}{q'} \right)^2 + \frac{q''}{q'} \left( \frac{q''}{q'} - \frac{f'}{f} \right) - \right. \\ &\left. - 3 \frac{f'}{f} \left( \frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q(x) - q(b)} \right) \right)_{x=a}. \end{aligned}$$

Наведемо, нарешті, відомість про одну з основних теорем про середнє – теорему Ролля, а саме наслідок з цієї теореми про кількість нулів похідної між двома нулями функції. Як відомо, у загальному випадку кількість цих нулів є непарне число (принагідно відмітимо, що це твердження вірне з урахуванням кратності згаданих нулів). Уточнимо це твердження стосовно алгебраїчних многочленів.

**Теорема.** Якщо усі нулі алгебраїчного многочлена дійсні, то між двома його сусідніми нулями міститься лише простий нуль його похідної.

**Доведення.** Нехай многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (12)$$

має лише дійсні нулі (вважатимемо, що множина його нулів упорядкована):  $m$  – кратних

нулів ( $k_i \geq 2, k_1 + \dots + k_m = M$ ) та  $P$  простих нулів. Нехай перед першим кратним нулем  $x_1$  міститься  $p_0$  простих нулів, між кратними нулями  $x_i, i = \overline{1, m}$ ,  $p_i$  простих нулів ( $i = \overline{1, m-1}$ ), а після останнього кратного нуля  $x_m$   $p_m$  простих нулів (всього  $P = p_0 + \dots + p_m$  простих нулів,  $n = P + M$  усіх нулів). Тоді між усіма нулями многочлена (1) матимемо  $M - m - 1$  проміжків. Похідна  $P'(x)$  многочлена (1) матиме  $M$  спільних з многочленом нулів кратності  $k_i - 1$ , тобто з врахуванням їх кратності всього  $M - m$  таких нулів. Решта  $n - 1 - M + m = P + m - 1$  власних нулів похідної многочлена (1), згідно з наслідком з теореми Ролля, розташовані в проміжках між нулями цього многочлена. Оскільки, як бачимо, кількість власних нулів похідної  $P'(x)$  дорівнює кількості проміжків між нулями многочлена (1), то у кожному з проміжків між нулями цього многочлена може міститись лише один, причому однократний, нуль його похідної, що й потрібно було довести.

**Наслідок 1.** З теореми слідує, що при виконанні її умов і решта похідних (до похідної  $(n-1)$ -го порядку включно) многочлена (1) матимуть лише дійсні нулі, причому між двома нулями похідної  $(i-1)$ -го порядку міститиметься лише простий нуль похідної  $i$ -го порядку ( $i = \overline{1, n-1}$ ).

**Наслідок 2.** З теореми слідує, що при  $a_n \neq 0$  теорема чинна і для зворотного многочлена

$$Q_n(y) = a_n y^n + \dots + a_1 y + a_0, \quad y = 1/x.$$

**З ау в а ж е н н я.** Твердження теореми залишається в силі у випадках, коли певним перетворенням незалежної змінної многочлена (1) можна дістати многочлен з лише дійсними нулями. Це, наприклад, буде у випадку, коли многочлен має лише уявні нулі (вважаючи нуль-число теж уявним нулем), оскільки заміною  $x \rightarrow ix$  дістаємо многочлен лише з дійсними нулями, або, більш загально, коли усі нулі многочлена (1) містяться на прямій  $z = h + xe^{i\varphi}$  комплексної площини.

На завершення відзначимо ще, що корисні співвідношення та оцінки в окремих теоремах про середнє добуто в [9, 10], про рівність (1) див. [11].

### Висновки.

1. Дано узагальнення однієї теореми про середнє для неперервних функцій.

2. Проведено дослідження класичних та узагальнення нової теореми про середнє методом степеневих рядів.
3. Наведено уточнення наслідку з теореми Ролля стосовно кількості нулів похідної між двома нулями функції у випадку алгебраїчних многочленів.

### Список використаних джерел

1. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ (в 3-х частях). – Киев: «Вища школа». 1983. – 495 с.
2. Калайда О.Ф. До питання про застосування теорем про середні значення в обчислювальній математиці //Збірник наукових праць аспірантів (фізико-математичні науки). Вид-во Київського ун-ту. - 1963. – с. 125 – 131.
3. Калайда А.Ф. Исследование и применение теорем о средних значениях. Автореферат дисс. на соиск. канд. физ-мат. наук. – Киев: ИК АН УССР, 1965. – 20 с.
4. Rothe R. Zum Mittelsatz der Differentialrechnung //Mathematische Zeitschrift. B. 9, 3-4 H., Berlin, 1921.
5. Бритман М.С. Об остаточном члене формулы Тейлора //Матем. просвіщення. вып. 6. 1938.
6. Гнеденко Б.В. О  $\theta$  в формуле Лагранжа //Матем. просвіщення, вып. 7. 1938.
7. Бородін В.О. Асимптотика розв'язків рівняння Лагранжа для опуклих (вгнутих) функцій. /В книзі Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі". Київ: УДУХТ. 2001. – с. 114 – 116.
8. Калайда А.Ф. Об одной квадратурной формуле //Вычисл. и прикл. математика. – 1968. – 6. – с. 131 – 136.
9. Калайда О.Ф. Деякі оцінки в теоремах про середні значення //ІІ наук. конф. молодих матем. України. Вып. 1. Тези конф. К.: ІМ АН УРСР. 1965. – С. 45 – 47.
10. Калайда О.Ф. Деякі співвідношення в теоремах про середні значення. ДАН УРСР, № 12. 1965. – С. 1566 – 1570.
11. Деякі теореми про середнє для неперервних функцій //Одиннадцята Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. К. 2006. – С. 435.

Надійшла до редколегії 17.10.2008

УДК 539.3

Василь Г. Карнаухов,  
д. ф.-м. н., професор  
Віктор М. Січко,  
к. ф.-м. н., доцент  
Олексій С. Карпенюк, аспірант

**Вплив температури дисипативного розігріву на пасивне демпфування вимушених резонансних коливань ізотропної в'язкопружної циліндричної панелі**

Запропоновано скінчено-елементний метод розв'язування нелінійних задач про пасивне демпфування вимушених резонансних коливань ізотропних оболонок обертання з врахуванням впливу температури дисипативного розігріву. З його використанням розв'язана задача про пасивне демпфування резонансних коливань циліндричної панелі при шарнірному опиренні її торців. Показано, що температура дисипативного розігріву суттєво впливає на ефективність пасивного демпфування циліндричної панелі.

**Ключові слова:** резонансні коливання, циліндрична панель, демпфування.

V. G. Karnaughov, D.Sci. (Phys.-Math.),  
Full Professor  
V. M. Sichko, C.Sci. (Phys.-Math.),  
Ass. Professor  
O.S. Karpeniuk, PhD student

**An influence of a temperature of a dissipative heating on a passive damping of the forced resonant vibrations of an isotropic viscoelastic cylindrical panel**

A finite element method of solving of the nonlinear problems on a passive damping of the forced resonant vibrations of the isotropic revolution shells with taking into account an influence of a dissipative heating is proposed. On the base the problem of the passive damping of the resonant vibrations of a cylindrical panel with simply supported edges is solved. It is shown that an influence of the dissipative heating on the damping vibrations is considerable.

**Key words:** resonant vibrations, cylindrical panel, damping.

E-mail: karn@jinmech.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н. професор Мелешко В. В.

## 1. Вступ

Для зменшення рівня вимушених резонансних коливань тонкостінних елементів широко використовуються пасивні методи, коли в їх структуру вносяться в'язкопружні шари з високими гістерезисними втратами. На ефективність таких методів впливає багато факторів, зокрема і температура дисипативного розігріву. Проте в літературі відсутні дослідження впливу цього фактору на ефективність демпфування коливань циліндричних панелей, які знаходять широке застосування у різних галузях сучасної техніки.

В даній роботі подана постановка задачі про вплив температури дисипативного розігріву на пасивне демпфування вимушених резонансних коливань тонкостінних оболонок обертання, на які діє гармонічний за часом поверхневий тиск з частотою, близькою до резонансної частоти оболонки. Для моделювання термомеханічної поведінки матеріалів використовується концепція залежних від температури комплексних характеристик [1].

© В.Г. Карнаухов, В.М. Січко, О.С. Карпенюк, 2009

## 2. Постановка задачі

Розглянемо тришарову оболонку обертання з ізотропного в'язкопружного матеріалу, на яку діє гармонічний за часом рівномірний тиск  $p = p_0 e^{j\omega t}$  з частотою, близькою до резонансної частоти оболонки. Середній шар оболонки товщиною  $h_0$  виготовлено з пасивного в'язкопружного ізотропного матеріалу, а два зовнішніх шари однакової товщини  $h_1$  – з ізотропного пружного матеріалу з одинаковими механічними властивостями. Вважається, що комплексний модуль зсуву демпфуючого матеріалу залежить від температури відповідно до закону:

$$\begin{aligned}G' &= 968 - 8.690(MPa), \\G'' &= 87.1 - 0.70(MPa).\end{aligned}\quad (1)$$

Тоді задача про коливання оболонки зводиться до розв'язку нелінійної комплексної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} L_1(u, v, w, \theta) &= 0; L_2(u, v, w, \theta) = 0; \\ L_3(u, v, w, \theta) &= 0; L_4(u, v, w, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Оператори  $L_1, L_2, L_3, L_4$  тут не виписуються із-за їх громіздкості. Оператори  $L_1, L_2, L_3$  можуть бути одержані з наведених в [2] рівнянь, якщо в них вважати модуль зсуву комплексним і знехтувати нелінійними членами, які породжуються геометричною нелінійністю. Оператор  $L_4$  описує температуру дисипативного розігріву і може бути одержаний з використанням результатів, наведених в [1].

### 3. Методи розв'язування задачі

Для розв'язування задачі використовується скінчено-елементний метод дослідження вимушених коливань і дисипативного розігріву в язко-пружних оболонок обертання. Для цього подано варіаційне формулювання задачі, яка розв'язується за допомогою ітераційних методів в поєднанні з методом скінчених елементів для розв'язку задач на кожній ітерації. Коротко викладено ітераційні методи, які використовуються в роботі при розв'язуванні конкретних задач. Для зведення вихідної нелінійної задачі до послідовності лінійних задач використано метод покрокового інтегрування по часу. Суть його полягає в наступному:

- 1) за заданим у початковий момент часу  $t=0$  розподілом температури визначаються механічні характеристики і розв'язується лінійна задача в язкопружності;
- 2) за знайденими механічними змінними розраховується дисипативна функція;
- 3) на інтервалі часу  $[0, t_1]$  розв'язується задача тепlopровідності з відомим джерелом тепла, причому вибір значення  $t_1$  залежить від температурної чутливості механічних властивостей матеріалу;
- 4) за знайденим розподілом температури в момент часу  $t_1$  обчислюються змінені комплексні характеристики матеріалу і повторюється процес розв'язання задач 1) і 2);
- 5) за знайденими дисипативною функцією і розподілом температури в момент  $t_1$  розв'язується рівняння тепlopровідності на наступному інтервалі  $[t_1, t_2]$  і т. д.

Процес завершується при досягненні заданого значення часу  $t=t_4$ . Цей простий алгоритм накладає обмеження на інтервали часу  $[0, t_1], [t_1,$

$t_2], \dots, [t_{k-1}, t_k]$  – в цих інтервалах механічні характеристики повинні мало змінюватися.

Для прискорення збіжності ітераційного процесу метод покрокового інтегрування поєднується з алгоритмом Стефенсена – Ейткена, який зводиться до того, що після розв'язку задачі на кроках  $(n-2), (n-1), n$  обчислюється ітераційний параметр

$$\alpha = \frac{\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{\hat{T}_{n-2} - 2\hat{T}_{n-1} + \hat{T}_n}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3)$$

В якості  $T$  вибирається максимальна температура  $\hat{T} = \max T$ . Покращене  $n$ -е наближення  $\tilde{T}_n$  визначається за формулою

$$\tilde{T}_n = (1 - \alpha)T_n + \alpha T_{n-1}. \quad (4)$$

При цьому близькість розв'язків характеризується величинами

$$\delta T_n^{\max} = \frac{|T_{n-1}^{\max} - T_n^{\max}|}{T_n^{\max} - T_0^{\max}}, \quad T_n^{\max} = \max T_n.$$

При розв'язуванні конкретних задач крок за часом  $\Delta t$  вибирається значно більший за той, який передбачає метод покрокового інтегрування. Потім на цьому інтервалі часу із заданою точністю знаходитьться розв'язок нелінійної задачі методом змінних параметрів. Процес завершується при досягненні заданого значення часу  $t=t_4$ . Такий варіант ітераційного алгоритму дозволяє скоротити час розв'язання задачі і значно підвищити точність обчислень. В обох викладених методах вихідна нелінійна задача зводиться до розв'язування лінійних задач. Їх розв'язок знаходитьться методом скінчених елементів (МСЕ), який використовує варіаційне формулювання цих задач:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_1 + \delta \mathcal{E}_2 = 0. \quad (5)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = & \frac{1}{2} \iint \{C_{11}(\varepsilon_{xx}^0)^2 + 2C_{12}(\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{yy}^0) + \\ & + C_{22}(\varepsilon_{yy}^0)^2 + 4C_{44}(\varepsilon_{zz}^0)^2 + 2K_{11}(\varepsilon_{xx}^0 \kappa_{xx}) + \\ & + 2K_{12}(\varepsilon_{xx}^0 \kappa_{yy}) + 2K_{21}(\varepsilon_{yy}^0 \kappa_{xx}) + \\ & + 2K_{22}(\varepsilon_{yy}^0 \kappa_{yy}) + 8K_{44}(\varepsilon_{zz}^0 \kappa_{zz}) + D_{11}(\kappa_{zz})^2 + \} \end{aligned}$$

$$+2D_{12}(\kappa_{\alpha}\kappa_{\theta\theta})+D_{22}(\kappa_{\theta\theta}^2)+4D_{44}(\kappa_{\phi\phi}^2)-$$

$$-\omega^2\rho_1(u_0^2+v_0^2+w^2)+2\omega^2\rho_2(u_0\frac{\partial w}{\partial s}+$$

$$+v_0\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta})-\omega^2\rho_3[(\frac{\partial w}{\partial s})^2+(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta})^2]\}rdsd\theta,$$

$$\mathcal{E}_2=-\iint(P_u u_0+P_\theta v_0+P_\phi w)rdsd\theta-$$

$$-\int(N_u u_0+N_\theta v_0+N_\phi w-M_s\frac{\partial w}{\partial s}-$$

$$-M_\phi\frac{\partial w}{\partial \theta})dL.$$

Для знаходження температури дисипативного розігріву використаємо тривимірне варіаційне рівняння снергії для шаруватої оболонки [1]:

$$\iiint \left[ c_i^k \rho^k \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_i^k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \delta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + Q^k \delta T \right] rdsd\theta dz + \iint \alpha_i (T - T_c) \\ \delta T d\Sigma = 0,$$

де  $c_i^k$  – коефіцієнт теплоємності матеріалу  $k$ -го шару оболонки;  $\alpha_i$  – коефіцієнт теплообміну при конвективному теплообміні на поверхні  $\Sigma$  з середовищем з температурою  $T_c$ ;  $t$  – час нагріву;  $\lambda_i^k$  – коефіцієнти теплопровідності.

Для зведення тривимірної варіаційної задачі теплопровідності до системи двовимірних задач приймаємо, що нормальні складова тепло-вого потоку  $q_z$  змінюється по товщині пакету шарів по лінійному закону  $q_z = q_n + q_z z$ .

Розв'язок варіаційних задач знаходимо МСЕ з використанням дванадцятиузлових ізопараметричних чотирикутних елементів з апроксимацією переміщень і геометрії оболонки поліномами третього степеня в межах чотирикутника. Тангенціальні складові переміщень серединної поверхні оболонки в межах елемента апроксимуються кубічними поліномами.

В якості глобальної системи координат, тобто системи, в якій поєднуються всі кінцеві елементи, використовується циліндрична система координат  $(r, \theta, s)$ . В якості локальної системи координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і проводиться інтегрування, використовується нормалізована місцева система координат  $\xi, \eta$ . При цьому зв'язок між  $r, \theta, s$  і  $\xi, \eta$  визначаються залежностями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i s_i, r = \sum_{i=1}^{12} N_i r_i \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i \theta_i,$$

де  $r_i, \theta_i, s_i$  – вузлові значення координат.

Використаний елемент має 40 степенів свободи. Так як одержати явні залежності  $\xi = \xi(s, \theta), \eta = \eta(s, \theta)$  неможливо, то частинні похідні при визначені деформацій слід розраховувати по  $\xi, \eta$ , а потім одержані залежності розв'язувати відносно похідних по  $s, \theta$ . Представивши компоненти механічного навантаження, які діють в межах елемента, у вигляді розкладу

$$P = \sum_{i=1}^{12} P_i N_i \text{ і враховуючи відповідно вираз для}$$

переміщень і деформацій, з умовою стаціонарності функціоналу отримаємо комплексну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно тангенціальних переміщень, прогину і його похідних. Ця система розв'язується в комплексній області методом Гаусса без вибору головного елемента, що дозволяє з високою точністю отримати розв'язок систем великої розмірності без порушення ланцюжковості і симетричності їх структури. За знайденими вузловими значеннями тангенціальних переміщень, прогину і його похідних визначаються деформація і напруження.

#### 4. Результати чисельних розрахунків і їх аналіз

З використанням описаного підходу розв'язано задачу про демпфування коливань тришарової циліндричної панелі з шарнірним опирянням торців таких розмірів і з такими механічними властивостями внутрішнього шару:

$$a = b = 0.1 \text{ м}; r = 0.1 \text{ м}; \phi = \pi / 6; h = 0.0098 \text{ м};$$

$$\nu = 0.3636; \alpha = 0.5 \frac{\text{Ват}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}; \lambda = 0.47 \frac{\text{Ват}}{\text{м} \cdot \text{град}};$$

$$\rho = 938 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Зовнішні шари мають такі товщини, теплофізичні та механічні властивості:

$$\nu = 0.35; \alpha = 0.5 \frac{\text{Ват}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}; \lambda = 1.25 \frac{\text{Ват}}{\text{м} \cdot \text{град}},$$

$$\rho = 2800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; G = 0.3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, h = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Результати розрахунків представлено на Рис.1–3. На Рис.1,2 показана залежність температури дисипативного розігріву і амплітуди від частоти

в околі першого резонансу. На Рис.3 представлена аналогічна залежність коефіцієнта демпфування [3]. Суцільні лінії відповідають лінійній постановці задачі, коли не враховується залежність властивостей матеріалу від температури. Пунктирні лінії відповідають випадку, коли враховується фізична нелінійність, породжена дисипативним розігрівом і залежністю властивостей матеріалу від температури. Як бачимо, вплив фізичної нелінійності носить як якісний, так і кількісний характер. В околі резонасної частоти має місце стрибкоподібна зміна температурно – і амплітудно-частотних характеристик. В околі цієї частоти коефіцієнт демпфування різко зменшується. Вказані особливості впливу температури дисипативного розігріву потрібно враховувати при оцінці ефективності пасивного демпфування коливань оболонок обертання.

## 5. Висновки

З використанням ітераційних методів і методу скінчених елементів розв'язана спряжена задача про коливання і дисипативний розігрів циліндричної ізотропної панелі при шарнірному опиранні її торців. Показано, що температура дисипативного розігріву суттєво впливає на динамічні характеристики і на ефективність пасивного демпфування резонансних коливань циліндричної панелі.

## Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г., Михайліченко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
2. Григоренко Я.М., Мукосєд А.П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – Київ: Либідь, 1992. – 152.
3. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М: Мир, 1988. – 448с.

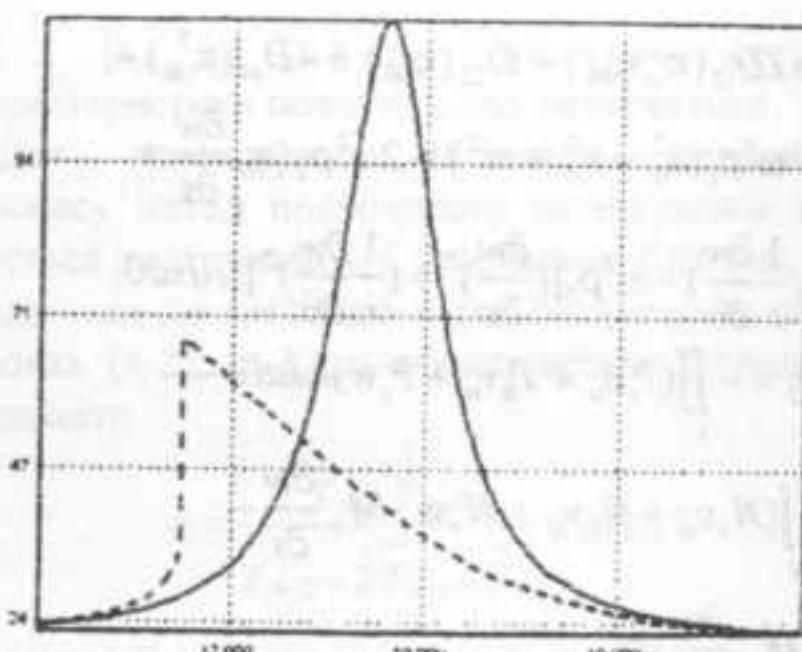


Рис.1. Температурно-частотна характеристика.

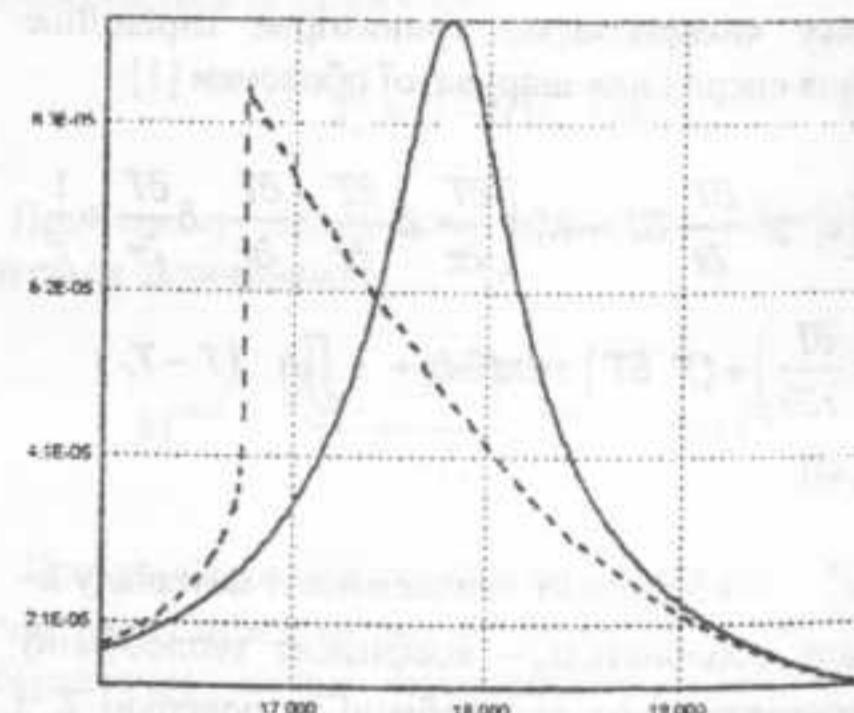


Рис.2. Амплітудно-частотна характеристика.

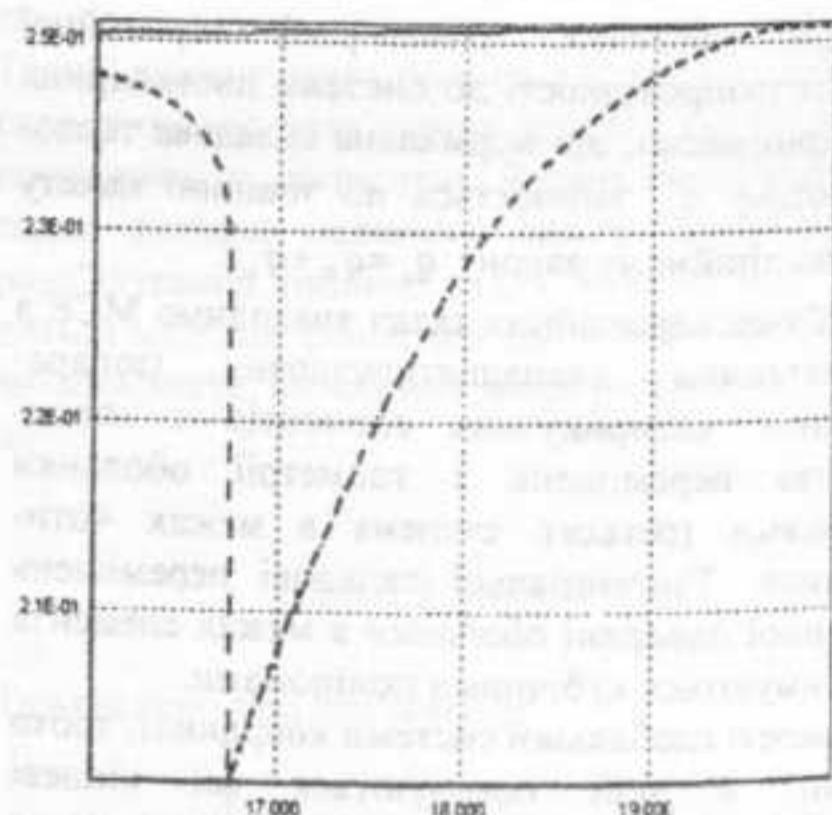


Рис.3. Залежність коефіцієнта демпфування від частоти.

Надійшла до редколегії 12.03.2009

УДК 517.9

Андрій П. Креневич, к.ф.-м.н., асистент,

Андрій Р. Богоніс, студент.

## Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь

В даній роботі розглядаються сингулярні диференціальні рівняння. Доведено теорему існування і єдності для цього класу рівнянь. Встановлено умови асимптотичної еквівалентності даних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь.

**Ключові слова:** сингулярне диференціальне рівняння, існування і єдність, асимптотична еквівалентність.

\*E-mail: [akrenevich@gmail.com](mailto:akrenevich@gmail.com)  
[Bahauh@gmail.com](mailto:Bahauh@gmail.com)

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

### 1 Вступ

Якісна теорія займає значне місце у загальних питаннях дослідження диференціальних рівнянь. Одним із найбільш важливих розділів даної теорії є стійкість. Цій проблематиці присвячено безліч робіт, серед яких [1]. Дані робота присвячена дослідженням якісної поведінки сингулярних диференціальних рівнянь. Проте, для її дослідження використано дещо інший підхід. А саме, відшукання системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої є подібною до поведінки розв'язків вихідної сингулярної системи. Таким чином дослідження вихідної системи зводиться до дослідження значно простішої системи. Такі системи будуть називатися асимптотично еквівалентними. Слід зауважити, що даний підхід, взагалі кажучи, не є новим. У [1] наведено теорему Левінсона, що встановлює достатні умови асимптотичної еквівалентності для систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботах [2–4] дане питання досліджено для стохастичних диференціальних систем.

У роботі отримано теорему існування і єдності для сингулярних диференціальних рівнянь, а також достатні умови асимптотичної еквівалентності для вищезгаданого класу рівнянь.

A.P. Krenovich, Cand. Sci.(Phys.- Math.),  
Assistant Professor,  
A. R. Bogonis, student.

## Research of asymptotic equivalence of singular differential equations

In this paper singular differential equations are considered. The theorem of existence and uniqueness for this type of equations is proved here. And also conditions of equivalence of these equations to simple differential equations were received

**Key Words:** singular differential equations, existence and uniqueness, asymptotic equivalence.

### 2 Теорема існування і єдності

Розглядається сингулярне диференціальне рівняння вигляду

$$d(x(t) - g(t, x(t))) = f(t, x(t))dt, \quad (1)$$

де  $x \in R^d$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $f(t, x), g(t, x)$  – неперервні за супутністю змінних функції, існують додатні сталі  $L_g, L_f, K_g, K_f$ , що для довільних  $x, y \in R^d$  виконуються нерівності

$$\|g(t, y) - g(t, x)\| \leq L_g \|y - x\|, \quad (2)$$

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L_f \|y - x\|, \quad (3)$$

$$\|g(t, y)\| \leq K_g (1 + \|y\|), \quad (4)$$

$$\|f(t, y)\| \leq K_f (1 + \|y\|). \quad (5)$$

**Теорема 1** Нехай виконуються нерівності (2)–(5), причому  $L_g < 1$ . Тоді для довільної початкової умови

$$x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

існує єдиний неперервний на  $[t_0, T]$  розв'язок рівняння (1).

Доведення теореми почнемо з доведення допоміжного твердження.

**Лема 1.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$d(y(t) - g(t, y(t))) = f(t)dt, \quad (7)$$

де  $g(t, y)$  задовільняє умовам теореми 1, а  $f(t)$  – неперервна на  $[t_0, T]$  функція. Тоді рівняння (7)

має єдиний розв'язок при довільній початковій умові

$$y(t_0) = y_0. \quad (8)$$

**Доведення.** Для доведення теореми перепишемо рівняння (7), що задовільняє початкову умову (8) в інтегральній формі:

$$y(t) = y_0 + g(t, y(t)) - g(t_0, y_0) + \int_{t_0}^t f(s) ds. \quad (9)$$

Покажемо, що дане рівняння (9) матиме єдиний розв'язок на  $[t_0, T]$ . Для цього введемо банахів простір неперервних на  $[t_0, T]$  функцій з нормою

$$\|\cdot\|_{B_T} = \sup_{[t_0, T]} \|\cdot\| < \infty. \quad (10)$$

В  $B_T$  введемо оператор  $\Phi$ , що діє за правилом

$$\begin{aligned} \Phi(y)(t) = y_0 + g(t, y(t)) - g(t_0, y_0) + \\ + \int_{t_0}^t f(s) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Покажемо, що  $\Phi : B_T \rightarrow B_T$ . Значення  $\Phi$  будуть неперервними функціями в силу неперервності функцій  $g, f$ . Оцінимо  $\|\Phi(y)(t)\|_{B_T}$ .

$$\begin{aligned} \sup_{[t_0, T]} \|\Phi(y)(t)\| = \sup_{[t_0, T]} \|y_0 + g(t, y(t)) - g(t_0, y_0) + \\ + \int_{t_0}^t f(s) ds\| \leq \sup_{[t_0, T]} (\|y_0\| + \|g(t, y(t))\| + \|g(t_0, y_0)\| + \\ + \|\int_{t_0}^t f(s) ds\|) \leq \|y_0\| + \|g(t_0, y_0)\| + \\ + K_g (1 + \sup_{[t_0, T]} \|y(t)\|) + \int_{t_0}^T \|f(s)\| ds < \infty. \end{aligned}$$

Покажемо, що  $\Phi$  є оператором стиску.

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_{B_T} = \sup_{[t_0, T]} \|y_0 + g(t, y(t)) - g(t_0, y_0) + \\ + \int_{t_0}^t f(s) ds - x_0 - g(t, x(t)) + g(t_0, x_0) - \int_{t_0}^t f(s) ds\| = \\ = \sup_{[t_0, T]} \|g(t, y(t)) - g(t, x(t))\| \leq L_g \|x - y\|_{B_T}. \end{aligned}$$

За умовою теореми  $L_g < 1$ . Отже оператор  $\Phi$  є оператором стиску в  $B_T$ . А значить оператор  $\Phi$  має єдину нерухому точку, а тому рівняння  $y(t) = \Phi(y)(t)$  має єдиний розв'язок.

Лему доведено.

Повернемось до доведення теореми. Для доведення існування розв'язку використаємо метод послідовних наближень.

Розглянемо ітераційну схему:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) = x_0 - g(t_0, x_0) + g(t, x_n(t)) + \\ + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $n \geq 0$

$$x_0(t) = x_0. \quad (13)$$

З леми 1 випливає, що рівняння (12) має єдиний розв'язок відносно  $x_{n+1}(t)$  на  $[t_0, T]$ , таким чином ітераційна схема (12)-(13) є коректною. Доведемо збіжність послідовності  $x_n(t)$ .

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| = \|g(t, x_1(t)) - g(t_0, x_0) + \\ + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds\| = \|g(t, x_1(t)) - g(t, x_0(t)) + \\ + g(t, x_0(t)) - g(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\| \leq \\ \leq L_g \|x_1(t) - x_0(t)\| + \|g(t, x_0(t))\| + \|g(t_0, x_0)\| + \\ + \|\int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\|. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} (1 - L_g) \|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \|g(t, x_0(t))\| + \\ + \|g(t_0, x_0)\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\| \\ \|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \frac{1}{1 - L_g} \{2K_g(1 + \|x_0\|) + \\ + \|\int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\} = K_1(x_0). \end{aligned}$$

Оцінимо для  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| = \|g(t, x_{n+1}(t)) - g(t, x_n(t)) + \\ + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, x_{n+1}(s)) ds\| \leq \\ \leq \|g(t, x_{n+1}(t)) - g(t, x_n(t))\| + \\ + \|\int_{t_0}^t (f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n+1}(s))) ds\| \leq \\ \leq L_g \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| + \\ + \|\int_{t_0}^t (f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n+1}(s))) ds\|. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$(1 - L_g) \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq L_g \int_{t_0}^t \|x_n(s) - x_{n+1}(s)\| ds.$$

Враховуючи  $1 - L_x > 0$ , отримаємо, що

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq L_1 \int_0^t \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| ds, \quad (14)$$

$$\text{де } L_1 = \frac{L}{1 - L_x}.$$

Таким чином, з останньої нерівності отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t_0, t]} \|x_{n+1}(s) - x_n(s)\| &\leq \\ &\leq L_1 \int_{t_0}^t \sup_{\tau \in [t_0, s]} \|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)\| ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Інтегруючи останню нерівність, отримаємо:

$$\sup_{s \in [t_0, t]} \|x_{n+1}(s) - x_n(s)\| \leq \frac{L_1^n T^n}{n!} K_1, \quad (16)$$

Таким чином, із збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{s \in [t_0, t]} \|x_{n+1}(s) - x_n(s)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_1^n T^n}{n!} K_1, \quad (17)$$

випливає рівномірна на  $[0, T]$  збіжність послідовності  $x_n(t)$  до деякого  $x(t)$ . Перейшовши до границі при  $n \rightarrow \infty$  в рівності (12), переконуємося, що  $x(t)$  є розв'язком задачі (1), (6). Доводимо єдиність неперервного розв'язку задачі (1), (6). Очевидно, що задача (1), (6) еквівалентна

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 - g(t_0, x_0) + g(t, x(t)) + \\ + \int_0^t f(s, x(s)) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Нехай  $x(t), y(t)$  два різних розв'язки рівняння (18). Тоді

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|g(t, x(t)) - g(t, y(t))\| + \\ &+ \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \leq \\ &\leq L_x \|x(t) - y(t)\| + L \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$(1 - L_x) \|x(t) - y(t)\| \leq L \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds$$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L_1 \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds.$$

З останньої нерівності можемо отримати, що

$$\sup_{s \in [0, T]} \|x(s) - y(s)\| \leq L_1 \int_0^t \sup_{\tau \in [0, s]} \|x(\tau) - y(\tau)\| ds.$$

З останньої нерівності та нерівності Гронуолла-Беллмана отримаємо

$$\sup_{s \in [0, T]} \|x(s) - y(s)\| = 0,$$

що і доводить теорему.

### 3 Асимптотична еквівалентність

Розглядається диференціальне рівняння вигляду

$$dx(t) = Ax(t)dt, \quad (19)$$

де  $x \in R^d$ ,  $t \geq t_0$  ( $t_0$  – фіксований момент часу).

Поруч із рівнянням (19) розглядається диференціальне рівняння вигляду

$$d(y(t) - g(t, y(t))) = (A + B(t))y(t)dt, \quad (20)$$

де  $g(t, x)$  – неперервна по обох змінних функція така, що існують сталі  $0 < L_x < 1$  та  $\beta > 0$

$$1) \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_x \|x - y\|, \quad (21)$$

$$2) \|g(t, x)\| \leq e^{-\beta t} (1 + \|x\|). \quad (22)$$

Зазначимо, що при вищеведених умовах розв'язки рівнянь (19) та (20) задовільняють теоремам існування і єдності на додатній півосі.

**Означення.** Будемо казати, що рівняння (20) асимптотично еквівалентне рівнянню (19), якщо кожному розв'язку рівняння (20) можна поставити у відповідність розв'язок рівняння (19) такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0.$$

Мас місце

**Теорема 2.** Нехай розв'язки рівняння (19) обмежені на півосі  $t \geq t_0$  і нехай виконується умова

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty.$$

Тоді рівняння (20) асимптотично еквівалентне рівнянню (19).

**Доведення.** Так як розв'язки рівняння (19) обмежені, то характерні корені  $\lambda(A)$  матриці  $A$  задовільняють нерівність  $\operatorname{Re}(\lambda(A)) \leq 0$ . Тому без обмеження загальності можемо вважати, що матриця  $A$  має квазідіагональний вид

$$A = \operatorname{diag}(A_1; A_2),$$

де  $A_1$  і  $A_2$  такі, що

$$\operatorname{Re} \lambda(A_1) < -\alpha < 0; \operatorname{Re} \lambda(A_2) = 0. \quad (23)$$

Тому матрицант системи розкладається у пряму суму [1].

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t),$$

причому

$$\|X_1(t)\| = \|e^{A_1 t}\| \leq \alpha e^{-\alpha t}, 0 \leq t < \infty, \quad (24)$$

$$\|X_1(t)\| = \|e^{At}\| \leq b, -\infty < t < \infty, \quad (25)$$

де  $a$  і  $b$  – деякі додатні сталі.

Запишемо розв'язок задачі (20) з початковою умовою  $y(t_0) = y_0$  в інтегральній формі, через матрицант системи (19).

$$y(t) = X(t-t_0)(y_0 - g(t_0, y_0)) + \\ + \int_{t_0}^t X(t-\tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau. \quad (26)$$

Покажемо обмеженість  $y(t)$ .

$$\|y(t)\| \leq + \|X(t-t_0)(y_0 - g(t_0, y_0))\| + \|g(t, y(t))\| + \\ + \int_{t_0}^t \|X(t-\tau)Ag(\tau, y(\tau))\|d\tau + \int_{t_0}^t \|X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)\|d\tau$$

Враховуючи оцінки (24), (25), та умови на функцію  $g$ , використовуючи лему Гронуолла-Беллмана [1, ст.108] легко показати існування сталої  $C(y_0, t_0) > 0$ , такої, що

$$\|y(t)\| \leq C(y_0, t_0), t \geq t_0. \quad (27)$$

Використовуючи еволюційну властивість матрицанта перепишемо рівняння (26) у вигляді

$$y(t) = g(t, y(t)) + X(t-t_0)[y_0 - g(t_0, y_0) + \\ + \int_{t_0}^t X_1(t_0-\tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau] + \\ + \int_{t_0}^t X_1(t-\tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \\ - \int_{t_0}^t X_2(t-\tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau - \int_{t_0}^t X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau.$$

З умов теореми та оцінки (27) випливає збіжність усіх невласних інтегралів, що входять до останньої рівності

Кожному розв'язку  $y(t)$  з початковою умовою  $y(t_0) = y_0$  поставимо у відповідність розв'язок  $x(t)$  з початковою умовою

$$x(t_0) = y(t_0) - g(t_0, y_0) + \int_{t_0}^t X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \\ + \int_{t_0}^t X_2(t_0-\tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Нарешті оцінимо норму:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|g(t, y(t))\| +$$

$$+ \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| \cdot \|A\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\|d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|y(\tau)\|d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \|X_2(t-\tau)\| \cdot \|A\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\|d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \|X_2(t-\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|y(\tau)\|d\tau.$$

Оцінюючи кожен доданок останньої нерівності подібно до [1, ст.159-161] та враховуючи умови теореми, отримуємо

$$\|x(t) - y(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Теорему доведено.

### Висновки

У роботі отримано результати щодо диференціальних рівнянь сингулярного типу. Для таких рівнянь отримано теорему існування і єдиності їх розв'язків на півосі. Також, у роботі отримано умови асимптотичної еквівалентності даного класу рівнянь звичайним диференціальним рівнянням. Дані результати стануть у нагоді при дослідженні стійкості сингулярних рівнянь, а також при дослідженні інших якісних властивостей розв'язків. У подальшому є перспектива, узагальнення даних результатів на більш широкий клас просторів та рівнянь, наприклад, дослідити умови асимптотичної еквівалентності для сингулярних диференціальних рівнянь у гільбертових просторах.

### Список використаних джерел

- Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. – 472 с.
- Креневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // УМДЖ. – 2006. – 58, №10. – С.1368–1384.
- Креневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків нелінійних стохастичних систем Іто // Нелінійні коливання. Інститут математики НАН України. – 2006. – 9, №2. – С.213–220.
- Krenevych A. Asymptotic Equivalence Of the solutions of The Linear Stochastic Ito Equations in the Hilbert space // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – 13(29), №1–2. – P.103–109.

Подано до друку 15.01.2009

УДК 539.3

Лимарченко\* О.С., д.т.н., проф.,  
Ружицький І.С., аспірант

## Побудова координатних функцій для нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі

Для задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі побудовано систему функцій, яка на відміну від форм власних коливань рідини, додатково задовільняє кінематичній граничній умові неперетікання крізь стінку резервуару, куди можуть досягати гребені нелінійних хвиль. Ця умова є наслідком умови розв'язності нелінійної задачі.

Для трьох випадків еліптичного резервуару (сфера, еліпсоїд стиснений та розтягнутий відносно вертикальної осі) побудовано системи координатних функцій і для них визначені похибки задовільнення граничних умов.

**Ключові слова:** рідина, еліптичний резервуар, похибки виконання граничних умов.

E-mail: olelim2000@yahoo.com

Стаття представлена кафедрою механіки суцільних середовищ.

**Вступ.** Розглянуто задачу про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі еліптичної форми. При розв'язанні такого класу задач варіаційним методом суттєвою складністю є побудова розкладів розв'язків, які б задовільняли кінематичним умовам задачі і умовам її розв'язності. Відомо, що при використанні алгоритмів, побудованих на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, динамічні умови і рівняння руху одержуються як природні, а кінематичним граничним умовам і умовам розв'язності задачі слід задовільнити заздалегідь.

Розв'язання задач про коливання рідини з вільною поверхнею в нециліндричних резервуарах суттєво пов'язане з проблемою виконання умов розв'язності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа. Поглиблений аналіз цієї умови [1, 2], яка з механічної точки зору пов'язана з умовою збереження об'єму рідини, вказує на те, що для ефективного розв'язання нелінійної задачі необхідно з високою точністю задовільнити умовам збереження об'єму на вільній поверхні, а також граничним умовам неперетікання не лише на змочуваній в незбуреному стані бічної поверхні резервуару  $\Sigma_0$ , а і на деякому її продовженні

O.S. Limarchenko, doctor of engineering, professor  
Ruzhitskiy I.S., postgraduate student

## Construction of basis functions for nonlinear problem of dynamics of liquid with a free surface in elliptic reservoir

For the problem about nonlinear oscillations of liquid with a free surface in elliptic reservoir we constructed a system of functions, which in contrast to normal modes of liquid oscillations supplementary satisfies nonflowing kinematic boundary condition on tank walls, where crests of nonlinear waves can reach. This condition is the consequence of the solvability condition for the nonlinear problem. For three variants of elliptic reservoir (sphere, ellipsoids compressed and stretched relative to vertical direction) we constructed systems of basis functions and determined for them errors of realization of boundary conditions.

**Key Words:** liquid, elliptic reservoir, errors of boundary conditions.

$\Delta\Sigma$  (рис. 1), куди можуть досягати гребені хвиль в процесі збуреного руху.

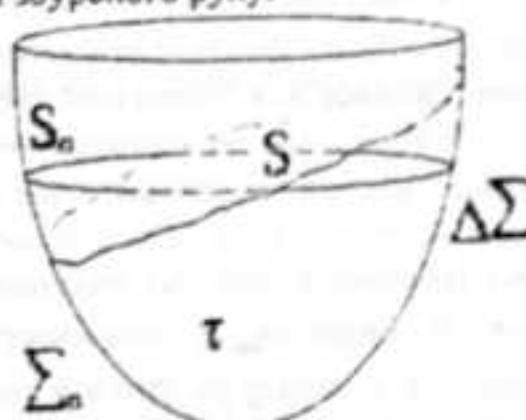


Рис. 1

Дослідження групи споріднених задач для випадку резервуарів конічної, сферичної та параболічної форм показало [1, 2], що точність задовільнення кінематичним граничним умовам і умовам розв'язності визначає коректність постановки задачі та стійкість реалізації обчислювальних алгоритмів, тому їх задовільнення з максимальною можливою точністю є принциповим.

Розглянемо задачу про коливання ідеальної нестисливої рідини в еліптичному резервуарі. Для опису динаміки рідини в резервуарі введемо

недекартову параметризацію області, яку займає рідина

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \quad \beta = \frac{z}{H},$$

де  $r = f(z)$  є рівнянням твірної тіла обертання (еліпса).  $H$  – глибина заповнення резервуару,  $r, \theta, z$  – циліндричні координати,  $\alpha, \theta, \beta$  – криволінійні координати системи, в якій область, що займає рідина, набуває циліндричної форми, що надалі зумовлює можливість представлення рівняння вільної поверхні рідини у вигляді, розв'язаному відносно вертикальної координати  $\beta = \xi(\alpha, \theta, r)$ .

Важливим етапом розв'язання розглянутої задачі є представлення розкладу потенціалу швидкостей і збурень на вільній поверхні у вигляді:

$$\varphi = \sum_i b_i(t) \phi_i(\alpha, \beta) T_i(\theta);$$

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i(t) \phi_i(\alpha) T_i(\theta),$$

$$\text{де } \phi_i = \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} \right|_{\beta=0}.$$

Для чисельної реалізації використаємо як координатні функції такі фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа

$$\varphi \sim w_k^{(m)}(r, z) \begin{cases} \sin m\theta, \\ \cos m\theta, \end{cases}$$

де  $w_k^{(m)}(r, z)$  є системою гармонічних поліномів [3], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи координат, перетвореними до циліндричної системи. Ці функції взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення [3]. Базис  $\phi_{km}$  є двопараметричним, тут  $m$  – параметр розкладу по кутовій координаті,  $k$  – параметр розкладу по радіусу. Оскільки для тіла обертання відділення кутової координати виконується точно, фактично надалі буде розв'язуватися окремо задача для кожного фіксованого  $m$ . Базисні функції є гармонічними, повними на вільній поверхні, проте не задовільняють кінематичним граничним умовам на твердих стінках і на вільній поверхні та умовам розв'язності задачі.

Класична задача про визначення частот і форм вільних коливань рідини має вигляд:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Gamma;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \varphi \text{ на } S_0,$$

а її варіаційне формулювання:

$$\delta I = 0, \text{ де } I = \int_0^T (\nabla \varphi)^2 dt - \lambda \int_{S_0} \varphi^2 ds.$$

Ця задача розв'язується на основі методу Рітца [4] і зводиться до розв'язання алгебраїчної задачі на власні значення

$$Ax - \lambda Bx = 0,$$

для якої коефіцієнти визначаються у вигляді квадратур від базисних функцій [1–3].

Принциповою особливістю задачі (1) є те, що в ній не накладається ніяких обмежень на рух рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні (умова неперетікання на  $\Delta\Sigma$  не входить у постановку задачі). Ця властивість не є суттєвою для лінійного формулювання задачі, проте вона вказує на обмежені можливості використання форм коливань для декомпозиції розв'язків нелінійної задачі. Для розв'язання нелінійної задачі з подоланням такого недоліку був розроблений метод допоміжної області [1, 2], що був успішно застосований для розв'язання задач з резервуарами нециліндричної форми. При цьому за координатні функції приймаються не форми коливань рідини з вільною поверхнею, а близькі до них функції, які додатково задовільняють умовам розв'язності задачі. За методом допоміжної області вводиться додаткове збільшення глибини заповнення резервуару (куди можуть досягати гребені хвиль). Далі на основі класичного методу розв'язується задача для області  $t + \Delta t$ , де  $\Delta t$  вибирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні стінки бака, що змочується, з урахуванням очікуваних амплітуд збурення вільної поверхні. Аналіз результатів застосування методу допоміжної області показав значне ослаблення впливу особливої точки на контурі і покращення виконання умов неперетікання на продовженні стінок резервуара. При цьому особливості розв'язку проявляються вище рівня реальної вільної поверхні, а в околі контуру  $L = S_0 \cup \Sigma_0$  (індекс „0“ відповідає незбуреному стану) розв'язок буде регулярним.

Чисельні приклади показали високу ефективність описаної процедури. Цей алгоритм застосовувався для одержання частот коливань рідини в баках складеної форми. Зміни частот цілком узгоджуються з загальними теоремами аналітичної механіки: внесення додаткових механічних в'язей приводить до збільшення частот коливань [5].

Для оцінки точності отриманого розв'язку приймемо відносну похибку у вигляді

$$\delta = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} / \max \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_0} .$$

На основі методу допоміжної області раніше були побудовані координатні функції для розв'язання задачі про нелінійні коливання рідини в конічному, сферичному, параболічному та циліндричному (для порівняння) баках. Отримані функції з точністю  $10^{-5}$  і вище задовільняли умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку  $10^{-3}$  на продовжені стінки над вільною поверхнею.

Розглянемо застосування цього методу для випадку резервуара у формі еліпсоїда обертання. Еліпсоїд отримується стисканням або розтягненням сфери по вертикальній. Умовно будемо

називати такі еліпсоїди стисненим і розтягнутим. Для обчислень розглянемо три приклади:

- 1) розтягнутий еліпсоїд  $a = 1, b = 1.4, H = 0.7$
- 2) сфера  $a = 1, b = 1, H = 0.5$
- 3) стиснений еліпсоїд  $a = 1, b = 0.7, H = 0.35$

Розглянемо результати розв'язання задачі для еліпсоїдів і для контрольного варіанта сфери для форми  $m=1, k=1$  та  $m=2, k=1$  за методом допоміжної області. Для порівняння в дужках приведені результати, одержані за класичним методом.

Результати розв'язку задачі приведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Форма резервуару	$a = b = R$ сфера	$a < b$ розтягнутий еліпс	$a > b$ стиснений еліпс			
Номер форми	$m=1, k=1$	$m=2, k=1$	$m=1, k=1$	$m=2, k=1$		
Частотний параметр	1.207783 (1.207710)	2.307694 (2.307513)	1.467960 (1.467925)	2.685332 (2.685292)	0.928072 (0.927943)	1.846582 (1.846137)
1. Відносна похибка при $z=0.15$	0.001075 (0.247945)	0.001217 (0.255330)	0.000699 (0.104320)	0.000643 (0.081021)	0.002428 (0.439198)	0.002876 (0.468619)
2. Відносна похибка при $z=0$	0.000136 (0.000296)	0.000165 (0.000301)	0.000102 (0.000272)	0.000089 (0.000187)	0.000317 (0.000186)	0.000382 (0.000193)
3. Відносна похибка при $z=-0.15$	0.000009 (0.000043)	0.000037 (0.000042)	0.000023 (0.000035)	0.000024 (0.000022)	0.000049 (0.000025)	0.000011 (0.000021)

Проаналізуємо виконання граничних умов неперетікання на стінках бака у характерних точках: 1 – точка відповідає незбуреній вільній поверхні рідини, 2 – на 0,15 нижче незбуреної вільній поверхні, 3 – на 0,15 вище незбуреної вільній поверхні, куди можуть досягати гребені хвиль.

Чисельні дані свідчать, що метод допоміжної області дає більш точні результати задовільнення умов неперетікання, як на  $\Sigma_0$  (приблизно в два рази), так і особливо на  $\Delta\Sigma$  (приблизно в 250 разів), де класичний метод дає незадовільні результати. При цьому частотні параметри координатних функцій, визначені за методом Релея, відрізняються від частот коливань з точністю до  $10^{-5}$ . Негативні результати, пов'язані з наявністю кутової точки, практично не проявляються, оскільки за методом допоміжної області реальна кутова точка стає внутрішньою точкою області  $\tau + \Delta\tau$ . Зауважимо також, що похибка визначення форм коливань для випадку розтягнутого еліпсоїда виходить більшою ніж у випадку стисненого еліпсоїда, що визначається збільшенням нахилів стінок до вертикальі.

Відмітимо також, що похибки дано в безрозмірних величинах, що відповідають одиничній

амплітуді. При розв'язанні реальних задач похибки будуть в 5–10 разів менше, оскільки амплітуди не перевершують 0,15–0,2.

По аналогії з розв'язками задач для інших форм резервуарів будемо для розв'язання нелінійної задачі застосовувати такі координатні функції:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_{11} \sin \theta; \quad \psi_2 = \psi_{11} \cos \theta; \\ \psi_3 &= \psi_{01}; \quad \psi_4 = \psi_{21} \sin 2\theta; \\ \psi_5 &= \psi_{21} \cos 2\theta; \quad \psi_6 = \psi_{02}; \\ \psi_7 &= \psi_{31} \sin 3\theta; \quad \psi_8 = \psi_{31} \cos 3\theta; \\ \psi_9 &= \psi_{12} \sin \theta; \quad \psi_{10} = \psi_{12} \cos \theta,\end{aligned}$$

де  $\psi_{mk}$  – розв'язок задачі про уточнене визначення форми коливань рідини кутового номера  $m$ , якому відповідає  $k$ -е власне число (прийнято розташування координатних функцій відповідно до зростання власних чисел).

Приведемо результати визначення похибки виконання умови неперетікання для побудованих розв'язків, які надалі будуть використані для розв'язання задачі у випадку розтягнутого еліпсоїда:  $a = 1, b = 1.4, H = 0.7$ . Результати розв'язку задачі приведені у таблиці:

Таблиця 2

Номер форми	Частотний параметр	$\delta(z=0,15)$	$\delta(z=0)$	$\delta(z=-0,15)$
$m=1, k=1$	1.467960	0.000699	0.000102	0.000023
$m=1, k=2$	1.467960	0.003893	0.000565	0.000130
$m=0, k=1$	3.836347	0.000824	0.000108	0.000024
$m=0, k=2$	3.836347	0.009087	0.001208	0.000310
$m=2, k=1$	2.685332	0.000643	0.000089	0.000024
$m=3, k=1$	3.840743	0.000540	0.000070	0.000021

Результати свідчать про те, що одержані координатні функції з прийнятною точністю задовільняють умовам неперетікання як на бічній поверхні ( $\delta \sim 10^{-4}$ ), що відповідає незбуреній рідині, так і на її певному продовженні, куди можуть досягти гребені нелінійних хвиль ( $\delta \sim 10^{-3}$ ). Виконання цих умов пов'язане з виконанням умов розв'язності задачі і кінематичних обмежень і повинне бути зроблене до розв'язання задачі варіаційним методом. Побудовані координатні функції будуть використані при дослідженні нелінійних задач динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптических резервуарах.

**Висновки.** Розглянуто застосування модифікованої схеми визначення частот і форм коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарах еліптичної форми. На відміну від класичної постановки задачі додатково задовільняються умови розв'язності задачі. Показано, що виконання цих умов приводить до підвищення точності роботи різних обчислювальних схем. Зокрема, це дозволяє значно покращити точність виконання граничних умов задачі, особливо в тій частині бічної поверхні, куди можуть досягти гребені нелінійних хвиль (в 100–500 разів) і виключити негативні ефекти, пов'язані з наявністю особливих точок на контурі контакта газ–тіло–рідина. Точність визначення частот погіршується лише на  $10^{-4}$ , характер зміни побудованих розв'язків на вільній поверхні є близьким до розв'язку класичної задачі про визначення частот і форм коливань. Вказані властивості дозволяють надалі використовувати ці координатні функції як „покращені” форми коливань. Побудовані системи координатних функцій з високою точністю задовільняють кінематичним граничним умовам задачі і можуть бути використані як координатні функції при побудові нелінійних дискретних моделей руху ідеальної рідини в резервуарі еліптичної форми.

### Список використаних джерел

- Лимарченко О.С., Ясинський В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ». 1997. – 338 с.
- Лимарченко О.С., Семенова И.Ю. Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения // Комплексный анализ и течії з вільними границями. Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. Інститут математики НАН України. 2006. – 3. – №4. – С. 374 – 388.
- Нарішанов Г.С., Докучаєв И.А., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью – М: Машиностроение, 1977. – 208 с.
- Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике – М: Наука, 1970. – 512 с.
- Кільчевський Н.А. Курс теоретичної механіки. – 2. – М.: Наука, 1977. – 543 с.

Надійшла до редколегії 11.02.2009

УДК 539.3

Володимир І. Острик, д. ф.-м. н., доцент,  
Андрій Ф. Улітко, д. ф.-м. н., проф.,  
Ігор А. Улітко, к. ф.-м. н.

## Вдавлювання пружного клиноподібного індентора в пружний півпростір

В умовах пласкої деформації розглянуто гладкий контакт клина і півпростору з різних матеріалів. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа знайдено точний розв'язок задачі. Отримано розподіл контактних напружень, нормальні переміщення поверхні півпростору. Побудовано лінії статичних максимальних дотичних напруження. DSMT4 або перерізі пружного півпростору.

**Ключові слова:** індентор, клин, контакт, напруження, факторизація.

E-mail: ostrik\_v@rambler.ru, ulitko@univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Мелешко В. В.

### 1 Вступ

Задача про гладкий контакт абсолютно жорсткого клина (індентора) і пружного півпростору (рис. 1) зводиться до сингулярного інтегрального

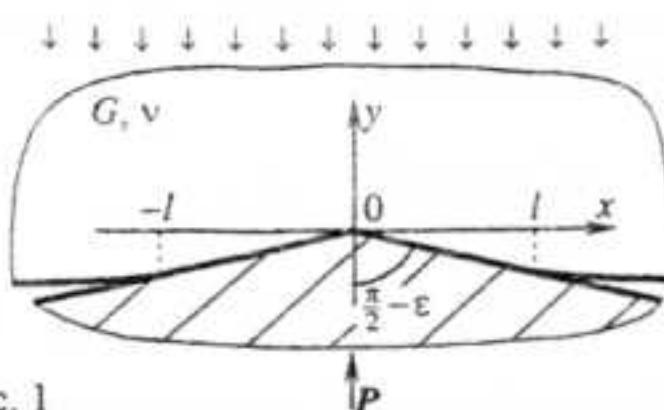


Рис. 1

рівняння і мас елементарний розв'язок. Зокрема, контактні напруження виражаються у вигляді [1]

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = -\frac{2G\varepsilon}{\pi(1-\nu)} \ln \frac{1+\sqrt{1-(x/l)^2}}{|x|/l} \quad (-l \leq x \leq l), \quad (1)$$

де  $G$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона півпростору,  $\varepsilon$  – кут зазору між поверхнями клина і півпростору.

Із сингулярного інтегрального співвідношення [1, 2]

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{y=0} = 2(1-\nu) \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{p(s)}{s-x} ds, \quad p(x) = -\frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=0}, \quad (2)$$

V. I. Ostrik, D. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof.,  
A. F. Ulitko, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor,  
I. A. Ulitko, Cand. Sci (Phys.-Math.)

## Press in of elastic wedge-shaped indenter on elastic half-space

Smooth contact of wedge and half-space from different materials provided that plane deformation is studied. With use of Wiener – Hopf method the exact solution of problem was found. The stress intensity factor, normal displacements of surface of half-space are obtained. The lines of constant maximum tangential stress in the normal section of elastic half-space are constructed.

**Key Words:** indenter, wedge, contact, stress, factorization.

яке виконується на межі півпростору за умови відсутності дотичних напружень, знаходяться нормальні переміщенняграничних точок півпростору поза областью контакту

$$u_y \Big|_{y=0} = -\varepsilon l - \frac{\varepsilon}{\pi^2} \int_{-l}^l \ln \frac{1+\sqrt{1-(s/l)^2}}{|s|/l} \cdot \ln \left| \frac{s-x}{s+l} \right| ds \quad (|x| > l), \quad (3)$$

якщо вважати, що в області контакту  $u_y \Big|_{y=0} = -\varepsilon |x| \quad (-l \leq x \leq l)$ .

Через функцію контактного тиску  $p(x) \quad (-l \leq x \leq l)$  напруження всередині півпростору ( $y > 0$ ) виражуються наступним чином [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{2G} \Big|_{y=0} &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-s)^2 p(s)}{[(x-s)^2 + y^2]^2} ds, \\ \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=0} &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-l}^l \frac{p(s)}{[(x-s)^2 + y^2]^2} ds, \\ \frac{\tau_{xy}}{2G} \Big|_{y=0} &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-s)p(s)}{[(x-s)^2 + y^2]^2} ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і максимальні дотичні напруження  $\tau_{max}$  у кожній точці півпростору визначаються формулами [3]

$$\sigma_{1,2} = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi \pm \tau_{xy} \sin 2\psi, \\ \tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \operatorname{tg} 2\psi = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y), \quad (5)$$

де  $\psi$  – кут між напрямками головних напружень і осями координат. Ділянки, на яких діють напруження  $\tau_{\max}$ , нахилені до ділянок з головними напруженнями під кутом  $45^\circ$ .

Пружність клиноподібного індентора можна наблизено врахувати, як це зроблено в [1], якщо клин замінити пружним півпростором. Цей прийом, який використовується в теорії Герца контакту пружних тіл з гладкими поверхнями, призводить до того, що у формулі (1) множник  $2G/(1-v)$  замінюється на зведений модуль пружності

$$E^* = \frac{2}{(1-v_1)/G_1 + (1-v_2)/G_2} \quad (6)$$

матеріалів клину з пружними сталими  $G_1, v_1$  і півпростору зі сталими  $G_2, v_2$ . Формула (3) для перемішень  $u_y|_{y=0}$  при цьому лишається без змін.

Нижче задача про гладкий контакт пружного клиноподібного індентора і пружного півпростору розглядається у точній постановці. Раніше [4, 5] була розглянута більш загальна задача про контакт двох пружних клинів, які попередньо дотикаються своїми ребрами. Порівняно з [4, 5], де було знайдено лише контактні напруження, тут наводиться більш вичерпний розв'язок з визначенням нормальніх перемішень поверхні півпростору і максимальних дотичних напруження у внутрішніх точках пружного півпростору.

## 2 Постановка задачі

Розглянемо пружний клин з кутом піврозхибу  $\alpha$ , який початково дотикається ребром межі півпростору, так що бісекторна площа клина є перпендикулярною до межі півпростору (рис. 2, а). З нормальними до ребра клина перерізами клина і півпростору зв'яземо місцеві полярні системи координат  $r, \theta_j$  ( $0 \leq r < \infty, -\alpha_j \leq \theta_j \leq \alpha_j, j=1, 2; \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \pi/2$ ). Під дією стискаючого навантаження з головним вектором  $P$ , яке прикладене до клина і півпростору на нескінченності, клин вдавлюється у півпростір, утворюючи область контакту  $0 \leq r \leq l$  ( $\theta_j = \pm \alpha_j, j=1, 2$ ), ширина  $2l$  якої заздалегідь невідома (рис. 2, б).

Змішані крайові умови на поверхнях клина і півпростору мають вигляд

$$u_s^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha} - u_s^{(2)}|_{\theta_2=\mp\pi/2} = \pm \varepsilon r,$$

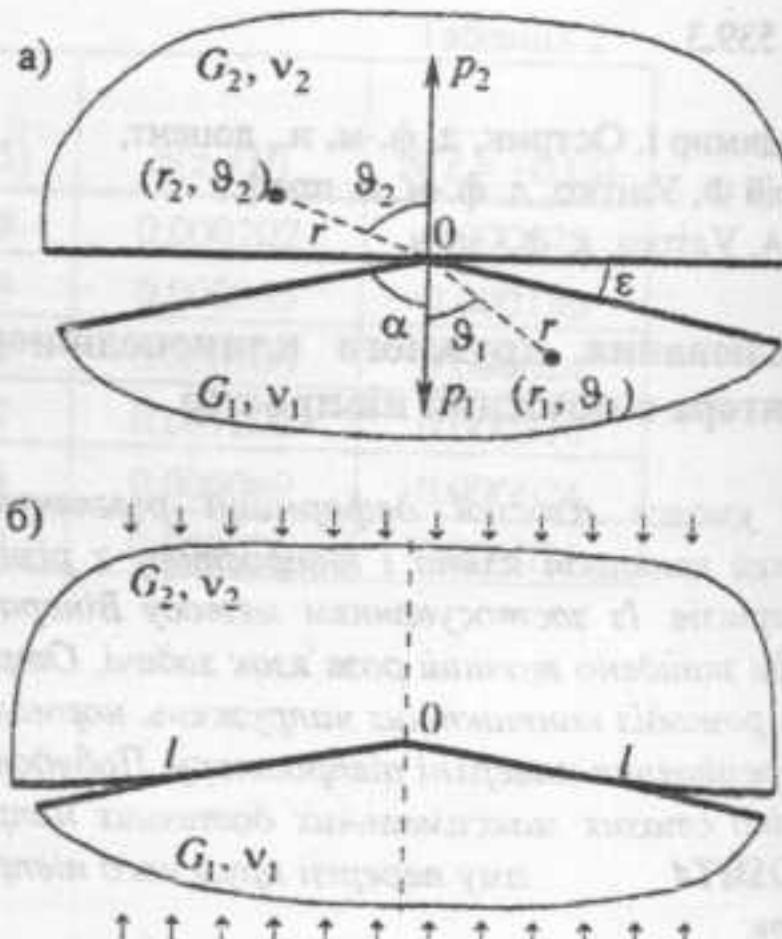


Рис. 2

$$\sigma_s^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha} = \sigma_s^{(2)}|_{\theta_2=\mp\pi/2} \quad (0 \leq r \leq l),$$

$$\sigma_s^{(j)}|_{\theta_j=\pm\alpha_j} = 0 \quad (r > l), \quad \tau_{rs}^{(j)}|_{\theta_j=\pm\alpha_j} = 0 \quad (r > 0), \quad (7)$$

де  $\varepsilon = \pi/2 - \alpha$ ,  $j=1, 2$ ; переміщення та напруження з верхнім індексом 1 відносяться до клину, з індексом 2 – до півпростору.

Для визначення ширини області контакту служить умова рівноваги

$$2 \int_0^l \sin \beta(r) \sigma_s^{(1)}|_{\theta_1=\alpha} dr = -P,$$

$$\beta(r) = \alpha + \frac{1}{r} u_s^{(1)}|_{\theta_1=\alpha} = \pi/2 - \frac{1}{r} u_s^{(2)}|_{\theta_2=-\pi/2}. \quad (8)$$

Кут контакту  $\beta(r)$ , взагалі кажучи, змінюється уздовж області контакту, однак, як показують подальші обчислення, його можна вважати сталим.

## 3 Інтегральне рівняння задачі

Подання для окружних перемішень і напруження на межах клина і півпростору через невідому функцію контактних напружень  $\sigma(r)$  ( $0 < r \leq l$ ) отримаємо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна у вигляді [5]

$$u_s^{(j)}|_{\theta_j=\pm\alpha_j} = \mp 2(1-v_j) \frac{G_j}{G_i} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\cos 2\alpha_j s - \cos 2\alpha_j}{s(\sin 2\alpha_j s + s \sin 2\alpha_j)} a(s) r^{-s} ds.$$

$$\frac{\sigma_3^{(j)}}{2G_1} \Big|_{\delta_1=\pm\alpha_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds \quad (j=1, 2),$$

$$a(s) = \int_0^l \sigma(y) y^s dy, \quad \sigma(r) = \frac{\sigma_3^{(1)}}{2G_1} \Big|_{\delta_1=\pm\alpha_1} \quad (0 < r \leq l),$$

$$-1 < c < 0. \quad (9)$$

Подання розв'язку (9) забезпечують виконання всіх краївих умов (7) окрім першої. Задовільнивши першу умову (7), отримаємо рівняння

$$\frac{1-v_1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{\Delta(s)} a(s) r^{-s} ds = \varepsilon r \quad (0 \leq r \leq l), \quad (10)$$

в якому

$$\lambda(s) = (\cos 2\alpha s - \cos 2\alpha) \sin \frac{\pi s}{2} +$$

$$+ \kappa (\sin 2\alpha s + s \sin 2\alpha) \cos \frac{\pi s}{2},$$

$$\Delta(s) = (\sin 2\alpha s + s \sin 2\alpha) \sin \frac{\pi s}{2},$$

$$\kappa = \frac{(1-v_2)G_1}{(1-v_1)G_2}. \quad (11)$$

Підставимо вираз для  $a(s)$  із (9) у рівняння (10), візьмемо  $s = -it$  і змінимо порядок інтегрування. Виконавши заміни

$$r = le^{-\frac{s}{2}}, \quad y = le^{-\eta}; \quad \varphi(\eta) = \sigma(le^{-\eta})e^{-\eta}, \quad (12)$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad (13)$$

де

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{K(\tau)}{-i\tau} e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau,$$

$$K(z) = \frac{-iz\lambda(-iz)}{\Delta(-iz)}, \quad f(\xi) = \frac{\varepsilon}{2(1-v_1)} e^{-\frac{\xi}{2}}. \quad (14)$$

#### 4 Розв'язання інтегрального рівняння

Інтегральне рівняння (14) після диференціювання і застосування інтегрального перетворення Фур'є зводиться [5] до функціонального рівняння Вінера – Гопфа

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \quad (15)$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f'(\xi) e^{i\xi z} d\xi = \frac{\varepsilon}{2i\sqrt{2\pi}(1-v_1)(z+i)}$$

відносно функцій

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi(\xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad (16)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty [k(\xi - \eta) + \frac{1}{2} K(0)] \varphi(\eta) d\eta.$$

Факторизуючи коефіцієнт і праву частину функціонального рівняння

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad F^+(z)/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z),$$

$$K^+(z) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + iz/s_n}{(1 - iz/\delta_n)(1 - iz/(2n))},$$

$$K^-(z) = \frac{K^+(-z)}{K(0)}, \quad K(0) = 2 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\kappa}{\pi} \right).$$

$$f^+(z) = \frac{m^{(1)}\varepsilon}{2i\sqrt{2\pi}(m^{(1)}-1)K^+(-i)} \cdot \frac{1}{z+i}, \quad (17)$$

де  $s_n$ ,  $\delta_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ;  $s_1 = -1$ ) – корені рівняння  $\lambda(s) = 0$  і  $\sin 2\alpha s + s \sin 2\alpha = 0$  із півплощин  $\operatorname{Re} s < 0$  і  $\operatorname{Re} s > 0$  відповідно, отримуємо

$$\Phi^+(z) = \frac{\varepsilon}{2i\sqrt{2\pi}(1-v_1)K^+(-i)K^+(z)(z+i)}. \quad (18)$$

За допомогою оберненого перетворення Фур'є із співвідношення (16) для функції  $\Phi^+(z)$  з урахуванням (18), першої формули (17) і останньої формули (14) знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (13)

$$\varphi(\xi) = \frac{\varepsilon}{4\pi(1-v_1)K^+(-i)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\Delta(-i\tau)K^+(\tau)}{\tau(\tau+i)\lambda(-i\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau. \quad (19)$$

#### 5 Контактні напруження і нормальні переміщення поверхні півпростору

Перетворюючи інтеграл із (19) за теорією лішків (окрім простих полюсів у точках  $\tau = is_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$  підінтегральна функція має подвійний полюс у точці  $\tau = is_1 = -i$ ) і враховуючи заміни (12), (9), знаходимо розподіл контактних напружень

$$\frac{\sigma_3^{(1)}}{2G_1} \Big|_{\delta_1=\pm\alpha} = \frac{\varepsilon}{1-v_1} \left[ \frac{1}{2\alpha + \pi\kappa} \left( \ln \frac{r}{l} - 1 - \gamma \right) - \frac{1}{2K^+(-i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)K^+(is_k)}{s_k(s_k+1)\lambda'(s_k)} \left( \frac{r}{l} \right)^{-s_k-1} \right] (0 < r \leq l),$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{s_n-1} + \frac{1}{\delta_n+1} + \frac{1}{2n+1} \right). \quad (20)$$

В околі ребра клина ( $r=0$ ) контактні напруження необмежені з логарифмічною особливістю.

Нормальні переміщення поверхні півпростору згідно з (9), (16), (18) запишемо у вигляді

$$u_3^{(2)} \Big|_{\beta=\pm\pi/2} = \pm \frac{\kappa \varepsilon l}{K^*(-i)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{-\infty+i\varepsilon} \frac{\operatorname{ch}(\pi\tau/2)}{\tau(\tau+i)K^+(\tau)} e^{-i\tau l} d\tau. \quad (21)$$

Після перетворень за теорією лишків отримуємо

$$\begin{aligned} u_3^{(2)} \Big|_{\beta=\pm\pi/2} &= \pm \frac{\pi \kappa \varepsilon}{2\alpha + \pi \kappa} r \pm \frac{\kappa \varepsilon l}{K^*(-i)} \times \\ &\times \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta(s_k) \operatorname{ctg}(s_k/2)}{s_k^2(s_k+1)\lambda'(s_k)} K^-(is_k) \left(\frac{r}{l}\right)^{-s_k} \quad (0 \leq r \leq l), \\ u_3^{(2)} \Big|_{\beta=\pm\pi/2} &= \pm \frac{2\kappa \varepsilon l}{\pi K^*(i)} \left[ \ln \frac{r}{l} + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{s_n} + \frac{1}{\delta_n} + \frac{1}{2n} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r/l)^{-2k}}{2k(2k+1)K^*(-2ik)} \right] \quad (l < r < \infty). \quad (22) \end{aligned}$$

Перетворюючи інтеграл із (8) за умови незмінності кута  $\beta$  знаходимо підвищену області контакту

$$l = \frac{(1-v_1)K^*(i)P}{2\varepsilon G_1 \sin \beta}. \quad (23)$$

Напруження всередині півпростору визначаються за формулами (4), (5), де  $G = G_2$ ,  $p(x) = p(-x) = \sigma_3^{(1)} / (2G_1)$ .

## 6 Результати обчислень

Безрозмірні контактні напруження  $\bar{\sigma} = -\sigma_3^{(2)} / (2G_2\varepsilon)$  і нормальні переміщення поверхні півпростору  $\bar{u} = u_3^{(2)} / (\varepsilon l)$  обчислені у випадку вдавлювання алмазного індентора у залізну основу ( $v_1 = 0,22$ ,  $v_2 = 0,28$ ,  $G_1/G_2 = 390/82$ ) і наведені на рис. 3, 4.

Криві 1, 2, 3 відповідають значенням  $\alpha = 30^\circ$  ( $\bar{l} = 2G_2\varepsilon l / ((1-v_2)P) = K^*(i) / (\kappa \sin \beta) = 1,969$ ,  $\beta = 34,4^\circ$ ),  $\alpha = 45^\circ$  ( $\bar{l} = 1,511$ ,  $\beta = 49,9^\circ$ ),  $\alpha = 68^\circ$  ( $\bar{l} = 1,273$ ,  $\beta = 71,5^\circ$ ), пунктирна лінія – абсолютно жорсткому індентору ( $G_1 = \infty$ ,  $\bar{l} = 1$ ,  $\beta = \alpha$ ), штрих-пунктирна лінія (на рис. 3) – наближенному розв'язку за формулою (1) з заміною множника  $2G/(1-v)$  на зведенний модуль пружності (6).

На рис. 5 показано лінії сталих безрозмірних максимальних дотичних напружень (ізохори) зі значеннями  $\tau_{\max}^{(2)} / (2G_2\varepsilon) = 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4$  у залізній основі при дії алмазного індентора з кутом піврозхилу  $\alpha = 68^\circ$  (сузільні криві) та при дії абсолютно жорсткого індентора (пунктирні лінії).

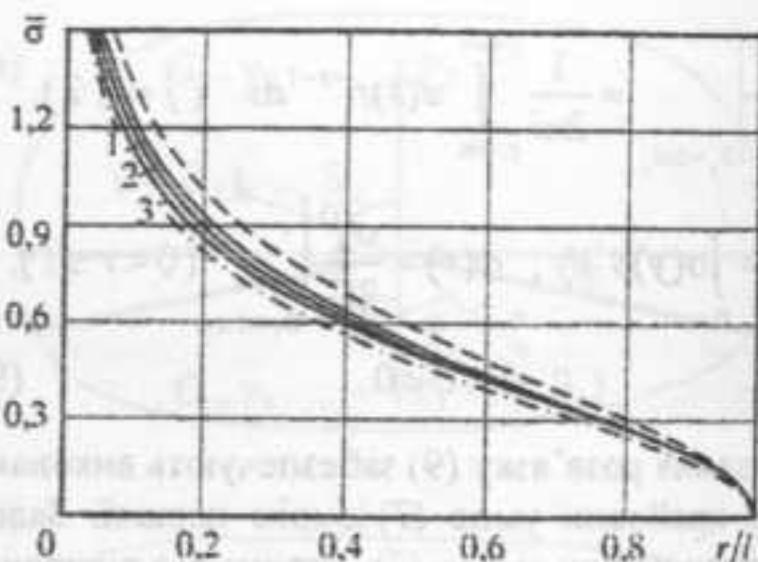


Рис. 3

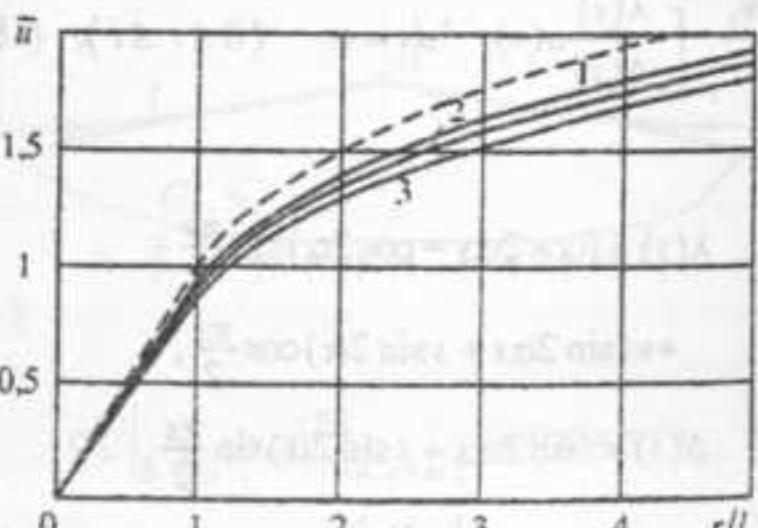


Рис. 4

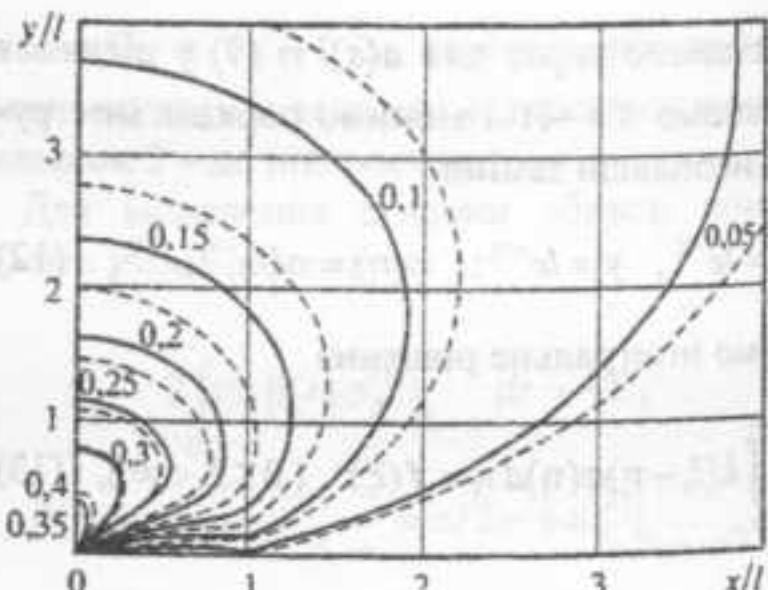


Рис. 5

## Список використаних джерел

- Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
- Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 264 с.
- Тишиченко С. П.. Гудьєр Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
- Острік В. І., Улитко А. Ф. Контактное взаимодействие двух упругих клиньев // Математические и физ.-мех. поля. – 1999. – 42, № 1. – С. 68-74.
- Острік В. І., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Київ: Наук. думка, 2006. – 328 с.

Надійшла до редколегії 11.02.2009

УДК 519.63

Турбал Ю.В., к. ф.-м. наук, доцент

**Частко ві розв'язки рівнянь газової динаміки галактик із збуреннями типу  $\delta$ -солітонів**

В роботі розглядаються збурення розв'язків рівнянь газової динаміки галактик, що мають вигляд одиночних хвиль типу нескінченносолітонів, та досліджується характер поведінки таких збурень з часом.

**Ключові слова:** збурення, система диференціальних рівнянь, солітон

E-mail: turbaly@gmail.com, turball@rambler.ru

Статтю представив академік НАНУ, професор, д. ф.-м. наук Перестюк М.О.

**1. Вступ.**

Останніми роками під керівництвом Фрідмана А.М. в російському науковому центрі "Курчатовський інститут" [1] проведено масштабні дослідження механізмів виникнення спіральних хвиль щільності в галактиках. В серії публікацій показано, що поряд з гравітаційними механізмами, гідродинамічна нестійкість відіграє важливу роль у процесах формування областей підвищеної густини, що мають спіральну структуру. Розроблено серію установок «Спіраль», теоретичним підґрунттям для використання яких є еквівалентність рівнянь мілкої води, що обертається, та рівнянь газової динаміки галактик.

В даній статті розглядаються рівняння газової динаміки галактик, виведення яких міститься, наприклад, в [2]. Однак, на відміну від [2] та низки інших праць (огляд їх міститься в [1]), де збурені розв'язки шукалися у вигляді спіральних хвиль та аналізувались відповідні дисперсійні співвідношення за класичною схемою, в даній статті розглядаються збурення розв'язків, які мають характер тонких  $\delta$ -солітонів. Аналогічні розв'язки для рівнянь типу мілкої води розглядалися в [3]. Такі хвилі можуть відігравати суттєву роль у механізмах виникнення гідродинамічної нестійкості [2] та інших випадках.

Дослідженням солітонів на мілкій воді детально займалось багато науковців, серед яких можна згадати В. І. Петвіашвілі та ін. Специфічні солітони Петвіашвілі та солітони-антициклони було виявлено і в лабораторних умовах [4]. Проте, одиночні хвилі, які розглядаються в даній статті як збурення розв'язків відповідних систем

Y.V.Turbal, PhD.

**On the partial solutions of equations of galaxies gas dynamics with oscillations like  $\delta$ -soliton**

In this paper we consider the oscillations of solutions of gas dynamics equations in galaxies in the form of single waves like  $\delta$ -soliton. The character of such oscillations in time is investigated.

**Keywords:** differential systems, oscillation, soliton

диференціальних рівнянь, суттєво відрізняються від вище згаданих.

**2. Теореми про солітонні збурення рівноважних розв'язків**

Розглянемо рівняння газової динаміки галактик [2], записані у полярній системі координат, для випадку політропного закону [2] ( $p = B\sigma^3$ ) зв'язку поверхневого тиску та поверхневої щільності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(r, \phi, t)}{\partial t} &= -\sigma(r, \phi, t) \left( \frac{\partial u(r, \phi, t)}{\partial r} + \frac{u(r, \phi, t)}{r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v(r, \phi, t)}{\partial \phi} \right) - u(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ &\quad - \frac{v(r, \phi, t)}{r} \frac{\partial \sigma(r, \phi, t)}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial u(r, \phi, t)}{\partial t} &= -u(r, \phi, t) \frac{\partial u(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ &\quad - \frac{v(r, \phi, t)}{r} \frac{\partial u(r, \phi, t)}{\partial \phi} + \frac{v^2(r, \phi, t)}{r} - \frac{\partial \Phi(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ &\quad - 3B\sigma(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma(r, \phi, t)}{\partial r} + \frac{3}{2r} BD\sigma^2(r, \phi, t), \\ \frac{\partial v(r, \phi, t)}{\partial t} &= -u(r, \phi, t) \frac{\partial v(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ &\quad - \frac{v(r, \phi, t)}{r} \frac{\partial v(r, \phi, t)}{\partial \phi} - \frac{u(r, \phi, t)v(r, \phi, t)}{r} - \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \phi, t)}{\partial \phi} - \sigma(r, \phi, t) \frac{3B}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u(r, \phi, t), v(r, \phi, t)$  – радіальна та азимутальна компоненти швидкості газу відповідно,  $\sigma(r, \phi, t)$  – поверхнева густина газового диску,  $\Phi(r, \phi, t)$  –

гравітаційний потенціал,  $B, D$  – деякі невід'ємні сталі. Зауважимо, що система (1) є квазілінійною.

Нехай  $u_0(r) \equiv 0$ ,  $v_0(r)$ ,  $\sigma_0(r)$ ,  $\Phi_0(r)$  – функції, що є розв'язками системи (1). Підставляючи ці функції в систему (1), отримуємо рівність:

$$\begin{aligned} -\frac{v_0^2(r)}{r} = & -\frac{\partial \Phi_0(r)}{\partial r} - 3B\sigma_0(r)\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \\ & + 3BD\sigma_0^2(r)\frac{1}{2r}. \end{aligned}$$

Частинний розв'язок системи (1) шукається у вигляді суми рівноважних величин та деяких збурень:

$$\begin{aligned} \sigma(r, \phi, t) &= \sigma_0(r) + \sigma_1(r, \phi, t), \\ \Phi(r, \phi, t) &= \Phi_0(r), \\ u(r, \phi, t) &= u_1(r, \phi, t), \\ v(r, \phi, t) &= v_1(r, \phi, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Для зручності запису введемо вектор-функцію збурень

$$f_1(r, \phi, t) = (u_1(r, \phi, t), v_1(r, \phi, t), \sigma_1(r, \phi, t)).$$

Вектор-функцію  $f_1(r, \phi, t)$  будемо шукати у вигляді:

$$f_1(r, \phi, t) = \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon), \quad (3)$$

де  $\psi_f(t) = (\psi_u(t), \psi_v(t), \psi_\sigma(t))$ ,  $\psi_u(t)$ ,  $\psi_v(t)$ ,  $\psi_\sigma(t)$ ,  $\tilde{r}(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  – деякі функції, причому  $\tilde{r}(t) \geq 0$ ,  $\psi_\sigma(t) \geq 0$ ,  $\varepsilon$  – малий параметр,  $\varepsilon_0$  – деяка стала,

$$\omega(r, \phi, t, \varepsilon) = \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t)) + g(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon}\right\}, \quad (4)$$

$g(x)$  – невід'ємна, парна функція, монотонно зростаюча на  $[0, +\infty)$ , яка має властивості:

$g(0) = 0$ ; існують константи  $\alpha_1$ ,  $c_1$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $c_1 > 0$ ,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  такі, що  $|g'(x)| \leq c_1 g^{\alpha_1}(x)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Очевидно, що така функція існує (наприклад,  $g(x) = x^2$ ).

Бачимо, що в такому випадку збурення являє собою одиночну хвилю типу  $\delta$ -солітона [3], причому точка максимуму збурення рухається за траєкторією, що описується в полярній системі координат функціями  $\tilde{r}(t)$  та  $\tilde{\phi}(t)$ .

Надалі будемо розглядати наступні області:

$$G_\varepsilon^1 = \{(r, \phi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\phi - \tilde{\phi}(t)) \geq -\varepsilon \ln \varepsilon, t \in [0, T], r \leq R\},$$

$$G_\varepsilon^2 = \{(r, \phi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\phi - \tilde{\phi}(t)) \leq -\varepsilon \ln \varepsilon, t \in [0, T], r \leq R\},$$

$$G_\varepsilon^\alpha = \{(r, \phi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) \leq \varepsilon^{1+\alpha},$$

$$g(\phi - \tilde{\phi}(t)) < \varepsilon^{1+\alpha}, t \in [0, T], r \leq R\}.$$

**Твердження 1.** Нехай  $\varepsilon_0 = \varepsilon^{1-\alpha_1} \vartheta(\varepsilon)$ ,  $\vartheta(\varepsilon)$  – деяка функція, така що  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta(\varepsilon) = 0$ ,  $\sigma_0(r)$ ,

$$v_0(r), \frac{d\sigma_0(r)}{dr}, \frac{dv_0(r)}{dr} – обмежені функції.$$

Тоді існують такі функції  $\tilde{r}(t) \geq 0$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  та стала  $T > 0$ , що розв'язок системи (1) може бути знайдений у вигляді (2) з точністю:

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon_0(-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}), (r, \phi, t) \in G_\varepsilon^1 \\ O(\vartheta(\varepsilon)), (r, \phi, t) \in G_\varepsilon^2 \end{cases} \quad (5)$$

При цьому  $\psi_u(t) \equiv 0$ ,  $\psi_v(t) \equiv 0$ ,  $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma \geq 0$ .

**Твердження 2.** Нехай в деякій області  $G = \{(r, \phi) : r_1 \leq r \leq r_2\}$  поверхнева густина мас вигляд:

$$\sigma_0(r) = Cr^{\alpha_1} - \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma}{2}, \quad (6)$$

де  $C$  – така стала, що  $\sigma_0(r) \geq 0$ . Тоді існують такі стала  $T > 0$  і функції  $\tilde{r}(t) \geq 0$ ,  $\tilde{\phi}(t)$ , що на інтервалі  $[0, T]$  розв'язок системи (1) може бути знайдений у вигляді (2)–(4) з точністю:

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon_0(-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}), (r, \phi, t) \in G_\varepsilon^1 \\ O(\max\{\varepsilon_0 \varepsilon^{(1-\alpha_1)\alpha_1-1}, g^{-1}(\varepsilon^{1+\alpha})\}), (r, \phi, t) \in G_\varepsilon^2 \end{cases} \quad (7)$$

При цьому:  $\psi_u(t) \equiv 0$ ,  $\psi_v(t) \equiv 0$ ,  $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma > 0$ , а  $\varepsilon_0$  та  $\alpha$  – довільні додатні константи.

**Твердження 3.** Нехай  $\sigma_0(r) \geq 0$ ,  $v_0(r)$  – неперевно-диференційовні та обмежені в деякій області  $G = \{(r, \phi) : r_1 \leq r \leq r_2\}$  функції. Тоді існують такі значення  $T > 0$  і обмежені диференційовні функції  $\psi_u(t), \psi_v(t), \psi_\sigma(t) \geq 0$ ,  $\tilde{r}(t) \geq 0$ ,  $\tilde{\phi}(t)$ , що на інтервалі  $[0, T]$  розв'язок системи (1) може бути знайдений у вигляді (2) з точністю (7).

При цьому  $\psi_\sigma'(t) \geq 0$ , а стала  $\varepsilon_0 > 0$  має бути такою, щоб функція  $\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)}$  не змінювала знак при  $t \in [0, T]$ .

Очевидно, що коли  $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_0(r)}{r} \geq 0$ ,  $r \in G$ , стала  $\varepsilon_0$  – довільне додатне число.

**Доведення.** В результаті (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial r} &= -\varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial f_1}{\partial \phi} &= -\varepsilon_0 \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} &= \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) + \\ &\quad \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\phi - \tilde{\phi}(t)) + \\ &\quad + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))]. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставимо (2) в (1) і зауважимо, що збурення  $\sigma_1(r, \phi, t)$ ,  $u_1(r, \phi, t)$ ,  $v_1(r, \phi, t)$  можуть бути не обов'язково малими. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial r} = -\frac{v_0(r)}{r} \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} - \sigma_0(r) \left( \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{u_1(r, \phi, t) + \partial v_1(r, \phi, t)}{r} \right) - u_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r} \left( \sigma_1(r, \phi, t) u_1(r, \phi, t) + u_1(r, \phi, t) r \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \sigma_1(r, \phi, t) r \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial r} + \sigma_1(r, \phi, t) \frac{\partial v_1(r, \phi, t)}{\partial r} + \right. \\ \left. + v_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} \right), \\ \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial r} = -\frac{v_0(r)}{r} \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} + \frac{2v_0(r)v_1(r, \phi, t)}{r} - \\ - 3B\sigma_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} - 3B\sigma_0(r) \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ - 3B\sigma_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial r} + \frac{3}{r} BD\sigma_0(r)\sigma_1(r, \phi, t) + \\ + \frac{3}{2r} BD\sigma_1^2(r, \phi, t) + \frac{v_1^2(r, \phi, t)}{r} - u_1(r, \phi, t) \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ - \frac{v_1(r, \phi, t)}{r} \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial v_1(r, \phi, t)}{\partial r} = -u_1(r, \phi, t) \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} - \frac{v_0(r)}{r} \frac{\partial v_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} - \\ - \frac{u_1(r, \phi, t)v_0(r)}{r} - \sigma_0(r) \frac{3B}{r} \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} - \\ - \frac{3B}{r} \sigma_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} - u_1(r, \phi, t) \frac{\partial v_1(r, \phi, t)}{\partial r} - \\ - \frac{v_1(r, \phi, t)}{r} \frac{\partial v_1(r, \phi, t)}{\partial \phi} - \frac{u_1(r, \phi, t)v_1(r, \phi, t)}{r}. \end{cases} \quad (9)$$

Тоді необхідно підставити збурення (3) в систему (9). Однак, наводити отримані співвідношення не будемо в силу їх громіздкості а подальший аналіз проведемо в загальному

випадку, розглядаючи систему (9). Для подальшого дослідження нам необхідно буде аналізувати вирази  $\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon)$  та  $\frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon)$ . Для цього введемо функцію  $f(x, y) = \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\}$  і знайдемо її екстремум. Масно очевидну нерівність:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\} \leq \\ &\leq \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Продиференціювавши функцію

$$f(x) = \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\}, \text{ отримаємо:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x) &= c_1 \left( \frac{2\alpha_1 x^{2\alpha_1-1}}{\varepsilon} - \frac{2x^{2\alpha_1+1}}{\varepsilon^2} \right) \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\} = \\ &= c_1 \frac{2x^{2\alpha_1-1}}{\varepsilon} \left( \alpha_1 - \frac{x^2}{\varepsilon} \right) \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Звідси  $x^2 = \alpha_1 \varepsilon$ ,  $x = \pm \sqrt{\alpha_1 \varepsilon}$ . Очевидно, що мінімум цієї функції досягається в точці 0. Функція парна. Отже, в точці  $x = \sqrt{\alpha_1 \varepsilon}$  - максимум. Значення функції в цій точці рівне

$$\frac{c_1 (\alpha_1 \varepsilon)^{\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\alpha_1\} = \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\}.$$

Тоді очевидно є нерівність:

$$\frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\} \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\}.$$

Зауважимо, що у області  $\{x : x^2 \geq -\varepsilon \ln \varepsilon\}$  максимальне значення функції досягається на граници області - в точці  $x_{\max} = \sqrt{-\varepsilon \ln \varepsilon}$  і рівне  $f(\sqrt{-\varepsilon \ln \varepsilon}) = c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}$ .

При виконанні умови  $\{x : x^2 \leq \varepsilon^{1+\alpha}\}$  максимальне значення функції досягається в точці  $x_{\max} = \varepsilon^{(1+\alpha)/2}$  і рівне  $f(x) = c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\}$ .

На основі проведених вище оцінок будемо аналізувати вирази  $\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon)$  та

$$\frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon).$$

Будемо розглядати окремо області  $G_\varepsilon^1$ ,  $G_\varepsilon^2$  та  $G_\varepsilon^0$ . В області  $G_\varepsilon^1$  виконуються нерівності:

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \quad (10)$$

$$\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \quad (11)$$

Також очевидними є наступні нерівності:

$$|f_1| \leq \varepsilon_0 \varepsilon \psi_f(t),$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right| = \left| -\varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \varepsilon \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}.$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right| = \left| -\varepsilon_0 \frac{2(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \varepsilon \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial t} \right| &= \left| \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \right. \\ &+ \frac{2}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t)(\varphi - \varphi(t)) + \\ &\left. + \tilde{r}'(t)(r - \tilde{r}(t))] \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_0 \varepsilon |\psi_f'(t)| + \varepsilon_0 c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} |\psi_f(t)(\tilde{\varphi}'(t) + \tilde{r}'(t))|. \end{aligned}$$

Розглядаючи систему (9), бачимо, що всі рівності виконуються з точністю  $O(\varepsilon_0 \varepsilon^{\alpha}) + O(\varepsilon_0 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}) = O(\varepsilon_0 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1})$  для будь-яких обмежених функцій  $\sigma_0(r)$ ,  $v_0(r)$ ,  $\frac{d\sigma_0(r)}{dr}$ ,  $\frac{dv_0(r)}{dr}$ , а отже, розв'язок системи (1) в області  $G_\varepsilon^1$  можна знайти у вигляді (2).

У області  $G_\varepsilon^2$  мають місце нерівності:

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1}, \quad (12)$$

$$\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1}. \quad (13)$$

Крім того, в області  $G_\varepsilon^2$  виконуються очевидна нерівність:  $\varepsilon \leq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq 1$ .

Тоді

$$|\varepsilon_0 \varepsilon \psi_f(t)| \leq |f_1| = |\varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)| \leq \varepsilon_0 |\psi_f(t)|.$$

Враховуючи максимальне значення функції  $f(x, y)$  у області  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq -\varepsilon \ln \varepsilon\}$  можемо також записати нерівності:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right| &= \left| -\varepsilon_0 \frac{2(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \\ &\leq 2 \psi_f(t) \varepsilon_0 \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right| &= \left| -\varepsilon_0 \frac{2(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \\ &\leq 2 \psi_f(t) \varepsilon_0 \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial t} \right| &= \left| \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \right. \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \varphi(t)) + \\ &\left. + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] \right| \leq \varepsilon_0 \varepsilon |\psi_f'(t)| + \\ &+ \varepsilon_0 \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\} |\psi_f(t)(\tilde{\varphi}'(t) + \tilde{r}'(t))|. \end{aligned}$$

Аналізуючи останні нерівності бачимо, що система (9) виконується з точністю  $O(\varepsilon_0 \varepsilon^{\alpha_1-1})$ . Звідси легко отримати Твердження 1. Однак при цьому зауважимо, що величина збурення поверхневої густини, що визначається співвідношенням  $\varepsilon_0 \psi_\sigma \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)$  є меншою, ніж точність, з якою виконується система рівнянь (9) при  $0 < \alpha_1 < 1$ .

Розглянемо область  $G_\varepsilon^\alpha$ . В цій області при  $\alpha > 0$  виконуються нерівності:

$$1 \geq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \geq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^{2+2\alpha}}{\varepsilon}\right) = \exp\{-2\varepsilon^{1+2\alpha}\} = 1 - 2\varepsilon^{1+2\alpha} + o(\varepsilon^{1+2\alpha}).$$

Врахуванням аналізу екстремуму функції  $f(x, y)$  також можемо записати нерівності:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right| &= \left| -\varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right| &= \left| -\varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial t} \right| &= \left| \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \right. \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \varphi(t)) + \\ &\left. + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] \right| \leq \varepsilon_0 \varepsilon |\psi_f'(t)| + \\ &+ \varepsilon_0 c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\} |\psi_f(t)(\tilde{\varphi}'(t) + \tilde{r}'(t))|. \end{aligned}$$

Аналізуючи останні нерівності бачимо, що в системі (9) величини  $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial r}$  мають порядок малості  $O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1})$ . Крім того, виконується рівність:

$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1})$ . При цьому функцію  $\omega(r, \phi, t, \varepsilon)$  можемо вважати рівною 1 з точністю  $O(\varepsilon^{1+2\alpha})$ . Тоді з системи (9) можемо отримати наступну систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1(r, \phi, t)}{\partial t} = -\sigma_0(r) \frac{u_1(r, \phi, t)}{r} - \\ - u_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \sigma_1(r, \phi, t) u_1(r, \phi, t) + \\ + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1}), \\ \frac{\partial u_1(r, \phi, t)}{\partial t} = \frac{2v_0(r)v_1(r, \phi, t)}{r} - \\ - 3B\sigma_1(r, \phi, t) \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{3}{r} BD\sigma_0(r)\sigma_1(r, \phi, t) + \\ + \frac{3}{2r} BD\sigma_1^2(r, \phi, t) + \frac{v_1^2(r, \phi, t)}{r} + \\ + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1}), \\ \frac{\partial v_1(r, \phi, t)}{\partial t} = -u_1(r, \phi, t) \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} - \\ - \frac{u_1(r, \phi, t)v_0(r)}{r} - \frac{u_1(r, \phi, t)v_1(r, \phi, t)}{r} + \\ + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1}). \end{cases} \quad (14)$$

Підставимо (3) в (10) та розкладемо всі функції, що залежать від  $r$ , в ряд Тейлора в околі  $\tilde{r}(t)$ . Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) = -\psi_u(t) \left( \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)} \right) + O(\max\{\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1}, g^{-1}(\varepsilon^{1+\alpha})\}), \\ \psi_u'(t) = 2 \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} \psi_r(t) + \varepsilon_0 \frac{\psi^2(t)}{\tilde{r}(t)} - \\ - 3B\psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{3BD}{\tilde{r}(t)} \sigma_0(\tilde{r}(t)) \psi_\sigma(t) + \\ + \frac{3BD}{2\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) + O(\max\{\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1}, g^{-1}(\varepsilon^{1+\alpha})\}), \\ \psi_r'(t) = -\psi_u(t) \left( \frac{\partial v_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \right) + O(\max\{\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\sigma_1-1}, g^{-1}(\varepsilon^{1+\alpha})\}). \end{cases} \quad (15)$$

При вирахуванні точності використали властивості функції  $g(x)$ , зокрема її парність. Під значенням  $g^{-1}(x)$  тут розуміється лише додатній розв'язок рівняння  $g(y) = x$  (в найпростішому випадку, коли  $g(x) = x^2$  відповідних розв'язків два). Зауважимо, що

система (15) є нелінійною автономною системою.

Виходячи з фізичних міркувань, можемо сформулювати такі додаткові умови:  $\psi_\sigma(t) \geq 0$ ,  $\sigma_0(r) \geq 0$ ,  $r_0 \leq \tilde{r}(t) \leq R$ , де  $R$  – деяка стала. Крім того, функції  $\sigma_0(r), v_0(r)$  є неперервно-диференційовними згідно умов теореми. Тоді можна показати, що задача Коші для системи (15) має розв'язок для будь-яких початкових умов.

Оскільки функція  $\psi_\sigma(t)$  визначає величину збурення густини (разом з константою  $\varepsilon_0$ ), то нас цікавитимуть саме такі розв'язки системи (11), при яких збурення густини суттєво не зменшується з часом. Тоді можна говорити про солітонний характер розв'язків.

Проаналізуємо розв'язки системи (11) при різних функціях  $\sigma_0(r)$  та  $v_0(r)$ . Як бачимо з першого рівняння системи (11), знак  $\psi_\sigma'(t)$  залежить від функцій  $\psi_u(t)$  та  $\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)}$ .

Якщо функція (16) невід'ємна, то при  $\psi_u(t) < 0$  виконується умова:  $\psi_\sigma'(t) \geq 0$ . Зауважимо, що при будь-яких обмежених функціях  $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r}$  та  $\sigma_0(r)$  можемо підібрати таке достатньо велике значення  $\varepsilon_0$ , що функція (12) буде додатною.

Нехай у деякій області  $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_0(r)}{r} \geq 0$ .

Тоді функція (16) є невід'ємною при довільному невід'ємному значенні  $\varepsilon_0$ .

Нехай  $\psi_u(t) = 0$ . Тоді з першого та третього рівняння системи (15) отримуємо:  $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = \text{const}$ ,  $\psi_r(t) = \psi_u(t) = 0$ . З другого рівняння системи (15) отримаємо умову:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} - \frac{D}{\tilde{r}(t)} \sigma_0(\tilde{r}(t)) - \frac{D}{2\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = \\ = O(\max\{\varepsilon_0 \varepsilon^{(1-\alpha)\sigma_1-1}, g^{-1}(\varepsilon^{1+\alpha})\}). \end{aligned}$$

Остання умова виконується, якщо

$$\begin{aligned} \sigma_0(r) = r^D \left( C + \int \frac{D}{2r} \varepsilon_0 \psi_\sigma r^{-D} dr \right) = r^D \left( C - \right. \\ \left. - \frac{D \varepsilon_0 \psi_\sigma r^{-D}}{2D} \right) = Cr^D - \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma}{2}. \end{aligned}$$

де  $C$  – деяка така стала, що  $\sigma_0(r) \geq 0$ . Звідси отримуємо Твердження 2.

Нехай у деякій області  $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} = O(\varepsilon_1)$ .

Нехай  $\tilde{r}(t)$  є монотонно-зростаючою невід'ємною функцією, яка задовільняє умови:

$$\tilde{r}(0) = r_0, \quad \frac{1}{r_0} < \varepsilon_1. \quad \text{Тоді } \frac{1}{\tilde{r}(t)} < \varepsilon_1. \quad \text{Отже, з}$$

першого рівняння системи (15) випливає, що  $\psi_\sigma'(t) = O(\varepsilon_1)$ . При цьому знак функції  $\psi_\sigma(t)$  може бути будь-яким.

Нехай у деякій області  $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_0(r)}{r} < 0$ . Тоді, очевидно, можемо вибрати такі малі значення  $\varepsilon_0$  та функцію  $\tilde{r}(t)$ , щоб виконувалась нерівність:

$$\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)} \leq 0. \quad \text{В такому}$$

випадку, при виконанні умови  $\psi_\sigma(t) > 0$ , виконується нерівність:  $\psi_\sigma'(t) \geq 0$ . Аналізуючи друге рівняння системи (15) бачимо, що при виконанні умови  $\frac{\partial v_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} \leq 0$

виконуються нерівності  $\psi_\nu'(t) \geq 0$  та  $\psi_\nu'(t) \geq 0$ .

Отримали Твердження 3.

### 3. Деякі зауваження

Отже, в даній роботі розглянули можливість знаходження розв'язків системи рівнянь газової динаміки галактик у формі відокремлених структурно-стійких хвиль, які являють собою збурення поверхневої густини та рівноважних компонент швидкостей у формі (3). При цьому зауважимо, що збурення гравітаційного потенціалу вважалось нульовим. Однак, в таких моделях розглядають також ненульове збурення гравітаційного потенціалу, що описується рівнянням Пуассона. При цьому розглядають циліндричну систему координат та певне збурення гравітаційного потенціалу по осі z. Однак, в даній роботі ці питання не розглядалися.

Зауважимо, що на практиці [1] поверхнева густина веде себе по-різному. Для ряду галактик спостерігаються одночасно як окремі області (кільця) зростання поверхневої густини, так і випадки, коли вона спадає з віддаленням від центру галактики практично по експоненті чи є близькою до константи.

У сформульованих вище твердженнях розглянуто лише окремі випадки. Становить певний інтерес прослідкувати, що відбувається з одноченою хвилею типу  $\delta$ -солітона, коли вона проходить області максимуму чи мінімуму

поверхневої густини, коли функція  $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r}$  змінює знак. Аналізуючи рівняння (15), можна побачити, що в таких випадках відбуваються пульсації амплітуди – при переході через екстремум щільності одиночна хвиля спочатку зменшує свою амплітуду, але через деякий час при певних умовах вона знову може почати зростати (якщо, наприклад, значення амплітуди хвилі не зменшилось до критично-можливого малого значення, при якому вона вже фізично не може існувати).

Зауважимо, що згадані в нашій роботі одноченні хвилі можуть відігравати суттєву роль у таких процесах, коли інтенсивність виникнення хвиль є високою і вступають у дію колективні механізми. Адже взаємодія численних навіть малих збурень може призводити до суттєвих впливів на систему. Наприклад, у працях [5], [6] розглянуто ефекти самоорганізації, що пов'язані з випромінюванням певних типів та методи моделювання відповідних спіральних структур.

### Список використаних джерел

- Фридман А.М. Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках // Успехи физ. наук. – 2007. – Т. 117, №2. – С. 121 – 148.
- Морозова Г., Хоперсков А.В. Физика дисков // [www.astronet.ru](http://www.astronet.ru)
- Екимов Р.В. Построение слабого асимптотического решения типа бесконечно-узких д-солитонов для уравнений типа мелкой воды // Материалы школы-семинара, Судак, 2001.
- Антонова Р.А., Петвиашвили В.И. О дрейфовых солитонах в мелкой вращающейся жидкости // Письма в ЖЭТФ. – 2000. – Т. 37, вип. 11. – С. 545-548.
- Турбал Ю.В. Про самоорганізацію динамічних систем у векторних полях // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 1. – С. 171-179.
- Турбал Ю.В. Про операторний метод моделювання спіральних структур // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2005. – № 4. – С. 171-179.

Надійшла до редколегії 02.03.2009

# **КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА**



УДК 681.3.6

Анісимов А.В., чл.-кор. НАНУ, проф.,  
Кулябко П.П., канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
Кулябко О.П., аспірант.

## Мовні засоби для опису об'єктно-орієнтованих атрибутних граматик

На основі теорії об'єктно-орієнтованих атрибутних граматик пропонується мова MI; аналізуються можливості цієї мови.

Ключові слова: об'єктно-орієнтовані атрибутні граматики, мови програмування.

A.V. Anisimov, prof.,  
A.V. Anisimov, prof.,  
P.P. Kulabko, kand. ph.-mat. sc., docent,  
O.P. Kulabko, post-graduate.

## Language tools for describing object-oriented attribute grammars

On the base of the object-oriented attribute grammar theory MI language is proposed; the possibilities of this language are analyzed.

Key Words: object-oriented attribute grammars, programming languages.

E-mail: [ava@unicyb.kiev.ua](mailto:ava@unicyb.kiev.ua), [kpp@unicyb.kiev.ua](mailto:kpp@unicyb.kiev.ua), [okulabko@gmail.com](mailto:okulabko@gmail.com)

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Буй Д.Б.

Технологічні засоби синтаксичного аналізу здавна використовувались для побудови компіляторів, інтерпретаторів та інших мовних процесорів для різноманітних мов програмування. Зокрема, широкого поширення здобули такі програмні продукти як YACC&LEX[1,2] та Bison&Flex[3], які базуються на традиційному визначені контекстно-вільних граматик, запропонованого Д.Кнутом [4,5]. Відзначимо, що згаданий класичний підхід у технологічному аспекті передбачає побудову та обробку абстрактних синтаксичних дерев (АСД) частинами (наприклад, побудувати та провести обробку АСД для арифметичного виразу чи умовного оператора), при цьому не виникало необхідності будувати повністю все дерево та зберігати його в зовнішній пам'яті для наступної обробки. В останні роки активно впроваджуються програмні продукти, які передбачають використання апарату контекстно-вільних граматик у модернізованому вигляді – об'єктно-орієнтовані атрибутні граматики [6,7]. Таке оновлення класичної теорії дозволяє як покращити показники ефективності власне синтаксичного аналізу, так і оптимізувати вирішення питання про довготривале збереження АСД (як об'єкта) в реляційній чи об'єктно-орієнтованій базі даних. Збереження АСД в зовнішній пам'яті потрібне в тих випадках, коли необхідна сумісна обробка чи порівняння кількох АСД, створених на основі різних граматик і з різних файлів. Наприклад, у програмі, яка написана на одній з універсальних мов (типу C, Pascal), є звернення до СУБД. Якщо саме звернення до СУБД є особливо важливим, то повинна проводитись сумісна обробка як АСД

прикладної програми, так і відповідних АСД для схеми та підсхеми з опису бази даних. Крім того, об'єктно-орієнтовані атрибутні граматики мають певні переваги над класичними граматиками у задачах синтаксичного аналізу текстів, написаних природними мовами.

Атрибутні граматики є формалізмом для специфікації мов програмування. Вони використовуються в багатьох системах для автоматичної реалізації мови по її специфікації.

Об'єктно-орієнтовані атрибутні граматики є поєднанням граматичних правил традиційних контекстно-вільних граматик з успадкуванням атрибутів та обчисленням значень атрибутів, що характерно для об'єктно-орієнтованої парадигми програмування.

Атрибутна граматика є розширенням контекстно-вільних граматик, які задаються як  $G = (N, T, P, Z)$ , де  $N$  – множина нетерміналів,  $T$  – множина терміналів,  $P$  – множина продукцій, а  $Z \in N$  – стартовий символ (аксіома), який не може з'явитись в правій частині будь-якої продукції. Множину  $V = N \cup T$  часто називають алфавітом, або словником. Кожна продукція  $p \in P$  має вигляд  $p: X \rightarrow a$ , де  $X \in N$ , а  $a \in V^*$ . Відношення  $\Rightarrow$  (безпосередній вивід) задається над рядками з  $V^*$  наступним чином:

якщо  $p: X \rightarrow a$ ,  $p \in P$ ,  $v X \omega \in V^*$ ,  
 $v a \omega \in V^*$ ,

тоді  $v X \omega \Rightarrow v a \omega$ .

Відношення  $\Rightarrow^*$  є транзитивним та рефлексивним замиканням  $\Rightarrow$ . Мова  $L(G)$  визначається так:  $L(G) = \{w | Z \Rightarrow^* w\}$ . Атрибутна

граматика розширяє поняття контекстно-вільної граматики введенням атрибутів та способів обчислення їх значень. З кожним елементом з  $V$  зв'язується певна множина атрибутів, а для кожної продукції описується спосіб обчислення значень атрибутів.

В загалі кажучи, може бути кілька різних продукцій для одного і того ж самого нетермінала в лівій частині, що уможливлює різні варіанти виводу, починаючи з одного нетермінала. Для об'єктно-орієнтованих атрибутних граматик (ООАГ) можна ввести обмеження: одна продукція – для одного нетермінала лівої частини. Таким чином, встановлюється взаємно-однозначна залежність між продукціями і нетерміналами.

Формально ООАГ визначається так:

$$G = (N, T, A, C, Z),$$

де  $N$  – множина нетерміналів,  $T$  – це множина терміналів,  $A$  – множина атрибутів,  $C$  – множина обчислень значень атрибутів, а  $Z$  – стартовий символ ( $Z \in N$ ). Множина  $V = N \cup T$  – це множина типів вершин. Кожен елемент  $n \in V$  зв'язується з кортежем  $n = (R, B, D, S)$ , де  $R \in V^*$  – права частина продукції,  $B \in A^*$  – множина атрибутів,  $D \in C^*$  – множина обчислень значень атрибутів, а  $S \in V$  – базовий тип.

Над елементами з  $V$  вводиться відношення  $\subseteq$  (підтипу) над  $V$  так:

якщо  $n = (a, \beta, \delta, m) \in V$ ,

тоді  $n \subseteq m$ .

$m$  називається базовим типом або супертиром,  $n$  називається підтиром. Відношення  $\subseteq$  є транзитивним.

Відношення  $\Rightarrow$  (безпосередній вивід) задається тільки для контекстно-вільної частини об'єктно-орієнтованої граматики. Є дві можливості виводу для рядків з  $V^*$ :

якщо  $v n \omega \in V^*$  і

$$\begin{aligned} n_1 &: (a_1, \beta_1, \delta_1, n_0) \in V, \\ n_2 &: (a_2, \beta_2, \delta_2, n_1) \in V, \end{aligned}$$

$$\dots \\ n_i &: (a_i, \beta_i, \delta_i, n_{i-1}) \in V,$$

тоді  $v n \omega \Rightarrow v a_1 a_2 \dots a_i \omega$ ;

якщо  $v n \omega \in V^*$  і  $m \subseteq n$ ,

тоді  $v n \omega \Rightarrow v m \omega$ .

Будемо вважати, що існує наперед визначений тип вершини  $n_0 : (\emptyset, \emptyset, \emptyset, -)$  з пустими компонентами. При безпосередньому виводі тип вершини може бути замінений правою частиною відповідної продукції ( $a, \dots, a$ ) чи одним з її підтипов ( $m$ ). Всі заміни правих частин є об'єднанням правих частин у відповідності з ієрархією підтипов. Відношення  $\Rightarrow^*$  є транзитивним і рефлексивним замиканням  $\Rightarrow$ . Мова  $L(G)$  визначається як

$$L(G) = \{w \mid Z \Rightarrow^* w\}.$$

Відношення підтипу має такі властивості: тип вершини, що виводиться, успадковує праву частину, атрибути та обчислення атрибутних значень від його базового типу. Внаслідок транзитивності відношення підтипу тип (що виводиться) успадковує всі компоненти всіх базових типів відповідно ієрархії згаданого відношення. Множина успадкованих компонент може бути розширенена визначенням додаткових елементів правої частини, атрибутів та обчислень значень атрибутів. Всі, так накопичені елементи та атрибути, повинні бути різними, щоб їх можна було об'єднувати. Зокрема, відношення підтипу допускає успадкування від одного предка.

Мова МІ призначена для опису мови програмування на основі об'єктно-орієнтованої атрибутної граматики. На відміну від класичних контекстно-вільних граматик ООАГ кожен елемент словника (алфавіту) розглядає як тип об'єкту з атрибутами. Формально термінал теж є типом об'єкту, але оскільки він сам себе і визначає, то використовується лише при обчисленні значень атрибутів інших об'єктів. У ході проведення синтаксичного аналізу тексту при застосуванні певної продукції створюється об'єкт, тип якого визначається нетерміналом лівої частини продукції; значення атрибутів цього об'єкту обчислюються на основі значень атрибутів об'єктів, які входять в праву частину продукції. Певна частина значень атрибутів може бути задана за замовчуванням, а частина – присвоєна пізніше, коли будуть обчислюватися значення атрибутів для об'єктів (вершин дерева), що знаходяться на вищих поверхах АСД. Загалом, описаний порядок дій узгоджується з порядком надання значень синтезованим та успадкованим атрибутам атрибутних граматик.

Нагадаємо, що напрямок синтаксичного розбору – знизу вгору. Реалізація об'єктів передбачає як їх існування та обробку у вигляді спискових структур в оперативній пам'яті, так і довготривале збереження в об'єктно-реляційній СУБД.

Опис граматики у термінах мови МІ складається з двох розділів: INHERITANCE & SYNTAX. Зв'язок між ними підтримується за рахунок імен нетерміналів (типів об'єктів).

У розділі INHERITANCE задається підпорядкування типів об'єктів (нетерміналів) по успадкуванню між собою, тобто задається відношення підтипу ( $\sqsubseteq$ ). Наперед задані типи об'єктів (integer, real, boolean, string, symbol, тощо) тут не згадуються. Можна також вважати, що окрім опису успадкувань здійснюється також декларування самих типів об'єктів.

Синтаксис цього підрозділу наведено у вигляді розширеної БНФ, тобто на додаток до класичного формату конструкції у квадратних дужках можуть бути присутніми 0 чи 1 раз.

```
<obj-type-decl-list> ::=  
    <obj-type-decl> ". " [<obj-type-decl-list>]  
  
<obj-type-decl> ::=  
    <obj-type> ":" "<"<obj-type-list>"."  
  
<obj-type-list> ::=  
    <obj-type-item> ["; "<obj-type-list>]  
    | ε  
  
<obj-type-item> ::= <obj-type> | <obj-type-decl>
```

<obj-type> ::= <identifier>

Нетермінал (тип об'єкту) <identifier> далі уточнюювати не будемо.

У розділі SYNTAX задаються синтаксичні правила для типів об'єктів (нетерміналів), а також визначаються їх атрибути та правила обчислення їх значень. Вигляд продукції загалом досить схожий на БНФ, тому відзначимо лише відмінності.

Кожен нетермінал в праву частину продукції входить у вигляді пари:

ім'я атрибута => нетермінал (тип об'єкта);

Конструкції виду {...} в правій частині продукції призначені для вставки С-кода (наприклад, виклик функції), зв'язаного з даною продукцією.

Продукція завершується «;».

Конструкція виду (див. наступний приклад): [Prt-Args => calc-expression] + ";" означає, що

вміст [...] повторюється 1 чи багато разів та відділяється комами (наступний однолітерний рядок); тобто значенням атрибуту Prt-Args є послідовність об'єктів; якщо б використовувалась конструкція [...]\*, то це б означало повторення її вмісту 0 чи багато разів; у випадку конструкції [...]! - внутрішній вміст може бути відсутнім, або присутнім 1 раз.

Як уже зазначалось раніше, вважаємо, що існує кілька наперед заданих типів об'єктів (які спеціально не декларуються): integer, real, string, symbol, boolean.

Явно задається стартовий нетермінал, тобто аксіома.

Розглянемо приклад опису невеличкого фрагменту мови Pascal у термінах мови МІ:

INHERITANCE.

CALC-ОБЛЕГТ:

```
< IDENTIFIER;  
  VARIABLE-DECLARATION;  
  CALC-TYPE:  
    < REAL-TYPE; INTEGER-TYPE >;  
    CALC-EXPRESSION;  
  CALC-STATEMENT:  
    < ASSIGNMENT;  
      PRINT-EXPRESSION  
    >;  
  CALC-PROGRAM  
 >.
```

CALC-EXPRESSION:

```
< INTEGER-CONSTANT;  
  REAL-CONSTANT;  
  IDENTIFIER-REF;  
  ADD-EXPRESSION;  
  SUB-EXPRESSION;  
  MULT-EXPRESSION;  
  DIV-EXPRESSION  
 >.
```

/\* Задекларованими вважаються всі типи об'єктів, які згадуються в розділі INHERITANCE на будь-якому місці. Якщо тип об'єкту є ізольованим з точки зору відношення підтипу, то він може бути заданий так Obj: <>. Може бути використаний як вбудований формат (наприклад CALC-TYPE чи CALC-STATEMENT всередині CALC-ОБЛЕГТ), так і відокремлений (CALC-EXPRESSION) \*/

SYNTAX.

Start = CALC-PROGRAM.

IDENTIFIER ::= identifier-name => symbol ;  
VARIABLE-DECLARATION ::=  
"var" variable-identifier => identifier  
"  
variable-type => calc-type ;  
  
REAL-TYPE ::= "real" ;  
INTEGER-TYPE ::= "integer" ;  
INTEGER-CONSTANT ::=  
integer-value => integer ;  
  
REAL-CONSTANT ::= real-value => real ;  
IDENTIFIER-REF ::=  
ID-NAME => symbol  
REF-TO => identifier ;  
  
ADD-EXPRESSION ::=  
add-arg1 => calc-expression "+"  
add-arg2 => calc-expression ;  
  
SUB-EXPRESSION ::=  
sub-arg1 => calc-expression "-"  
sub-arg2 => calc-expression ;  
  
MULT-EXPRESSION ::=  
mult-arg1 => calc-expression "\*"  
mult-arg2 => calc-expression ;  
  
DIV-EXPRESSION ::=  
div-arg1 => calc-expression "/"  
div-arg2 => calc-expression ;  
  
ASSIGNEMENT ::=  
ass-arg1 => identifier-ref ":"=  
ass-arg2 => calc-expression ;  
  
PRINT-EXPRESSION ::= "print(" [Prt-Args => calc-expression] + "," ")";  
  
CALC-PROGRAM ::=  
"program" prg-name => symbol  
[prg-decls => variable-declaration] + ";"  
"begin"  
[prg-stmts => calc-statement] + ";"  
"end" ;

На завершення відзначимо деякі особливості мови MI на основі вищезгаданого прикладу. Легко бачити, що з точки зору класичних граматик мають місце певні „суперечності”: так, наприклад, нетермінал „calc-statement” зустрічається тільки в правій частині продукції і не представлений в жодній продукції зліва; а „PRINT-EXPRESSION” та

„ASSIGNEMENT” є лівими частинами відповідних продукцій, але не представлені в правій частині жодної продукції (є інші приклади такого ж типу). З позицій класичних граматик маємо типову проблему „недосяжних” та „мертвих” нетерміналів. Однак, для мови MI її суперечності розв’язуються за рахунок розділу INHERITANCE, де специфіковано, що „PRINT-EXPRESSION” та „ASSIGNEMENT” є підтиповими типу „calc-statement”. Таким чином, атрибутивні значення при згортці для об’єкту типу „calc-statement” отримуються з об’єктів відповідних підтипов.

### Список використаних джерел

1. M.E. Lesk, E.Schmidt, Lex - A Lexical Analyzer Generator, [www.dinosaur.com/compilertools.net](http://www.dinosaur.com/compilertools.net).
2. S.C. Johnson, Yacc: Yet Another Compiler-Compiler, [www.dinosaur.com/compilertools.net](http://www.dinosaur.com/compilertools.net).
3. A. Montgomery, Using Flex and Bison, [www.mactech.com/articles/mactech/Vol.16/1.6.07/UsingFlexandBison](http://www.mactech.com/articles/mactech/Vol.16/1.6.07/UsingFlexandBison).
4. D.E. Knuth, Semantics of Context-Free Languages, Mathematical Systems Theory 2 (June 1968), 127-146.
5. D.E. Knuth, Semantics of Context-free Languages: Correction, Mathematical Systems Theory 5, (Mar. 1971), 95-96.
6. J. Grosch, H. Emmelmann, Object-Oriented Attribute Grammars, [ftp://www.cocolab.com/products/cocktail/doc.pdf/ooags.pdf](http://www.cocolab.com/products/cocktail/doc.pdf/ooags.pdf)
7. J. Grosch, Multiple Inheritance in Object-Oriented Attribute Grammars, [ftp://www.cocolab.com/products/cocktail/doc.pdf/multiple.pdf](http://www.cocolab.com/products/cocktail/doc.pdf/multiple.pdf)

Надійшла до редколегії 17.03.09

УДК 519.8

Бойко Т.М., аспірант,  
Гаращенко Ф.Г., д.т.н., проф.

## Математичні моделі зі зміною вимірюваної фазового простору для опису діяльності фінансово-промислових структур

В роботі буде збудована загальна математична модель діяльності еволюціонуючих фінансово-промислових структур. В межах даного підходу динаміка розвитку описується системою диференціальних рівнянь зі змінним фазовим простором та переключеннями на кожному з проміжків постійної розмірності.

**Ключові слова:** чутливість, практична стійкість, фінансово-промислова структура.

E-mail: tbojko@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

### Вступ.

З кінця 1980-х початку 1990-х активізувалися економічні процеси об'єднання, почалися пошуки інститутів стійкої взаємодії. Такі процеси відносять до гілки аналізу, об'єктами якого служать економічні системи середньої ієрархічної ланки - комплекси і групи підприємств, галузі, ринки. Саме до цього рівня відносяться і фінансово-промислові об'єднання та групи [1]. Моделювання систем і об'єктів (будь то регіональні системи виробництва, фінансово-промислові та торгово-промислові групи, тощо) такого рівня є достатньо новою галуззю досліджень, потребує інтенсивного вивчення та розробки загального підходу до побудови та аналізу таких моделей. Для вивчення динаміки подібних моделей актуальним виявився апарат теорії диференціальних рівнянь та ігор [1]. В [2-4] і багатьох інших роботах було побудовано конкретні найпростіші моделі. Для таких та багатьох інших систем залишається відкритим питання щодо побудови загальної математичної моделі, яка включає в себе всі згадані вище та багато інших (більш складних). Метою даної роботи є спроба побудови такої моделі.

### Модель еволюціонуючої фінансово-промислової структури.

Динамічна модель еволюціонуючої фінансово-промислової корпоративної структури складатиметься з трьох етапів, що описані нижче.

Tetiana M. Boyko, PhD student,  
Fedir G. Garashchenko, Dr.Sci.Tech., prof.

## Mathematical models with variable phase space for description of activity of financial and industrial structures

In work the general mathematical model of activity evolving financial and industrial structures is under construction. Within the limits of the given approach dynamics of development is described by system of the differential equations with variable phase space and switchings on each of intervals of constant dimension.

**Key Words:** sensitivity, practical firmness, financial and industrial structure.

Ідея. Нехай до складу корпоративної групи на першому етапі входять: виробниче підприємство  $A_1$  – виробник основної продукції; виробниче підприємство  $B_1$  – споживач основної продукції у вертикально-інтегрованому ланцюзі; фінансово-інвестиційна структура (банк)  $B$ . Розглянемо модель фінансово-промислової корпоративної структури [3], що описується скалярним диференціальним рівнянням з переключенням [5]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha), \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad i = \overline{1, 4}, \text{ де} \\ f = \begin{cases} (1-\tau)(W + (1-\xi)\alpha_0 g(x)) + \xi g(x), & t_0 \leq t < t_1, \\ \xi g(x), & t_1 \leq t < t_2, \\ W + (1-\xi)\alpha_0 g(x), & t_2 \leq t < t_3, \\ 0, & t_3 \leq t \leq t_4, \end{cases} \quad (1)$$

з початковою умовою  $x(t_0) = x_0$ , де  $x(t)$  – обсяг коштів, що використовується цільовим призначенням для зниження питомих витрат у момент  $t$ ;  $\tau(t)$  – банківська процентна ставка;  $\xi$  – визначає ціну продажу одиниці продукції підприємству  $B_1$ ;  $\xi g(x(t))$  – максимальний прибуток підприємства  $A_1$ ;  $\alpha_0$  – частка власності підприємства  $B_1$ , якою володіє банк в момент початку роботи в групі;  $W(t)$  – вільний ресурс банку, яким він може розпоряджатися за своїм розсудом.

**2 етап.** В момент часу  $t_4$  підприємство  $A_1$  приймає рішення щодо створення інноваційного підприємства  $C$ , задачею якого є розробка та впровадження інноваційного проекту з подальшим випуском нового продукту. В цей момент часу функція витрат може збільшитися на деяку суму  $Y$  з доходу підприємства  $A_1$ , яка виділяється додатково для створення фонду  $C$  в момент  $t_4$ :  $\overline{x(t_4)} = x(t_4) + Y$ . Другий етап складається з двох частин. З моменту часу  $t_4$  до моменту  $t_8$  підприємство  $A_1$  випускає традиційну продукцію, одночасно впроваджуючи інновації, а з моменту  $t_8$  до  $t_{12}$  випускаються нові конкурентоспроможні одиниці нового продукту (замість того що випускається до цього), який повністю змінює попередню продукцію підприємства  $A_1$ . Відповідно динаміка обсягу коштів на проміжках  $[t_4, t_8]$ ,  $[t_8, t_{12}]$  буде відмінною й згідно [4] буде описуватися наступним диференціальним рівнянням з переключеннями:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, t, \alpha), t_{i-1} \leq t < t_i, i = \overline{4, 12}, \text{ де}$$

$$f_1 = \begin{cases} \xi_1 g_1(x) + (1 - \tau)(W^0 + \\ + (1 - \xi_1)\alpha_B g_1(x))V_c, & t_4 \leq t < t_5, \\ \xi_1 g_1(x) - V_c, & t_5 \leq t < t_6, \\ W^0 + (1 - \xi_1)\alpha_B g_1(x), & t_6 \leq t < t_7, \\ 0, & t_7 \leq t < t_8, \\ (1 - \alpha_c)\xi_2 g_2(x) + [1 - \tau(1 - \alpha_c)] \times \\ \times (W^0 + (1 - \xi_2)\alpha_B g_2(x)), & t_8 \leq t < t_9, \\ (1 - \alpha_c)\xi_2 g_2(x), & t_9 \leq t < t_{10}, \\ W^0 + (1 - \xi_2)\alpha_B g_2(x), & t_{10} \leq t < t_{11}, \\ 0, & t_{11} \leq t \leq t_{12}, \end{cases} \quad (2)$$

з початковою умовою  $x(t_4) = \overline{x(t_4)}$ , де  $\xi_1$  - визначає ціну продажу одиниці продукції підприємству  $B_1$ ,  $\xi_2$  - визначає ціну продажу нової одиниці продукції підприємству  $B_1$ ;  $\tau(t)$  - банківська процентна ставка;  $\alpha_B$  - частка капіталу  $B_1$ , якою володіє банк  $B$ ;  $\alpha_c$  - частка відрахувань від прибутку  $A_1$ , яку отримує банк пропорційно вкладеним на відрізку  $[t_4, t_8]$  коштам на впровадження інновацій,  $V_c$  - кошти, що відраховуються з прибутку  $A_1$  в кожну одиницю часу.

Таким чином бачимо, що кількість переключень збільшилася з часом в два рази.

Нехай  $x(t_{12}) = x_{12}$ .

**3 етап.** На третьому етапі  $[t_{12}, t_{16}]$  банк продовжує співпрацювати з підприємствами  $A_1$  та  $B_1$  і знаходить собі нових клієнтів (підключається незалежно до нової фінансово промислової групи); виробника  $A_2$ , що виробляє свою відповідну одиницю продукції та споживача  $B_2$  цієї продукції. В цьому випадку, як динаміка обсягу коштів  $x_1(t)$  підприємства  $A_2$  буде аналогічною до динаміки  $x(t)$  в моделі (1), так і динаміка для підприємства  $A_1$  тож буде аналогічною (зауважимо тільки, що відтепер підприємство  $A_1$  випускає продукцію  $a_{11}$ ). Таким чином, відповідні динаміки обсягу коштів будуть змінюватись за наступними законами:

$$\frac{dx}{dt} = f_{22}(x, t, \alpha), t_{i-1} \leq t < t_i, i = \overline{12, 16},$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f_{21}(x, t, \alpha), t_{i-1} \leq t < t_i, i = 12, 16,$$

де

$$f_{22} = \begin{cases} (1 - \tau_2)W_2 + (1 - \xi_4)\mu_{02}g_4(x) + \xi_4g_4(x), & t_{12} \leq t < t_{13}, \\ \xi_4g_4(x), & t_{13} \leq t < t_{14}, \\ W_2 + (1 - \xi_4)\mu_{02}g_4(x), & t_{14} \leq t < t_{15}, \\ 0, & t_{15} \leq t \leq t_{16}, \end{cases}$$

$$x(t_{12}) = x_{12},$$

$$f_{21} = \begin{cases} (1 - \tau_1)W_1 + (1 - \xi_3)\mu_{01}g_3(x_1) + \xi_3g_3(x_1), & t_{12} \leq t < t_{13}, \\ \xi_3g_3(x_1), & t_{13} \leq t < t_{14}, \\ W_1 + (1 - \xi_3)\mu_{01}g_3(x_1), & t_{14} \leq t < t_{15}, \\ 0, & t_{15} \leq t \leq t_{16}, \end{cases}$$

$$x_1(t_{12}) = x_{22}.$$

Коефіцієнти мають відповідний економічний сенс (як і розглянуті на попередніх етапах).

Якщо ввести до розгляду вектор  $\bar{x} = (x, x_1)$ , то ми отримаємо систему з переключеннями, що з часом змінює розмірність.

**Зauważення.** Звичайно, що таким чином можуть поєднуватися декілька незалежних структур та груп.

Наведена вище модель та її узагальнення на великі корпоративні структури дають можливість побачити, якою повинна бути загальна математична модель що її описує.

**Загальна математична модель.**

1. При фіксованих значеннях параметрів описаних систем важливим є питання аналізу їх

стійкості (стабільності) [6]. Таким чином, в загальному випадку процес побудови таких математичних моделей приводить нас до необхідності розгляду наступних систем звичайних диференціальних рівнянь зі зміною вимірності фазового простору [7].

Нехай  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  деяке розбиття відрізка  $[T_0, T_1]$ , де  $\tau_j = \{t : t \in [t_{j-1}, t_j]\}, j = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\tau_N = \{t : t \in [t_{N-1}, t_N]\}, t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T_1$ . Нехай також  $\tau_{jk}, \tau_{j1}, \dots, \tau_{jK_j}, j = 1, 2, \dots, N$  - деяке підрозбиття розбиття  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , де

$$\tau_{jk} = \{t : t \in [t_{jk-1}, t_{jk}], j = 1, 2, \dots, N-1; k = 1, \dots, K_j\},$$

$$\tau_{jK_j} = \{t : t \in [t_{jK_j-1}, t_{jK_j}], k = 1, 2, \dots, K_j-1\},$$

$$\tau_{NK_N} = \{t : t \in [t_{NK_N-1}, t_{NK_N}]\},$$

$$t_{j0} = t_{j-1} < t_{j1} < \dots < t_{jK_j-1} < t_{jK_j} = t_j, j = 1, 2, \dots, N.$$

$$\bigcup_{k=1}^{K_j} \tau_{jk} = \tau_j.$$

Припустимо, що динаміка системи задана у вигляді

$$\frac{dx^{(j)}(t)}{dt} = f^{(jk)}(x^{(j)}, t), t \in \tau_{jk}, k = \overline{1, K_j}, j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$x^{(j)}(t_{jk-1}) = g^{(jk)}(x^{(j)}(t_{jk-1})), k = 2, 3, \dots, K_j$$

$$x^{(j)}(t_{j0}) = x^{(j)}(t_{j-1}) = g^{(j1)}(x^{(j-1)}(t_{j0})), j = 1, 2, \dots, N,$$

де  $x^j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)})^T$  -  $n_j$ -вимірний вектор фазових координат,

$f^{(jk)} : R^{n_j} \times \tau_{jk} \rightarrow R^{n_j}, j = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, K_j$  - вектор-функції, які задовольняють умови теореми існування і єдності розв'язку системи (3) при  $t \in \tau_{jk}$ ,

$g^{(jk)} : R^{n_j} \rightarrow R^{n_j}, k = 2, 3, \dots, K_j, j = 1, 2, \dots, N$  - функції, що задають стрибок, а  $g^{(j1)} : R^{n_{j-1}} \rightarrow R^{n_j}, j = 1, 2, \dots, N$  - задають зміну вимірності фазового стану.

2. Якщо ж параметри системи будуть змінюватися, то рівняння руху об'єкта і стрибки, що залежать від вектору параметрів  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  будуть описуватись наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx^{(j)}}{dt} = f^{jk}(x^{(j)}, t, \bar{\alpha}), t \in \tau_{jk}, k = \overline{1, K_j}, j = \overline{1, N},$$

$$x^{(j)}(t_i + 0) = x^{(j)*} = \Phi^{(j1)}(x^{(j-1)}, t_i, \bar{\alpha}), j = 1, N,$$

$$x^{(j)}(t_{jk} + 0) = \Phi^{(jk)}(x^{(j)}, t_{jk}, \bar{\alpha}), j = \overline{1, N}, k = \overline{2, K_j},$$

$$\psi_{\alpha}(x^{(j-1)}, t_{jk}, \bar{\alpha}) = 0, x(t_0) = x_0.$$

Тут функції

$$f^{(jk)} : R^{n_j} \times \tau_{jk} \times R^n \rightarrow R^{n_j}, j = 1, 2, \dots, N,$$

$k = 1, 2, \dots, K_j$ , тобто на кожному проміжку часу змінюється розмірність фазового простору та система має переключення на кожному з проміжків зі сталою розмірністю фазового простору. Послідовність  $n_i, i = \overline{1, m}$  будь-яка скінчена підпослідовність натуральних чисел. Припускається, що система співвідношень така, що для будь-якого вектору параметрів з деякої множини можна однозначно побудувати розв'язки на відрізку  $[T_0, T_1]$ .

В подальших роботах будемо досліджувати практичну стійкість таких систем та проведемо аналіз чутливості в залежності від зміни параметрів.

### Висновки.

Запропонована математична модель є достатньо загальною і може описувати динаміку багатьох достатньо складних економічних процесів. Дослідження практичної стійкості та чутливості для таких моделей є дуже актуальними задачами, комплексне вирішення яких дасть відповіді на деякі економічні питання.

### Список використаних джерел

1. Косачев Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур - М: Логос, 2004. - 245с.
2. Дементьев В.Е. Инвестиционные и инновационные достоинства финансово-промышленных групп //Эконом. и мат. методы, Т.32, № 2, 1996. - С. 25-37.
3. Косачев Ю.В. Исследование устойчивости динамической модели финансово-промышленной корпоративной структуры //Эконом. и мат. методы, Т.36, № 1, 2000.
4. Косачев Ю.В. Эффективность корпоративной структуры, реализующей инновации // Эконом. и мат. методы, Т.37, № 3, 2001. - С. 36-51.
5. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметрических систем: Навчальний посібник - К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". 2006. - 115с.
6. Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Аналіз та оцінка параметрических систем: Навч. посібник. - К.: 1995. - 140с.
7. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженнями структур. - Чернівці: Рута, 1995. - 155с.

Надійшла до редколегії 08.01.09

УДК 519.21

Бондарев Б.В., докт. ф.-м. н., проф.,  
Козир С.М., аспірант

## До питання про $\varepsilon$ -достатнє управління в одній задачі Р. Мертона

Розглянуто задачу Р. Мертона про знаходження стратегій інвестування і споживання у випадку, коли еволюція ризикового активу описується експоненціальною моделлю, в якій основним процесом є "фізичний" білий шум. Ключові слова: "фізичний" білий шум, експоненційна модель,  $\varepsilon$ -достатнє управління.

\*E-mail: tvmc81@mail.ru  
Статтю представив д. ф.-м. н., с.н.с. Буй Д.Б.

### 1. Вступ. Постановка задачі.

У роботі [1] Р. Мертон розглянув таку задачу: нехай еволюція ціни  $Z(t)$  ризикового активу (акції) описується моделлю П. Самуельсона [2], тобто

$$Z(t) = Z(0) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (1)$$

і «основним» процесом є  $W(t)$  - деякий стандартний вінерів процес, тобто інтеграл від білого шуму  $\dot{W}(t)$ ;  $\mu > 0$  - середня прибутковість,  $\sigma$  - коефіцієнт волатильності. Добре відомо, що модель П. Самуельсона неарбітражна [2], тобто її можна використовувати для математичного моделювання еволюції ціни акції. Р. Мертон розглянув наступну задачу: нехай у кожен момент часу  $0 \leq t \leq T$  інвестор, що має на момент часу  $t$  капітал  $X(t)$ , частину капіталу  $(1-u)X(t)$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) вкладає на банківський рахунок під процентну ставку  $r > 0$ . На частину капіталу  $uX(t)$ , що залишилась, скуповує акції, ціна кожної на момент часу  $t$  складає величину  $Z(t)$ . Природним робити припущення, що  $\mu > r$ , хоча має сенс розглядати й інші випадки (довгі та короткі позиції). В кожен момент часу  $t$  при наявності капіталу  $x$  відбувається споживання капіталу зі швидкістю  $u_1(t, x)$ . Нехай  $0 < \gamma < 1$ , а функція виплат має вигляд

Bondarev B.V., Doctor of Science, Professor  
Kozir S.M., Ph.D.student

About  $\varepsilon$ -sufficient control in the Merton's problem.

Merton's problem of finding of investment and consumption strategies is considered in the case of the risk assets evolution described by an exponential model, when "physical" white noise was chosen as a main process.

Key Words: "physical" white noise, exponential model,  $\varepsilon$ -sufficient control.

$$V(t, x, u, u_1) = M \int_t^T e^{-\rho s} \left[ u_1(s, X_{t,x}^u(s)) \right]^\gamma ds, \quad (2)$$

- де процес еволюції капіталу  $X_{t,x}^u(s)$  на момент часу  $t$  починається з капіталу  $x$ , тобто  $X_{t,x}^u(t) = x$  (випадок  $0 < \gamma < 1$  відповідає поведінці інвестора, не скильного до ризику,  $\rho > 0$  - коефіцієнт неперервного дисконтування). Р. Мертон знайшов оптимальні управління  $\bar{u}, \bar{u}_1$  і ціну управління, тобто  $V(t, x) = V(t, x, u, u_1) =$

$$= \sup_{u, u_1} V(t, x, u, u_1) = \sup_{u, u_1} M \int_t^T e^{-\rho s} \left[ u_1(s, X_{t,x}^u(s)) \right]^\gamma ds$$

Виявилось, що

$$\bar{u} = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)}, \quad \bar{u}_1(t, x) = \left[ e^{\rho t} g(t) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} x \quad (3)$$

$$\nu = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r, \quad V(t, x) = g(t)x^{\gamma},$$

$$g(t) = e^{-\rho t} \left[ \frac{1-\gamma}{\rho - \nu \gamma} \left( 1 - e^{-\frac{(\rho - \nu \gamma)(T-t)}{1-\gamma}} \right) \right]^{1-\gamma}.$$

Надалі будемо розглядати тільки випадок  $0 \leq \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} \leq 1$ , тобто не розглядається довгі позиції. Випадок  $\frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} > 1$  тягне за собою

$\bar{u} = 1$ .

На практиці замість вінерового процесу у формулі (1), як правило, присутній інтеграл від «фізичного» білого шуму, тобто у якості «основного» процесу береться

$$W_t^\varepsilon = \int_0^t \dot{W}_s^\varepsilon ds, \text{ такий, що } W_t^\varepsilon, t \in [0, T]$$

збігається при  $\varepsilon \rightarrow 0$  у слабкому сенсі до вінерового процесу  $\sigma W(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , випадковий процес  $\dot{W}_t^\varepsilon, t \geq 0$  - «фізичний» білий шум. У деяких випадках має місце гауссовість та корельованість приростів процесу  $W_t^\varepsilon$ , більш того, аналізуючи поведінку логарифма ціни акції

$$Z_\varepsilon(t) = Z(0) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma W_t^\varepsilon \right\} \quad (4)$$

з часом, переконуємося у тому, що процес

$$\ln Z_\varepsilon(t) = \ln Z(0) + \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma \dot{W}_t^\varepsilon \right\}, \text{ як}$$

функція  $t \geq 0$ , має кореляційну функцію вигляду

$$R_{W_\varepsilon}(t, s) = \varepsilon \int_0^t \int_0^s R_\xi(\alpha - \beta) d\alpha d\beta,$$

де  $R_\xi(\tau)$  - деяка кореляційна функція, причому

$$DW_s(t) = R_{W_\varepsilon}(t, t) = \varepsilon \int_0^t \int_0^s R_\xi(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = \\ = \sigma^2 t + o(\varepsilon), t \in [0, T], o(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким чином,  $W_t^\varepsilon$  можна подати у вигляді

$$W_t^\varepsilon = \int_0^t 1/\sqrt{\varepsilon} \xi(s/\varepsilon) ds, \text{ де } \xi(t), t \geq 0 \text{ - деякий}$$

центртований стаціонарний гауссів процес. Нехай  $f(\lambda)$  - спектральна щільність процесу  $\xi(t)$ .

Вона як правило, задовільняє умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty.$$

Така модель не відповідає загально прийнятій теорії, наприклад з точки зору теорії арбітражності. Нехай має місце зображення

$$\int_0^t 1/\sqrt{\varepsilon} \xi(s/\varepsilon) ds = \sqrt{\varepsilon} \tilde{V}(t/\varepsilon) + \sigma W_s(t),$$

де  $W_s(t)$  - деяка сім'я стандартних вінерових процесів, а  $\tilde{V}(t), t \geq 0$  - стаціонарний гауссів про-

цес. Таке подання має місце, наприклад, коли

$$\xi(t) = \xi(0) - \gamma \int_0^t \xi(s) ds + \sigma W(t) - \text{процес Орнштейна - Уленбека з випадковою початковою умовою } \xi(0), \text{ незалежно від } W(t), \text{ розподіл якої співпадає з ергодичним розподілом, а також для ряду інших гауссівих процесів. В цьому випадку має місце } \delta(\varepsilon) \text{- арбітражність моделі}$$

$$Z(t) = Z(0) \times$$

$$\times \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sqrt{\varepsilon} \tilde{V}(t/\varepsilon) + \sigma W_\varepsilon(t) \right\} \text{ в тому}$$

сенсі, що  $M \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_\varepsilon(t) - \tilde{Z}_\varepsilon(t)| \leq \delta(\varepsilon)$ , де

$$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, \text{ а процес}$$

$$\tilde{Z}_\varepsilon(t) = Z(0) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_\varepsilon(t) \right\} \quad (5)$$

є мартингалом відносно  $\tilde{P}_\varepsilon = \rho_\varepsilon P_\varepsilon$ , де (див. [2])

$$\rho_\varepsilon = \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} t - \frac{\mu}{\sigma} \sigma W_\varepsilon(t) \right\} \text{ щільність міри}$$

$\tilde{P}_\varepsilon$  відносно міри  $P_\varepsilon$ . Тобто модель з процесом

$\tilde{Z}_\varepsilon(t)$ , що описує еволюцію ціни акції, неарбітражна та є моделлю П. Самуельсона (1).

Модель (4) буде  $\delta(\varepsilon)$ -арбітражною, тобто арбітраж можливий, але не більш ніж на величину  $\delta(\varepsilon)$  (див. лему 2). В силу того, що арбітраж в моделі (4) з'являється за рахунок випадкового центрованого процесу  $\sqrt{\varepsilon} \tilde{V}(t/\varepsilon)$ , неможливо стверджувати, що арбітраж буде на користь інвестора, а не продавця акції. Тобто інвестування всього капіталу тільки в акції може привести до зворотнього ефекту. Специфіка розв'язку задачі Р. Мертона в цьому випадку буде полягати в тому, що в даному випадку  $X_\varepsilon(t)$  - процес, що описує еволюцію капіталу інвестора, не буде марковським. Тому буде показано, що використання для управління процесом  $X_\varepsilon(t)$  оптимальних управлінь (3) дасть нам ефект (у сенсі плати (2)), не менший, ніж деяка величина (наприклад, деяка задана середня дисконтувана величина споживання за весь період мінус  $\rho_\varepsilon$ , де

$\rho_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ ). Якщо ця величина нас не влаштовує, то будемо вважати, що управління (3)

$\rho_\varepsilon$  - достатні для управління процесом  $X_\varepsilon(t)$ .

## 2. Допоміжні результати. Необхідні факти

Нехай  $\xi(t)$ - стаціонарний гауссів процес зі спектральною щільністю  $f(\lambda)$ , що задовільняє умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty. \quad (6)$$

Тоді процес  $\xi(t)$  можна подати (див. [3, стор. 295]) у вигляді

$$\xi(t) = \int_0^t a(\tau) dW_{t-\tau} = \int_{-\infty}^t a(t-\tau) dW_\tau. \quad (7)$$

де  $W(\Delta t)$  - проінтегрований за проміжком  $\Delta$  білий шум такий що,  $MW_\Delta = 0$ ,  $MW_\Delta^2 = |\Delta|$ . Вважаємо, що процес білого шуму, заданий на всій часовій вісі, крім того величина  $W_\Delta$  має нормальній розподіл.

Процес  $\xi(t)$  є визначенним [4], якщо

$$\int_0^{+\infty} a^2(\tau) d\tau < +\infty. \quad (8)$$

З (7) маємо

$$M\xi^2(t) = M \left[ \int_{-\infty}^t a(t-\tau) W(d\tau) \right]^2 = \\ = \int_{-\infty}^t a^2(t-\tau) d\tau = \int_0^t a^2(\tau) d\tau = m_2^\xi. \quad (9)$$

Надалі додатково до (7) будемо також припускати, що виконуються умови

$$\int_0^{+\infty} |a(s)| ds < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^s |a^2(\tau)| d\tau \right\}^{1/2} ds < +\infty, \\ \int_0^{+\infty} \left[ \int_s^{+\infty} |a(\tau)| d\tau \right]^2 dt < +\infty. \quad (10)$$

Введемо наступний процес (див [4],[5])

$$V(t) = \int_0^t M \{ \xi(\tau) / \mathfrak{Z}_\tau \} d\tau.$$

Неважко помітити [5], що

$$V(t) = \int_0^t M \left\{ \int_{-\infty}^t a(\beta\tau - s) dW_\tau / \mathfrak{Z}_\tau \right\} d\tau + \\ = \int_{-\infty}^t \left( \int_{t-s}^{+\infty} a(\tau) d\tau \right) dW_\tau.$$

Процес  $V(t)$  є визначенним [4, с.221], якщо виконано умову (10). Процес  $V(t)$  - стаціонарний гауссів процес з нульовим середнім, другий момент якого дорівнює

$$MV^2(t) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_s^{+\infty} a(\tau) d\tau \right]^2 ds = m_2^V. \quad (11)$$

Запишемо стохастичний диференціал для процесу  $V(t)$ . Неважко помітити [5], що

$$dV(t) = -\xi(t) dt + \int_0^{+\infty} a(\tau) d\tau dW_\tau. \quad (12)$$

З (12) випливає зображення

$$\int_0^t \xi(s) ds = V(t) - V(0) + \sigma W_t, \quad \sigma = \int_0^{+\infty} a(\tau) d\tau. \quad (13)$$

## 3. Основний результат

Лема 1. Нехай  $\tilde{V}(t) = V(t) - V(0)$ . При виконанні умов (10), має місце оцінка

$$\varepsilon^m M \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{V}(t/\varepsilon)|^{2m} \leq A(\varepsilon H)^{m-1} m!, \quad (14)$$

де

$$H = 18 \left( 2m_2^V + m_2^\xi + 2\sigma^2 \right), \quad A = \frac{H(1+T)}{e^{1/24} \sqrt{\pi}}. \quad (15)$$

Доведення. З (15) випливає, що

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |V(t)|^{2m} \leq \\ \leq 3^{2m-1} \left( |V(0)|^{2m} + \int_0^1 |\xi(t)|^{2m} dt + \sigma^{2m} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t|^{2m} \right)$$

В силу нерівності для мартингалів з [4] маємо

$$M \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t|^{2m} \right) \leq 4^m (2m-1)!! \quad (17)$$

З (16), враховуючи (1), маємо

$$M \sup_{0 \leq t \leq 1} |V(t)|^{2m} \leq \\ \leq \left[ 9(m_2^V + m_2^\xi + 2\sigma^2) \right]^m (2m-1)!! \quad (18)$$

Тепер  $\sup_{0 \leq t \leq 1} |V(t)|^{2m} \leq \sum_{i=0}^{[T/\varepsilon]} \sup_{i \leq t \leq i+1} |V(t)|^{2m}$ . З останньої нерівності, оцінки (18) та стаціонарності процесу  $V(t)$  маємо

$$\varepsilon^m M \sup_{0 \leq t \leq 1} |V(t/\varepsilon)|^{2m} \leq \varepsilon^m \sum_{i=0}^{[T/\varepsilon]} M \sup_{i \leq t \leq i+1} |V(t)|^{2m} \leq \\ \leq \varepsilon^{m-1} (T+1) \left[ 9(m_2^V + m_2^\xi + 2\sigma^2) \right]^m (2m-1)!!$$

З останнього та того, що

$$\begin{aligned} \varepsilon^m M \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{V}(t/\varepsilon)|^{2m} &= \varepsilon^m M \sup_{0 \leq t \leq T} |V(t/\varepsilon) - V(0)|^{2m} \leq -\exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_\varepsilon(t) \right\} \leq \\ &\leq \varepsilon^m 4^m \left[ M \sup_{0 \leq t \leq T} |V(t/\varepsilon)|^{2m} + M |V(0)|^{2m} \right] \leq \\ &\leq \varepsilon^{m-1} (1+T) \left[ 36 \left( 2m_2^\nu + m_2^\xi + 2\sigma^2 \right) \right]^m (2m-1)!! \leq \\ &\leq \varepsilon^{m-1} (1+T) \left[ 18 \left( 2m_2^\nu + m_2^\xi + 2\sigma^2 \right) \right]^m \times \\ &\times \frac{(2m)^{2m} e^{-2m+\frac{1}{24m}} \sqrt{2\pi 2m}}{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}} \leq \\ &\leq \varepsilon^{m-1} (1+T) \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{1}{24}} \sqrt{2\pi}} \left[ 18 \left( 2m_2^\nu + m_2^\xi + 2\sigma^2 \right) \right]^m \times \\ &\times m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m} \leq \\ &\leq \varepsilon^{m-1} (1+T) \frac{1}{e^{\frac{1}{24}} \sqrt{2\pi}} \left[ 18 \left( 2m_2^\nu + m_2^\xi + 2\sigma^2 \right) \right] \times \\ &\times \left[ 18 \left( 2m_2^\nu + m_2^\xi + 2\sigma^2 \right) \right]^{m-1} m! = A(\varepsilon H)^{m-1} m!, \end{aligned}$$

-маємо твердження леми 1 – оцінку (14).

Припустимо, що ціна акції описується процесом  $Z_\varepsilon(t), 0 \leq t \leq T$ . Доведемо справедливість

наступного твердження. Нехай  $W_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} W_{t/\varepsilon}$ , а  $\tilde{Z}_\varepsilon(t)$  задається формулою (5).

**Лема 2.** При виконанні умов (6), (10), коли

$m \geq 2, 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2H} \sqrt{\frac{2m-1}{4m}}$  має місце оцінка

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_\varepsilon(t) - \tilde{Z}_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^{\frac{m-1}{2m}} C(T, m), \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} C(T, m) &= \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \frac{2\sigma^2}{(2m-1)} T \right\} \times \\ &\times \left[ AH^{m-1} m! \right]^{\frac{1}{4m}} \times \end{aligned} \quad (20)$$

$$\times \left[ e^{\frac{4m}{2m-1}} + 1 + A \sqrt{\frac{4m}{2m-1}} \right]^{\frac{2m-1}{4m}}.$$

**Доведення.** З урахуванням (13), має місце оцінка

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) ds \right\} - \right.$$

$$\begin{aligned} &\leq \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} T \right\} \left( M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \tilde{V} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right|^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}} \times \\ &\times \left( M \sup_{0 \leq t \leq T} \exp \left\{ \sigma \frac{4m}{2m-1} W_\varepsilon(t) \right\} \right)^{\frac{2m-1}{4m}} \times \\ &\times \left( M \sup_{0 \leq t \leq T} \exp \left\{ \frac{4m}{2m-1} \left| \sqrt{\varepsilon} \tilde{V} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right| \right\} \right)^{\frac{2m-1}{4m}}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq t \leq T} \exp \left\{ \frac{4m\sigma}{2m-1} W_\varepsilon(t) \right\} &\leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{8m\sigma^2 T}{(2m-1)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

В силу (14) при  $m = 2$  маємо оцінку

$$\varepsilon^2 M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \tilde{V} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right|^4 \leq \varepsilon^2 A H.$$

Тоді

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq t \leq T} \exp \left\{ \frac{4m}{2m-1} \left| \sqrt{\varepsilon} \tilde{V} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right| \right\} &\leq \\ &\leq M \sup_{0 \leq t \leq T} \exp \left\{ \frac{4m}{2m-1} \left| \sqrt{\varepsilon} \tilde{V} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right|^4 \right\} + e^{\frac{4m}{2m-1}} \leq \\ &\leq e^{\frac{4m}{2m-1}} + 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \left( \frac{4m}{2m-1} \right)^r \frac{1}{r!} M \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \tilde{V} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right|^{4r} \right\} \leq \\ &\leq e^{\frac{4m}{2m-1}} + 1 + \sqrt{\frac{4m}{2m-1}} \sum_{r=1}^{+\infty} A \left( \varepsilon H \sqrt{\frac{4m}{2m-1}} \right)^{2r-1} \leq \\ &\leq e^{\frac{4m}{2m-1}} + 1 + A \sqrt{\frac{4m}{2m-1}} \end{aligned} \quad (23)$$

Підставляючи оцінки (23), (22) в (21) маємо з урахуванням оцінки (14) твердження леми 2 – оцінку (19).

Нехай в момент часу  $t$  маємо капітал  $X_\varepsilon(t)$ . Частку  $(1-u)X_\varepsilon(t)$ ,  $0 \leq u \leq 1$  покладемо на банківський рахунок під процентну ставку  $r > 0$ , на решту  $uX_\varepsilon(t)$  купимо акції за ціною  $Z_\varepsilon(t)$  за кожну. Таких акцій можемо закупити  $uX_\varepsilon(t)/Z_\varepsilon(t)$  одиниць (окрім того можемо

купувати і частину акцій). На момент часу  $t + \Delta t$  ціна акції складатиме  $Z_\varepsilon(t + \Delta t)$ . Неважко помітити, що з точністю до нескінченно малих вищого порядку

$$Z_\varepsilon(t + \Delta t) = Z_\varepsilon(t) \left[ 1 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Delta t \right].$$

На банківському рахунку тоді буде сума  $(1 - u)X_\varepsilon(t)(1 + r\Delta t)$ , споживання за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$  складе величину  $u_1(t, X_\varepsilon(t))\Delta t$ . Враховуючи сказане, складемо балансову рівність. З точністю до нескінченно малих вищого порядку маємо

$$X_\varepsilon(t + \Delta t) = (1 - u)X_\varepsilon(t)(1 + r\Delta t) +$$

$$+ uX_\varepsilon(t) \left[ 1 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Delta t \right] -$$

$$- u_1(t, X_\varepsilon(t))\Delta t.$$

Переходячи в (24) до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримаємо

$$dX_\varepsilon(t) = (1 - u)X_\varepsilon(t)r dt +$$

$$+ uX_\varepsilon(t) \left[ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Delta t \right] dt -$$

$$- u_1(t, X_\varepsilon(t))dt, \quad X_\varepsilon(0) = X(0).$$

У випадку (5)

$$dX^\varepsilon(t) = (1 - u)X^\varepsilon(t)r dt + uX^\varepsilon(t) +$$

$$+ [\mu + \sigma dW_\varepsilon(t)] dt - u_1(t, X_\varepsilon(t))dt,$$

$$X_\varepsilon(0) = X(0)$$

балансове рівняння задачі Р.Мертона, яке має такий же самий вигляд, як і у випадку моделі П.Самуельсона. В силу того, що реалізації цін акцій моделі (4) та моделі (5) близькі (див. (19)), а функціонал вартості є середнє сумарне споживання, то для управління системою (25) можна спробувати використати оптимальні управління для системи (26), тобто скористатися управліннями (3).

За функціонал вартості візьмемо інтегральне сумарне споживання

$$V(0, X(0), u, u_1) = \int_0^T e^{-\rho s} M[u_1(s, X_\varepsilon(s))] ds.$$

Нехай клас допустимих управлінь для  $u_1(t, x)$  складається з функцій таких, що  $u_1(t, x) \geq 0$  та рівняння (26), (27) мають "сильний" розв'язок. Підставляючи в (26) замість  $u$  та  $u_1(t, x)$

управління  $\bar{u}, \bar{u}_1(t, x)$  з (3), будемо мати для описання еволюції лінійне рівняння

$$dX_\varepsilon(t) = (1 - \bar{u})X_\varepsilon(t)r dt +$$

$$+ \bar{u}X_\varepsilon(t) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) dt - [e^{\rho t} g(t)]^{1/(r-1)} X_\varepsilon(t) dt,$$

$$X_\varepsilon(0) = X(0).$$

Розв'язуючи (27), матимемо

$$X_\varepsilon(t) = X(0) \exp \left\{ \left[ (1 - \bar{u})r + \bar{u} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] t - \int_0^t [e^{\rho s} g(s)]^{1/(r-1)} ds + \bar{u} \int_0^t 1/\sqrt{\varepsilon} \xi(s/\varepsilon) ds \right\}. \quad (28)$$

Запишемо (28) у іншому вигляді. Нехай  $k = \frac{\rho - \gamma \nu}{1 - \gamma}$ , тоді

$$\int_0^T [e^{\rho s} g(s)]^{1/(r-1)} ds = k \int_0^T [1 - e^{-k(T-s)}]^{-1} ds =$$

$$= kt - \ln \frac{1 - e^{-k(T-s)}}{1 - e^{-kT}}. \quad (29)$$

Підставляючи (29) у (28), матимемо

$$X_\varepsilon(t) = X(0) \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{1 - e^{-kT}} \exp \{ \bar{u} W_\varepsilon \} \times$$

$$\times \exp \left\{ \left[ (1 - \bar{u})r + \bar{u} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] t - kt \right\}. \quad (30)$$

Неважко помітити, що розв'язок задачі (26) при управліннях (3) також можна записати у вигляді

$$X^\varepsilon(t) = X(0) \exp \left\{ \left[ (1 - \bar{u})r + \bar{u} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] t - kt \right\} \times$$

$$\times \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{1 - e^{-kT}} \exp \{ \bar{u} \sigma W_\varepsilon(t) \}. \quad (31)$$

Значення функціонала вартості на траекторіях (31) при оптимальному управлінні (3) дорівнюють

$$\int_0^T e^{-\rho s} M[X^\varepsilon(s)] ds = V(0, X(0)) =$$

$$= X^\varepsilon(0) \left[ \frac{1 - \gamma}{\rho - \gamma \nu} \left( 1 - e^{-\frac{-k(\rho - \gamma \nu)T}{1 - \gamma}} \right) \right]^{1-\gamma}. \quad (32)$$

**Теорема.** Якщо для управління системою (25) інвестор скористається оптимальними управліннями для системи (26), тоді, якщо  $m \geq 2$  -

фіксоване,  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2H} \sqrt{\frac{2m-1}{4m}}$ , то ефект від

такого управління (в сенсі плати (2)) буде не менш, ніж величина

$$X'(0) \left[ \frac{1-\gamma}{\rho - \nu \gamma} \left( 1 - e^{-\frac{k(\rho-\nu\gamma)T}{1-\gamma}} \right) \right]^{1-\gamma} - \quad (33)$$

$$- \varepsilon^{\frac{m-1}{4m}} C(T, k),$$

де

$$C(T, k) =$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{X(0)k}{1 - e^{-kT}} \right)^{\gamma} [\rho + ky]^{-1} \times \left[ 1 - e^{-(\rho+ky)T} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ (1 - \bar{u}) \gamma r T + \bar{u} \left| \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right| \gamma T \right\} \times \\ &\times \bar{u} \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2 \gamma^2 \bar{u}^2}{2} \right| T \right\} \exp \left\{ \frac{2\sigma^2 \gamma^2 \bar{u}^2 T}{2m-1} \right\} \times \\ &\times \left[ e^{\frac{4m\bar{u}}{2m-1}} + 1 + A \sqrt{\frac{4m\bar{u}}{2m-1}} \right]^{2m-1/4m} \left[ AH^{m-1} m! \right]^{1/4m}. \end{aligned}$$

#### Доведення.

Подібно (19), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \exp \{ \bar{u} \sigma W_e(t) \} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ \bar{u} \int_0^t 1/\sqrt{\varepsilon} \xi(s/\varepsilon) ds \right\} \right| \leq \\ \leq \varepsilon^{\frac{m-1}{4m}} \bar{u} \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2 \gamma^2 \bar{u}^2}{2} \right| T \right\} \exp \left\{ \frac{2\sigma^2 \gamma^2 \bar{u}^2 T}{2m-1} \right\} \times \\ \times \left[ e^{\frac{4m\bar{u}}{2m-1}} + 1 + A \sqrt{\frac{4m\bar{u}}{2m-1}} \right]^{2m-1/4m} \left[ AH^{m-1} m! \right]^{1/4m}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T e^{-\rho s} M \left[ \bar{u}_1(s, X^e(s)) \right]^r ds - \int_0^T e^{-\rho s} M \left[ \bar{u}_1(s, X_e(s)) \right]^r ds \right| \leq \\ &\leq k^r \int_0^T e^{-\rho s} \left( 1 - e^{-k(T-s)} \right)^{-r} X'(0) \left( \frac{1 - e^{-k(T-s)}}{1 - e^{-kT}} \right)^r \times \\ &\times \exp \left\{ (1 - \bar{u}) r y s + \bar{u} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) y s - k y s \right\} ds \times \\ &\times \sup_{0 \leq s \leq T} M \left| \exp \{ \bar{u} \sigma W_e(s) \} - \exp \{ \bar{u} W_e(s) \} \right|, \end{aligned}$$

матимемо (33).

#### 4. Висновки.

Припустимо, що перед нами поставлена задача: для заданого функціоналу вартості знайти

оптимальне управління деякою детермінованою системою, що знаходиться під впливом випадкових збурень достатньо складної структури, які залежать від параметру  $\varepsilon > 0$ . Якщо при прямуванні  $\varepsilon$  до 0 випадкові збурення в слабкому сенсі збігаються до вінерового процесу, то при малих  $\varepsilon > 0$  розв'язок початкової системи у метриці Леві-Прохорова буде близьким до розв'язку граничної задачі, яка описується рівнянням. Іто при будь-яких управліннях з класу допустимих.

Показано, що використовуючи оптимальні управління, знайдені для граничної задачі, для управління розв'язком початкової задачі отримаємо ефект (у сенсі плати (2)), який буде не меншим, ніж деяка розрахована величина мінус величина  $\delta(\varepsilon)$ , яка прямує до 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\delta(\varepsilon)$  вписано в явному вигляді). Якщо ефект від такого управління нас вдається, то будемо говорити, що застосоване управління  $\delta(\varepsilon)$  - достатнє.

Автори глибоко вдячні проф., док. фіз. – мат. наук Ю.С. Мішурі за увагу до роботи.

#### Список використаних джерел

1. Merton R.C. Optimum Consumption and Portfolio Rules in Continuous Time Model. //Journal of Economic Theory. – 1971, №3. – P.373–413.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998. – 544с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ. Том 45, Москва 1989, С.159–251.
5. Бондарев Б.В., Козырь С.М. Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом и решения соответствующего уравнения. Итоги. // Прикладная статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2006, №2. – С. 63 – 91.

Надійшла до редакції 17.11.2008

УДК 517.972:004.932.75

Верченко А.П., к. ф.-м. н.,  
Савка Ю.О., студент

## Сегментація рядків в рукописних документах на основі моделі Мамфорда-Шаха

Реалізовано алгоритм виділення рядків в рукописних документах. На першому етапі робиться розмивання зображення за допомогою Гаусіана спеціальної структури. Далі процес сегментації зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних. На основі морфологічних операцій видаляються прогалини між словами та зв'язки між рядками.

**Ключові слова:** сегментація, модель Мамфорда-Шаха, метод наборів рівнів.

E-mail: [an.verchenko@gmail.com](mailto:an.verchenko@gmail.com), [urisavka@gmail.com](mailto:urisavka@gmail.com)

Статтю представив доктор техн. наук Гаращенко Ф.Г.

### Вступ

Сегментація зображення тексту є важливим етапом в обробці документів. На даний момент існує багато методів, які гарно працюють для друкованих текстів. Ці підходи базуються на певних обмеженнях, як наприклад фіксована відстань між рядками чи рівномірність рядків. Тому для цих методів є характерною обмеженістю прикладів, на яких вони працюють, що не дозволяє використовувати їх на рукописних текстах, де в кожному конкретному випадку можуть не виконуватися априорі визначені умови [1].

Сегментація рукописних текстів досі залишається відкритою проблемою. Актуальним підходом, на даний момент, є використання методів, що практично не залежать від обставин і є достатньо універсальними. Одним з таких алгоритмів є метод наборів рівнів (*Level-set method*) [2], на якому базується велика кількість сучасних підходів у цьому напрямку. Даний підхід, інтерпретований для конкретної задачі, дає непогані результати, дозволяючи обійти низку проблем, характерних для аналогічних методів розпізнавання. В роботі також використано кілька додаткових методів морфологічної обробки зображень.

1. Загальна постановка задачі сегментації.  
Зображення  $u: \Omega \rightarrow R^1$  може бути визначене як обмежена додатна дійсна функція на якісь

A.P. Verchenko, Ph.D.,  
Y.O. Savka, student.

## Text line segmentation in hand-written documents using Mumford-Shah model

We realized a new text line segmentation method based on the Mumford-Shah model and mathematical morphology. At first we smooth image using special Gaussian filter. Then we do segmentation process, based on solving partial differential equations. Then we delete gaps between words and connections between lines.

**Key Words:** text line detection, Mumford-Shah model, level set method.

(прямокутній) області  $\Omega \subset R^2$ . Позначимо його межу через  $\partial\Omega$ . Зазвичай, в обробці зображень  $u_0 \in \{0, 1, \dots, 255\}$ , тобто зображення розглядається у відтінках сірого. Позначимо через  $C: [0; 1] \rightarrow \Omega$  криву, яка буде використовуватися як лінія рівня і припустимо, що  $C$  – кусково-неперервна на  $[0; 1]$ .

**Означення 1.** (Задача сегментації зображення) Нехай  $u_0$  – зображення з  $\Omega$ . Припустимо, що  $\Omega$  може бути розділена на області  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ , де для деякої властивості зображення  $P$ ,  $u_0|_{\Omega_1}$  відрізняється від  $u_0|_{\Omega_2}$ . Необхідно знайти криву  $C \in \Omega$  таку, що ділить  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Тут властивість  $P$  – є, як правило, інтенсивністю зображення (функцією значення  $u_0$ ), але може бути також структурою, шаблоном кривизни тощо [3].

Обумовлений підхід у вирішенні проблеми сегментації зображення – почати з деякого початкового припущення  $C(0) = C_0$  і розвивати  $C(t)$  в залежності від часу диференціальних рівняння в частинних похідних  $C_t(t) = F(C(t))$ , таких, що  $C = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$  і вирішує задачу. Іншими словами, в ідеалі, модель повинна досягти стійкого стану, коли  $C(t)$  є розв'язком. (див. рис.1).



Рис.1: Розвиток  $C$  до межі  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ .

Розвиток кривої може відбуватися за рахунок мінімізації функціоналу певного вигляду (так званого функціоналу Мамфорда-Шаха (*Mumford-Shah Functional*) [2–5]):

$$F^{MS}[u, C] = \mu \cdot \text{length}(C) + \lambda \int_{\Omega} |u_0 - u|^2 dx + \\ + \nu \int_{\partial C} |\nabla u|^2 dx, \quad (2)$$

де  $u$  – зображення (можливо зашумлене),  $\text{length}(C)$  – довжина дуги,  $\mu > 0, \lambda > 0$  – параметри. Результат мінімізації:

$$\inf_{u, C} F^{MS}[u, C], \quad (3)$$

це зображення, гладке в наборі регіонів  $R$  з чіткими межами  $C$ . Таким чином, в результаті мінімізації (3) ми повинні отримати зображення  $u$  з постійними  $c_i$  в кожному  $R_i$  ( $c_i$  – це середні значення інтенсивності  $P$  для кожного регіону).

Розглянемо, яким чином кожен параметр у функціоналі (2) сприяє мінімізації (3). Перший параметр  $\mu$  «примушує»  $C$  бути відносно гладкою на границях, тоді як параметр  $\nu$  відповідає за гладкість в районах, що не входять в  $C$ . Параметр  $\lambda$  відповідає за близькість  $u$  і  $u_0$ .

Одним із способів мінімізації даного функціоналу є так званий метод наборів рівнів (*Level-set method*). Ідея цього методу вперше запропонована в [6]; при цьому використовується факт, що при розгляді кривої  $C(s)$  як нульової горизонтальної кривої поверхні  $\phi(x, y)$  спрощується структуризація даних, наприклад зміна в топологічній структурі (див. рис.2).



Рис.2: Схематична діаграма еволюції у часі функції набору рівня (знизу) і кривої  $C$  (зверху) [4].

Це добре підходить для даного типу задач обробки зображень, так як зображення безпосередньо може розглядатися як поверхня  $u(x)$  із значенням інтенсивності в точці  $x$ .

*Модель активного контуру без країв* будеться на наступній ідеї: нехай  $\Omega_1 = \langle \text{inside}(C) \rangle$  – область обмежена дугою  $C$ , а  $\Omega_2 = \langle \text{outside}(C) \rangle = \Omega \setminus \Omega_1$ . Нехай масмо зображення  $u$  і замкнену криву  $C$ , нехай  $c_1$  і  $c_2$  – середні значення  $u$  в областях  $\langle \text{inside}(C) \rangle$  і  $\langle \text{outside}(C) \rangle$  відповідно. Визначимо функціонал  $F_i(C)$ ,  $i=1, 2$  як

$$F_1(C) = \int_{\text{inside}(C)} |u_0 - c_1|^2 dx, \quad F_2(C) = \int_{\text{outside}(C)} |u_0 - c_2|^2 dx.$$

За умови, що  $u$  складається з двох областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  з межею  $C$ , кожна з майже постійною інтенсивністю, масмо, що

$$\inf_C \{F_1(C) + F_2(C)\} = F_1(C^*) + F_2(C^*) = 0.$$

З додатковими мінімізуючими параметрами ми маємо наступну модель:

**Означення 2. (Активний контур без країв).**

Нехай,  $p \geq 2$  і

$$F(C) = \mu \cdot (\text{length}(C)) + \nu \cdot \text{area}(\text{inside}(C)) + \\ + \lambda_1 F_1(C) + \lambda_2 F_2(C). \quad (4)$$

Якщо  $C^*$  таке, що  $F(C^*) = \inf_C F(C)$ , тоді  $C^*$  є розв'язком задачі сегментації.

Відзначимо, що ця модель – окремий випадок «the minimal partition problem» [3, 4], де мінімізуюча функція  $u$ , розглядається в класі кусково-постійних функцій:

$$u = \begin{cases} \text{average}(u_0), & \text{inside}(C) \\ \text{average}(u_0), & \text{outside}(C). \end{cases}$$

Метод набору рівнів полягає у наступному: Введемо функцію набору рівнів  $\phi$  таку, що  $C = \{x \in \Omega \mid \phi(x) = 0\}$ . Визначимо функцію  $H(s)$  як

$$H(s) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s \geq 0 \\ 0, & \text{якщо } s < 0, \end{cases}$$

і розглянемо дельта функцію Дірака  $\delta(s)$ , яка буде похідною від  $H(s)$  ( $\nabla H(x) = \delta(x)$ ). В [3] показано, що

$$\text{length}(C) = \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x))| dx,$$

$$\text{area}(\text{inside}(C)) = \int_{\Omega} H(\phi(x)) dx.$$

Переозначимо інтегали  $\langle \text{inside}(C) \rangle$  і  $\langle \text{outside}(C) \rangle$  як:

$$\text{inside}(C) = \{x \in \Omega \mid \phi(x) > 0\},$$

$$\text{outside}(C) = \{x \in \Omega \mid \phi(x) < 0\}.$$

Тоді можемо (4) переписати як

$$F(\phi) = \mu \left( \int_{\Omega} |\nabla H(\phi)|^2 dx \right) + \nu \int_{\Omega} H(\phi) dx + \\ + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0 - c_1|^2 H(\phi) dx + \lambda_2 \int_{\Omega} |u_0 - c_2|^2 (1 - H(\phi)) dx, \quad (5)$$

де

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} u_0 H(\phi) dx}{\int_{\Omega} H(\phi) dx}, \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega} u_0 (1 - H(\phi)) dx}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi)) dx}. \quad (6)$$

Щоб виписати рівняння Ейлера-Лагранжа для варіаційної задачі (5), будемо розглядати регуляризовану версію функції  $H$ , яку позначимо через  $H_\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). По аналогії з [5], візьмемо

$$H_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \right).$$

Введемо також функцію  $\delta_\varepsilon(z) = H'_\varepsilon$ . Тепер можна виписати рівняння Ейлера-Лагранжа для  $\phi(x)$ . Параметризуємо напрямок спуску за допомогою штучного часу  $t \geq 0$ , рівняння для  $\phi(x, t)$  можна представити у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi) \left[ \mu \cdot \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \nu - \right. \\ \left. - \lambda_1 (u_0 - c_1)^2 + \lambda_2 (u_0 - c_2)^2 \right], \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\delta_\varepsilon(\phi) \partial \phi}{|\nabla \phi|} = 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо стійкий стан цієї системи рівнянь досягнутий,  $\phi$  повинна задовільнити (7) і мінімізувати функціонал (5). Нульовим рівнем  $\phi$  у стійкому стані є крива  $C$ , яка вирішує проблему сегментації.

**2. Морфологічні методи.** Математична морфологія представляє собою набір інструментів для виділення компонентів зображення, які застосовуються для представлення і опису зображення. Методика описана в [7] і представляє собою множинний метод аналізу зображення, що забезпечує кількісний опис геометричних структур. Морфологія може визначати межі об'єктів, їхні контури та опуклі оболонки. Більшість морфологічних перетворень базується на елементарних операціях стиснення і розтягування. Методи застосовуються в основному для бінарних зображень, хоча

можливе застосування і для зображень у сірих тонах. В даній роботі використовуються два основних методи морфології: ерозія і дилатация. Ці операції встановлюють зв'язок між зображенням  $A$  та структурованою множиною  $B$ , так званим структурним елементом [7].

Дилатация зображення  $A$  структурним елементом  $B$  виражається як

$$A \oplus B = \{x : \tilde{B}_x \cap A \neq \emptyset\},$$

де  $A_x = \{c : c = a + x | a \in A\}$ ,  $\tilde{B} = \{x : x = -b | b \in B\}$ .

Результатом буде нова множина, яка складається з усіх точок, отриманих відображенням множини  $B$  і зсунутих на  $x$ .

Ерозія зображення  $A$  структурним елементом  $B$  виражається як [7]:

$$A \ominus B = \{x : B_x \subseteq A\}.$$

**3. Алгоритм сегментації зображення тексту.** Метод набору рівнів для вирішення задачі сегментації тексту був вперше запропонований у [8, 9], де пропонується трикроковий алгоритм для вирішення цієї задачі:

- 1) розмивання зображення тексту для кращого розділення областей;
- 2) сегментацію рядків за допомогою методу наборів рівнів;
- 3) виділення рядків.

Будемо дотримуватись первого кроку алгоритму, по аналогії з [8], але використаємо інші засоби для двох наступних кроків. У нашому алгоритмі вони виглядатимуть так:

- 2) сегментація за допомогою функціоналу Мамфорда-Шаха;
- 3) виявлення ліній тексту за допомогою морфологічних методів.

**3.1. Розмивання рядків тексту.** Цей крок аналогічний розглянутому у [8, 9]. Для кращого виділення областей зображення розмивається за допомогою Гауссіана. Ядро фільтра – прямокутник, ширина якого більша за висоту. Припускаючи, що лінії тексту горизонтальні, широка область розмиває слова і заповнює горизонтальні прогалини між словами. В результаті розмежовані слова зв'язуються у горизонтальні лінії. З іншого боку, надто вузька область фільтрування може не заповнити всі прогалини між словами у одному рядку. В розмитому зображення ми не можемо визначити детальні контури символів, єдина інформація, яка залишається після фільтрації – це набір розмитих ліній. Також, на відміну від вхідного зображення, після такої фільтрації отримуємо зображення у відтінках сірого, де інтенсивність кожного пікселя є ймовірністю пікселя потрапити до

рядків тексту. Тепер можна сегментувати зображення, взявши за основу інтенсивність пікселів.

**3.2. Сегментація рядків тексту.** Для сегментації рядків будемо використовувати подану вище апроксимацію моделі Мамфорда-Шаха [5]. Враховуючи, що текст, по суті, може бути розбитий на дві області: область тексту і фонова область, ми використовуємо функцію рівня, засновану на цій властивості:

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{піксель потрапляє у текстову область,} \\ = 0, & \text{піксель лежить на роздільній кривій,} \\ < 0, & \text{піксель потрапляє у область фону.} \end{cases}$$

В процесі сегментації використовується одна функція рівня, тобто в результаті ми повинні отримати область, розбиту на дві частини: текстова область і фон. На кожному кроці константи  $c_1$  і  $c_2$  обчислюються за середнім значенням інтенсивності відповідної області за формулами (6). Різниця між змінними і рівень інтенсивності дляожної з частин обчислюється за (7). Розвиток кривої відбувається згідно системи рівнянь Ейлера-Лагранжа (7). В результаті ми отримуємо зображення, сегментоване на дві максимально однорідні частини. Разом з сегментацією, вибраний метод дозволяє провести знешумлення зображення для підвищення точності алгоритму [2, 3]. Також припускається, що алгоритм зупиниться, коли ми досянемо мінімального значення функціоналу, що звімас залежність точності від кількості ітерацій.

**3.3. Виявлення рядків тексту.** Після сегментації, ми отримуємо зображення, розділене на дві області – текстова область і область фону. Через можливі перетини областей може виникнути ситуація, коли сусідні рядки тексту виявляються зв'язаними. Іншою проблемою може бути те, що іноді всередині рядків можуть бути занадто великі горизонтальні прогалини. Для того, щоб усунути ці недоліки, використаємо морфологічний метод [7].

Спочатку ми зменшуємо область тексту у горизонтальному напрямку за допомогою ерозії. Якщо перетин двох сусідніх рядків невеликий, лінія, що сполучає два рядки буде неширокою, в цьому випадку роз'єдання видалить такі зв'язки.

Потім ми видовжуємо текстові області по горизонталі, використовуючи дилатацию. Якщо прогалини між текстовими областями невеликі, ми видаляємо їх.

Наступним кроком ми повертаємо області до оригінального вигляду.

Остаточно, ми перевіряємо довжину і ширину кожної отриманої області. Якщо ширина чи висота надто мала, область вважається шумом і видаляється.

Метод сегментації, реалізований в [5], адаптовано на випадок кусково-постійної апроксимації функції  $u(x)$ , що розглядається в даній роботі.

### Список використаних джерел

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений – М.: Техносфера. 2005. – 1072с.
2. Chan T.F., Vese L.A. Active contours without edges //IEEE Transactions on Image Processing. – 2001. – Vol. 10 (2). – P.266-277.
3. Chan T.F., Vese L.A. Level Set Algorithm for Minimizing the Mumford-Shah Functional in Image Processing //IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods. – 2001. – P.161-168.
4. Mumford D., Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems //Comm. Pure Appl. Math. – 1989. – 42. – P.577-685.
5. Верченко А.П. Алгоритм бінаризації зображень з урахуванням напівтонів //Праці 9 Всеукраїнської міжнародної конференції «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів» (УкрОБРАЗ'2008), Київ, Листопад 3-7, 2008. – С.185-189.
6. Osher S., Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed—Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations //JCP. – 1988. – 79 (1). – P.12-49.
7. Maragos P., Schafer R., Butt M.A. Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing – Kluwer Academic Publishers. 1996. – 488р.
8. Li Y., Zheng Y., Doermann D., Jaeger S. A new algorithm for detecting text line in handwritten documents //Proceedings of the 10th International Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition, 2006. – P.35-40.
9. Li Y., Zheng Y., Doermann D., Jaeger S. Script-independent text line segmentation in freestyle handwritten documents //IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 2008. – 30 (8). – P.1313-1329.

Надійшла до редколегії 13.02.09.

УДК 519.876.5:624.131.542

Власюк А.П., д. т. н., проф.,  
Мартинюк\* П.М., к. ф.-м. н., доц.

## Математичне моделювання фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах тепло-масопереносу з урахуванням контактного розмиву

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву фільтраційним потоком за наявності переносу солей в неізотермічних умовах. Наближений чисельний розв'язок відповідної двовимірної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Проведено ряд чисельних експериментів, які засвідчили збільшення зони контактного розмиву при урахуванні впливу тепло-солепереносу.

**Ключові слова:** контактний розмив, фільтраційна консолідація, тепло-солеперенесення, гранична швидкість фільтрації, метод радіальних базисних функцій.

\*E-mail: Vlasyuk@rstu.rv.ua, Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

**Вступ.** Існуючі класичні сіткові чисельні методи (скінчених різниць, скінчених елементів) розв'язуванням крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП) мають свої переваги, але також мають і недоліки. Одним з таких недоліків є необхідність покриття області, в якій шукається розв'язок задачі, сіткою. Тому постійно ведуться пошуки альтернативних чисельних методів. Однією із таких альтернатив є застосування безсіткових методів [1], зокрема тих, які базуються на використанні радіальних базисних функцій (РБФ) [2, 3]. Єдиною геометричною характеристикою, яка використовується при апроксимації розв'язку крайової задачі за допомогою РБФ, є відстань між вузлами точкової сітки, якою покривається область. Тобто, дані методи не вимагають наявності геометричної сітки, якого вимагається в методах скінчених різниць та скінчених елементів. Під геометричною сіткою тут розуміють множину вузлів, між якими встановлено взаємозв'язки. Ці взаємозв'язки використовують при дискретизації крайової задачі.

РБФ вперше були використані для апроксимації поверхонь [4]. Строго

A.P.Vlasyuk, Doctor of technical sciences,  
P.M. Martinyuk\*, Candidate of physics and  
mathematics sciences

## The mathematical modeling of soil filtration consolidation with taking into account soil wash-out and heat and salt transfer

The mathematical model of soil filtration consolidation under flat weir with taking into account soil wash-out and salt transfer in no isothermal conditions has been formulated. The numerical solution of the correspondent two-dimensional boundary-value problem has been found by the radial basis function method with discontinuous radial basis function. The numerical experiments have been lead. There has been shown that proposed method can be effective one.

**Key Words:** filtration erosion; filtration consolidation; heat and mass transfer; critical filtration speed; radial basis function method.

обґрунтування даного методу наведене в роботі [5]. В роботі [3] РБФ вперше застосували для розв'язування крайових задач.

В роботі [6] побудована математична модель процесу фільтраційної консолідації масиву ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням можливості контактного розмиву [7-9]. Для її розв'язання використано метод РБФ із застосуванням розривних радіальних базисних функцій [10]. Однак, в побудованій математичній моделі не враховано вплив тепло-солепереносу [11, 12]. Тому метою даної роботи є дослідження впливу тепло-масопереносу на проходження процесу фільтраційної консолідації та контактного розмиву методом РБФ.

**Постановка задачі та її математична модель.** Нехай в області  $\Omega_1$  міститься ґрунт, який під впливом прикладеного зовнішнього навантаження у вигляді плоского флютбету знаходиться в процесі фільтраційної консолідації (див. рис.1). Область  $\Omega_2$ , яку займає порова рідинна, утворюється в результаті контактного розмиву ґрунту вздовж бетонної основи  $E_1 E_2$  флютбету в області  $\Omega_1$ .

Математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням контактного розмиву за наявності перенесення солей в неізотермічному режимі можна описати наступною краєвою задачею [6, 11]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\rho a} \nabla \cdot (\mathbf{K}_b(c, T) \nabla h - \mathbf{K}_c(c, T) \nabla c - \mathbf{K}_T(c, T) \nabla T), \quad (1)$$

$$-\mathbf{K}_c(c, T) \nabla c - \mathbf{K}_T(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega_1, t > 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \Delta u_1 - g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega_2, t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu \Delta u_2 - g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega_2, t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (4)$$

$$n \frac{\partial}{\partial n} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c(c, T) \nabla c + \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T) - \quad (5)$$

$$- \mathbf{u} \nabla c - \gamma_m(c - C_m), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0,$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial n} = \nabla \cdot (\lambda(c, T) \nabla T) - \quad (6)$$

$$- \rho c_p \mathbf{u} \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0,$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{ABFD} = (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{E_1 E_2} = 0, \quad c|_{AE_1} = C_m, \quad c|_{E_2 D} = C_1, \quad (7)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{ABFD} = (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{E_1 E_2} = 0, \quad T|_{AE_1} = T_1, \quad T|_{E_2 D} = T_2, \quad (8)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{ABFD} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{E_1 G_1} = 0, \quad h|_{AE_1} = H_1, \quad h|_{G_2 D} = H_2, \quad (9)$$

$$u_1|_{G_1 E_2} = u_2|_{G_1 E_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{E_2 G_2} = 0, \quad u_1|_{E_2 G_2} = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{G_1 E_2} = 0, \quad h|_{E_2 G_2} = H_2, \quad (10)$$

$$[h]|_{\Gamma} = 0, \quad \left[ \frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad [\mathbf{u}]|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (11)$$

$$[c]|_{\Gamma} = 0, \quad [\mathbf{q}_c]|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (12)$$

$$[T]|_{\Gamma} = 0, \quad [\mathbf{q}_T]|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (13)$$

$$c_t(x, y, t) \left( (\mathbf{v}, \mathbf{n}) + (\mathbf{v}, \mathbf{d}) \right) = -(1-n) \rho_T \frac{d\Gamma}{dt}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (14)$$

$$\mathbf{u} = e \mathbf{v} - \mathbf{K}_b(c, T) \nabla h + \mathbf{K}_c(c, T) \nabla c + \mathbf{K}_T(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (15)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} c - \mathbf{D}_c(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (16)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} T - \lambda(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (17)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(x, y, t, \mathbf{u}), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (18)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (19)$$

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (20)$$

$$c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (21)$$

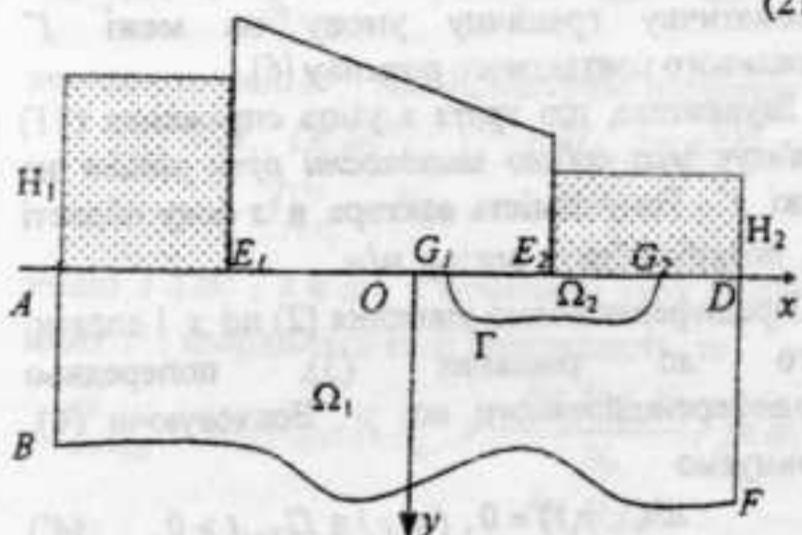


Рис.1. Фільтраційна консолідація та контактний розмив ґрунту

Рівняння (1) описує процес фільтраційної консолідації масиву ґрунту  $\Omega_1$ . Рівняння (2)-(4) є лінеаризованою системою рівнянь Нав'є-Стокса і описують процес руху рідини в зоні розмиву  $\Omega_2$  [9]. Рівняння (5), (6) описують сольовий та тепловий режим ґрунту і рідини в зоні розмиву. При цьому в зоні розмиву пористість  $n=1$ . Припускається, що на межі контакту  $\Gamma$  областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  виконуються умови спряження ідеального контакту (11)-(13) [13]. Функція  $\mathbf{v} = \mathbf{F}(x, y, t, \mathbf{u})$  пов'язує вектор швидкості фільтрації  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  та вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту  $\mathbf{v} = (g_1, g_2)$  на рухомій межі  $\Gamma$ . Тут:  $h(x, y, t)$  - напір;  $c(x, y, t)$  - концентрація солей в поровій рідині;  $T(x, y, t)$  - температура;  $e$  - коефіцієнт пористості ґрунту;  $\rho_T$  - густина твердих частинок ґрунту;  $\gamma$  - питома вага порової рідини;  $a$  - коефіцієнт стискуваності ґрунту;  $\xi$  - коефіцієнт бічного тиску ґрунту;  $\nu$  - кінематична в'язкість порової рідини;  $g$  - прискорення вільного падіння;  $c_s(x, y, t)$  - концентрація твердих частинок ґрунту;  $c_T$  - об'ємна теплоємність;  $c_p$  - питома теплоємність порового розчину;  $\mathbf{K}_b$  - тензор коефіцієнта фільтрації;  $\mathbf{K}_c$ ,  $\mathbf{K}_T$  - тензори коефіцієнтів хімічного та термічного осмосів;  $\mathbf{D}_c$ ,  $\mathbf{D}_T$  - тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії;  $\lambda$  - тензор коефіцієнта тепlopровідності;  $\mathbf{n}$  - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі;  $\mathbf{d}$  - вектор напрямних косинусів дотичної;  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Вектор дотичної вважається додатно направленим, якщо його поворот до вектора

зовнішньої нормалі здійснюється проти руху годинникової стрілки. Умова (14) задає кінематичну граничну умову на межі  $\Gamma$  можливого контактного розмиву [6].

Зауважимо, що третя з умов спряження (11) пов'язує між собою швидкості руху рідини на межі  $\Gamma$ . Тому замість вектора  $u$  з боку області  $\Omega_1$ , потрібно брати вектор  $u/n$ .

Продиференціюємо рівняння (2) по  $x$  і додамо його до рівняння (3), попередньо продиференційованого по  $y$ . Враховуючи (4), отримуємо

$$Ah(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0. \quad (4')$$

Отже, функція напору  $h(x, y, t)$  є гармонічною в області  $\Omega_2$ .

**Чисельне розв'язання методом РБФ.** Введемо позначення  $X = (x, y)$ . Покриємо замикання області  $\overline{\Omega}_1$  вузловими точками  $X_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, N_1}$ , а замикання області  $\overline{\Omega}_2$  - вузловими точками  $X_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, N_2}$ . Вимагаємо, що на межі спряження  $\Gamma$  координати відповідних вузлів в обох областях співпадають. Нехай  $\omega_1$  - множина номерів вузлів, які належать області  $\Omega_1$ , а  $\omega_2$  - множина номерів вузлів, які належать області  $\Omega_2$ . Замикання  $\overline{\omega}_1$  буде містити рівно  $N_1$  вузол і складатися із самої множини  $\omega_1$  та наступних множин:  $\omega_1^{AE_1}$ ,  $\omega_1^{G_2D}$ ,  $\omega_1^q$ ,  $\omega_1^\Gamma$  - множини номерів вузлів, які належать межам  $AE_1$ ,  $G_2D$ ,  $E_1G_1 \cup ABFD$  та  $\Gamma$  відповідно. Аналогічно, замикання  $\overline{\omega}_2$  буде містити рівно  $N_2$  вузли і складатися із самої множини  $\omega_2$  та наступних множин:  $\omega_2^{G_1E_2}$ ,  $\omega_2^{E_2G_2}$ ,  $\omega_2^\Gamma$  - множини номерів вузлів, які належать межам  $G_1E_2$ ,  $E_2G_2$  та  $\Gamma$  відповідно.

Наближений розв'язок задачі (1)-(21), в якій рівняння (4) замінено на (4'), методом РБФ шукаємо у вигляді

$$T(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_k} a_{j+(k-1)N_1}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega}_k, \quad k = 1, 2;$$

$$c(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_k} b_{j+(k-1)N_1}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega}_k, \quad k = 1, 2;$$

$$h(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_k} c_{j+(k-1)N_1}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega}_k, \quad k = 1, 2;$$

$$u_1(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_2} s_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega}_2,$$

$$u_2(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_2} w_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega}_2,$$

де  $a_j(t)$ ,  $b_j(t)$ ,  $c_j(t)$ ,  $j = \overline{1, N_1 + N_2}$ ;  $s_j(t)$ ,  $w_j(t)$ ,  $j = \overline{1, N_2}$ , - деякі невідомі коефіцієнти;  $\varphi(r_j, \varepsilon)$  - деякі розривні РБФ [10],  $r_j = |X - X_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$ .

Тоді з рівнянь (1)-(3), (4'), (5), (6) умов (7)-(13), (19)-(21) отримаємо наступну задачу Коши для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{A}(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^{N_1+N_2}$ ,

$$\mathbf{B}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad \mathbf{C}(t) = \{c_i(t)\}_{i=1}^{N_1+N_2},$$

$$\mathbf{S}(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^{N_2}, \quad \mathbf{W}(t) = \{w_i(t)\}_{i=1}^{N_2}:$$

$$\mathbf{M}^{(5)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(5)} \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{F}^{(5)}, \quad (22)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)} \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^{(4)} \cdot \mathbf{A}(t) + \mathbf{F}^{(4)}, \quad (23)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{C}(t) = \quad (24)$$

$$= \mathbf{G}^{(3)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}'^{(3)} \cdot \mathbf{A}(t) + \mathbf{F}^{(3)},$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{S}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (25)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{W}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{W}(t) = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(5)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(5)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{W}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad (27)$$

$$\text{де } \mathbf{A}^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \{b_i(0)\}_{i=1}^{N_1+N_2},$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = \{c_i(0)\}_{i=1}^{N_1}, \quad \mathbf{S}^{(0)} = \{s_i(0)\}_{i=1}^{N_2}, \quad \mathbf{W}^{(0)} = \{w_i(0)\}_{i=1}^{N_2};$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \left\{ m_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_1+N_2}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \left\{ l_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_1+N_2},$$

$$\mathbf{F}^{(k)} = \left\{ f_i^{(k)} \right\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad k = 3, 4, 5; \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \left\{ \tilde{m}_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_1+N_2},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{ \tilde{f}_i^{(k)} \right\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad k = 4, 5; \quad \mathbf{G}^{(k)} = \left\{ g_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_2; N_1+N_2},$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \left\{ m_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_2}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \left\{ l_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_2}, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \left\{ f_i^{(k)} \right\}_{i=1}^{N_2},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \left\{ \tilde{m}_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_2}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{ \tilde{f}_i^{(k)} \right\}_{i=1}^{N_2}, \quad k = 1, 2;$$

$$\mathbf{G}^{(k)} = \left\{ g_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{N_1+N_2}, \quad k = 3, 4; \quad \mathbf{G}'^{(3)} = \left\{ g_{ij}^{(3)} \right\}_{i,j=1}^{N_1+N_2},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(3)} = \left\{ \tilde{m}_{ij}^{(3)} \right\}_{i,j=1}^{N_1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(3)} = \left\{ \tilde{f}_i^{(3)} \right\}_{i=1}^{N_1}; \quad m_{ij}^{(5)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$m_{ij}^{(4)} = n \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \omega_1 \cup \omega_2, \quad j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2;$$

$$m_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \omega_1, \quad j \in \overline{\omega}_1; \quad \tilde{m}_{ij}^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} i \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2, & \quad j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2, & k = 4,5; \\ \tilde{m}_j^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & \quad i \in \overline{\omega}_1, \quad j \in \overline{\omega}_1; \quad \tilde{f}_i^{(3)} = h_0(X_i), \\ i \in \overline{\omega}_1; \quad \tilde{f}_i^{(4)} = c_0(X_i), & \quad \tilde{f}_i^{(5)} = T_0(X_i), \quad i \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2; \\ m_j^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & \quad i \in \omega_2; \quad \tilde{m}_j^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \overline{\omega}_2, \\ j \in \overline{\omega}_2, \quad k = 1,2; \quad \tilde{f}_i^{(1)} = (u_1)_0(X_i), & \quad \tilde{f}_i^{(2)} = (u_2)_0(X_i), \\ i \in \overline{\omega}_2; \quad r_y = |X_j - X_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}. \end{aligned}$$

Спеціального визначення потребують елементи матриць  $L^{(k)}$ ,  $k = \overline{1,5}$ ;  $G^{(k)}$ ,  $k = \overline{1,4}$ ;  $G^{(3)}$  та вектор-стовпців  $F^{(k)}$ ,  $k = \overline{1,5}$ . Так,  $I_y^{(5)} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + \rho c_\rho u \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$  при  $i \in \omega_1 \cup \omega_2$ ,  $j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2$ . Якщо  $i \in \omega_1^{AE_1} \cup \omega_1^{G_2 D} \cup \omega_2^{E_2 G_2}$ , то  $I_y^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ ,  $j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2$ . У випадку  $i \in \omega_1^q \cup \omega_2^{G_1 E_2}$  маємо  $I_y^{(5)} = (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n})$ ,  $j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2$ . Для елементів вектор-стовпця  $F^{(5)}$  маємо наступні значення:

$$\begin{aligned} f_i^{(5)} = T_1, & \quad i \in \omega_1^{AE_1}; \quad f_i^{(5)} = T_2, \quad i \in \omega_1^{G_2 D} \cup \omega_2^{E_2 G_2}. \\ \text{При } i \in \omega_1 \cup \omega_2, & \quad j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2 \\ I_y^{(4)} = -\nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + u \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) + \gamma_m \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & \\ g_y^{(4)} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)). & \quad \text{Якщо } i \in \omega_1^{AE_1} \cup \omega_1^{G_2 D} \cup \omega_2^{E_2 G_2}, \text{ то } I_y^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \\ I_y^{(4)} = (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & \quad j \in \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2. \quad \text{Для } k = 1,2; \quad \text{при } i \in \omega_2^{E_2 G_2} \quad I_y^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \\ \text{елементів вектор-стовпця } F^{(4)} \text{ маємо наступні значення:} & \\ f_i^{(4)} = C_m, & \quad i \in \omega_1^{AE_1}; \quad f_i^{(4)} = C_1, \quad i \in \omega_1^{G_2 D} \cup \omega_2^{E_2 G_2}; \\ f_i^{(4)} = \gamma_m C_m, & \quad i \in \omega_1 \cup \omega_2. \end{aligned}$$

При  $i \in \omega_1$ ,  $j \in \overline{\omega}_1$  маємо  $I_y^{(3)} = \beta \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon))$ ,  $g_y^{(3)} = \nabla \cdot (\mathbf{K}_t \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon))$ ,  $g_y^{(3)} = \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon))$ , де  $\beta = -\frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma_m}$ . При  $i \in \omega_2$ ,  $j \in \overline{\omega}_2$   $I_{i+N_1,j+N_1}^{(3)} = \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ . Якщо  $i \in \omega_1^{AE_1} \cup \omega_1^{G_2 D}$ , то  $I_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ ,  $j \in \overline{\omega}_1$ . У випадку  $i \in \omega_1^q$  маємо  $I_{ij}^{(3)} = (-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n})$ ,  $j \in \overline{\omega}_1$ . Якщо  $i \in \omega_2^{E_2 G_2}$  то  $I_{i+N_1,j+N_1}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ ,  $j \in \overline{\omega}_2$ . У випадку  $i \in \omega_2^{G_1 E_2}$  маємо

$$I_{i+N_1,j+N_1}^{(3)} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}, \quad j \in \overline{\omega}_2. \quad \text{Для елементів вектор-стовпця } F^{(3)} \text{ маємо наступні значення:}$$

$$f_i^{(3)} = H_1, \quad i \in \omega_1^{AE_1}; \quad f_i^{(3)} = H_2, \quad i \in \omega_1^{G_2 D};$$

$$f_{i+N_1}^{(3)} = H_2, \quad i \in \omega_2^{E_2 G_2}.$$

Якщо  $s \in \omega_1^r$ ,  $k \in \omega_2^r$  є номерами двох вузлів на межі  $\Gamma$ , координати яких співпадають, то

$$I_{k+N_1,j}^{(3)} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{s,j}^{(3)} = -\frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}}, \quad j \in \overline{\omega}_1;$$

$$I_{k+N_1,j+N_1}^{(3)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{s,j+N_1}^{(3)} = \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}}, \quad j \in \overline{\omega}_2.$$

При  $i \in \omega_2$ ,  $j \in \overline{\omega}_2$  маємо  $I_y^{(k)} = -\nu \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ .

$$k = 1,2; \quad g_y^{(2)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial x}, \quad g_y^{(1)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}.$$

Якщо  $i \in \omega_2^{G_1 E_2}$ , то  $I_y^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ ,  $j \in \overline{\omega}_2$ ,  $k = 1,2$ ; при  $i \in \omega_2^{E_2 G_2}$   $I_y^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$ ,

$$I_y^{(1)} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}, \quad j \in \overline{\omega}_2.$$

Якщо  $s \in \omega_1^r$ ,  $k \in \omega_2^r$  є номерами двох вузлів на межі  $\Gamma$ , координати яких співпадають, то

$$I_{k,j}^{(1)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{k,j}^{(2)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega}_2;$$

$$f_k^{(2)} = u_1(X_s, t), \quad f_k^{(1)} = u_2(X_s, t);$$

$$I_{k+N_1,j}^{(4)} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{s,j}^{(4)} = -\mathbf{D}_c \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}}, \quad j \in \overline{\omega}_1;$$

$$I_{k+N_1,j+N_1}^{(4)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{s,j+N_1}^{(4)} = \mathbf{D}_c \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}}, \quad j \in \overline{\omega}_2.$$

$$I_{k+N_1,j}^{(5)} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{s,j}^{(5)} = -\lambda \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}}, \quad j \in \overline{\omega}_1;$$

$$I_{k+N_1,j+N_1}^{(5)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad I_{s,j+N_1}^{(5)} = \lambda \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}}, \quad j \in \overline{\omega}_2.$$

Значення  $u_1(X_s, t)$ ,  $u_2(X_s, t)$  визначаються згідно (15).

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або вектор-стовпця задачі Коши (22)-(27) згідно вищезгаданих формул не визначений, то він приймається рівним нулю.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коши (22)-(27) можна використати чисто неявну різницеву схему або схему Кранка-Ніколсона [13].

Кінематична гранична умова (14) використовується для апроксимації положення межі спряження  $\Gamma(x, y, t)$  [6]. Якщо на часовому

шарі під номером  $(s)$  крайова задача (1)-(21) розв'язана, то, наприклад, у випадку розмиву масиву ґрунту  $c_s(x, y, t) = (1 - n)\rho_T$  і положення  $\Gamma^{(s+1)}$  межі  $\Gamma(x, y, t)$  на часовому шарі  $(s+1)$  визначається з умови

$$\frac{\Gamma^{(s+1)}(x, y) - \Gamma^{(s)}(x, y)}{\tau} = (\nabla^{(s)}, \mathbf{n}) + (\nabla^{(s)}, \mathbf{d}), \quad s = 0, M-1.$$

При  $t = 0$  межа  $\Gamma(x, y, t)$  складається з одного вузла, який розміщений в точці  $E_1$ .

**Результати чисельних експериментів.** Вияснення впливу тепло-солепереносу на контактний розмив ґрунту у випадку його фільтраційної консолідації під плоским флютбетом проведено на тестовому прикладі. В зв'язку з цим розглянуто задачу, де межа  $BF$  (див. рис. 1) є прямою і паралельною до осі  $ox$ . При цьому координати точок області  $\Omega_1$  наступні:  $A(-10; 0)$ ,  $B(-10; 10)$ ,  $E_1(-5; 0)$ ,  $E_2(5; 0)$ ,  $D(10; 0)$ ,  $F(10; 10)$ . Розмірність визначається у метрах.

Для конкретизації співвідношення (18), між швидкістю фільтрації та швидкістю руху твердих частинок приймалась лінійна залежність  $v = \frac{\alpha^+}{n} u$ , де  $\alpha^+ = \begin{cases} \alpha, & u \geq u_k; \\ 0, & u < u_k. \end{cases}$  Причому

покладалось  $\alpha = 1$  і припускалося, що частинка, яка відрвалась від масиву ґрунту миттєво виносиця фільтраційним потоком. Тут  $u_k$  - критичне (або розмикаюче) значення швидкості фільтрації.

Грунт вважався ізотропним за своїми характеристиками і коефіцієнт фільтрації чистої води при температурі  $T = 20^\circ C$  покладався рівним  $0,0005 \text{ м/с}$ . Залежність коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації розчинених солей взята з роботи [14] і апроксимувалась методом РБФ [2].

Значення інших числових характеристик приймались наступні:  $e = 0.70$ ,  $\xi = 0.75$ ,  $\nu = 10^{-3} \text{ см}^2/\text{s}$ ,  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $H_1 = 32 \text{ м}$ ,  $H_2 = 2 \text{ м}$ ,  $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{H}$ ,  $\gamma = 10^4 \text{ H/m}^3$ ,  $\gamma_m = 0 \text{ с}^{-1}$ ,  $n = 0.4$ ,  $D_{c1} = D_{c2} = 1.157 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 1100 \text{ кг/m}^3$ ,  $c_\rho = 4.2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{град}$ ,  $c_T = 2137 \text{ кДж/m}^3 \cdot \text{град}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.25 \text{ Дж/m}^2 \cdot {}^\circ \text{C} \cdot \text{с}$ ,  $D_{T1} = D_{T2} = 1.157 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $C_m = 350 \text{ г/літр}$ ,

$$T_1 = T_2 = 30^\circ C, \quad k_{c1} = k_{c2} = 1.241 \cdot 10^{-10} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{с}, \\ k_{T1} = k_{T2} = 1.241 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/{}^\circ C \cdot \text{с}.$$

Початковий розподіл напорів  $h_0(x, y)$ ,  $(x, y) \in \overline{\Omega}_1$ , визначався як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla h_0(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{AB} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DF} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{BF} = 0, \\ h_0|_{AE_1} = H_1, \quad h_0|_{G_2D} = H_2, \quad h_0|_{E_1G_1} = q, \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}_h \nabla h_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1,$$

де  $q$  - величина напору на межі ґрунту, яка еквівалентна величині прикладеного зовнішнього навантаження.

Чисельні експерименти проводились при початковій кількості вузлів 861 (див. рис. 2). Для дискретизації в часі використовувалась чисто неявна різницева схема з кроком  $\tau = 10 \text{ с}$ . В ході обчислень в околі межі  $\Gamma$  проводилось згущення вузлової сітки.

Для проведення чисельних експериментів та побудови розривних РБФ [10] використовувалась мультиквадратична РБФ  $\phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ , де  $\varepsilon > 0$  - так званий параметр форми. В області ґрунту покладалось  $\varepsilon = 1.3$ , а в області розмиву  $\varepsilon = 10^7$ .

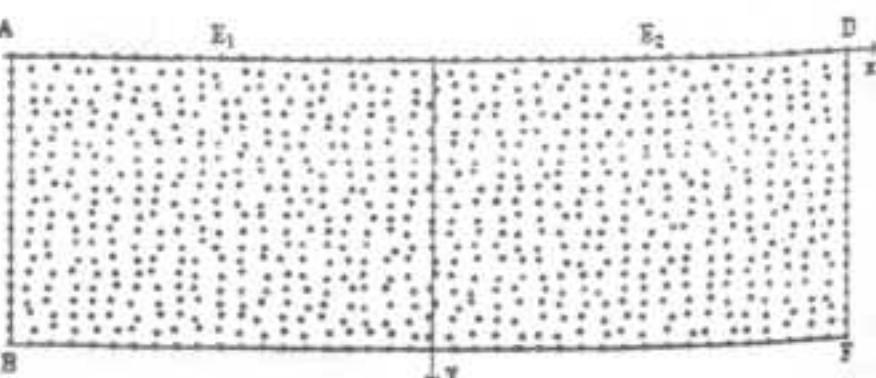


Рис. 2. Вузлова сітка методу РБФ

Критична швидкість фільтрації покладалась рівною  $u_k = 0,0005 \text{ м/с}$ . На рис. 3 зображено форму області розмиву через 2 хвилини від початку процесу розмиву. Координати точок межі розмиву у випадку фільтрації чистої води в ізотермічному режимі наступні:  $G_1(3.79; 0)$ ,  $G_2(6.34; 0)$ ,  $S(5.25; 0.82)$ . У випадку урахування впливу тепло-солепереносу маємо  $G_1(2.81; 0)$ ,  $G_2(6.48; 0)$ ,  $S(5.37; 1.38)$ . Це вказує на те, що утворена зона розмиву є більшою, якщо на проходження процесу фільтраційної консолідації враховувати вплив техногенних факторів.

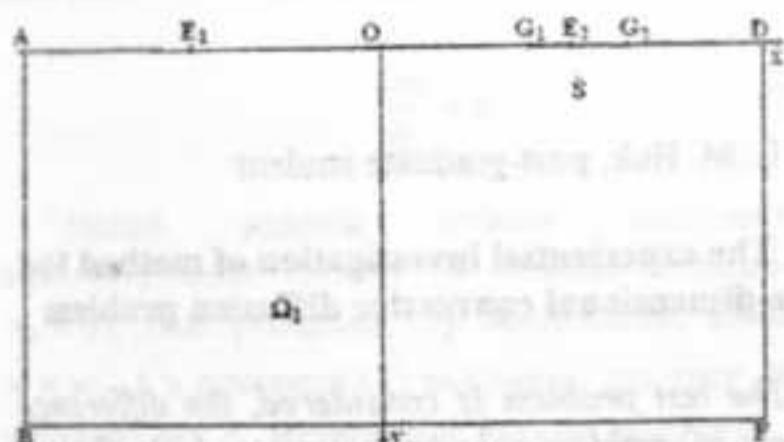


Рис. 3. Зона розмиву

**Висновки.** Отже, в даній роботі поставлена і чисельно розв'язана задача про контактний розмив ґрунтів фільтраційним потоком під плоским флютбетом з урахуванням процесів фільтраційної консолідації в умовах теплосолепереносу. Як свідчать результати чисельних експериментів у випадку урахування впливу вказаних чинників процес розмиву ґрунту відбувається набагато швидше, анож в протилежному випадку. Це пояснюється залежністю параметрів фільтрації від теплового та сольового режиму ґрунту.

Варто відмітити, що в даній роботі зроблено припущення, що в зоні розмиву відбувається рух сольового розчину. Хоча насправді там знаходитьться суспензія – сольовий розчин з твердими частинками ґрунту. Урахування даного фактору є предметом наших теперішніх досліджень і становитиме тему наших наступних публікацій.

#### Список використаних джерел

1. Liu G.R. Meshfree methods: moving beyond finite element method. – London: CRC Press, 2003. – 850 p.
2. Iske A. Scattered data modeling using radial basis functions // Tutorials on Multiresolution in Geometric Modeling. – Springer-Verlag, 2002. - P. 205-242.
3. Kansa E. J. Multi-quadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // Comput. Math. Appl. – 1990. - 19. - Pp. 147-161.
4. Hardy R.L. Multi-quadric equations of topography and other irregular surfaces // Geophys. Res. – 1976. - Vol. 76. - Pp. 1905-1915.
5. Micchelli C.A. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions // Constr. Approx. – 1986. - Vol. 2. - Pp. 11-22.
6. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2008. – Вип.3. (подано до друку).
7. Истомина В.С. Исследование контактного размыва песчаных и гравелистых грунтов // Вопросы фильтрационных расчётов гидротехнических сооружений. – 1956. - Вып. 2. – С. 190-216.
8. Жыденков В.Н. О контактном размыве глинистых грунтов фильтрационным потоком // Труды координационных совещаний по гидротехнике. – 1972. - Вып. 72. – С. 48-61.
9. Sellmeijer J.B. On the mechanism of piping under impervious structures (Thesis). // LGM-Mededeelingen. – 1988. №96.-112 p.
10. Мартинюк П.М. Метод радіальних базисних функцій в краївих задачах для параболічних рівнянь з умовами спряження // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2007. – Вип.4. - С. 178-181.
11. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. - Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
12. Булавацький В.М. Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – Київ: Наук. думка, 2005. – 282 с.
13. Сергієнко І.В., Скопецький В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.
14. Власюк А.П., Мартинюк П.М., Козюк О.В. Експериментальні залежності характеристик ґрунтів від впливу техногенних факторів та їх обробка за методом найменших квадратів // Вісн. Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. - 2007. - Вип. 1 (37). - С. 268-281.

Надійшла до редколегії 30.01.2009

УДК 519.62

Гук Л.М., асп.

## Експериментальне дослідження методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії

Розглянуто тестову задачу, запропоновано різницеву схему її розв'язання. Аналітичний розв'язок задачі дозволив кількісно оцінити точність методу розв'язання. Проведено порівняльний аналіз точності розв'язків досліджуваного методу із відомими різницевими схемами: монотонною схемою Самарського, схемою Кранка-Ніколсона та лінійним модифікованим методом харacterистик. Наведені результати чисельного експерименту, на основі яких зроблені висновки щодо ефективності методу.

**Ключові слова:** чисельний експеримент, задача конвективної дифузії, різницевий метод.

E-mail: lessiagoook@bigmir.net

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

### Вступ

Розв'язання багатьох метеорологічних і екологічних задач базується на реалізації загальної моделі циркуляції атмосфери [1,2]. Добре відома чисельна складність подібних задач. В деяких випадках існують обмеження на час отримання їхнього розв'язку, особливо це стосується задач оперативного прогнозу метеорологічних величин [3,4].

Основою загальної моделі циркуляції атмосфери є рівняння Нав'є-Стокса. По суті, це трьохвимірні рівняння конвективної дифузії. Застосовуючи розщеплення за напрямками кожне з них можна представити у вигляді трьох одновимірних задач. Тому ефективне розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії має велике практичне значення.

В роботі [5] запропонована різницева схема для розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії. В [6] наведені результати теоретичного дослідження якостей запропонованого методу. В даній роботі розглядаються результати його тестування на прикладній задачі, що має аналітичний розв'язок.

### Постановка тестової задачі

Метод розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії [5] запропонований для

L. M. Huk, post-graduate student

## The experiential investigation of method for one-dimensional convective diffusion problem

The test problem is considered, the difference scheme of problem solving is proposed. Analytical solution of test problem allowed to appreciate quantitatively the accuracy of method of solution. The comparative analysis at the accuracy of investigated method and known numerical schemes (Samarskiy monotonous scheme, Crank-Nicholson scheme, linear modified method of characteristics) is made. The results of numerical experiment are given. The conclusions about efficiency of investigate schemes are confirmed by the numerical calculations.

**Key words:** numerical experiment, diffusion-convection problem, difference method.

задач динамічної метеорології. Проте навіть найпростіші метеорологічні моделі не мають аналітичного розв'язку. Тому тестування методу проведено на задачі гідродинаміки, що ґрунтуються на тих самих фізичних законах, що й динамічна метеорологія.

Розглянемо процес впливу твердої горизонтальної стінки на набігаючий однорідний ламінарний потік в'язкої нестисливої рідини. Нехай компоненти  $u, v, w$  швидкості  $\mathbf{V}$  пов'язані з просторовими координатами  $x, y, z$  наступним чином:  $u$  – додатна в напрямку зростання  $x$  (напрямок вздовж стінки),  $v$  – в напрямку зростання  $y$  (напрямок поперек стінки),  $w$  – в напрямку зростання  $z$  (напрямок, протилежний гравітаційній силі, тобто „вверх”). Обмежимося плоским випадком, коли складові швидкості течії не залежать від координат  $x$  та  $y$  в напрямках, паралельних стінці. За прийнятих наблизень рівняння Навье-Стокса приймають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Нехай вздовж стінки відбувається відсмоктування потоку зі сталою швидкістю  $w_0 < 0$ . Тоді рівняння (3) задовільняє рівності  $w = w_0$ , а з рівняння (2) випливає, що тиск  $p$  не залежить від  $z$ . Відповідно, можна прийняти, що

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dU}{dt},$$

де  $U(t)$  – швидкість набігаючого плоского однорідного потоку на такій висоті  $z$  від стінки, на якій її впливом на потік можна знехтувати. В результаті рівняння (1) для швидкості  $u(z,t)$  приймає вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w_0 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dU}{dt} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Як показано в роботі [7] для довільної зовнішньої швидкості

$$U(t) = U_0 [1 + f(t)] \quad (5)$$

рівняння (4) допускає точний розв'язок

$$u(z,t) = U_0 [1 - \exp(-zw_0/\nu) + \xi(z,t)]. \quad (6)$$

У випадку сталої в часі зовнішньої течії, тобто у випадку, коли  $f(t) = 0$  рівняння (4) приймає вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w_0 \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (7)$$

і відповідно профіль швидкостей, що відповідає розподілу (6), переходить в асимптотичний профіль

$$u(z) = U_0 [1 - \exp(-zw_0/\nu)]. \quad (8)$$

Якщо відсмоктування починається безпосередньо на передньому краю плоскої пластини, то товщина пограничного шару досягає свого асимптотичного значення  $\delta = -\nu/w_0$  і профілі швидкостей (5) і (8) стають афінними між собою після проходження початкової ділянки.

Поставлена задача має самостійне важливе прикладне значення, оскільки відсмоктування пограничного шару дозволяє зберегти в ньому ламінарну форму течії і, тим самим, зменшити опір пластини. В даній роботі ця задача розглядається як тестова, оскільки її аналітичний

розв'язок (8) дозволяє кількісно оцінити точність запропонованого в [5] чисельного методу.

### Розв'язання задачі

Розв'яжемо поставлену тестову задачу чисельно для потоку висотою 1м. Границні умови задамо наступним чином:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = U_0.$$

Знайдемо профіль горизонтальної швидкості потоку по координаті  $z$  в момент часу  $T$ . Для цього введемо сітку  $\omega_{h,T} = \omega_h \times \omega_T$ ,

$$\omega_h = \{z_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = T/N\}$$

$$\omega_T = \{t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad \tau = T/K\}.$$

Апроксимуємо рівняння (7) різницевою схемою, що запропонована в [5]:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} + \frac{w_0}{2} \left( \frac{y_{i+1}^{k+1} - y_i^{k+1}}{h} + \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h} \right) = \nu \left( \frac{y_{i+1}^{k+1} - y_i^{k+1}}{h^2} - \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h^2} \right), \quad (9)$$

де  $y_i^k = u(z_i, t_k)$ .

Початкові умови будемо задавати згідно аналітичного розв'язку (8).

Будемо називати схему (9) схемою явного рахунку, оскільки обчислення здійснюються за алгоритмом реалізації явних методів. Хоча формально схема є неявною.

Щоб краще оцінити наведену схему, розв'яжемо поставлену задачу за допомогою інших методів, які широко застосовуються при розв'язанні різноманітних прикладних задач гідродинаміки. Отримані розв'язки порівняємо між собою. Візьмемо такі відомі різницеві схеми:

1) монотонна схема Самарського [3, 9]:

$$y_i^{(k+1)} + w_0 y_z^{(k+1)} = \frac{\nu}{1 + 0.5Pe} y_{zz}^{(k+1)}, \quad (10)$$

2) схема Кранка-Ніколсона [4, 9]:

$$y_i^{(k+1)} + \frac{w_0}{2} \left( y_{zz}^{(k+1)} + y_z^{(k+1)} \right) = \frac{\nu}{2} \left( y_{zz}^{(k+1)} + y_z^{(k+1)} \right), \quad (11)$$

3) схема лінійного модифікованого методу характеристик [8, 9]:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k (P)}{\tau} = \nu \frac{y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}}{h^2} \quad (12)$$

$$y_i^k (P) = \alpha y_{i+m+1}^k + (1 - \alpha) y_{i-m}^k,$$

$$m = [Cu], \quad \alpha = Cu - m, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$Cu = \frac{|w_0| \tau}{h} - \text{число Куранта.}$$

Всі наведені схеми є безумовно стійкими. Схема явного рахунку має порядок точності  $O\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} + th\right)$ , схема Самарського -  $O(\tau + h^2)$ , схема Кранка-Ніколсона -  $O(\tau^2 + h^2)$ , а лінійний модифікований метод характеристик -  $O(\tau + h^3)$  при цілих значеннях числа Куранта.

### Чисельний експеримент

Для задач динамічної метеорології числа Куранта можуть бути великими. Це пов'язано із значними значеннями, які може досягати швидкість конвекції, а також із обмеженням на час розв'язання задачі (великий часовий крок). Тому методи, що використовуються для розв'язування таких задач, повинні давати задовільну точність при великих значеннях числа Куранта.

Проведемо порівняльний аналіз точності розв'язків поставленої тестової задачі, що отримані згаданими різницевими схемами. Точність чисельного розв'язку оцінюмо за величиною середньоквадратичної похибки, вираженої у відсотках:

$$Z = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h(u(x_i, T) - y_i^k)^2}}{\sqrt{u^2(x_i, T)}} \cdot 100\% \oplus,$$

де  $\ell = 1M$  - довжина відрізка розрахунку,  $T = 3600c$  - час розрахунку. Експеримент проведено при таких значеннях  $U_0 = 20 \frac{m}{c}$ ,  $v = 0.1 \frac{m^2}{c}$ .

Результати експерименту наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Середньоквадратична похибка розв'язків тестової задачі

$Cu = \frac{ w_0  \tau}{h}$	Середньоквадратична похибка $Z, \%$			
	(9)	(10)	(11)	(12)
$Cu = 1$ $w_0 = -1$ , $\tau = h = 0.005$	0.02	0.03	0.02	1.74
$Cu = 2$ $w_0 = -1$ , $\tau = 2h = 0.01$	0.02	0.03	0.02	3.39

$Cu = 5$ $w_0 = -1$ , $\tau = 5h = 0.02$	0.02	0.03	0.02	7.98
$Cu = 10$ $w_0 = -1$ , $\tau = 10h = 0.01$	0.02	0.03	0.02	14.67
$Cu = 20$ $w_0 = -1$ , $\tau = 20h = 0.1$	0.02	0.03	0.02	25.65
$Cu = 40$ $w_0 = -2$ , $\tau = 20h = 0.1$	0.04	0.09	0.04	46.87
$Cu = 100$ $w_0 = -5$ , $\tau = 20h = 0.1$	0.17	0.28	0.17	73.27
$Cu = 160$ $w_0 = -8$ , $\tau = 20h = 0.1$	0.34	0.51	0.34	82.55
$Cu = 200$ $w_0 = -10$ , $\tau = 20h = 0.1$	0.48	0.96	0.48	85.85

Частину експерименту подано на рис. 1. Тут можна більш наглядно побачити і порівняти результати методів при великому значенні числа Куранта.

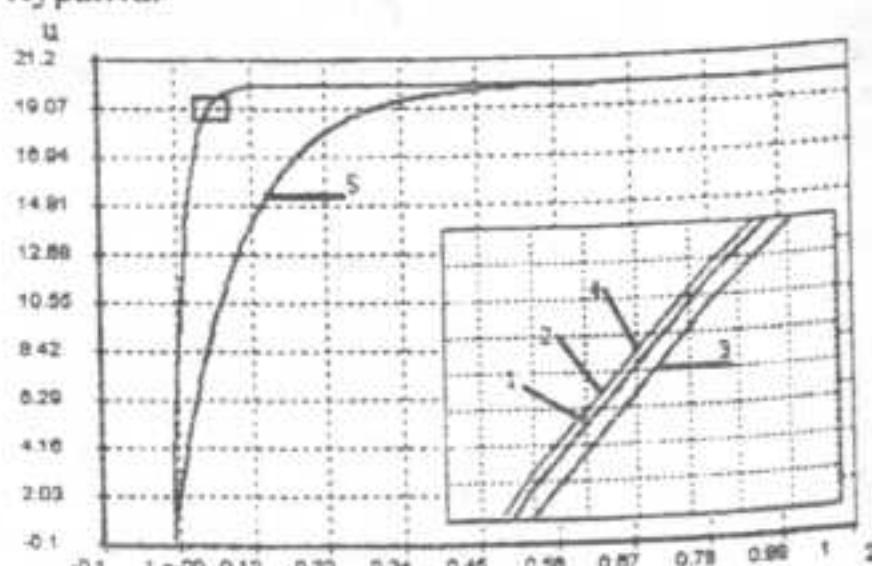


Рис. 1. Результати розрахунків модельної задачі:  $h = 0.005$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $w_0 = -5$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $Cu = 100$ .

1 - аналітичний розв'язок, 2 - розв'язок за схемою (9), 3 - розв'язок за схемою (10), 4 - розв'язок за схемою (11), 5 - розв'язок за схемою (12).

### Список використаних джерел

За результатами експерименту маємо, що:

- схеми (9), (10), (11) дають хорошу точність для тестової задачі при великих значеннях чисел Куранта;

- модифікований метод характеристик на поставленій тестовій задачі дає лише якісно задовільний результат;

- розв'язок, що отриманий схемою явного рахунку (9), співпадає із розв'язком за схемою Кранка-Ніколсона, і є найточнішим серед розглянутих схем.

Як зазначалося вище, в задачах динамічної метеорології поєднується складність моделей і обмеження на час їх реалізації. Саме тому при виборі методу розв'язання таких задач важливу роль відіграє не лише точність, а й економічність алгоритму реалізації. Оскільки схеми (9) і (11) мають однакову точність на тестовій задачі, то перевагу слід віддати тій схемі, розв'язок якої отримується швидше. Метод Кранка-Ніколсона потребує розв'язання системи алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею, а реалізація методу, запропонованого в [5], зводиться до явного рахунку та потребує менших затрат машинного часу.

### Висновки

Із отриманих результатів чисельного експерименту, в основі якого лежить прикладна задача, випливає, що

- метод явного рахунку для розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії (9) дає хороший результат як при малих, так і при великих числах Куранта;

- результати чисельного експерименту повністю підтверджують результати теоретичного дослідження методу, що проведено в [6];

- серед запропонованих методів розв'язання тестової задачі, запропонований метод (як і метод Кранка-Ніколсона) має найкращу точність.

Оскільки затрати часу на реалізацію схеми (9) менші, ніж для схеми Кранка-Ніколсона, а точність розв'язків обох є однаково високою, то можна вважати метод [5] оптимальним для даної задачі.

Результати проведеного експерименту та висновки, що зроблені в роботах [5, 6], підтверджують доцільність застосування цього методу до задач динамічної метеорології. Передусім це зумовлено його економічністю та прийнятною точністю.

1. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделювання природних і техногенних процесів в атмосфері. – Київ: Наукова Думка, 2006. – 542 с.
2. Козаков О.Л. Динамічна метеорологія (конспект лекцій). – Одеса, ОДЕКУ, 2003. – 148с.
3. Симирський А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
4. Пасканов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 286 с.
5. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ, 2007, №3, С. 64 – 74.
6. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Теоретическое исследование одного численного метода решения задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ, 2008, №2, С. 161 – 170.
7. Stuart J.T. A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity. Proc. Roy. Soc. A231. 1955. p.116–130.
8. Тригуб О.С. Аналіз застосування методу сіток до чисельного розв'язання параболічних рівнянь // Наукові записки. – 2003. – Том 21. Комп'ютерні науки. – С. 22-30.
9. Тригуб О.С. Порівняльний аналіз деяких різницевих схем для рівняння конвективної дифузії // Наукові записки. – 1999. – Том 16. Комп'ютерні науки. – С. 61-71.

Надійшла до редколегії 10.03.2009

УДК 519.87

Івохін Є.В., канд.фіз.-мат.наук, доцент,  
Аджубей Л.Т., канд.фіз.-мат.наук, доцент,  
Бабанін С.О., студент

## Алгоритм прийняття рішень в ситуації з нечіткими вихідними даними

Для підтримки прийняття рішень в умовах неточно або нечітко заданої інформації запропоновано підхід для вибору рішення особою, що приймає рішення, на основі класифікації нечітких вихідних даних у групи з їх подальшим аналізом. Описано алгоритм, що використовує нечітке відношення переваги та спосіб обчислення відстані між нечіткими множинами.

**Ключові слова:** складені нечіткі множини, прийняття рішень, відношення переваги

E-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, проф. Хусайнов Д.Я.

Сучасний рівень інформаційних технологій дає можливість накопичувати та обробляти різноманітні дані з метою їх подальшого використання. Актуальними є задачі автоматизації прийняття проектних та управлінських рішень на основі аналітичної та експертної інформації про прикладну область. В цьому випадку дані часто є неточними або нечіткими, що потребує розробки спеціальних математичних моделей, які дозволяють адекватно відображати ситуацію, та методів для обробки даних.

Виходячи з цього, важливими з практичної точки зору є задачі розробки математичних методів та алгоритмів для підтримки прийняття рішень, зокрема, в умовах невизначеності. Розглянемо методику вибору рішень за умов предикції вихідних даних у вигляді сукупності складених нечітких множин.

**Визначення 1** [1]. Нечіткою множиною  $\tilde{A}$  в універсальній множині  $X$  називається сукупність пар виду  $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$ , де  $x \in X$ , а  $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$  - функція належності нечіткої множини  $\tilde{A}$ .

Значення функції належності  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  для довільного елемента  $x \in X$  називають ступенем належності  $x$  нечіткій множині  $\tilde{A}$ . Інтерпретацією ступеня належності  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  є

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor,  
Adzhubey L.T., Ph.D., associate professor,  
Babanin S.O., graduate

## Algorithm of decision support in situation with fuzzy initial data

For decision making support in the conditions of the unexactly or fuzzy formalized information offered approach to decisions forming by a person, which makes decision. It based on clusterizations of fuzzy initial data in groups with the subsequent choice of the proper data. An algorithm which is based on the fuzzy advantage relation and calculation method of distance between fuzzy sets is described.

**Key words:** complex fuzzy dataset, decision support, relations of preference

суб'єктивна міра того, наскільки елемент  $x \in X$  відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною  $\tilde{A}$ .

У випадку, коли елемент  $x \in X$  гарантовано належить множині  $\tilde{A}$ , значення функції належності  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ , і, навпаки, елемент

$x \in X$ , який гарантовано не належить  $\tilde{A}$ , характеризується величиною функції належності  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ . Якщо для кожного

$x \in X$  виконана рівність  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ , то явище  $\tilde{A}$  не може відбутися. В цьому випадку нечітку множину  $\tilde{A}$  називають порожньою.

Очевидно, що будь-яка чітка множина може бути інтерпретована як нечітка множина в універсальній множині  $X$  з функцією належності, яка може приймати значення 0 або 1.

Нехай задано сукупність нечітких множин  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$ , що визначені у відповідних універсальних просторах  $X_1, \dots, X_m$ .

Розглянемо універсальну множину  $X$  у вигляді декартового добутку  $X = \prod_{i=1}^m X_i$ .

Сформуємо множину

$$\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)); (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), \dots, (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}, \quad (1)$$

де  $x' \in X_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

За означенням, множина  $\tilde{A}^m$  належить декартовому добутку нечітких множин  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$ :  $\tilde{A}^m \in \tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_m$ .

**Визначення 2** [2]. Нечітку множину  $\tilde{A}^m$  будемо називати складеною нечіткою множиною в універсальній множині  $\prod_{i=1}^m X_i$ .

Сукупність всіх складених нечітких множин  $\tilde{A}^m$  в множині  $X = \prod_{i=1}^m X_i$  позначимо через  $K(\tilde{A}^m)$ .

Припустимо, що вибір розв'язку в ситуації, що потребує рішення, здійснюється за набором критеріїв  $K_1, \dots, K_p$ , а множини значень критеріїв задаються множинами  $X_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Це означає, що будь-яке рішення представляється у вигляді складеної нечіткої множини

$$\tilde{A}^p = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), \dots, (x^p, \mu_{\tilde{A}_p}(x^p))\} \in K(\tilde{A}^p),$$

де кожне значення  $x' \in X_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , може бути числовим показником або лінгвістичною змінною, що відповідає критерію  $K_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ .

Складені нечіткі множини  $\tilde{A}^p$  з  $K(\tilde{A}^p)$  будемо називати альтернативами. Таким чином, альтернатива  $\tilde{A}^p$  з відповідними значеннями функцій належності характеризує нечітке уявлення особи, що приймає рішення, про допустимість рішення для конкретної ситуації.

Нехай висновки в ситуації прийняття рішення описуються деякою сукупністю станів, які позначимо  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ . Припустимо, що кожний з елементів множини  $S$  визначений числовим або верbalним діапазоном значень  $S_q = \{s_1^q, \dots, s_{p_q}^q\}$ ,  $p_q \leq p$ ,  $q = \overline{1, n}$ , і може бути формалізованим у вигляді нечіткої множини

$$\tilde{S}_q = \{(s_1^q, \mu(s_1^q)), \dots, (s_{p_q}^q, \mu(s_{p_q}^q))\}, \quad q = \overline{1, n}, \quad (2)$$

значення функції належності якої визначатимуть ступені відповідності окремих елементів  $s_1^q, \dots, s_{p_q}^q$ ,  $q = \overline{1, n}$ , конкретному висновку.

При цьому, кожному нечіткому висновку  $\tilde{S}_q$ ,  $q = \overline{1, n}$ , відповідає складена нечітка множина

$$\tilde{A}_q^p = \{(x_1^q, \mu_{\tilde{A}_1}(x_1^q)), (x_2^q, \mu_{\tilde{A}_2}(x_2^q)), \dots,$$

$$(x_p^q, \mu_{\tilde{A}_p}(x_p^q))\}, \quad q = \overline{1, n}.$$

Таким чином, задаючи вихідну інформацію для ситуації прийняття рішень у вигляді складених нечітких множин

$$\tilde{U}_j^p = \{(u_j(x^1), \mu_{\tilde{A}_1}(u_j(x^1))), (u_j(x^2), \mu_{\tilde{A}_2}(u_j(x^2))), \dots, (u_j(x^p), \mu_{\tilde{A}_p}(u_j(x^p)))\},$$

$$j = \overline{1, t},$$

де  $u_j(x^i)$ ,  $j = \overline{1, t}$ ,  $i = \overline{1, p}$ , - значення критеріальних функцій  $K_1, \dots, K_p$ ,  $t$  - кількість спостережень, зводимо процедуру вибору рішень (альтернатив) до аналізу та взаємного співставлення наборів складених нечітких множин  $\tilde{U}_j^p$ ,  $j = \overline{1, t}$ , та  $\tilde{A}_q^p$ ,  $q = \overline{1, n}$ . Задача в даній постановці може розглядатися як задача групування (кластеризації) нечітко визначених даних з заданими  $n$  центрами кластерів, для вирішення якої використовуються різні методики [3].

Дійсно, якщо сукупність складених нечітких множин  $\tilde{A}_q^p$ ,  $q = \overline{1, n}$ , розглядати як центри нечітких кластерів, то задача буде полягати у визначенні груп вихідних даних, що утворюються навколо них. Визначення даних, які відповідають центрам кластеризації, можливе за умов визначення способу обчислення відстаней у сукупності складених нечітких множин  $K(\tilde{A}^m)$ .

Розглянемо дві довільні складені нечіткі множини:

$$\tilde{U}^p = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}^p(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}^p(x^2)), \dots, (x^p, \mu_{\tilde{A}_p}^p(x^p))\}$$

та

$$\tilde{V}^p = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}^p(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}^p(x^2)), \dots, (x^p, \mu_{\tilde{A}_p}^p(x^p))\}.$$

Обчислимо величину

$$\gamma = \min_{Z \in U, V, l, i=1, p} \mu_{\tilde{A}_l}^z(x^i),$$

яка є мінімальним значенням серед величин мір належності окремих елементів обох множин  $\tilde{U}^p, \tilde{V}^p$ . Визначимо множину рівня [2]  $\gamma, \gamma > 0$ , у вигляді

$$L''(\gamma) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, \dots, x^p \in X_p : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \gamma, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \gamma, \dots, \mu_{\tilde{A}_p}(x^p) \geq \gamma\}.$$

Це дозволяє побудувати дві множини рівня  $\gamma$  у вигляді звичайних множин  $L_U''(\gamma), L_V''(\gamma)$ , що представляють собою точки універсального

простору  $X = \prod_{i=1}^p X_i$ , для яких може бути обчислена відстань  $d = \|L_{\tilde{A}}^p(\gamma) - L_{\tilde{B}}^p(\gamma)\|$ , де  $\|\cdot\|$  - евклідова норма простору  $R^p$ .

**Визначення 3.** Нечітка скалярна величина

$$\tilde{D}(\tilde{A}^p) = \{(d, \gamma) : d = \|L_{\tilde{A}}^p(\gamma)\|, \gamma = \min_{i=1, p} \mu_{\tilde{A}_i}(x^i) \in (0, 1)\}, \quad (3)$$

визначає метрику в сукупності складених нечітких множин  $K(\tilde{A}^p)$ .

Таким чином, кожна складена нечітка множина  $\tilde{A}^p$  вимірюється за допомогою нечіткої величини  $\tilde{D}(\tilde{A}^p)$ , а для знаходження нечіткої відстані  $\rho(\tilde{U}^p, \tilde{V}^p)$  між довільними складеними нечіткими множинами  $\tilde{U}^p, \tilde{V}^p$  можна використати співвідношення

$$\rho(\tilde{U}^p, \tilde{V}^p) = \{(d, \gamma) : d = \|L_{\tilde{U}}^p(\gamma) - L_{\tilde{V}}^p(\gamma)\|, \gamma = \min_{Z \in \{\tilde{U}, \tilde{V}\}, i=1, p} \mu_{\tilde{Z}_i}^Z(x^i)\}, \quad (4)$$

де  $L_{\tilde{U}}^p(\gamma), L_{\tilde{V}}^p(\gamma)$  - множини рівня  $\gamma \in (0, 1)$  складених нечітких множин  $\tilde{U}^p, \tilde{V}^p$  відповідно.

Порівняння відстаней між довільними парами складених нечітких множин будемо проводити за допомогою нечіткого відношення переваги.

Нечітке відношення переваги для традиційних нечітких множин [4] визначається на основі порівняння відстаней нечітких множин до деякої наперед заданої чіткої множини і знаходження компромісного значення в процесі вибору найменшої з них. Розширемо цей підхід на випадок складених нечітких множин.

Нехай  $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}_1^p, \tilde{V}_1^p)$ ,  $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}_2^p, \tilde{V}_2^p)$  - нечіткі відстані між складеними нечіткими множинами  $\tilde{U}_1^p, \tilde{V}_1^p$  та  $\tilde{U}_2^p, \tilde{V}_2^p$  відповідно. Визначимо нечітку відстань з двох заданих, яка є меншою у розумінні нечіткого відношення переваги " $<$ ".

Для визначення «найменшої» відстані, як правило, користуються технікою обробки нечітких відношень переваги, введеною Орловським [5]. В рамках даного підходу вважається, що нечітке відношення переваги  $g(a, b)$  для довільних нечітких елементів  $a, b \in R^p$  за умов  $\mu_g(a, b) > 0$  визначає

співвідношення у вигляді  $a < b$  із ступенем  $g(a, b) = \mu_g(a, b)$ .

За його допомогою можна порівняти відстані  $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}_1^p, \tilde{V}_1^p)$  та  $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}_2^p, \tilde{V}_2^p)$ : вираз  $g(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$  визначає ступінь того, наскільки  $\tilde{\rho}_1$  «менше», ніж  $\tilde{\rho}_2$ . Це також надає можливість визначити «найближчий» до заданої складеної нечіткої множини  $\tilde{Z}^0$  елемент  $\tilde{Z}$ , де  $\tilde{Z}$  складена нечіткою множиною з недомінованих наборів  $x^i \in X_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , функції належності яких описуються таким чином:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Z}_i}^{Z^0}(x^i) &= \min_{x \in X_i} (1 - \mu_{\tilde{Z}_i}(x, x)) = \\ &= 1 - \max_{x \in X_i} \mu_{\tilde{Z}_i}(x, x), i = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (5)$$

де через  $\tilde{Z}$  позначено нечітке відношення строгої переваги, що відповідає  $g(a, b)$

$$\mu_{\tilde{Z}}(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_x(a, b) < \mu_x(b, a) \\ \mu_x(a, b) - \mu_x(b, a), & \text{інше.} \end{cases},$$

$a, b \in X_i, i = \overline{1, p}.$

На основі введеного поняття відстані можна складеними нечіткими множинами та способу їх порівняння можна сформулювати алгоритм нечіткого групування даних, поданих у вигляді сукупності складених нечітких множин  $\tilde{U}_j^p$ ,  $j = \overline{1, t}$  з  $K(\tilde{A}^p)$ , в  $n$  кластерів.

**Приклад.** Розглянемо задачу оцінювання діяльності викладацького складу у вищому навчальному закладі за кількістю публікацій за рік (множина допустимих значень  $X_1$ ), обсягом аудиторного педагогічного навантаження ( $X_2$ ) та ефективність наукової роботи ( $X_3$ ). Покладемо  $X_1 = \{10, 25\}$ ,  $X_2 = \{700, 1000\}$ ,  $X_3 = \{\text{пасивна, середня, активна}\}$ .

Зрозуміло, що друковані роботи публікуються в виданнях різного рівня. Аудиторна робота характеризується різними формами методичного і змістового наповнення, а якість наукової роботи взагалі не може бути чітко формалізована. Тому інформація щодо викладацької діяльності буде подаватися у вигляді сукупності складених нечітких множин, що формуються на основі нечітких множин  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ , які визначають нечіткі уявлення конкретної особи понять активності науково-методичної діяльності та аудиторної роботи.

Задамо множини  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$  у вигляді

$$\tilde{A}_1 = \{(25;0.7), (20;0.6), (10;0.4)\},$$

$$\tilde{A}_2 = \{(700;0.5), (800;0.6), (1000;0.95)\},$$

$$\tilde{A}_3 = \{(\text{пасивна};0.3), (\text{середня};0.5), (\text{активна};0.7)\}.$$

Припустимо також, що висновки щодо оцінки науково-методичної роботи викладачів формуються на множині  $S = \{\text{викладач-методист}, \text{активний викладач}, \text{викладач-дослідник}, \text{пасивний викладач}\}$ . Рівні результативності роботи, які визначає особа, що приймає рішення, представляються нечіткими множинами (2)  $\tilde{S}_q = \{(s_1^q, \mu(s_1^q)), \dots, (s_n^q, \mu(s_n^q))\}, q = \overline{1, n}$ , де через  $s_i^q, i = \overline{1, 4}$ , позначені елементи множини  $S$  відповідно для всіх  $q = \overline{1, n}$ , а  $n$  визначає кількість різних висновків. Тоді за цими даними можна сформувати складені нечіткі множини  $\tilde{A}_q^3, q = \overline{1, n}$ , що відповідатимуть висновкам щодо рівнів викладацької діяльності  $\tilde{S}_q, q = \overline{1, n}$ :

$$\tilde{A}_q^3 = \{(x_1^q, \mu_{\tilde{A}_1}(x_1^q)), (x_2^q, \mu_{\tilde{A}_2}(x_2^q)), (x_3^q, \mu_{\tilde{A}_3}(x_3^q))\}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{S}_q, q = \overline{1, n}.$$

де  $x_j^q, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, 3}$ , - конкретні значення з множин  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ .

Нехай для даного прикладу кількість різних висновків  $n = 3$ , а відповідні нечіткі множини визначені у вигляді

$$\tilde{S}_1 = \{(s_1^1; 0.8), (s_2^1; 0.7), (s_3^1; 0.3), (s_4^1; 0.2)\},$$

$$\tilde{S}_2 = \{(s_1^2; 0.3), (s_2^2; 0.8), (s_3^2; 0.6), (s_4^2; 0.1)\},$$

$$\tilde{S}_3 = \{(s_1^3; 0.7), (s_2^3; 0.2), (s_3^3; 0.3), (s_4^3; 0.6)\},$$

$$\tilde{A}_1^3 = \{(20;0.7), (800;0.8), (\text{активна};0.2)\},$$

$$\tilde{A}_2^3 = \{(25;0.6), (700;0.8), (\text{активна};0.6)\},$$

$$\tilde{A}_3^3 = \{(10;0.8), (800;0.7), (\text{середня};0.7)\}.$$

Тоді, за умов подання вхідних даних сукупністю складених нечітких множин, які містять інформацію про науково-методичну діяльність викладачів і відповідні нечіткі показники цієї діяльності, можна побудувати три групи (кластера), що відповідатимуть заданим висновкам в наведений ситуації прийняття рішення.

На основі реалізації даного алгоритму створено програмний комплекс підтримки прийняття рішення в умовах подання вихідних даних сукупністю складених нечітких множин з урахуванням суб'єктивного оцінювання особою, що приймає рішення, рівнів відповідності значень критеріальних функцій у висновках за конкретною ситуацією.

## Список використаних джерел

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets //Information and control. 1965. V.8.
2. Івохін Є.В., Косинський К.О. Про підхід до реалізації нечітких баз даних //Вісник Київського національного університету. Серія: фіз.-мат.науки. Вип.2. - С.83-86.
3. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации.-М.: Финансы и статистика, 2002.- 344с.
4. Астронский А.И., Корженевич С.К. Применение теории нечетких множеств для исследования задач апостериорного оценивания в линейных дискретных системах// Диф. уравнения. Ин.матем. НАН Беларуси. 1995. Т.31. №6. - С.1678-1682.
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. -М.: Наука, 1981. 206с.

Надійшла до редколегії 19.02.2009



Для  $B$ -автомата  $A$  є розв'язною проблема  $L_\omega(A) = \emptyset$  [4]. Крім того,  $\omega$ -мови, що розпізнаються  $B$ -автоматами, ефективно замкнені відносно перетину, оскільки конструкція для перетину з [9] зберігає детермінізм, а також відносно об'єднання, про що свідчить наступна лема.

**Лема 1.** Для  $B$ -автоматів  $A_1$  та  $A_2$  існує  $B$ -автомат  $A$  такий, що  $L_\omega(A) = L_\omega(A_1) \cup L_\omega(A_2)$ .

**Доведення.** Нехай дано два  $B$ -автомати  $A_i = (Q_i, T, \delta_i, q_i, F_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .  $B$ -автомат  $A = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_1, q_2), (F_1 \times F_2) \cup (Q_1 \times F_2))$ , де  $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$  для всіх  $q_1 \in Q_1$ ,  $q_2 \in Q_2$ ,  $a \in \Sigma$ . розпізнає ті й тільки ті  $\omega$ -слова, які розпізнаються хоча б одним з автоматів  $A_1$  і  $A_2$ .

Зазначимо, що множини  $D, G_1, G$  розпізнаються детермінованими  $B$ -автоматами [5].

Будемо казати, що  $B$ -автомат  $A$  задає дійсну множину  $\|L_\omega(A)\|$ .

### Скінчені $R$ -перетворювачі та $B$ -автомати

Питання відповідності словарних множин, заданих скінченними  $R$ -перетворювачами та автоматаами Мюллера, розглядалося в [2, с. 285-286]. Виявляється, що  $B$ -автомати та скінчені  $R$ -перетворювачі мають однакові виразні спроможності для задання дійсних множин.

**Теорема 1.** За довільним скінченним  $R$ -перетворювачем  $A$  можна побудувати  $B$ -автомат  $M_A$  такий, що  $\|L_\omega(M_A)\| = \text{Dom } f_A$ .

**Доведення.** За теоремою 3 [5] спочатку побудуємо  $B$ -автомат  $M_A$  такий, що  $L_\omega(M_A) = \text{Dom } f_A$ . Множина  $\omega$ -мов, що розпізнаються  $B$ -автоматами ефективно замкнена відносно перетину. Тому  $\omega$ -мова  $L_\omega(M_A) \cap G_1$  розпізнається деяким  $B$ -автоматом  $M_{A_1}$ . Але за означенням та властивостями автомата  $M_A$   $\text{Dom } f_A = \|L_\omega(M_A) \cap G_1\|$ . Отже, автомат  $M_{A_1}$  є шуканим.

Насправді має місце й обернена теорема.

**Теорема 2.** За довільним детермінованим  $B$ -автоматом  $M_A$ , для якого  $L_\omega(M_A) \subseteq D$ , можна побудувати скінчений  $R$ -перетворювач  $A$  такий, що  $L_\omega(M_A) = \text{Dom } f_A$ .

**Доведення.** Змістово опишемо принцип роботи шуканого  $R$ -перетворювача. По-перше, він емулює роботу  $B$ -автомата  $M_A$  над своїм входом. На першому кроці своєї роботи незалежно від стану  $B$ -автомата та поточного символу він пише на вихід слово  $0V$ . Далі, як тільки  $B$ -автомат переходить в один із своїх заключних станів,  $R$ -перетворювач пише на вихід символ 1. При цьому  $R$ -перетворювач фактично задає часткову характеристичну функцію множини  $L_\omega(M_A)$ .

**Наслідок 1.** Класи дійсних множин, заданих

$B$ -автоматами та скінченними  $R$ -перетворювачами, співпадають.

**Наслідок 2.** Клас множин, заданих скінченними  $R$ -перетворювачами, замкнений відносно об'єднання та перетину.

**Доведення** наслідку випливає з теореми 1, замкненості відносно об'єднання та перетину класу  $\omega$ -мов, що розпізнаються  $B$ -автоматами, та з теореми 2.

### Незамкненість класу множин, заданих скінченними $R$ -перетворювачами, відносно доповнення

Клас  $\omega$ -мов, що розпізнаються  $B$ -автоматами, незамкнений відносно доповнення. Але класичний приклад  $\omega$ -мови  $\{0, 1\}^n \setminus \{0, 1\}^n 0^n$ , доповнення до якої не розпізнається жодним детермінованим  $B$ -автоматом, безпосередньо на числові множини перенести не можна хоча б тому, що з двох зображенів двійково-раціональних чисел він викидає лише одне. Дійсно, множина  $\|0V(\{0, 1\}^n \setminus \{0, 1\}^n 0^n)\| = (0: 1]$  не є шуканим контрприкладом.

**Лема 2.**  $\omega$ -мова

$$L_1 = 0V(\{0, 1\}^n 00)^n \cup 1\{0, 1\}^n V\{0, 1\}^n \cup (1\{0, 1\}^n \cup \{0\})V\{0, 1\}^n$$

розпізнається детермінованим  $B$ -автоматом.

**Доведення.** Побудуємо  $B$ -автомати  $A_1, A_2, A_3$  та  $A_4$ , що розпізнають  $\omega$ -мови  $0V(\{0, 1\}^n 00)^n$ ,  $1\{0, 1\}^n V\{0, 1\}^n$ ,  $1\{0, 1\}^n V\{0, 1\}^n$  та  $0V\{0, 1\}^n$  відповідно.

$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q\}, \Sigma, \delta_1, q_0, \{q_4\})$ , де  $\delta_1(q_0, 0) = q_1$ ,  $\delta_1(q_0, a) = q$  для всіх  $a \neq 0$ ,  $\delta_1(q_1, V) = q_2$ ,  $\delta_1(q_0, a) = q$  для всіх  $a \neq V$ ,  $\delta_1(q_2, 0) = q_3$ ,  $\delta_1(q_2, 1) = q_2$ ,  $\delta_1(q_2, a) = q$ ,  $\delta_1(q_3, 0) = q_4$ ,  $\delta_1(q_3, 1) = q_2$ ,  $\delta_1(q_3, a) = q$ ,  $\delta_1(q_4, 0) = q_3$ ,  $\delta_1(q_4, 1) = q_2$ ,  $\delta_1(q_4, a) = q$  для всіх  $a \in \{0, 1\}$ ;

$A_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q\}, \Sigma, \delta_2, q_0, \{q_2\})$ , де  $\delta_2(q_0, 1) = q_1$ ,  $\delta_2(q_0, a) = q$  для всіх  $a \neq 1$ ,  $\delta_2(q_1, 0) = q_1$ ,  $\delta_2(q_1, 1) = q_1$ ,  $\delta_2(q_1, V) = q_2$ ,  $\delta_2(q_1, i) = q$ ,  $\delta_2(q_2, 0) = q_2$ ,  $\delta_2(q_2, 1) = q_2$ ,  $\delta_2(q_2, V) = q$ ,  $\delta_2(q_2, i) = q$ ,

$A_3 = (\{q_0, q_1, q_2, q\}, \Sigma, \delta_3, q_0, \{q_2\})$ , де  $\delta_3(q_0, i) = q_1$ ,  $\delta_3(q_0, a) = q$  для всіх  $a \neq i$ ,  $\delta_3(q_1, 0) = q_1$ ,  $\delta_3(q_1, 1) = q_1$ ,  $\delta_3(q_1, V) = q_2$ ,  $\delta_3(q_1, i) = q$ ,  $\delta_3(q_2, 0) = q_2$ ,  $\delta_3(q_2, 1) = q_2$ ,  $\delta_3(q_2, V) = q$ ,  $\delta_3(q_2, i) = q$ ;

$A_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q\}, \Sigma, \delta_4, q_0, \{q_2\})$ , де  $\delta_4(q_0, 0) = q_1$ ,  $\delta_4(q_0, a) = q$  для всіх  $a \neq 0$ ,  $\delta_4(q_1, V) = q_2$ ,  $\delta_4(q_0, a) = q$  для всіх  $a \neq V$ ,

$$\begin{aligned}\delta_4(q_2, 0) &= q_2, \delta_4(q_2, \bar{1}) = q_2, \\ \delta_4(q_2, 1) &= q, \delta_4(q_2, \bar{\nabla}) = q.\end{aligned}$$

Оскільки клас  $\omega$ -мов, що розпізнаються детермінованими  $B$ -автоматами, ефективно замкнений відносно об'єднання, то їх об'єднання теж розпізнається детермінованим  $B$ -автоматом.

### Лема 3. $\omega$ -мова

$$L_2 = 0\nabla\{0, 1\}^*\{01, 10, 11\}^* \cap 0\nabla(0\{1\}^*)^*$$

не розпізнається детермінованим  $B$ -автоматом.

**Доведення.** Нехай існує детермінований  $B$ -автомат  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  з  $n$  станами, який розпізнає  $\omega$ -мову  $L_2$ .  $0\nabla(01)^* \in L_2$ , тому при роботі над  $0\nabla(01)^*$  автомат нескінченно багато разів проходить через деякий заключний стан, скажімо  $q_1$ . Нехай  $w_0$  є префіксом  $0\nabla(01)^*$ .  $|w| > 2$  та  $\delta'(q_0, w_0) = q_1$ .  $w_00(01)^* \in L_2$ , тому при роботі над  $w_00(01)^*$  автомат нескінченно багато разів проходить через деякий заключний стан, скажімо  $q_2$ . Нехай  $w_1$  є непорожнім префіксом  $(01)^*$  та  $\delta'(q_0, w_00w_1) = q_2$ . За аналогією продовжимо побудову слів  $w_i$  та станів  $q_i$  далі. Оскільки множина станів скінчена, то на деякому кроці для деяких  $i \neq j$  буде виконано  $q_i = q_j$ . Тоді  $B$ -автомат  $A$  розпізнає  $\omega$ -слово  $w_00w_100w_200w_300\dots w_n$ , яке не належить  $\omega$ -мові  $L_2$ . З отриманого протиріччя випливає хибність припущення. Лема доведена.

**Теорема 3.** Клас множин, заданих скінченними  $R$ -перетворювачами, не замкнений відносно доповнення.

**Доведення.** На доведення теореми вкажемо множину, яка може бути задана скінченним  $R$ -перетворювачем, а її доповнення – ні. За лемою 2  $\omega$ -мова  $L_1$  розпізнається  $B$ -автоматом  $M_A$ . Тому за теоремою 2 існує скінчений  $R$ -перетворювач  $A$ , для якого  $L_1 = L_w(M_A) = \text{Dom } f_A$ . Припустимо, що існує скінчений  $R$ -перетворювач  $A_1$ , для якого  $\text{Dom } f_{A_1} = R \setminus \text{Dom } f_A$ . Тоді за лемою 1 існує детермінований  $B$ -автомат  $M_{A_1}$ , для якого  $L_w(M_{A_1}) = \text{Dom } f_{A_1} \cap D_0$ . За побудовою для  $\omega$ -мови  $L_2$  виконано  $L_2 \subseteq D_0$  та  $\|L_2\| = R \setminus \|L_1\| = R \setminus \text{Dom } f_A$ . Тому  $L_w(M_{A_1}) = L_2$ , але за лемою 3  $\omega$ -мова  $L_2$  не розпізнається жодним  $B$ -автоматом. Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

### Потужність множин, заданих скінченними $R$ -перетворювачами

Для подальшого скористаємося додатковими позначеннями.

$\text{first}(w)$  – префікс  $w$  довжини  $i$ ,

$$L_{p,q}(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta'(p, w) = q\},$$

$$PL_q(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta'(q, w) = q \wedge$$

$$\wedge \forall i \in 1, |w|-1 \delta'(q, \text{first}_i(w)) \neq q\}.$$

**Лема 4.** Для  $B$ -автомата  $A$  мова  $L_{p,q}(A)$  є регулярною і розпізнається скінченим автомatem  $(Q, \Sigma, \delta, p, \{q\})$ .

**Лема 5.** Для  $B$ -автомата  $A$  мова  $PL_q(A)$  є регулярною.

**Доведення.** Вкажемо скінчений автомат  $A_p$ , що розпізнає мову  $PL_q(A)$ . Нехай  $q_+$  та  $q_-$  – два нових стани.

$$A_p = (Q \cup \{q_+, q_-\}, \Sigma, \delta_1, q_-, \{q_+\}), \text{де}$$

$$\text{для всіх } p \in Q, a \in \Sigma$$

$$\delta_1(p, a) = \delta(p, a), \text{ якщо } \delta(p, a) \neq q;$$

$$\delta_1(p, a) = q_+, \text{ якщо } \delta(p, a) = q;$$

$$\text{для всіх } p \in \{q_+, q_-\}, a \in \Sigma \delta_1(p, a) = q_-.$$

Відомо, що недетерміновані  $B$ -автомати за дають  $\omega$ -регулярні мови [11]. Відповідний  $\omega$ -регулярний вираз можна записати у багатьох формах, але зараз ми зафіксуємо лише таку.

**Лема 6.** Для  $B$ -автомата  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  має місце розклад

$$L_w(A) = \bigcup_{q \in F} L_{q_0, q}(A)(PL_q(A))^*.$$

**Доведення леми** випливає з того, що автомат розпізнає  $\omega$ -слово тоді й тільки тоді, коли при роботі над ним нескінченно багато разів проходить через деякий заключний стан.

**Лема 7.** Нехай  $i_1, j_1 \in N$ ,  $i_1 \neq j_1$ , для всіх  $i \in N$ ,  $w_i \in PL_q(A)$  та всі слова  $w_i$  попарно різні. Тоді  $w_{i_1} w_{i_2} \dots \neq w_{j_1} w_{j_2} \dots$

**Доведення.** До  $PL_q(A)$  входять ті й тільки ті слова, при роботі над якими автомат вперше переходить в стан  $q$ , тому мова  $PL_q(A)$  є префіксною (жодне слово мови не є власним початком іншого). Твердження леми випливає з префіксності мови  $PL_q(A)$ .

Сформулюємо декілька лем, що виконуються для довільного  $B$ -автомата  $A$ .

$$\begin{aligned}\text{Лема 8. } (\exists q \in F \text{ Card } PL_q(A) \geq 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\text{Card } L_w(A) = \kappa_1).\end{aligned}$$

**Доведення.** Оскільки усі стани автомата  $A$  досяжні, то існує слово  $w_0 \in L_{q_0, q}(A)$ . Нехай  $w_1, w_2 \in PL_q(A)$ ,  $w_1 \neq w_2$ . Тоді за лемою 6  $w_0 \{w_1, w_2\}^* \subseteq L_w(A)$ . За лемою 7 всі елементи множини  $w_0 \{w_1, w_2\}^*$  різні, тому існує бієкція між множинами  $w_0 \{w_1, w_2\}^*$  та  $\{0, 1\}^*$ . Звідки

$$\kappa_1 = \text{Card } w_0 \{w_1, w_2\}^* \leq \text{Card } L_w(A).$$

З іншого боку,  $L_w(A) \subseteq \Sigma^*$ , тому

$$\text{Card } L_w(A) \leq \text{Card } \Sigma^* = \kappa_1.$$

З отриманих двох нерівностей за теоремою Кантора-Бернштейна [1, с. 28] отримуємо шукану рівність  $\text{Card } L_{\omega}(A) = \kappa_1$ . Лема доведена.

**Лема 9.**  $(\forall q \in F (PL_q(A) = \emptyset \vee ((L_{q_0, q}(A) - \text{скінченна}) \wedge (\text{Card } PL_q(A) = 1)))) \Leftrightarrow L_{\omega}(A) - \text{скінченна}.$

**Доведення** випливає з леми 6.

**Лема 10.**  $(\forall q \in F (\text{Card } PL_q(A) \leq 1)) \Rightarrow (\text{Card } L_{\omega}(A) \leq \kappa_0).$

**Доведення.** Усі мови  $L_{q_0, q}(A)$  не більш ніж зліченні. Оскільки не більш ніж зліченність зберігається при операції об'єднання, то з урахуванням розкладу з леми 6 отримуємо шукане твердження.

**Теорема 4.** Для  $B$ -автомата  $A$  потужність  $\omega$ -мови  $L_{\omega}(A)$  може бути ефективно знайдена та наступні проблеми є розв'язними:

$\text{Card } L_{\omega}(A) = \kappa_1$ ,  $\text{Card } L_{\omega}(A) = \kappa_0$ ,  $L_{\omega}(A)$  є скінченною.

**Доведення.** Послідує з результатів лем 8, 9 та 10 маємо:

$$\begin{aligned} \exists q \in F \text{ Card } PL_q(A) \geq 2 &\Leftrightarrow \text{Card } L_{\omega}(A) = \kappa_1; \\ (\forall q \in F (PL_q(A) = \emptyset \vee ((L_{q_0, q}(A) - \text{скінченна}) \wedge (\text{Card } PL_q(A) = 1)))) &\Leftrightarrow L_{\omega}(A) - \text{скінченна}; \\ ((\forall q \in F (\text{Card } PL_q(A) \leq 1)) \wedge (L_{\omega}(A) - \text{некінченна})) &\Leftrightarrow \text{Card } L_{\omega}(A) = \kappa_0. \end{aligned}$$

За лемами 4 та 5 мови  $L_{q_0, q}(A)$  та  $PL_q(A)$  є регулярними та автомат для них може бути ефективно побудований за автомatem  $A$ . На завершення доведення теореми зазначимо те, що для регулярних мов питання скінченності/некінченості та визначення потужності є розв'язним.

**Наслідок 3.** Для  $\omega$ -мов, що розпізнаються  $B$ -автоматами, виконується континуум-гіпотеза.

**Доведення.** За лемами 8 та 10  $B$ -автомат може розпізнавати континуальну або не більш ніж зліченну множину  $\omega$ -слів.

**Наслідок 4.** Для множини  $M \subseteq R$ , заданої скінченим  $R$ -перетворювачем,  $R$ -перетворювачем, значення  $\text{Card } M$  може бути ефективно знайдено та наступні проблеми є розв'язними:

$\text{Card } M = \kappa_1$ ,  $\text{Card } M = \kappa_0$ ,  $M$  є скінченною.

**Доведення** наслідку випливає з теорем 1, 4.

**Наслідок 5.** Для множин, заданих скінченими  $R$ -перетворювачами, виконується континуум-гіпотеза.

**Доведення** наслідку випливає з теореми 1 та наслідку 3.

**Наслідок 6.** Для скінченного  $R$ -перетворю-

вача  $A$  множини  $\text{Dom } f_A$  та  $\text{Dom } \tilde{f}_A$  мають одинаковий характер незліченності.

**Доведення** наслідку випливає з того, що при визначені дійсної функції кофінальні двійкові зображення дійсних чисел до уваги не беруться, тому з розгляду викидається не більш ніж злічена множина, яка не впливає на характер незліченності.

**Ізольовані точки множин, заданих скінченими  $R$ -перетворювачами**

За наслідком 4 [6] для дійсної функції  $f$ , заданої магазинним (а тоді й скінченим)  $R$ -перетворювачем, ізольовані точки множин  $\text{Dom } f$  та  $R \setminus \text{Dom } f$  є раціональними. Отже ізольовані точки множини, заданої скінченим  $R$ -перетворювачем, є раціональними. Питання належності раціональної точки множини, заданої скінченим  $R$ -перетворювачем, є розв'язним [5]. Спробуємо розв'язати питання перевірки ізольованості раціональної точки та знайти множину усіх ізольованих точок.

$\omega$ -слово  $w \in L$  будемо називати ізольованою точкою  $\omega$ -мови  $L \subseteq D$ , якщо його можна подати у вигляді  $w = w_0 v$  так, що  $w_0 \Sigma^{\omega} \cap L = \{w\}$ . Ізольовані точки  $\omega$ -мови  $L$  не обов'язково відповідають ізольованим точкам множини  $|L|$ . Так, наприклад,  $\omega$ -слово  $0 \nabla 1^{\omega}$  є ізольованою точкою  $\omega$ -мови  $L = 1 \nabla \{0, 1\}^{\omega} \cup \{0 \nabla 1^{\omega}\}$ , але число  $1 = |0 \nabla 1^{\omega}|$  не є ізольованою точкою множини  $|L| = [1; 2]$ . Ця проблема пов'язана з тим, що деякі дійсні точки мають два різних двійкових зображення.

**Лема 11.** Нехай  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  –  $B$ -автомат,  $w = w_0 \nabla v d^{\omega} \in D$ ,  $\delta'(q_0, w_0 \nabla v) = q$ ,  $\delta'(q, d) = q$ . Тоді

$w$  є ізольованою точкою  $\omega$ -мови  $L_{\omega}(A)$  тоді й тільки тоді, коли  $\omega$ -мова  $L_{\omega}(A_q)$  є одноelementnoю.

**Доведення.** Нехай  $w_0 \nabla v d^{\omega}$  – ізольована точка. За означенням ізольованої точки для деякого достатньо великого  $K$   $w_0 \nabla v d^{\omega} \Sigma^{\omega} \cap L_{\omega}(A) = \{w\} = \{w_0 \nabla v d^{\omega}\}$ , тому необхідно  $L_{\omega}(A_q) = \{d^{\omega}\}$ .

Якщо  $\omega$ -мова  $L_{\omega}(A_q)$  є одноelementnoю, то  $L_{\omega}(A_q) = \{d^{\omega}\}$ , оскільки  $\delta'(q_0, w_0 \nabla v) = q$  та з умови  $w_0 \nabla v d^{\omega} \in L_{\omega}(A)$  випливає, що  $d^{\omega} \in L_{\omega}(A_q)$ . Тому  $w_0 \nabla v \Sigma^{\omega} \cap L_{\omega}(A) = w_0 \nabla v L_{\omega}(A_q) = \{w_0 \nabla v d^{\omega}\} = \{w\}$ .

Звідки точка  $w$  є ізольованою. Лема доведена.

Введемо таке позначення. Для слова  $r$  та слова  $a$  виберемо найменші можливі  $m, n$  ( $n > 1$ ), для яких  $\delta'(r, a^m) = \delta'(r, a^{m+n})$ , та покладемо  $c(r, a) = \delta'(p, a^m)$ .

**Теорема 5.** Для  $B$ -автомата  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  та  $\omega$ -слова  $w = w_0 \nabla v d^{\omega} \in D$  проблема чи  $w$  є ізольованою точкою  $\omega$ -мови  $L_{\omega}(A)$  є розв'язним.

льованою точкою  $\omega$ -мови  $L_\omega(A)$  є розв'язною.

**Доведення.** По-перше, зазначимо, що за словами  $w_0$ ,  $v$  та  $d$  можна визначити, чи належить  $\omega$ -слово  $w = w_0 \nabla v d^\omega$  множині  $L_\omega(A)$ . Якщо ні, то  $w$  не є ізольованою точкою. Інакше продовжимо аналіз  $\omega$ -слова  $w$ .

Нехай  $q = c(\delta'(q_0, w_0 \nabla v), d)$ . За лемою 11  $w = w_0 \nabla v d^\omega$  є ізольованою точкою  $\omega$ -мови  $L_\omega(A)$  тоді й тільки тоді, коли мова  $L_\omega(A_q)$  є одноелементною. А це питання за теоремою 4 розв'язне. Теорема доведена.

**Лема 12.** Для  $B$ -автомата  $A$  та  $\omega$ -слова  $w = w_0 \nabla v d^\omega \in G \cup \{0 \nabla 0^\omega\}$   $\|w\|$  є ізольованою точкою множини  $\|L_\omega(A)\|$  тоді й тільки тоді, коли  $w$  є ізольованою точкою множини  $L_\omega(A)$ .

**Доведення. Випадок 1.**  $w \in G$ .

Якщо  $\|w\|$  – ізольована, то в деякому її околі немає інших точок множини  $\|L_\omega(A)\|$ . Оскільки в цьому випадку  $\|w\|$  має єдине двійкове зображення, то цей окіл можна звузити до околу вигляду  $\|w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega \cap D\|$ . Тоді

$$w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega \cap L_\omega(A) = w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega \cap D = \{w\},$$

тобто  $w$  – ізольована. Якщо  $w$  – ізольована, то для деякого  $i \geq 1$  виконано

$$w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega \cap L_\omega(A) = w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega \cap D = \{w\}.$$

Оскільки  $d \in \{0\}^* \cup \{1\}^* \cup \{\bar{1}\}^*$ , то для

$$\delta = 2^{-\min\{|0 \nabla d|, 1 - |0 \nabla d|\}}$$

виконано

$$\|w_0 \nabla v d^\omega\| < \|w\| - \delta/2 < \|w\| + \delta/2 < \|w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega\|,$$

Звідки

$$(\|w\| - \delta/2, \|w\| + \delta/2) \subseteq \|w_0 \nabla v d^\omega \Sigma^\omega \cap L_\omega(A)\| = \{\|w\|\},$$

тобто точка  $\|w\|$  є ізольованою.

**Випадок 2.**  $w = 0 \nabla 0^\omega$ . Доведення цього випадку повторює попереднє доведення з тією лише різницею, що  $v = \varepsilon$ ,  $d = 0$ , а в якості  $\delta$  слід взяти значення  $2^\omega$ . Лема доведена.

Двійково-раціональні числа (крім числа 0) мають два двійкових зображення: з 0 та 1 (або  $\bar{1}$ ) в періоді. В цьому випадку перевірка ізольованості повинна виконуватись за такою лемою.

**Лема 13.** Для  $B$ -автомата  $A$  та  $\omega$ -слова  $w = w_0 \nabla v d^\omega \in D(G \cup \{0 \nabla 0^\omega\})$   $\|w\|$  є ізольованою точкою множини  $\|L_\omega(A)\|$  тоді й тільки тоді, коли  $w$  є ізольованою точкою множини  $L_\omega(A) \cup \{w'\}$ , де  $w'$  – інше двійкове зображення числа  $\|w\|$ .

**Доведення** леми аналогічне доведенню випадку 1 леми 12.

**Теорема 6.** Для  $B$ -автомата  $A$  та  $\omega$ -слова  $w = w_0 \nabla v d^\omega \in D$  проблема чи є точка  $\|w\|$  ізольованою точкою множини  $\|L_\omega(A)\|$  є розв'язною.

**Доведення.** За лемами 12 та 13 питання ізольованості точки  $\|w\|$  зводиться до питання ізольованості словарних періодичних точок в  $\omega$ -мові, що задається  $B$ -автоматом, яке за теоремою 5 є розв'язним. Зауважимо, що  $B$ -автомат для  $\omega$ -мови  $L_\omega(A) \cup \{w'\}$  в доведенні леми 13 ефективно буде використовувати за заданим автомата  $A$  та словами  $w_0, v, d$ . Теорема доведена.

**Теорема 7.** Для  $B$ -автомата  $A$  множина ізольованих точок множини  $\|L_\omega(A)\|$  може бути ефективно побудована, тобто можна вказати  $\omega$ -регулярний вираз, що задає  $\omega$ -мову  $L$ , таку, що  $\|L\| \subseteq \|L_\omega(A)\|$  множиною ізольованих точок множини  $\|L_\omega(A)\|$ .

**Доведення.** Без обмеження загальності можна вважати, що  $L_\omega(A) \subseteq D$ . (Інакше розглянемо  $B$ -автомат для перетину  $L_\omega(A) \cap D$ .) Розглянемо довільний стан  $q \in Q$ . Якщо  $PL_q(A) \neq \emptyset$ , то  $L_{q_0, q}(A) \subseteq \Sigma^* \nabla \Sigma^*$ .

Якщо  $\text{Card } PL_q(A) \geq 2$ , то жодна з точок множини  $\|L_{q_0, q}(A) PL_q(A)^\omega\|$  не є ізольованою точкою множини  $\|L_\omega(A)\|$ .

Нехай  $w_0 \nabla v \in L_{q_0, q}(A)$  та  $PL_q(A)$  містить принаймні два різних слова  $d_1$  та  $d_2$ . Для довільних  $i_n, j_n \in \{1, 2\}$  за урахуванням леми 7 виконано

$$1 > |\|0 \nabla d_1 d_{i_1} d_{j_1} \dots\| - \|0 \nabla d_2 d_{i_2} d_{j_2} \dots\|| > 0.$$

Нехай

$$w = w_0 \nabla v d_1 d_{i_2} \dots d_{i_n} \dots$$

$$w_n = w_0 \nabla v d_1 d_{i_2} \dots d_{i_{n-1}} d_{j_n} d_{i_{n+1}} \dots, w, w_n \in L_\omega(A).$$

$$|\|w\| - \|w_n\|\| =$$

$$= 2^i \cdot |\|0 \nabla d_1 d_{i_2} \dots d_{i_n} \dots\| - \|0 \nabla d_2 d_{i_{n+1}} \dots\||.$$

де  $i = |vd_1 d_{i_2} \dots d_{i_n}| \geq n$ .

Звідки  $0 < |\|w\| - \|w_n\|\| \leq 2^n$  і  $\|w\|$  не є ізольованою точкою множини  $\|L_\omega(A)\|$ . Твердження доведено.

Якщо  $\text{Card } PL_q(A) = 1$ , то для деякого  $d \in PL_q(A) = \{d\}$  і  $L_\omega(A_q) = \{d^\omega\}$ , звідки за лемами 11 та 12 усі точки множини  $\|L_{q_0, q}(A) PL_q(A)^\omega \cap (G \cup \{0 \nabla 0^\omega\})\|$  є ізольованими точками множини  $\|L_\omega(A)\|$ .

На цьому етапі всі не двійково-раціональні ізольовані точки множини  $\|L_\omega(A)\|$  вже знайдено. Залишилося вказати двійково-раціональні.

Нехай  $p \in Q$ . Використовуючи леми 11 та 13, вкажемо, що  $|\|(L_{q_0, p}(A) \cap \Sigma_1^* \nabla \Sigma_1^*)\|| \leq 30$ .

льованими точками множини  $\|L_\omega(A)\|$  тоді й тільки тоді, коли кожна з множин  $L_\omega(A_{c(\delta(p), 1), 0})$  та  $L_\omega(A_{c(\delta(p), 0), 1})$  містить не більше одного елемента та хоча б одна з них непорожня. Analogічно по-передньому, елементи множини  $\|(L_{q_0, p}(A) \cap \Sigma_1)^\perp\|$  є ізольованими точками множини  $\|L_\omega(A)\|$  тоді й тільки тоді, коли кожна з множин  $L_\omega(A_{c(\delta(p), 1), 0})$  та  $L_\omega(A_{c(\delta(p), 0), 1})$  містить не більше одного елемента та хоча б одна з них непорожня.

Нехай

$$L(A, p, q, r, a) = \{ a0^k \nabla | \delta'(p, a0^k \nabla) = q, \delta'(p, 0a^k \nabla) = r \}.$$

Продовжуючи аналогічні міркування далі, для  $p, q, r \in Q$

- 1) елементи множини  $\|(L_{q_0, p}(A) \cap \Sigma_1)^\perp\|$  є ізольованими точками множини  $\|L_\omega(A)\|$  тоді й тільки тоді, коли кожна з множин  $L_\omega(A_{c(q, 1), 0})$  та  $L_\omega(A_{c(r, 1), 0})$  містить не більше одного елемента та хоча б одна з них непорожня;
- 2) елементи множини  $\|(L_{q_0, p}(A) \cap \Sigma_1)^\perp\|$  є ізольованими точками множини  $\|L_\omega(A)\|$  тоді й тільки тоді, коли кожна з множин  $L_\omega(A_{c(q, 0)})$  та  $L_\omega(A_{c(r, 1)})$  містить не більше одного елемента та хоча б одна з них непорожня.

Наведені випадки перераховують усі можливі двійково-раціональні ізольовані точки. На завершення слід додати, що мова  $L(A, p, q, r, a)$  є регулярною, оскільки розпізнається скінченим автоматом

$$\begin{aligned} A_1 &= (Q_1, \Sigma, \delta_1, p, \{(p, \dots, q, r)\}), \text{де} \\ Q_1 &= \{p\} \cup ((Q \cup \{p\}, p, \dots) \times Q \times Q), \\ \delta_1(p, a) &= (p, \delta(p, a), \delta(p, 0)), \\ \delta_1((p, q_1, q_2), 0) &= (p, \delta(q_1, 0), \delta(q_2, a)), \\ \delta_1((p, q_1, q_2), \nabla) &= (p, \dots, \delta(q_1, \nabla), \delta(q_2, \nabla)). \end{aligned}$$

Теорема доведена.

#### Висновки

В роботі отримано алгоритм знаходження потужності та множини ізольованих точок множини, заданої скінченим  $R$ -перетворювачем. Крім того, отримані результати корисні для подальшого дослідження множин, заданих скінченими  $R$ -перетворювачами, оскільки дозволяють перенести розгляд на  $B$ -автомати.

У подальшому для множин, заданих скінченими  $R$ -перетворювачами, планується дослідити такі питання, як перевірка замкненості, ніде не щільноти, знаходження межі. Це зокрема дозволить визначити, чи є множина фракталом у вузь-

кому розумінні, без явного знаходження розмірності Хаусдорфа [2, с. 261]. Ще одне цікаве питання: спробувати перевірити континуумгіпотезу для множин заданих алгоритмічними  $R$ -перетворювачами.

#### Список використаних джерел

1. Колмогоров А. Н., Фомін С. В. Елементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
2. Лисовик Л. П. Теория трансдьюсеров. – К.: Феникс, 2006. – Т. 3. – Кн. 5: Типы функций. Интерполяция. Фрактальность. – 320 с.
3. Hopcroft J.E., Ullman J.D. Introduction to automata theory, languages and computation. – Addison-Wesley Publishing Company, 1979. – 418 p.
4. Siekkes D. Decidable Theories I: Büchi's Monadic Second Order Successor Arithmetic. – Springer-Verlag, 1970. – 130 p.
5. Іванов С. В., Карнаух Т. О. Алгоритмічні властивості області визначення функцій, заданих скінченими  $R$ -перетворювачами. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – № 2. – С. 145-147.
6. Карнаух Т. О. Властивості ірраціональних точок області визначення функцій, заданих магазинними  $R$ -перетворювачами. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4.
7. Лисовик Л. П. Логические свойства частично непрерывных функций. // Математическая логика и алгоритмические проблемы. – 1989. – 12. – С. 39-72.
8. Лисовик Л. П. Применение конечных  $R$ -преобразователей для задания фрактальных кривых. // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 4. – С. 11-22.
9. Chouecka Y. Theories of automata on  $\omega$ -tapes: a simplified approach. // Journal of computer and system sciences. – Vol. 8. – 1974. – P. 117-141.
10. Staiger L. The Hausdorff measure of regular  $\omega$ -languages is computable. // Bull. EATCS. – Vol. 66. – 1998. – P. 178-182.
11. Thomas W. Automata on infinite objects. // Handbook of Theoretical Computer Science. – Vol. B. – 1990. – P. 133-191.

Надійшла до редакції 19.01.09

УДК 519.925.51

Кулян В.Р., к.т.н., доцент, Рутицька В.В., к.т.н.,  
Юнькова О.О., к.ф.-м.н., доцент

## Про математичне моделювання динаміки портфеля активів

Розглядається проблема побудови математичної моделі та управління портфелем цінних паперів як задача оптимального керування динамічною системою.

Ключові слова: математична модель, оптимальний портфель, оптимальне керування.

E-mail: V.Kulyan@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Проблема управління портфелем цінних паперів, активів і пасивів, інших інвестиційних інструментів є фундаментальною у фінансовій теорії та практиці. З цієї причини до неї привернута увага спеціалістів з різних прикладних областей знань. В той же час ця проблема як задача управління в умовах невизначеності відноситься також і до фундаментальних проблем теорії прийняття рішень. Дослідження Р.Беллмана, Дж.Данцига, Р.Мертона, Г.Марковиця були направлені на становлення фундаментальних основ та вивчення різних змістовних інтерпретацій і узагальнень процесів фінансового аналізу. Так, у статичному випадку отримано принципові результати, що мали широке практичне застосування, наприклад, встановлено властивість розкладу оптимального портфеля на не ризиковану і ризиковану складові для випадку наявності на ринку не ризикованого активу, досліджено фундаментальні властивості рівноважного ринку оптимальних портфелів.

Зусилля математиків при досліджені ринку фінансових інвестицій значною мірою були спрямовані на розгляд багатокритеріальних задач з великою кількістю критеріїв, на вивчення і розв'язання задач інвестиційного менеджменту в динамічній постановці, способах адекватного опису випадкових процесів зміни цін, на розробку прикладних чисельних методів для розв'язання задач великої розмірності.

Мета даної роботи полягає у застосуванні методів математичного моделювання та теорії керування для розв'язання динамічних задач інвестиційного менеджменту, для дослідження стратегій управління портфелем активів та

V.R. Kulyan, Ph.D., Ass.Prof., V.V.Rutyska,  
Ph.D., Yun'kova O.O., Ph.D., Ass.Prof.

## On mathematical modelling of portfolio dynamics

The problems of construct of mathematical model and dynamic portfolio control for optimal portfolio selection are investigated.

Key Words :mathematical model, optimal portfolio, optimal control.

пасивів і взагалі фінансових інструментів у динамічному випадку.

Динамічні моделі управління активами і зобов'язаннями (ALM) знайшли найбільш успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади роботи методики ALM включають реалізовані моделі для пенсійних фондів, страхових компаній, інвестиційних компаній, банків, університетських фондів.

Загальна схема активного управління портфелем акцій, як правило, складається з наступних кроків:

1. Розрахунок ціни окремої акції на основі статичних детермінованих моделей.
2. Аналіз статичного портфеля акцій.
3. Моделювання динаміки активу.
4. Моделювання динаміки портфеля активів.
5. Інтегральне управління і диверсифікація портфеля активів.

Разом з тим, з метою перерозподілу і зменшення ризиків інвестування розглядається задачу Д.Тобіна для портфеля змішаної структури.

Відомі також приклади застосування «наївної політики» при розміщенні фінансових ресурсів.Хоча варто відмітити, що вона супроводжується значною волатильністю (дисперсія цільової функції до року). Прикладом такого інвестування є структура, що включає: 50% акцій компаній-резидентів; 5% звичайних акцій компаній-нерезидентів; 30% цінних паперів з фіксованим

доходом (облігації, привілейовані акції, т.ін.); 5% паперів від вкладання в нерухомість; 10% активів, прирівняних до готівки.

Для того, щоб сформулювати задачу оптимального керування параметрами портфеля акцій, побудуємо його модель на основі моделі окремої акції [1].

На інтервалі часу  $t \in [t_0, t_1]$  рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій  $r_p$ , має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t), \quad (1)$$

де  $x_i$  – частка акцій  $i$ -того виду у портфелі;  $r_i$  – очікувана прибутковість акцій  $i$ -того виду. Продиференціювавши обидві частини (1) за  $t$ , отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt}). \quad (2)$$

Зважуючи на те, що для  $i \neq j$  мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)} &= \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times \\ &\times r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)}, \\ \sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} &= \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times \\ &\times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) функція  $f$  є правою частиною математичної моделі формування ціни акції [1]

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= (\alpha_1 S M_{int}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \\ &+ \alpha_3(x(t), r(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді динамічне рівняння формування ціни портфеля акцій матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dr_p(t)}{dt} &= 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left( \frac{f_j}{r_j(t)} + \right. \\ &\left. + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), i \neq j. \end{aligned} \quad (5)$$

Останнє співвідношення при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку поведінки портфеля ризикованих цінних паперів. Більш

детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля.

Для моделей (4), (5) задачу з фіксованим часом, закріпленим лівим кінцем та вільним правим кінцем у випадку, коли оптимальність розглядають у розумінні мінімуму функціонала

$$J = \sum_i x_i r_i(t_1), \quad (6)$$

де  $x_i(t)$  – задані величини, які характеризують структуру портфеля. Можемо припустити, що застосовуючи «наївну політику» інвестування для заданого інтервалу часу ці величини є постійними. Таким чином, необхідно побудувати оптимальний процес, що починається у заданій точці  $x_0$  і надає функціоналу (6) найменше можливе значення. Матимемо

$$\begin{aligned} J &= \sum_i x_i r_i(t_1) = \sum_i x_i (r_i(t_1) - r_i(t_0)) + \sum_i x_i r_i(t_0) = \\ &= \sum_i x_i \int_{t_0}^{t_1} f_i(r(t), u(t)) dt + const = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i x_i f_i(r(t), u(t)) dt + const. \end{aligned} \quad (7)$$

Із наведеного вище слідує, що  $J = I + const$ , де  $I$  – функціонал в задачі принципу максимуму Понтрягіна, в якому функція  $f_0$  має вигляд

$$f^0(x, u) = \sum_i c_i f^i(x, u).$$

Тому розв'язок даної задачі безпосередньо слідує із відповідної теореми про оптимальність розв'язку задачі оптимального керування із закріпленим часом [3]. Можна показати також, що побудова відповідних множин досяжності для моменту  $t_1$  може бути зведена до розв'язання серії задач мінімізації функціонала  $J = (x, r(t_1))$ . Варіюючи вектором  $x$  і, розв'язуючи відповідні задачі оптимального керування для різних значень  $x$ , отримаємо точки границі множини досяжності і опорні гіперплощини у цих точках.

Для спрощення подальших викладок математичну модель (5) в більш загальній формі запишемо так

$$\dot{r}_p = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i). \quad (8)$$

Границну умову, що характеризує ринкову вартість портфеля акцій у початковий  $t_0$  момент

часу сформулюємо у вигляді

$$r_p(t_0) = r_{p0}, \quad (9)$$

Критерій якості, на відміну від (6), залишемо у вигляді

$$J = \sum_i x_i(t_1) r_i(t_1). \quad (10)$$

Для розв'язання задачі оптимального керування (8), (9), (10) застосуємо метод послідовних наближень. Уведемо позначення  $f(x, u, t) =$

$$= 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left( \frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right),$$

$i \neq j$ . Тут в якості змінної фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій  $r_p$ . В якості керуючих параметрів, згідно з моделлю, розглядаємо вектор

$$u(t) = (x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt}).$$

Відомо, що загальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих керувань  $\{u^k(t)\}$  такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = R u^k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $u^0$  – деяке початкове наближення вектора керувань;  $R u(t)$  – довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням. Для лінійної динамічної математичної моделі (5) формування вартості портфеля та критерія якості (6)  $k+1$  ітерація методу матиме такий вигляд. Нехай  $u^k(t)$  визначено.

**Крок 1.** Розв'язати задачу Коши для початкової системи (5) і знайти фазову траєкторію  $r_p^k(t)$ , що задовільняє керуванню  $u^k(t)$ .

**Крок 2.** Побудувати спряжену систему і, розв'язавши для неї задачу Коши, визначити вектор-функцію  $p(t)$ , що відповідає керуванню  $u^k(t)$ ; при цьому замість  $x(t)$  підставляється побудована функція  $x^k(t)$ . Тут  $p(t)$  – вектор-функція, що є розв'язком задачі Коши відповідної спряженої системи.

**Крок 3.** За умови максимуму функції Гамільтона за керуванням знайти нове наближення  $u^{k+1}(t)$  для керування. Після цього переходимо до наступної ітерації. Умовою закінчення процесу може слугувати близькість

керуючих функцій двох послідовних наближень

$$\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Величину  $\varepsilon$  можна вибирати, наприклад, за умови наявності у оптимального портфеля акцій наперед заданих якісних характеристик.

В розвиток побудованої математичної моделі та формулювання для неї задачі оптимального керування можна побудувати послідовність оптимальних на інтервалах часу керувань, яка б враховувала можливості оптимальної диверсифікації портфеля акцій у фіксовані моменти часу. Щодо моментів часу, у які проводиться процедура диверсифікації, то тут можна використати такі підходи:

**Підхід 1.** Виходячи із наперед заданих якісних характеристик результуючого портфеля акцій, можна сформулювати оптимізаційну задачу стосовно як кількості, так і безпосередньо моментів диверсифікації.

**Підхід 2.** Практичні міркування дають підстави вважати, що реальна ринкова ситуація часто надає додаткову інформацію стосовно цієї проблеми.

Запропонована в даній роботі математична процедура дає можливість для побудованої динамічної моделі портфеля акцій сформулювати і знайти розв'язок задачі оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів.

#### Список використаних джерел

- Гарашенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутинская В.В. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента //Кибернетика и вычислительная техника.– 2005.– 148. – С.3-10.
- Крылов И.А., Черноуско Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления.– М.: Наука, 1971.– 247с.
- Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.– М.: Наука, 1969.– 408 с.

Надійшла до редакції 11.02.2009р.

УДК 518.9

Машченко С.О., к.ф.-м.н., доцент

## Відношення NE-переваги і домінування в некооперативних іграх та їх властивості

Розглядаються відношення NE-переваги і NE-домінування та їх властивості у іграх, які задані багатьма відношеннями переваги на множині ситуацій гри. Застосування цих відношень дозволяє формалізувати поняття рівноваги некооперативної гри.

Ключові слова: багатоцільові ігри, рівновага за Нешем, відношення переваги.

E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

У багатьох реальних конфліктах процес прийняття рішень може бути ускладнений тим, що кожен гравець може порівнювати ситуації гри не за одним відношенням переваги, а за деякою сукупністю таких відношень, які будемо називати критеріальними.

Розглянемо гру в нормальній формі  $MG = (X, \{R_i\}_{i \in N}; i \in N)$ , де  $N = \{1, 2, \dots, l\}$  - множина з  $l$  гравців;  $X$  - множина стратегій  $i$ -го гравця;  $\{R_i\}_{i \in N}$  - множина критеріальних бінарних відношень переваги  $R_i \subseteq X \times X, i \in N$ , гравця  $i \in N$ ,  $L_i = \{1, 2, \dots, l_i\}$  - множина їх індексів,  $l_i$  - їх кількість (кожне критеріальне відношення переваги  $R_i$  є визначенім на множині ситуацій гри  $X = \prod_{i \in N} X_i$ ). Гравці, вибираючи свої стратегії,

прагнуть того, щоб склалася наскільки можливо більш переважна для кожного ситуація гри за усіма критеріальними відношеннями переваги. Відношення переваги  $R_i, i \in N$ , в цій роботі, розглядаються як нестрогі впорядкування, тобто бінарні повні відношення, які використовуються для цільової орієнтації гравця.

У найбільш широкому розумінні, відношенням переваги вважається будь-яке рефлексивне бінарне відношення. Нагадаємо, що для відношення переваги  $R$ , його асиметрична частина  $S = R \setminus R^{-1}$  називається [1] відношенням домінування (строгою перевагою, строгим впорядкуванням), яке є асиметричним і тому - антирефлексивним, а симетрична частина  $I = \bar{S} \cup (\bar{S})^{-1}$  називається відношенням

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

## NE-preference and prevailing relations in uncooperative games and their properties

The relations of the NE-preference and NE-prevailing and their property are considered in the games, which are formulating by many preference relations on the set of situations of game. Application of these relations allows to formalize notion of uncooperative game equilibrium.

Key words: the multiobjectives game, the Nesh's equilibrium, the relation of preference.

байдужості, яке є симетричним і тому - рефлексивним. Якщо відношення переваги  $R$  є нестрогим впорядкуванням, тобто є повним відношенням  $(xRy \vee yRx, \forall x, y \in X)$ , то

$R \cup R^{-1} = X \times X$ , тому  $R \supseteq \overline{R^{-1}}$  та  $R^{-1} \supseteq \overline{R}$ . Звідси випливає, що  $S = R \setminus R^{-1} = R \cap (\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$  та, навпаки,  $R = \overline{S^{-1}}$ , а  $I = R \cap R^{-1}$ .

Нехай  $T \subseteq N$  - деяка коаліція гравців. Розглянемо  $(x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$  - відношення рівності наборів стратегій  $x_{N \setminus T} = (x_j)_{j \in N \setminus T}$  та  $y_{N \setminus T} = (y_j)_{j \in N \setminus T}$  доповнювальної коаліції  $N \setminus T$ .

Будемо казати, що ситуації  $x$ ,  $y$  множини ситуацій  $X$  гри  $MG$  знаходяться у відношенні  $(x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$  для коаліції  $T$ , якщо  $x_j = y_j, j \in N \setminus T$  для будь-яких ситуацій  $x = (x_j)_{j \in N} \in X$ ,  $y = (y_j)_{j \in N} \in X$ .

Твердження 1. Для  $\forall T \subseteq N$  відношення  $(x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$ , яке визначене на множині  $X$  ситуацій гри  $MG$ , є відношенням еквівалентності (симетричне, рефлексивне та транзитивне).

Доведення. Оскільки симетричність та рефлексивність цього відношення очевидні, зупинимось лише на властивості транзитивності. Для  $\forall T \subseteq N$  розглянемо множину ситуацій гри  $MG$ , які задовільняють умові  $x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T} = a \in X_{N \setminus T}$ , де  $X_{N \setminus T} = \prod_{i \in N \setminus T} X_i$  - множина наборів

стратегій доповнювальної коаліції  $N \setminus T$ . Неважко побачити, що ці ситуації будуть мати вигляд  $(x_T, a)$ , де  $x_T \in X_T$ . Тут і далі, через

$X_T = \prod_{t \in T} X_t$ , буде позначатися множина наборів стратегій коаліції  $T$ . Звідси видно, що для  $\forall x_T, y_T, z_T \in X_T$  з умов  $(x_T, a)_{N \setminus T} = a = (y_T, a)_{N \setminus T}$  та  $(y_T, a)_{N \setminus T} = a = (z_T, a)_{N \setminus T}$  слідує  $(x_T, a)_{N \setminus T} = a = (z_T, a)_{N \setminus T}$ . Твердження доведене.

Доповнення до відношення  $(x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$  будемо позначати через  $(x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$  та називати відношенням нерівності наборів стратегій  $x_{N \setminus T} = (x_j)_{j \in N \setminus T}$  та  $y_{N \setminus T} = (y_j)_{j \in N \setminus T}$  доповнюальної коаліції  $N \setminus T$ .

**Наслідок.** Для  $\forall T \subseteq N$  відношення  $(x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ , яке визначене на множині  $X$  ситуацій гри MG, є асиметричним, антирефлексивним та негатранзитивним.

Введемо  $R^{NE(T)}$  - відношення NE-переваги коаліції  $T$ , породжене відношенням переваги  $R$ .

Будемо казати, що ситуації  $x, y$  у множині ситуацій  $X$  гри MG знаходяться у відношенні NE-переваги коаліції  $T$ , яке породжено деяким відношенням переваги  $R$ , і позначати це через  $xR^{NE(T)}y$ , якщо  $xRy \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ .

Очевидним є відношення  $R^{NE(T)} \supseteq R, T \subseteq N$ .

Зокрема, якщо  $T = N$ , то  $R^{NE(N)} = R$ , а якщо  $T = \emptyset$ , то  $R^{NE(\emptyset)} = U$ , де  $U$  - універсальне відношення ( $xUy$  для  $\forall x, y \in X$ ).

Відношення NE-переваги успадковують від відношення переваги такі основні властивості бінарних відношень, як повноту (оскільки об'єднання повного відношення з будь-яким є повним), а тому і рефлексивність. Окрім цих властивостей відношення NE-переваги коаліції  $T$  успадковує від відношення переваги негатранзитивність (доповнення до відношення є транзитивним).

**Твердження 2.** Якщо відношення переваги  $R$  є негатранзитивним, то породжене їм відношення NE-переваги є також негатранзитивним.

Доведення цього твердження очевидно слідує з наслідку із твердження 1, оскільки об'єднання негатранзитивних відношень є негатранзитивним.

Уведемо означення відношення NE-домінування.

Будемо казати, що ситуації  $x, y$  у множині ситуацій  $X$  гри MG знаходяться у відношенні NE-домінування коаліції  $T \subseteq N$ , що породжене деяким відношенням домінування  $S$ , і позначати це через  $xS^{NE(T)}y$ , якщо  $xSy \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$ .

Очевидним є відношення  $S^{NE(T)} \subseteq S, T \subseteq N$ .

Зокрема, якщо  $T = N$ , то  $S^{NE(N)} = S$ , а якщо  $T = \emptyset$ , то  $S^{NE(\emptyset)} = \emptyset$ , де  $\emptyset$  - порожнє відношення ( $x \bar{\otimes} y$  для  $\forall x, y \in X$ ).

Відношення NE-домінування успадковує від породжуючого його відношення домінування такі властивості бінарних відношень, як асиметричність (оскільки перетин асиметричного відношення з будь-яким є асиметричним) та антирефлексивність.

Окрім цих властивостей, відношення NE-домінування коаліції  $T \subseteq N$  успадковує від відношення домінування - транзитивність.

**Твердження 3.** Якщо відношення домінування  $S$  є транзитивним, то породжене їм відношення NE-домінування коаліції  $T \subseteq N$  є також транзитивним.

Доведення цього твердження очевидно слідує з твердження 1, оскільки перетин транзитивних відношень є транзитивним.

Оскільки відношення домінування  $S$  є асиметричним (строгим впорядкуванням), то йому буде відповідати побудоване за означенням також асиметричне відношенням NE-домінування  $S^{NE(T)}$  коаліції  $T \subseteq N$ .

Уведемо означення відношення NE-байдужості.

Будемо казати, що ситуації  $x, y$  у множині ситуацій  $X$  гри MG знаходяться у відношенні NE-байдужості коаліції  $T \subseteq N$ , що породжене деяким відношенням байдужості  $I$ , і позначати це через  $xI^{NE(T)}y$ , якщо  $xIy \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ .

Очевидним є відношення  $I^{NE(T)} \supseteq I, T \subseteq N$ .

Зокрема, якщо  $T = \emptyset$ , то  $I^{NE(\emptyset)} = I$ , а якщо  $T = N$ , то  $S^{NE(N)} = U, R^{NE(\emptyset)} = U$ .

Відношення NE-байдужості успадковує від породжуючого його відношення байдужості такі властивості бінарних відношень, як симетричність та рефлексивність (оскільки об'єднання симетричного (рефлексивного) відношення з будь-яким симетричним (рефлексивним) є симетричним (рефлексивним)).

Окрім цих властивостей, відношення NE-байдужості коаліції  $T \subseteq N$  успадковує від породжуючого його відношення байдужості - транзитивність.

**Твердження 4.** Якщо відношення байдужості  $I$  є транзитивним, то породжене їм відношення NE-байдужості коаліції  $T$  є також транзитивним.

**Доведення.** Нехай для будь-яких ситуацій  $x, y, z \in X$  з відношень  $xIy$  та  $yIz$  слідує відношення  $xIz$ . Припустимо супротивне, що для

деяких ситуацій  $x, y, z \in X$  виконуються відношення  $xI^{NE(T)}y$ ,  $yI^{NE(T)}z$ , але  $\overline{xI^{NE(T)}z}$ . Тоді за означенням відношення  $NE$ -байдужості слідує  $x\bar{I}y \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})$ . Звідси  $x\bar{I}y$ , що суперечить припущення. Твердження доведене.

Оскільки відношення байдужості  $I$  є симетричним, то йому буде відповідати побудоване за означенням також симетричне відношенням  $NE$ -байдужості  $I^{NE(T)}$ .

Основні операції над відношеннями  $NE$ -переваги,  $NE$ -домінування та  $NE$ -байдужості коаліції  $T \subseteq N$  визначаються наступним чином. Нехай  $R_1, R_2$  - відношення переваги,  $S_1, S_2$  - відношення домінування, а  $I_1, I_2$  - відношення байдужості, які визначені на множині  $X$  ситуацій гри. Тоді операція об'єднання визначається як:

$$\begin{aligned} x(R_1 \cup R_2)^{NE(T)}y &\Leftrightarrow x(R_1 \cup R_2 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(R_1 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}) \cup R_2 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(R_1^{NE(T)} \cup R_2^{NE(T)})y, \forall x, y \in X; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(S_1 \cup S_2)^{NE(T)}y &\Leftrightarrow x((S_1 \cup S_2) \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x((S_1 \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})) \cup (S_2 \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (S_1^{NE(T)} \cup S_2^{NE(T)})y, \forall x, y \in X; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(I_1 \cup I_2)^{NE(T)}y &\Leftrightarrow x(I_1 \cup I_2 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(I_1 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}) \cup I_2 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(I_1^{NE(T)} \cup I_2^{NE(T)})y, \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Операція перетину визначається як:

$$\begin{aligned} x(R_1 \cap R_2)^{NE(T)}y &\Leftrightarrow x((R_1 \cap R_2) \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x((R_1 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})) \cap (R_2 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(R_1^{NE(T)} \cap R_2^{NE(T)})y, \forall x, y \in X; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(S_1 \cap S_2)^{NE(T)}y &\Leftrightarrow x(S_1 \cap S_2 \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(S_1 \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}) \cap S_2 \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(S_1^{NE(T)} \cap S_2^{NE(T)})y, \forall x, y \in X; \endaligned}$$

$$\begin{aligned} x(I_1 \cap I_2)^{NE(T)}y &\Leftrightarrow x((I_1 \cap I_2) \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x((I_1 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})) \cap (I_2 \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})))y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(I_1^{NE(T)} \cap I_2^{NE(T)})y, \forall x, y \in X; \endaligned}$$

Операція доповнення визначається як:

$$\begin{aligned} x\overline{R^{NE(T)}}y &\Leftrightarrow x(\overline{R \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})})y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(\overline{R} \cap (y_{N\setminus T} = x_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow x\overline{R^{NE(T)}}y; \end{aligned}$$

$$x\overline{S^{NE(T)}}y \Leftrightarrow x(\overline{S \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})})y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\overline{S} \cup (y_{N\setminus T} \neq x_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow x\overline{S^{NE(T)}}y;$$

$$\begin{aligned} x\overline{I^{NE(T)}}y &\Leftrightarrow x(\overline{I \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})})y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(\overline{I} \cap (y_{N\setminus T} = x_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow x\overline{I^{NE(T)}}y; \end{aligned}$$

Операція обернення визначається як:

$$\begin{aligned} x(R^{NE(T)})^{-1}y &\Leftrightarrow x(R \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))^{-1}y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(R^{-1} \cup (y_{N\setminus T} \neq x_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow x(R^{-1})^{NE(T)}y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(S^{NE(T)})^{-1}y &\Leftrightarrow x(S \cap (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}))^{-1}y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(S^{-1} \cap (y_{N\setminus T} = x_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow x(S^{-1})^{NE(T)}y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(I^{NE(T)})^{-1}y &\Leftrightarrow x(I \cup (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))^{-1}y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(I^{-1} \cup (y_{N\setminus T} \neq x_{N\setminus T}))y \Leftrightarrow x(I^{-1})^{NE(T)}y. \end{aligned}$$

Зв'язок між відношеннями  $NE$ -переваги та  $NE$ -домінування коаліції  $T \subseteq N$  встановлює

**Теорема 1.** Нехай  $R^{NE(T)}$  - відношення  $NE$ -переваги коаліції  $T \subseteq N$ , яке породжене деяким відношенням переваги  $R$ , а  $S^{NE(T)}$  - відношення  $NE$ -домінування коаліції  $T \subseteq N$ , яке породжене деяким відношенням домінування  $S$ . Тоді, якщо відношення  $R$  породжує  $S$ , то відношення  $R^{NE(T)}$  породжує  $S^{NE(T)}$ , тобто  $S = R \setminus R^{-1} \Rightarrow S^{NE(T)} = R^{NE(T)} \setminus (R^{NE(T)})^{-1}$ . Навпаки, якщо відношення  $R^{NE(T)}$  породжує  $S^{NE(T)}$ , то  $xSy \Leftrightarrow x(R \setminus R^{-1})y$  для  $\forall x, y \in X$  таких, що  $x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}$ .

**Доведення.** Розглянемо довільну коаліцію гравців  $T \subseteq N$ . Нехай  $S = R \setminus R^{-1}$ . Тоді, очевидно, для  $\forall x, y \in X$   $(xSy) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}) \Leftrightarrow (x(R \setminus R^{-1})y) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})$ . За означенням перепишемо це відношення у вигляді  $xS^{NE(T)}y \Leftrightarrow (x(R \setminus R^{-1})y) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})$ . Розглянемо відношення  $(x(R \setminus R^{-1})y) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})$ . Воно приводить до відношення  $(xRy) \wedge (\bar{y}R\bar{x}) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})$ . Звідси слідує  $((xRy) \wedge (\bar{y}R\bar{x}) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})) \vee ((x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}) \wedge (\bar{y}R\bar{x}))$ , а тому  $((xRy) \vee (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})) \wedge ((\bar{y}R\bar{x}) \wedge (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}))$ . Тоді, очевидно, одержимо відношення  $((xRy) \vee (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})) \wedge ((\bar{y}R\bar{x}) \vee (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))$ . Звідси, за означенням відношення  $NE$ -переваги, можна записати  $x(R^{NE(T)} \setminus (R^{NE(T)})^{-1})y$ . Остаточно

одержимо  $S^{NE(T)} = R^{NE(T)} \setminus (R^{NE(T)})^{-1}$ .

Нехай  $S^{NE(T)} = R^{NE(T)} \setminus (R^{NE(T)})^{-1}, \forall x, y \in X$ .

Звідси слідує  $S^{NE(T)} = R^{NE(T)} \cap \overline{(R^{NE(T)})^{-1}}$ . Тоді, за означеннями відношень  $NE$ -переваги та  $NE$ -домінування, для  $\forall x, y \in X$  можна записати  $(xSy) \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}) \Leftrightarrow ((xRy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})) \wedge \wedge \overline{(yRx) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})}$ . У свою чергу,  $((xRy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})) \wedge \overline{((yRx) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T}))}$  приводить до наступного відношення  $((xRy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})) \wedge ((y\bar{R}x) \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}))$ , яке є еквівалентним відношенню  $((xRy) \wedge (y\bar{R}x) \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})) \vee ((x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T}) \wedge \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}) \wedge (y\bar{R}x))$ . Звідси слідує відношення  $(xRy) \wedge (y\bar{R}x) \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$ , із якого одержимо  $(x(R \setminus R^{-1})y) \wedge (x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T})$ . Останнє відношення означає, що  $S = R \setminus R^{-1}$  для  $\forall x, y \in X$  таких, що  $x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}$ . Теорему доведено.

**Наслідок.** Якщо відношення переваги  $R$  є нестрогим впорядкуванням, а  $S = \overline{R^{-1}}$  - це породжене їм відношення домінування, то  $S^{NE(T)} = \overline{(R^{NE(T)})^{-1}}, T \subseteq N$ . Навпаки, якщо  $S^{NE(T)} = \overline{(R^{NE(T)})^{-1}}$ , то  $xSy \Leftrightarrow x(\overline{R^{-1}})y$  для  $\forall x, y \in X$  таких, що  $x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}$ .

Зв'язок між відношеннями  $NE$ -переваги та  $NE$ -байдужості коаліції  $T \subseteq N$  встановлює

**Теорема 2.** Нехай  $R^{NE(T)}$  - відношення  $NE$ -переваги коаліції  $T \subseteq N$ , яке породжене деяким відношенням переваги  $R$ , а  $I^{NE(T)}$  - відношення  $NE$ -байдужості коаліції  $T \subseteq N$ , яке породжене деяким відношенням домінування  $I$ . Тоді, якщо відношення  $R$  породжує  $I$ , тобто  $I = R \cap R^{-1}$ , то відношення  $R^{NE(T)}$  породжує  $I^{NE(T)}$ , тобто  $I^{NE(T)} = R^{NE(T)} \cap (R^{NE(T)})^{-1}$ . Навпаки, якщо відношення  $R^{NE(T)}$  породжує  $I^{NE(T)}$ , тобто  $I^{NE(T)} = R^{NE(T)} \cap (R^{NE(T)})^{-1}$ , то  $xIy \Leftrightarrow x(R \cap R^{-1})y$  для  $\forall x, y \in X$  таких, що  $x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}$ .

**Доведення.** Розглянемо довільну коаліцію гравців  $T \subseteq N$ . Нехай  $I = R \cap R^{-1}$ , тоді очевидно, для  $\forall x, y \in X$  має місце  $(xIy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T}) \Leftrightarrow (x(R \cap R^{-1})y) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ . За означенням відношения  $NE$ -байдужості перепишемо це, як  $xI^{NE(T)}y \Leftrightarrow (x(R \cap R^{-1})y) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ . Розгля-

немо відношення  $(x(R \cap R^{-1})y) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ .

Воно приводить до відношення  $((xRy) \wedge (yRx)) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ . Звідси слідує  $((xRy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})) \wedge ((yRx) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T}))$ .

Тоді, за означенням відношения  $NE$ -переваги, можна записати  $x(R^{NE(T)} \cap (R^{NE(T)})^{-1})y$ .

Остаточно одержимо  $I^{NE(T)} = R^{NE(T)} \cap (R^{NE(T)})^{-1}$ .

Нехай  $I^{NE(T)} = R^{NE(T)} \cap (R^{NE(T)})^{-1}, \forall x, y \in X$ .

Тоді, за означеннями відношень  $NE$ -переваги та  $NE$ -байдужості, для  $\forall x, y \in X$  буде вірним відношення  $(xIy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T}) \Leftrightarrow ((xRy) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})) \wedge ((yRx) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T}))$ .

Звідси слідує  $((xRy) \wedge (yRx)) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ , яке еквівалентне  $(x(R \cap R^{-1})y) \vee (x_{N \setminus T} \neq y_{N \setminus T})$ .

Останнє відношення означає, що  $I = R \cap R^{-1}$  для  $\forall x, y \in X$ , що  $x_{N \setminus T} = y_{N \setminus T}$ . Теорему доведено.

Розглянемо застосування відношень  $NE$ -переваги та  $NE$ -домінування для визначення рівноваг гри  $MG$ .

Нехай  $(R'_i)^{NE(i)}$  -  $j$ -те,  $j \in L$ , критеріальне відношення  $NE$ -переваги гравця  $i \in N$  (коаліція складається лише з одного гравця  $i \in N$ ), яке породжене його критеріальним відношенням переваги  $R'_i$ . Позначимо через  $(S'_i)^{NE(i)}$  -  $j$ -те,  $j \in L$ , критеріальне відношення  $NE$ -домінування гравця  $i \in N$ , яке породжене його критеріальним відношеннем домінування  $S'_i$ .

Оскільки, за постановкою гри  $MG$ , критеріальні відношення переваги  $R'_i$  є нестрогими впорядкуваннями, а тому  $S'_i = \overline{(R'_i)^{-1}}$ , за наслідком з теореми 1 одержимо  $(S'_i)^{NE(i)} = \overline{((R'_i)^{NE(i)})^{-1}}$  для  $\forall x, y \in X$ . Якщо  $(S'_i)^{NE(i)} = \overline{((R'_i)^{NE(i)})^{-1}}$ , то  $x(S'_i)y \Leftrightarrow x(\overline{R'_i})^{-1}y$  для  $\forall x, y \in X$ , що  $x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i}$ .

Позначимо через  $(I'_i)^{NE(i)}$  -  $j$ -те,  $j \in L$ , критеріальне відношення  $NE$ -байдужості гравця  $i \in N$ , яке породжене його критеріальним відношеннем переваги  $R'_i$ .

Для кожного гравця  $i \in N$  представимо множину критеріальних бінарних відношень переваги  $\{R'_i\}_{j \in L}$ , агрегованим відношеннем

$Q_i = \bigcap_{j \in L} R'_i$ . Незважаючи на те, що усі критеріальні відношення  $R'_i$ ,  $j \in L$ , є повними, за

постановкою гри  $MG$ , агреговані відношення  $Q_i, i \in N$  вже можуть не бути повними, а тому можуть не бути нестрогими впорядкуваннями. Нехай  $I_i$  - відношення байдужості гравця  $i \in N$ , індуковане агрегованим відношенням переваги  $Q_i$ . Тоді  $I_i = Q_i \cap Q_i^{-1} = (\bigcap_{j \in I_i} R'_j) \cap (\bigcap_{j \in I_i} (R'_j)^{-1}) =$

$= \bigcap_{j \in I_i} I'_j$ , де  $I'_j = R'_j \cap (R'_j)^{-1}$  -  $j$ -те критеріальне відношення байдужості гравця  $i \in N$ , індуковане критеріальним відношенням його переваги  $R'_j, j \in L$ . Нехай  $T_i$  - відношення домінування гравця  $i \in N$ , індуковане агрегованим відношенням переваги  $Q_i$ . Тоді

$$T_i = Q_i \cap Q_i^{-1} = Q_i \cap \overline{\left( \bigcap_{j \in I_i} R'_j \right)^{-1}} = Q_i \cap \left( \bigcup_{j \in I_i} \overline{(R'_j)^{-1}} \right) = \\ = \bigcup_{j \in I_i} (Q_i \cap \overline{(R'_j)^{-1}}) = \bigcup_{j \in I_i} (Q_i \cap S'_j), \quad (1)$$

де  $S'_j = \overline{(R'_j)^{-1}}$  -  $j$ -те критеріальне відношення домінування гравця  $i \in N$ , індуковане критеріальним відношенням переваги  $R'_j, j \in L$ .

Таким чином, агрегація перетином критеріальних відношень приводить до наступного розуміння агрегованого відношення домінування. Будемо вважати, що ситуація  $x$  домінує ситуацію  $y$  для гравця  $i \in N$ , якщо  $x$  переважає  $y$  за кожним критеріальним відношенням і хоча б одне відношення повинно бути домінуванням. Якщо припустити існування функцій корисності [2]  $u'_i : X \rightarrow E^i$  за кожним критеріальним відношенням нестрогої переваги  $R'_j, j \in L$ , ( $xR'_j y \Leftrightarrow u'_i(x) \geq u'_i(y), \forall x, y \in X$ ), то наведене вище тлумачення агрегованого відношення домінування буде відповідати відомій [3] аксіомі Парето порівняння альтернатив за вектор-функцією  $U(x) = (u'_i(x))_{j \in I_i, i \in N}$ , а саме

$$x > y \Leftrightarrow U(x) > U(y) \Leftrightarrow u'_i(x) \geq u'_i(y), k \in L, i \in N \\ \exists i \in N, \exists j \in L_i : u'_i(x) > u'_i(y).$$

Позначимо через  $Q_i^{NE(i)}$  - відношення  $NE$ -переваги гравця  $i \in N$ , яке породжене агрегованим відношенням переваги  $Q_i$ . ( $xQ_i^{NE(i)} y \Leftrightarrow xQ_i y \vee (x_{N \setminus i} \neq y_{N \setminus i})$ ). Згідно зведеніх операцій над відношеннями  $NE$ -переваги, можна записати  $Q_i^{NE(i)} = \bigcap_{j \in I_i} (R'_j)^{NE(i)}$ . Також нехай  $T_i^{NE(i)}$  - відношення  $NE$ -домінування гравця  $i \in N$ ,

яке породжене агрегованим відношенням домінування  $T_i$ . За означенням відношення  $NE$ -домінування  $xT_i^{NE(i)} y \Leftrightarrow xT_i y \wedge (x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i})$ . Згідно з теоремою 1, якщо відношення  $Q_i$  породжує  $T_i$ , то  $Q_i^{NE(i)}$  породжує  $T_i^{NE(i)}$ , тобто  $T_i = Q_i \cap Q_i^{-1} \Rightarrow T_i^{NE(i)} = Q_i^{NE(i)} \cap (Q_i^{NE(i)})^{-1}$ .

Навпаки, якщо відношення  $Q_i^{NE(i)}$  породжує  $T_i^{NE(i)}$ , то  $xT_i^{NE(i)} y \Leftrightarrow x(Q_i^{NE(i)} \cap (Q_i^{NE(i)})^{-1}) y$  для  $\forall x, y \in X$  таких, що  $x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i}$ .

Згідно зведенім у підрозділі 2.1 операцій над відношеннями  $NE$ -домінування гравця  $i \in N$  та за (1), можна записати

$$T_i^{NE(i)} = \bigcup_{j \in I_i} (Q_i^{NE(i)} \cap (S'_j)^{NE(i)}). \quad (2)$$

Позначимо через  $I_i^{NE(i)}$  - відношення  $NE$ -байдужості гравця  $i \in N$ , яке породжене агрегованим відношенням байдужості  $I_i$ , ( $xI_i^{NE(i)} y \Leftrightarrow xI_i y \vee (x_{N \setminus i} \neq y_{N \setminus i})$ ). Згідно зведеніх операцій над відношеннями  $NE$ -байдужості, можна записати  $I_i^{NE(i)} = \bigcap_{j \in I_i} (I'_j)^{NE(i)}$ . За теоремою

2, якщо відношення  $Q_i$  породжує  $I_i$ , то відношення  $Q_i^{NE(i)}$  породжує  $I_i^{NE(i)}$ , тобто  $I_i = Q_i \cap Q_i^{-1} \Rightarrow I_i^{NE(i)} = Q_i^{NE(i)} \cap (Q_i^{NE(i)})^{-1}$ .

Навпаки, якщо відношення  $Q_i^{NE(i)}$  породжує  $I_i^{NE(i)}$ , то  $xI_i y \Leftrightarrow x(Q_i \cap Q_i^{-1}) y$  для  $\forall x, y \in X$  таких, що  $x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i}$ .

Якщо гравці повністю інформовані, то вони могли б укласти певну необов'язкову угоду, яку було б невигідно жодному з них порушувати. Ідея стабільної угоди за Нешем [4] між гравцями за принципом мажоранті агрегованого відношення домінування приводить до наступного визначення рівноваги гри.

Ситуацію  $x^* \in X$  будемо називати сильною мажорантною рівновагою гри  $MG$ , якщо  $yT_i^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$ .

Позначимо через  $PME$  множину цих рівноваг. Тоді  $x^* \in PME \Leftrightarrow y\overline{T_i^{NE(i)}} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$ , що за (1) еквівалентне відношенню  $x^* \in PME \Leftrightarrow y(\bigcup_{j \in I_i} (Q_i^{NE(i)} \cap (S'_j)^{NE(i)})) x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$ .

**Теорема 3.** Нехай  $I_i^{NE(i)} = Q_i^{NE(i)} \cap (Q_i^{NE(i)})^{-1}$  - відношення байдужості, яке породжене відношенням  $NE$ -переваги гравця  $i \in N$ . Ситуація

$x^* \in PME$  тоді й лише тоді, коли для  $\forall y \in X$ ,  $\forall i \in N$  виконується  $x^*(I_i^{NE(i)} \cup (\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}))y$ .

**Доведення.** Нехай  $x^* \in PME$ . Припустимо супротивне, що  $\exists i \in N$ ,  $\exists y \in X$ , для якого  $x^*((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}) \cap I_i^{NE(i)})y$ . Звідси одержимо

$x^*((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}) \cap (\bigcap_{j \in L_i} (I_j^{i})^{NE(i)}))y$ , звідки слідує  $x^*((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}) \cup (\bigcap_{j \in L_i} (I_j^{i})^{NE(i)}))y$ . Тоді одержимо  $x^*(\bigcap_{k \in L_i} (\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}) \cup (I_k^{i})^{NE(i)}))y$ .

Оскільки відношення  $(R_i^i)^{NE(i)} = (S_i^i)^{NE(i)} \cup (I_i^i)^{NE(i)}$ , то  $x^*(\bigcap_{k \in L_i} (\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}) \cup (R_i^i)^{NE(i)}))y$  і звідси маємо

$x^*(\bigcup_{k \in L_i} (\bigcap_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}) \cap (R_i^i)^{NE(i)}))y$ . На підставі повноти критеріальних відношень  $NE$ -переваги гравця  $i \in N$ , справедливе  $(S_i^i)^{NE(i)} = ((R_i^i)^{NE(i)})^{-1}$ . Тому виходить  $y(\bigcup_{k \in L_i} (\bigcap_{j \in L_i} (R_j^i)^{NE(i)} \cap (S_j^i)^{NE(i)}))x^*$ ,

що еквівалентне  $y(\bigcup_{k \in L_i} (Q_i^{NE(i)} \cap (S_i^k)^{NE(i)}))x^*$ , звідки за (2) одержимо  $yT_i^{NE(i)}x^*$ , що суперечить припущеню  $x^* \in PME$ .

Нехай має місце  $x^*(I_i^{NE(i)} \cup (\bigcup_{j \in L_i} (S_j^{i})^{NE(i)}))y$ ,  $\forall y \in X$ ,  $\forall i \in N$ . Припустимо супротивне, що  $x^* \notin PME$ . Тоді, за означенням сильної мажорантної рівноваги,  $\exists i \in N$ ,  $\exists y \in X$  такі, що  $y(\bigcup_{k \in L_i} (Q_i^{NE(i)} \cap (S_i^k)^{NE(i)}))x^*$ . Це відношення можна

переписати у вигляді  $y(\bigcap_{k \in L_i} (Q_i^{NE(i)} \cup (S_i^k)^{NE(i)}))x^*$ .

Звідси слідує  $y(\bigcap_{k \in L_i} ((\bigcup_{j \in L_i} (R_j^i)^{NE(i)}) \cup (S_i^k)^{NE(i)}))x^*$ .

На підставі повноти критеріальних відношень  $NE$ -переваги  $(S_i^i)^{NE(i)} = ((R_i^i)^{NE(i)})^{-1}$ ,  $j \in L_i$ . Тому виходить  $x^*(\bigcap_{k \in L_i} ((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^i)^{NE(i)}) \cup (R_i^k)^{NE(i)}))y$ .

Відмітимо, що критеріальні відношення переваги гравців, зв'язані з їх відношеннями домінування та байдужості наступним чином  $R_i^i = S_i^i \cup I_i^i$ . За теоремами 1 та 2 такий саме зв'язок  $(R_i^i)^{NE(i)} = (S_i^i)^{NE(i)} \cup (I_i^i)^{NE(i)}$  мають відношення  $NE$ -переваги, домінування та байдужості. Тому  $x^*(\bigcap_{k \in L_i} ((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^i)^{NE(i)}) \cup (S_i^k)^{NE(i)} \cup (I_i^k)^{NE(i)}))y$ .

Звідси  $x^*(\bigcap_{k \in L_i} ((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^i)^{NE(i)}) \cup (I_i^k)^{NE(i)}))y$ . Далі

одержимо  $x^*((\bigcup_{j \in L_i} (S_j^i)^{NE(i)}) \cup (\bigcap_{k \in L_i} (I_i^k)^{NE(i)}))y$ , і

звідси  $x^*(I_i^{NE(i)} \cup (\bigcup_{j \in L_i} (S_j^i)^{NE(i)}))y$ . Одержані

суперечність. Теорему доведено.

Оскільки відношення  $NE$ -домінування  $x(S_i^i)^{NE(i)}y \Leftrightarrow xS_i^i y \wedge (x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i})$ , а відношення  $NE$ -байдужості  $x(I_i^i)^{NE(i)}y \Leftrightarrow xI_i^i y \vee (x_{N \setminus i} \neq y_{N \setminus i})$ , то сильну мажоранту рівновагу гри  $MG$  можна розуміти наступним чином. Ситуація  $x^* \in X$  буде сильною мажорантною рівновагою гри  $MG$  тоді й лише тоді, коли  $\forall i \in N$ ,  $\forall y_i \in X_i$  таких, що  $x^* \bar{T}_i (y_i, x_{N \setminus i}^*)$ .  $\exists j \in L_i : x^* S_j^i (y_i, x_{N \setminus i}^*)$ . Іншими словами, у цій ситуації кожному гравцю окремо буде не вигідно, хоча б за одним критеріальним відношенням домінування, міняти погоджену з іншими гравцями стратегію  $x^*$  на іншу, яка не приведе до ситуації, байдужої з  $x^*$ .

У висновку слід відмітити, що розглянуті у цій роботі відношення  $NE$ -переваги та  $NE$ -домінування дозволяють конструктивно застосувати для визначення та дослідження рівноваг багатоцільової гри відомі та добре розвинені принципи оптимальності для звичайних відношень, зокрема мажоранти множини за бінарним відношенням.

### Список використаних джерел

- Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. - М.: Наука, 1989. -320 с.
- Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. - Москва: Наука, 1978.-352 с.
- Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. -М.: Наука, 1982. -254 с.
- Машченко С.О., Павлюченко О.Г. Загальні умови векторної рівноваги за Нешем// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2004. -4.-С. 212-216.

Надійшла до редколегії 02.02.09

УДК 519.86

Назарага І. М., аспірант

## Монетарні моделі визначення обмінного курсу в умовах економіки України

Проведено аналіз можливості застосування монетарних моделей для визначення обмінного курсу гривні/долар США в умовах української економіки.

Ключові слова: монетарна модель, обмінний курс.

E-mail: inna\_na@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Обмінний курс є одним із основних показників, що широко використовуються в макроекономічному моделюванні (див., наприклад, [1] – [3]).

Для визначення обмінного курсу існують різні моделі в залежності від урахування факторів, що на нього впливають. До найпоширеніших моделей відносяться:

1. модель паритету купівельної спроможності (purchasing power parity);
2. модель паритету відсоткових ставок (interest rate parity);
3. монетарні моделі (monetary models);
4. модель Mundell-Fleming;
5. поведінкові моделі (BEER model);
6. модель портфеля активів (portfolio balance model).

У статті детально розглядаються монетарні моделі обчислення обмінного курсу з метою з'ясування можливості їх використання для економіки України.

Зауважимо, що вибір саме цих моделей, які є важливими самі по собі, базується, зокрема, і на необхідності пошуку адекватних моделей визначення валютного курсу.

Специфікою монетарних моделей є те, що обмінний курс визначено як відносну ціну двох валют, а також передбачається абсолютна мобільність капіталу. Активи в країні і за кордоном вважаються абсолютною субститутами (абсолютними замінниками), тобто інвесторам байдуже, у яку країну інвестувати.

### 1. Монетарна модель з гнучкими цінами

Монетарна модель з гнучкими цінами є однією з найпростіших серед монетарних моделей. У цій моделі ціни на всі товари є гнучкими, тобто повернення цін до своїх рівноважних значень відбувається миттєво. Крім

I. M. Nazaraga, post-graduate student

### The monetary models of definition of the exchange rate in the Ukrainian economics environment

The analysis of monetary models application to the definition of the exchange rate UAH/USD in the Ukrainian economy environment was carried out.

Key Words: monetary model, exchange rate.

того, передбачається, що обмінний курс встановлюється у результаті виконання паритету купівельної спроможності.

Основним рівнянням монетарної моделі з гнучкими цінами є наступне:

$$\ln e_i = (m_i - m_{z,i}) + (k_i y_{z,i}) + (\lambda_i - \lambda_{z,i}), \quad (1)$$

де

$e_i$  – обмінний курс,

$m_i$  – логарифм пропозиції грошей.

$y_i$  – логарифм вітчизняного доходу.

$i_i$  – внутрішня номінальна відсоткова ставка.

$k_i, \lambda$  – додатні константи,

а індексом  $z$  позначено аналогічні характеристики для іншої держави.

Рівняння (1) випливає з наведених нижче міркувань. Запишемо рівняння рівноваги на національному та іноземному грошових ринках [3, с. 180]:

$$m_i = p_i + k_i y_i - \lambda_i, \quad (2)$$

$$m_{z,i} = p_{z,i} + k_{z,i} y_{z,i} - \lambda_{z,i}, \quad (3)$$

де  $p_i$  – логарифм рівня внутрішніх цін.

$p_{z,i}$  – логарифм рівня цін іншої держави.

У монетарних моделях реальна відсоткова ставка вважається екзогенною в довгостроковому періоді і визначається на світових ринках через припущення абсолютної мобільності капіталу.

Наступним блоком побудови моделі є абсолютний паритет купівельної спроможності [4, с. 143], записаний у логарифмічній формі:

$$\ln e_i = p_i - p_{z,i}. \quad (4)$$

З рівнянь (2), (3), (4) випливає рівняння (1).

Припустивши, що  $k = k_z$ ,  $\lambda = \lambda_z$ , отримаємо (1) у спрощеному вигляді:

$$\ln e_i = (m_i - m_{z,i}) - k(y_i - y_{z,i}) + \lambda(i_i - i_{z,i}) \quad (5)$$

З рівняння (5) зокрема випливає, що при збільшенні пропозиції грошей на внутрішньому ринку у порівнянні з пропозицією грошей на іноземному ринку, зростає номінальний обмінний курс  $e_i$ , тобто відбувається знецінення національної валюти.

Незаперечною перевагою монетарної моделі з гнучкими цінами є її простота, а до недоліків віднесемо:

1. неадекватність припущення про вільне плавання обмінного курсу,
2. абсолютну взаємозамінність вітчизняних і іноземних активів,
3. відсутність обмежень на рух капіталу,
4. абсолютну гнучкість цін і заробітних плат у більшості країн,
5. використання припущення про виконання теорії паритету купівельної спроможності, що має свої умови виконання.

## 2. Модель різниці реальних

### відсоткових ставок

У цій моделі передбачається, що інфляція може спостерігатися протягом довгострокового періоду, і акцентується увага на важливості реальної відсоткової ставки у визначені обмінного курсу [5]. У довгостроковому періоді виконується паритет купівельної спроможності.

Базове рівняння моделі різниці відсоткових ставок має вигляд:

$$\ln e_i = m_i - m_{z,i} - k(y_i - y_{z,i}) - \mu(i_i - i_{z,i}) + \xi(\pi_i - \pi_{z,i}), \quad (6)$$

де  $(\pi_i - \pi_{z,i})$  - темп очікуваної різниці в інфляціях між двома країнами,

$\mu, \xi$  - коефіцієнти, а інші позначення описано вище.

Виведемо співвідношення (6). Для цього спочатку запишемо рівняння довгострокової рівноваги:

$$\ln \tilde{e} = \tilde{p} - \tilde{p}_z. \quad (7)$$

Тут  $\tilde{p}$  - довгострокове значення логарифму рівня цін держави,

$\tilde{p}_z$  - довгострокове значення логарифму рівня цін іноземної держави,

$\tilde{e}$  - довгострокове значення обмінного курсу.

Далі запишемо узагальнене рівняння формування очікувань за Дорнбушем [6]:

$$M_i(\ln e_{i+1}) - \ln e_i = \theta(\ln \tilde{e} - \ln e_i) + (\pi_i - \pi_{z,i}), \quad (8)$$

де  $\theta$  - коефіцієнт швидкості пристосування, який вважається екзогенною величиною.

Зауважимо, що у довгостроковому періоді  $\ln \tilde{e} = \ln e_i$ , тоді

$$M_i(\ln e_{i+1}) - \ln e_i = (\pi_i - \pi_{z,i}).$$

Поточний обмінний курс можна знайти з умови виконання непокритого відсоткового паритету [7, с. 10]  $M_i(\ln e_{i+1}) - \ln e_i = i_i - i_{z,i}$  та рівняння (8):

$$\ln e_i = \ln \tilde{e} - \theta^{-1} \{(i_i - \pi_i) - (i_{z,i} - \pi_{z,i})\}. \quad (9)$$

Отже, обмінний курс дорівнює своєму рівноважному значенню, якщо виконується рівність між реальними відсотковими ставками для двох країн, тобто

$$(i_i - \pi_i) = (i_{z,i} - \pi_{z,i}). \quad (10)$$

Якщо реальна відсоткова ставка в країні вища за іноземну, то обмінний курс буде знаходитися нижче довгострокового рівня, а тому буде рости.

Рівняння попиту на гроші в обох країнах моделюються так само, як і в моделі з гнучкими цінами:

$$m_i = p_i + ky_i - \lambda i_i,$$

$$m_{z,i} = p_{z,i} + ky_{z,i} - \lambda i_{z,i}.$$

Звідси

$$m_i - m_{z,i} = p_i - p_{z,i} + k(y_i - y_{z,i}) - \lambda(i_i - i_{z,i}). \quad (11)$$

У довгостроковому періоді  $\ln \tilde{e} = \ln e_i$ , тому, використовуючи (7), (10), (11):

$$\ln \tilde{e} = m_i - m_{z,i} - k(y_i - y_{z,i}) + \lambda(\pi_i - \pi_{z,i}). \quad (12)$$

Знову довгостроковий обмінний курс визначається відносним попитом та пропозицією двох валют. У рівновазі падіння внутрішньої пропозиції грошей, збільшення національного доходу або падіння очікуваної інфляції в країні збільшує попит на гроші і знижує обмінний курс.

Тепер підставимо (12) у (9) і позначимо  $\mu = \theta$ ,  $\xi = \theta' + \lambda$ .

Отримаємо рівняння (6):

$$\ln e_i = m_i - m_{z,j} - k(y_i - y_{z,j}) + \mu(i_i - i_{z,j}) + \xi(\pi_i - \pi_{z,j}).$$

Зауважимо, що монетарну модель із гнучкими цінами можна розглядати як окремий випадок моделі різниці реальних відсоткових ставок, де пристосування до рівноваги відбувається миттєво (оскільки при прямуванні  $\theta$  до нескінченності  $\xi=0$ ).

### 3. Модель з торговельними

#### та неторговельними товарами

Наступна модель є модифікацією моделі Balassa-Samuelson [7, с. 21], у якій центральна роль припадається різниці продуктивностей для пояснення коливань реального і номінального обмінного курсів. Передбачається, що ціна є функцією цін товарів першого виду (торговельних)  $P_T$  та товарів другого виду (неторговельних)  $P_N$ .

Торговельні товари – товари, які спроможні бути предметами міжнародної конкуренції, власне експорт чи імпорт конкуруючих країн. Ними є, наприклад, більшість промислових товарів [3, с. 164].

Неторговельні товари – це товари, які неможливо реалізувати на міжнародних ринках з прибутком, наприклад будівлі та окремі види послуг (перукарські, ресторанна їжа).

Основне рівняння моделі має вигляд:

$$\ln e_i = m_i - m_{z,j} - k(y_i - y_{z,j}) + \lambda(i_i - i_{z,j}) + \beta(P_T - P_N - (P_{T,z,j} - P_{N,z,j})), \quad (13)$$

де  $P_{T,j} = \ln P_T$ ,  $P_{N,j} = \ln P_N$ ,

$\beta$  – коефіцієнт, індексом  $z$  позначено відповідну характеристику іноземної держави, а інші змінні і параметри описано раніше.

Співвідношення (13) випливає з наступних міркувань. Запишемо рівняння, що пов'язують індекси цін та ціни на торговельні і неторговельні товари у логарифмічній шкалі (малими літерами позначено натуральні логарифми відповідних характеристик,  $\beta_z$  – коефіцієнт) для двох країн:

$$P_i = P_{N,j} + (1 - \beta)P_{T,j} \quad (14)$$

$$P_{z,j} = P_{N,z,j} + (1 - \beta_z)P_{T,z,j} \quad (15)$$

Припускаючи, що для цих рівнянь виконується паритет купівельної спроможності, тобто  $\ln e_i = P_{T,j} - P_{T,z,j}$ , отримаємо:

$$\ln e_i = P_i - P_{z,j} + \beta(P_{T,j} - P_{N,j}) - \beta_z(P_{T,z,j} - P_{N,z,j}). \quad (16)$$

З (11) та (16) при  $\beta = \beta_z$ :

$$\ln e_i = m_i - m_{z,j} - k(y_i - y_{z,j}) + \lambda(i_i - i_{z,j}) + \beta(P_{T,j} - P_{N,j} - (P_{T,z,j} - P_{N,z,j})).$$

Як правило, у якості цін товарів, якими можна торгувати, береться індекс оптових цін, для цін товарів, якими не торгають – індекс зарплати. З рівняння випливає, що збільшення вітчизняної реальної зарплати веде до зменшення національної валюти, тобто до зменшення  $e_i$ . Цей позитивний зв'язок між реальною зарплатою і вартістю валюти обумовлений тим фактом, що більша реальна зарплата відбиває більшу продуктивність праці в порівнянні із продуктивністю іноземної праці. Таким чином, у даній моделі вважається, що обмінний курс залежить від відносної ціни неторговельних товарів, тобто від різниці продуктивностей. При розрахунках продуктивностей розглядаються індекси продуктивності праці, які обчислюються як реальний ВВП на одного робітника.

### 4. Рівняння лінійної регресії для монетарних моделей

Розглянуті вище моделі (5), (6), (13) були записані у прийнятному для оцінювання вигляді. За змістом досліджувані моделі вкладаються у схему лінійної регресії.

Зокрема, монетарну модель з гнучкими цінами (5) у загальному можна представити рівнянням:

$$\ln e_i = \beta_0 + \beta_1(m_i - m_{z,j}) + \beta_2(y_i - y_{z,j}) + \beta_3(i_i - i_{z,j}) + u_i. \quad (17)$$

Для моделі різниці реальних відсоткових ставок узагальнене рівняння випливає з (6):

$$\ln e_i = \beta_0 + \beta_1(m_i - m_{z,j}) + \beta_2(y_i - y_{z,j}) + \beta_3(i_i - i_{z,j}) + \beta_4(\pi_i - \pi_{z,j}) + u_i. \quad (18)$$

Рівняння лінійної регресії для моделі з торговельними і неторговельними товарами:

$$\ln e_i = \beta_0 + \beta_1(m_i - m_{z,j}) + \beta_2(y_i - y_{z,j}) + \beta_3(i_i - i_{z,j}) + \beta_4(z_i - z_{z,j}) + u_i. \quad (19)$$

У рівняннях (17) - (19), крім раніше описаних позначень, вжито:

$z_1$  - показник продуктивності вітчизняної економіки (наприклад ВВП на 1 працюючого),

$z_{2j}$  - показник продуктивності економіки іншої держави,

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  - параметри моделі,

$u$  - похибка.

### 5. Основні гіпотези для монетарних моделей та їх перевірка

У моделях (17)-(19) різним значенням коефіцієнтів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  відповідають різні економічні ситуації. Зокрема, якщо у (17)  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 < 0, \beta_3 > 0$ , то отримаємо монетарну модель з гнучкими цінами (1). Аналогічно, для моделі (18) значення  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 < 0, \beta_3 > 0, \beta_4 > 0$  описують модель різниці реальних відсоткових ставок (6). Якщо ж коефіцієнти  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 < 0, \beta_3 > 0, \beta_4 < 0$  для моделі (19), то отримаємо модель (13).

Тому для (17) – (19) важливо перевірити основні припущення (гіпотези) щодо значень коефіцієнтів за довірчою імовірності  $\beta_c$ , тобто:

1.  $\beta_0 = 0$ ,
2.  $\beta_1 = 1$ ,
3.  $\beta_2 > 0$ ,
4.  $\beta_3 < 0$ .

Задача перевірки гіпотез таких типів у лінійній регресії

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{p-1} x_{p-1} + u \quad (20)$$

здійснюється засобами математичної статистики, з використанням критеріїв згоди.

Структура кожного з критеріїв згоди така:

1. Будеться статистика  $G$  критерію згоди, що за виконання припущені гіпотези має стандартний розподіл.

2. За довірчою імовірності  $\beta_c$  будеться довірча область  $D_{\beta_c}$ .

3. Гіпотеза приймається, якщо  $G \in D_{\beta_c}$  і відхиляється, якщо  $G \notin D_{\beta_c}$ .

Ідентифікація параметрів для кожної із описаних моделей здійснювалася методом найменших квадратів, для перевірки гіпотез

перших двох типів у лінійній регресії використано критерій згоди зі статистикою, яка має  $F$ -розподіл, для перевірки гіпотез інших двох типів застосовується критерій згоди із використанням статистики, яка має  $t$ -розподіл Стьюдента.

#### 5.1 Перевірка гіпотез $\beta_0 = 0$ та $\beta_1 = 1$

1. За довірчої імовірності  $\beta_c$  будеться статистика  $G$ , яка має  $F$ -розподіл:

$$G = \frac{(RSS_H - RSS)/q}{RSS/(n-p)},$$

де  $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x'_1 - \dots - \hat{\beta}_{p-1} x'_{p-1})^2$  - залишкова сума квадратів.

$RSS_H$  - залишкова сума квадратів за виконання припущені гіпотези,

$p$  - кількість параметрів (для моделі (17)  $p=4$ , для (18) та (19)  $p=5$ ),

$q$  - кількість припущені у  $H_0$  (для описаних моделей  $q=1$ ),

$n$  - кількість спостережень.

Зауваження:

Для перевірки  $H_0: \beta_0 = 0$

$$RSS_H = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 x'_1 - \dots - \hat{\beta}_{p-1} x'_{p-1})^2,$$

а для перевірки гіпотези  $H_0: \beta_1 = 1$

$$RSS_H = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - x'_1 - \dots - \hat{\beta}_{p-1} x'_{p-1})^2.$$

$$2. D_{\beta_c} = \left( \frac{1}{F_{n-p,q,\frac{1-\beta_c}{2}}}, F_{q,n-p,\frac{1-\beta_c}{2}} \right),$$

де  $\frac{1}{F_{n-p,q,\frac{1-\beta_c}{2}}}$  - нижня критична величина

для  $F$ -розподілу рівня значущості  $\frac{1-\beta_c}{2}$ ,

$F_{q,n-p,\frac{1-\beta_c}{2}}$  - верхня критична величина для  $F$ -

розподілу рівня значущості  $\frac{1-\beta_c}{2}$ .

### 5.2 Перевірка гіпотез $\beta_i > 0$ та $\beta_i < 0$

Для перевірки гіпотези  $H_0: \beta_i > 0$ :

1. статистика критерію згоди:  $G = \beta_i$ ,
2.  $D_{\beta_i} = (-t_{n-p,1-\beta_c} \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} + \hat{\beta}_i; +\infty)$ ,

де  $-t_{n-p,1-\beta_c}$  - нижня критична величина для  $t$ -розподілу рівня значущості  $1 - \beta_c$ ,

$\tilde{x}_i$  -  $i$ -й діагональний елемент матриці  $(X^T X)^{-1}$ .

$X$  - матриця спостережень,

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{RSS}{n-p}}$$

відхилення.

Зауваження: розглянуту статистику  $G = \beta_i$  отримано з допомогою наступного перетворення  $G = \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} \tilde{G} + \hat{\beta}_i$ , зі статистики  $\tilde{G} = \frac{\beta_i - \hat{\beta}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i}}$ , яка має  $t$ -розподіл Стьюдента з  $n-p$

ступенями свободи.

Твердження:

Якщо для перевірки гіпотези  $H_0: \beta_i > 0$  замість статистики  $G = \beta_i$  взяти  $\tilde{G} = 0$  і  $\tilde{G} \in D_{\beta_i}$ , то і  $G = \beta_i \in D_{\beta_i}$ .

Доведення:  $\beta_i > 0, \tilde{G} \in D_{\beta_i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta_i > 0, 0 \in (-t_{n-p,1-\beta_c} \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} + \hat{\beta}_i; +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_i \in (-t_{n-p,1-\beta_c} \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} + \hat{\beta}_i; +\infty) \Leftrightarrow G \in D_{\beta_i}$$

Для перевірки гіпотези  $H_0: \beta_i < 0$

1. статистика критерію згоди  $G = \beta_i$ ,
2.  $D_{\beta_i} = (-\infty; t_{n-p,1-\beta_c} \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} + \hat{\beta}_i)$

де  $t_{n-p,1-\beta_c}$  - верхня критична величина для  $t$ -розподілу рівня значущості  $1 - \beta_c$ .

Твердження:

Якщо для перевірки гіпотези  $H_0: \beta_i < 0$  замість статистики  $G = \beta_i$  взяти  $\tilde{G} = 0$  і  $\tilde{G} \in D_{\beta_i}$ , то і  $G = \beta_i \in D_{\beta_i}$ .

Доведення:  $\beta_i < 0, \tilde{G} \in D_{\beta_i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta_i < 0, 0 \in (-\infty; t_{n-p,1-\beta_c} \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} + \hat{\beta}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_i \in (-\infty; t_{n-p,1-\beta_c} \hat{\sigma} \sqrt{\tilde{x}_i} + \hat{\beta}_i] \Leftrightarrow G \in D_{\beta_i}$$

### 6. Результати перевірки основних гіпотез для монетарних моделей

Для статистичної перевірки основних гіпотез отриманих моделей обмінних курсів (гривня / долар США) використовувалися статистичні дані економік України та США [8-13].

1. Для монетарної моделі з гнучкими цінами при  $n=7$  (дані за 2000-2006 роки) за довірчої імовірності  $\beta_c=0,9$  результати наведено у таблиці 1:

Таблиця 1.

Гіпотеза	Статистика	$D_{0,9}$	
$\beta_0 = 0$	1925917	0,004636	10,12796
$\beta_1 = 1$	1958769	0,004636	10,12796
$\beta_2 < 0$	0	$-\infty$	0,641331
$\beta_3 > 0$	0	-1,19091	$+\infty$

2. Для монетарної моделі з гнучкими цінами при  $n=7$  (дані за 2000-2006 роки) за довірчої імовірності  $\beta_c=0,98$  результати наведено у таблиці 2:

Таблиця 2.

Гіпотеза	Статистика	$D_{0,98}$	
$\beta_0 = 0$	1925917	0,000185	34,11622
$\beta_1 = 1$	1958769	0,000185	34,11622
$\beta_2 < 0$	0	$-\infty$	0,956817
$\beta_3 > 0$	0	-2,45805	$+\infty$

3. Для монетарної моделі різниці реальних відсоткових ставок при  $n=7$  (дані за 2000-2006 роки) за довірчої імовірності  $\beta_c=0,9$  результати статистичної перевірки основних гіпотез наведено у таблиці 3:

Таблиця 3.

Гіпотеза	Статистика	$D_{0,9}$	
$\beta_0 = 0$	207264,44	0,005013	18,51282
$\beta_1 = 1$	5205842,28	0,005013	18,51282
$\beta_2 < 0$	0	$-\infty$	0,35203
$\beta_3 > 0$	0	0,058761	$+\infty$
$\beta_4 > 0$	0	-0,59611	$+\infty$

4. У таблиці 4 наводяться результати статистичної перевірки основних гіпотез для

монетарної моделі різниці реальних відсоткових ставок при  $n=7$  (дані за 2000-2006 роки) за довірчою імовірності  $\beta_c=0,98$ :

Таблиця 4.

Гіпотеза	Статистика	$D_{0,98}$	
$\beta_0 = 0$	207264,44	0,0002	98,50251
$\beta_1 = 1$	5205842,28	0,0002	98,50251
$\beta_2 < 0$	0	- $\infty$	0,97358
$\beta_3 > 0$	0	-3,3936	+ $\infty$
$\beta_4 > 0$	0	-1,00446	+ $\infty$

5. Результати статистичної перевірки основних гіпотез для монетарної моделі з торговельними і неторговельними товарами при  $n=7$  (дані за 2000-2006 роки) за довірчою імовірності  $\beta_c=0,9$  наведено у таблиці 5:

Таблиця 5.

Гіпотеза	Статистика	$D_{0,9}$	
$\beta_0 = 0$	1469544,245	0,005013	18,512821
$\beta_1 = 1$	100811,0643	0,005013	18,512821
$\beta_2 < 0$	0	- $\infty$	0,812666
$\beta_3 > 0$	0	-2,004306	+ $\infty$
$\beta_4 < 0$	0	- $\infty$	0,000029

6. У таблиці 6 наводяться результати статистичної перевірки основних гіпотез для монетарної моделі з торговельними і неторговельними товарами при  $n=7$  (дані за 2000-2006 роки) за довірчою імовірності  $\beta_c=0,98$ :

Таблиця 6.

Гіпотеза	Статистика	$D_{0,98}$	
$\beta_0 = 0$	1469544,245	0,0002	98,502513
$\beta_1 = 1$	100811,0643	0,0002	98,502513
$\beta_2 < 0$	0	- $\infty$	1,455639
$\beta_3 > 0$	0	-4,682965	+ $\infty$
$\beta_4 < 0$	0	- $\infty$	0,000087

Отже, за довірчих імовірностей 0,9 та 0,98 для монетарної моделі (17) гіпотези  $\beta_0 = 0$  і  $\beta_1 = 1$  відхиляються, а гіпотези  $\beta_2 < 0$  і  $\beta_3 > 0$  приймаються. Для моделі (18) за довірчих імовірностей 0,9 та 0,98 гіпотези  $\beta_0 = 0$  і  $\beta_1 = 1$  відхиляються, щодо гіпотези  $\beta_3 > 0$  за  $\beta_c=0,9$  висновків не робимо, інші гіпотези приймаються. І, нарешті, для моделі (19) за довірчих

імовірностей 0,9 та 0,98 гіпотези  $\beta_0 = 0$  і  $\beta_1 = 1$  відхиляються, а інші гіпотези приймаються.

## Висновки

За результатами проведеного дослідження, монетарна модель з гнучкими цінами, модель різниці реальних відсоткових ставок та модель з торговельними і неторговельними товарами є неадекватними для обчислення обмінного курсу гривня/ долар США в умовах української економіки. Отже, обмінний курс варто вважати екзогенною змінною (встановленою НБУ) або застосовувати інші моделі для його визначення.

## Список використаних джерел

- Харазішвілі Ю. М. Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України // Державний НДІ інформатизації та моделювання економіки Міністерства економіки України (ДНДІМЕ). - К.: ПоліграфКонсалтинг, 2007. - 324 с.
- Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: Учебник. - 6-е изд., испр. и доп. - М.: Высшее образование, 2006. - 654 с.
- Шемет Т.С. Теорія і практика валютного курсу: Навч. пос. для студ. екон. спец. вищ. закл. // О.І. Рогач (ред.). - К.: Либідь, 2006. - 358с.
- Гинзбург А. И., Михайко М. В. Рынки валют и ценных бумаг: Биржи. Инвестиции. Участники. - СПб.; М.; Нижний Новгород; Воронеж; Ростов на Дону: Питер, 2004. - 250 с.
- Frankel J. On the mark: a theory of floating exchange rate based on real interest differentials // American Economic Review, 1979. № 69(4). - P. 610-622.
- Dornbusch R. Expectations and exchange rate dynamics //Journal of Political Economy. December 1976. № 84(6). - P.1161-1176.
- Четвериков С. Н., Карасев Г. Г. Структурные модели обменных курсов рубля. - М.: ИЭПП, 2005. - 125 с.
- Страны и регионы. 2005. Статист. справочник Всемирного банка // пер. с англ. - М.: Весь мир, 2005. - 240 с.
- Statistical Abstract of the United States: 2008. - Washington: DC, 2007. - 127 ed.
- <http://www.ukrstat.gov.ua>
- <http://www.nbuu.gov.ua>
- <http://www.imf.org>
- <http://www.imfstatistics.org>

Надійшла до редколегії 12.03.09



цих систем стала підтримка розділюваності контенту. Такі системи характеризувались мінімальною адаптивністю. До цієї категорії систем відносять, зокрема, перші версії НС WebCT та Blackboard [8, 9].

Для сучасних НС характерними є наявність механізмів управління ЕК та процесом навчання взагалі, окрім власне навчаючої складової. В якості репрезентативних прикладів у даній роботі обрано наступні програмні продукти: MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment — Модульне об'єктно-орієнтоване динамічне навчальне середовище) [10], ILIAS (Integriertes Lern-, Informations- und Arbeitskooperations- System — Інтегрована навчальна, інформаційна і комунікаційна система) [11], (MOODLE та ILIAS є безкоштовними) програмні продукти компанії Lotus/IBM: Learning Space 5.x [12], Lotus Learning Management System (LMS) [13], IBM Workplace Collaboration [14]. Окрім цих систем можливі і їх комбінації, зокрема, у Національному університеті «Києво-Могилянська академія» використовується НС eMeReCU (Electronic Media Resource Centre Ukraine) [15], центральними компонентами якого є системи ILIAS та MOODLE.

У НС MOODLE відсутня модель учня і як результат адаптивність до його умов, що означає обмеженість зворотної реакції системи на дії учня. НС має можливості для розширення, це досягається за рахунок модульності архітектури: код системи розбито на модулі та стандартні бібліотеки. Модуль повинен мати чіткий вхід як функція та бути у вигляді відокремленого файлу. Значна частина функціональності користувача розміщена у модулях, проте близько 50% коду міститься в бібліотеках ядра системи. MOODLE характеризується добре описаними внутрішніми API, проте недостатньо зовнішніми для забезпечення інтеграції з іншими системами. Платформою реалізації ядра MOODLE є PHP з використанням реляційної бази даних. Номінально можливе використання довільної СУБД, проте повністю реалізована лише підтримка MySQL.

У ILIAS не забезпечується відслідковування діяльності учнів, проте реалізована підтримка форуму та тестування. Це середовище характеризується складною, погано документованою архітектурою із тісними взаємозв'язками між компонентами, що ускладнює внесення змін до системи та обмежує можливості її розширення. Ключове місце в архітектурі системи займає репозитарій —

ієрархічно реалізоване сковище так званих модулів (форум, чат, глосарій). Кожен модуль реалізовано у вигляді окремого класу з нечітко описаним інтерфейсом і відсутністю системності у описах. Окрім модулів до складу системи входять служби, які надають функціональні можливості, що використовуються у модулях чи інших службах (базована на ролях система доступу, система новин).

LearningSpace 5.x – система для управління і подачі онлайн курсів. LearningSpace надає Web-інтерфейс та серверну БД для організації, відображення та відслідковування онлайн курсів. Ця система може включати деякі або ж усі наступні компоненти: модуль ядра (обов'язковий), модуль спільної роботи, реляційна СУБД, файли змістової частини курсу, зовнішній модуль Domino, звіти. Модуль ядра забезпечує користувача інтерфейсом доступу до матеріалів курсу та оцінок. Також цей модуль надає механізм доступу та відслідковування даних, що зберігаються у реляційній базі, у модулі спільної роботи та у всіх серверах вмісту курсів. Модуль ядра обробляє URL-посилання між частинами курсу. Модуль спільної роботи здійснює управління інтерактивною діяльністю та надає матеріали для неї. У системі відсутні механізми для безпосередньої розробки курсів, тому файли контенту створюються зовнішніми засобами.

Компанія IBM припинила подальшу розробку системи Learning Space і у 2003 році випустила новий програмний продукт Lotus Learning Management System, у якому хоча й не було використано код попередника, проте враховувався набутий завдяки йому досвід розробки. Особливостями нової системи стали мультиплатформенність, наявність управління фізичною класною кімнатою, вбудованого механізму розробки курсів, також є окрема клієнтська програма, що забезпечує роботу без підключення до мережі.

Варто відзначити, що в останні роки спостерігається тенденція використання НС не лише в межах навчальних закладів, а і як складової автоматизованого робочого місця, це стимулює розвиток і підвищує вимоги до якості розроблюваних НС. Прикладом такого програмного продукту є розробка компанії IBM Workplace Collaboration Services [14].

**Відкритість та замкненість сучасних навчальних середовищ**

Характеризуючи програмні системи, часто використовують терміни "відкрита" та "замкнена"

система. Варто проаналізувати навчальні середовища під цим кутом зору, розкривши, в чому полягає їх (відносна - як буде видно з подальшого) відкритість та замкненість.

Існує декілька підходів до трактування поняття відкритої системи. Кожне трактування є прагматично обумовленим, а тому акцентує увагу на тих чи інших аспектах проблеми, загалом вони є взаємодоповнюючими. Зокрема, часто відкритою системою називають систему з відкритим кодом (Open Source) [16]. В загалі кажучи, відкритість вихідного коду не є ані необхідною, ані достатньою умовою відкритості програмної системи. Навіть повністю відкритий код виявляється „закритим” для модифікації якщо модифікабельність не підтримується логікою побудови.

Також є наступні означення: „Відкрита система – система, що складається з компонент, які взаємодіють між собою через стандартні інтерфейси” (асоціація користувачів UNIX [18]). Комітет IEEE POSIX дас таке визначення: „Відкрита система – система, що реалізує відкріті специфікації на інтерфейси, сервіси та підтримувані формати даних достатні для того, щоб забезпечити належним чином розробленим прикладним програмам 1) можливість перенесення з мінімальними змінами на широкий діапазон систем; 2) спільну роботу з іншими прикладними програмами на локальній та віддалених системах; 3) взаємодію з користувачами у стилі, що полегшує їм перехід від системи до системи” [18]. Останнє означення видається більш змістовним та глибоким. У свою чергу під замкненістю розуміють закритий код, неможливість розширення.

Розвиток навчальних середовищ, як і інших програмних систем, починається із розробки замкнених систем, модифікація яких (zmіна структури, додавання нових функціональних можливостей та ін.) потребувала розробки фактично нового програмного продукту. В останні роки для програмних систем, в тому числі і навчальних середовищ, став характерним перехід до відкритих систем. Для переходу від замкнених до відкритих систем використовують компонентний підхід [19, 20]. Розвиток сучасних відкритих систем відбувається за рахунок збільшення числа нових компонент та розширення функціональних можливостей існуючих, вдосконалення механізмів міжкомпонентної взаємодії.

Архітектуру багатьох НС складають ядро та набір модулів, зокрема це характерно для

MOODLE, ILIAS, Lotus LMS. Серед НС, побудованих за принципом монолітного ядра можна виділити НС Claroline [24] та LAMS 1.0 [25], проте нові версії цих систем уже підтримують розділюваність на ядро та інструментарій. Для досягнення адаптивності у таких системах значну увагу слід надавати міжкомпонентним інтерфейсам, та інтерфейсам рівня „ядро-підсистема”. Проте побудова останніх проводиться „роздрібним” шляхом, тобто в кожному окремо взятому випадку проводиться розробником заново.

Системи, що розглядаються у роботі, позиціонуються розробниками як відкриті з можливістю подальшого розширення та адаптації. Розширення таких НС як MOODLE, ILIAS здійснюється за рахунок внесення змін у модулі, додавання нових модулів, рідше шляхом внесення змін безпосередньо у ядро системи. Але якщо для MOODLE існує досить повна документація, і здійснити такі зміни на практиці можливо, то розширення системи ILIAS, як відзначають фахівці, значно ускладнене неповною документованістю [21]. Адаптація та вбудування платних НС (наприклад, Learning Space 5.x, Lotus LMS, IBM Workplace Collaboration) є можливими завдяки опублікованим інтерфейсам. Проте, як зазначають самі розробники, найчастіше вони використовуються для вбудування цих систем у інші, а не для розширення. Попри високу якість НС Learning Space 5.x модифікувати його код для наступника – Lotus LMS виявилося значно складніше, аніж розробляти нову систему з нуля [22]. Зрозуміло, що такий підхід входить у суперечність і з принципом збереження інвестицій [2]. Враховуючи ці недоліки, при побудові нової системи (LMS 1.0) було виділено велику кількість (100-120) внутрішніх служб, які можуть розроблюватися та супроводжуватися незалежно одна від одної (highly componentized architecture) [22].

#### Поняття відкрито-замкненої системи

З наведеного вище аналізу сучасного стану розвитку НС видно, що відкритими називають як правило системи, що мають відносно стабільне ядро та варіативний набір підключених компонентів<sup>1</sup>. При цьому ядро забезпечує орієнтацію системи на певну предметну галузь, а компоненти відповідають за виконання

<sup>1</sup> Цей висновок можна було б сформулювати й для більш широкого класу систем, але в контексті цієї роботи обмежимося лише НС.

конкретних завдань цієї галузі. Вилучення, додавання або модифікація підключених до ядра компонентів не становить принципової зміни системи. В той час як після зміни ядра система стає якісно іншою.

Ядро реалізує базові загальносистемні операції через операції певної платформи, а також відповідає за організацію взаємодії компонент системи. Програмні компоненти реалізують поняття галузі та притаманні їй способи взаємодії користувача з об'єктами.

Наявність у системі незмінного ядра вже говорить про те, що таку систему не можна вважати цілком відкритою. Абсолютно відкритою може бути лише абсолютно порожня система: тільки її можна переорієнтувати на довільні задачі та умови застосування без входження у суперечність із уже розробленим.

Система не може бути також і абсолютно замкненою, тому що всяка нетривіальна програма задоволяє умову масовості, а значить є відкритою відносно класу можливих вхідних даних та простору можливих сценаріїв використання. Таким чином, і замкненість і відкритість завжди є відносними.

Із сказаного вище випливає, що сучасні реальні системи – змішані: відкриті в одному відношенні і замкнені в іншому. Проте у літературі з програмної інженерії наголос робиться лише на відкритості (показовим прикладом є назва журналу „Открытые системы“). При цьому, не менш необхідна часткова замкненість програмних систем залишається без належної уваги. Для того, щоб процес створення програмного продукту був ефективним та забезпечував високу якість, бажано в явному вигляді враховувати суттєві властивості предмету розробки. Це дає підстави стверджувати, що НС потрібно цілеспрямовано розробляти як *відкрито-замкнені* системи. Поняття відкрито-замкненої системи є принципово новим і відрізняється від простого поєднання понять замкненості та відкритості [2].

Як поняття відкритої системи, так і замкненої є досить загальними, взяті кожне окремо. Переход від цих понять до поняття відкрито-замкненої системи (Open-Close System) пов'язані з суттєвим збагаченням змісту, яке відповідає принципу Лейбніца. Проаналізуємо ті якісні зміни, які досягаються із зачлененням цього поняття.

По-перше, зміна акцентів з номінальної відкритості на реальну відкрито-замкненість дозволяє досягти більш високого ступеню

гнучкості системи та процесу її розвитку і використання. У відкрито-замкненої системи ядро є замикаючою частиною, його основною особливістю є наявність внутрішніх механізмів розвитку. Таку систему можна розвивати та дороблювати в широкому класі можливих застосувань, не втрачаючись у ядро – для потенційно корисних модифікацій системи достатньо працювати з підключеними модулями. Іншими словами, ядро повинно бути внутрішньо стабільним та підтримувати зовнішню розширеність. Щоб побудувати таке ядро, потрібно проаналізувати предметну галузь разом з вимогами до системи і виділити в ній загальнозначущі і специфічні засоби. Перші дадуть логічну складову, ядро, а другі – предметну частину, тобто модулі. Сукупність предметних засобів є відкритою та істотно залежить від специфічних властивостей галузі задач, тобто є варіативною компонентою [26]. Всю сукупність предметних засобів неможливо ні розробити, ні навіть вичерпно описати наперед, оскільки неможливо передбачити всі конкретні ситуації, що входять до потенційно можливих застосувань системи, тоді як порівняно компактне ядро відіграє роль „спільногого знаменника“ всіх задач даної галузі і може бути описане априорі. Розділення на логічну та предметну складові залежить від рівня абстракції, на якому розглядається система: при необхідності такий же дворівневий підхід можна застосовувати, в свою чергу, до засобів з предметної частини виділяючи у ній логічну і предметну складову, або ж можна деталізувати власне логічне складову. Що більш важливо та менш очевидно, те ж має місце і для ядра. Серед засобів, віднесені до ядра, при деталізованому аналізі можна виділити такі, до яких зводяться інші засоби ядра. Таким чином, поділ системи на логічне ядро та предметно-спеціфічну частину дещо відносний; критерієм повинно бути те, наскільки велику роль відіграє той чи інший засіб в масштабі цілої сукупності прикладних задач.

Згадані вище засоби відповідно до [27] – це композиції. Справді, прикладна програма являє собою функцію, що вхідним даним ставить у відповідність результати. Як наслідок, засоби побудови програм уточнюються операціями, що більш простим функціям ставлять у відповідність більш складні. Крім того, оскільки створення програм – це покроковий логічно структурований процес, то ці операції мають підтримувати логіку побудови програм, тобто бути програмологічними операціями, а останнє, як

слідує з процитованої роботи, є композиціями. У [27] побудовано дескрипторично повну сукупність композицій, тобто змістово наперед достатню для довільних прикладних програмувань. Проте, для деякого заданого з них, достатньою може виявитися більш специфічна сукупність композицій. Тому постає задача побудови такої сукупності композицій, яка б найкраще підтримувала логічне ядро даного прикладного програмування.

### Сутесутнісні відношення галузі НС у першому наближенні

Загальний метод аналізу та синтезу відкрито-замкнених систем розроблено у роботах Редько В.Н. та Редько І.В. Нагадаємо основні положення дескрипторології. За основу розгляду береться гранично загальне поняття сутності, як будь-чого, що в деякому розумному сенсі існує. Ключове місце в теорії дескриптивних середовищ займає індивідуалізація прагматико-обумовлених типів в універсумі сутностей на основі сутесутнісних відношень – відношень між прагматико-обумовленнями – властивостями сутностей (сущими) і сутностями, що володіють цими властивостями (доменами) [2]. При розгляді акцент робиться не на самих сутностях, а на індукованих ними прагматико-обумовлених логіко-предметних відношеннях. Таким чином, для побудови дескрипторичної моделі предметної галузі треба виділити множину сутностей та з'ясувати, як вони впорядковані між собою сутесутнісними відношеннями.

Універсум сутностей в першому наближенні можна окреслити на основі аналізу предметної галузі, проведеного в першому розділі. Характерними для неї є такі основні сутності: навчальне середовище, його більш специфічні різновиди (навчаюча програма, електронна платформа навчання, система дистанційної освіти), модуль, ядро, інтерфейс, адаптивність (сущість, яка є водночас властивістю іншої сутності), електронні навчальні курси, контент (зміст), етапи навчального процесу, учасники навчального процесу (студенти, викладачі, автори курсів). Сутностями більш предметного, специфічного рівня є формати представлення електронних курсів, технології реалізації такі як сервери БД та Web-сервери.

Повний опис універсуму сутностей та сутесутнісних відношень потребує окремого дослідження, тому тут обмежимося лише найочевиднішими прикладами. Нехай система дистанційного навчання (частковий випадок НС) реалізована на базі деякого Web-серверу та

серверу БД. Система навчання в контексті більш широкого середовища реальної людської діяльності та з точки зору прагматики інваріантна відносно заміни серверів як допоміжних засобів. Проте на рівні технічної реалізації це не завжди так (наприклад, система Moodle попри заявлену універсальність повністю підтримує лише сервер MySQL). З іншого боку сервер БД, повинен обслуговувати необмежено широкий клас прикладних програм, в той час як кожна база призначена лише для конкретної програми (система Hias не може безпосередньо працювати з базами від Moodle). Таким чином, з точки зору прагматики навчальної галузі система навчання становить абстракцію від сервера БД. Водночас по відношенню до своєї прагматики сервер БД здійснює абстрагування від класу прикладних програм. В свою чергу, людська практична діяльність в галузі освіти абстрактніша за те чи інше НС чи систему дистанційної освіти.

Розглянемо дві сутності: електронний навчальний курс та набір байтів, що представляє його в БД. Згідно класичних підходів другу сутність слід було б вважати конкретнішою, бо вона розкриває механізми побудови абстрактного прикладного об'єкта з примітивів, у дескрипторології поряд з таким використовують і інші підходи, тим самим збагачуючи тлумачення сутності. Зокрема, жоден окремо взятий біт чи байт не має прямого відношення до прагматико-обумовлених властивостей ЕК. Для набору байтів не притаманні ті операції, які з точки зору прагматики характерні для ЕК. Таким чином, останні в деяких випадках можуть бути більш конкретними за байтове представлення і, більш того, становити його суть.

Таким чином, проведений у роботі розгляд дозволяє дійти висновку, що сучасні НС мають риси як замкнених, так і відкритих систем. Проте для підтримки принципу збереження інвестицій НС потрібно цілеспрямовано розробляти як відкрито-замкнені системи. Для цього, в свою чергу, необхідно проаналізувати галузь з виділенням сутесутнісних відношень, що потребує окремого дослідження.

### Список використаних джерел

1. Редько В.Н., Редько І.В. Дескрипторические основания информационных технологий // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №5. – С. 12-28.

2. Ред'ко І.В. Теорія дескриптивних середовищ та її застосування: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: спец. 01.05.03 „Математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем”/ Ред'ко І.В. – Київ. 2008. – 32 с.
3. Неумоин В.М., Игнатенко П.П., Опанович М.И. Адаптивность программных систем и методы ее обеспечения// Проблемы программирования. – 1997. - №1. – С. 40-48
4. Стандарты информационных технологий в обучающих системах. – Режим доступу: <http://dl.nw.ru/standarts>
5. Ред'ко В.Н., Ред'ко І.В., Гришко Н.В. Дескриптивные системы: Концептуальный базис // Проблеми програмування – 2006. – №2-3. Спеціальний випуск. – С. 75-80.
6. Ред'ко В.Н., Ред'ко І.В. Экзистенциальные основания композиционной парадигмы // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №2. – С. 3-12
7. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование: с примерами приложений на C++. Пер с англ. – СПб: «Издательство Бином», «Невский диалект», 1998. – 560 с.
8. Declan Dagger et al. Service-Oriented E-Learning Platforms. From Monolithic Systems to Flexible Services. IEEE Internet Computing, May/June 2007. IEEE Computer Society, 2007.
9. Blackboard [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.blackboard.com>
10. Moodle.org: open-source community-based tools for learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.moodle.org>
11. IliaS Open Source LMS [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ilias.de>
12. IBM collaboration software – Lotus software [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.lotus.com/learningspace>
13. IBM Lotus Learning Management System [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www-01.ibm.com/software/lotus/products/learning-management-system/>
14. IBM Workplace Collaboration Services Home Page [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www-01.ibm.com/software/lotus/products/wp-collaboration-services/>
15. Емереси Tempus [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://emerecsu.ukma.kiev.ua>
16. Аллан Буланжес Надежность и безопасность: открытый код против закрытого [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.osp.ru/os/2005/12/380658/>
17. Сергей Кузнецов Открытые системы, процессы стандартизации и профили стандартов [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://www.citforum.ru/database/articles/art\\_19.shtml](http://www.citforum.ru/database/articles/art_19.shtml)
18. Open System Handbook: A Guide to Building Open Systems Digital Published by Digital Equipment Corporation, USA 1991 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.osp.ru/os/1993/04/178473/>
19. Кулями В.В. Технологии программирования. Компонентный поход. – СПб: “Издательство Бином”, 2007. – 464 с.
20. Лавричева Е.М. Современные методы программирования: возможности и инструменты // Проблеми програмування. – 2006. – №2-3 (Спец. випуск). – С. 60-74.
21. Mihaela Cocea Extendibility of Educational Systems to Include a Learner-Adaptive Motivational Module [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.dcs.bbk.ac.uk/~mihaela/publications/2006/Netties%202006.pdf>
22. Tara Hall Lessons learned: Fernando Salazar and the LMS architecture 03 Feb 2003 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ibm.com/developerworks/lotus/>
23. Vyacheslav Valuisky Platforms of Distance Learning Support the Analysis and the Compatibility // Journal of Multimedia Aided Education Research 2005. – Vol 2 – № 1. – P. 103-111
24. Caroline.Net [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.claroline.net/>
25. Home – LAMS2 – LAMS Foundation Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://wiki.lamsfoundation.org/display/lams/Home>
26. Ред'ко І.В. Дескриптологіческаа среда моделювання предметних областей // Проблеми програмування. – 2002. – №1-2 (Спец. випуск). – С. 44-57.
27. Ред'ко В.Н. Основання программології // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 1. – С. 35-37.

Надійшла до редколегії 17.03.09

УДК 681.3.06

Процік П.П., аспірант

## Композиційно-номінативний підхід до специфікації програмних систем у мові Z-Notation

У роботі продовжується дослідження семантики мови специфікації програмних систем Z-Notation на основі принципів композиційно-номінативного підходу, розпочате раніше.

Проводиться побудова транзиційної моделі програмної системи на основі формальної специфікації.

Аналізуються засоби побудови схем та композиції над ними.

**Ключові слова:** Z-Notation, семантика, формальна, специфікація, програма.

E-mail: piter.protsyk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Робота продовжує дослідження семантики мови Z-Notation, розпочате в [1]. У вказаній статті був запропонований композиційно-номінативний підхід [5, 6] до трактування схем як засобу формалізації специфікацій програмних систем, заснованих на транзиційних моделях. З точки зору семантики, пропонувалось розглядати схеми як особливий засіб завдання класів іменних даних. Схеми були поділені на три типи: схеми, що задають простір станів, схеми, що задають початковий стан та схеми, що задають операції (переходи між станами). Далі за набором схем однозначно можна побудувати транзиційну модель програмної системи. А її можна досліджувати, використовуючи вже існуючий математичний апарат [8, 9]. Таким чином, був показаний один з можливих шляхів використання Z специфікацій для завдання та дослідження властивостей програмних систем.

У цій роботі представлені результати дослідень таких аспектів мови схем: засоби декларації змінних, предикатів, множин, відношень та функцій. Представлено формальне визначення специфікації програмної системи на основі принципів композиційно-номінативного підходу. Проаналізовані деякі композиції над схемами та специфічні для Z засоби завдання предикатів. Тому що, хоча, мова предикатів Z-Notation і базується на традиційній мові

P.P. Protsyk, Ph.D. student

## Composition nominative approach to specifying program systems in Z-Notation

This paper is a further development of semantics of Z-Notation specification language from compositional and nominative perspective started earlier.

Transformation from formal specification to transitional model of a program system described by this specification was built.

Means of schema composition and construction are analyzed.

**Key Words:** Z-Notation, formal, semantics, specification, program.

предикатів першого порядку, вона збагачена розширеними синтаксичними конструкціями. І цей аспект потребує додаткових досліджень у семантиці. Більш того, оскільки, при запропонованому підході математичний апарат досить суттєво відрізняється від традиційного, то та частина мови, яка оперує зі схемами теж вимагає роз'яснення. Ці проблеми знайшли своє відображення у представленому дослідженні.

### Композиційно-номінативна семантика

Композиційна семантика – це прагматично обумовлений потребами теорії та практики підхід, одним з аспектів якого є формалізація основних програмних понять. Він пройшов перевірку часом та успішно використовувався при дослідженні різноманітних проблем теорії програмування.

Програму у композиційній семантиці на найвищому рівні абстракції можна розглядати як функцію, що відображає вхідні дані у вихідні; при залученні імен даних (номінату) – функцію над номінативними даними.

Програма – це функція, побудована з базових шляхом застосування композицій. Такий підхід до розуміння програми вказує на її структурованість і важливість вивчення процесу її побудови. Проте, слід зауважити, що специфікації принципово відрізняються від

програм і мають інше призначення, а тому повинні мати і іншу семантичну структуру. Специфікації формалізують вимоги до програмної системи. Вони описують не конкретне обчислення, а процес обчислення в цілому, властивості процесу. Традиційно для цього використовується мова формул деякої логіки. А процес функціонування системи задається шляхом визначення станів, у яких вона може перебувати, та переходів між ними. У роботі [1] був представлений метод, згідно з яким за алгебраїчною специфікацією у Z-Notation можна побудувати транзіційну модель програмної системи на основі принципів композиційно-номінативного підходу.

Більш детальну інформацію про основні положення підходу та невизначені поняття можна знайти у джерелах [2, 3, 5, 6].

### Семантика мови Z-Notation

Порядок викладання матеріалу буде співпадати з порядком викладання мови Z-Notation у роботі [4], яку традиційно вважають однією з авторитетних у цьому питанні. Зауважимо, що, враховуючи об'єм роботи, тут будуть представлені тільки деякі важливі на думку автора результати.

Розпочнемо з центральних для мови понять: множин та типу.

### Множини

Поняття множини і типу, є одними із головних понять у Z-Notation. При традиційному підході у мові все є множиною. Тому і доведення властивостей специфікацій проводиться у деякій теорії множин, яка називається базовою для мови. Часто такою базовою теорією є теорія Цермело-Френкеля (ZF). До речі, свою назву Z-Notation отримала саме від назви цієї теорії множин. Крім того, ця система аксіом цікава тим, що будь яка математична теорія може бути представлена в ній таким чином, що теореми цієї теорії стануть теоремами про множини, які виводяться з аксіом ZF. Прикладом є відома серія книг колективу математиків під загальним псевдонімом Н. Бурбаки [10], в яких побудовано замкнений виклад багатьох розділів математики на основі теорії множин Цермело-Френкеля, удосконаленої Бернайсом та Гёделем.

Цей факт важливий для Z-Notation, що і тому, що він гарантує можливість трактування специфікації як математичного об'єкту. А це, в свою чергу, дозволяє застосовувати для її дослідження повний спектр формальних математичних методів.

Деякі з підходів визначення семантики схем, розглядають схеми в якості стилізованої синтаксичної форми завдання множин. До такого класу підходів відноситься і представлений, з тією різницею, що схеми розглядаються як засіб декларації номінативних множин. Це дозволяє більш точно розкрити природу схем як іменованого об'єкту. Більш того, для теорії номінативних множин існують розроблені аксіоматичні системи орієнтовані на дослідження моделей програм.

Слід згадати і про один з недоліків цього підходу. Оскільки введення схем має суто синтаксичну користь, то їхня необхідність при переході до семантики втрачається.

### Типи

Мова Z-Notation відноситься до класу строго типізованих мов. Це означає, що кожен об'єкт з яким операє мова відноситься до певного типу.

Під типом у Z розуміють іменовані набір (множину) об'єктів. У контексті типів цей набір об'єктів називають носієм типу. Носій типу або задається за допомогою декларування (перерахування можливих значень), або будується з більш простих типів за допомогою композиції конструювання. Існує ряд, так званих, атомарних, чи інакше, базових типів. До них відносяться множини натуральних  $N$ , цілих  $Z$ , дійсних чисел  $D$  та множина символів латинського алфавіту  $CHAR$ . Крім того, до базових типів відносяться ті, які задаються за допомогою перерахування значень – декларування. Синтаксично вони мають наступний вигляд:

*WEEKENDS* = {Saturday, Sunday}.

Тут *WEEKENDS* – це ім'я типу, а вираз справа визначає носій типу: {Saturday, Sunday}.

У Z є три способи конструювання складних типів: декартовий добуток, булев та схеми спеціального вигляду:

Декартовим добутком типів з відповідними носіями  $T_1, T_2, \dots, T_n$  називається тип з носієм:

$$T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in T_1, \dots, x_n \in T_n\}.$$

Елементи декартового добутку називаються кортежами. Для Z суттєвим є те, що кортежі повинні мати не менше двох компонент.

Булев  $P(S)$  типу з носієм  $S$  – це тип з носієм, що задається множиною усіх підмножин входної множини  $S$ :  $P(S) = \{T | T \subseteq S\}$ .

Кожна схема вигляду:

$$S = \{x_1 \in T_1, \dots, x_n \in T_n | P(x_1, \dots, x_n)\}.$$

як було показано в [1], задає множину номінативних даних. Вона визначає носій нового типу  $S_T$  з іменованими компонентами.

Кожен коректно побудований вираз, який з'являється у Z специфікації, пов'язаний з деяким конкретним типом і якщо вираз визначений, то значення виразу повинно належати носію цього типу. Кожна змінна має тип, який може бути виведений з її декларації. Існують правила для отримання типу будь-якого коректно визначеного складного виразу.

### Функції

Визначені в попередніх розділах об'єкти: множини, типи, зв'язування (номінативні множини) є фундаментальними об'єктами Z-Notation. Інші математичні об'єкти моделюються, використовуючи згадані об'єкти як базові. Відношення та функції, зокрема, задаються як підмножини декартових добутків деяких множин.

Запис  $X \leftrightarrow Y$  позначає множину усіх бінарних відношень на множинах  $X$  та  $Y$  або, що те саме, множину  $P(X \times Y)$  підмножини множини  $X \times Y$ . Ототожнення між бінарним відношенням та його графом в Z настільки сильне, що про них говорять, як про один об'єкт.

Функції – це спеціальний клас відношень, які для кожного значення аргументів приймають не більше одного значення. Клас усіх часткових функцій з множини  $X$  у множину  $Y$  позначимо  $X \rightarrow Y$ . Усі тотальні, або всюди визначені, функції з множини  $X$  у множину  $Y$  позначимо  $X \rightarrow Y$ . Якщо, прийняти, що множина  $X$  отримана за допомогою декартового добутку п множин, то з попереднього визначення отримаємо поняття парної функції. Тобто функції з  $n$  аргументами.

При залученні номінативних множин вводиться спеціальний клас функцій – функції над номінативними множинами. Якщо,  $ND$  – множина усіх номінативних даних, тоді довільну функцію вигляду  $f: ND \rightarrow Y$ , де  $Y$  деяка множина, називають номінативною функцією.

### Предикати

Серед символів, які можуть зустрічатись у мові предикатів Z-Notation – розглянемо семантику для наступних:

- $\forall$  – квантор загальності,
- $\exists$  – квантор існування,
- $\exists_!$  – квантор унікальності.

Вибір символів не випадковий. У Z-Notation квантори можна застосовувати до схем, тому побудовані таким чином предикати мають

відмінну від традиційної форму та семантику. Синтаксично, вирази з кванторами мають наступний вигляд:

#### Kvantor Schema • Predicate

Семантика виразів з кванторами така: предикат «для всіх  $S, Q$ »:  $\forall S \bullet Q$ , де  $S$  – схема приймає значення істини, якщо для будь яких значень змінних, введених схемою  $S$ , значення предикатів схеми  $S$  приймають істинні значення, то значення істини приймає і предикат  $Q$ . Враховуючи структуру схеми, отримаємо таке формальне визначення:

$$S = [D | P] =$$

$$[x_1 : S_1; \dots; x_n : S_n | P_1(x_1, \dots, x_n); \dots; P_m(x_1, \dots, x_n)],$$

отже:

$$\forall S \bullet Q = \forall D | P \bullet Q = \forall D \bullet P \Rightarrow Q =$$

$$= \forall x_1 \in T_1, \dots, x_n \in T_n : P_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge P_m(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, \dots, x_n).$$

Аналогічно для кванторів існування, предикат «існує  $S$  таке, що  $Q$ »:  $\exists S \bullet Q$  приймає значення істини, якщо існують такі значення змінних (едині у випадку квантора унікальності) введених схемою  $S$ , що предикати схеми  $S$  та предикат  $Q$  одночасно приймають значення істини:

$$\exists S \bullet Q = \exists D | P \bullet Q = \exists D \bullet P \wedge Q =$$

$$= \exists x_1 \in S_1 \dots \exists x_n \in S_n : P_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge P_m(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, \dots, x_n).$$

Для квантифікованих виразів виконуються наступні тотожності:

$$\bullet (\forall D | P \bullet Q) \Leftrightarrow (\forall D \bullet P \Rightarrow Q),$$

$$\bullet (\exists D | P \bullet Q) \Leftrightarrow (\exists D \bullet P \wedge Q),$$

$$\bullet (\exists S \bullet P) \Leftrightarrow \neg(\forall S \bullet \neg P).$$

Отже бачимо, що, хоча мова предикатів у Z-Notation і збагачена додатковими засобами, при запропонованому підході на семантичному рівні їх необхідність втрачається. Аналіз цієї проблематики знаходитьться у роботі [7].

### Схеми

Схема – це основна синтаксична одиниця мови Z-Notation. Схема  $S = [D | P]$  складається з декларативної  $D$  та предикативної  $P$  частин. Спочатку у декларативній частині вводяться змінні, а потім у предикативній на них накладаються обмеження у вигляді предикатів.

Змінні, які декларуються у схемі, можуть носити різне призначення: змінні станів, входні змінні, вихідні змінні. Якщо схема задає переход з одного стану в інший, то для позначення змінних наступного стану, їх записують з символом ('):

$$\text{Schema} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in T_1, \dots, x_n \in T_n; x'_1 \in T'_1, \dots, x'_n \in T'_n \\ Q(x_1, \dots, x_n); \\ P(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n); \\ R(x'_1, \dots, x'_n) \end{array} \right.$$

У Z-Notation визначені композиції, які дозволяють будувати з простіших схем більш складні. Найбільш поширені з них – це композиції декорації та перейменування. Композиції задаються для схем з сумісними за типами деклараціями змінних. Дві декларації вважають сумісними за типами, якщо кожна змінна, яка присутня в обох, має одинаковий тип в обох деклараціях.

Наприклад, наступні дві декларації є сумісними за типом, оскільки їх єдина спільна змінна  $b$  має одинаковий тип:

$$D_1 = [a:P(X); b:X \times Y] \text{ та } D_2 = [b:X \times Y; c:Z].$$

Ці дві декларації можуть бути об'єднані, та утворити розширену декларацію:

$$D_3 = D_1 \cup D_2 = [a:P(X); b:X \times Y; c:Z].$$

При цьому, попередні декларації  $D_1$  та  $D_2$  називають під-деклараціями декларації  $D_3$ . Кожна з декларацій  $D_1$ ,  $D_2$  може бути отримана з  $D_3$  за допомогою операції обмеження (проекції) по деякій змінній.

Над деклараціями змінних у Z-Notation визначена операція декорації – ('), яка природним чином поширюється на схеми: якщо  $S$  – схема, тоді  $S'$  отримана за схемою  $S$  заміною імен на ті ж імена з суфіксом '. Тобто, декларація  $S'$  містить компоненту  $x'$  дляожної компоненти  $x$  з декларації  $S$ , при чому їх типи співпадають.

У Z існує три стандартні декорациі змінних, що використовуються в описі даних:

- ('') – для позначення наступного стану,
- (?) – для позначення вхідних змінних,
- (!) – для позначення вихідних змінних.

Ще одна з типових операцій на схемах – це операція перейменування. Якщо  $S$  схема, то схема  $S$  [ $y_1 / x_1, \dots, y_n / x_n$ ] отримана заміною кожної компоненти  $x_i$  відповідною  $y_i$ . Для того, щоб запис мав зміст, імена  $x_i$  не повинні повторюватись, а також потрібно враховувати узгодженість типів після перейменування (довільні дві компоненти з одинаковими іменами повинні мати один тип).

Дві схеми  $S$  та  $T$  з сумісними деклараціями можуть бути об'єднані операторами об'єднання схем, та утворити нову схему. Декларацією змінних цієї нової схеми є об'єднана декларація змінних схем  $S$  та  $T$ , а її предикативна частина –

об'єднання предикативних частин схеми  $S$  та  $T$  відповідною зв'язкою, наприклад  $S \wedge T$ .

Розглянемо спрощений для наочності варіант об'єднання схем зв'язкою кон'юнкції, коли в їх деклараціях імена змінних усі різні:

$$S = [D1 | P1] =$$

$$= [x_1: S_1; \dots; x_n: S_n | P_1(x_1, \dots, x_n); \dots; P_m(x_1, \dots, x_n)],$$

$$T = [D2 | P2] =$$

$$= [y_1: T_1; \dots; y_m: T_m | Q_1(y_1, \dots, y_n); \dots; Q_k(y_1, \dots, y_n)].$$

Тоді,

$$S \wedge T = [D1 \cup D2 | P1 \wedge P2] =$$

$$= [x_1: S_1; \dots; x_n: S_n, y_1: T_1; \dots; y_m: T_m | P_1(x_1, \dots, x_n); \dots;$$

$$P_m(x_1, \dots, x_n), Q_1(y_1, \dots, y_n); \dots; Q_k(y_1, \dots, y_n)].$$

Іншими логічними зв'язками для сумісних за деклараціями схем є  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  та  $\Leftrightarrow$ . Вони визначаються аналогічним чином, при цьому, їх декларації об'єднуються, а до властивостей схем застосовується відповідна логічна зв'язка. Можна також визначити операцію заперечення схеми, при цьому сигнатура зберігається, а властивість є запереченнем відповідної властивості вхідної схеми.

Розглянемо дві важливих композиції над схемами, які використовуються при специфікації послідовних систем: композиція послідовного виконання схем ( $;$ ) та композиція суперпозиції ( $>>$ ).

Композиція послідовного виконання схем ( $;$ ) визначається над схемами операцій, що містять спільні імена у декларації:

$$S = [x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n | P(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)],$$

$$T = [y_1, \dots, y_k, y'_1, \dots, y'_k | Q(y_1, \dots, y_k, y'_1, \dots, y'_k)]$$

За виконання синтаксичної рівності символів  $x_{i,j} = y_{p_j}$ , при  $j = \overline{1..m}$  та  $1 \leq m \leq \min(n, k)$  і входженні змінної  $x_{i,j}$  у схему  $S$  з декорацією (').

Тоді

$$S; T = [x_1, \dots, x_n, y_{p_{m+1}}, \dots, y_{p_k},$$

$$x'_{i_{m+1}}, \dots, x'_{i_n}, y'_1, \dots, y'_k]$$

$$\exists x_{i_1}' \dots \exists x_{i_n}' : (x_{i_j}' = y_{p_j}, j = \overline{1..m}) \wedge$$

$$\wedge P(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \wedge$$

$$\wedge Q(y_1, \dots, y_k, y'_1, \dots, y'_k)].$$

Що по суті являє собою зв'язування спільних змінних, які зазнали зміни у схемі  $S$  та відповідних їм за іменами початкових змінних схеми  $T$ .

Композиція суперпозиції ( $>>$ ) діє аналогічним чином, тільки вона застосовується для вихідних та входних змінних схем відповідно, дозволяючи передавати результати дії однієї схеми операції на вход іншої операції.

Вказані композиції дозволяють будувати складні схеми операцій з більш простих. Перехід з одного стану в інший під дією побудованої таким чином схеми відбувається атомарно.

Для повноти викладу зазначимо, що в залежності від практичних потреб у мову можна також ввести і інші композиції та операції над схемами.

Мова предикатів, яка застосовується у Z-Notation подібна до класичної мови предикатів першого порядку. Однак, є певні відмінності пов'язані із використанням схем та ряд синтаксичних скорочень, яких не має у класичному варіанті. Приклади таких скорочень були представлені у попередньому розділі.

### Специфікація програмних систем у Z-Notation

Розглядається синтаксично спрощений варіант схем у такій синтаксичній формі:

*StateSchemaText* =  $[x_1, \dots, x_n | P(x_1, \dots, x_n)]$ ;  
*InitSchemaText* =  $[x_1', \dots, x_n' | I(x_1', \dots, x_n')]$ ;  
*OpSchemaText* =  $[x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n' |$   
 $\quad Pre(x_1, \dots, x_n);$   
 $\quad Op(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n');$   
 $\quad Post(x_1', \dots, x_n')]$ ;

Мова розглядається у без типовому варіанті з фіксованою множиною можливих імен:  $x_1, \dots, x_m$ . Вважається, що змінні приймають значення з деякої фіксованої множини значень  $U$ . Під множиною усіх номінативних даних ND розуміємо множину номінативних даних індуковану цими іменами та множиною  $U$  так, як це вводиться у роботі [2].

**Визначення.** Синтаксичною специфікацією вимог до програмної системи у Z назовемо впорядкований текст, що складається з довільного скінченого числа схем станів:  $ST_1, \dots, ST_k$ ; однієї або декількох схем ініціалізації:  $I_1, \dots, I_m$ ; довільного скінченого числа схем операцій:  $Op_1, \dots, Op_n$  та довільної кількості допоміжних схем-визначень:  $C_1, \dots, C_p$ .

Схеми визначення вводяться як синтаксичні скорочення, та при переході до семантики вони об'єднуються зі схемою, в якій вони використовуються.

Введемо операцію синтаксичного об'єднання двох схем  $\cup$ :

**Визначення 4.1.** Нехай  $A = [a_1, \dots, a_n | P(a_1, \dots, a_n)]$  та  $B = [b_1, \dots, b_k | Q(b_1, \dots, b_k)]$  дві схеми, тоді їх синтаксичним об'єднанням  $A \cup B$  назовемо схему побудовану таким чином:

$$A \cup B = [c_1, \dots, c_m | P(c_1, \dots, c_n), Q(c_1, \dots, c_k)], \text{де} \\ \{c_1, \dots, c_m\} = \text{Names}(A \cup B) = \text{Names}(A) \cup \text{Names}(B), \\ \text{та } c_i = a_p, p = \overline{1, n}; c_j = b_q, q = \overline{1, k}.$$

Тут символ ( $=$ ) розуміється як рівність синтаксичних символів.

Задамо семантику схем. Кожна схема Sch буде визначати часткову функцію над номінативними даними задану своїм графіком у випадку операції або класом номінативних множин  $S(Sch)$  такий, що кожен елемент (пара у випадку операції) цього класу буде задовільняти умовам специфікованим у відповідній схемі. Будемо говорити, що клас  $S(Sch)$  індукується схемою Sch.

**Визначення.** Нехай Sch – схема, тоді вона індукує клас номінативних даних, заданий наступним чином:

- Якщо  $Sch = [x_1, \dots, x_n | P(x_1, \dots, x_n)]$ , тоді:  
 $S(Sch) = \{st | P(st)\}$ , де  $st \in ND$  – множина усіх номінативних даних, та

$$P(st) = \begin{cases} P(v_1, \dots, v_n), & \text{якщо } \text{Names}(Sch) \subseteq \text{names}(st) \\ & \text{та } st = [x_1 \rightarrow v_1, \dots, x_n \rightarrow v_n]; \\ false, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо  $Sch = [x_1', \dots, x_k' | I(x_1', \dots, x_k')]$ , тоді:

$$S(Sch) = \{st | I(st)\}, \text{де } st \in ND \text{ та}$$

$$I(st) = \begin{cases} I(v_1, \dots, v_k), & \text{якщо } st = [x_1 \rightarrow v_1, \dots, x_k \rightarrow v_k]; \\ false, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо  $Sch = [x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n' | P(x_1, \dots, x_n),$

$$Op(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n'), Q(x_1', \dots, x_n')]$$

тоді:

$$S(Sch) = \{(st, st') | P(st) \wedge Op(st, st') \wedge Q(st')\}.$$

де  $st, st' \in ND$  та  $P(st), Q(st')$  – визначаються аналогічно  $P(st)$  з випадку 1, а

$$Op(st, st') = \begin{cases} Op(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n), & \text{якщо } st = [x_1 \rightarrow v_1, \dots, x_n \rightarrow v_n]; \\ & st' = st \vee [x_1 \rightarrow u_1, \dots, x_n \rightarrow u_n] \\ false & \text{інакше.} \end{cases}$$

**Визначення** Моделлю синтаксичної Z специфікації, (або моделлю яку індукує

специфікація) будемо називати трійку, що визначається наступним чином:

$$\text{Model} = \left( \begin{array}{l} S(ST_1, UST_2, U\dots UST_k); \\ S(I, UI_1, U\dots UI_n); \\ S(Op_1)US(Op_2)U\dots US(Op_z) \end{array} \right) = (ST, I, OP)$$

Зрозуміло, що не кожна специфікація визначає програмну систему здатну щось обчислювати. Тому введемо важливе для подальшого розгляду поняття коректної моделі та специфікації.

**Визначення.** Специфікація називається коректною, якщо модель яку вона індукує задовільняє наступним умовам:

$ST \neq \emptyset$ , – простір станів не вироджений;  
 $I \subseteq ST$  та  $I \neq \emptyset$ , – існує хоча б один початковий стан;  $\forall st \in ST : OP(st) \downarrow \Rightarrow OP(st) \subseteq ST$ , – дія операцій системи не виводить за межі простору станів.

Для того, щоб існував початковий стан для специфікації  $Spec = (ST, I, OP, C)$  необхідне виконання наступної умови в семантиці:  $\exists st \in ST : st \in I$ .

Сформулюємо як гіпотезу таке важливе твердження: кожна коректна Z специфікація задає транзіційну систему, і навпаки, кожна транзіційна система має своє подання у вигляді синтаксичної Z специфікації.

## Висновки

У роботі був представлений виклад деяких важливих аспектів мови специфікації Z-Notation на основі принципів композиційно-номінативного підходу. Були приведені загальні визначення основних понять та конструкцій мови. Продемонстровані базові композиції над схемами та їх визначення у запропонованому підході.

Сформульоване формальне визначення програмної системи заданої Z специфікацією.

Виконана робота показує адекватність застосування композиційно-номінативного підходу для опису семантики цього формального методу специфікації програмних систем.

Схеми розглядаються як об'єкти синтаксичного рівня. Інші підходи та пов'язані з ними проблеми аналізуються у [7].

Подальші дослідження будуть полягати у розробці методів для аналізу властивостей специфікацій та їх автоматизованого доведення. Введені розширені композиції над схемами для специфікації паралельних та розподілених систем. Побудові ефективних процедур переходу від специфікації до програми.

## Список використаних джерел

1. Процук П.П. Композиційно-номінативний підхід до побудови семантики Z-Notation // Вісник київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2008. – №1. – С. 116–120.
2. Нікітченко Н.С. Композиціонно-номінативний підхід к уточненню поняття программи. // Проблемы програмування. – 1999. – №1. С. 16–31.
3. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С., Математична логіка та теорія алгоритмів, навчальний посібник. – Київ: ВПЦ «Київський Університет», 2007. – 164 с.
4. J.M. Spivey. The Z Notation: A Reference Manual. – Oxford Oriel College, 1998. – 158 pp.
5. Басараб И.А., Нікітченко Н.С., Ред'ко В.Н. Композиционные базы даних. – Київ: ЛІБІДЬ, 1992. – 192 с.
6. Nikitchenko N.S. Composition Nominative Approach to Program Semantics. – Technical University of Denmark, 1998. – 103 pp.
7. Martin Andrew Relating Z and First-Order Logic // Journal of Formal Methods. – 1999. – Volume II. P. – 1266 – 1280 p.
8. Clarke, Edmund M., Orna Grumberg, and Doron A. Peled Model Checking. – Cambridge: MIT Press, 1999. – 330 p.
9. Berard, Beatrice, Michel Bidoit, Alain Finkel, Francois Laroussinie, Antoine Petit, Laure Petrucci, Philippe Schnoebelen, and Pierre McKenzie. Systems and Software Verification: Model-Checking Techniques and Tools. – Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 196 p.
10. Н. Бурбаки, Елементы математики. – Москва: Начала Математики, 1965. – 456c.

Надійшла до редколегії 18.02.09

УДК 519.9

Розора І.В., к. ф.-м. н.

Умови для знаходження моделі випадкового процесу із наперед заданою точністю та надійністю в просторі  $C[0,T]$

В роботі розглядаються сепарабельні гауссові випадкові процеси з відомою кореляційною функцією. Для цих процесів знайдено розклад в ряд. Отриманий результат дозволяє побудувати апроксимаційну модель гауссової випадкової процесу, яка наближує процес з наперед відомою точністю та надійністю в банаховому просторі  $C[0,T]$ . В даній роботі доведено теорему, яка надає умови для знаходження такої моделі випадкового процесу.

**Ключові слова:** модель випадкового процесу, точність, надійність.

e-mail: irozora@bigmir.net

Статтю представив – д. ф.-м. н. Д.Б. Буй

## 1. Вступ

Методи комп'ютерного моделювання випадкових процесів та полів широко застосовуються в різних областях природничих та соціальних наук таких, як метеорологія, радіотехніка, соціологія, актуарна та фінансова математика, при випробуванні різних механізмів та ін.

Над розробкою теорії моделювання випадкових процесів та полів працювало велика кількість вчених, серед них Г. Корн, С.М. Єрмаков, Г.О. Михайлов, М.Й. Ядренко, Ю.В. Козаченко та ін. Існує багато методів моделювання випадкових процесів. Познайомитись з цими методами можна в таких книжках [4]-[7]. Ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів зроблено Г.О. Михайлівим та його учнями. Це спектральні моделі гауссовых полів, моделі випадкових процесів по точкових потоках, метод подвійної рандомізації тощо. Зауважимо, що в більшості робіт, які присвячені моделюванню випадкових процесів та полів, не визначаються питання про надійність та точність побудованих моделей. Вперше такі питання розглядалися в роботах Ю.В. Козаченка.

В більшості книг та робіт з даної тематики, розглядаються в основному методи моделювання

Rozora I.V., PhD

Conditions to find a model of stochastic process with given accuracy and reliability in space  $C[0,T]$

In the paper separable Gaussian stochastic processes with known correlation function is considered. For these processes an expansion in series is found. Obtained result is used to construct a model of Gaussian stochastic process, which approximates the process with given reliability and accuracy in Banach space  $C[0,T]$ . In this work the theorem is proved which gives the conditions to find such model of stochastic process.

**Key words:** a model of stochastic process, accuracy, reliability.

гауссовых процесів та полів. Відомо, що, як правило, виникає потреба моделювати процеси та поля, що є сумою великого числа випадкових факторів, дія кожного з яких незалежна. Згідно з центральною граничною теоремою такі процеси є близькі до гауссовых. Отже, задача моделювання гауссовых процесів є одною з найбільш важливих задач теорії моделювання.

В даній статті розглядаються гауссовые випадкові процеси з відомою кореляційною функцією. Для цих процесів отримано розклад в ряд. Даний результат дозволяє побудувати моделі гауссової випадкової процесу, які будуть наблизяти початковий процес з наперед відомою точністю та надійністю в банаховому просторі  $C[0,T]$ .

Робота складається з трьох частин. В першому розділі наведено короткий огляд літератури за тематикою та подано основні позначення та припущення, які будуть використовуватись в статті. Також розглядається теорема про розклад випадкового процесу в ряд, яка доведена в [2]. Другий розділ містить основний результат, а саме, умови для знаходження моделі випадкового гауссового процесу із даною точністю та надійністю в банаховому просторі  $C[0,T]$ . Для цього використовується оцінка розподілу супремуму

випадкового процесу. Висновки робляться в останньому розділі.

Нехай  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – ймовірнісний простір та  $T$  – деяка параметрична множина. Розглянемо центрований процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  другого порядку, тобто

$$E|X(t)|^2 < \infty, \forall t \in T \text{ та } EX(t) = 0.$$

Нехай  $(\Lambda, \mathcal{B}_\Lambda, \mu)$  – вимірний простір з σ-адитивною мірою  $\mu(\cdot)$ .

Припустимо, що кореляційна функція випадкового процесу  $R(t, s) = EX(t)\overline{X(s)}$  зображається у вигляді

$$R(t, s) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} d\mu(\lambda) < \infty,$$

де функції  $f(t, \lambda)$  належать до простору  $L_2(\Lambda, \mu)$  для будь-якого фіксованого параметра  $t \in T$ . А отже, для  $f(t, \lambda)$  виконується умова

$$\int_{\Lambda} |f(t, \lambda)|^2 d\mu(\lambda) < \infty.$$

$L_2(\Lambda, \mu)$  – Гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_{\Lambda} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\mu(\lambda).$$

Розглянемо ортонормований базис  $\{g_k(t), k \in \mathbb{Z}\}$  в просторі  $L_2(\Lambda, \mu)$ . Для такої системи функцій виконується умова

$$\int_{\Lambda} g_k(\lambda) \overline{g_l(\lambda)} d\mu(\lambda) = \delta_{kl},$$

де

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

В статті [2] було доведено наступну теорему про необхідні і достатні умови розкладу випадкового процесу в ряд:

**Теорема 1.** Кореляційна функція  $R(t, s)$  випадкового процесу має вигляд

$$R(t, s) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} d\mu(\lambda) < \infty$$

тоді і тільки тоді, коли випадковий процес  $X(t)$  зображається таким чином

$$X(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(t) \xi_k, \quad (1.1)$$

де

$$a_k(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) \overline{g_k(\lambda)} d\mu(\lambda)$$

та  $\xi_k, k \in \mathbb{Z}$ , є центрованими, некорельованими між собою випадковими величинами,  $E\xi_k = 0$ ,  $E\xi_k \xi_l = \delta_{kl}$ .

**Зауваження 1.** Ряд в (1.1) збігається в середньому квадратичному.

**Зауваження 2.** Якщо випадковий процес  $X(t)$  є гауссовим, то  $\xi_k, k \in \mathbb{Z}$ , є центрованими гауссовими незалежними випадковими величинами.

## 2. Побудова моделі випадкового процесу

Розклад (1.1) дає можливість для побудови моделі випадкового процесу із наперед заданою точністю та надійністю в різних банахових просторах. В даній статті досліджується моделювання випадкових процесів в просторі  $C[0, T]$ .

Розглянемо гауссовий процес у вигляді ряду

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \xi_k, \quad (2.1)$$

де  $\xi_k, k = 0, 1, \dots$ , є незалежними центрованими гауссовими випадковими величинами,  $E\xi_k = 0$ ,  $E\xi_k^2 = 1$ .

**Означення 1.** Випадковий процес  $X_N(t)$  будемо називати моделлю процесу  $X(t)$ , якщо

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \xi_k$$

**Означення 2.** Будемо казати, що модель  $X_N(t)$  наближує випадковий процес  $X(t)$  із даною точністю  $\delta > 0$ , та надійністю  $1 - \nu$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , в банаховому просторі  $C[0, T]$ , якщо

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X_N(t) - X(t)| > \delta \right\} \leq \nu.$$

В роботі [3] знайдені умови на розподіл хвостів ф-субгауссовых та субгауссовых процесів в банаховому просторі  $C[0,T]$ . Оскільки гауссовий випадковий процес є субгауссовим процесом з функцією  $\phi(x) = \frac{x^2}{2}$ , то наведемо отриману теорему саме для цих процесів.

**Теорема 2.** Нехай  $\xi(t), t \in [0, T]$  – сепарабельний гауссовий процес. Нехай виконуються такі умови:

1) існує неперервна та неспадна функція  $\sigma(h), h > 0$ , така, що  $\sigma(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , і

$$\sup_{|t-s| \leq h} (D(\xi(t) - \xi(s)))^{1/2} < \sigma(h);$$

2) існує неперервна функція  $r(u), u \geq 1$ , з властивостями:

- $r(u) \geq 0, u \geq 1$ ,
- $r(1) = 0$ ,
- функція  $r(e^x)$  є опуклою вниз;

3) для  $x > 0$  виконується нерівність

$$x > \gamma_0 \max \left\{ 1, \frac{\beta}{\sigma(T(2e^{0.5} - 2)^{-1})} \right\},$$

де  $\gamma_0 = \sup_{t \in [0, T]} (D\xi(t))^{1/2}$ ,  $\beta = \min \{ \sigma(T/2), \gamma_0 \}$ .

Тоді має місце така оцінка

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |\xi(t)| > x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\gamma_0} - 1 \right)^2 \right\} \times \\ \times \left( r^{(-1)} \left( \frac{x(x - \gamma_0)}{\beta \gamma_0^2} \cdot \int_0^x r \left( \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right) \right)^2.$$

Розглянемо гауссовий сепарабельний випадковий процес  $X(t), t \in [0, T]$ , для якого кореляційна функція дорівнює

$$R(t, s) = \int_0^b \cos(\lambda t) \cos(\lambda s) d\lambda, b > 0. \quad (2.2)$$

Відомо, що в просторі  $L_2[0, 2b]$  ортонормованим базисом є система функцій

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2b}}, \frac{1}{\sqrt{b}} \cos \frac{n\pi \lambda}{b}, n \geq 1 \right\} = \{g_n(\lambda), n \geq 0\}.$$

А тому з теореми 1. випливає, що процес представляється у вигляді суми ряду

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \xi_k,$$

де

$$a_k(t) = \int_0^b \cos(\lambda t) g_k(\lambda) d\lambda$$

та  $\xi_k, k \geq 0$ , є незалежними гауссовими випадковими величинами з  $E\xi_k = 0, E\xi_k^2 = 1$ . Причому, даний ряд збігається в середньому квадратичному.

Тоді, зрозуміло, що у якості моделі процесу  $X(t)$  будемо розглядати таку згідку суми

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \xi_k. \quad (2.3)$$

Позначимо через  $A$  і  $B$  такі сталі

$$A = \frac{\pi}{2b^{3/2} T}, \quad (2.4)$$

$$B = \frac{4b^2 T^2 + 6bT + 1}{4\sqrt{3}\pi}. \quad (2.5)$$

Наступна теорема вказує умови на значення моменту згідки в (2.3), при яких модель випадкового процесу апроксимує гауссовий сепарабельний процес із даною точністю та надійністю у функціональному просторі  $C[0, T]$ .

**Теорема 3.** Модель  $X_N(t)$  з (2.3) наближує сепарабельний гауссовий процес  $X(t), t \in [0, T]$ , з кореляційною функцією  $R(t, s)$  з (2.2) із заданою точністю  $\delta > 0$ , та надійністю  $1 - \nu, \nu \in (0, 1)$ , в банаховому просторі  $C[0, T]$ , якщо  $N$  задовільняє наступним умовам:

$$N > \max \left\{ B, \frac{1}{A^2 \delta} \right\}, \quad (2.6)$$

$$2 \exp \left\{ -0.5(A\delta N^{1/2} - 1)^2 \right\} \times \\ \left[ 2 - A\delta N^{1/2} + 2(A\delta N^{1/2} - 1)\sqrt{2\delta AN^{1/2}} \right]^4 < \nu. \quad (2.7)$$

**Доведення:**

Позначимо через  $\Delta_N(t)$  різницю процесу і моделі, тобто

$$\Delta_N(t) = X(t) - X_N(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(t) \xi_k.$$

Оскільки  $\Delta_N(t)$  є центрованим гауссовим процесом, використаємо для нього означення 2 та теорему 2.

Для знаходження константи  $\gamma_0 = \sup_{t \in [0, T]} (D\Delta_N(t))^{1/2}$  з теореми 2 підрахуємо спочатку дисперсію випадкового процесу  $\Delta_N(t)$ . Так як  $\xi_k, k = 0, 1, \dots$ , є незалежними випадковими величинами і для них виконуються умови

$$E\xi_k = 0, E\xi_k^2 = 1,$$

то

$$\begin{aligned} D\Delta_N(t) &= D\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(t)\xi_k\right) \\ &= E\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(t)\xi_k\right)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2(t). \end{aligned}$$

Використовуючи інтегрування частинами та той факт, що тригонометричні функції косинус та синус є обмеженими, має місце така оцінка для коефіцієнту  $a_k(t)$  при  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} |a_k(t)| &= \frac{1}{\sqrt{b}} \left| \int_b^t \cos(\lambda u) \cos \frac{k\pi\lambda}{b} du \right| \\ &= \frac{t\sqrt{b}}{k\pi} \left| \int_b^t \sin(\lambda u) \sin \frac{k\pi\lambda}{b} du \right| \\ &\leq \frac{2tb\sqrt{b}}{k\pi}. \end{aligned}$$

Отже, дисперсія процесу  $\Delta_N(t)$  оцінюється таким чином:

$$\begin{aligned} D\Delta_N(t) &\leq \frac{4b^3T^2}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4b^3T^2}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{u^2} du \\ &\leq \frac{4b^3T^2}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{u^2} du = \frac{4b^3T^2}{\pi^2} \int_N^{\infty} \frac{1}{u^2} du \\ &= \frac{4b^3T^2}{\pi^2 N} = \frac{1}{A^2 N}, \end{aligned}$$

де значення  $A$  подано в (2.4). З цього випливає, що стала  $\gamma_0$  з теореми 2 дорівнює

$$\gamma_0 = \frac{1}{AN^{1/2}}. \quad (2.8)$$

Тепер покажемо, що існує функція  $\sigma(h), h > 0$ , для якої виконуються умови

теореми 2 та знайдемо її. Для цього розглянемо дисперсію приростів процесу  $\Delta_N(t)$

$$\begin{aligned} D(\Delta_N(t) - \Delta_N(s)) &= E(\Delta_N(t) - \Delta_N(s))^2 \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_k(t) - a_k(s))^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Знайдемо оцінку  $|a_k(t) - a_k(s)|$  при  $t, s \in [0, T], k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} |a_k(t) - a_k(s)| &= \frac{1}{\sqrt{b}} \left| \int_0^{2b} (\cos(\lambda t) - \cos(\lambda s)) \cos \frac{k\pi\lambda}{b} d\lambda \right| \\ &= \frac{\sqrt{b}}{k\pi} \left| \int_0^{2b} (t \sin(\lambda t) - s \sin(\lambda s)) \sin \frac{k\pi\lambda}{b} d\lambda \right| \\ &= \frac{b^{3/2}}{k^2 \pi^2} \left| \cos \frac{k\pi\lambda}{b} (t \sin(\lambda t) - s \sin(\lambda s)) \Big|_{\lambda=0}^{2b} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2b} (t^2 \cos(\lambda t) - s^2 \cos(\lambda s)) \cos \frac{k\pi\lambda}{b} d\lambda \right| \\ &\leq \frac{b^{3/2}}{k^2 \pi^2} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

де вирази  $I_1$  та  $I_2$  дорівнюють

$$I_1 = |t \sin(2bt) - s \sin(2bs)|,$$

$$I_2 = \left| \int_0^{2b} (t^2 \cos(\lambda t) - s^2 \cos(\lambda s)) \cos \frac{k\pi\lambda}{b} d\lambda \right|.$$

Виконується рівність

$$\int 2bu \cos(2bu) du = u \sin(2bu) \Big|_{u=0}^t - \int \sin(2bu) du.$$

Тому значення  $I_1$  оцінюється наступним чином:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq |t \sin(2bt) - s \sin(2bs)| \\ &= \left| \int_s^t (\sin(2bu) + 2bu \cos(2bu)) du \right| \\ &\leq \left| \int_s^t \sin(2bu) du \right| + 2bT |t - s| \\ &\leq (2bT + 1) |t - s|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для оцінки  $I_2$  розглянемо спочатку

$$\begin{aligned} &|t^2 \cos(\lambda t) - s^2 \cos(\lambda s)| \\ &= \left| \int_s^t (2u \cos(\lambda u) - u^2 \lambda \sin(\lambda u)) du \right| \\ &\leq (2T + T^2 \lambda) |t - s| \\ &\leq (2T + 2bT^2) |t - s| \end{aligned}$$

В отриманій оцінці використане таке співвідношення

$$\int u^2 \lambda \sin(\lambda u) du = \\ = -u^2 \cos(\lambda u) \Big|_{u=s} + \int_s^t 2u \cos(\lambda u) du.$$

Тоді для  $I_2$  має місце нерівність

$$I_2 \leq 2b(2T + 2bT^2) |t-s|. \quad (2.11)$$

З (2.10) та (2.11) випливає

$$|a_t(t) - a_t(s)| \leq \\ \leq \frac{b^{3/2}}{k^2 \pi^2} (4b^2 T^2 + 6bT + 1) |t-s|. \quad (2.12)$$

Оцінимо суму ряду

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{u^4} du \\ \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{u^4} du = \int_N^{\infty} \frac{1}{u^4} du \\ = \frac{1}{3N^3}.$$

З даної нерівності, з (2.9) та (2.12) випливає

$$\sup_{|t-s|<h} (D(\Delta_N(t) - \Delta_N(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{b^{\frac{3}{2}} (4b^2 T^2 + 6bT + 1)}{\pi^2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{\frac{1}{2}} h \leq \\ \leq \frac{b^{\frac{3}{2}} (4b^2 T^2 + 6bT + 1)}{\pi^2 (3N^3)^{\frac{1}{2}}} h \\ = \frac{4b^{\frac{3}{2}} B}{\pi N^{\frac{3}{2}}} h := C(N)h,$$

де константа  $B$  з (2.5).

Таким чином, функція  $\sigma(h), h \geq 0$ , дорівнює

$$\sigma(h) = C(N)h, \quad (2.13)$$

яка задовольняє всім властивостям з теореми 2.

Покажемо, що в умові 3) теореми 2 для нашого випадку

$$\max \left\{ 1, \frac{\beta}{\sigma(T(2e^{0.5} - 2)^{-1})} \right\} = 1. \quad (2.14)$$

Дійсно, за означенням  $\beta$  та з (2.8) і (2.13)

$$\beta = \min \left\{ \sigma \left( \frac{T}{2} \right), \gamma_0 \right\} = \min \left\{ C(N) \frac{T}{2}, \frac{1}{AN^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Тому має місце нерівність

$$\frac{\beta}{\sigma \left( \frac{T}{2(e^{0.5} - 1)} \right)} \leq e^{0.5} - 1 < 1.$$

Отже, умова 3) в теоремі 2 еквівалентна  $x > \gamma_0$ . Так як зараз параметр  $x$  відображає точність моделювання, тобто  $x = \delta$ , то з (2.6) та (2.8) випливає, що ця умова виконується.

Розглянемо функцію  $r(u) = \sqrt{u} - 1$ . Для неї виконуються всі умови теореми 2. Помітимо, що

$$r^{(-1)}(u) = (u+1)^2$$

та

$$\sigma^{(-1)}(u) = \frac{u}{C(N)}.$$

Покажемо, що  $\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} \geq 1$  для  $u \in \left( 0, \frac{\beta\gamma_0}{x} \right)$ .

Дана нерівність еквівалентна  $\sigma \left( \frac{T}{2} \right) \geq u$  при  $u \in \left( 0, \frac{\beta\gamma_0}{x} \right)$ . Досить показати, що  $\sigma \left( \frac{T}{2} \right) \geq \frac{\beta\gamma_0}{x}$ .

А це випливає з того, що  $x > \gamma_0$

$$\beta = \min \left\{ \sigma \left( \frac{T}{2} \right), \gamma_0 \right\}.$$

Оскільки  $\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} \geq 1$ , то справдяються

співвідношення

$$r^{(-1)} \left( \frac{x(x-\gamma_0)}{\beta\gamma_0^2} \cdot \int_0^{\frac{\beta\gamma_0}{x}} r \left( \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right) \\ \leq \left( 1 + \frac{x(x-\gamma_0)}{\beta\gamma_0^2} \cdot \int_0^{\frac{\beta\gamma_0}{x}} \left( \left( \frac{TC(N)}{u} \right)^{1/2} - 1 \right) du \right)^2 \quad (2.15) \\ = \left( 2 - \frac{x}{\gamma_0} + 2 \left( \frac{x}{\gamma_0} - 1 \right) \left( \frac{TC(N)}{\beta\gamma_0} \right)^{1/2} \right)^2$$

З (2.8) випливає, що

$$\beta = C(N) \frac{T}{2}, \quad (2.16)$$

Де константа  $C(N)$  має вигляд

$$C(N) = \frac{4b^{3/2}B}{\pi N^{3/2}} = \frac{b^{3/2}(4b^2T^2 + 6bT + 1)}{\pi^2(3N^3)^{1/2}}$$

Підставимо (2.16) в (2.15) і покладемо  $x = \delta$ , отримаємо

$$\begin{aligned} & r^{(-1)} \left( \frac{x(x - \gamma_0)}{\beta \gamma_0^2} \cdot \int_0^{\gamma_0/x} r \left( \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right) \\ & \leq \left( 2 - \frac{\delta}{\gamma_0} + 2 \left( \frac{\delta}{\gamma_0} - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{\gamma_0}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

З теореми 2. та з (2.8) і (2.17) випливає, що

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |\Delta_N(t)| > \delta \right\} & \leq 2 \exp \left\{ -0.5(A\delta N^{1/2} - 1)^2 \right\} \times \\ & \left[ 2 - A\delta N^{1/2} + 2(A\delta N^{1/2} - 1)\sqrt{2\delta AN^{1/2}} \right]^4. \end{aligned}$$

### Список використаних джерел

1. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев, 1998.
2. Kozachenko Yu., Rozora I., Turchyn Ye., On an expansion of random processes in series// Random Operators and Stochastic Equations.- 2007- 15. - P.15-33.
3. Козаченко Ю.В., Розора І.В. Точність та надійність моделювання випадкових процесів з простору  $\text{Subf}(\Omega)$  // Теор. ймовір. та матем. статист. -2004.- 71. - ст.93-105.
4. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. Моделювання випадкових процесів та полів. – Київ, ВПЦ «Задруга», 2007- 230с.
5. Срмаков С.М., Михайлів Г.А. Статистическое моделирование. Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 296с.
6. Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. – Utrecht: VPS, 1996. – 240p.
7. Михайлів Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Учебное пособие. – М.: Издательский дом «Академия», 2006. – 368с.
8. Kozachenko, Yu., Rozora, I. Simulation of Gaussian stochastic processes //Random Oper. and Stochastic Equ. – 2003. – 11( № 3). – с.275-296.
9. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Моделювання випадкових процесів. – Київ: «Київський університет», 1999, 223с.
10. Розора І.В. Точність моделювання гауссових випадкових процесів з дискретним спектром// Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки.– Вип. 1, 2004.– С. 65-70.

Надійшла до редакції 14.01. 2009 року

УДК 517.97

Семенов В.В.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., доц.  
Апостол Р. Я., студ.  
Війтова Т. А., студ.

## Варіант принципу Девілля-Годфруа-Зілера для векторної оптимізації

Для задач векторної оптимізації отримано новий варіант варіаційного принципу Девілля-Годфруа-Зілера та теорему про  $\sigma$ -пористість множини некоректних задач.

**Ключові слова:** категорія Бера, пористість, векторна оптимізація, варіаційний принцип.

<sup>1</sup>E-mail: snakkar@univ.kiev.ua

Представив: д.ф.-м.н., проф. Хусайнов Д.Я.

Нехай  $(X, \rho)$  – повний метричний простір,  $(E, \| \cdot \|_E)$  – банахів простір. Простір  $E$  частково упорядковано замкненим опуклим та гострим конусом  $K \subseteq E$ .

Нехай задано відображення  $f: X \rightarrow E$ . Об'єктом нашого дослідження є задача векторної мінімізації

$$f \rightarrow K \text{-min}, \quad (1)$$

тобто задача пошуку точок  $x_0 \in X$  таких, що

$$f(X) \cap (f(x_0) - K \setminus \{0\}) = \emptyset. \quad (2)$$

Точки  $x_0 \in X$ , що задовольняють (2), називають ефективними розв'язками задачі (1). Через  $K\text{-argmin}(f)$  будемо позначати множину усіх ефективних розв'язків задачі (1), а  $K\text{-min}(f)$  – множину  $f(K\text{-argmin}(f)) \subseteq E$ .

Нагадаємо ряд необхідних нам понять та фактів з роботи [1].

**Означення 1.** Відображення  $f: X \rightarrow E$  називаємо  $K$ -обмеженим знизу, якщо існує точка  $z \in E$  така, що  $f(X) \subseteq z + K$ .

**Означення 2.** Відображення  $f: X \rightarrow E$  називаємо  $K$ -напівнеперервним знизу в точці  $x_0 \in X$ , якщо для довільного околу  $V \subseteq E$  точки  $f(x_0)$  існує такий коліп  $W \subseteq X$  точки  $x_0 \in W$ , що  $f(W) \subseteq V + K$ .

**Означення 3.** Відображення  $f: X \rightarrow E$  на-

Semenov V.V., PhD, assoc. prof.  
Apostol R.Y., undergrad. stud.  
Voitova T.A., undergrad. stud.

## A variant of Deville-Godefroy-Zizler principle for vector optimization

New variant of Deville-Godefroy-Zizler variational principle for vector optimization and  $\sigma$ -porosity of set of ill-posed problems theorem are proved.

**Key Words:** Baire category, porosity, vector optimization, variational principle.

зиваємо  $K$ -напівнеперервним знизу, якщо  $f$  є  $K$ -напівнеперервним знизу в кожній точці  $x_0 \in X$ .

У роботі [1] доведено, що  $K$ -напівнеперервні знизу відображення  $f: X \rightarrow E$  утворюють конус.

Зафіксуємо  $e \in K \setminus \{0\}$  і розглянемо функціонал

$$e^* \in K^* = \left\{ k^* \in E^*: \langle k^*, k \rangle_{E^*, E} \geq 0 \quad \forall k \in K \right\}$$

такий, що  $\langle e^*, e \rangle_{E^*, E} = 1$ .

З  $f$  зв'язуємо функціонал  $(e^* \circ f)(x) = \langle e^*, f(x) \rangle_{E^*, E}$ .

Введений функціонал має наступні властивості: якщо відображення  $f$   $K$ -обмежене знизу, то функціонал  $e^* \circ f$  обмежений знизу; якщо відображення  $f$  є  $K$ -напівнеперервним знизу, то функціонал  $e^* \circ f$  напівнеперервний знизу.

Нагадаємо, що  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  досягає в точці  $x_0 \in X$  строгого мінімуму, якщо

$$p(x_0) = \min_{x \in X} p(x)$$

і  $p(x_n, x_0) \rightarrow 0$  для всіх таких  $(x_n)$ , що  $p(x_n) \rightarrow p(x_0)$ .

**Лема 1.** Якщо функціонал  $e^* \circ f$  досягає в точці  $x_0 \in X$  строгого мінімуму, то  $x_0$  – ефективний розв'язок задачі  $f \rightarrow K\text{-min}$ .

Ми покажемо, що за допомогою як завгодно малих спеціальних адитивних збурень задачі (1) можна отримати розв'язну задачу векторної оптимізації.

У нелінійному аналізі варіаційними принципами називають групу результатів про те, що напівнеперервну знизу і обмежену знизу функцію на повному метричному просторі можна як завгодно мало збурити так, що збурена функція буде досягти мінімуму. Це перш за все теореми Екланда [2, 3], Борвейна–Прайса [4] та Девілля–Годфруа–Зіслера [5], які мають багато застосувань в теорії оптимізації. Ряд аналогів принципу Екланда для векторнозначних відображення отримано у статтях К. Таммер [6, 7]. У цій роботі нас цікавить варіаційний принцип Девілля–Годфруа–Зіслера, в якому доводиться масивність множини збурень, що забезпечують розв'язність. Для векторнозначних відображення аналог цього принципу був отриманий у [8]. Далі доведено близьку теорему. Але на відміну від [5, 8], ми розглядаємо відображення, задані на метричному просторі, а не на лінійному нормованому: внутрішність конусу  $K \subseteq E$  може бути порожньою. Також напівнеперервність знизу у розумінні [8] не співпадає з  $K$ -напівнеперервністю знизу.

### Варіаційний принцип

Введемо поняття допустимого конусу відображень–збурень.

**Означення 4.** Опуклий конус  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  обмежених,  $K$ -обмежених знизу і  $K$ -напівнеперервних знизу відображень  $X$  в  $E$  називаємо допустимим, якщо:

- 1)  $\forall g \in Y : \|g\|_{BC(X, E)} = \sup_{x \in X} \|g(x)\|_E \leq \|g\|_Y$ ;
- 2)  $Y$  – повний відносно метрики, яка породжується нормою  $\|\cdot\|_Y$ ;
- 3) для кожного  $n \in \mathbb{N}$  існує число  $M_n > 0$  таке, що для кожної точки  $x \in X$  існує функціонал  $b_n : X \rightarrow [0, 1]$  такий, що  $b_n(x) = 1$ ,  $\text{supp } b_n \subseteq B_\frac{1}{n}(x)$ ,  $-b_n e \in Y$  і  $\|-b_n e\|_Y \leq M_n$ .

За допустимий конус відображень  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  можна обрати, наприклад, банахів простір усіх неперервних ліпшицевих обмежених та  $K$ -обмежених знизу відображень  $g : X \rightarrow E$  з нормою

$$\|g\|_Y = \sup_{x \in X} \|g(x)\|_E + \sup_{x, y} \frac{\|g(x) - g(y)\|_E}{\rho(x, y)}.$$

**Теорема 1.** Нехай  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  – допустимий конус відображень  $X$  в  $E$ . Нехай відображення  $f : X \rightarrow E$  –  $K$ -напівнеперервне знизу і  $K$ -об-

межене знизу. Тоді множина  $g \in Y$  таких, що функціонал  $e^* \circ (f + g)$  досягає строгого мінімуму на  $X$ , містить щільну в  $Y$  підмножину типу  $G_\delta$ .

**Доведення.** Ясно, що для  $g \in Y$  функціонал  $e^* \circ (f + g)$  обмежений знизу. Розглянемо зліченну сім'ю множин

$$U_n = \left\{ g \in Y : \exists x_n \in X \quad e^* \circ (f + g)(x_n) < \inf \left\{ e^* \circ (f + g)(x) : \rho(x, x_n) \geq \frac{1}{n} \right\} \right\}.$$

**Лема 2.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  множина  $U_n$  відкрита.

**Лема 3.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  множина  $U_n$  щільна в  $Y$ .

**Доведення.** Нехай  $g \in U_n$  і  $\delta > 0$ . Оскільки  $e^* \circ (f + g)$  обмежений знизу, то існує точка  $x_n \in X$  така, що

$$e^* \circ (f + g)(x_n) < \inf \left\{ e^* \circ (f + g)(x) : x \in X \right\} + \delta.$$

Візьмемо функціонал  $b_n : X \rightarrow [0, 1]$  такий, що  $b_n(x_n) = 1$ ,  $\text{supp } b_n \subseteq B_\frac{1}{n}(x_n)$ ,  $-b_n e \in Y$  та  $\|-b_n e\|_Y \leq M_n$ . Тоді маємо

$$\begin{aligned} e^* \circ (f + g)(x_n) - \delta &= e^* \circ (f + g - \delta b_n e)(x_n) < \\ &< \inf \left\{ e^* \circ (f + g)(x) : x \in X \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ e^* \circ (f + g)(x) : \rho(x, x_n) \geq \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned} \inf \left\{ e^* \circ (f + g)(x) : \rho(x, x_n) \geq \frac{1}{n} \right\} &= \\ &= \inf \left\{ e^* \circ (f + g - \delta b_n e)(x) : \rho(x, x_n) \geq \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Тому відображення  $g - \delta b_n e \in Y$  належить множині  $U_n$ . З іншого боку

$$\|g - (g - \delta b_n e)\|_Y \leq M_n \delta.$$

Оскільки числа  $n \in \mathbb{N}$  і  $M_n > 0$  фіксовані, а число  $\delta > 0$  можемо обрати як завгодно малим, то  $g \in Y$  є точкою дотику  $U_n$ . Таким чином, множина  $U_n$  щільна в  $Y$ . ■

Множина  $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  щільна  $G_\delta$ -підмножина повного конуса  $Y$ . Далі показуємо, що для кожного  $g \in G$  функціонал  $e^* \circ (f + g)$  досягає строгого мінімуму на множині  $X$ . ■

З теореми 1 випливає

**Наслідок 1.** Нехай  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  – допустимий конус відображені  $X$  в  $E$ ;  $\{f_n : X \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$  – зліченна сім'я  $K$ -напівнеперервних знизу і  $K$ -обмежених знизу відображень. Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  існує відображення  $g \in Y$  таке, що

- 1)  $\|g\|_Y < \varepsilon$ ;
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad K\text{-argmin}(f_n + g) \neq \emptyset$ .

Цікаво дослідити можливість отримання тверджень типу наслідку 1 для незлічених сімей відображень  $\{f_\alpha : X \rightarrow E\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ .

### Теорема про $\sigma$ -пористість множини некоректних задач векторної оптимізації

Останнім часом стали популярними такі характеристики малості як пористість та  $\sigma$ -пористість [9, 10].

**Означення 5.** Нехай  $(Y, \rho)$  – метричний простір. Множину  $A \subseteq Y$  називають пористою в  $Y$  якщо існують  $\lambda_0 \in (0, 1]$ ,  $r_0 > 0$  такі, що для довільних  $x \in Y$  і  $r \in (0, r_0]$  існує точка  $y \in Y$  така, що  $O_{\lambda_0 r}(y) \subseteq O_r(x) \cap (Y \setminus A)$ .

**Означення 6.** Множину  $A \subseteq Y$  називають  $\sigma$ -пористою в  $Y$  якщо вона може бути представлена у вигляді зліченного об'єднання пористих в  $Y$  множин.

В [11] для багатьох ситуацій доведено, що множини функціоналів, які породжують нерозв'язні задачі мінімізації, є  $\sigma$ -пористими у відповідних функціональних просторах. Далі, спираючись на результати [12] та ідею з [11], уточнимо результат теореми 1. А саме: покажемо, що в умовах теореми 1 множина  $g \in Y$  таких, що  $e^* \circ (f + g)$  не досягає строгого мінімуму, є  $\sigma$ -пористою.

**Теорема 2.** При виконанні умов теореми 1 множина  $g \in Y$  таких, що функціонал  $e^* \circ (f + g)$  досягає строгого мінімуму на  $X$ , має тип  $G_\delta$  і  $\sigma$ -пористе доповнення.

**Доведення.** Будемо використовувати класичну характеризацію досяжності строгого мінімуму напівнеперервним знизу функціоналом, який задано в повному метричному просторі [12].

Нехай  $g \in Y$ . Функціонал  $e^* \circ (f + g)$  досягає строгого мінімуму на  $X$  тоді і тільки тоді, коли

$$\inf_{\varepsilon > 0} \left\{ \operatorname{diam} \{x \in X : e^* \circ (f + g)(x) \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon\} \right\} = 0.$$

Таким чином, множину  $G$  відображень  $g \in Y$  таких, що  $e^* \circ (f + g)$  досягає строгого мінімуму на  $X$ , можна подати у вигляді  $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ , де

$$G_n = \left\{ g \in Y : \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ \operatorname{diam} \{x \in X : e^* \circ (f + g)(x) \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon\} \right\} < \frac{1}{n} \right\}.$$

Для завершення доведення слід показати, що всі множини  $G_n$  відкриті, а множини  $Y \setminus G_n$  пористі в  $Y$ .

Розглянемо  $g \in G_n$ . Для деякого  $\varepsilon > 0$  Виконується нерівність:

$$\operatorname{diam} \{e^* \circ (f + g)\} \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon < \frac{1}{n}.$$

Оберемо  $g' \in Y$  так, що

$$\|g' - g\|_Y < \varepsilon^{3^{-1}} \|e^*\|_{E^*}^{-1}.$$

Тоді з нерівності

$$\begin{aligned} \inf_X e^* \circ (f + g') &\leq e^* \circ (f + g')(x) = \\ &= e^* \circ (f + g)(x) + e^* \circ (g' - g)(x) \leq \\ &\leq e^* \circ (f + g)(x) + \frac{1}{3} \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Випливає

$$\inf_X e^* \circ (f + g') \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \frac{1}{3}.$$

Якщо  $x \in \{e^* \circ (f + g') \leq \inf_X e^* \circ (f + g') + \frac{1}{3}\}$ ,

то

$$\begin{aligned} e^* \circ (f + g)(x) &\leq e^* \circ (f + g')(x) + \\ &+ e^* \circ (g' - g)(x) < e^* \circ (f + g')(x) + \frac{1}{3} \leq \\ &\leq \inf_X e^* \circ (f + g') + \frac{1}{3} \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} \{e^* \circ (f + g')\} &\leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \frac{1}{3} \leq \\ &\leq \operatorname{diam} \{e^* \circ (f + g)\} \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

тобто  $O_{\varepsilon/3} \setminus (g) \subseteq G_n$ . Відкритість множини  $G_n$  доведено.

**Лема 4.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  множина  $Y \setminus G_n$  пориста в  $Y$ .

**Доведення.** Візьмемо множину  $Y \setminus G_n$ . Покладемо  $\lambda_n = \frac{1}{2} \left(1 + 2M_{2n} \|e^*\|_{E^*}\right)^{-1}$ , де  $M_{2n} > 0$  – константа з означення 5. Візьмемо довільне  $r_n > 0$ . Покажемо, що пара чисел  $\lambda_n$  і  $r_n$  задовільняють вимоги з означення 5.

Нехай  $g \in Y$  і  $r \in (0, r_n]$ . Для доведення по-  
ристості  $Y \setminus G_n$  слід знайти таке  $g_n \in Y$ , що

$$O_{\lambda_n}(g + g_n) \subseteq O_r(g) \cap G_n. \quad (3)$$

Зафіксуємо число  $\varepsilon_n \in (0, \frac{r}{2M_{2n}})$  і візьмемо  
точку  $x_n \in X$  таку, що

$$e^* \circ (f + g)(x_n) \leq \inf_X e^* \circ (f + g) + \varepsilon_n.$$

Беремо функціонал  $b_{2n} : X \rightarrow [0, 1]$  такий, що

$$\begin{aligned} b_{2n}(x_n) &= 1, \quad \text{supp } b_{2n} \subseteq B_{\frac{1}{2n}}(x_n), \\ -b_{2n}e &\in Y, \quad \| -b_{2n}e \|_Y \leq M_{2n}. \end{aligned}$$

та будуємо відображення  $g_n \in Y$ :

$$g_n(x) = -\delta_n b_{2n}(x)e, \quad x \in X,$$

$$\text{де } \delta_n = r \frac{1 - \lambda_n}{M_{2n}}.$$

Покажемо, що має місце включення (3). Нехай  $p \in O_{\lambda_n}(g + g_n)$ . Тоді  $p = g + g_n + p'$ , де  $p' \in Y$ :  $\|p'\|_Y < \lambda_n r$ . Мають місце оцінки:

$$\begin{aligned} \|g - p\|_Y &\leq \|g_n\|_Y + \|p'\|_Y \leq \delta_n M_{2n} + \lambda_n r = \\ &= r \frac{1 - \lambda_n}{M_{2n}} M_{2n} + \lambda_n r = r. \end{aligned}$$

Отже,  $p \in O_r(g)$ . Залишилось довести, що  $p$  належить  $G_n$ . Для цього слід переконатись, що для деякого  $\varepsilon > 0$  виконується включення:

$$\begin{aligned} \{e^* \circ (f + p) \leq \inf_X e^* \circ (f + p) + \varepsilon\} &\subseteq \\ &\subseteq \text{supp } b_{2n} \subseteq B_{\frac{1}{2n}}(x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Для доведення включення (4) покажемо для  $x \notin \text{supp } b_{2n}$  має місце нерівність:

$$e^* \circ (f + p)(x) > \inf_X e^* \circ (f + p) + \varepsilon. \quad (5)$$

Враховувавши властивості відображення  $g_n \in Y$ , оцінку  $\|p'\|_{BC(X, E)} \leq \|p'\|_Y < \lambda_n r$  і  $\langle e^*, e \rangle_{E^*, E} = 1$ , отримаємо ланцюжок нерівностей ( $x \notin \text{supp } b_{2n}$ ):

$$\begin{aligned} e^* \circ (f + p)(x) &= e^* \circ (f + g + g_n + p')(x) \geq \\ &\geq e^* \circ (f + g)(x) - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \geq \\ &\geq \inf_X e^* \circ (f + g) - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \geq \\ &\geq e^* \circ (f + g)(x_n) - \varepsilon_n - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} = \\ &= e^* \circ (f + g + g_n)(x_n) + \delta_n - \varepsilon_n - \lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \geq \\ &\geq e^* \circ (f + g + g_n + p')(x_n) + \delta_n - \varepsilon_n - \\ &- 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*} \geq \inf_X e^* \circ (f + p) + \delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*}. \end{aligned}$$

Для обґрунтування нерівності (5) слід показати, що  $\delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*} > 0$ . З вибору  $\varepsilon_n$  і  $\delta_n$  отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta_n - \varepsilon_n - 2\lambda_n r \|e^*\|_{E^*} &> \\ &< \left( \frac{1 - \lambda_n}{M_{2n}} - \frac{1}{2M_{2n}} - 2\lambda_n \|e^*\|_{E^*} \right) r. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставивши значення  $\lambda_n$ , отримаємо, що права частина нерівності (6) дорівнює нулю. ■

**Наслідок 2.** При виконанні умов теореми 1 множина  $\{g \in Y : K\text{-argmin}(f + g) \neq \emptyset\}$  має  $\sigma$ -пористе дополнення.

### Список використаних джерел

1. J. Penot, M. Thera Semi-continuous mappings in general topology // Archiv der Math. 38, 1982, 158–166.
2. Ж.-П. Обен, И. Экланд Прикладной нелинейный анализ. – Москва: Мир, 1988. – 510 с.
3. Ekeland I. On the variational principle // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – 47. – P. 324-353.
4. Borwein J., Preiss D. Smooth variational principle with applications to subdifferentiability of convex functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – 303. – P. 517-527.
5. R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions // J. Funct. Anal. 111 (1993) 197-212.
6. Chr. Tammer A generalization of Ekeland's variational principle // Optimization 25 (1992) 129–141.
7. A. Gopfert, Chr. Tammer, C. Zalinescu On the vectorial Ekeland's variational principle and minimal points in product spaces // Nonlinear Anal. 39 (2000) 909–922.
8. R. Deville, C. Finet Vector-valued perturbed minimization principles // Can. Math. Soc. 27 (2000) 45–51.
9. Zajicek L. Porosity and  $\sigma$ -porosity // Real Anal. Exchange 13 (1987/88), no. 2, 314-350.
10. Zajicek L. On  $\sigma$ -porous sets in abstract spaces // Abstr. and Appl. Anal., 2005, no. 5, pp. 509-534.
11. R. Deville, J.P. Revalski Porosity of ill-posed problems // Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 1117-1124.
12. M. Furi, F. Vignoli About well-posed optimization problems for functionals in metric spaces // J. of optim. theory and appl., Vol. 5, No. 3, 1970, 225-229.

Надійшла до редколегії 10.12.08

УДК 519.9

Тикулов Є. В., аспірант

## Способи задання фігур фрактальної геометрії, індуковані ідеєю розпаду зірок

У роботі пропонуються два способи задання фрактальних множин, що виливають з ідеї розпаду зірок. В обох випадках використовується поняття регулярної граматики.

Ключові слова: фрактальна множина, формальна граматика, інтерпретація.

<sup>1</sup>E-mail: eugene.tikulov@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Буй Д. Б.

Ідея дробової розмірності множин була вперше введена Хаусдорфом у 1919 р., та розроблена у роботах Безіковича. Сучасна теорія фрактальних множин разом з математичними основами та застосуваннями є результат роботи багатьох вчених, серед яких можна відмітити Мандельброта, Фалконера та інших (див [1,2]). Дослідження фрактальних множин, їх структури, методів побудови та задання є на сьогодні актуальними напрямками дослідження. Загалом, фрактальні множини задаються ітеративними процедурами побудови, де на кожному елементарному кроці будеться простий під要素 цієї множини. Зокрема, Лісовиком запропоновано задання фрактальних множин за допомогою різних типів  $R$ -перетворювачів [3,4].

В роботі представлено два способи задання фігур фрактальної геометрії, що реалізують ідею розпаду зірок. За схемою регулярної граматики  $S$  та її інтерпретацією  $\varphi$  визначаються множина  $M(S, \varphi)$  скінченно досяжних точок та множина  $U(S, \varphi)$  гранично досяжних точок.

Вкажемо відмінності первого способу від другого. Для первого способу відповідно маємо

$$\begin{aligned}\varphi(a_i) &= (u_i^1 \nabla v_i^1, \dots, u_i^n \nabla v_i^n), \\ \varphi(a_j) &= (w_j^1, \dots, w_j^n),\end{aligned}$$

де  $u_i^j \in \{0,1\}^*$ ,  $v_i^j \in \{0,1\}^*$ ,  $w_j^j \in \{0,1,2\}^*$ .

При цьому  $\tilde{x} \equiv \|x\|$  позначає відповідне дійсне число, що має двійкове представлення  $x$ . Символ  $\nabla$  використовується в двійковому записі числа для відокремлення цілої частини.

Е. В. Tykulov, Ph.D. student

## Fractal sets representations induced by stars iterative splitting idea

They are considered the two methods of representation of fractal sets induced by stars iterative splitting idea. In both cases the notion of regular grammar is involved.

Key Words: fractal set, formal grammar, interpretation.

Множини  $M(S, \varphi)$  та  $U(S, \varphi)$  уточнюються нижче. Перший спосіб дає фігури фрактальної геометрії в  $n$ -вимірному евклідовому просторі (окремо можна виділити випадок  $n = 2$ ). При цьому всі точки цих фігур мають невід'ємні координати. Це обмеження несуттєве, але прийнято з міркувань зручності. Для другого способу вказане обмеження не мається на увазі.

Другий спосіб задання фігур фрактальної геометрії полягає в наступному. Фіксується деяка регулярна граматика (схема регулярної граматики). Фіксується її інтерпретація. За ними визначається відповідна фігура фрактальної геометрії.

Регулярна граматика  $S$  містить деяку скінченну множину правил виду

$$\begin{aligned}q_0 &\rightarrow a_i q_i \quad (1 \leq i \leq m), \\ q_i &\rightarrow a_j q_j \quad (1 \leq i, j \leq m).\end{aligned}$$

Деякі символи (стани)  $q_i, q_j$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ) можуть бути ототожнені. Символи  $a_i$ ,  $a_j$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , всі різні та відрізняються від символів  $q_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ). При фіксованому натуральному числі  $m$  схема  $S$  може містити тільки частину з вищевказаних правил.

Інтерпретація  $\varphi$  кожному символу  $a_i$  ставить у відповідність вектор

$$\tilde{a}_i = \varphi(a_i) = b_i,$$

а кожному символу  $a_j$  ставить у відповідність

пару

$$\tilde{a}_y = \varphi(a_y) = (c_y, \beta_y),$$

де  $c_y$  – вектор,  $\beta_y$  – невід'ємне дійсне число,  $0 \leq \beta_y < 1$ . Тут під вектором мається на увазі вектор в  $n$ -вимірному евклідовому просторі або навіть в нескінченновимірному векторному просторі.

Множина  $M(S, \varphi)$  задається у такий спосіб:  $M(S, \varphi) = \{x \mid \text{існує послідовність натуральних чисел } i_1, i_2, \dots, i_r \text{ така, що } q_0 \rightarrow a_{i_1} q_{i_1}, q_{i_{t-1}} \rightarrow a_{i_t} q_{i_t} \text{ (} 2 \leq t \leq r \text{)}\}$  – правила граматики  $S$  та

$$x = b_{i_1} + c_{i_2} \cdot k_{i_2} + \dots + c_{i_r} \cdot k_{i_r},$$

де  $k_{i_t} = \beta_{i_t}$ , та  $k_{i_{t+1}} = k_{i_t} \cdot \beta_{i_{t+1}}$  для всіх  $2 \leq t \leq r-1$ .

$U(S, \varphi)$  – множина всіх граничних точок множини  $M(S, \varphi)$ .



Рис. 1.

Нижче вказана схема регулярної граматики  $S$  та інтерпретація  $\varphi$  для завдання “сніжинки Кох”. Нехай  $\theta$  позначає нульовий вектор. В схемі  $S$  є три пари станів  $q_{2i-1}, q_{2i}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , та ще два стани  $q_0$  та  $q_1$ . Точка  $(0,0)$  є початковою. Перед тим як в явному вигляді задати регулярну граматику  $S$  та її інтерпретацію  $\varphi$  для вказаної фрактальної множини, зазначимо наступне. Кінцевий формальний опис базується на конструкції, що забезпечена достатньою кількістю малюнків та відповідними розрахунками, необхідними для уточнення інтерпретації  $\varphi$ . Побудова кінцевого формального опису відбувається наступним чином. Графічно представляється перша фігура у вигляді рівностороннього трикутника з бічною стороною довжини 1 та всі види деформацій. Рівносторонньому трикутнику (з вершинами  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$ ,  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$ ) ставиться у відповідність три правила граматики  $S$ . Всього маємо шість типів деформацій, пов'язаних зі станами  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Один такий тип

деформації (пов'язаний зі станом  $q_1$ ) представляє рис. 1.

Кожен зі станів  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , відповідає куту нахилу відрізка та орієнтації, що вказані на рис. 2 у порядку 1, 2, ..., 6.

Інші типи деформацій аналогічні першому типу та визначаються кутом нахилу відрізка та орієнтацією. Зазначимо, що в лівій частині рис. 1 крайні точки відрізка містяться неявно, в той час як в правій його частині ці точки вказано явно. Це не випадково і відповідає загальному плану побудови фрактальної фігури та граматики  $S$ . Кожному типу деформації ставляться у відповідність шість правил граматики  $S$ . Стільки ж точок вказано в правій частині рис. 1.

Рівносторонньому трикутнику ставляться у відповідність три правила регулярної граматики  $S$ :

$$q_0 \rightarrow a_1 q_1, \quad q_0 \rightarrow a_3 q_3, \quad q_0 \rightarrow a_5 q_5.$$

Першому типу деформації (див. рис. 1) ставляться у відповідність такі шість правил граматики  $S$ :

$$q_1 \oplus a_{17} q_7, \quad q_1 \oplus a_{11} q_1, \quad q_1 \oplus a_{16} q_6, \\ q_1 \oplus a_{14} q_4, \quad q_1 \oplus a_{19} q_1, \quad q_1 \oplus a_{18} q_7.$$

Уточнимо тепер інтерпретацію  $\varphi$  для вказаних правил граматики. Маємо

$$\varphi(a_1) = \left(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \varphi(a_3) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\right), \\ \varphi(a_5) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\right).$$

Крім того, для  $i=17, 11, 16, 14, 19, 18$  маємо  $\varphi(a_i) = (b_i, \frac{1}{3})$ , де

$$b_{17} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \quad b_{11} = \left(-\frac{1}{3}, 0\right), \\ b_{16} = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{\sqrt{3}}{12}\right), \quad b_{14} = \left(\frac{1}{12}, -\frac{\sqrt{3}}{12}\right), \\ b_{19} = \left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad b_{18} = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

У регулярній граматиці  $S$  є ще правило  $q_7 \rightarrow a_{77} q_7$ , де  $\varphi(a_{77}) = (\theta, \frac{1}{2})$ , а  $\theta = (0, 0)$  є нульовий вектор.

Далі наведені інші правила граматики  $S$  (див. [5]). Для цього зафіксуємо початкове розміщення з повтореннями  $w = 1641$  та підстановку

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Підстановка  $\xi$  визначає зміну типу деформації при центральному повороті відрізу на  $60^\circ$ . Зазначимо, що можна було б розглядати аналогічно початкове розміщення з повтореннями  $w = 716417$  та підстановку

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Шість груп правил граматики  $S$  (по шість правил в кожній групі) записуються в такому порядку: правила з символом  $q_1, q_4, q_5, q_3, q_2, q_6$  в лівій частині. Повна таблиця, що складається з 36 правил має вид

$$(\text{trans}(i, j)),$$

де  $1 \leq i, j \leq 6$  та продукція (транспозиція)  $\text{trans}(i, j)$  виглядає наступним чином:

$$q_{f(i)} \rightarrow a_{f(i)r_j} q_{r_j},$$

де  $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 5, f(4) = 3, f(5) = 2, f(6) = 6$ . При цьому, значення  $r_i$  та вектори  $b_{1r_i} = \varphi(a_{1r_i})$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , вже визначені вище. Стосовно інших чисел  $r_j$  та векторів  $b_{f(i)r_j} = \varphi(a_{f(i)r_j})$  маємо таке. Вектор  $b_{f(i)r_j}$  утворюється з вектора  $b_{1r_i}$  поворотом на  $(i-1) \cdot 60^\circ$ ,  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ . Числа  $r_j$  вибираються так, що для послідовності  $r_{11} r_{12} r_{13} r_{14} r_{15} r_{16}$  маємо

$r_{11} = r_{16} = 7$ , а  $r_{12} r_{13} r_{14} r_{15} = \xi^{i-1}(w)$ , тобто отримано  $(i-1)$ -м кратним застосуванням підстановки  $\xi$ , де  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ .

Для утворення повної системи правил граматики  $S$  в явному виді можна ще використовувати функцію  $h$ , що задовільняє умові

$$h(b, \varphi) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi),$$

тобто  $h(b, \varphi)$  є вектор, який можна отримати з вектора  $b$  при повороті його (відносно початку координат) на кут  $\varphi$ .

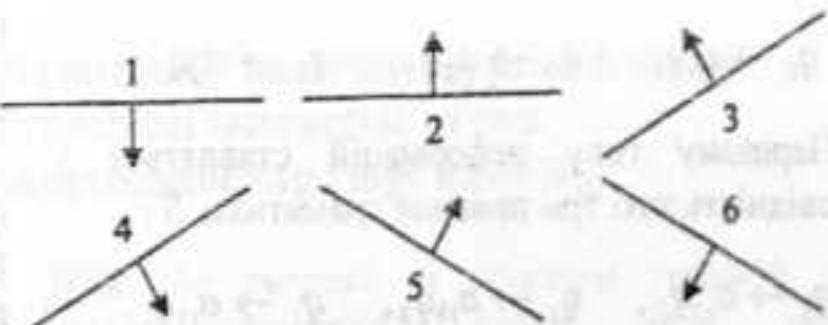


Рис. 2.

Далі вказана схема регулярної граматики  $S$  та інтерпретація  $\varphi$  для задання "трикутної серветки Серпінського" (див. [2]). Схема  $S$  має три стани  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , та початковий стан  $q_0$ . Точка  $(0,0)$  є початковою. Кінцевий опис базується на конструкції, що забезпечена достатньою кількістю малюнків та відповідними уточненнями інтерпретації  $\varphi$ . Побудова кінцевого формального опису відбувається у такий спосіб. Графічно представляється перша фігура у вигляді прямокутного трикутника з вершинами  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  та всі види деформацій. Прямокутному трикутнику ставиться у відповідність три правила регулярної граматики  $S$ . Всього маємо три типи деформацій, пов'язаних зі станами  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Один з типів деформацій, що відповідає стану  $q_1$ , представляє рис. 3.

Кожен зі станів  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , відповідає вершині трикутника, при цьому, обхід підтрикутників, за виключенням центрального, відбувається за годинниковою стрілкою.

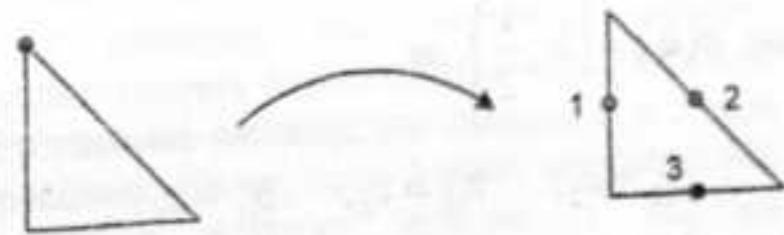


Рис. 3.

Інші типи деформацій аналогічні першому типу та визначаються вершиною трикутника (див. рис. 4). Зазначимо, що в лівій частині рис. 3 центральні точки відрізків містяться неявно, в той час як в правій його частині ці точки вказано явно. Це відповідає загальному плану побудови фрактальної фігури та граматики  $S$ . Кожному типу деформації ставляється у відповідність три правила граматики  $S$ . Стільки ж точок вказано у правій частині рис. 3.

Прямокутному трикутнику ставляться у відповідність наступні три правила регулярної граматики  $S$ :

$$q_0 \rightarrow a_1 q_1, \quad q_0 \rightarrow a_2 q_2, \quad q_0 \rightarrow a_3 q_3.$$

Першому типу деформацій ставляться у відповідність такі три правила граматики  $S$ :

$$q_1 \rightarrow a_{12} q_2, \quad q_1 \rightarrow a_{13} q_3, \quad q_1 \rightarrow a_{21} q_1.$$

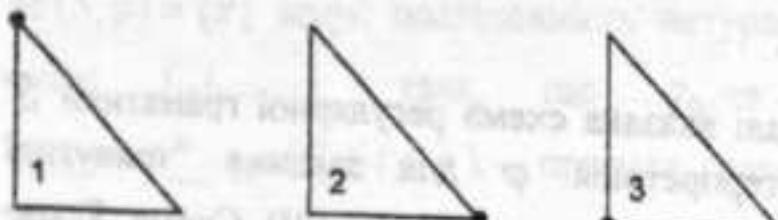


Рис. 4

Другому типу деформацій ставляться у відповідність наступні три правила граматики  $S$ :

$$q_2 \rightarrow a_{23} q_3, \quad q_2 \rightarrow a_{21} q_1, \quad q_2 \rightarrow a_{22} q_2.$$

Третьому типу деформацій відповідають такі правила граматики  $S$ :

$$q_3 \rightarrow a_{31} q_1, \quad q_3 \rightarrow a_{32} q_2, \quad q_3 \rightarrow a_{33} q_3.$$

Уточнимо тепер інтерпретацію  $\varphi$  для вказаних правил граматики. Нехай

$$c_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad c_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad c_3 = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Тоді маємо

$$\varphi(a_1) = c_1, \quad \varphi(a_2) = c_2, \quad \varphi(a_3) = c_3.$$

Крім того, для  $i = 12, 13, 11, 23, 21, 22, 31, 32, 33$

$$\text{маємо } \varphi(a_i) = \left(b_i, \frac{1}{2}\right), \text{ де}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= c_2, & b_{13} &= c_3, & b_{11} &= c_1, \\ b_{23} &= c_3, & b_{21} &= c_1, & b_{22} &= c_2, \\ b_{31} &= c_1, & b_{32} &= c_2, & b_{33} &= c_3. \end{aligned}$$

Повернемось тепер до первого способу задання фігур фрактальної геометрії. Залишається уточнити множини  $M(S, \varphi)$  та  $U(S, \varphi)$ . Множина  $U(S, \varphi)$  визначається за  $M(S, \varphi)$  як показано вище. Множина  $M(S, \varphi)$  визначається наступним чином:  $M(S, \varphi) = \{x | x = (x_1, \dots, x_n)\}$  та існує послідовність

натуральних чисел  $i_1, i_2, \dots, i_r$  така, що  $x_l = \|u'_{i_1} \nabla v'_{i_2} w'_{i_3} \dots w'_{i_{r-l}}\|$ , для всіх  $l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) і  $q_0 \rightarrow a_{il} q_{il}, q_{i_{l-1}} \rightarrow a_{i_{l-1}l} q_l$  ( $2 \leq l \leq r$ ) – правила граматики  $S$ .

В роботі досліджено два способи задання фігур фрактальної геометрії, що реалізують ідею розпаду зірок. При цьому використовується поняття регулярної граматики. За граматикою та її інтерпретацією визначаються множини скінченно досяжних та граничних точок фрактальної множини.

#### Список використаних джерел

- Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: «Институт компьютерных исследований», 2002 – 656 с.
- Турбин А. Ф. Працевитый Н. В., Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.
- Лисовик Л. П. Применение конечных преобразователей для задания фрактальных кривых // Кибернетика и системный анализ, 1994, №3, С.11-22.
- Лисовик Л. П. Теория трансдьюсеров. Том 1. Главы 1-4, Книга 1. Типы языков и машин. – К.: Феникс, 2005. – 272 с. – (серия «математическое мышление»).
- Лисовик Л. П., Тыкулов Е. В. Два способа задания фигур фрактальной геометрии, подчиненные одной идее распада звезд. / В кн. Л. П. Лисовик. Трансдьюсеры. II. – К.: Феникс, 2007., – С.162-166.

Надійшла до редакції 12.01.2009

УДК 531.37: 537.634: 519.6

Швець Д.В., аспірант

## Чисельно-аналітичний підхід до моделювання динамічної взаємодії двох надпровідних кілець

З метою вивчення властивостей розв'язків нелінійної динамічної системи взаємодії двох надпровідних магнітних контурів пропонується використання одного чисельно-аналітичного методу. Він полягає у заміні деяких параметрических функцій правих частин канонічної системи диференціальних рівнянь наближенними аналогами. Приведено оцінку похибки даного методу та приклади, які демонструють результати його застосування.

**Ключові слова:** математичне моделювання, надпровідна левітация.

E-mail: dmitrysv@univ.kiev.ua

Роботу представив проф. Гаращенко Ф.Г.

### Вступ

Однією з багатьох задач, що постають перед багатогранною в сучасному представленні фізичною наукою, є дослідження властивостей побудованих математичних моделей, які описують різноманітні природні процеси та явища. Особлива складність в даній задачі виникає при дослідженні моделей, що передбачають наявність рівнянь динамічної взаємодії певних об'єктів. Причому для різних випадків складність отриманих рівнянь може носити різний характер. Зокрема, при побудові диференціальних рівнянь у канонічному вигляді, що описують динаміку процесу, їх праві частини можуть мати громіздкий вигляд. Тому подальше вивчення властивостей таких рівнянь пов'язане з необхідністю виконання великої кількості аналітичних перетворень. З метою полегшення роботи дослідника для таких випадків розроблено сучасні комп'ютерні програмні комплекси, функціональність яких дозволяє швидко виконувати перетворення виразів в аналітичній формі.

Однак, складність вищезгаданих рівнянь може мати й принципово інший характер. Так, набагато складнішими для дослідження є динамічні рівняння, що мають нелінійну структуру правих частин. Причому нелінійність може полягати у наявності в правих частинах функцій від фазових координат, які не виражаються в явному вигляді. Прикладами

D.V. Shvets, postgraduate student

## Numerically analytical approach to the dynamical interaction of two superconducting rings modeling

With the purpose of solutions research a nonlinear dynamical system with two superconducting magnetic ring interaction the use of one numerically analytical method is offered. It consists in replacement of some parametrical functions in right parts of the canonical system of differential equalizations with approximation analogues. The fallibility estimation of this method and examples which demonstrate the results of his application is adduced.

**Keywords:** mathematical modeling, superconducting levitation.

таких функцій можуть слугувати інтеграли еліптичного типу. Розв'язки описаних рівнянь не можуть бути отримані відомими аналітичними методами. Неможливим також є застосування до вивчення якісних характеристик даних розв'язків методів теорії стійкості. Отримання частинних розв'язків таких рівнянь за допомогою чисельних методів з необхідною точністю також викликає певні складнощі, які полягають у виконанні великої кількості арифметичних операцій на кожному кроці інтегрування.

### Динамічна модель

Одним з випадків динамічних рівнянь такого типу є рівняння, що описують магнітну взаємодію вільних надпровідних багатозв'язних тіл. Розглянемо систему, що складається з двох надпровідних кілець, одне з яких нерухоме [4]. Інше кільце жорстко зв'язане з вільним немагнітним тілом таким чином, що його центр мас лежить у центрі кільця, а головні осі інерції тіла співпадають з головними осями інерції кільця. Фазовий простір даної системи складається з циліндричних координат  $\rho, \alpha, \zeta$  положення центру мас вільного тіла в системі координат, зв'язаній з нерухомим кільцем, та кутів Ейлера  $\varphi, \psi, \theta$ , які визначають просторову орієнтацію вільного тіла відносно нерухомого кільця. Рівняння у розмірному вигляді, що визначають динаміку руху вільного тіла описаної системи задаються наступним чином:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} = \rho \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \ddot{\alpha} = -\frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\alpha} - \frac{1}{m \rho^2} \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \\ \ddot{\zeta} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ \ddot{\varphi} = 0, \\ \ddot{\psi} = -\frac{\dot{\theta}}{\sin \theta} (2\dot{\psi} \cos \theta - \frac{M}{I_1}) - \frac{1}{I_1 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi} \sin \theta (\dot{\psi} \cos \theta - \frac{M}{I_1}) - \frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (1)$$

Константами  $M$ ,  $I_1$  та  $m$  позначені інтеграл руху власного обертання вільного тіла для випадку його осової симетрії, головний момент інерції тіла по осі абсцис та маса вільного тіла відповідно. Потенціальна енергія  $U$  магнітної взаємодії двох надпровідних кілець має вигляд

$$\begin{aligned} f(p_k, \lambda_1, \lambda_2) = & (\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) + \\ & + \sin \lambda_1 \cos \lambda_2 (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) - \\ & - \cos \lambda_1 \sin \lambda_2 (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) + \\ & + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi)) \times \\ & \times \{(\rho \cos \alpha + a_2 \cos \lambda_2 (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) - \\ & - a_2 \sin \lambda_2 (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) - a_1 \cos \lambda_1)^2 + \\ & + (\rho \sin \alpha + a_2 \cos \lambda_2 (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) + \\ & + a_2 \sin \lambda_2 (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi) - a_1 \sin \lambda_1)^2 + \zeta^2\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подвійний інтеграл в (3) є інтегралом еліптичного типу, що не дає змогу його обчислити відомими аналітичними методами. Цей факт робить неможливим застосування методів теорії стійкості динамічних систем до вивчення властивостей розв'язків системи (1). З метою подолання даного обмеження, представимо функцію (4) у вигляді розкладу в ряд Тейлора [6] до  $m$ -го члену ряду включно як

$$\begin{aligned} f(p_k, \lambda_1, \lambda_2) = & Tf_{(\pi, \pi)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) = f(p_k, \pi, \pi) + \left[ \frac{\partial f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 - \pi) + \frac{\partial f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 - \pi) \right] + \\ & + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_1^2} (\lambda_1 - \pi)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} (\lambda_1 - \pi)(\lambda_2 - \pi) + \frac{\partial^2 f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_2^2} (\lambda_2 - \pi)^2 \right] + \dots + (5) \\ & + \frac{1}{m!} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 - \pi) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 - \pi) \right]^{(m)} f(p_k, \pi, \pi), m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$U(p_k) = \frac{1}{2} \frac{L_2 \Psi_1^2 - 2L_{12}(p_k) \Psi_1 \Psi_2 - L_1 \Psi_2^2}{L_1 L_2 - L_{12}^2(p_k)}, \quad (2)$$

$$p_k = \{\rho, \alpha, \zeta, \varphi, \psi, \theta, a_1, a_2\}.$$

Власні індуктивності  $L_1$ ,  $L_2$  і магнітні потокозчеплення  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  нерухомого та вільного кілець в (2) є константами [4], що визначають «магнітну» конфігурацію системи. До параметрів  $p_k$  належать узагальнені координати  $\rho, \alpha, \zeta, \varphi, \psi, \theta$  та радіуси відповідних кілець  $a_1, a_2$ . Взаємна індуктивність  $L_{12}(p_k)$  надпровідних кілець залежить від  $p_k$  у нашому випадку наступним чином

$$L_{12}(p_k) = \frac{\mu_0 a_1 a_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p_k, \lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (3)$$

де

функцію двох змінних  $\lambda_1, \lambda_2$  в точці  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$  та позначимо його через  $Tf_{(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$ . Величини  $p_k$  в даному розкладі розглядаються як константи. Оскільки область інтегрування функції  $f$  в (3) по  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  є проміжок  $[0, 2\pi]$ , виконаємо розклад Тейлора функції в середній точці даного проміжку  $\lambda_1 = \pi, \lambda_2 = \pi$ :

$$Tf_{(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) = f(p_k, \pi, \pi) + \left[ \frac{\partial f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 - \pi) + \frac{\partial f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 - \pi) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_1^2} (\lambda_1 - \pi)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} (\lambda_1 - \pi)(\lambda_2 - \pi) + \frac{\partial^2 f(p_k, \pi, \pi)}{\partial \lambda_2^2} (\lambda_2 - \pi)^2 \right] + \dots + (5)$$

Покладемо у формулі (5)  $m = 6$  та знайдемо функцію  $Tf_{(\pi,\pi)}^6(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$ . Вона має громіздкий аналітичний вигляд, тому за зрозумілих причин не може бути приведена в даній роботі. З метою проведення порівняльного аналізу побудуємо просторові графіки функцій  $f(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  та  $Tf_{(\pi,\pi)}^6(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  при фіксованих значеннях параметрів  $p_k$ . На рисунку 1 зображені графіки відповідних функцій при  $\rho = 6$ ,  $\alpha = 2.5$ ,  $\zeta = -8$ ,  $\varphi = 1.2$ ,  $\psi = 0.2$ ,  $\theta = 1.6$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 7$ .

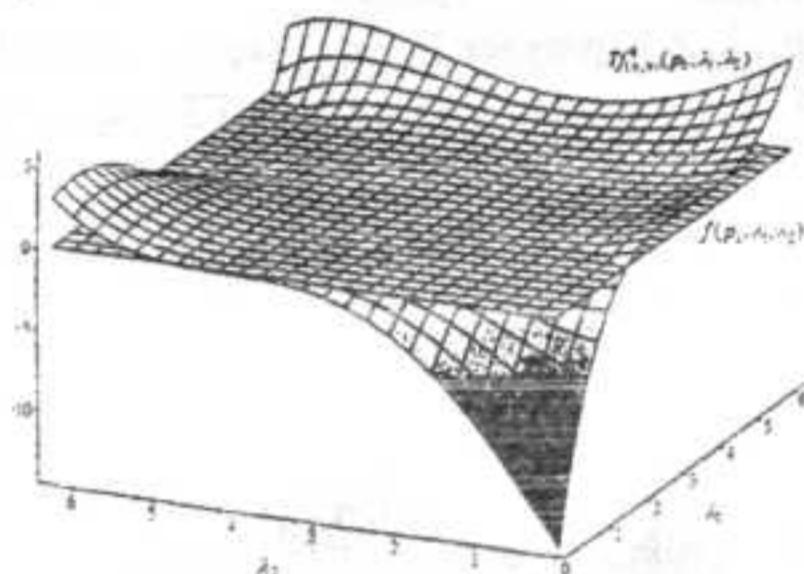


Рис 1. Функція  $f$  та її розклад у ряд Тейлора.

Як бачимо, шести членів розкладу в (5) недостатньо для досягнення необхідної точності наближення на всій області інтегрування. Подальше збільшення кількості членів ряду Тейлора також не дає бажаного результату, оскільки функція  $f(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  розглядається в досить великому околі точки, в якій проводиться розклад.

#### Чисельно-аналітичний підхід

З метою підвищення точності наближення функції  $f(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  рядом Тейлора введемо рівномірне розбиття області інтегрування в (3) на  $n^2$  областей з кроком  $h$  по  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ , та знайдемо розклади в ряд Тейлора даної функції в точках, які є центрами відповідних областей розбиття [1]. Скориставшись властивістю визначених інтегралів [5] отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p_k, \lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 &= \int_{a_0 b_0}^{a_1 b_1} \left[ \int_{a_0 b_0}^{a_1 b_1} \left( Tf_{\left(\frac{a_0+a_1}{2}, \frac{b_0+b_1}{2}\right)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) + r_{11}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots + \right. \\ &+ \int_{a_0 b_{n-1}}^{a_1 b_n} \left[ \int_{a_0 b_{n-1}}^{a_1 b_n} \left( Tf_{\left(\frac{a_0+a_1}{2}, \frac{b_{n-1}+b_n}{2}\right)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) + r_{1n}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots + \right. \\ &+ \int_{a_{n-1} b_0}^{a_n b_1} \left[ \int_{a_{n-1} b_0}^{a_n b_1} \left( Tf_{\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{b_0+b_1}{2}\right)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) + r_{n1}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots + \right. \\ &+ \left. \int_{a_{n-1} b_{n-1}}^{a_n b_n} \left[ \int_{a_{n-1} b_{n-1}}^{a_n b_n} \left( Tf_{\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{b_{n-1}+b_n}{2}\right)}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) + r_{nn}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 \right] \right], \end{aligned} \quad (6)$$

де  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $a_n = 2\pi$ ,  $b_n = 2\pi$ , члени  $r_{ij}^m$  розкладів у формі Лагранжа мають вигляд

$$r_{ij}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(m+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left( \lambda_1 - \frac{b_{j-1} + b_j}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left( \lambda_2 - \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right) \right)^{(m+1)} \times \\ \times f \left( p_k, \frac{b_{j-1} + b_j}{2} + \theta_1 \left( \lambda_1 - \frac{b_{j-1} + b_j}{2} \right), \frac{a_{i-1} + a_i}{2} + \theta_2 \left( \lambda_2 - \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right) \right), \quad 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1.$$

Інтегрили у правій частині формулі (6) не є еліптичними, тому можуть бути взяті відомими аналітичними методами інтегрування. Оцінимо похибку обчислення інтегралу, яка виникає при відкиданні залишкових членів  $r_{ij}^m$ . Оскільки функція  $f(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  при зміні аргументів  $\lambda_i$  на проміжку  $(a_{i-1}, a_i)$  та  $\lambda_2$  на проміжку  $(b_{j-1}, b_j)$  має частинні похідні порядку  $m+1$ , які обмежені по абсолютної величині числом  $M_{ij}(p_k)$  [6], то

$$|r_{ij}^m(p_k, \lambda_1, \lambda_2)| \leq \frac{M_{ij}(p_k) 2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!}, \quad (7)$$

де

$$\delta(h) = \sqrt{\left(\lambda_1 - \frac{b_{j-1} + b_j}{2}\right)^2 + \left(\lambda_2 - \frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right)^2},$$

$i, j = \overline{1, n}$ .

Звідси, користуючись властивістю визначених інтегралів, сумарна похибка обчислення при відкиданні залишкових членів у (6) не перевищуватиме величини

$$\begin{aligned} & \int_{a_0 b_0}^{a_1 b_0} \frac{M_{11}(p_k) 2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots + \\ & + \int_{a_0 b_{n-1}}^{a_n b_{n-1}} \frac{M_{1n}(p_k) 2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots + \\ & + \int_{a_{n-1} b_0}^{a_n b_0} \frac{M_{n1}(p_k) 2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots + \\ & + \int_{a_{n-1} b_{n-1}}^{a_n b_{n-1}} \frac{M_{nn}(p_k) 2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ & = n^2 h^2 \frac{2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(p_k) = \\ & = 4\pi^2 \frac{2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(p_k). \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо при наближеному обчисленні інтегралу (6) у кожному розкладі обмежитись знаходженням членів ряду до  $m$ -го включно, то для того, щоб похибка обчислення була менше наперед заданого числа  $\varepsilon$  необхідно щоб виконувалась нерівність

$$4\pi^2 \frac{2^{m+1} \delta^{m+1}(h)}{(m+1)!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(p_k) < \varepsilon. \quad (9)$$

Тобто, необхідно знайти такий крок розбиття  $h$  області інтегрування в (3), який би забезпечив виконання умови (9).

### Обчислювальний експеримент

Для прикладу, проведемо розбиття області інтегрування в (6) вибравши крок  $h = \pi/2$ . В розкладах підінтегральної функції  $f(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  у ряд Тейлора покладемо  $m = 5$ , тобто відкинемо всі члени розкладів вище п'ятого порядку. Виберемо значення параметрів  $p_k$  такими як у попередньому випадку та побудуємо просторові графіки функцій  $f(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  (рисунок 2) та графіки функцій  $Tf^5\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, \frac{b_{j-1}+b_j}{2}\right)(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$  кожну у своїй області, сумістивши їх в одному координатному просторі (рисунок 3).

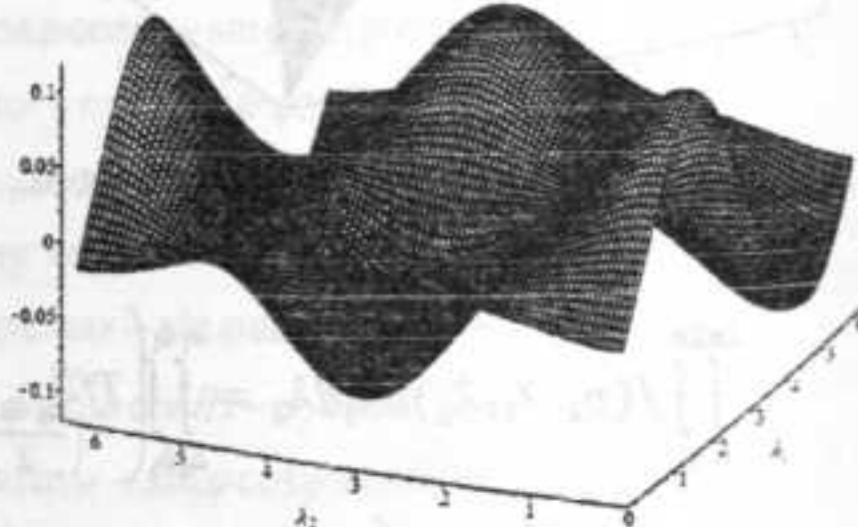


Рис 2. Графік функції  $f$ .

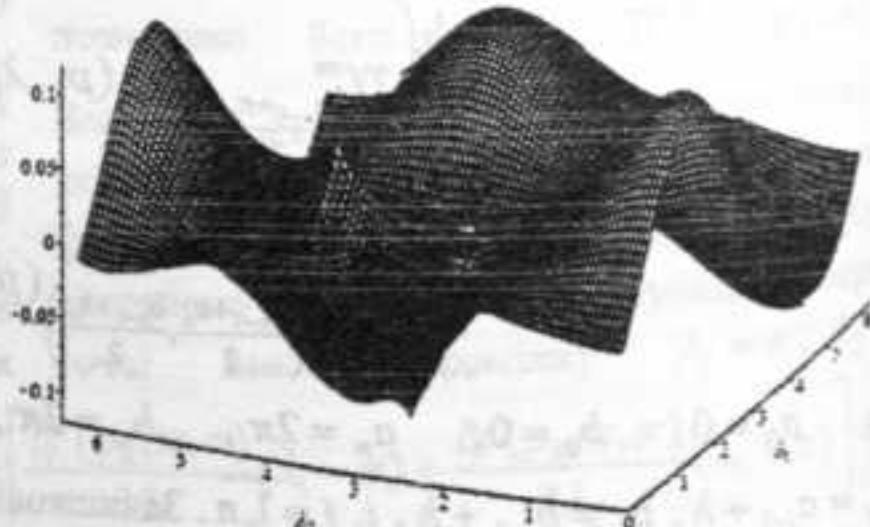


Рис 3. Графік функції  $Tf^5$ .

Як бачимо з приведених рисунків, наближення функції  $f$  її розкладами у ряд Тейлора в різних областях дає набагато кращий результат, ніж у попередньому прикладі. Так,

поганка розрахунку (8) при заданих параметрах не перевищує значення  $2.2 \times 10^{-4}$ . Змінюючи відповідним чином крок  $\hbar$  розбиття області інтегрування та кількість членів розкладу  $m$  в кожній області можна отримати необхідну для подальших аналітичних розрахунків точність обчислення інтегралу (6).

### Висновки

Завдяки сучасному розвитку технічних та програмних засобів перед науковцями, зокрема, у фізико-математичній області, відкриваються принципово нові можливості для вивчення властивостей математичних моделей фізичних процесів. В даній роботі приведена динамічна модель магнітної взаємодії вільних надпровідних багатозв'язних тіл. Особливість даної моделі полягає в тому, що до правих частин її канонічної форми входять функції від фазових координат, які є підінтегральними виразами інтегралів еліптичного виду. Це робить неможливим застосування, наприклад, методів теорії стійкості для дослідження властивостей її розв'язків. З метою зняття даного обмеження пропонується застосувати описаний чисельно-аналітичний підхід до перетворення вказаних підінтегральних виразів. Ідея підходу полягає у рівномірному розбитті області інтегрування функції на проміжки, та проведенні розкладів функції у ряд Тейлора в точках, що є центрами відповідних проміжків. Приведено оцінку похибки, що виникає при його застосуванні. Так, вибираючи крок розбиття та кількість членів в розкладах можна досягти відповідної наперед заданої точності перетворень.

Інша складність у дослідженнях описаної тут моделі полягає в громіздкості виразів її правих частин. Слід відмітити, що приведення виразу для  $Tf_{(\pi,\pi)}^6(p_k, \lambda_1, \lambda_2)$  зайняло б 43 сторінки даної роботи. Однак, завдяки використанню сучасних програмних засобів, зокрема, системи символічної математики Maple [3], в якій проводились всі розрахунки, виконання такої кількості аналітичних перетворень не вимагає від дослідника значних зусиль. З даного приводу цікавими є слова відомого фізика, лауреата Нобелівської премії В.Гінзбурга, який пише [2], що "...использование современной вычислительной техники позволяет анализировать задачи, об исследовании которых раньше можно было только мечтать..."

Результати застосування описаного чисельно-аналітичного підходу є важливими для

чисельних методів дослідження частинних розв'язків моделі, оскільки, представлення еліптичного інтегралу в правих частинах у вигляді ряду на порядки зменшує кількість необхідних для виконання арифметичних операцій на кожному кроці інтегрування забезпечуючи при цьому досягнення необхідної точності розрахунків.

### Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков.- К.: Наукова думка, 1985.- 304 с.
2. Гінзбург В.Л. О науке, о себе и о других.- М.: «ФМЛ», 2001.- 488 с.
3. Дьяконов В.П. Maple 8 в математике, физике и образовании.- М.: СОЛОН-Пресс, 2003.- 656 с.
4. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел.- Киев: Наук. думка, 1981.- 131 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1974.- 832 с.
6. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. В 2 Т. Т.2.- М.: "Высшая школа", 1970.- 409 с.

Надійшла до редколегії 26.02.09

УДК 621.391 : 519.24

Швець О.Ф., к.фіз.-мат.н., Сопронюк О.Л.,  
аспірантка

## Моделі для аналізу чутливості розривних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору

Виписуються рівняння чутливості для динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору.

**Ключові слова:** динамічна система, аналіз чутливості, змінний фазовий простір.

\*E-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Роботу представив проф. Гаращенко Ф.Г.

### Вступ

Дана робота присвячена дослідженням деяких класів задач аналізу чутливості у системах зі змінною вимірністю фазового простору. Проблеми чутливості виникають у зв'язку з необхідністю забезпечення нормального функціонування об'єкта на реальних режимах, що пов'язано з впливом різного роду факторів технічної природи, зовнішнього середовища та умов експлуатації. Деякі з цих факторів, що несуть основну інформацію про властивості системи, враховуються в її моделі завдяки вектору фазового стану. Яким би повним не був набір цього вектора, завжди реально існує безліч додаткових факторів, що не контролюються, але можуть значно впливати на роботу об'єкта. З іншого боку, у реальних умовах експлуатації завжди виникає розкид значень параметрів від їх номінальних (розрахункових) значень, що в свою чергу зумовлює зміну вектора фазових координат та параметрів (а отже і критерію якості) системи. Якщо практичний розкид змінних стану за величиною буде досить значним, то це може привести взагалі до непрацездатності об'єкту. Таким чином, працездатність реальної системи визначається характером залежності її властивостей від змінювання параметрів, тобто – чутливістю системи. Цілком природно вимагати, щоб система була мало-чутливою (нечутливою) до зміни параметрів. Тому питання чутливості доцільно розглядати ще на етапі проектування, хоча це буде й ускладнювати розв'язання вихідної задачі. Основна увага в роботі зосереджується на моделюванні рівнянь

O.F. Shvets c. pf. - m. n., O.L. Sopronuk  
postgraduate student

## Models for sensitivity analysis of discontinuous dynamical systems with variable-dimension phase space

We write sensitivity equations for dynamical systems of ordinary differential equations with variable-dimension phase space.

**Key words:** dynamical system, sensitivity analysis, variable phase space.

чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору.

### Рівняння руху систем зі змінною вимірністю фазового простору

Нехай рівняння руху об'єкта описується системою диференціальних рівнянь зі змінною структурою

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

де  $x^{(i)T} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$ ,  $f^{(i)}(x^{(i)}, t)$  –  $n_i$ -вимірні вектор-функції, які задовільняють умови теореми існування та єдиності розв'язку.

Моменти  $t_i$ , які визначають зміну одного диференціального рівняння іншим називають моментами перемикання. Припускаємо, що вектор фазового стану в момент  $t_i$  змінює свою структуру згідно з співвідношеннями

$$x^{(i+1)+} = \Phi^{(i)}(x^{(i)-}, t_i), \quad (2)$$

де  $x^{(i+1)+} = x^{(i+1)}(t_i + 0)$ ,  $x^{(i)-} = x^{(i)}(t_i - 0)$ ,  $\Phi^{(i)}$  – вектор-функції розмірності  $n_{i+1}$ , диференційовані за всіма аргументами. Співвідношення (2) називається умовами зміни вимірності фазового простору. Моменти перемикання в загальному випадку знаходяться з умов

$$\psi_i(x^{(i)-}, t_i) = 0, \quad (3)$$

які будемо називати умовами перемикання. Тут  $\psi_i(\cdot)$  – скалярні функції, неперервано диференційовані за своїми аргументами.

Вибираючи індекси  $i$ , можна знайти розривний розв'язок для (1)–(3) з початковими умовами

$$x^{(1)}(t_0 + 0) = x^{(1)}(t_0) = x^{(0)}, \quad (4)$$

де  $x^{(0)}$  – заданий вектор початкових умов розмірності  $n_1$

В реальних ситуаціях зміна одного рівняння іншим описується більш складними співвідношеннями, які можна отримати з попереднього аналізу задачі.

### Загальні рівняння чутливості систем зі змінною вимірювання фазового простору

Припустимо, що рівняння руху (1), умови перемикання (3) і умови зміни вимірювання фазового простору (2) залежать від скалярного параметра  $\alpha$

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (5)$$

$$x^{(i+1)}(t_i + 0) = x^{(i+1)-} = \Phi^{(i)}(x^{(i)-}, t_i, \alpha), \quad (6)$$

$$\psi_i(x^{(i)-}, t_i, \alpha) = 0, \quad (7)$$

а початкові умови теж залежать від  $\alpha$

$$t_0 = t_0(\alpha), \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)-}(t_0) = x^{(1)}(t_0, \alpha) = x^{(1,0)}(\alpha). \quad (8)$$

Також припустимо, що система додаткових співвідношень така, що для будь-яких  $\alpha$  з деякої множини можна однозначно побудувати розв'язки на інтервалі  $t_0 \leq t < \bar{t}(\alpha)$ . При цьому моменти перемикання також залежать від  $\alpha$ , тобто  $t_i = t_i(\alpha)$ . В результаті можна побудувати множину розв'язків зі змінною вимірювання

$$x^{(i)} = x^{(i)}(t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha) < \bar{t}(\alpha), \quad i=1, 2, \dots \quad (9)$$

**Означення 1.** Функцією чутливості однопараметричного сімейства (9) будемо називати похідну  $u^{(i)}(t, \alpha) = \frac{\partial x^{(i)}(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ , в якій

оператор  $\frac{\partial}{\partial \alpha}$  означає звичайну похідну в точках диференційованості  $x^{(i)}(t, \alpha)$  і не визначену в точках зміни розмірності вектору фазових координат.

Нехай (9) – однопараметричне сімейство розв'язків. Тоді знайдеться  $t_1(\alpha) > t_0(\alpha)$  таке, що для будь-яких  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = f^{(1)}(x^{(1)}, t, \alpha), \quad t_0(\alpha) \leq t < t_1(\alpha). \quad (10)$$

Якщо  $t_0(\alpha)$ ,  $x^{(1,0)}(\alpha)$  – неперервно-диференційовані за  $\alpha$ , а  $f^{(1)}(x, t, \alpha)$  – неперервна за всіма аргументами і неперервно-диференційована за  $x$ ,  $\alpha$ , тоді початковими умовами (8) і системою (10) визначено на цьому інтервалі однопараметричне сімейство розв'язків, для яких існують функції чутливості першого порядку в класичному розумінні

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = A^{(1)}(t)u^{(1)} + B^{(1)}(t), \quad (11)$$

з початковими умовами

$$u^{(1)}(t_0) = u^{(1,0)} = \frac{dx^{(1,0)}(\alpha)}{d\alpha} - \dot{x}^{(1,0)} \frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}. \quad (12)$$

Тут

$$A^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial f^{(1)}(x^{(1)}, t, \alpha)}{\partial x^{(1)}} \right|_{x^{(1)}=x^{(1)}(t, \alpha)},$$

$$B^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial f^{(1)}(x^{(1)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{x^{(1)}=x^{(1)}(t, \alpha)}.$$

По аналогії для  $i$ -ої підсистеми

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha)$$

функція чутливості існує в класичному розумінні і визначається системою рівнянь

$$\frac{du^{(i)}}{dt} = \left. \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial x^{(i)}} \right|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)} \cdot u^{(i)} +$$

$$+ \left. \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)}.$$

Для обчислення функції чутливості необхідно отримати для (13) початкові умови, які даються наступною теоремою.

**Теорема 1.** Нехай функції  $\Phi^{(i)}$ ,  $\psi_i$  – неперервно-диференційовані за всіма аргументами, а  $f^{(i)}$  неперервні за всіма аргументами та неперервно-диференційовані за  $x^{(i)}$ ,  $\alpha$ . Нехай для деякого  $\alpha_0$  ( $\alpha_1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_2$ ) виконується співвідношення

$$\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \neq 0 \quad (14)$$

(тут індекс “ $-T$ ” означає, що всі величини обчислюються при  $t = t_i - 0$ ).

Тоді функція чутливості існує і задовільняє рівняння (13) при початкових умовах (12). При цьому переходити від одного рівняння (13) до іншого відбуваються згідно умов

$$u^{(i+1)+} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} u^{(i)-} + \left[ \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right] \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}, \quad (15)$$

де

$$u^{(i+1)+} = \left. \frac{\partial x^{(i+1)}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{t=t_{i+1}}, \quad (16)$$

$$\frac{dt_1}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} u^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t}}. \quad (17)$$

**Доведення.** На інтервалі  $t_0 < t < t_1$ , функція  $u^{(i)}(t, \alpha)$  існує і являється розв'язком задачі Коши (11), (12).

На  $(t_1, t_2)$  розв'язок задовільняє диференціальне рівняння

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = f^{(2)}(x^{(2)}, t, \alpha), \quad t > t_1(\alpha) \quad (18)$$

з умовами скачка

$$x^{(2)}(t_1 + 0) = x^{(2)+} = \Phi^{(i)}(x^{(i)-}, t_1, \alpha). \quad (19)$$

При  $t \in (t_1, t_2)$  існує функція чутливості

$$\begin{aligned} \frac{du^{(2)}}{dt} &= \left. \frac{\partial f^{(2)}(x^{(2)}, t, \alpha)}{\partial x^{(2)}} \right|_{x^{(2)}=x^{(2)}(t, \alpha)} \cdot u^{(2)} + \\ &+ \left. \frac{\partial f^{(2)}(x^{(2)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{x^{(2)}=x^{(2)}(t, \alpha)} \end{aligned} \quad (20)$$

з початковими умовами

$$u^{(2)}(t_1 + 0) = u^{(2)+} = \frac{dx^{(2)+}}{d\alpha} - f^{(2)}(x^{(2)+}, t_1, \alpha) \cdot \frac{dt_1}{d\alpha}. \quad (21)$$

Зі співвідношення (19) отримаємо

$$\frac{dx^{(2)+}}{d\alpha} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} \frac{dx^{(i)-}}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial t} \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}. \quad (22)$$

Оскільки  $x^{(i)-} = x(t_1(\alpha), \alpha)$  (тут  $x(\cdot)$  – загальний розв'язок), то

$$\frac{dx^{(i)-}}{d\alpha} = f^{(i)}(x^{(i)-}, t_1, \alpha) \cdot \frac{dt_1}{d\alpha} + u^{(i)-}(t_1, \alpha). \quad (23)$$

Для визначення  $\frac{dt_1}{d\alpha}$  продиференціюємо по  $\alpha$  вираз  $\psi_1(x^{(i)-}, t_1, \alpha) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1^{-T}}{\partial x^{(i)}} \left( f^{(i)-} \frac{dt_1}{d\alpha} + u^{(i)-} \right) + \\ + \frac{\partial \psi_1^-}{\partial t} \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \psi_1^-}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Враховуючи (14) при  $i = 1$  з (24) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial \psi_1^{-T}}{\partial x^{(i)}} u^{(i)-} + \frac{\partial \psi_1^-}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_1^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_1^-}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Підставляючи (25), (23), (22) в (21) обчислимо початкові умови для функції чутливості системи (20)

$$\begin{aligned} u^{(2)+} &= \frac{\partial \Phi^{(1)-}}{\partial x^{(1)}} u^{(1)-} + \\ &+ \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)-}}{\partial x^{(1)}} f^{(1)-} - f^{(2)+} \right] \cdot \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(1)-}}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (26)$$

що еквівалентно (15) при  $i = 1$ .

По аналогії проводиться доведення для будь-якого  $i$ , що й доводить сформульовану теорему.

Зупинимось на властивостях отриманих співвідношень.

1). Підставимо (17) в (15) і запишемо скачки для функцій чутливості в такій конструктивній формі

$$u^{(i)+} = P^{(i)} u^{(i)-} + Q^{(i)}, \quad (27)$$

де матриця  $P^{(i)}$  та вектор  $Q^{(i)}$  розмірностей  $n_{i+1} \times n_i$  та  $n_{i+1}$  обчислюються за формулами

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} -$$

$$-\frac{\left( \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \left( \frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T \right)^T \left( \frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T}{\left[ \left( \frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t} \right]} \quad (28)$$

$$Q^{(i)} = -\frac{\left( \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \left( \frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha} \right)^T \right)^T \left( \frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha} \right)^T}{\left[ \left( \frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t} \right]} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}. \quad (29)$$

2). Зрозуміло, що співвідношення залишається такими ж, якщо система рівнянь (6)

має один і той же порядок для будь-яких  $i$ . При

цьому  $\frac{\partial \Phi^{(i)}_-}{\partial x^{(i)}}$  будуть квадратними матрицями.

3). Перерахунок скачків в точках перемикання (15) або (27) являється лінійним відносно функцій чутливості.

4). Якщо  $t_i$  фіксовано, то  $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$  та з (15)

$$u^{(i+1)+} = \frac{\partial \Phi^{(i)}_-}{\partial x^{(i)}} u^{(i)-} + \frac{\partial \Phi^{(i)}_-}{\partial \alpha}, \quad (30)$$

тобто

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)}_-}{\partial x^{(i)}}, \quad Q^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)}_-}{\partial \alpha}.$$

Це говорить про те, що формулі для обчислення функцій чутливості отримані досить загальні. З них можна отримати різні частинні випадки.

#### Випадок неперервних розв'язків

Приведені формулі спрощуються, якщо розглянути

$$n_1 = n_2 = \dots = n_N = n, \quad x^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(N)} = x,$$

$$u(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha},$$

а розв'язок системи (5) є неперервний. В цьому випадку умови скачка (6) мають вигляд  $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$ . Тоді

$$\frac{\partial \Phi^{(i)}_-}{\partial x} = E, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)}_+}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)}_+}{\partial t} = 0. \quad (31)$$

З формулі (15) отримаємо

$$u(t_i + 0) - u(t_i - 0) = -\Delta f^{(i)} \frac{dt_i}{d\alpha}, \quad (32)$$

де  $\Delta f^{(i)} = f^{(i+1)}(x(t_i), t_i, \alpha) - f^{(i)}(x(t_i), t_i, \alpha)$  – величина розриву правої частини в точці  $t_i$ .

Звідси

$$P^{(i)} = \frac{1}{\dot{\psi}_i} \Delta f^{(i)} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T + E, \quad (33)$$

$$Q^{(i)} = \frac{1}{\dot{\psi}_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}.$$

В неперервному випадку разом з (21) можна використовувати інші співвідношення, які важливі для прикладних задач. Наприклад, при  $x(t_i - 0) = x(t_i + 0) = x^{(i)}$  маємо

$$\frac{dx^{(i)-}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t_i, \alpha), \quad (34)$$

$$\frac{dx^{(i)+}}{dt} = f^{(i+1)}(x^{(i)}, t_i, \alpha)$$

та умови перемикання

$$\psi_1(x(t_i + 0, \alpha), t_i, \alpha) = \psi_1(x(t_i - 0, \alpha), t_i, \alpha) = 0. \quad (35)$$

Тоді,

$$\frac{d\psi_1}{dt_i} = \frac{\partial \psi_1^T}{\partial x} \frac{dx^{(i)+}}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t_i} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{dx^{(i)-}}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t_i},$$

отримаємо два вирази

$$\begin{aligned} \frac{dt_i}{d\alpha} &= -\frac{\frac{\partial \psi_1^T}{\partial x} u^{(i)-} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_1^T}{\partial x} f^{(i)+} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t}} = \\ &= -\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x} u^{(i)+} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial x} f^{(i)+} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (36)$$

При використанні другого співвідношення з (36) отримаємо

$$u^{(i)-} = R^{(i)} u^{(i)+} + S^{(i)}, \quad (37)$$

де

$$R^{(i)} = E - \frac{1}{\dot{\psi}_i} \Delta f^{(i)} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T, \quad S^{(i)} = \frac{1}{\dot{\psi}_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}. \quad (38)$$

Відмітимо деякі особливості обчислення функцій чутливості на основі отриманих формул:

1). Функції чутливості в момент перемикання  $t_i$  залишаються неперервними в

двох випадках, коли  $\Delta f^{(i)} = 0$ , тобто права частина системи (5) є неперервною при  $t = t_i$ , та

при  $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$ , тобто моменти перемикання не залежать від  $\alpha$ ;

2). Розглянемо загальні властивості матриць  $P^{(i)}$ ,  $R^{(i)}$ . Відмітимо, якщо  $a$ ,  $b$  – вектор-стовпці, то

$$\det(E + ab^T) = 1 + b^T a. \quad (39)$$

Якщо, крім цього,  $1 + b^T a \neq 0$ , то

$$(E + ab^T)^{-1} = E - \frac{ab^T}{1 + b^T a}. \quad (40)$$

Формули (39), (40) перевіряються безпосередніми обчислennями. Тоді

$$\det P^{(i)} = 1 + \frac{1}{\psi_i^-} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T \Delta f^{(i)} = \quad (41)$$

$$= 1 + \frac{1}{\psi_i^-} (\psi_i^+ - \psi_i^-) = \frac{\psi_i^+}{\psi_i^-},$$

$$\det R^{(i)} = \frac{\psi_i^-}{\psi_i^+}. \quad (42)$$

Звідси випливає, якщо  $\psi_i^- = 0$ , то матриця  $R^{(i)}$  – вироджена і з умови (37) не можна безпосередньо виразити  $u^{(i)+}$ . Крім цього, з (37), (38) та (40) при умовах  $\psi_i^+ \neq 0$ ,  $\psi_i^- \neq 0$  випливає

$$P^{(i)} = (R^{(i)})^{-1}; \quad (43)$$

3). Для неперервного випадку  $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$ . Отже

$$\begin{aligned} \frac{dx(t_i(\alpha), \alpha)}{d\alpha} &= u^{(i)-} + f^{(i)-} \frac{dt_i}{d\alpha} = \\ &= u^{(i)+} + f^{(i)+} \frac{dt_i}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (44)$$

### Висновки

В роботі розглянуті математичні моделі у формі систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Виписані моделі для обчислення функцій чутливості. Такі співвідношення також являються системами звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Наголошується на достатньо високій універсальноті побудованих моделей.

### Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Аналіз та оцінка параметрических систем. – К.: ІСДО, 1995. – 140 с.
3. Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости. Проблемы управления и информатики, 1996, №1-2, С.145–161.
4. Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Исследование задач теории чувствительности

методами практической устойчивости. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1989, вып.6, С.17-25.

5. Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Исследование задач расчета допусков на параметры с помощью методов практической устойчивости. Автоматика и телемеханика, 1993, N4, С. 43–55.

6. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметрических систем. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 115 с.

7. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чутливость систем управления. – М.: Наука, 1981. – 484с.

8. Сопронюк Є.Ф. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженнями структур. – Чернівці: Рута, 1995. – 155с.

Надійшла до редколегії 26.02.09

Прийнята до рецензування 27.02.09

Рецензовано 27.03.09

Затверджено 27.03.09

Прийнято до друкарні 27.03.09

Друкарня 27.03.09

Видано 27.03.09

ІД «Університетська друкарня»

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002, Київ, вул. Володимирська, 60

Телефон: (044) 234-44-44, факс: (044) 234-44-44

Інтернет-адреса: [www.univ.kiev.ua](http://www.univ.kiev.ua)

Електронна пошта: [univ@univ.kiev.ua](mailto:univ@univ.kiev.ua)

ІД «Університетська друкарня»

105002



## Проблема

Розглядаємо набір навчальних спектральних кривих  $S_g(\lambda)$ , де  $S$  – коефіцієнт яскравості,  $\lambda$  – довжина хвилі, а  $g = 1, \dots, n$  – кількість спектральних кривих. Ці криві отримано в цифровому вигляді на спектрофотометрі СФ-10 [6]. Реєструюча система була модифікована з метою отримання спектрів у цифровому вигляді. Діапазон реєстрації – 400-750 нм, крок відбору інформації 1 нм з часовим інтервалом  $\Delta t = 1,9057$  с. Шматочки листків, спектри відбиття  $S_g(\lambda)$  яких були зняті, обробляли 80% розчином ацетону для екстракції хлорофілу, вміст якого визначали за схемою Арнона [16].

Розглядається задача побудови динамічної системи з використанням  $S_g(\lambda)$  для класифікації спектральних кривих відбиття на  $K$  класів в залежності від концентрації хлорофілу (рис. 1). Її розв'язок базується на динамічному підході [17-19] і включає наступні етапи: 1) виділення інформативних ознак спектральної кривої; 2) побудова алгоритму класифікації в просторі інформативних ознак; 3) валідація алгоритму з використанням наземних та аерекосмічних даних.

## Інформативні ознаки

Відомо, що існує ряд індексів (вегетаційні індекси) [12], які виявляли високу кореляцію з вмістом в листках тих чи інших біохімічних компонентів.

Пізніше було запропоновано підхід, що базується на одержані інформації за кількісними показниками форми спектру [13-14]. Цей підхід ґрунтуються на використанні співвідношення інтенсивності максимумів в графіку першої похідної спектру відбиття в області червоного краю.

В ході досліджень було розроблено альтернативний метод виявлення інформативних ознак спектральної кривої – метод головних компонент [6]. Цей метод включає в себе три етапи виконання: 1) знаходження некорельованих між собою компонент спектральної кривої; 2) розстановку знайдених ортогональних компонент в міру їх значимості (знаходження головних компонент); 3) та відкидання тих головних компонент, які є найменш інформативними.

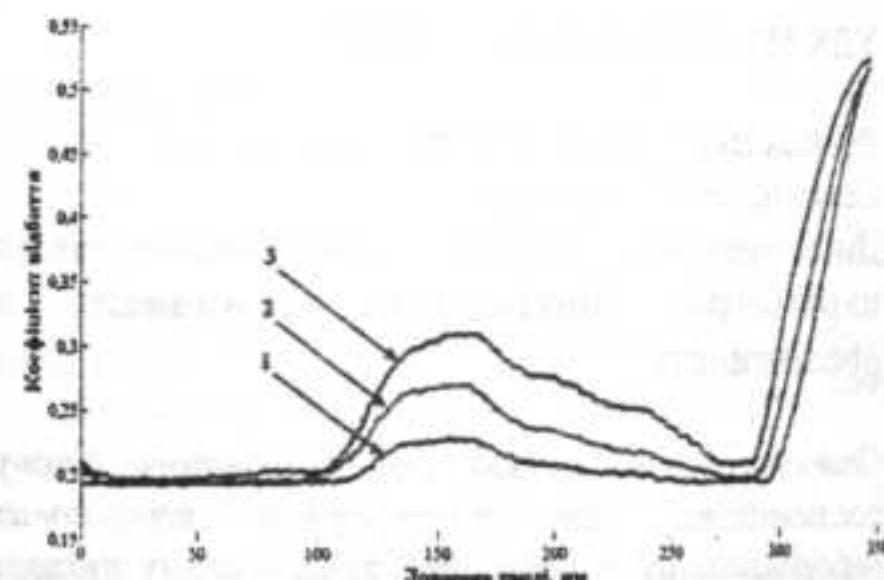


Рис.1 Графіки кривих листків рослин з різною концентрацією хлорофілу (3 - низький; 2 - середній; 1 – високий).

В нашому підході процедура отримання інформативних ознак здійснювалась за допомогою алгоритму швидкого Фур'є перетворення з подальшим використанням методу незалежного компонентного аналізу [20-23]:

$$X(k) = \sum_{j=1}^N S_g(j) w_N^{(j-1)k-1}, \quad (1)$$

де  $w_N = e^{(-2\pi)/N}$ , а  $S_g(j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  значення коефіцієнту яскравості в  $j$ -й момент часу.

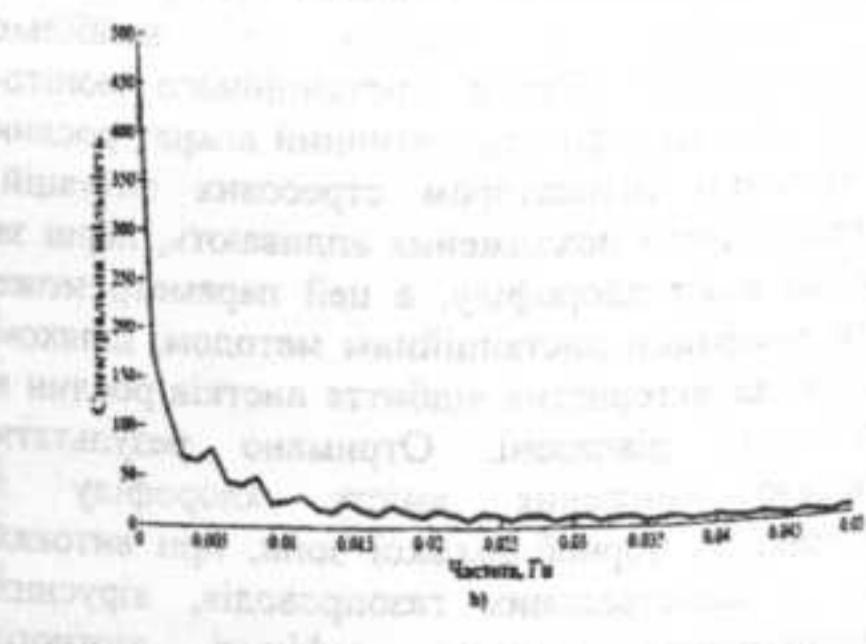
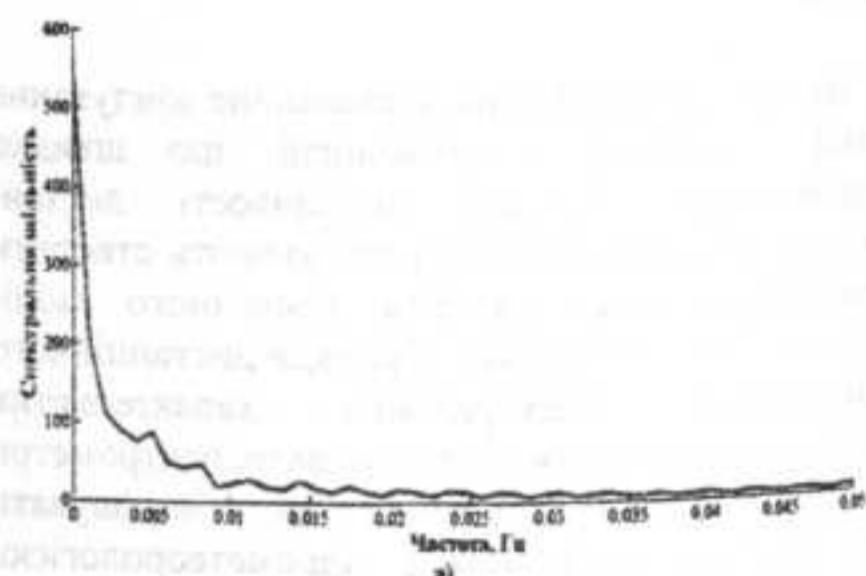




Рис. 2 Спектр Фур'є трьох спектральних кривих з різним вмістом хлорофілу (а) низький; б) середній; с) високий).

Для виділення інформативних ознак із спектру Фур'є (рис. 2) представимо його у вигляді вектора  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , де  $m$  – кількість коефіцієнтів Фур'є спектру. Наша задача полягає у перетворенні вектора  $\mathbf{x}$  у вектор  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_k]^T$ , компоненти якого є статистично незалежними між собою. Припустимо що, існує певна матриця перетворення розмірністю  $m \times k$ , яка задовільняє умові:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (2)$$

з (2) випливає, що

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}, \quad (3)$$

де  $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$ .

Тестування цього підходу здійснювалось на прикладі 17 спектральних кривих відбиття з різним вмістом хлорофілу. Встановлено, що число незалежних компонент дорівнює трем.

## Метод

Представимо інформативні ознаки Фур'є спектру кривої у вигляді вектора  $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)]^T$ , який ми будемо називати вектором стану динамічної системи, де  $N$  – розмірність фазового простору. Будемо розглядати процедуру класифікації як еволюцію динамічної системи під впливом зовнішньої сили.

Побудуємо динамічну систему з багатьма атракторами (під атрактором розуміємо стійку точку системи), кожен з яких відповідає одному з класів. В загальному випадку еволюція системи описується рівнянням виду:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha) + \mathbf{F}(t), \quad (4)$$

де  $\mathbf{N}$  – нелінійна функція,  $\alpha$  – керуючий параметр,  $\mathbf{F}$  – флуктууюча сила.

Нехай наша динамічна система може перебувати в  $M$  станах ( $\epsilon M$  атракторів), кожен з яких характеризується вектором стану  $\mathbf{v}^{(k)}$ . В нашему випадку вектор  $\mathbf{v}^{(k)}$  є вектором інформативних ознак Фур'є спектру типової спектральної кривої класу  $k$ . Ці вектори задають  $M$  класів  $k = 1, \dots, M$ . Кожному вектору  $\mathbf{v}^{(k)}$  поставимо у відповідність значення концентрації хлорофілу (висока, середня, низька).

$$\mathbf{v}^{(k)} = \begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \dots \\ v_N^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Після того як нами задано вектори  $\mathbf{v}^{(k)}$ , на вхід динамічної системи подаємо вектор  $\mathbf{q}(0)$ .

В ідеальних умовах, коли відоме значення вектору стану (інформативні ознаки Фур'є спектру кривої) в початковий момент часу, а саме, задано керуючі параметри і немає флуктууючих сил, майбутнє вектора є однозначно визначенім. Зазвичай, обробка даних проходить в умовах невизначеності з наявністю шумів, тому вхідний вектор може точно не попадати в певний атрактор, але буде близьким до одного з них. Необхідно знайти рівняння, які б описували еволюцію вектора  $\mathbf{q}(t)$  з початкового стану  $\mathbf{q}(0)$  в кінцевий стан  $\mathbf{q}(f)$ , який відповідає одному з векторів  $\mathbf{v}^{(k)}$ . Ці рівняння будуть побудовані з урахуванням того, щоб вектор  $\mathbf{v}^{(k)}$  був тим самим вектором, до якого підходить вектор  $\mathbf{q}(0)$  найближче, тобто величина  $(\mathbf{v}^{(k)*} \cdot \mathbf{q}(0)) / (\|\mathbf{v}^{(k)}\| \cdot \|\mathbf{q}(0)\|)$  мала найменше значення. Припускаємо, що

$$(\mathbf{v}^{(k)*} \cdot \mathbf{v}^{(l)}) = \delta_{kl}.$$

Дана процедура має два позитивних моменти. Перший полягає в тому, що навіть коли початковий вектор ознак є неповним, то він може бути доповнений, тобто система працює як асоціативна пам'ять. Другий полягає в тому, що вектор  $\mathbf{v}^{(k)}$ , як представник класу, містить інформацію двох типів (наприклад, незалежні компоненти Фур'є спектру кривої + концентрацію хлорофілу), тому, маючи на вході лише Фур'є спектр  $\mathbf{q}(0)$ , в результаті еволюції системи отримаємо вектор  $\mathbf{q}(t)$ , який містить інформацію про спектральну криву та концентрацію хлорофілу.

Представимо рівняння (4) у наступному вигляді:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\text{grad}_{\mathbf{q}} V + \mathbf{F}(t), \quad (6)$$

де  $\mathbf{V}$  – потенціал, який визначається наступним чином:

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2, \quad (7)$$

де

$$\mathbf{V}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{q}^* \sum_k \lambda \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(k)*} \mathbf{q}, \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_1 = \sum_{k \neq k'} C_{kk'} (\mathbf{v}^{(k)*} \mathbf{q})^2 (\mathbf{v}^{(k')*} \mathbf{q})^2, \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_2 = C \mathbf{q}^4, \quad (10)$$

$$\lambda > 0, \quad C_{kk'} > 0.$$

Потенціал  $\mathbf{V}_0$  забезпечує затягування вектора  $\mathbf{q}$  в підпростір атракторів. Згідно теорії нерівномірних фазових переходів наш фазовий простір – простір параметрів порядку. Потенціал  $\mathbf{V}_1$  відповідає за дискримінацію вектора  $\mathbf{q}$  в фазовому просторі. В цьому можна переконатися використавши властивість, що мінімум функції  $\mathbf{V}_1$  вибирається з умови

$$\mathbf{V}_{1,\min} = 0 \text{ при } \mathbf{q} \parallel \mathbf{v}^{(k)}, \quad (11)$$

тобто коли вектор  $\mathbf{q}(t)$  стає паралельним до одного з векторів  $\mathbf{v}^{(k)}$ . Потенціал  $\mathbf{V}_2$  забезпечує ступінь насиченості, тобто величина  $|\mathbf{q}|$  в кінці кінців притягується до відповідного атрактора. Константа  $\lambda$  в рівнянні (8) відіграє роль керуючого параметру:  $\lambda < 0$  визначає область нижче порогу переходу від одного атрактору до іншого,  $\lambda > 0$  – область вище цього порогу.

З підставимо вектор  $\mathbf{q}$  з одним із атракторів. Щоб спростити цю операцію, ми додаємо в рівняння (6) флюктууючу силу  $\mathbf{F}$ . Припустимо, що вона має наступні властивості:

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0, \quad (12)$$

$$\langle \mathbf{F}_i(t) \mathbf{F}_j(t') \rangle = Q \delta_{ij} \delta(t-t'). \quad (13)$$

Дана сила  $\mathbf{F}$  задає напрям руху вхідному вектору ознак в напрямку до одного з атракторів (рис.3).

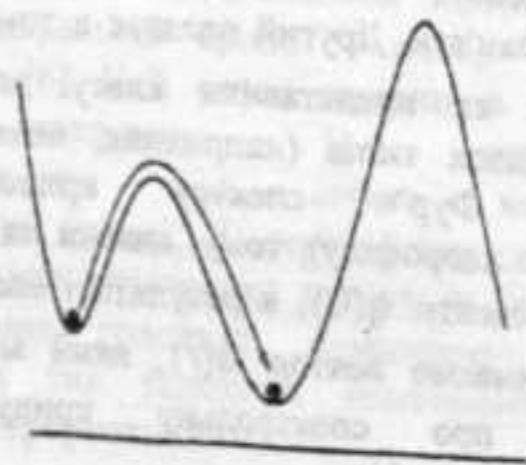


Рис.3 Наглядний вигляд переходу системи (4) з одного атрактора в інший.

## Алгоритм та чисельні результати

В основі алгоритму класифікації лежить наступна схема (рис. 4):

1) Отримання спектральних даних;

2) Фільтрація;

3) Визначення інформативних ознак;

- Вибір методу формування інформативних ознак;
- Отримання набору ознак;
- Відбір найбільш інформативних ознак.

4) Класифікація даних.

Важливу роль у цій схемі відіграє блок "Блок формування класів". В цьому блокі знаходитьсь набір векторів, які формують класи (атрактори) системи класифікації. За допомогою блока "Візуальне керування" користувач має змогу вибрати принцип отримання набору інформативних ознак (наприклад, інформативні компоненти Фур'є спектру, екстремуми першої похідної, головні компоненти, незалежні компоненти і т.п.), а також задати кількість класів на які здійснюватиметься класифікація. Після формулювання усіх вимог користувачем, алгоритм автоматично здійснює класифікацію набору експериментальних даних і записує результат в блок "База даних".

Для розробки алгоритму використовували 17 спектральних кривих відбиття листків озимої пшеници з різним вмістом хлорофілу. Потім отримали незалежні компоненти Фур'є спектру, та екстремуми першої похідної в близько інфрачервоному районі відповідних спектральних кривих [24]. Після цього було відібрано три вектора ознак, які є типовими представниками свого класу. Перевірку якості класифікації проводилась за допомогою решти даних.

### Приклад

Для візуалізації результатів роботи запропонованого методу моделювалась динамічна система, яка задається двома атракторами (класами) – векторами стану  $\mathbf{v}^{(1)} = [1,0]$  та  $\mathbf{v}^{(2)} = [0,1]$ . На рис. 5 представлено зображення потенціалу  $\mathbf{V}$ .

З малюнку видно, що динамічна система з початковою умовою  $\mathbf{q}(0) = [0.7, 0.1]$  попадає в зону при тяжіння атрактора, який відповідає вектору  $\mathbf{v}^{(1)} = [1,0]$ .

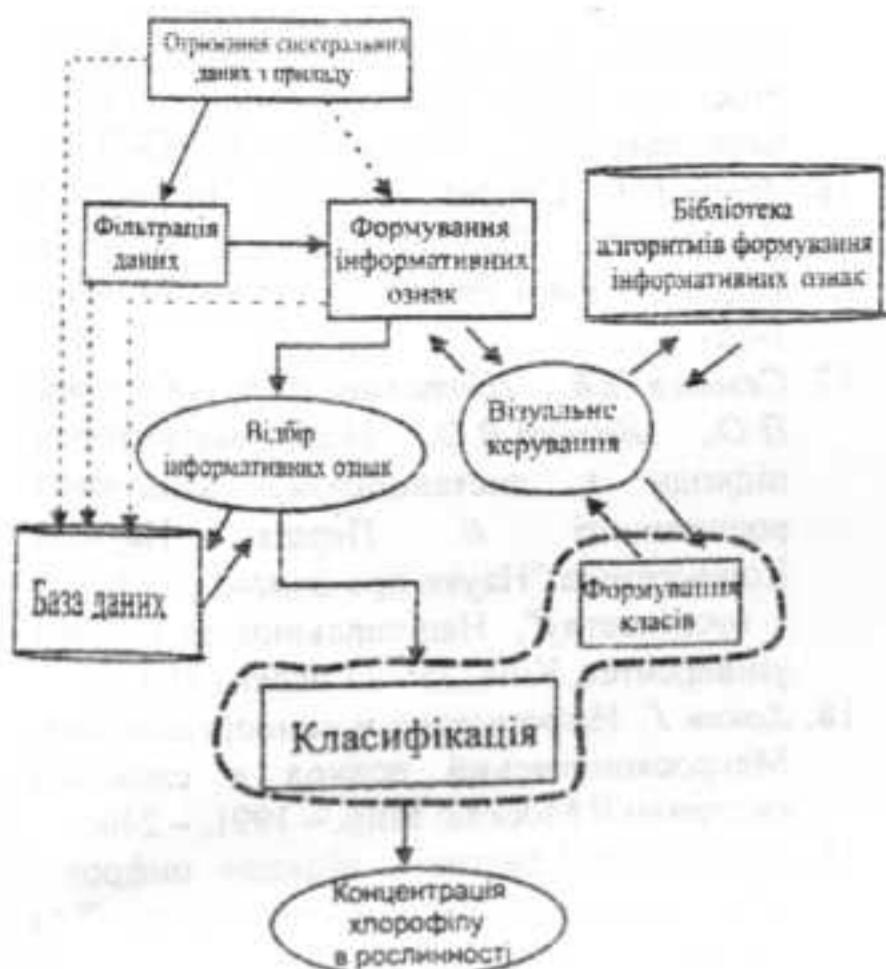
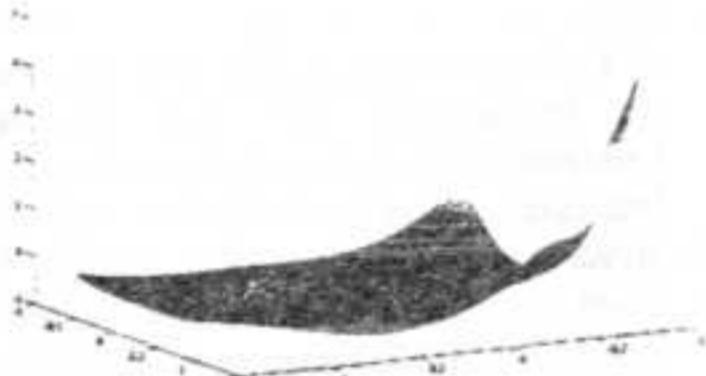
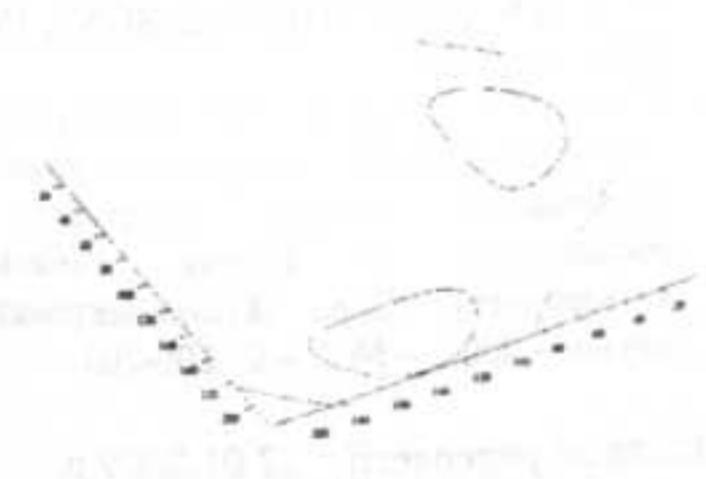


Рис. 4 Функціональна схема алгоритму класифікації.



a)



b)

Рис.5 Вигляд потенціалу  $V$ , який залежить від векторів векторами  $v^{(1)} = [1,0]$  та  $v^{(2)} = [0,1]$  (а) просторовий вигляд потенціалу; б) контурний вигляд).

## Висновки

Показана можливість побудови алгоритмів визначення концентрації хлорофілу на основі динамічного підходу та нових інформативних ознак. Запропоновано алгоритм побудови динамічної системи з багатьма стійкими точками для класифікації спектральних даних на декілька класів. Характеристики цих точок динамічної системи визначаються найбільш інформативними ознаками Фур'є спектру типових кривих відбиття, отриманих за допомогою алгоритму незалежного компонентного аналізу. Проведена класифікація спектральних кривих відбиття листків озимої пшениці на декілька класів. Подальші дослідження будуть спрямовані на використання адаптивних підходів цифрової обробки даних та розробку алгоритмів автоматичного гіперспектрального моніторингу рослинності.

## Список використаних джерел

- Перминов А.Н. Концепция развития российской космической системы дистанционного зондирования Земли на период до 2025 года. – Москва, ФКАР.– 2006 г. – 73с.
- López-Peña F. and Duro R.J. A Hyperspectral Based Multisensor System for Marine Oil Spill Detection, Analysis and Tracking // Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems. – Springer Berlin / Heidelberg. – 2004. – Volume 3213. – P. 669–676.
- Remote trace gas detection and analysis. United States Patent 6531701. March 11, 2003. <http://www.patentstorm.us/patents/6531701-description>.
- Rawlins W.T., Lawrence W.G., Marinelli W.J., Allen M.G. Hyperspectral Imaging of Flames using a Spectrally Scanning Fabry-Perot Filter // Sixth International Microgravity Combustion Workshop. – NASA Glenn Research Center. – Cleveland, OH. – CP-2001-21026. – May 2001. – P. 57–60.
- Donets V., Khandriga P., Semeniv O., Yatsenko V. A system approach to remote sensing of vegetation states using field spectrometer and signal processing tool // SPO2006, 26-29 October 2006. – Kyiv. – P.269.
- Яценко В.О., Кочубей С.М., Хандрига П.А., Донец В.В., Семенів О.В. Новий метод дистанціонного оцінювання вмісту хлорофілу в рослинності

- и его программно-аппаратная реализация // Космическая наука и технология. – 2007. – 13. №3. – Р. 35-45.
7. David C., Tyler A.N. Detecting contamination-induced tree stress within the Chernobyl exclusion zone // Remote Sens. Environ. – 2003. – 85. – P.30-38.
8. Smith K.L., Steven M.D., Coll J.J. Use of hyper-spectral derivative ratios in the red-edge region to identify plant stress responses to gas leaks // Remote Sens. Environ. – 2004. – 92. – P. 207-217.
9. Polischuk V.P., Shadchina T.M., Kompanetz T.I., Budzanivskaya I.G., Boyko A.L., Sozinov A.A. Changes in reflectance spectrum characteristics of Nicotiana debney plant under the influence of viral infection. // Arh. Phytopath. Pflanz. – 1997. – 31. P. 115-119.
10. Bowyer P., Danson F.M. Sensitivity of spectral reflectance to variation in live fuel moisture content at leaf and canopy level. // Remote Sens. Environ. – 2004. – 92. – P. 297-308.
11. Кочубей С.М. Сравнение информативных возможностей многозональной съемки и спектроскопии высокой разрешающей способности при дистанционном зондировании растительного покрова // Космическая наука и технология. 1999. Т.5, №2/3. – С. 41-48.
12. Лялько В.І., Попов М.О. Багатоспектральні методи дистанційного зондування землі в задачах природокористування. – Київ: "Наукова думка", 2006. – 360с.
13. Кочубей С.М., Кобець Н.И., Шадчина Т.М. Спектральные свойства растений как основа методов дистанционной диагностики. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с.
14. Кочубей С.М. Оценка основных параметров сельскохозяйственных посевов по спектру отражения растительности в оптическом диапазоне // Космическая наука и технология. – 2003. – №9. – С. 185-190.
15. Kochubey S.M., Pardalos P.M., Yatsenko V.A. Method and the device for remote sensing of vegetation // Remote Sensing for Agriculture, Ecosystems, and Hydrology IV, Proc. of SPIE, Crete(Greece). – 22-25 September 2002. – Vol. 4879. – P. 243-251.
16. Arnon D.I. Copper enzymes in isolated chloroplasts. Polyphenoloxidase in Beta vulgaris // Plant Physiol. – 1949. – 24. – P. – 1-15.
17. Семенів О.В., Шамохіна Ю.В., Хандрига П.О., Яценко В.О. Нові математичні підходи в дистанційному зондуванні рослинності // Перша Наукова Конференція "Науки про Землю та Космос - суспільству", Національний авіаційний університет, Київ, 25 - 27 червня 2007 р.
18. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам // Москва: Мир. – 1991. – 240с.
19. Швець О.Ф. Адаптивні підходи цифрової обробки даних методами псевдоінверсії та структурно-параметричної оптимізації // Автореферат к.ф.-м.н., Київ 2006.
20. Duhamel P. and Vetterli M. Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art // Signal Processing. –Vol. 19. – April 1990. – P. 259-299.
21. Frigo M. and Johnson S. G. FFTW: An Adaptive Software Architecture for the FFT // Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. –Vol. 3. –1998. – P. 1381-1384.
22. Hyvärinen Aapo. Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis // IEEE Trans. on Neural Networks. – 1999. – 10(3). – P. 626-634.
23. Hyvärinen A., Karhunen J., Oja E. Independent Component Analysis. – New York, NY: JOHN WILEY & SONS, INC, – 2001. – pp. 481.
24. Яценко В.О., Семенів О.В., Кащіровський О.І. Моделювання спектральних кривих та оцінювання вмісту хлорофілу в рослинності // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 200-203.

Надійшла до редколегії 22.01.2009 р.

# РАДІОФІЗИКА



УДК 621.924.372.853

Бунак С.В., аспірант. Жарких Ю.С., докт. ф.-  
м.н., Лисоченко С.В\*. к.ф.-м.н., Третяк О.В.,  
докт. ф.-м.н., Шкавро А.Г., к.ф.-м.н.

## Віртуальні вимірювання в симулаторах лабораторних робіт з фізики

Розглянуті основні вимоги до віртуальних  
симулаторів лабораторних робіт.  
Запропоновані способи відтворення  
експериментальних даних, що дозволяють  
створити високий ступінь подібності  
віртуальних вимірювань до роботи реального  
обладнання.

**Ключові слова:** дистанційне навчання,  
віртуальні симулатори, віртуальні вимірювання.

E-mail: lys@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

**Вступ.** У сучасному навчальному процесі  
знаходять широке застосування віртуальні  
симулатори (ВС) лабораторних робіт. В якості  
вихідних даних в них використовуються  
результати реальних експериментів і  
моделювання. Це дозволяє урізноманітнити хід  
виконання лабораторної роботи (ЛР) за рахунок  
використання результатів досліджень різних  
зразків, що накопичені у базі даних [3]. Однак  
просте відтворення таких даних не дозволяє  
досягти необхідної подібності роботи ВС до  
реального обладнання, для якого властива  
надійність апаратурних похибок та обмежена  
швидкодія вимірювальних приладів та засобів  
спряження з комп'ютером. Для усунення цього  
недоліку у віртуальному експерименті, необхідно  
модифікувати вихідні дані, шляхом додавання  
випадкової похибки, що залежить від обраного  
віртуального обладнання і режимів його роботи.  
В цьому разі результати експерименту будуть  
відрізнятися за одних і тих же вихідних даних.  
Отримані в такий спосіб «результати  
спостережень» потрібно відобразити поступово,  
програмно вводячи затримки, що відповідають  
часу встановлення режимів експерименту та часу  
вимірювань на реальній установці. Необхідним є  
також екстраполяція вихідних даних і  
моделювання реакцій об'єкту досліджень на  
впливи експериментальних чинників, особливо в  
критичних і аварійних режимах. За умови  
широкого використання діалогових режимів  
спілкування з комп'ютером, це дозволяє

Bunak S.V., post. grad. stud., Zharkikh Yu.S., Doc.  
Sci., Lysochenko S.V., Ph.D., Tretyak O.V., Doc.  
Sci., Shkavro A.G., Ph.D.

## Virtual measurements in simulators of physics laboratory activities

The main requirements of virtual simulators  
laboratory activities have been considered. The  
methods of experimental data developing which  
permits to reach the high level similarity of virtual  
measurements to the real equipment functioning  
was proposed.

**Key words:** distance learning, virtual simulators,  
virtual measurements.

максимально наблизити виконання ЛР до  
реальності, надати можливість вибору варіантів  
виконання роботи і тим самим гуманізувати  
процес навчання [7].

Використання ВС в комп'ютерній підтримці  
навчального процесу можливе студентом як  
самостійно, так і в умовах взаємодії з викладачем  
через систему дистанційного навчання  
(наприклад Learning Space) при виконанні  
тестових завдань [6]. ВС можуть бути частиною  
електронних підручників, методичних  
електронних посібників для підготовки студентів  
до ЛР, а також ілюстративним матеріалом на  
лекціях.

**Алгоритм віртуальних вимірювань**  
Вимірювальні прилади характеризуються  
похибками, що мають адитивну та  
мультиплікативну складові. Значення цих  
складових, залежать від величини вимірюваного  
параметру -  $f_0$ , і діапазону приладу на якому  
здійснюються вимірювання. Такі самі похибки  
притаманні і значенню аргументу  $x$  від якого  
залежить параметр  $f_0$ .

Формування результату спостереження в ВС  
здійснюється за схемою показаною на рис.1.  
Вона включає розрахунки поточного значення  
аргументу  $x$ , відповідного йому значення  $f_0$  і  
результату спостереження  $f(x)$ , що враховує  
похибки вимірювань. Відображення результатів

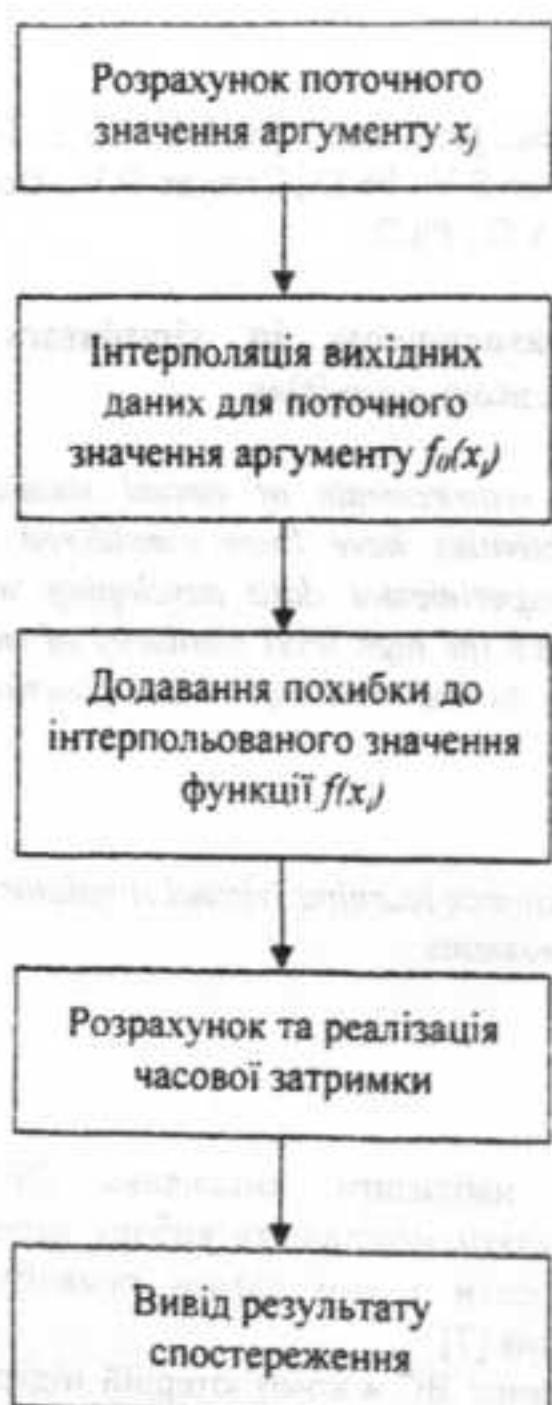


Рис. 1. Схема формування результату спостереження

$f(x_i)$  проводиться з затримками характерними для вибраного на початку роботи обладнання. Особливістю віртуального експерименту є те, що вихідна залежність на основі якої формується результат, містить скінчену кількість значень вимірюваної величини  $f_0$  і лише для цілком певних значень аргументу  $x$ . Тому у ВС, для знаходження результатів спостереження  $f(x_i)$ , що відповідають заданим значенням  $x$ , проводиться інтерполяція даних вихідного файлу та додається значення похибки. Причому, як і в реальному експерименті, величина  $x$  встановлюється рівною значенню найближчому кратному рівню квантування для вибраного приладу. Коли для формування бази даних використовуються результати вимірювань проведених з достатньо малим кроком зміни аргументу  $x$ , в ВС можливе застосування лінійної інтерполяції. В разі виходу значень  $x$  за межі даних, що містилися у вихідному файлі, застосовується екстраполяція, або генерується

повідомлення про помилку. Про спробу поширити діапазон віртуальних вимірювань у область значень  $x$ , що лежить за межами дозволених для обраного приладу, ВС повідомляє одразу, на етапі вводу параметрів експерименту.

Результат віртуального вимірювання формується у вигляді табулюваної функції:

$$f(x) = f_0(x) + \mu(f_0(x)) + add \quad (1)$$

де:  $f_0(x)$  - інтерпольовані вихідні дані.  $\mu(f_0(x))$  - мультиплікативна похибка приладу.  $add$  - адитивна похибка приладу.

Значення  $\mu(f_0(x))$  і  $add$  розраховувались на основі перетворення Бокса-Мюллера, що моделює величини розподілені за нормальним законом [1]:

$$\mu(f_0(x)) = \sigma_\mu(f_0(x)) \cdot \sin(2\pi * \varphi) \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(r)} \quad (2)$$

$$add = \sigma_a \cdot \sin(2\pi * \varphi) \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(r)}, \quad (3)$$

де:  $\varphi$ ,  $r$  незалежні випадкові величини рівномірно розподілені в діапазоні  $(0,1]$ .  $\sigma_\mu$  та  $\sigma_a$  - дисперсія мультиплікативної та адитивної складових похибки приладу. Значення величин  $\sigma_\mu$  та  $\sigma_a$ , для кожного з приладів, застосованих у ВС попередньо визначаються та зберігаються у відповідній базі даних симулатора. Визначення  $\sigma_\mu$  та  $\sigma_a$ , за даними, наведеними у технічній документації до приладів, є достатньо складною математичною задачею, оберненою до задачі знаходження дисперсії при відомому наборі даних і не завжди може бути розв'язана. В цьому випадку, а також у випадку, коли закон розподілу похибок є невідомим, можна використати найпростіший, рівномірний розподіл [2], тоді:

$$\mu(f_0(x)) = error \cdot (1 - 2 \cdot \varphi_0) \cdot f_0(x), \quad (4)$$

$$add = \varepsilon \cdot (1 - 2 \cdot r_0) \quad (5)$$

де:  $error$  - максимальна величина мультиплікативної похибки.  $\varepsilon$  - максимальне значення адитивної похибки.  $\varphi_0$ ,  $r_0$  - незалежні випадкові величини рівномірно розподілені в діапазоні  $[0,1]$ . За величину  $\varepsilon$  і  $error$  приймаються максимальні значення похибок, наведені у паспортних даних.

При усередненні результатів вимірювань для деякого значення аргументу  $x$ , за вибраною кількістю спостережень  $n$  величина

$$f(x_i) = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{j=1}^n f_j(x_i) \right) \quad (6)$$

Тому, для одного й того ж вихідного файлу даних, результати двох віртуальних вимірювань будуть відрізнятися навіть за однакових умов віртуального експерименту (крок зміни аргументу  $x$  та кількість усереднень  $n$ ). При збільшенні  $n$  ця відмінність результатів зменшується і вони наближаються до даних вихідного файлу. При  $n \rightarrow \infty$   $f(x) \rightarrow f_0(x)$  і не залежить від закону розподілу похиби та абсолютних значень  $\varepsilon$  і  $error$ .

### Особливості програмного забезпечення віртуальних симулаторів

За наведеним вище алгоритмом вимірювань був створений ряд ВС циклу лабораторних робіт з фізики напівпровідникових приладів. Програмне забезпечення ВС створювалось на основі керуючих програм автоматизованих лабораторних робіт [4,5]. Це дозволило звести до мінімуму роботу по створенню ВС, забезпечило ідентичність інтерфейсів користувача симулаторів та реальних установок, зберігало можливість обирати і налаштовувати прилади (тепер віртуальні), обирати умови експерименту, а також переходити до підпрограм попередньої обробки результатів експерименту. Інтерфейс користувача симулатора доповнювався засобами для введення інформації про об'єкт дослідження до початку вимірювань.

Відтворення результатів віртуальних вимірювань  $f(x)$  з заданим кроком здійснюється у табличній і графічній формах з затримками, що відповідають реальним інтервалам часу, необхідним для отримання кожного результату спостереження. При цьому враховуються час, необхідний для встановлення режимів експерименту, тривалість вимірювань та швидкодія апаратних засобів спряження. Для контролю отриманих результатів передбачена можливість вимкнення затримок і складових похиби. В цьому випадку віртуальне вимірювання практично зводиться до простого відтворення залежностей, що зберігаються в базі даних.

Програмне забезпечення ВС включає підпрограми попередньої обробки даних. Це дозволяє в інтерактивному режимі підібрати оптимальні умови дослідження. Остаточні дані експерименту зберігаються на жорсткому диску.

### Результати віртуальних вимірювань

Можливості, що надає ВС при проведенні віртуальних вимірювань, розглянемо на прикладі досліджень залежностей ємності  $C$  і провідності  $G$  від прикладеної напруги  $V$  для діодної поверхнево-бар'єрної структури з квантовими точками [5]. Результати таких досліджень при використанні одного й того самого вихідного файлу даних наведені на рис. 2.

Крива 1 на рис. 2(a) відповідає незмінним вихідним даним, а 2 і 3 двом послідовно зробленим віртуальним вимірюванням з однаковими похибками рівними 10% і кроком зміни напруги зміщення  $\Delta V = 0.05$  В. На рис. 2(b) наведені такі самі залежності, що і на рис. 2(a), з тією різницею, що криві 2 і 3 є результатами вимірювань з усередненням по кількості спостережень  $n=10$  і  $n=50$ , відповідно. Як видно з порівняння кривих окремі реалізації  $C-V$  залежності відрізняються одна від одної і не співпадають з вихідною. Зі збільшенням кількості спостережень і застосуванням усереднення результати віртуального експерименту все більше наближаються до вихідної „істинної залежності“. Графіки на рис. 2(c, g) ілюструють вплив кроку зміни аргументу  $\Delta V$  на результати віртуальних вимірювань  $C$  (криві 1 і 1') і  $G$  (криві 2 і 2'). В цьому випадку додавання похибок до вихідних даних не проводилось. Криві 1, 2 і 1', 2' відповідають крокам зміни прикладеної напруги  $\Delta V = 0.2$  В і  $\Delta V = 0.01$  В, відповідно. Для монотонної залежності  $C(V)$ , характер ходу кривих 1 і 1' відрізняється мало. В той же час для залежності  $G(V)$  проведення вимірювань з завищеним значенням  $\Delta V = 0.2$  В призводить до суттєвого спотворення реальної характеристики і втрати інформації про наявність локального максимуму. Подібний розкид результатів спостерігається і при вимірюваннях зроблених з використанням реального зразка.

Таким чином недостатня точність вимірювань, або відсутність необхідної кількості усереднень у віртуальних вимірюваннях, може призводити до наявності таких самих складнощів і похибок у роботі як і у реальних. Так на (рис. 2a, криві 2, 3) відображена ситуація коли величина похиби перевищує зміну значення вимірюваної величини при зміні аргументу на один крок. Наслідком цього буде не монотонність отриманої кривої та поява неіснуючих екстремумів. Це може ускладнити подальшу обробку експериментальних даних і призводити до похибок на наступних етапах, що

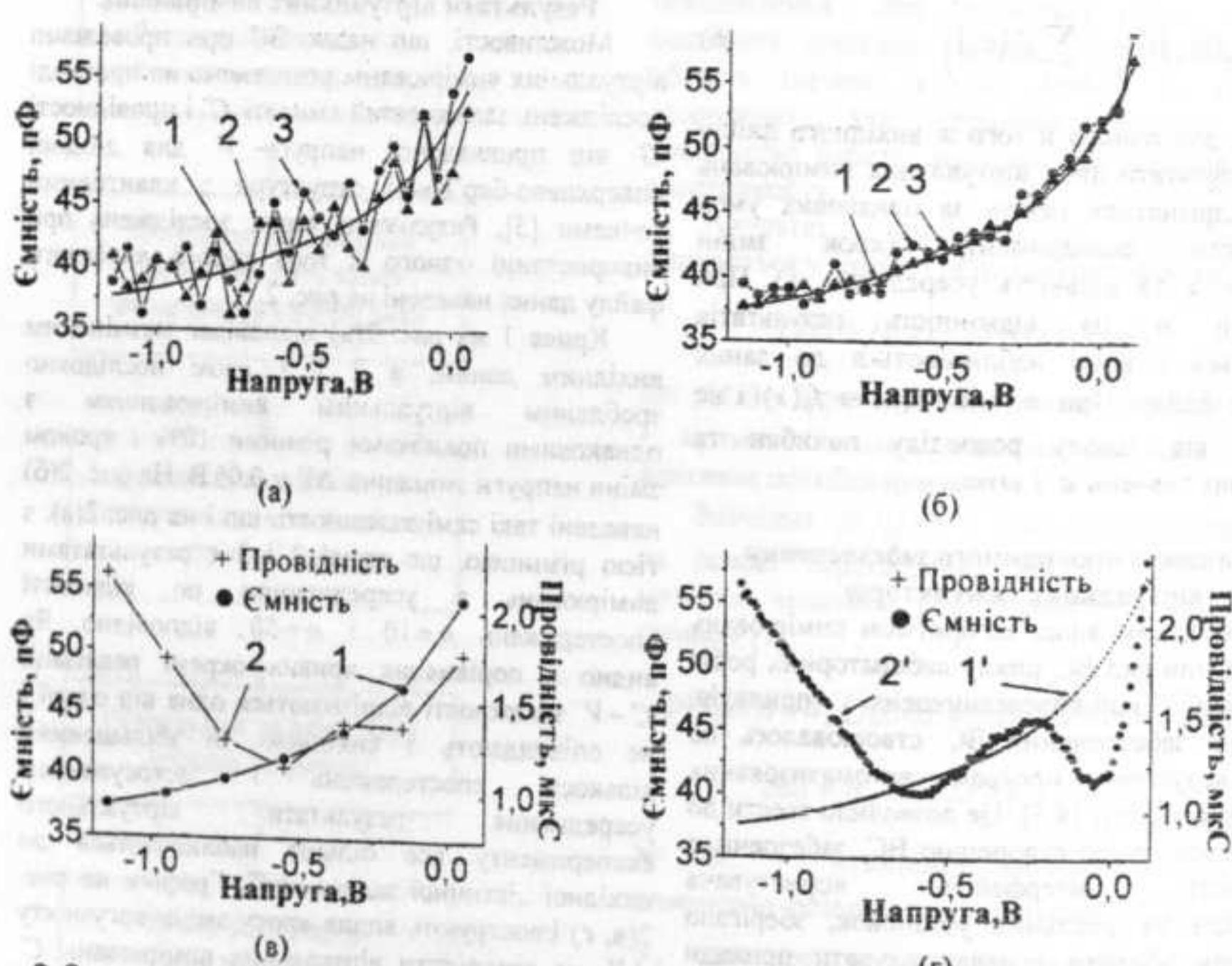


Рис. 2. Залежності ємності  $C$  і провідності  $G$  діодної структури від прикладеної напруги  $V$ . (а): 1 – вихідна залежність, 2 і 3 – реалізації без усереднення з похибкою 10%,  $\Delta V = 0.05$  В; (б): 1 – вихідна залежність, 2 і 3 – реалізації з усередненням при  $n=10$  і  $n=50$ , відповідно, похибка - 10%,  $\Delta V = 0.05$  В; (в) і (г): реалізації без додавання похибки за  $\Delta V = 0.2$  В і  $\Delta V = 0.01$  В, відповідно.

може бути особливо суттєвим при цифровому диференціюванні. Застосування достатньої кількості усереднень  $n$  і підбір кроку  $\Delta V$  дозволяє отримати результат віртуального вимірювання з необхідною точністю. В той же час, збільшення  $n$  і зменшення  $\Delta V$  призводить до відповідного зростання тривалості

віртуального експерименту. Це в свою чергу може неприйнятно збільшити час вимірювань і вимагати внесення відповідних корективів.

Наступним кроком роботи, що виконується після отримання експериментальних даних, найчастіше, є їх математична обробка, що полягає в визначенні характеристик

#### Результати обробки даних віртуальних експериментів

Таблиця 1

№	$\Delta V$ , В	$n$	$N, \text{м}^{-3}$	$\phi_0$ , еВ	$\frac{(N - N_0)}{N_0}$	$\frac{(\phi - \phi_0)}{\phi_0}$
1	0.01	1	$9.8330 \cdot 10^{16}$	0.4782	-0.0167	-0.0436
2	0.01	1	$1.0095 \cdot 10^{17}$	0.5113	0.0095	0.0226
3	0.1	1	$1.0154 \cdot 10^{17}$	0.5177	0.0154	0.0354
5	0.01	50	$9.9830 \cdot 10^{16}$	0.5191	0.0088	0.0382
6	0.01	50	$1.0017 \cdot 10^{17}$	0.498	-0.0017	-0.004
7	0.05	50	$9.9150 \cdot 10^{16}$	0.5031	0.0017	0.0062
8	0.05	50	$9.8859 \cdot 10^{16}$	0.4925	-0.0085	-0.0151
				0.4904	-0.01141	-0.0193

досліджуваного зразка. Для прикладу, в табл. 1 наведені результати розрахунків концентрації домішок  $N$  і висоти бар'єру  $\phi$  для п'яти віртуальних вимірювань  $C-V$  характеристики контакту метал-напівпровідник з доданою похибкою 5%. В якості вихідного файлу використовувалась змодельована ідеальна  $C-V$  характеристика діоду Шоткі з висотою потенціального бар'єру  $\phi_0 = 0.5 \text{ eV}$  і концентрацією домішок  $N_0 = 10^{17} \text{ m}^{-3}$ . Для розрахунків використовувалась одна з підпрограм обробки даних вбудована в симулатор. Як видно з результатів, наведених в табл. 1, отримані значення параметрів відрізняються в межах внесених похибок і наближаються до істинних зі збільшенням  $n$  і зменшенням  $\Delta V$ , що характерно і для реальних досліджень.

### Висновки

Віртуальні вимірювання з врахуванням затримок і похибок приладів дозволяють відтворювати умови характерні для лабораторних досліджень і створювати практично повне відчуття роботи на реальній автоматизованій установці. Зменшення кроку зміни аргументу, та збільшення кількості спостережень при усередненні, дозволяє отримати результат експерименту максимально близький до "істинного", але призводить до значного збільшення тривалості експерименту. ВС дозволяє проводити ретельне дослідження характеристик зразків, оцінити вплив параметрів експерименту на його результат і набути навичок їх оптимального вибору з точки зору співвідношення точність/тривалість. Застосування ВС в комп'ютерній підтримці учебного процесу сприяє покращанню

підготовки студентів до роботи на реальному обладнанні.

### Список використаних джерел

- Гуд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике // 2. 1990.-400с.
- Кукуш В.Д. Электрорадиоизмерения: Учебн. Пособие для вузов.-М.: Радио и связь. 1985. - 368с.
- L. Gomes & J. Garsia-Zubia {Eds}. Advances on remote laboratories and e-learning experiences. - Bilbao. Spain: University of Deusto. 2007.
- Жарких Ю.С., Лисоченко С.В., Третяк О.В., Шкавро А.Г., Бунак С.В., Плахотник А.В., Погорілій В.М. Універсальні вимірювально-керуючі комплекси. // Вестник НТУ „ХПІ”. - 2005. - №35. С. 85-93.
- Бунак С.В., Ільченко В.В., Третяк О.В., Шкавро А.Г. Автоматизированная установка для исследования электрофизических параметров поверхнево бар'єрных наногетероструктур // Вісник Київського університету, серія Фізико-математичні науки, в. № 3. 2007. С. 223 – 227.
- Прибылов Н.Н., Прибылова Е.И., Прицепова С.А. Лабораторный практикум по физике для дистанционного обучения. // Физическое образование в вузах. 9. № 2. 2003. С.108-112.
- Жарких Ю.С., Лисоченко С.В., Третяк О.В., Шкавро А.Г. Гуманітарні аспекти навчання з застосуванням віртуальних симулаторів лабораторних робіт. // Материалы II международной научно-практической конференции „Ключевые аспекты научной деятельности-2007“. 6. - Педагогика. – Днепропетровск: Наука и образование, 2007. С. 7-10.

Надійшла до редколегії 16.02.09

УДК 519.9

Гайдай Ю.О.<sup>\*</sup>, канд. фіз.-мат. наук, доцент,  
Маслюківський Р.М., студент, Сирота А.В.,  
інженер

## Оптичний хвилеводний демультиплексор

Як демультиплексор в волоконно-оптических системах з хвильовим мультиплексуванням пропонується використовувати планарний хвилевід разом з присадкою повного внутрішнього відбиття. Планарний хвилевід відіграє роль дисперсійного елемента, а присадка повного внутрішнього відбиття – селектора оптических каналів. Розраховані параметри планарного хвилевода, які забезпечують максимальне просторове розділення сусідніх інформаційних каналів у мережах з грубим хвильовим мультиплексуванням.

**Ключові слова:** планарний хвилевід, хвильове мультиплексування.

<sup>\*</sup>E-mail: gayday@mail.univ.kiev.ua  
Статтю представив проф. Данилов В.В.

В сучасних волоконно-оптических мережах передачі інформації наряду з традиційною технологією мультиплексування в часі широко застосовуються технології хвильового мультиплексування WDM (Wavelength Division Multiplexing). Такі технології стали можливими завдяки створенню волоконних підсилювачів оптичного випромінювання на основі ербію EDFA (Erbium Doped Fiber Amplifier) [1]. Основний робочий діапазон таких підсилювачів (1525-1585) нм припадає на мінімум поглинання в кварцевому волокні. Саме в цьому діапазоні була вперше застосована технологія щільного хвильового мультиплексування DWDM (Dense Wavelength Division Multiplexing) у первинних волоконно-оптических мережах зв'язку.

Для стандарту різниці сусідніх несучих частот у 50 ГГц (0.4 нм) в зазначеному вище спектральному діапазоні можна розмістити до 100 мультиплексованих у часі каналів. При швидкості передачі 2.5-10 Гбіт/сек по одному каналу, така технологія забезпечує інформаційну ємність одного волокна 250 - 1000 Гбіт/сек. Створення в останні роки оптичного волокна без водяногопіку поглинання на довжині хвилі 1383 нм дало змогу розширити робочий спектральний діапазон у волоконно-оптических мережах зв'язку до (1260-1625) нм і використовувати його для потреб абонентських мереж зв'язку. В таких

Gayday Yu.O., Ph.D, associate professor.  
Maslyukivskiy R.M, student. Syrota A.V, engineer

## Optical waveguide demultiplexer

For channels division in fibre-optical networks with wavelength multiplexing, the planar waveguide together with a prism coupler is offered for using. The planar waveguide fulfills a role of a dispersing unit, and prism coupler is the selector of optical channels. The parameters of the planar waveguide which provide maximal space division of adjacent information channels in networks with coarse wavelength multiplexing are calculated.

**Key Words:** planar waveguide, wavelength multiplexing.

мережах застосовується технологія грубого хвильового мультиплексування CWDM (Coarse Wavelength Division Multiplexing) з різницею між сусідніми несучими 20 нм. Спектральний діапазон CWDM складається з 18 каналів. Технологія CWDM не потребує використання підсилювачів сигналу і працює на відстанях до 75 кілометрів.

Одним із найважливіших пристріїв у мережах з хвильовим мультиплексуванням є демультиплексор. У технології CWDM як демультиплексор використовуються, як правило, багатошарові фільтри на основі тонких плівок [2]. Основним недоліком такого послідовного демультиплексора є значні втрати сигналу в системах з кількістю каналів більше п'яти. CWDM демультиплексори, побудовані на основі брегівських відбиваючих та пропускаючих граток, знаходяться в стадії розробок. [3].

Метою нашої роботи є дослідження можливості використання дисперсійних властивостей хвилеводних мод планарних хвилеводів для створення демультиплексора оптичного мультиплексованого сигналу. Оптичні хвилеводи наразі використовуються в мережах із щільним хвильовим мультиплексуванням, але такі, так звані, "драконові маршрутизатори" є просто інтегрально-оптичними аналогами ешелета Майклсона. У масивах вхідних і вихідних

оптичних хвилеводів, які є основними елементами такого демультиплексора, не використовуються особливості дисперсії хвилеводних мод на різних довжинах хвиль. Для перевірки зазначененої вище ідеї був використаний оптичний планарний хвилевід у вигляді монокристалічної епітаксійної плівки залізо-ітрієвого ферит-гранату ( $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ ), прозорої в діапазоні (1000-5000) нм. Дисперсійне рівняння оптичних TE та TM хвилеводних мод планарного хвилевода має вигляд:

$$k_f h \sqrt{n_f^2 - N_m^2} = \operatorname{arctg} \left\{ \left( \frac{n_f}{n_c} \right)^{2r} \cdot \frac{\sqrt{N_m^2 - n_c^2}}{\sqrt{n_f^2 - N_m^2}} \right\} + \quad (1)$$

$$+ \operatorname{arctg} \left\{ \left( \frac{n_f}{n_s} \right)^{2r} \cdot \frac{\sqrt{N_m^2 - n_s^2}}{\sqrt{n_f^2 - N_m^2}} \right\} + m\pi$$

де  $k = 2\pi / \lambda$  - хвилевий вектор оптичної несучої,  $n_f$  - показник заломлення хвилеводного шару,  $n_s$  - показник заломлення підкладинки,  $n_c$  - показник заломлення покрівельного шару,  $N_m$  - ефективний показник заломлення хвилеводної моди,  $m$  - номер моди,  $h$  - товщина хвилеводного шару, для  $r=1$  рівняння (1) описує дисперсію TM мод,  $r=0$ , відповідно, TE мод.

Для феритової плівки, вирощеній на підкладинці з галій гадолінієвого гранату, на довжині хвилі  $\lambda = 1150$  нм зазначені вище параметри наступні:  $n_f = 2.28$ ,  $n_s = 1.94$ ,  $n_c = 1$ . Товщина плівок змінювалась в діапазоні (1-10) мкм. На рис. 1 згідно рівняння (1) показана залежність ефективного показника заломлення  $N_m$  перших шести хвилеводних мод від товщини  $h$  феритового шару для фіксованої довжини хвилі  $\lambda = 1150$  нм.

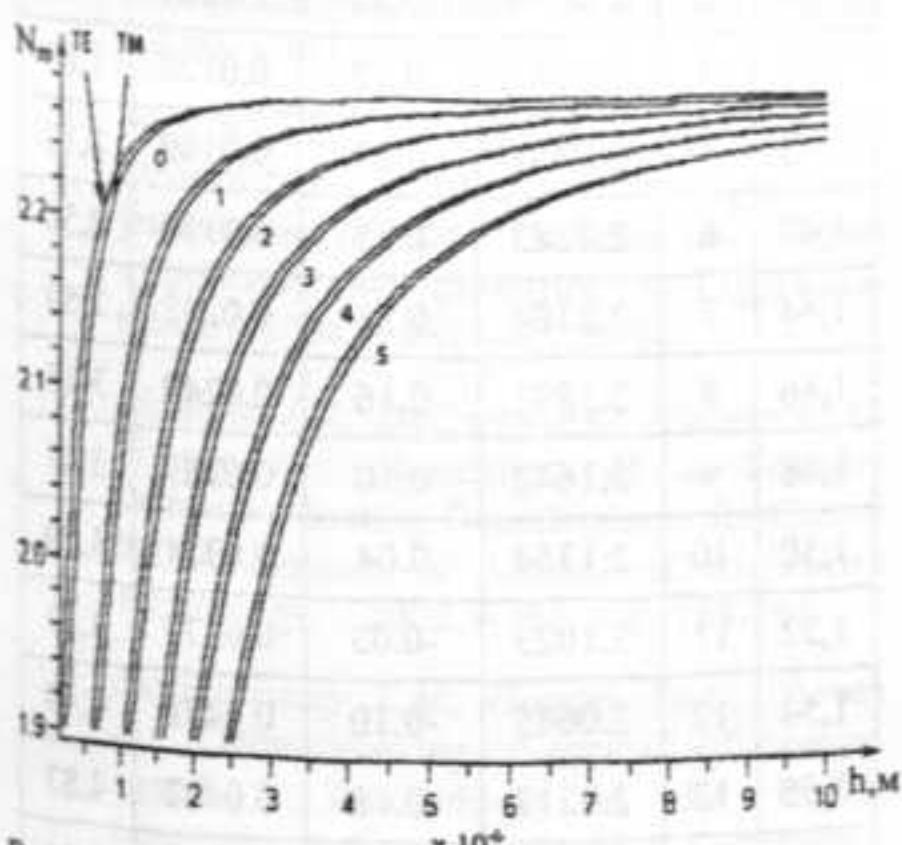


Рис. 1 Дисперсія TE та TM оптичних хвилеводних мод.

Кожній хвилеводній моді відповідає свій ефективний показник заломлення  $N_m$ . Ця добре відома фундаментальна властивість хвилеводних мод є джерелом міжмодової дисперсії в багатомодових хвилеводах. Для іншої довжини хвилі згідно дисперсійного рівняння (1) буде інший ефективний показник заломлення для кожної хвилеводної моди. Якщо для збудження та реєстрації хвилеводних мод використовувати метод призми повного внутрішнього відбиття, то для селективного збудження в планарному хвилеводі кожної власної оптичної TE<sub>m</sub> або TM<sub>m</sub> моди на певній довжині хвилі  $\lambda$ , буде відповідати конкретний кут падіння  $\alpha_m$  на грань призми (Рис.2).

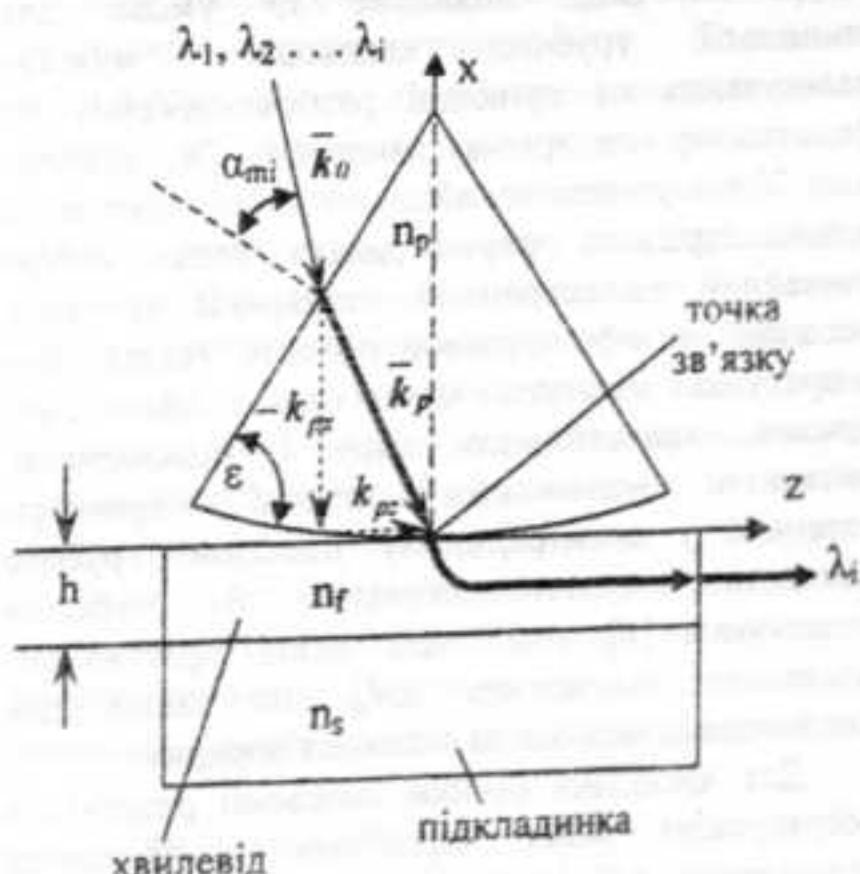


Рис. 2 Схема послідовного хвилеводного демультиплексора.

У цьому і полягає сутність ідеї можливого використання планарного хвилевода для демультиплексування оптичного сигналу в технологіях WDM. Таким чином, у конструкції демультиплексора планарний хвилевод виступає в ролі дисперсійного елемента, а призма повного внутрішнього відбиття - у ролі хвилевого селектора мод. Хвилеводна мода з певними номером і довжиною хвилі збуджується в планарному хвилеводі при умові співпадання сталої розповсюдження такої моди з з-ою компонентою хвилевого вектора в призмі, тобто  $\beta_m = k_0 N_m = k_F$ . З цієї умови випливає очевидний зв'язок між ефективним показником заломлення конкретної моди  $N_m$  та кутом падіння  $\alpha_m$  мультиплексованого оптичного сигналу на грань призми:

$$N_m = \sin \alpha_m \cdot \cos \varepsilon + (n_p^2 - \sin^2 \alpha_m)^{1/2} \cdot \sin \varepsilon \quad (2)$$

де  $n_p$  - показник заломлення призми,  $\varepsilon$  - кут між вхідною гранню призми та її основою; кут  $\alpha_m$  може бути як додатнім так і від'ємним в залежності від того, як він збільшується - за годинниковою стрілкою, чи проти.

Для збудження та реєстрації хвилеводних мод будемо користуватися призмами з ЦТСЛ кераміки з показником заломлення  $n_p = 2.43$  на довжині хвилі  $\lambda = 1150$  нм та кутом при основі  $\varepsilon = 60^\circ$ . Тепер необхідно знайти умови, при яких різниця ефективних показників заломлення хвилеводних мод  $\Delta N_m$  для двох сусідніх каналів мультиплексованих по технології CWDM або DWDM забезпечить максимальне кутове розділення  $\Delta\alpha_m$ . Знайдемо ці умови для технології грубого хвильового мультиплексування на прикладі розповсюдження по феритовому планарному хвилеводу  $TE_m$  власних мод. У відсутності зовнішнього магнітного поля плівка ітрієвого ферит-граната являє собою звичайний діелектричний планарний хвилевід, прозорий в інфрачервоній області. Надалі при розрахунках знехтуємо матеріальною дисперсією призми, хвилеводного шару і підкладинки, вважаючи незмінними оптичні параметри останніх у спектральному діапазоні грубого хвильового мультиплексування. Як показали розрахунки [4], найбільша зміна ефективного показника заломлення  $\Delta N_m$  має місце для хвилеводних мод більш високого порядку.

Для чисельної оцінки наведемо результати розрахунків зміни ефективного показника заломлення  $\Delta N_m$  десятої хвилеводної моди в плівці товщиною  $h = 7$  мкм при зміні довжини хвилі  $\Delta\lambda = 20$  нм. Відповідні зміни кутової різниці  $\Delta\alpha_m$  між сусідніми каналами в технології CWDM наведені в останній колонці табл. 1.

Як видно з таблиці, кутове розділення сусідніх спектральних каналів при використанні дисперсійних властивостей однієї моди високого порядку приблизно дорівнює одному градусу. Цей результат доводить можливість практичного застосування призменного метода збудження хвилеводних мод у планарному хвилеводі для реалізації селективного демультиплексування оптичного сигналу в технології CWDM. Можна реалізувати демультиплексор, реєструючи кожний канал на своїй хвилеводній моді.

Для цього необхідно підібрати таку товщину хвилевода, щоб кількість хвилеводних мод у ньому в точності дорівнювала числу каналів. Для планарного хвилевода на основі феритової плівки така ситуація реалізується при  $h = 10$  мкм.

Таблиця 1

$\lambda$ , мкм	m	$\Delta N_m$	$\Delta\alpha_m$ , град.
1,30	10	0.0067	0,72
1,32	10	0.007	0,73
1,34	10	0.0071	0,74
1,36	10	0.0072	0,75
1,38	10	0.0073	0,75
1,40	10	0.0074	0,76
1,42	10	0.0075	0,76
1,44	10	0.0076	0,77
1,46	10	0.0077	0,78
1,48	10	0.0078	0,78
1,50	10	0.0079	0,79
1,52	10	0.00795	0,79
1,54	10	0.008	0,80
1,56	10	0.0081	0,80
1,58	10	0.0082	0,80

Результати розрахунку для такого варіанту демультиплексора представлені в табл. 2.

Таблиця 2

$\lambda$ , мкм	m	$N_m$	$\alpha_m$ , град.	$\Delta N_m$	$\Delta\alpha_m$ , град.
1,30	0	2.2791	0.39	0.0028	0,46
1,32	1	2.2763	0.38	0.0048	0,79
1,34	2	2.2716	0.37	0.0070	1,13
1,36	3	2.2646	0.35	0.0094	1,48
1,38	4	2.2551	0.32	0.0120	1,83
1,40	5	2.2431	0.29	0.0149	2,17
1,42	6	2.2283	0.25	0.0179	2,50
1,44	7	2.2104	0.21	0.0212	2,83
1,46	8	2.1891	0.16	0.0249	3,15
1,48	9	2.1642	0.10	0.0289	3,47
1,50	10	2.1354	0.04	0.0331	3,79
1,52	11	2.1023	-0.03	0.0377	4,13
1,54	12	2.0645	-0.10	0.0428	4,49
1,56	13	2.0217	-0.18	0.0482	4,87
1,58	14	1.9738	-0.26	0.0534	5,25

При використанні всього спектру хвилеводних мод для демультиплексування оптичного сигналу кутова різниця  $\Delta\alpha_m$  між сусідніми каналами змінюється в межах (5-0.5) град., що значно перевищує кутове розділення каналів при використанні однієї моди високого порядку. Недоліком такого режиму демультиплексування є значна нееквідстантність кутової різниці між сусідніми каналами.

Якщо призму використовувати для реєстрації хвилеводних мод, можна реалізувати режим паралельного демультиплексування оптичного сигналу. Схема такого демультиплексора показана на рис. 3.

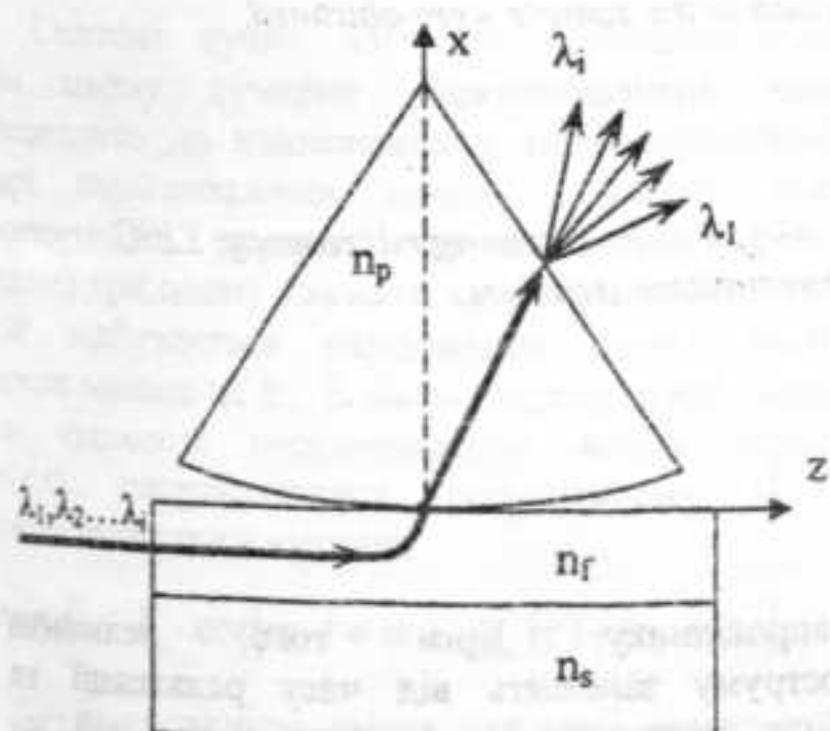


Рис.3 Схема паралельного хвилеводного демультиплексора.

#### Список використаних джерел

1. Курков А. С., Наний О. Е. Волоконно-оптические усилители. // Lightwave-russia. – 2003. – №1. – С. 14.
2. Чернов Б. К., Каминецкий И. С. Технология грубого спектрального уплотнения CWDM. Основы построения и перспективы развития. // Lightwave-russia. – 2004. – №2. – С. 20-24.
3. McMulin J.N., DeCorby R.G., Haugen C.J.I. Theory and Simulation of a Concave Diffraction Grating Demultiplexer for Coarse WDM Systems. // Journal of Lightwave Technology. – 2002. – №3. – Р. 758-765.
4. Maslyukivskiy R.M., Gayday Yu.O., Syrota A.V. Demultiplexing of optical information signal // Proceedings of the Eighth International Young Scientists Conference

Очевидно, що планарний хвилевід для реалізації такого режиму має бути одномодовим. Останній варіант демультиплексора є найбільш привабливим, але, як було зазначено вище, для моди нульового порядку різниця ефективних показників заломлення сусідніх каналів найменша. Для з'ясування можливості практичного застосування останнього варіанту демультиплексора необхідна оптимізація параметрів як планарного хвилевода, так і призми повного внутрішнього відбиття.

#### Висновки

Таким чином, показана принципова можливість використання дисперсії оптичних хвилеводних мод у планарному хвилеводі для створення демультиплексора інформаційного сигналу у волоконно-оптических мережах з грубим хвильовим мультиплексуванням. Необхідним елементом такого демультиплексора є призма повного внутрішнього відбиття, яка виконує роль селектора каналів. Для практичної реалізації діючого макета послідовного або паралельного демультиплексора необхідно, по-перше, провести серію експериментальних досліджень дисперсії оптичних мод у конкретному планарному хвилеводі з лінійкою лазерних випромінювачів, які використовуються в системах з грубим хвильовим мультиплексуванням. По-друге, необхідно оптимізувати параметри як самого хвилевода, так і призми збудження та реєстрації хвилеводних мод. Поставлені задачі є предметом подальших експериментальних досліджень.

on Applied Physics. – 2008. – June, 11-13. –  
Kyiv, Ukraine. – P. 40-41

Надійшла до редколегії 25.02.09

УДК 519.9

Ільченко Л. М., к.ф.-м.н., Колєнов С. О.,  
к.ф.-м.н., Литвиненко С. В., к.ф.-м.н.,  
Молочко П. В.\*, Виноградов Ю. В.

## Про вклади у фазу диференційно-фазового фотовідповідного сигналу

Проаналізовано внесок різних факторів у диференційно-фазовий фотовідповідний сигнал. Проведено оцінку величини цих екладів та визначено умови спостереження сигналу. Отримані експериментальні дані дають залежності фази відгуку від різниці частоти зондуючих променів та напруги, прикладеної до переходу, що дозволяє оцінити час релаксації носіїв та інші параметри.

**Ключові слова:** скануюча мікроскопія, фотоелектричний відгук, напівпровідникові структури.

\* E-mail: pavlo.molochko@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І. О.

### Вступ

В наш час дуже актуальним є питання дослідження напівпровідникових поверхонь безконтактними неруйнівними методами. Роздільну здатність на мікронному та субмікронному рівні дають оптичні пристрії, наприклад метод скануючої лазерної мікроскопії. В роботі [5] запропоновано конструкцію фазового лазерного скануючого мікроскопа для дослідження розподілу часу життя нерівноважних носіїв в приповерхневому шарі напівпровідникової структури. В роботі [3] вказано на недоліки фазового методу та запропоновано диференційно-фазову методику, при якій сканування об'єкта відбувається двома близько розташованими променями. Також було розглянуто основні механізми формування диференційно-фазового сигналу. Встановлено, що існує декілька факторів, які дають внесок у фазу фотовідповідного сигналу. Один з них, що пов'язаний з поверхневою структурою, виникає при проходженні двох зондуючих світлових пучків через елементи структури. При цьому світлові пучки набувають різних фазових зсувів, і при інтерференції цих пучків в приповерхневій області виникає фотострум різницею частоти з фазою, що дорівнює різниці фаз цих пучків. Інший фактор пов'язаний з поглинанням світла в

Ilchenko L. M., Ph.D., Kolyenov S. O., Ph.D., Litvinenko S. V., Ph.D., Molochko P. V.\*, Vinogradov Y. V.

## About phase impacts in differential-phase LBIC

The impact of different factors into differential-phase LBIC signal was analyzed. The magnitude of these factors was estimated. Experimental dependences of LBIC phase on the differential frequency of scanning beams and on voltage applied to the sample were obtained.

**Key Words:** scanning microscopy, LBIC, semiconductor structures

налівпровіднику. Крім того, величина фотоструму залежить від часу релаксації та глибини переходу. Ці фактори у більшій чи меншій мірі впливають на фазу сигналу, і розділити їх зазвичай дуже важко. Виходячи з цього, метою даної роботи є встановлення умов, при виконанні яких, певними внесками можна знецтувати.

### Теоретичне обґрунтування

У відповідності з методом диференційно-фазової лазерної мікроскопії, поверхня об'єкта сканується двома близько розташованими світловими пучками з різними частотами [4]. Розглянемо область просторового заряду (ОПЗ) р-п переходу шириною  $l$ , розташованого на глибині  $h$  від поверхні, перпендикулярно до якої направлені два світлових промені з Гаусовим розподілом інтенсивності з частотами  $\omega_0 + \omega_1$  та  $\omega_0 - \omega_1$ , початковими фазами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , рознесеннями в просторі на величину  $d$ , що дорівнює ширині пучків  $w_0$ . На поверхні розташована рельєфна або фазова структура, умовно позначена як  $\phi_{nr}(r)$ , де  $r = (x, y)$  – координата на площині поверхні (рис. 1).

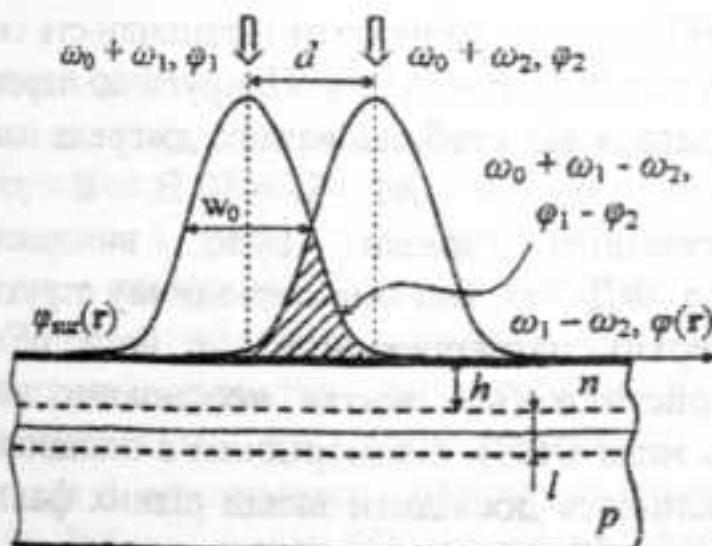


Рис. 1 Розташування світлових пучків в області р-п переходу.

Світлові пучки частково перекриваються, при цьому сумарне електромагнітне поле призводить до виникнення у приповерхневому шарі нерівноважних носіїв, кількість яких пропорційна сумарній інтенсивності світла. Будемо при цьому вважати, що ширина області, в якій відбувається народження нових носіїв значно менша за  $h$ . В цьому припущення, вираз для кількості нерівноважних носіїв заряду  $\Delta n(r,t)$ , скориставшись результатами [1, 3], можна записати у вигляді:

$$\Delta n(r,t) \sim I_0 \cdot \cos[\omega \cdot t + \varphi + \varphi_{\text{sum}}(r) + \varphi_a + \varphi_r], \quad (1)$$

де  $I_0$  – інтенсивність світла в області перекриття;  $\omega = \omega_1 - \omega_2$  – частота диференційно-фазового сигналу;  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  – початкова фаза;  $\varphi_{\text{sum}}(r)$  – фазова складова, що відповідає за структуру поверхні;  $\varphi_a = \arccos\{\lceil 1 + (\omega/2\alpha \cdot c)^2 \rceil^i\}$  – фазова складова, пов’язана з поглинанням світла;  $\alpha$  – коефіцієнт поглинання світла;  $\varphi_r = \arctg(\omega \cdot t)$  – фазова складова, пов’язана з часом життя нерівноважних носіїв заряду  $t$ .

Таким чином, кількість нерівноважних носіїв заряду, а отже і фотострум, збуджуються на різницевій частоті  $\omega$ , з початковою фазою  $\varphi$ . Виникають додаткові фазові зсуви – фаза  $\varphi_{\text{sum}}(r)$ , яка визначається поверхневою структурою, фаза  $\varphi_a$ , що залежить від коефіцієнту поглинання світла  $\alpha$  і фаза  $\varphi_r$ , яка визначається часом життя нерівноважних носіїв  $t$ . Фактори, що призводять до додаткових фазових зсувів, можуть одночасно спостерігатися в зразку, що досліджується. Це ускладнює отримання достовірних даних. Внесок поверхневої структури в диференційно-фазовий сигнал, що реєструється, як випливає з виразу (1) залежить від координати на поверхні об’єкта. Це є головною відмінністю даної складової від інших складових (пов’язаних з  $\alpha$  і  $t$ ). Цей внесок може бути визначений шляхом двовимірного сканування поверхні напівпровідника. Величина

вкладу у фазу фотоструму, пов’язана з поглинанням світла при реальних значеннях параметрів ( $f = \omega/2\pi = 100 \div 200 \text{ кГц}$ ,  $\alpha = 0,3 \text{ мкм}^{-1}$ ) виявляється достатньо малою, і нею можна знехтувати. Вклад у фазу фотоструму, пов’язаний із часом життя нерівноважних носіїв в моделі, що розглядається, не залежить від координати і визначається в основному характеристиками матеріалу, такими як ступінь легування, наявність дефектів, хімічний склад, електричне поле і може змінюватись в широких межах [2]. Це значення має статичний характер і для даного зразка не може бути виділене на фоні інших постійних фазових доданків. Також розглянемо модель, в якій ефективний час життя неосновних носіїв  $\tau_{\text{eff}}$  визначається не власним часом життя  $t$ , що є характеристикою речовини, а параметрами структури, зокрема відстанню до верхньої межі ОПЗ  $h$ . Це, зокрема, справедливо для фотодіоду, до якого прикладено зворотну напругу (фотодіодний режим). Тоді ефективний час життя неосновних носіїв буде визначатися часом, необхідним для проходження ними відстані  $h$ . ОПЗ можна вважати областю миттєвої рекомбінації. Таким чином, можна записати вираз для  $\tau_{\text{eff}}$  [1]:

$$\tau_{\text{eff}} \approx \frac{h^2}{D}, \quad (2)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії. В свою чергу, верхня межа ОПЗ  $h$ , залежить від ширини ОПЗ  $l$  (див. рис. 1), яка, у свою чергу, залежить від напруги, прикладеної до р-п переходу. Так, наприклад, для різкого р-п переходу його ширина  $l$  залежить від прикладеної напруги наступним чином [2]:

$$l = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0(u + u_k)}{e} \frac{p_0 + n_0}{p_0 n_0}}, \quad (3)$$

де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність,  $u$  – напруга прикладена до р-п переходу,  $u_k$  – контактна різниця потенціалів,  $p_0$ ,  $n_0$  – концентрації електронів та дірок, відповідно на великій відстані від контакту,  $e$  – заряд електрона.

Прикладання напруги до р-п переходу змінить ширину ОПЗ  $l$ , і одночасно глибину розташування переходу  $h$  (див. рис. 1), а, отже, приведе, як випливає з (1, 2), до зміни фази фотовідповідного сигналу  $\varphi_r$ :

$$\varphi_r = \arctg\left(\omega \cdot \frac{h^2}{D}\right) \quad (4)$$

Величина вкладу у фазу фотоструму  $\phi_r$ , пов'язана з часом життя неосновних носіїв та при реальних значеннях параметрів ( $f = 100 - 200 \text{ кГц}$ ,  $D = 49 \text{ см}^2/\text{c}$ ,  $h = 20 \text{ мкм}$ ) виявляється у межах  $\phi_r = 0,1 - 1,0 \text{ рад}$ , що може бути експериментально зареєстровано (рис. 2).

Таким чином, основні складові внеску різних факторів в диференційно-фазовий фотовідповідний сигнал пов'язані з поверхневою структурою та релаксаційними процесами в об'ємі напівпровідника. Ці вклади можуть бути розділені для нашої моделі – поверхнева складова залежить від координат на поверхні

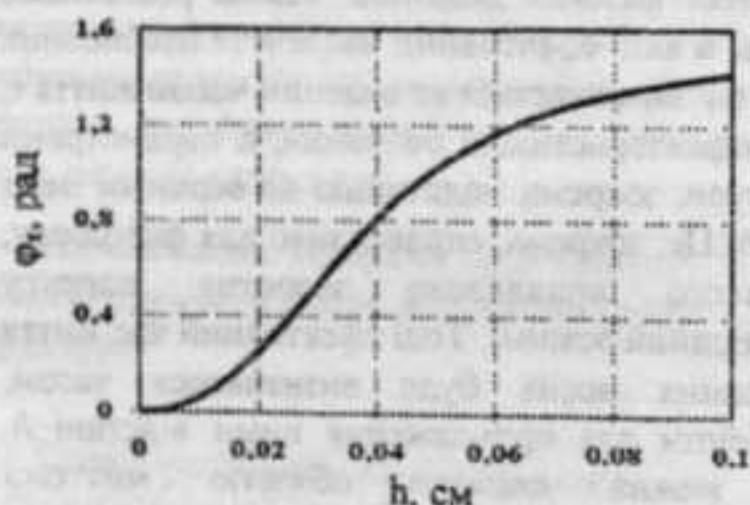


Рис. 2 Залежність фази фотовідповідного сигналу  $\phi_r$  від глибини розташування р-п переходу  $h$

переходу, але не залежить від прикладеної напруги, а об'ємна складова залежить від прикладеної напруги, але не залежить від координат. Зробити це можна при проведенні експериментальних досліджень шляхом вибору відповідних умов спостереження.

### Експериментальні результати

Необхідні умови спостереження забезпечувались при виборі відповідних компонентів. Для проведення досліджень використовувався одномодовий напівпровідниковий лазер з довжиною хвилі  $\lambda_0 = 0,63 \text{ мкм}$  потужністю  $P_0 = 0,5 \text{ мВт}$ , з лінійною поляризацією. Розщеплення і сканування світлових пучків здійснювалося за допомогою двокоординатного дефлектора на основі кристалів  $\text{TeO}_2$ . Дефлектор забезпечував сканування в діапазоні кутів до  $2,5^\circ$  при  $512 \times 512$  роздільних положеннях світлового променя і розщеплення, що приблизно відповідало відстані між двома сусідніми положеннями [4]. Допоміжні оптичні елементи дозволяли встановлювати розмір площин сканування  $L$  в межах від  $L_{\min} = 100 \times 100 \text{ мкм}$  до  $L_{\max} =$

$3000 \times 3000 \text{ мкм}$  та змінювати інтенсивність світла в межах від 0 до  $P = 0,1 \cdot P_0$ . Напруга до переходу прикладалася від стабілізованого джерела напруги в межах від 0 до  $U = 30 \text{ В}$ . В якості досліджуваного зразка було використано фотодіод ФД-263. Він має періодичну структуру на поверхні напівпровідника, і його об'ємні характеристики (час життя неосновних носіїв, глибина межі ОПЗ) є однорідними в площині, що дає можливість дослідити вклад різних факторів у фотовідповідний сигнал.

Досліджувались координатні залежності фази фотовідповідного сигналу при різних напругах на переході. На рис. 3 представлені координатні залежності для фотодіоду ФД-263 при нульовій напрузі на переході та напрузі, рівній  $U = -5 \text{ В}$ . Значення частоти сигналу відповідає  $f = 160 \text{ кГц}$ . При нульовій напрузі координатна залежність має вигляд характерний для похідної від стрибкоподібної зміни фази, наприклад, від тонкої смуги, розташованої на поверхні напівпровідника [3]. Початкова фаза сигналу компенсується у фазовому детекторі так, щоб вона мала мінімальне значення, у випадку, коли промені потрапляють на поверхню, вільну від провідників. При прикладанні напруги на переході до фази, пов'язаної з поверхнею  $\phi_{\text{ph}}(r)$ , додається фаза, пов'язана з релаксаційними процесами  $\phi_r$ , що призводить до зсуву залежності на додаткову величину, що залежить від прикладеної напруги.

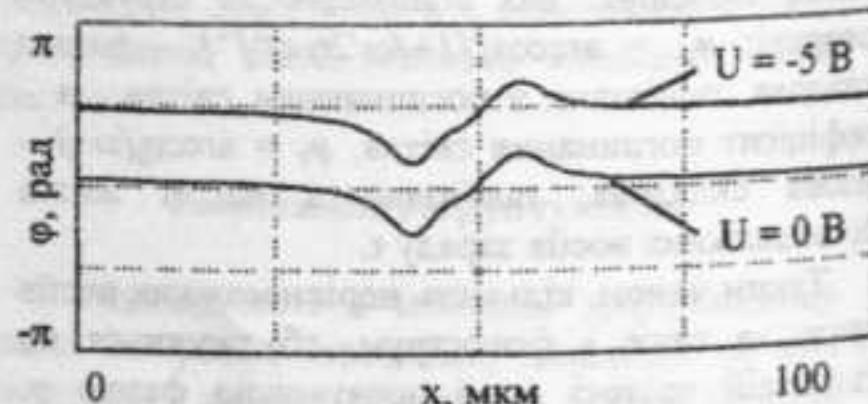


Рис. 3 Координатні залежності фази фотовідповідного сигналу для фотодіоду ФД-263 при різних напругах на переході.

Досліджувалися залежності додаткового набігу фази  $\phi_r$ , пов'язаного з релаксаційними процесами від частоти сигналу і напруги, прикладеної до переходу.

На рис. 4 представлені залежності фази  $\phi_r$  для фотодіоду ФД-263 від напруги, прикладеної до переходу при різних значеннях різницьової частоти  $f$ .

Значення  $\phi_r$  залежить від частоти  $f$ , при якій змінилися низченаведені залежності, що якісно

також очікувалось відповідно до виразів (1), (3), (4).

Залежності додаткового значення фази  $\phi$ , пов'язаного з релаксаційними процесами, від напруги, прикладеної до переходу, мають криволінійний (якісно схожий на функцію арктангенса) характер, що, судячи з усього, зумовлено тим, що фаза непрямим чином пов'язана з прикладеною напругою (вирази 3,4, рис. 2). Дійсно, вираз (4) вказує на залежність

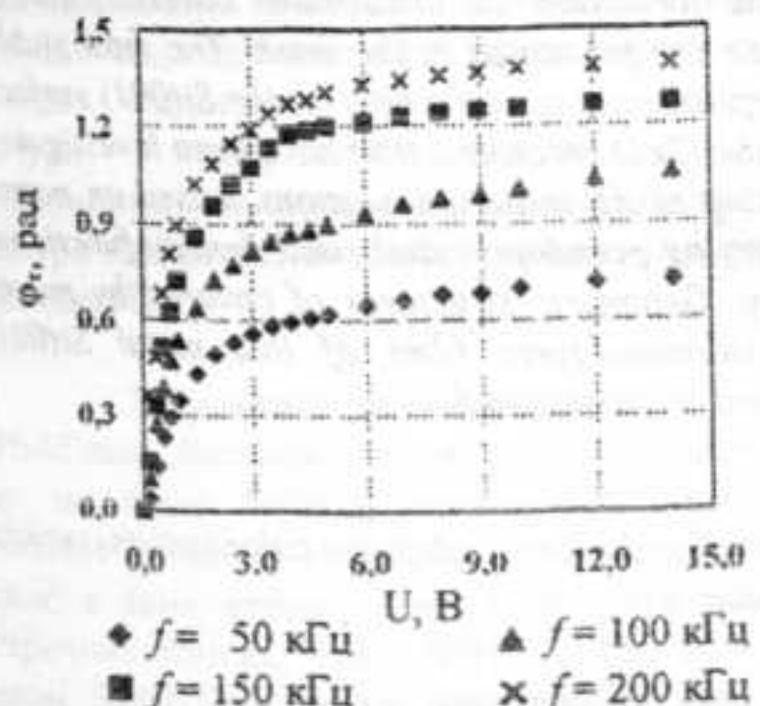


Рис. 4 Залежності додаткового значення фази  $\phi$ , пов'язаного з релаксаційними процесами, від напруги прикладеної до переходу та частоти розщеплення  $f$ .

фази  $\phi$ , від глибини розташування ОПЗ як арктангенс квадратичної функції. Цю залежність наведено на рис. 2. При цьому, вираз (3) вказує на те, що ширина ОПЗ пропорційна кореню з напруги. Таким чином, величина фази  $\phi$ , має бути пов'язаною з напругою функцією арктангенса,

що ми й маємо на експерименті. Це, зокрема, вказує на принципову можливість дослідження розподілу глибини розташування межі ОПЗ або розподілу напруги, прикладеної до переходу, для структур, ефективний час життя неосновних носіїв яких визначається часом їх прольоту від місця їх народження до ОПЗ р-п переходу, або розподілу власного часу життя неосновних носіїв в напівпровідникових структурах, якщо саме ним визначається їх ефективний час життя.

Крім того, криволінійний характер має залежність фази  $\phi$ , від частоти розщеплення  $f$ , що також відповідає теоретичним очікуванням відповідно до формули (4).

## Висновки

В диференційно-фазовий фотовідповідний сигнал дають вклад різні фактори, такі, як рельєфна структура на поверхні напівпровідника, поглинання світла в напівпровіднику, релаксація нерівноважних носіїв в об'ємі напівпровідника. Основні вклади у фазу пов'язані з поверхневою структурою і релаксаційними процесами в об'ємі напівпровідника. Вони можуть бути розділені при проведенні експериментальних досліджень – поверхнева складова залежить від координат на поверхні переходу, але не залежить від прикладеної напруги, а об'ємна складова залежить від прикладеної напруги, але не залежить від координат. Отримані залежності фази відгуку від різницевої частоти зондуючих променів та напруги прикладеної до переходу дозволяють оцінити час релаксації носіїв та інші параметри.

## Список використаних джерел

1. Рыбкин С. М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. – М.: Физматгиз, 1963. – 496 с.
2. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. – М.: Наука, 1990. – 688 с.
3. Ільченко Л. М., Колесов С. О., Литвиненко С. В., Молочко П. В., Смирнов Є. М. Механізми виникнення диференційно-фазового фотосенсорного відгуку. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – № 4. – С. 284 – 293.

4. Ільченко Л. М., Колесов С. О., Пільгун Ю.В., Смирнов Є.М. Лазерний скануючий профілограф-профілометр як спектральний інструмент для дослідження шорсткості. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2001. – № 3. – С. 373-380.
5. Pernau Th., Fath P., Bucher E. Phase-sensitive LBIC analysis. // Photovoltaic Specialists Conference – Konstanz: Fachbereich Phys., 2002. – Р. 442-445.

Надійшла до редакції 03.02.09

УДК 519.9

Коваль І.П., канд. фіз.-мат. н., доц.,  
Ніколайчик А.Е., асп.

## Моделювання початкових стадій формування силіциду хрому на поверхні Si(001)

Проведено квантово-хімічне моделювання формування поверхневих фаз силіцидів хрому на поверхні кремнію (001). За допомогою *Ab initio* розрахунків, що базуються на теорії функціонала електронної густини з узагальненим градієнтним наближенням для обмінно-кореляційного потенціалу, досліджувалися найбільш стабільні центри адсорбції атомів Cr на кремнієвій підкладці. Отримані геометричні структури вкритих субмоношаровими плівками Cr поверхонь Si(001).

**Ключові слова:**  $\text{CrSi}_2$ , *Ab initio* розрахунки, поверхнева дифузія.

E-mail: [jalya@mail.univ.kiev.ua](mailto:jalya@mail.univ.kiev.ua)

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

### Вступ

Надтонкі шари силіцидів перехідних металів, зокрема силіциду хрому, вже зараз широко використовуються в технології створення інтегральних схем (ІС) та гібридних напівпровідникових інтегральних схем в якості металізації, буферних шарів, тощо. Вони є багатообіцяючою основою для виготовлення запам'ятовуючих та оптоелектронних систем наступних поколінь.

Чиста поверхня Si виявляє велику реактивну здатність за рахунок наявності на поверхні обірваних зв'язків. На ній має місце нерівномірний розподіл напружень, що забезпечує інкорпорацію адсорбованих атомів Cr в приповерхневі шари підкладки.

Початкові етапи процесів утворення силіцидів хрому при відпалі тонких плівок хрому нанесених на поверхню кремнія (тобто при наявності надлишку кремнію) показали, що при цьому утворюється стехіометричний  $\text{CrSi}_2$ , який являє собою вироджений напівпровідник р-типу з непрямими зонами та шириною забороненої зони 0,35 eV [1,2]. При нестачі кремнію відносно стехіометричної формули провідність набуває металевого характеру. Силіцид  $\text{CrSi}_2$  вирізняється своєю високою термічною та хімічною стійкістю.

I.F. Koval, Ph.D., Associate Professor,  
A.E. Nikolaychik, Ph.D. student

## Simulation of early stages of chromium silicide formation on Si(001) surface

Results of quantum-chemical simulations of silicide formation on chromium covered Si(001) surface are presented in the work. The most stable adsorption sites for Cr atoms on the Si(001) surface with the (2x1) reconstruction have been investigated by using of *Ab initio* calculations, based on norm-conserving pseudopotentials and density functional theory. Geometric structures of covered by mono- and submonolayers films of this metal Si(001) surfaces were obtained.

**Key Words:**  $\text{CrSi}_2$ , *ab initio* calculations, surface diffusion.

В усьому діапазоні температур від кімнатної до температури плавлення (1490°C) він існує у вигляді однієї єдиної кристалографічної та стехіометричної фази.

Не дивлячись на достатню кількість експериментальних даних щодо електронних і атомних структур перехідних металів на кремнії, існує мала кількість відповідних теоретичних робіт, особливо для системи Cr/Si(001)2x1. У даній роботі ми спробували дослідити найбільш стабільні місця адсорбції атомів Cr на поверхні кремнію (001); отримати геометричні та електронні структури чистої та вкритої субмоношаровими плівками Cr поверхні Si(001)2x1, оцінити висоту потенціальних бар'єрів, які відповідають переходам між найбільш стабільними місцями адсорбції для початкових етапів формування силіцидно-подібних хромових покривів на кремнієвих поверхнях.

### Методика обрахунків

Електронна структура Cr/Si(100) досліджувалась з перших принципів в межах теорії функціонала густини (DFT) за допомогою коду ABINIT [3]. Для обмінно-кореляційного потенціалу використовувалось узагальнене градієнтне наближення (GGA) [4].

Псевдопотенціали для хрому та кремнію були згенеровані за допомогою коду FHI98pp [5].

Для розрахунку атомної та електронної структури поверхні Cr/Si(001) використовувалась модель з шестишарових елементарних комірок з періодичними граничними умовами і довжинами зв'язків Si-Si такими, як в об'ємі кристалічного кремнію ( $2,35\text{\AA}$ ). Величина вакуумного проміжку становила  $\sim 5 \text{ \AA}$ . Позиції атомів Cr і підкладинки Si в чотирьох найвищих шарах були оптимізовані до сил на атомах з точністю  $0,02 \text{ eV/\AA}$ , в той час як нижній шар кремнію був зафікований при об'ємних значеннях. Оптимізація атомної структури поверхні проводилась з використанням k-сітки  $6\times 6 \times 1$ . Рівноважні параметри гратки визначалися з умови мінімуму повної енергії.

### Результати та обговорення

Найбільш ймовірні місця адсорбції атомів хрому на грані Si(001) визначались шляхом порівняння повної енергії оптимізованих комірок, в яких атоми хрому розміщувались в симетричних точках "HB", "HH", "T4", "T3" на поверхні Si(001)2x1 як це показано на рис. 1. Відповідні елементи поверхні конструювались б-

шаровими комірками, які складались з 10 атомів кремнію та одного поверхневого атома хрому.

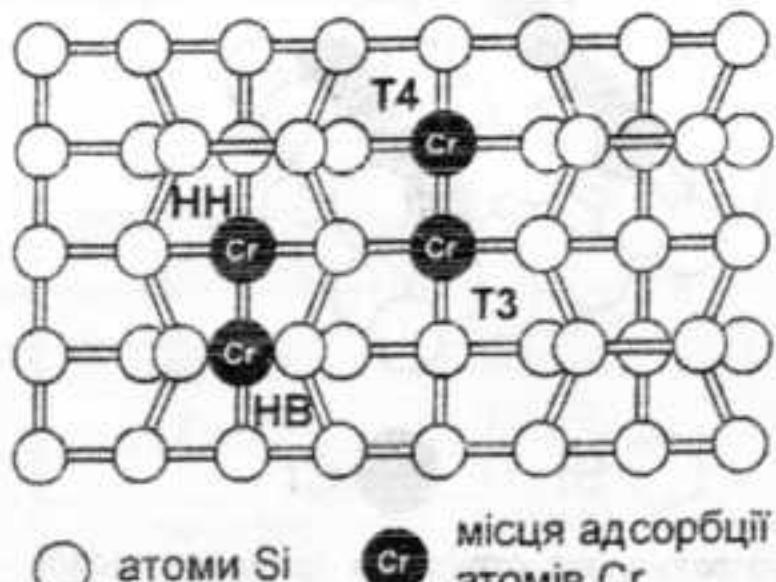


Рис. 1 Схематичне зображення реконструйованої поверхні Si(001)2x1. Можливі місця адсорбції показано хрестиками

Оптимізація атомної геометрії проводилась для п'яти верхніх шарів кремнію. Відповідні дані для повної енергії ( $E_{tot}$ ) елементарної комірки та висоти адатомів Cr (h, див. рис. 2) над поверхнею Si для ступеня покриття хромом 0.5МШ після оптимізації наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Структурні параметри оптимізованих елементарних комірок, що моделюють найбільш стабільні місця адсорбції атомів Cr на поверхні Si(001)

	HB (bridge)	HH (pedestal)	T3 (valley-bridge)	T4 (cave)
$E_{tot}, \text{eV}$ $h, \text{\AA}$	-1.2977E+03 2.1986	-1.2987E+03 0.0492	-1.2984E+03 -0.4145	-1.2991E+03 -1.0744

З таблиці видно, що мінімальної повної енергії система досягає при адсорбції атому хрому в точці "T4", тобто це місце є найбільш ймовірним на початкових етапах адсорбції Cr на Si(001). На рис. 3 представлений оптимізований елемент поверхні Si(001) з покриттям хрому близько половини монощару (Cr адсорбований у положенні "T4"). Вже для таких ступенів покриття хромом спостерігалось зняття поверхневої реконструкції з розривом зв'язків в димерах кремнію, а атоми хрому занурювались нижче поверхневих атомів кремнію (див. табл.1) збудовуючись в Si(001) підкладку.

Дифузія адатома має дуже велике значення в процесі епітаксійного зростання плівок адсорбованих атомів на поверхні підкладинки [6]. Адатом може рухатися між стабільними місцями адсорбції при невеликих значеннях висоти потенціальних бар'єрів. Для того, щоб атому хрому, що дифундує по поверхні кремнію

вдалося перескочити з одного стабільного місця адсорбції в інше, він повинен отримати від кристалічної гратки надлишок енергії, достатній для подолання енергетичного бар'єру, який утримує атом в стійкому положенні. Висота цього бар'єру (енергія активації дифузії Q) для більшості матеріалів має значення 1 - 4

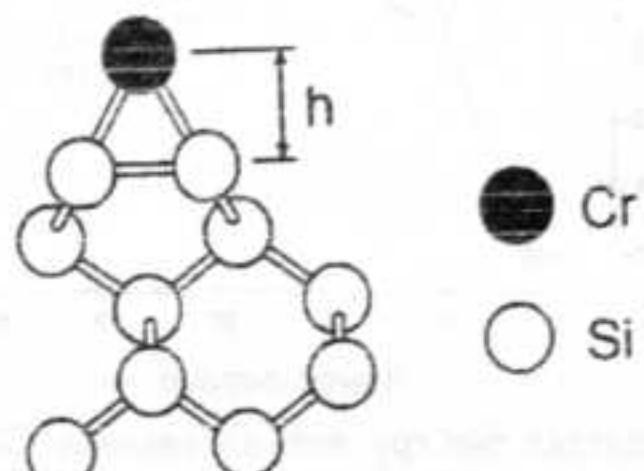


Рис. 2 Висота адатому Cr (h) над поверхнею Si для елементарної комірки, що моделює адсорбцію у положенні HB

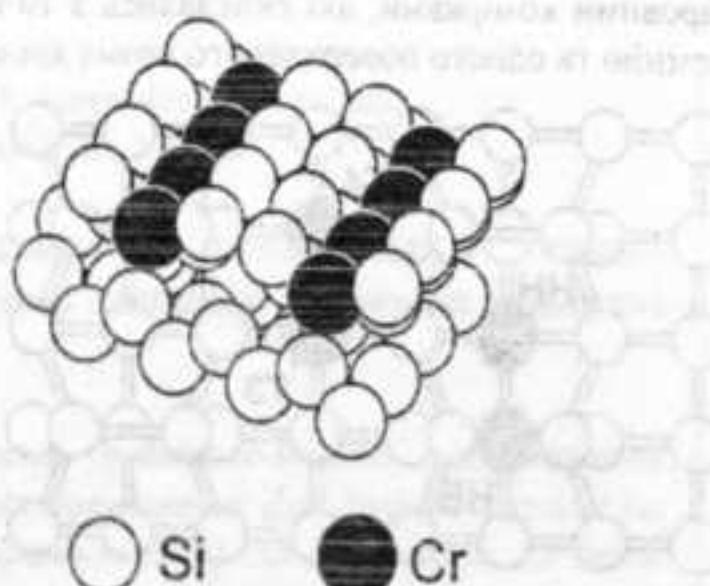


Рис. 3 Розрахункова структура півмонашарової плівки хрому на Si(001).

еВ, а відстань між сусідніми потенціальними бар'єрами відповідає сталій гратці і приблизно дорівнює 0,1 – 0,3 нм. Чим вище температура, тим інтенсивніші теплові коливання атомів, і тим легше вони долають бар'єр.

Нами було розраховано та побудовано потенціальні криві для адатома хрому, що рухається по поверхні Si(001) між найбільш стабільними місцями адсорбції. Атоми підкладинки в двох найнижчих шарах були зафіковані у своїх початкових положеннях. На рис. 4. розглянуто динаміку процесу дифузії атома хрому між точками HB та HH на поверхні кремнію, а на рис. 5 наведено вигляд потенціального бар'єру для такого переходу.

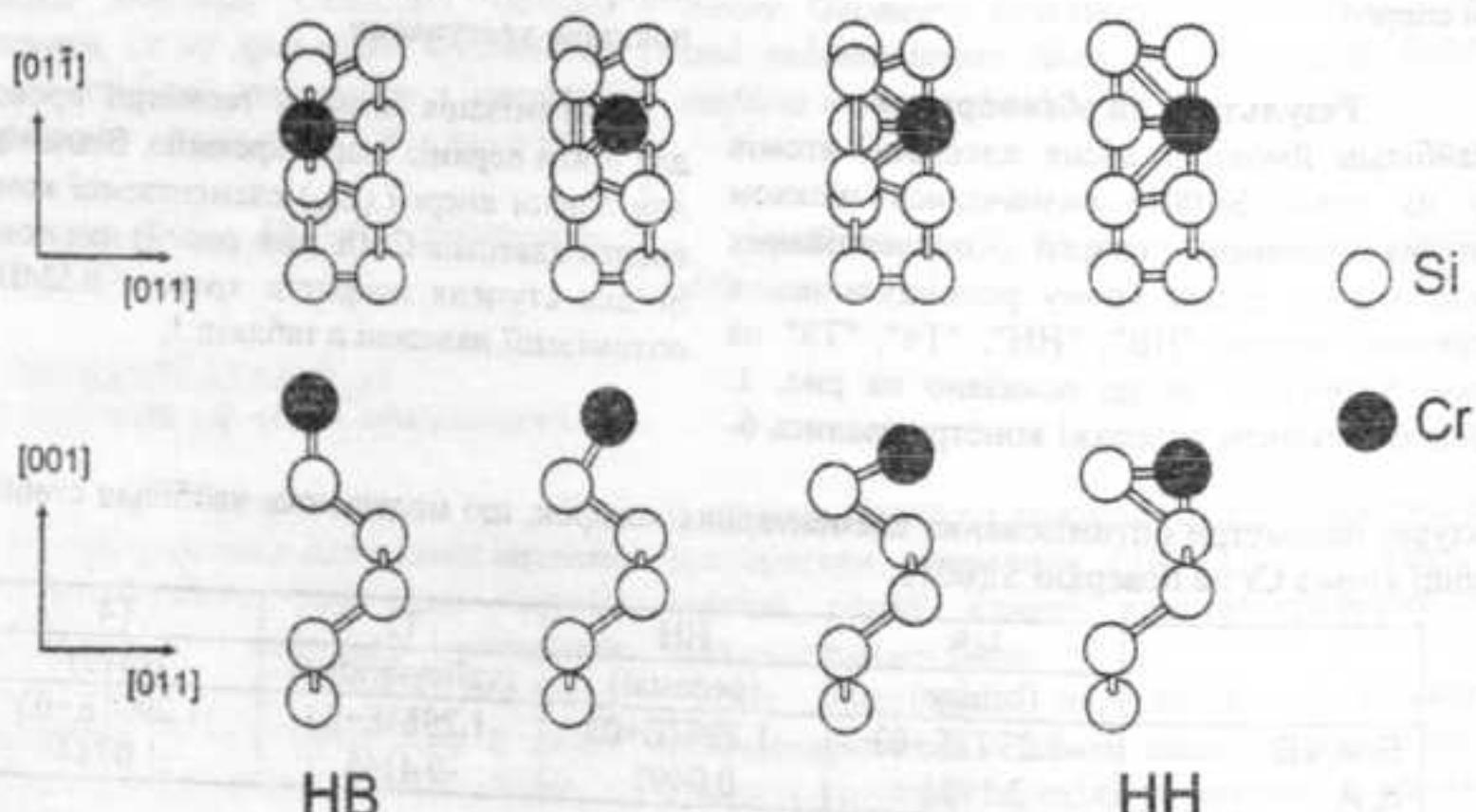


Рис. 4 Шлях дифузії адатома хрому по поверхні Si(001) між стабільними місцями адсорбції HH та HB.

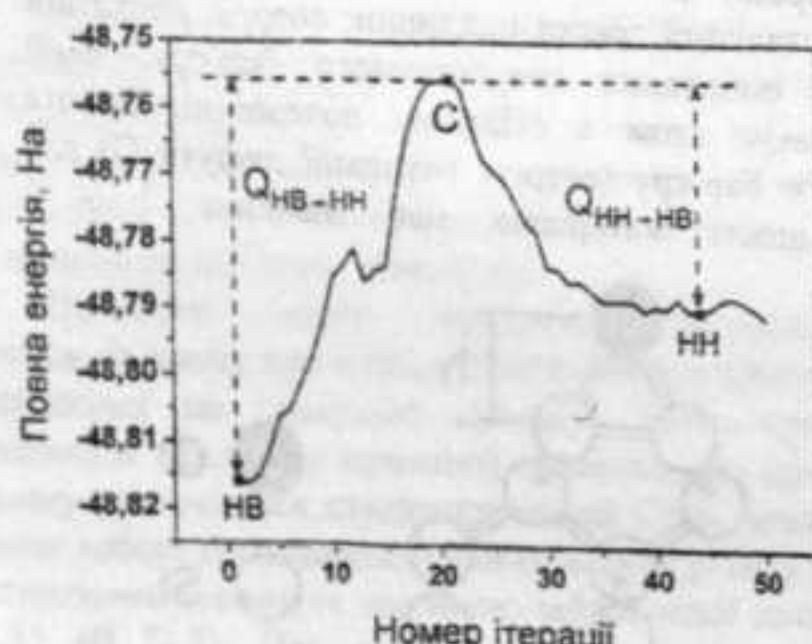


Рис. 5 Вигляд бар'єру дифузії адатома Сг між точками HB та HH на поверхні кремнію. Q - висота потенціального бар'єру при дифузії у відповідному напрямку

Енергія активації дифузії для переходу від стабільного центра HB до HH, визначалась як різниця між повними енергіями системи Cr/Si в точці С та точці HB (між С та HH для дифузії від центру HH до HB). Відповідні значення енергій активації дифузії для розглянутих переходів наведені у табл.2.

Як видно з табл.2, найбільш вигідною є дифузія між стабільними мінімумами T3 та T4. Відповідний енергетичний бар'єр складає 0,067 еВ. В той же час бар'єр, який долає адатом хрому при дифузії від стабільної позиції T4 до T3 вже складає 0,453 еВ. При цьому відстань між сусідніми потенціальними бар'єрами приблизно дорівнює 3,84 Å.

Таблиця 2

Значення висоти потенціального бар'єру, який необхідно подолати атому хрому що дифундує по поверхні кремнію між відповідними найбільш стабільними місцями адсорбції

Місця адсорбції, між якими відбувається перестрибування атому Cr	Висота потенціального бар'єру		Місця адсорбції, між якими відбувається перестрибування атому Cr	Висота потенціального бар'єру	
	На	еВ		На	еВ
HB - T4			T3 - HB		
T4 → HB	0.06604	1.797039844	HB → T3	0.02512	0.683549983
HB → T4	0.03979	1.082740996	T3 → HB	0.03426	0.932262039
HH - HB			T4 - HH		
HB → HH	0.02524	0.686815349	T4 → HH	0.04507	1.226417107
HH → HB	0.01040	0.282998401	HH → T4	0.03363	0.915118867
HH - T3			T4 - T3		
HH → T3	0.02792	0.759741860	T4 → T3	0.01661	0.451981199
T3 → HH	0.02508	0.682461528	T3 → T4	0.00247	0.067212120

### Висновки

В межах теорії функціонала густини та узагальненого градієнтного наближення для обмінно-кореляційного потенціалу проведено дослідження атомної геометрії 0,5 МШ Cr на Si(001). Визначено найбільш імовірні місця адсорбції атомів хрому на поверхні Si(001). Встановлено, що вже при 0,5 МШ покритті

хромом поверхні Si(001) спостерігалось зняття поверхневої реконструкції з розривом зв'язків в димерах кремнію, а також занурювання атомів хрому в Si(001) підкладку. Оцінено значення висоти потенціального бар'єру, який необхідно подолати атому хрому що дифундує по поверхні кремнію між відповідними найбільш стабільними місцями адсорбції.

### Список використаних джерел

1. Reader A.H., van Ommeren A.H., Weijss P.J.W. Transition metal silicides in silicon technology // Rep. Prog. Phys. – 1992. – 56. – P. 1397-1467.
2. Кривошеєва А.В., Шапошников В.Л., Кривошеев А.Б. Полупроводниковые свойства CrSi<sub>2</sub> с деформированной решеткой // Физ. и техн. полупр. – 2003. – 37, №4. – С. 402-407.
3. Gonze X., Beuken J.-M., Caracas R. First-principles computation of material properties: the ABINIT software project // Comput. Mat. Sci. – 2002. – 25. – P. 478-492.
4. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized gradient approximation made simple // Phys. Rev. Lett. – 1996. – 77. – P. 3865-3868.
5. Fuchs M., Scheffler M. Ab initio pseudopotentials for electronic structure calculations of poly-atomic systems using density-functional theory // Comp. Phys. Commun. – 1999. – 119. – P. 67-98.
6. Naumovets A.G., Vedula Yu.S. Surface diffusion of adsorbates // Surface Sci. Reports. – 1985. – 4, № 7/8. – P. 365-434.

Надійшла до редколегії 27.02.09

УДК 519.9

Коленов С. О., канд. ф.-м. наук, Денисенко П. І.,  
студ.

## Метод попередньої обробки диференційно-фазових даних, заснований на неперервному вейвлет-перетворенні

Для попередньої обробки диференційно-фазових даних запропоновано метод порогової обробки за частотою та амплітудою спектральних складових, заснований на неперервному вейвлет-перетворенні.

Ефективність запропонованого методу показано шляхом його застосування до змодельованих диференційно-фазових даних щодо кількох типів профілів поверхні.

**Ключові слова:** диференційно-фазові дані, неперервне вейвлет-перетворення, порогова обробка.

E-mail: [ksa@mail.univ.kiev.ua](mailto:ksa@mail.univ.kiev.ua), [reader@bigmir.net](mailto:reader@bigmir.net)

Статтю представив докт. ф.-м. наук Скришевський В.А.

### Вступ

Однією з найбільш важливих і актуальних задач лазерної скануючої диференційно-фазової гетеродинної мікроскопії є задача відновлення профілю поверхні з диференційно-фазових даних про нього [1]. Диференційно-фазові дані містять інформацію про різницю в оптичній довжині шляху двох лазерних променів, що поширяються на невеликій відстані один від одного, з якої можна відтворити інформацію про локальні викривлення профілю поверхні шляхом інтегрування вимірюваних даних.

Але неминучча присутність системних похибок та неможливість повного пригнічення зовнішніх і внутрішніх шумових ефектів є ключовими факторами, що призводять до накопичення похибок при інтегруванні вздовж відліків рядка сканування. А це, у свою чергу, зумовлює суттєве спотворення інформації про відновлений профіль поверхні.

Хоча теорії відновлення інформації у диференційно-фазових вимірювальних системах присвячено багато робіт [2-4], проте питання попередньої обробки диференційно-фазових даних з метою запобігання накопиченню похибок при подальшому інтегруванні цих даних і досі залишається актуальним. Це пов'язано з тим, що ефективного методу вирішення цієї задачі в загальному випадку і досі не існує, через що для кожного окремого типу диференційно-фазових

S. O. Kolenov, PhD, P. I. Denysenko, stud.

## Differential-phase data preprocessing method based on continuous wavelet transform

The method of frequency and spectral magnitude thresholding based on continuous wavelet transform is proposed for differential-phase data preprocessing.

The efficiency of proposed method is shown by applying it to simulated differential-phase data of several types of surface profiles.

**Key words:** differential-phase data, continuous wavelet transform, thresholding.

систем і кожного класу досліджуваних за їх допомогою об'єктів потрібні свій підхід. Для лазерних диференційно-фазових гетеродинних систем та об'єктів з шорсткою поверхнею такий метод не розглядався.

Метою даної роботи є дослідження можливості застосування методу порогової обробки за частотою та амплітудою спектральних складових, заснованого на неперервному вейвлет-перетворенні, як засобу попередньої обробки диференційно-фазових даних.

### Теоретичні основи методу

Вейвлет-перетворення функції однієї змінної полягає у її розкладанні за певним базисом, який сконструйовано з солітоноподібної функції  $\psi(x)$ , так званого материнського вейвлету. Будь-який з найбільш часто використовуваних материнських вейвлетів породжує повну ортогональну систему функцій (базис) шляхом власних масштабних змін та зсувів по координатній осі. Кожна з функцій цього базису характеризує як певну частоту, так і локалізацію цієї частоти в координатному просторі [5].

У випадку вейвлет-аналізу (декомпозиції) функції в зв'язку зі зміною масштабу вейвлети здатні виявити відмінність у характеристиках функції на різних частотах, а за допомогою зсуву можна проаналізувати властивості функції в

різних точках на всьому інтервалі дослідження. Завдяки властивості повноти базису, можна здійснити відновлення (реконструкцію або синтез) функції за допомогою зворотного вейвлет-перетворення. Таким чином, на відміну від традиційно застосовуваного для аналізу сигналів перетворення Фур'є вейвлет-перетворення забезпечує двовимірну розгорту досліджуваної функції, при цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні. Крім того, за рахунок особливого вигляду базисних функцій вейвлет-перетворення має великі переваги над перетворенням Фур'є при представленні функцій, які мають розриви та гострі піки, є обмеженими, неперіодичними та/або нестационарними.

Вейвлет-перетворення зазвичай розділяють на неперервне вейвлет-перетворення (НВП) та дискретне вейвлет-перетворення (ДВП). У НВП використовуються усі можливі значення масштабних змін та зсувів по координатній вісі материнського вейвлету, в той час як у ДВП використовується специфічний набір значень масштабних змін та зсувів по координатній вісі. Хоча НВП вимагає більших обчислювальних витрат, ніж ДВП, але, разом з цим, дозволяє виявити набагато більше деталей у структурі досліджуваної функції.

Для функції  $f(x)$  пряме НВП задається виразом:

$$W(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

а обернене НВП задається виразом:

$$f(x) = |a|^{-1/2} C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da}{a^2},$$

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|},$$

де  $W(a,b)$  – вейвлет-спектр,  $b$  – фактор зсуву,  $a$  – фактор масштабної зміни,  $\Psi(\omega)$  – Фур'є-образ материнського вейвлету.

Фільтрація небажаних паразитних складових, що спотворюють реальні значення функції, досягається шляхом порогової обробки вейвлет-спектру за частотою та амплітудою спектральних складових:

$$\hat{W}(a,b) = W(a,b) \cdot Sm(|W(a,b)| - \gamma) \cdot F\{a,b\},$$

де  $Sm(|W(a,b)| - \gamma)$  – функція порогового значення  $\gamma$  амплітуди спектральних складових, що являє

собою функцію Хевіайда,  $F\{a,b\}$  – частотно-координатне вікно певної форми, яке занулює усі значення  $W(a,b)$ , що не потрапили у його межі.

Надалі функція відновлюється шляхом зворотного вейвлет-перетворення, застосованого вже не до вихідного вейвлет-спектру  $W(a,b)$ , а до модифікованого вищезазначенім чином вейвлет-спектру  $\hat{W}(a,b)$ :

$$\hat{f}(x) = |a|^{-1/2} C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}(a,b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da}{a^2}.$$

### Результати застосування методу

Було вирішено обрати профілі поверхні з декількома типами об'єктів, форма яких в загальному випадку наближно відповідає найбільш типовим формам мікропадин або мікросхем, що найчастіше зустрічаються на шорсткій поверхні. Таким чином, були змодельовані три зразки профілю поверхні, що відповідають впадинам прямокутної, трикутної та синусоїдальної форми, а також мають обмежену ширину просторового Фур'є-спектру. Для ускладнення моделі та наближення її до реальної поверхні розглядався випадок наявності на поверхні субмікрошорсткості. Для цього на вказані зразки профілю накладався псевдобільний гаусів шум з величиною середньоквадратичного відхилення, що становила 15% від величини середньоквадратичного відхилення кожного зі зразків. Таке значення величини шуму обирається шляхом співставлення з реальними величинами субмікрошорсткості досить грубо оброблених поверхонь, зазначених у довідниках. Тож зразки набували вигляду, показаного на рис. 1, 2, 3.

Диференційно-фазові дані про змодельовані зразки профілю поверхні було отримано шляхом моделювання процесу кінцево-різницевої дискретизації зразків, який є еквівалентним процесу отримання цих даних в реальному лазерному скануючому диференційно-фазовому гетеродинному мікроскопі. Слід зазначити, що при моделюванні були обрані такі параметри, які враховували зв'язок з реальними параметрами вищезазначеного мікроскопа [6].

В ході роботи проводилось дослідження точності відтворення профілів поверхні за наявності у вимірювальній системі білого шуму. Білий шум було обрано тому, що він досить добре підходить для опису багатьох реальних спотворюючих ефектів. Він моделювався адитивним псевдобільним гаусовим шумом і додавався до отриманих моделюванням диференційно-фазових даних про зразки

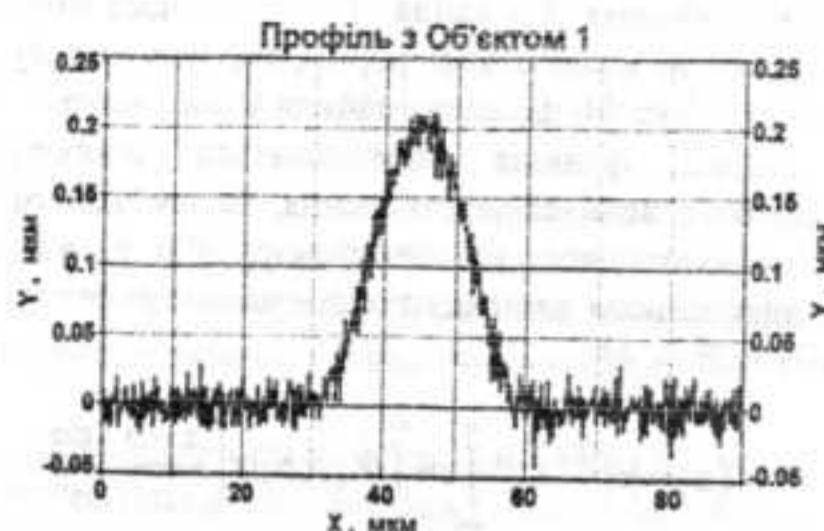


Рис. 1. Змодельований профіль з Об'єктом 1.

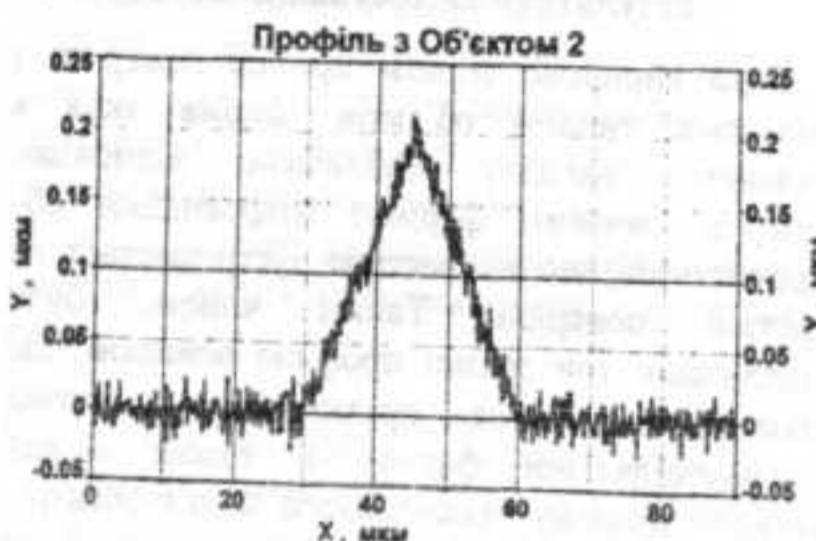


Рис. 2. Змодельований профіль з Об'єктом 2.

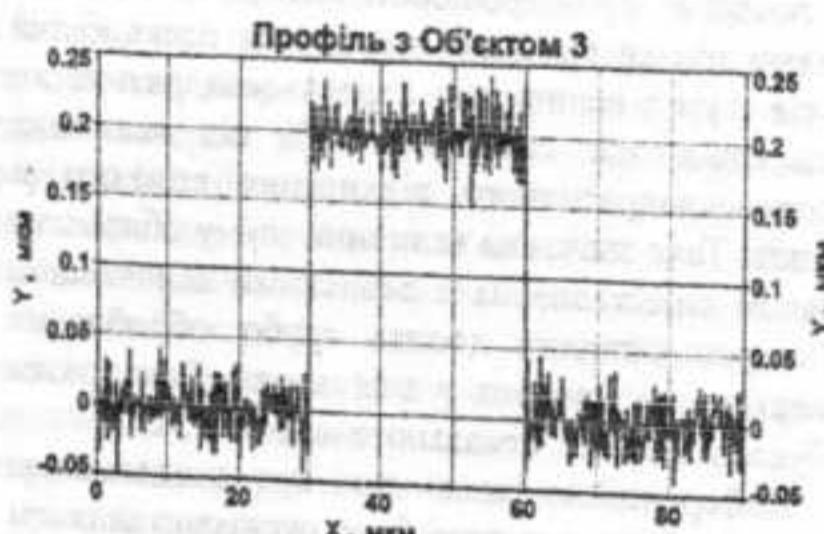


Рис. 3. Змодельований профіль з Об'єктом 3.

профілю, тим самим імітуючи присутні системні похибки та шумові ефекти. Надалі нами досліджувалась точність відтворення профілю поверхні при зміні у вимірювальній системі співвідношення сигнал/шум від 40 дБ до 5 дБ з кроком в 5 дБ.

Похибка відтворення зразків профілю оцінювалась певною безрозмірною величиною – критерієм  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

Тут величини  $\sigma$  та  $\sigma_0$  визначалися наступними виразами:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^n - y_i^0)^2},$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^0)^2},$$

де  $y_i^0$  – величина відхилення  $i$ -ої точки профілю, відновленого зі змодельованих диференціально-фазових даних, на які шум не накладався,  $y_i^n$  – величина відхилення  $i$ -ої точки профілю, відновленого зі змодельованих диференціально-фазових даних, на які накладався певний шум. В нашому випадку ми мали набір точок з  $N=512$ .

В наших розрахунках при застосуванні методу порогової обробки даних в якості материнського вейвлету ми використовували МНАТ-вейвлет (англ. "Mexican hat" – сомбреро), що є представником сімейства вейвлетів, побудованих на основі похідних від функції Гаусса:

$$\psi(x) = \frac{(-1)^{m+1}}{[\Gamma(m+1/2)]^{1/2}} \frac{d^m}{dx^m} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

і отримується при  $m=2$ . Цей вейвлет володіє однією з найкращих частотно-координатних локалізацій і дозволяє дуже добре виявляти особливості поведінки функції на різних частотах. Також при цьому ми використовували частотно-координатне вікно спеціальної форми (не прямокутної), щоб якомога краще реалізувати фільтрацію паразитних складових.

Надалі, з метою порівняння ефективності відновлення змодельованих зразків профілю, критерій  $\Delta$  застосовувався як до необрблених зашумлених диференціально-фазових даних, так і

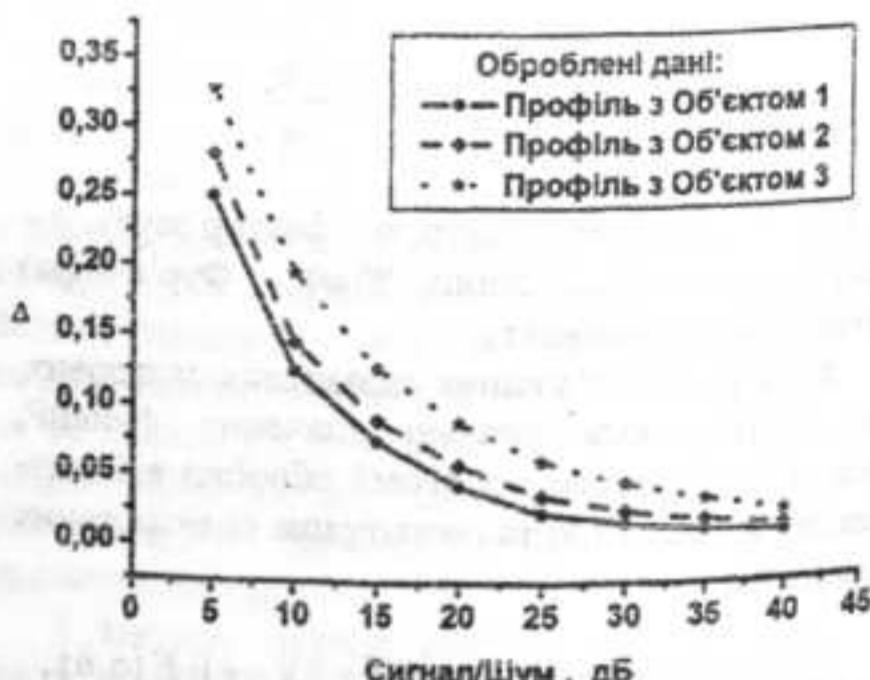


Рис. 4. Залежність похибки відтворення профілю від співвідношення сигнал/шум для оброблених даних про три зразки профілю.

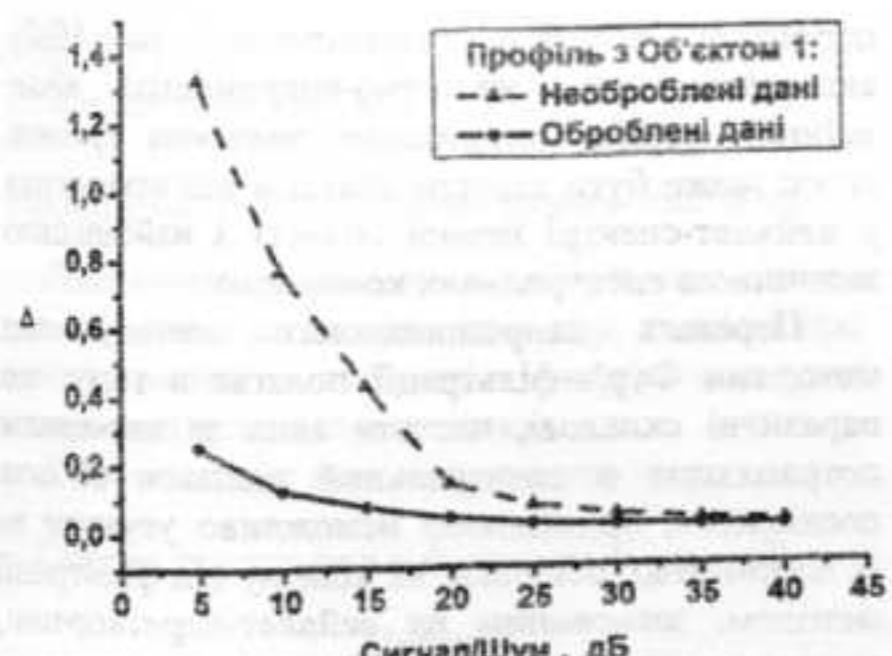


Рис. 5. Залежність похибки відтворення профілю від співвідношення сигнал/шум для оброблених та необроблених даних про зразок з Об'єктом 1.

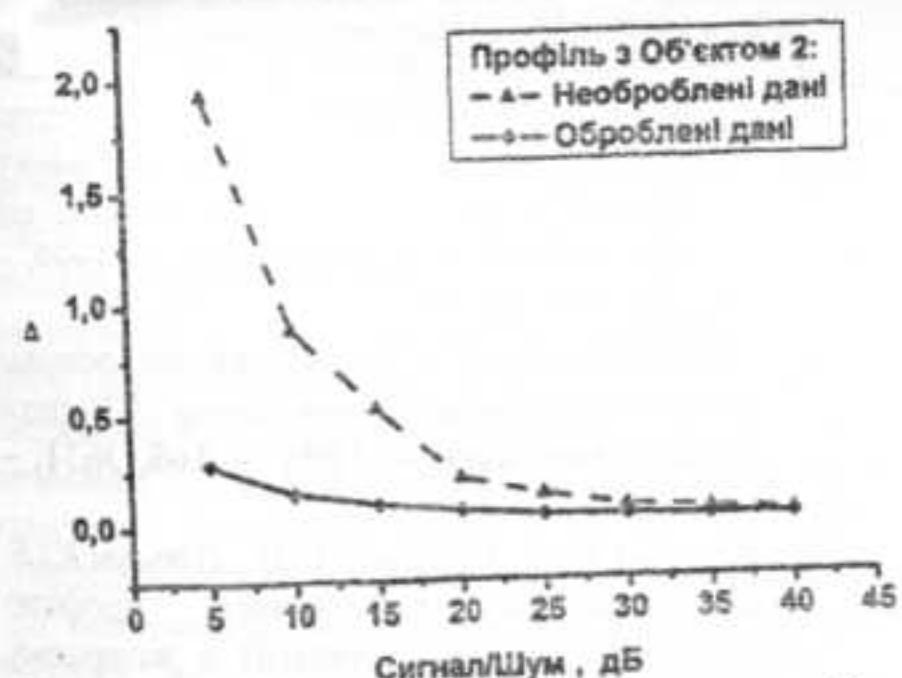


Рис. 6. Залежність похибки відтворення профілю від співвідношення сигнал/шум для оброблених та необроблених даних про зразок з Об'єктом 2.

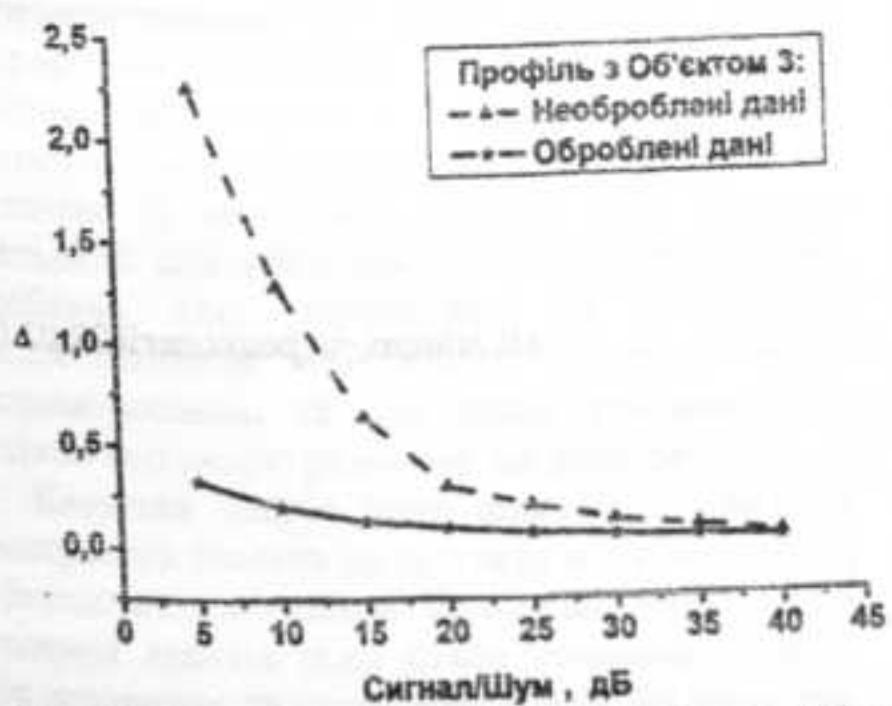


Рис. 7. Залежність похибки відтворення профілю від співвідношення сигнал/шум для оброблених та необроблених даних про зразок з Об'єктом 3.

до зашумлених диференційно-фазових даних, що зазнали процедури порогової обробки.

Так для адитивного псевдобілого гаусового шуму, доданого до кожного зі змодельованих зразків профілю, було отримано залежності, зображені на рис. 4, 5, 6, 7.

Крім цього також було проведено порівняння точності відтворення профілю поверхні з необроблених зашумлених диференційно-фазових даних, з зашумлених диференційно-фазових даних, що зазнали процедури порогової обробки, заснованої на НВП, та з зашумлених диференційно-фазових даних, що зазнали процедури порогової обробки, заснованої на перетворенні Фур'є. Остання була реалізована майже аналогічним чином, що й процедура порогової обробки, заснована на НВП: на спектр Фур'є накладалися функція порогового значення амплітуди спектральних складових та частотне вікно, яке занулює усі значення спектральних складових, що не потрапили у його межі. Дослідження проводилося на зразку профілю з Об'єктом 3 (типу прямокутний виступ), для якого і наведено залежності похибки відтворення на рис. 8.

### Висновки

З наведених вище залежностей можна зробити висновок, що метод порогової обробки за частотою та амплітудою спектральних складових, заснований на НВП, є досить ефективним засобом попередньої обробки диференційно-фазових даних. Він виявляється однаково ефективним для усіх трьох

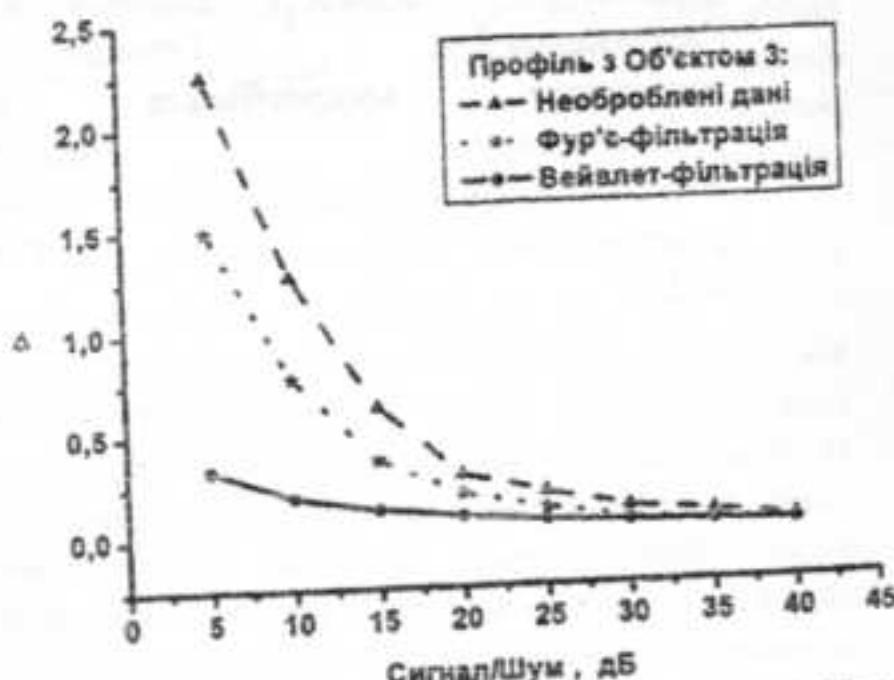


Рис. 8. Залежність похибки відтворення профілю від співвідношення сигнал/шум для оброблених за допомогою Фур'є-фільтрації і вейвлет-фільтрації та необроблених даних про зразок з Об'єктом 3.

змодельованих зразків профілю поверхні. Ця ефективність особливо яскраво проявляється при зменшенні співвідношення сигнал/шум у вимірювальній системі. Повільне зростання величини  $\Delta$  при зменшенні співвідношення сигнал/шум для попередньо оброблених за допомогою методу, заснованого на НВП, диференційно-фазових даних є наслідком того, що жодна процедура попередньої обробки даних не забезпечує абсолютно повного усунення системних похибок і шумових ефектів, а вони, в свою чергу, накопичуються при відтворенні профілів поверхні шляхом інтегрування цих даних.

В зв'язку з цим для якомога кращого пригнічення паразитних складових, що призводять до спотворення диференційно-фазових даних, також запропоновано у методі

порогової обробки, заснованому на НВП, використовувати частотно-координатне вікно змінної форми, оптимальне значення границь якого може бути оцінене шляхом відокремлення у вейвлет-спектрі певної області з найбільшою величиною спектральних компонент.

Перевага запропонованого методу над методами Фур'є-фільтрації полягає в тому, що паразитні складові, частоти яких за значенням потрапляють в спектральний діапазон об'єкта дослідження, принципово неможливо усунути за їх допомогою, оскільки, на відміну від фільтрації методом, заснованим на вейвлет-перетворенні, вони не дозволяють локалізувати координатне положення частот та подальше виключення паразитних складових без втрати спектральної інформації про сам об'єкт.

#### Список використаних джерел

1. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М., Свидзинский К.К. Восстановление профиля микрообъекта в гетеродинном дифференциальном микроскопе // Оптика и спектроскопия. – 1997. – 83, №3. – С. 516–527.
2. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М., Свидзинский К.К. Формирование отображения микроступенчатого профиля в гетеродинном дифференциальном-фазовом микроскопе // Кvant. elektronika. – 1996. – 23, №4. – С. 368–369.
3. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М., Свидзинский К.К. Определение параметров микрообъекта по комплексному отклику дифференциального микроскопа // Кvant. elektronika. – 1998. – 25, №9. – С. 838–842.
4. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М. Анализ комплексного отклика гетеродинного дифференциального интерферометра на микроступенчатый профиль // Кvant. elektronika. – 1999. – 26, №1. – С. 69–72.
5. Астафьевова И.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – 166, №11. – С. 1145–1170.
6. Коленов С.О., Смирнов Е.М., Пільгун Ю.В. Достовірність відтворення профілю поверхні при дискретизації в лазерному дифференційно-фазовому скануючому мікроскопі // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2002. – Випуск №3. – С. 303–312.

Надійшла до редколегії 27.02.09

УДК 531.1

Коломієць А.Р., к.ф.-м.н.

## Модель системи елементарних частинок

Розглянута можливість об'єднання дійсно елементарних частинок в систему, яка дозволяє застосовувати основні характеристики частинок для обчислення їх мас.

Ключові слова: група, рівень, згусток.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

### Вступ.

Єдність об'єктів та явищ матеріального світу знаходить свій вияв в єдиності законів, за якими визначається поведінка галактик, зірок та атомів. Чим далі наука проникає в глибини мікросвіту, тим чіткіше виявляється його єдність з космосом, тим точнішими стають закони фізичних явищ.

Багатостатність об'єктів та явищ матеріального світу в просторі та часі має за свою першооснову три види матерії: речовину, статичне поле та випромінювання. Від дослідження протяжних твердих тіл та безперервних хвиль наука з часом перейшла до вивчення дискретних форм речовини та випромінювання. Мінімальною порцією речовини – її квантом – став атом (молекула), а квантом випромінювання – фотон. При руйнуванні атома перестає існувати речовина, а при поглинанні фотона зникає випромінювання. Матерія, як відомо, при цьому не зникає – змінюється лише форма її існування.

Відкриття квантів світла та дифракції електронів призвело до розмивання чіткої меж частинками речовини та випромінюванням. В науці з'явився термін „корпускулярно-хвильовий дуалізм”, обумовлений тим, що в квантовій механіці рух частинки розглядається як розповсюдження коливань її хвильової функції. Про фізичну реальність цих коливань не може бути й мови. Особливо слід наголосити на тому, що розповсюдження коливань в просторі, тобто випромінювання, та рух поля, пов'язаного з певною частинкою речовини, це різні речі.

Квантова теорія поля шляхом вторинного квантування вводить до розгляду квanti поля, які співставляються певним частинкам. Результатом введення квантів поля стало стирання меж речовиною та статичним полем. На жаль при такому квантуванні зникає безперервне поле між квантами. Цей недолік квантування поля та запровадження механізму обмінної взаємодії між частинками речовини стали перепоною на шляху

A.R.Kolomiets, C.Sci (Phys-Math).

## Model of system of elementary particles.

The possibility of unification of true elementary particles in system, which allow to use of characteristics of particles in order to calculation their mass, is examine.

Key Words: group, condenser, level.

вирішення проблеми єдності матеріального світу, на шляху пізнання єдиної матеріальної субстанції, яка лежить в основі світобудови. Тут доцільно нагадати думку А.Ейнштейна [1]: .... я не бачу в існуючій ситуації іншого можливого шляху, крім чисто польової теорії, котра, між іншим, повинна тоді розв'язати таку надзвичайно важку задачу, як вивід атомістичного характеру енергії".

### Модель системи.

Все вищезазначене змушує запропонувати дещо інший підхід до питання структури мікросвіту. Замість окремих, ізольованих квантів поля пропонується розглядати його згустки у безперервному середовищі, тобто на фоні того ж поля. Основною характеристикою такого згустку, при цьому, стає його власна внутрішня енергія. Спектр цих енергій має дискретний характер. Кожний енергетичний рівень може поділятись на підрівні, які відповідають певним зарядовим станам згустку. Якщо згусток певного рівня отримує достатню додаткову енергію, то він може перейти на більш високий дозволений рівень. Природна нестабільність рівнів призводить до розпаду згустків та формуванню нових з меншою енергією, які відповідно переходять на нижчі дозволені рівні.

Основні рівні об'єднуються в групи по п'ять рівнів в кожній. Характерною для всіх груп є схожа залежність часу існування згустку від номера рівня в групі  $k$  та від його зарядового стану  $q$ . Крім основних рівнів та відповідних їм підрівнів, існують ще так звані резонансні рівні, розташування яких в енергетичній шкалі визначається іншими законами. Час існування згустків на резонансних рівнях на кілька порядків менший, ніж на основних.

Мабуть найважливішим в моделі системи, яка пропонується, є постулат існування граничної енергії згустку. Це означає, що намагання підвищити енергію згустку, який знаходиться на рівні, близькому до граничного, призведе не до підвищення його енергетичного

рівня, а до поділу згустку на кілька менших. Границний рівень також поділяється на три підрівні.

При відсутності теоретичного обґрунтування будь-якої моделі для доведення її життєвості можливо застосувати емпіричні закономірності. І хоч ні модель, ні сукупність емпіричних формул, які узгоджуються з моделлю, не дозволяють робити узагальнюючі висновки, вони дають суттєвий поштовх до пошуків відповідних теоретичних побудов. Формулюються та доводяться теореми, провадяться додаткові експериментальні дослідження, і в кінцевому підсумку створюється теорія, яка і перетворює

модель в систему. Суттєвою умовою для цієї теорії є її узгодження з усіма емпіричними закономірностями незважаючи на те, що при цьому ми змушені будемо відмовитись від деяких усталених поглядів на явища в мікросвіті.

В поданій нижче таблиці 1 наведені основні характеристики згустків перших двох груп, а також відповідні позначення елементарних частинок. До третьої групи належать згустки, яким відповідають частинки:  $\Omega$  - гіперон ( $k=12$ ),  $t$  - лептон ( $k=14$ ) та  $D$  – мезони ( $k=15$ ). Наведені в таблиці маси згустків розраховані за формулою:

$$M = \frac{M_0}{1 + \left[ \frac{2\pi}{k - 1 - 0.5 \sin \theta(k, n, qa)} \right]^2},$$

де  $q$  – заряд частинки, а множник  $a = 1$  для частинок та  $a = -1$  для античастинок;  $M_0$  – гранична маса згустку, яка в залежності від зарядового стану набуває значень (в MeV): 2232,903 ( $qa=+1$ ), 2236,829 ( $qa=0$ ), та 2247,888 ( $qa=-1$ ).

Функція  $\theta(n, k, qa)$  має такий вигляд:

$$\theta = \frac{A}{\phi(\gamma, k)}, \quad \text{де} \quad \phi(\gamma, k) = \exp(\gamma k) + 1 - \gamma k,$$

коєфіцієнт  $\gamma$  для першої групи  $\gamma_1 = 0,364273$ , а для другої -  $\gamma_2 = 0,37253$ .

Таблиця 1.

п	k	q	J	частинка	маса	
					розрахунок	експеримент
1	1	0	-1/2	$v_e$	0,000013 MeV	$< 35 \times 10^{-6}$
	1	0	1/2	$v_u$	0,0181274	$< 0,51$
	1	-1	1/2	$e^-$	0,511003	0,511003(1)
	2	+1	1/2	$\mu^+$	105,65946	105,6595(3)
	2	0	-1/2	$v_t$	111,1568	$< 250$
	2	0	1/2	-	112,2304	
	3	0	0	$\pi^0$	134,964	134,964(7)
	3	-1	0	$\pi^-$	139,569	139,569(6)
	4	+1	0	$K^+$	493,710	493,71(4)
	4	0	0	$K^0$	497,70	497,7(1)
	4	0	-1	$K^0$	496,20	497,7(1)
	5	0	-1/2	$\eta$	548,946	548,8(6)
2	6	+1	1/2	$p^+$	938,280	938,280(3)
	6	0	1/2	$\pi^0$	939,573	939,573(3)
	7	0	1/2	$\Lambda_0$	1115,601	1115,60(5)
	8	+1	1/2	$\Sigma^+$	1189,370	1189,37(6)
	8	0	1/2	$\Sigma^0$	1192,48	1192,48(8)
	8	-1	1/2	$\Sigma^-$	1197,3515	1197,35(6)
	9	0	0	$\Xi^0$	1314,91	1314,9(6)
	9	-1	0	$\Xi^-$	1321,30	1321,3(1)
	10	+1	1/2	-	1449,185	
	10	0	1/2	-	1451,42	
	10	-1	1/2	-	1458,911	

Коефіцієнт А для кожної групи змінюється в незначних межах, але характер цих змін

становить певний інтерес для подальших досліджень. Так для згустків першої групи:

$$A(l, k, q) = 39,068365 + \left[ 0,0722 \cdot y + 0,115795 + 0,00660811 \cdot \arcsin \cos \frac{\pi}{5} \cdot (k - 1/2) \right] \cdot (-1)^q + 0,11256 \cdot (-1)^k$$

де  $y$  – спін згустку.

$$A(2, k, q) = 44,48644 + \left[ 0,0722 y + 0,097197 + 0,090336 \cdot \arcsin \cos \frac{\pi}{5} \cdot (k - 1/2) \right] \cdot (-1)^q + 0,24012 \cdot (-1)^k;$$

Розраховані маси співпадають з експериментальними за виключенням маси нейтрино  $\nu_e$ , для якого можливо назвати лише верхню межу  $\sim 13$  еВ.

Суттєвим доповненням до запропонованої моделі є визначення часу існування різних

Для згустків другої групи:

згустків. Аналіз наявних даних [2] показав, що згустки на всіх рівнях мають скінчений час існування. Цей час розрахувався за досить простими формулами, одна з яких для заряджених згустків має такий вигляд:

$$\ln \tau = -5,173n + \frac{19,7785}{l(l-1/2)} - 14,688 + 0,546(-1)^l - 0,306q;$$

де  $n$  – номер групи, а  $l$  – номер рівня в кожній групі:  $l=k-5(n-1)$ :

Таблиця 2

n	l	q	частинка	час існування	
				розрахунок	експеримент
1	1	-1	e <sup>-</sup>	2,816·10 <sup>8</sup>	
	2	+1	$\mu^+$	2,197·10 <sup>-6</sup>	2,197·10 <sup>-6</sup>
	3	-1	$\pi^-$	2,603·10 <sup>-8</sup>	2,603·10 <sup>-8</sup>
	4	+1	K <sup>+</sup>	1,236·10 <sup>-8</sup>	1,237·10 <sup>-8</sup>
2	1	+1	p <sup>+</sup>	8,65·10 <sup>5</sup>	
	3	+1	$\Sigma^+$	8·10 <sup>-11</sup>	8·10 <sup>-11</sup>
	3	-1	$\bar{\Sigma}$	1,475·10 <sup>-10</sup>	1,482·10 <sup>-10</sup>
	4	-1	$\Xi^-$	1,293·10 <sup>-10</sup>	1,63·10 <sup>-10</sup>

Результати розрахунків наведені в таблиці 2.

Очевидно, що згусток  $k$ -того рівня з часом має можливість перетворитись на кілька менших, яким відповідають нижчі рівні, то згустки першого рівня можуть припинити існування як згустки, тобто вільні електрони, позитрони, нейтрино є певною межею між світом дискретних матеріальних утворень та світом неперервної матеріальної першосубстанції, характеристики якої суттєво відрізняються від існуючих в квантовій теорії і складають основну проблему сучасної фізики.

Таким чином, запропонована система дозволяє відмовитись від подальшої дискретизації внутрішньої структури частинок шляхом впровадження кварків та інших

теоретичних об'єктів. Ця система дозволяє також відмовитись від застосування літер (множина яких обмежена!) для позначення частинок, замінивши їх цифрами.

Питання про відмінність згустків для частинок та античастинок пов'язане з проблемою внутрішньої структури згустку, з механізмом його утворення в фізичному вакуумі. Основним при цьому є з'ясування характеру взаємодії згустку з фоном, тобто з полем.

На останок слід зауважити, що створення прийнятної системи елементарних частинок буде відбуватись одночасно з переглядом деяких питань фізики, астрофізики та теорії еволюції Всесвіту.

### Список використаних джерел.

- Альберт Ейнштейн. Сущность теории относительности – Москва: ИЛ, 1955.
- Физика микромира (энциклопедия), под ред. Ширкова Д.В., «СЭ», 1980.

Надійшла до редколегії 05.03.2009

УД621.375+535

Овечко В.С., професор

## Ортонормований базис для радіосигналів

В роботі запропоновано розклад радіосигналів, зокрема надширокосмугових, в ортонормований ряд елементарних хвильових пакетів (ЕХП)

**Ключові слова:** ортонормований базис, радіосигнали, елементарні хвильові пакети, спектр.

mail:ovs@univ.kiev.au

Статтю представив д. ф.-м. н. Левицький С. М.

### Вступ

Задачі аналізу і синтезу сигналів, в тому числі радіосигналів, були і залишаються традиційними для радіолокації, зв'язку, теорії інформації, тощо. Нові проблеми настали у зв'язку з розвитком методів надширокополосної радіолокації, розробкою техніки генерації і вимірювання лазерних імпульсів надкороткої тривалості, оптичних стандартів частоти, часу і довжини [1,2].

Найбільш поширенім методом дослідження радіосигналів – електромагнітних полів, що поширяються в просторі, є метод Фур'є-аналізу [3,4]. Поряд з багатьма перевагами, однією з яких є наочність спектрів, в які розкладаються часові сигнали, перетворення Фур'є (ПФ) має суттєві недоліки.

Зокрема, обмежені в часі сигнали розкладаються в гармонічні функції, визначені на нескінченому інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Отже, по-суті, розклад відбувається за „нефізичними” базовими функціями. По-друге, для знаходження окремої спектральної компоненти ( $A_0, \omega$  - частота) треба врахувати поведінку сигналів на всій часовій осі. Це значно ускладнює розрахунки і, до того, робить неможливим розділення в часі. До речі, для подолання останнього недоліку, розроблена методика вейвлет-перетворення [5].

Метою даної роботи є розробка представлення (розкладу) радіосигналів, яке б врахувало властивості реальних (фізичних) електромагнітних полів.

Ovechko V.S., professor

## Orthogonal normalized base for radio signals

*It has been proposed orthogonal normalized series of the elementary wave packets (EWP) for radio signals presentation, moreover ,super wideband ones*

**Key Words:** Orthogonal normalized base, radio signals, the elementary wave packets,spectrum

### 1. Властивості радіосигналів (РС) – електромагнітних хвиль (ЕМХ)

Електромагнітні хвилі (ЕМХ) – це розв'язок хвильового рівняння, зокрема, для електричної компоненти  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  електромагнітного поля. Характерною особливістю ЕМХ є те, що їх джерелом у вільному просторі є струми зміщення [6]. Це була чи не найважливіша гіпотеза, що дозволила Дж. Максвеллу сформулювати його відому систему диференціальних рівнянь в частинних похідних. Струми зміщення з'являються тоді, коли поле змінюється в просторі (і в часі). Таким чином поширяються електромагнітні хвилі. Якщо обмежитись фінітним рухом заряджених частинок, то саме завдяки йому формуються ЕМХ, в яких відсутня постійна складова поля. Ця умова може бути записана як

$$I = E_0 \int_0^\tau f(t) dt = 0, \quad (1)$$

де  $E_0$  - амплітуда поля,  
 $\tau$  - тривалість імпульсу,  
 $f(t)$  - форма імпульсу.

В роботі [10] величина  $I$  одержала назву „параметр дивності”, що означає, що звичайні генератори ЕМХ (атоми, молекули, електронні пучки в резонаторах і таке інш.) генерують правильні „не дивні” імпульси. До цього питання ми ще повернемося в подальшому.

До умови (1) можна додати природну умову обмеженості ЕМ імпульсу в часі

$$f(0) = f(\tau) = 0. \quad (2)$$

Нарешті, якщо звернутись до розв'язку задачі дифракції ЕМХ (див. наприклад, [7]), то можна додати ще одне обмеження – на швидкість зміни амплітуди ЕМХ в моменти часу  $t = 0$  і  $t = \tau$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=\tau} = 0. \quad (3)$$

Якби умова (3) не виконувалась, то в момент досягнення фронту імпульсу певної точки дифракційного поля, спостерігався б скачок амплітуди, що не є фізичним.

Таким чином, будь-яке представлення (розділ) ЕМХ має задовільнити вимогам (1)-(3). Сумісність умов (1)-(3) було використано в роботах [11], [12] автора для опису фемтосекундних оптичних імпульсів.

Якщо звернутись до умов, за якими функція може бути розкладена в інтеграл Фур'є [4], а це „її неперервність і абсолютно інтегрованість”, то практично будь-який фізичний РС задовільняє їм. В той же час, базові функції Фур'є – представлення – гармонічні не задовільняють умовам (1)-(3) і не є фізичними, таким чином, реалізуєми в експерименті. Складається „дивна” ситуація, коли для аналізу фізичного сигналу використовується його розклад за „нефізичними” функціями.

Таким чином, метою цієї роботи є розробка ортонормованого представлення (ряду), яке б автоматично враховувало умови (1)-(3), для подальшого його використання в аналітичних та чисельних методах аналізу і синтезу радіосигналів. Як це буде з'ясовано далі, таке представлення, на відміну від відомого розкладу Фур'є, є особливо актуальним в граничних випадках: 1) лазерних імпульсів фемтосекундної тривалості, 2) лазерних стандартів часу (і довжини), 3) розробки методів надширокосмугової радіолокації і таке інш.

## 2. Базові ортонормовані хвильові функції – елементарні хвильові пакети (ЕХП)

В курсі математичного аналізу доводиться [4], що ортонормований узагальнений ряд Фур'є забезпечує мінімізацію середньоквадратичного відхилення часткових сум, що апроксимують функцію, та його рівномірну збіжність. Але цього не є достатнім, оскільки залишаються не врахованими фізичні умови (1)-(3). Їх врахування складає мету даного розділу.

Для задоволення умови (1) достатньо розклад функції  $f(t)$  вести за сумою добутків ортональних функцій, як це було

запропоновано в роботі [11]. В якості таких функцій виберемо гармонічні функції. Тоді послідовність функцій  $\Phi_{nm}(x)$ , які є добутком гармонічних функцій, набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\sin x \sin 2x, \quad \sin x \sin 3x, \dots \\ &\sin 2x \sin 3x, \quad \sin 2x \sin 4x, \dots \\ &\sin 3x \sin 4x, \quad \sin 3x \sin 5x, \dots \\ &\sin 4x \sin 5x, \quad \sin 4x \sin 6x, \dots \end{aligned}$$

де  $x = \frac{t}{\tau}$ .

Не важко перевірити, що кожна з цих функцій  $\Phi_{nm}(x)$  окрім (1) задовільняє і умовам (2), (3):

$$\Phi_{nm}(0) = \Phi_{nm}(\pi) = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{nm}(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi_{nm}(x)}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0 \quad (5)$$

Наступним кроком має бути формування з функцій  $\Phi_{nm}(x)$  ортонормованого ряду. Для цього скористаємося процесом ортогоналізації Грама-Шмідта [8]. По-перше, покладемо  $V_1(x) = \Phi_1(x)$ . Далі для побудови  $i+1$  ортонормованої функції використаємо рекурентну формулу

$$V_{i+1}(x) = \Phi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (U_k, \Phi_{i+1}) U_k(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де  $(U_k, \Phi_{i+1}) = \int_0^\pi U_k(x) \Phi_{i+1}(x) dx$  – скалярний добуток.

В формулі (6) ми врахували, що функції  $U_i(x)$  є не тільки ортогональними, а і нормованими

$$U_i = \frac{V_i(x)}{\sqrt{(V_i, V_i)}}. \quad (7)$$

Таким чином, застосувавши алгоритм (6), (7) одержимо наступну ортонормовану послідовність функцій, наприклад, непарних одержимо наступну ортонормовану послідовність

$$U_1(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} [\cos(x) - \cos(3x)],$$

$$U_3(x) = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \left[ \frac{1}{2} (\cos(x) + \cos(3x)) - \cos(5x) \right],$$

$$U_5(x) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left[ \frac{1}{3} (\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)) - \cos(7x) \right],$$

$$U_7(x) = \sqrt{\frac{8}{5\pi}} \left[ \frac{1}{4} (\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)) - \cos(9x) \right],$$

$$\dots$$

Як можна побачити, загальна формула для  $2n_0 + 1$ -го доданку ряду набуває вигляду

$$U_{2n_0+1}(x) = \sqrt{\frac{2(n_0+1)}{\pi(n_0+2)}} \left[ \frac{1}{n_0+1} \sum_{n=0}^{n_0} \cos[(2n+1)x] - \cos[(2n_0+3)x] \right], \quad (8)$$

$$n_0 = 0, 1, \dots$$

Аналогічно можна одержати загальну формулу для парних доданків ряду

$$U_{2n_0+2}(x) = \sqrt{\frac{2(n_0+1)}{\pi(n_0+2)}} \left[ \frac{1}{n_0+1} \sum_{n=0}^{n_0} \cos[(2n+2)x] - \cos[(2n_0+4)x] \right], \quad (9)$$

$$n_0 = 0, 1, \dots$$

До того як записати остаточний вигляд ряду, розрахуємо суми в виразах (8), (9), для чого скористаємося табличним виразом для

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos(\alpha + i\delta) [9].$$

Тоді остаточно одержимо вираз для будь-якого радіосигналу  $f(x)$  у вигляді ортонормованого на проміжку  $[0, \pi]$  ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} U_{2n+1}(x) + B_{2n+2} U_{2n+2}(x)), \quad (10)$$

де

$$U_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)}} \left[ \frac{\sin[x(2n+2)]}{2(n+1)\sin[x]} - \cos[x(2n+3)] \right], \quad (11)$$

$$U_{2n+2}(x) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)}} \left[ \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin[x(2n+3)]}{\sin[x]} - 1 \right) - \cos[x(2n+4)] \right] \quad (12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Коефіцієнти  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+2}$  як і в будь якому ортонормованому ряду, визначаються скалярними добутками

$$A_{2n+1} = \int_0^\pi f(x) U_{2n+1}(x) dx, \quad (13)$$

$$B_{2n+2} = \int_0^\pi f(x) U_{2n+2}(x) dx, \quad (14)$$

Ряд (10) завдяки тому, що його доданки задовільняють умовам (1)–(3) і є ортонормованим, може бути названий як розклад за елементарними хвильовими пакетами (ЕХП), а відповідний розподіл амплітуд  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+2}$  – ЕХП-спектром. Відмітимо, що незважаючи на те, що ми розкладаємо відокремлений радіоімпульс, його розклад (10) має вигляд ряду, а не інтегралу. Це є наслідком умов (1)–(3). Якщо знехтувати поведінкою РС в околі точок  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $x_2 \rightarrow \pi$ , і розглядати квазімохроматичне наближення ( $n \gg 1$ ), то одержимо розклад за гармонічними функціями:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[x(2n+3)], \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[x(2n+4)].$$

як і в перетворенні Фур'є.

У виразах для ЕХП (11,12) в знаменнику розташована функція  $\sin[x]$ , яка  $\rightarrow 0$  в т.т.  $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pi$ . Але ніякої особливої точки немає, оскільки маємо невизначеність типу  $0/0$ . За правилом Лопітала вона прямує до

$$\lim_{x \rightarrow 0, \pi} \frac{\sin[x(2n+2)]}{\sin[x]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, \pi} \frac{(2n+2) \cos[x(2n+2)]}{1 \cos[x]} = \pm 2(n+1)$$

Тож саме стосується і поведінки функції для  $U_{2n+2}(x)$  в т.т.  $x_{1,2} = 0, \pi$ . Отже, вирази в квадратних дужках в (11), (12) прямають до нуля в т.т.  $x_{1,2} = 0, \pi$ .

### 3. Розв'язок деяких „проблем” оптики

Ефективність застосування ЕХП – розкладу покажемо на прикладі розв’язку двох відомих проблем. Перша, - це оптимізація форми фемтосекундних оптических імпульсів. Оптимізація з точки зору знаходження форми надкороткого оптичного імпульсу певної тривалості, що забезпечує мінімальну необхідну швидкість зміни амплітуди у часі і, отже, потужність і смугу частот. Зрозуміло, що цим вимогам можуть задовольняти ЕХП низких порядків. На рис.1. побудовано непарні ЕХП, на рис. 2 – парні. Нас цікавить поведінка першої похідної по часу від амплітуди. Відповідні залежності побудовано на рис.3, рис.4. Видно, що оптимальним є непарний ЕХП імпульс нульового порядку  $U_1(x)(n=0)$ .

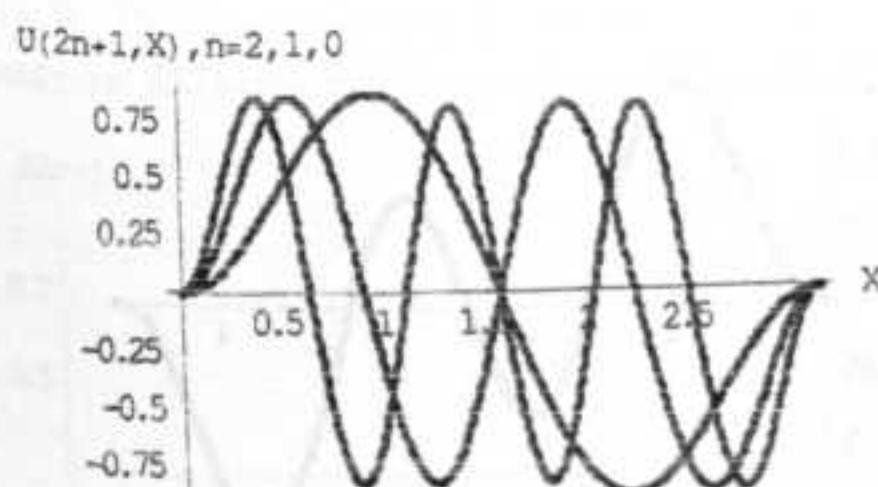


Рис.1. Непарні ЕХП: n=0,1,2

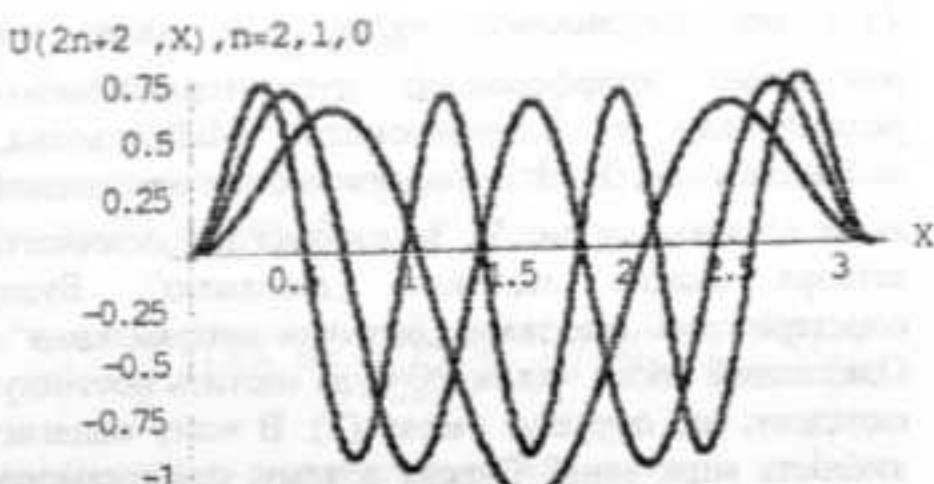


Рис.2. Парні ЕХП: n=0,1,2.

dU(2n+1,X)/dx, n=2,1,0

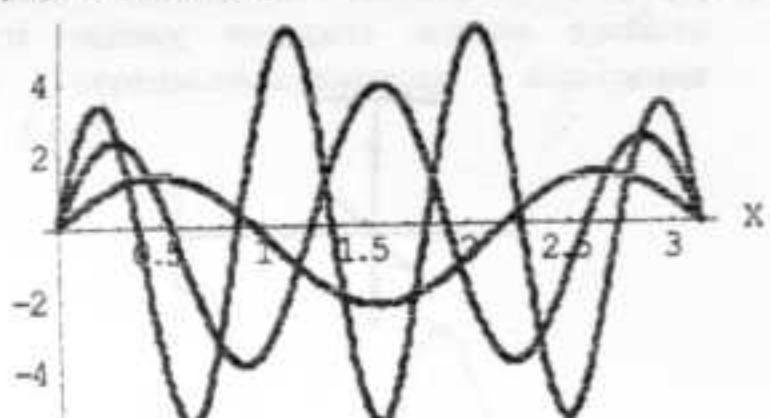


Рис.3. Швидкість зміни амплітуди ЕХП (непарні): n=0,1,2

dU(2n+2,X)/dx, n=2,1,0

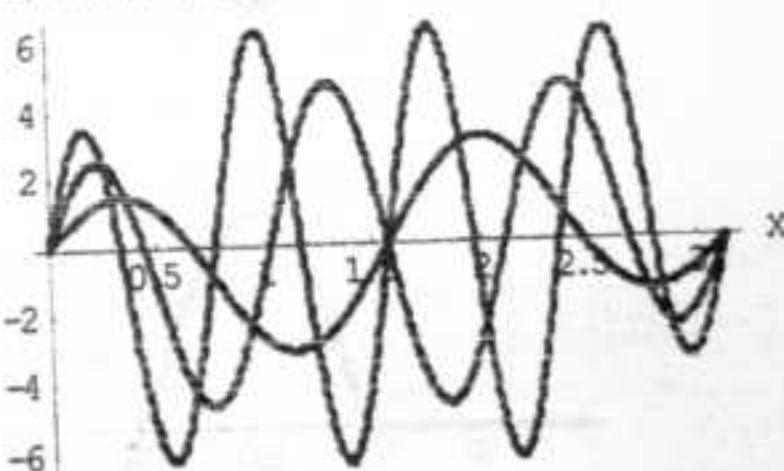


Рис.4. Швидкість зміни амплітуди ЕХП (парні): n=0,1,2

Ще одна проблема стосується так званих „дивних”, за термінологією автора роботи [10], електромагнітних імпульсів. Параметр „дивності”

$I(1)$  має дорівнювати нулю. Але, якщо ми розглянемо інтерференцію цуга гармонічного радіосигналу в інтерферометрі Майкельсона, затриманого на  $\lambda/2$ , то одержимо дві напівхвилі як це показано на рис.5а. За допомогою оптичного затвора можна виділити „півхвилю”. Буде спостерігатись так зване „оптичне випрямлення”. Одержані таким чином РС буде містити постійну складову, що порушує умову (2). В чому полягає хибність міркувань? Справа в тому, що з самого початку вибрана нефізична форма РС-цуг гармонічного сигналу. Насправді, якщо її вибрati у вигляді ЕХП, наприклад, нульового порядку, то одержимо інтерференційний сигнал так, як це розраховано на рис.5б. Ніякої невідповідності умові (1) немає, якщо РС вибрati у вигляді розкладу за елементарними хвильовими пакетами (10)-(12).

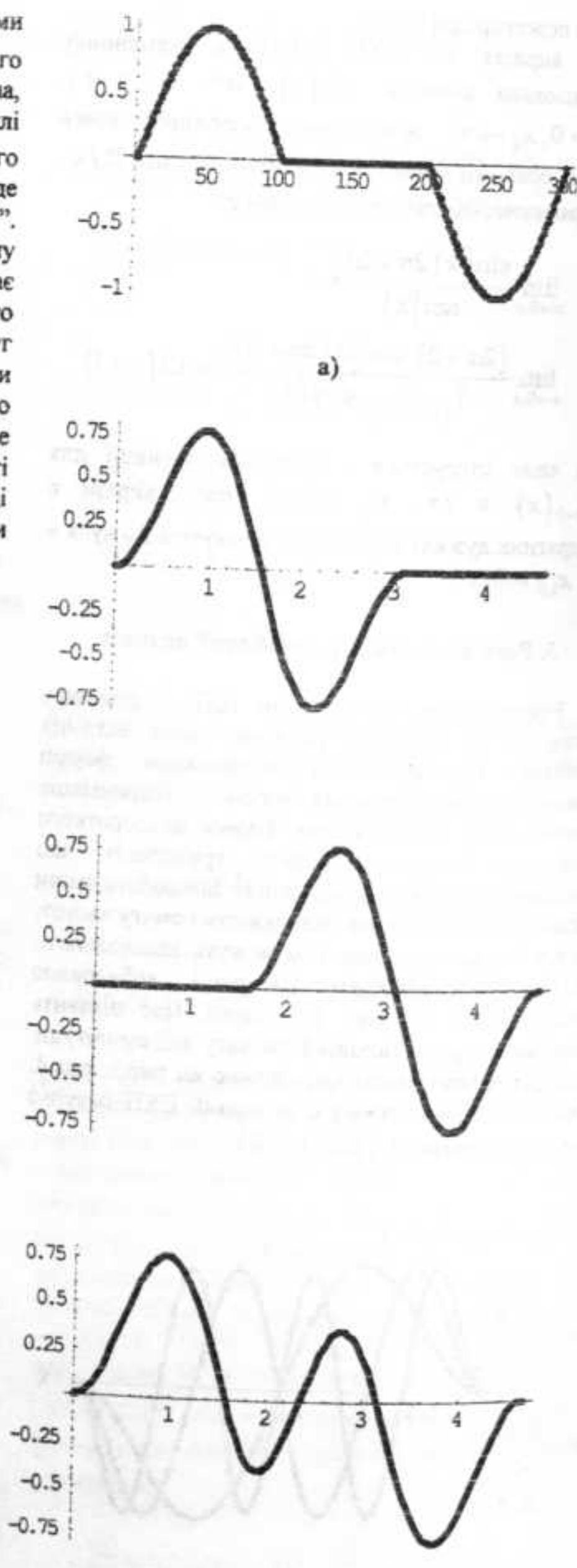
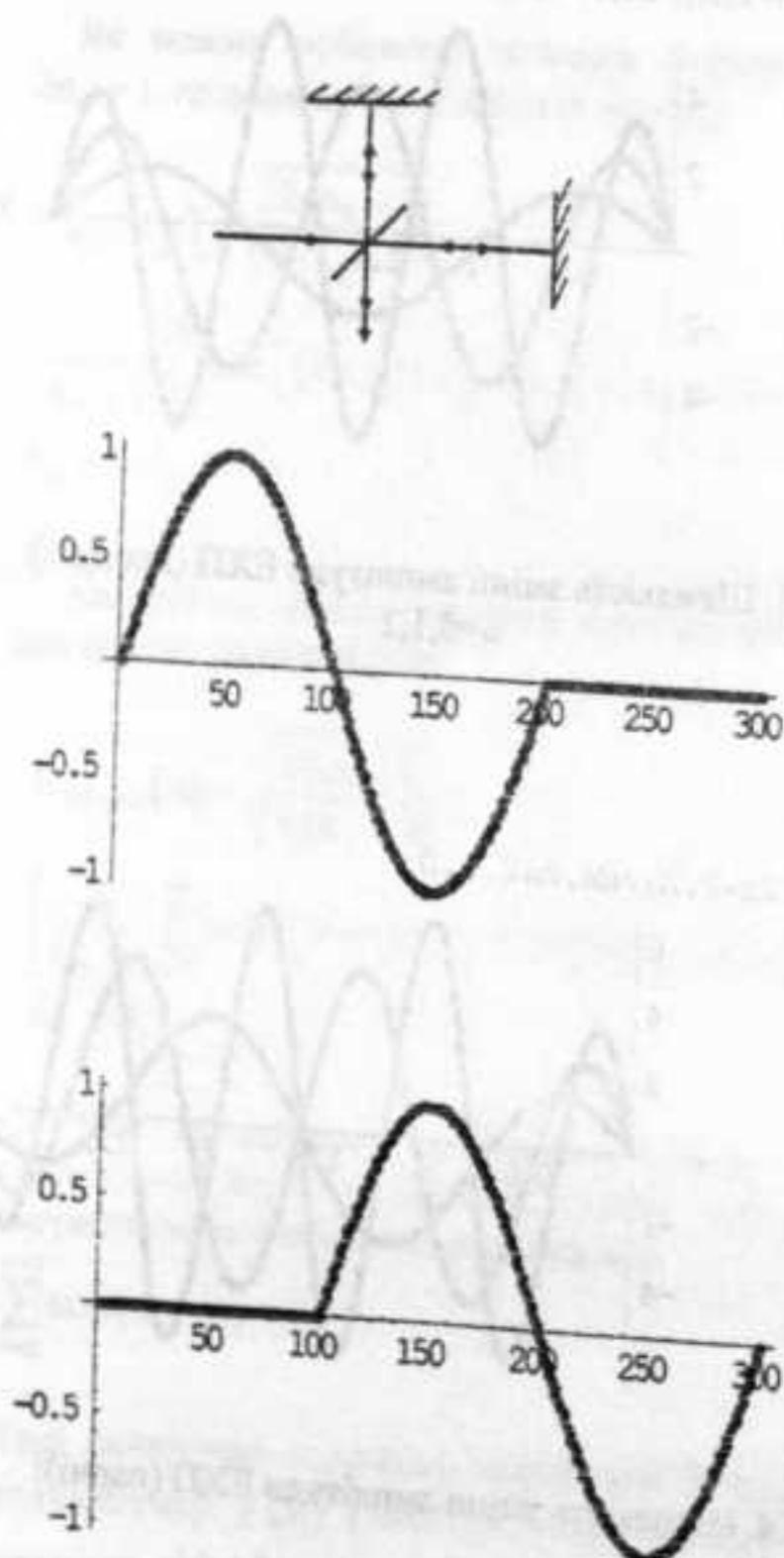


Рис.5. Інтерференція цугів: а) монохроматичного сигналу,  $\Delta l = \lambda/2$ ; б) ЕХП,  $n=0$ ,  $\Delta l = \lambda/2$ .

Більш загальною проблемою, яка пов'язана з використанням гармонічного наближення для РС, є вимога щодо відповідності самого сигналу і процесів його взаємодії з речовиною, принципу причинності. Зокрема, для того, щоб зберегти фізичність відгуку речовини (осциляторна модель) на дію гармонічних РС, Крамерсом і Кронігом були одержані додаткові співвідношення, що пов'язують між собою дійсну ( $\epsilon'$ ) і уявну ( $\epsilon''$ ) частини діелектричної проникненості. Але в рамках цієї роботи ця проблема не може бути розглянута.

#### 4. Моделі радіосигналів (РС)

Висновок, що може бути зроблений за результатами попередніх розділів, - це очевидна перевага ЕХП-перетворення порівняно наприклад, до перетворення Фур'є. В цьому розділі розглянемо приклади його застосування для опису амплітудно-модульованого (АМ) та частотно-модульованого (ЧМ) радіосигналів.

Методика ЕХП-аналізу РС полягає у наступному:

- 1) перевірка РС на відповідність умовам (1)-(3),
- 2) знаходження ЕХП-спектру  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+2}$ ,
- 3) перевірка розкладу РС в ряд на повноту,
- 4) відтворення форми РС за допомогою ЕХП-розкладу.

Першим розглянемо АМ РС:

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin[6x]$$

Як не важко перевірити, він задовольняє умовам (1)-(3). Підставимо  $f(x)$  у вирази (13),(14) і знайдемо ЕХП-спектр. Він представлений на рис.6.

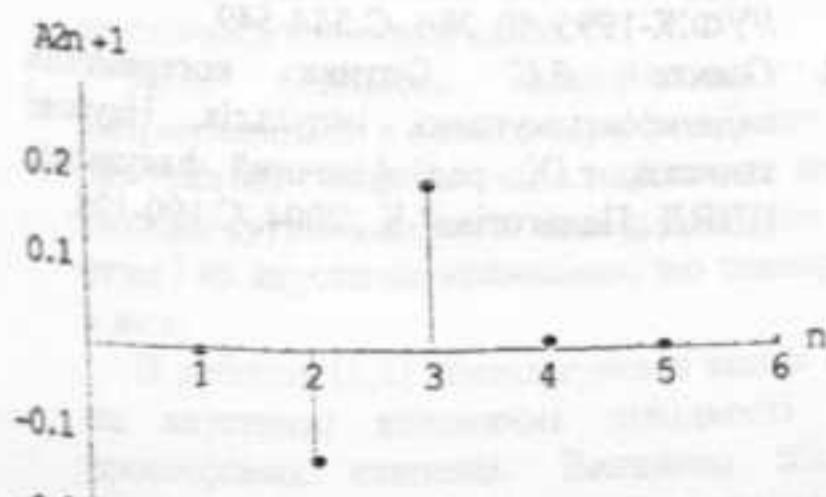


Рис.6. ЕХП - спектр АМ сигналу:

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin[6x].$$

Для перевірки розкладу на повноту, застосуємо рівність Парсеваля [4]

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1}^2 + B_{2n+2}^2) \quad (15)$$

і переконаємося в повноті розкладу.

Останній крок – це побудова функції  $f_N(x)$  з застосуванням базових функцій (10)-(12). На рис.7. представлена функція  $f(x)$ , знайдена за допомогою ЕХП-представлення  $f_N(x)$ . Видно, що відтворення  $f(x)$  з застосуванням „спектральних” компонент досить якісне. За необхідності оцінку точності можна зробити розрахував середньоквадратичне відхилення  $f_N(x)$  від  $f(x)$ .

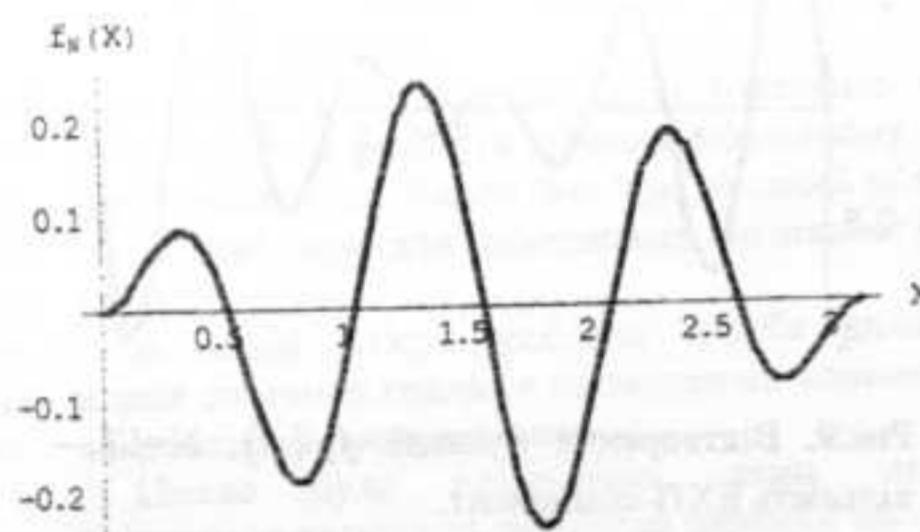


Рис.7. Відтворення функції  $f_N(x)$ ,  $N=5$  – кількість ЕХП-компонент.

Наступний радіосигнал частотно-модульований:

$$f(x) = \left(1 - \frac{2.25x}{\pi}\right) \sin\left[8x\left(1 + \frac{0.125x}{\pi}\right)\right]$$

Цікаво відмітити, що для задоволення вимогам (1)-(3) ЧМ сигнал повинен мати додаткову амплітудну модуляцію, як і передбачено при записі  $f(x)$ .

Знаходимо ЕХП-спектр (див.рис.8). На рис.9. зображені результат відтворення функції  $f(x)$  за допомогою ЕХП-ряду:  $f_N(x)$ . Використано – 17 компонент ЕХП-спектру.

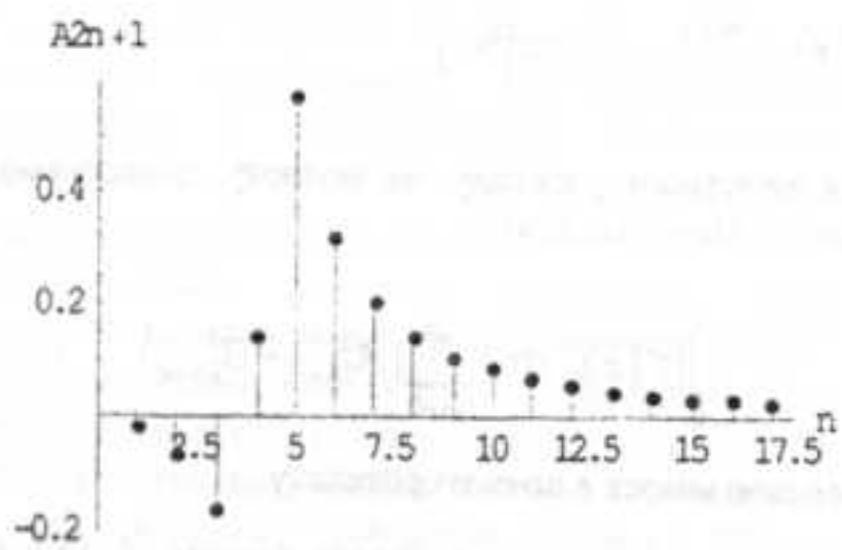


Рис.8. ЕХП-спектр ЧМ сигналу:

$$f(x) = \left(1 - \frac{2.25x}{\pi}\right) \sin\left[8x\left(1 + \frac{0.125x}{\pi}\right)\right]$$

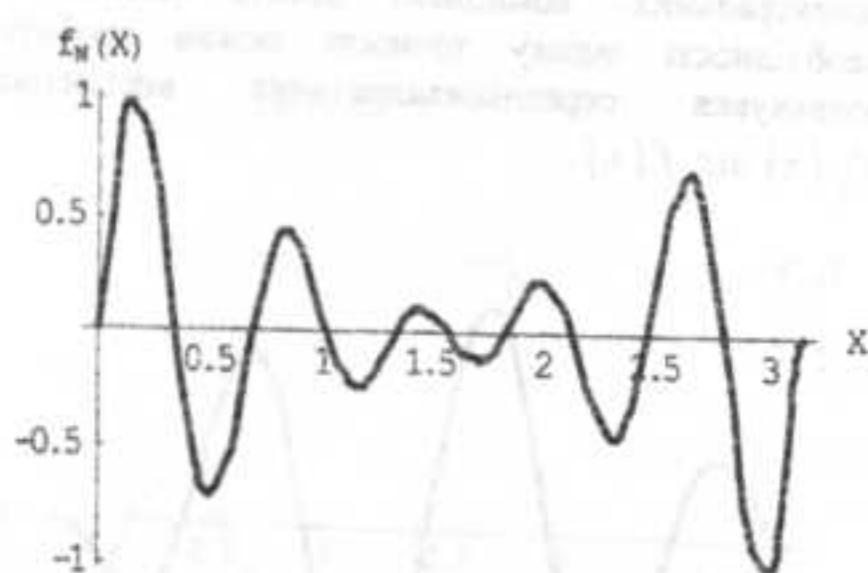


Рис.9. Відтворення функції  $f_N(x)$ ,  $N=17$  – кількість ЕХП-компонент.

Для апаратурного відтворення ЕХП-аналізатора необхідно мати:

1) генератор базисних функцій (11), (12), 2) пристрій для перемноження досліджуваної функції  $f(x)$  на базисні, 3) інтегратор, 4) вимірювальний прилад. Очевидно, складнощі з його технічної реалізації можуть зростати при переході від радіодіапазону і НВЧ до оптичного діапазону.

#### Висновки

Запропонований розклад в ряд імпульсних радіосигналів РС – ряд елементарних хвильових пакетів (ЕХП), забезпечує аналіз і синтез РС з застосуванням фізично реалізованих базисних функцій. Це дозволяє

унікнути деяких „парадоксів”, що є характерними, наприклад, для Фуре – перетворення, коректно записати надширокосмугові (поза квазімохроматичного наближення) радіосигнали, дослідити їх взаємодію з речовиною і т інш.

#### Список використаних джерел

1. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений.-М: Радио и связь, 1989, 192 с.
2. Ахманов С.А., Выслоух Б.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов.-М: Наука, 1988, 312 с.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. Изд-во «Наука», Москва, 1979, 383 с.
4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд-во «Наука», Москва, 1967, 607 с.
5. Чую К. Введение в вейвлеты. Изд-во «Мир», Москва, 2001, 412 с.
6. Каценельбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. Изд-во «Наука», Москва, 1966, 240 с.
7. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. Изд-во «Мир», Москва, 1971, 495 с.
8. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., Атомиздат, 1970, 712с.
9. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд-во «Наука», Москва, 1973, 227 с.
10. Бессонов Е.Г. Условно-странные электромагнитный волны. //Квантовая электроника, 19, №1, 1992, 35-39.
11. Овєчко В.С. Поширення та дифракція на діафрагмі оптичних відеоімпульсів //УФЖ-1995-40, №6.-С.544-549.
12. Овєчко В.С. Оптика когерентних надширокосмугових імпульсів. Наукові записки, т.ІХ, радіофізичний факультет, НПВД „Педагогіка“ К., 2004, С.190-198.

Надійшла до редколегії 27.02.2009г.

*Ильин*

УДК 519.9

Осіпов С. М., к. ф.-м. н., Маринець А. В., студ.

## Вплив сонячних спалахів на характеристики п'ятихвилинних коливань сонячної фотосфери

Наведено результати дослідження впливу сонячних спалахів на такі характеристики п'ятихвилинних акустичних коливань сонячної фотосфери, як амплітуда, різниця фаз між коливаннями на різних висотах і частота мод. Показано, що сонячні спалахи мають вплив на поширення коливань у фотосфері. В дослідженнях використовувались дані космічної обсерваторії SOHO.

**Ключові слова:** сонце, п'ятихвильні акустичні коливання, сонячні спалахи.

E-mail: naka5@mail.ru

Статтю представив д. ф.-м. н. Скришевський В. А.

### Вступ

З відкриттям акустичних коливань у сонячній фотосфері в 50-х роках минулого сторіччя була заснована нова наука – геліосеймологія. Геліосеймологія вивчає внутрішню будову Сонця на основі дослідження власних резонансних частот спектру Сонця. Вже досить добре відомо, як змінюються амплітуди та частоти мод сонячних коливань впродовж циклу сонячної активності. Такі дослідження проводилися в статтях [3], [4], і [5]. Загалом зміна основних параметрів коливань пояснюється тим, що потужні магнітні поля активних областей придушують акустичні коливання. Однак на менших шкалах часу (тижні і місяці) таких досліджень практично не існує. В цьому ряду стоїть і проблема дослідження впливу спалахів на амплітудно-фазово-частотні характеристики акустичних сонячних хвиль.

Хоча більшість енергії від спалахів випромінюється в хромосферу та корону, відомо, що значна енергія від найбільш потужних вибухів суттєво впливає і на фотосферні шари, а отже і на акустичні коливання, що поширюються в них.

В роботах [1,2] досліджувався вплив спалахів на акустичні коливання швидкості високих просторових степенів. Виявлено збільшення потужності р-мод під час та після спалахів, хоча і не для всіх досліджуваних спалахів. Перед спалахами частоти мод мали тенденцію до

S. M. Osipov, PhD, A.V. Marynets, stud.

## The Influence of Solar Flares to the Characteristics of Five-Minute Waves in Solar Photosphere

The results of solar flares influence on such characteristics of acoustic waves as amplitude, phase difference between the oscillations on the different heights and frequency of modes are presented. It is shown that solar flares have the influence on propagating of waves in photosphere. The data of space observatory SOHO have been used in the investigations.

**Key words:** Sun, 5-minute acoustic oscillations, solar flares.

зменшення. Зміни ширин мод були неоднозначними [1].

В роботі [2] також знайдено кореляцію між потужностями р-мод та спалахами, причому для високочастотної області (5-6.5 мГц) такий зв'язок сильніший ніж для акустичних коливань (2-4 мГц).

В нашій роботі зроблена спроба виявити вплив сонячних спалахів на акустичні коливання яскравості низьких степенів.

Цікаво було подивитись, яким чином змінюється частота та амплітуда окремих мод під час сонячних спалахів та після них. Зміна фаз коливань може прояснити зміну характеру розповсюдження хвиль.

### Джерела даних

Для дослідження використовувалися дані, отримані космічною обсерваторією SOHO. Ця обсерваторія є спільним проектом Європейського космічного агентства та НАСА. На її борту успішно функціонує дванадцять інструментів, три з яких виконують геліосеймологічні дослідження [7]. SOHO знаходиться у точці Лагранжа, тобто у рівноважній точці між Землею та Місяцем. Це дозволяє отримувати дані високої якості та великої тривалості.

Одним з пристріїв на борту космічної обсерваторії є VIRGO (Variability of Solar Irradiance and Gravity Oscillations) який вимірює осциляції яскравості всього сонячного диску за

допомогою фотометра SPM в трьох спектральних каналах: 402, 500 і 862 нм. Саме його дані використовувалися в даній роботі. Випромінювання синього каналу формується в нижніх шарах фотосфери, а червоного каналу трохи на більших висотах [6]. Середня різниця висот для цих каналів складає приблизно 50 кілометрів.

### Результати досліджень

За даними VIRGO/SPM (SOHO) будувалися спектри потужності коливань яскравості сонячного диску.

Перед побудовою спектрів необхідно було позбутися трендів у входних рядах даних, які виникали внаслідок непередбачуваних зміщень космічної обсерваторії, деградації фільтрів, змін температури середовища, тощо. Це робилося методом віднімання ковзаючого середнього значення за 60 хвилин. Спектр потужності акустичних коливань можна легко отримати за допомогою Фур'є-перетворення. Формула такого перетворення має вигляд:

$$P_A(v) = \text{FFT}^T(A(x) \cdot W(x)) \quad (1)$$

де  $A(x)$  – входний ряд даних,  
 $W(x)$  – функція вікна.

Особливістю усіх мод є те, що їх центральна частота в часі не залишається постійною.

В роботі також досліджувалися різниці фаз між двома спектральними каналами фотометра.

Стандартна процедура розрахунку фаз між двома каналами (A і B)

$$\Delta\phi(v) = \arctg(\text{Im}(P_{AB}(v)) / \text{Re}(P_{AB}(v))) \quad (2)$$

$$P_{AB} = P_A \cdot P_B^*$$

не могла бути застосовною, оскільки, як зазначалося вище, частоти мод не є постійними.

Тому для підвищення точності фазові характеристики кожної моди визначались для спектральної області  $\pm 4$  мГц навколо середнього положення моди, а при усередненні значень всередині цієї області розраховувалась середньозважена величина

$$\Delta\phi_{mode} = \sum_i (|P_{AB}| \cdot \Delta\phi(v_i)) / \sum_i (|P_{AB}|) \quad (4)$$

де  $i$  – індекс частоти,  $v$  – частота.

При виборі довжини рядів даних ми обмежили їх 4-ма добами. Зрозуміло, що це значно

перевищує тривалість спалаху. Однак така довжина ряду була мінімально можлива для того, щоб коректно розрізнати р-моди (роздільна здатність  $\sim 2.9$  мГц).

Для дослідження зміни параметрів акустичних коливань сонячної фотосфери обиралися найбільші та найпотужніші спалахи протягом останнього сонячного циклу.

Важливою для експерименту особливістю спалаху є також його положення. Оскільки в експерименті VIRGO/SPM вимірювались яскравості сонячної фотосфери проводяться від усього сонячного диску, у випадку навіть потужного спалаху, але на краю видимої області Сонця зміни параметрів акустичних коливань можуть бути незначними. Тому нами були відібрані спалахи, які відбулися в центральній частині видимого диску Сонця:

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| (а) - 09/07/1996; | (б) - 05/02/2000; |
| (в) - 14/07/2000; | (г) - 13/12/2006. |

Основні результати досліджень приведені на рис. 1-3. Виділена темним фоном область відповідає часовому інтервалу, на який впливає спалах (4-х денні ряди даних). Отримані результати на рис. 1 і 3 не залежать від вибраного каналу фотометру.

Видно, що амплітуди окремих мод зростають під час спалахів. Це підтверджує висновки отримані в роботі [1].

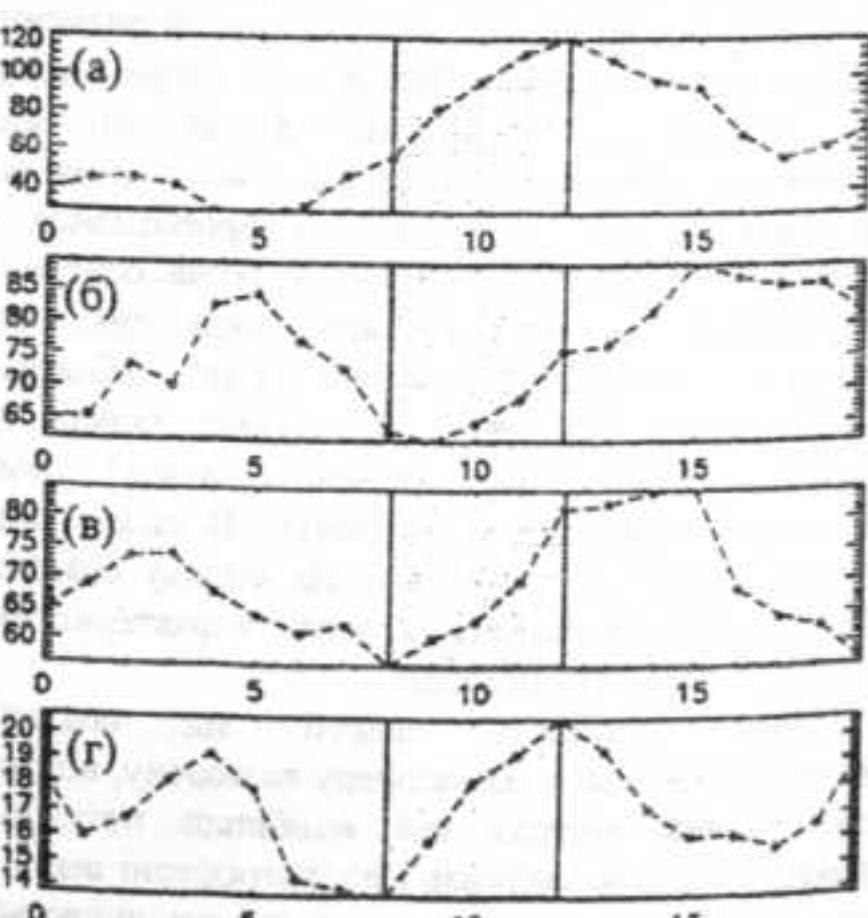


Рис. 1. Залежності відносної амплітуди моди ( $v=3.3689$  мГц), вісь ОХ: час (дні).

В нижній фотосфері під час спалахів спостерігаються, як правило, зміни фаз коливань (рис. 2).

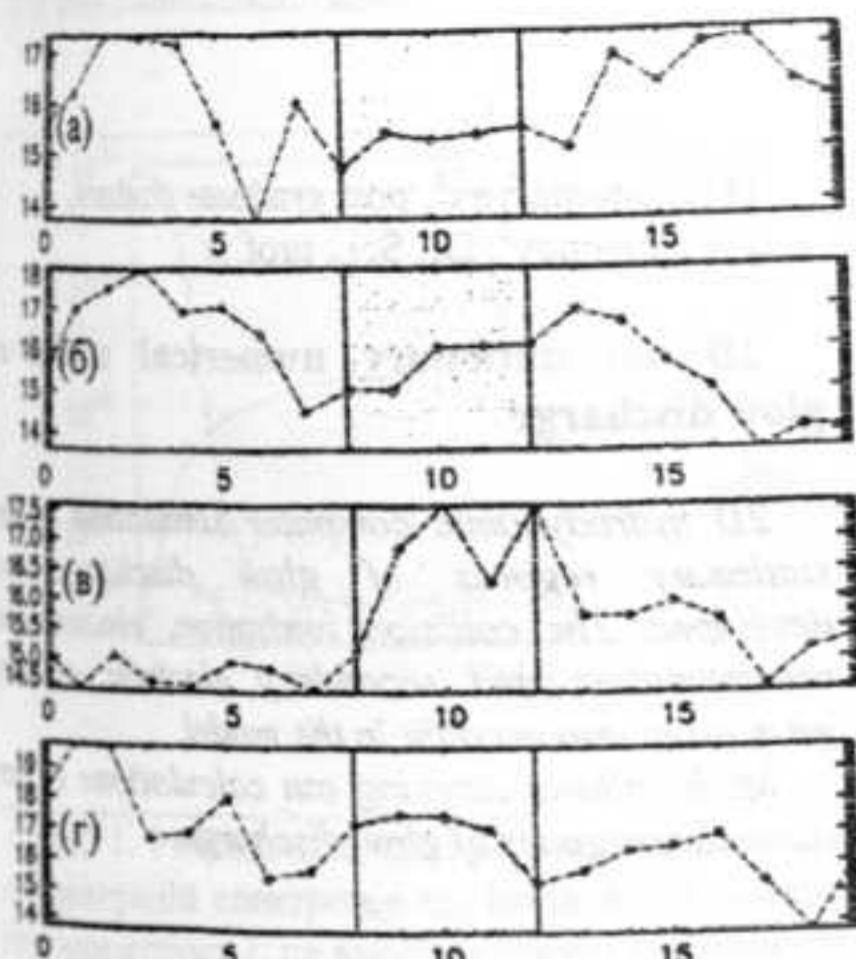


Рис. 2. Залежності різниці фаз (градуси) між червоним та синім спектральними каналами VIRGO/SPM, усереднення для мод з частотами 3.0338 мГц та 3.0983 мГц; вісь ОХ: час (дні).

Вочевидь, різні сонячні спалахи не однаково впливають на ці висоти, найбільший вплив має надпотужний спалах 14/07/2000р. ("День Бастілії", X5.7).

Зміни частот мод під впливом сонячних спалахів незначні. Загалом вони можуть пояснюватися зміною висоти поверхні фотосфери на якій відбуваються акустичні хвилі.

#### Список використаних джерел

1. Ambastha A., Basu S., and Antia H. M. Effects of Flares on Solar Oscillation Characteristics // SOHO12/GONG+ 2002 - 2003. - SP-517. - P. 219-222.
2. Kumar B. and Ravindra B. Analysis of Enhanced Velocity Signals Observed during Solar Flares // J. Astrophys. Astr. - 2006. - 27. - P. 425-438.
3. Jiménez A., Roca Cortés T., and Jiménez-Reyes S. J. Variation of the Low-Degree Solar Acoustic Mode parameters over the Solar Cycle // Solar Physics. - 2002. - 209. - P. 247-263.

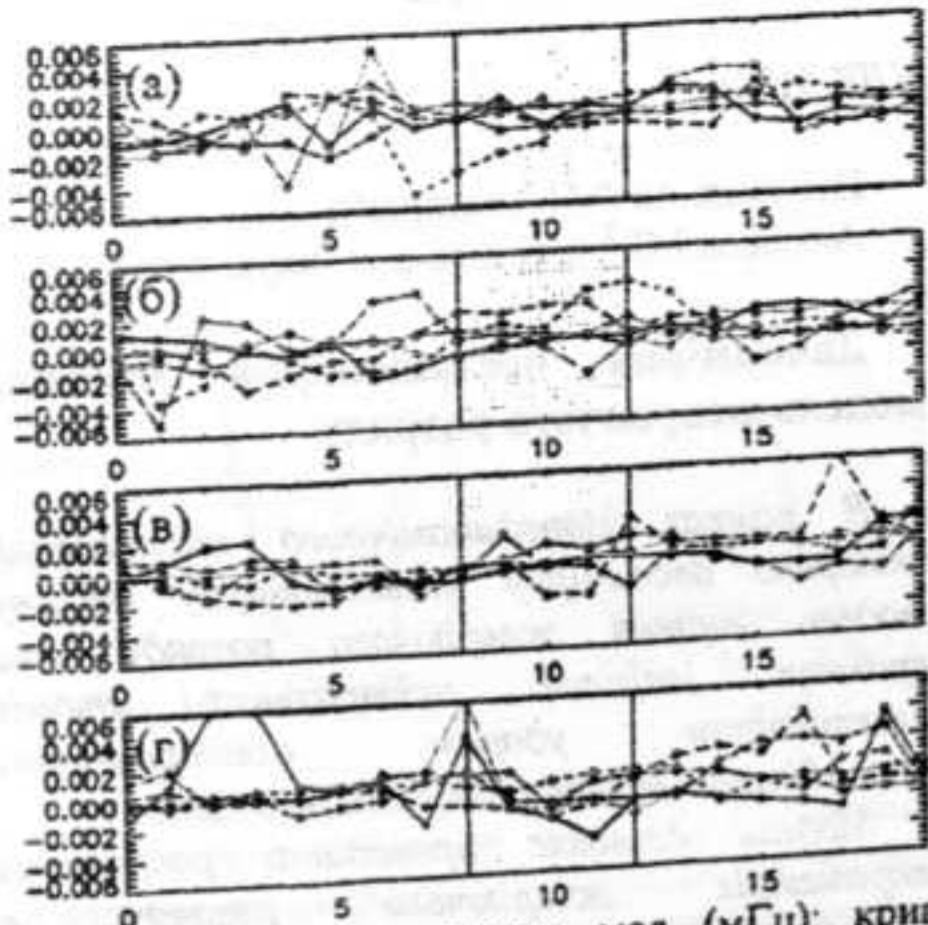


Рис. 3. Відхилення частот мод (мГц); криві відповідають таким модам: — 2.8281 мГц, ..... 2.9633 мГц, -·- 3.0983 мГц, -·-·- 3.2332 мГц, -·-·-·- 3.3689 мГц; вісь ОХ: час (дні).

#### Висновки

Виявлено вплив сонячних спалахів на акустичні коливання яскравості низьких мод ( $l = 0-1$ ) в сонячній фотосфері.

Потужності р-мод зростають під час спалахів, що може пояснитися як кращим поширенням хвиль при відповідній зміні фізичних умов в фотосфері, так і збудженням вільних мод спалахами.

Зміни частот мод під впливом сонячних спалахів незначні. Зміни фаз коливань в нижній фотосфері яскраво помітні для надпотужних спалахів в центральній зоні диску.

4. Jiménez-Reyes S. J., Jiménez A., and García R. A. Low Degree P-Modes and Solar Cycle // SOHO12/GONG+ 2002. - 2003. - SP-517. - P. 321-324.
5. Jiménez A., and Roca Cortés T. The P-Mode Spectrum Measured in Intensity: from 1996 to 2000 // SOHO10/ GONG2000. - 2001. - SP-464. - P. 99-102.
6. Jiménez A., Jiménez-Reyes S. J., and García R. A. Disk-Integrated Intensity Pseudomodes Measured by SOHO/ VIRGO // The Astrophysical Journal. - 2005. - 623. - P. 1215-1220.
7. <http://sohowww.nascom.nasa.gov/about/instruments.html>

Надійшла до редколегії 27.02.09

УДК 519.9

Пономарев О.П.<sup>1</sup>, аспірант,  
Анісимов І.О.<sup>2</sup>, д-р фіз.-мат. наук, проф.

## Двовимірна нестационарна чисрова модель жевріючого розряду

В рамках гідродинамічного наближення створено двовимірну нестационарну числову модель горіння жевріючого розряду, яка враховує іонізацію нейтральних атомів електронним ударом, електрон-іонну рекомбінацію та вторинну емісію з катоду.

Модель дозволяє проводити розрахунки параметрів жевріючого розряду в нестационарних режимах.

**Ключові слова:** жевріючий розряд, схема проти потоку, факторизований коефіцієнт дифузії, змінно-трикутний метод

O.P.Ponomaryov<sup>1</sup>, post graduate student,  
I.O.Anisimov<sup>2</sup>, Dr. Sci., prof.

## 2D non-stationary numerical model of glow discharge

2D hydrodynamic computer simulation of non stationary regimes of glow discharge was developed. The collision ionization, electron-ions recombination and secondary electron emission were taken into account in the model.

Model allows carrying out calculations of non-stationary regimes of glow discharge.

**Key words:** glow discharge, upstream scheme, factorized diffusion coefficient, alternative-triangular method.

<sup>1</sup> E-mail: [alex.ponomaryov@gmail.com](mailto:alex.ponomaryov@gmail.com)

<sup>2</sup> E-mail: [ioa@univ.kiev.ua](mailto:ioa@univ.kiev.ua)

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Левитський С.М.

### 1. Вступ

В нормальному режимі жевріючого розряду зміна струму, викликана зміною напруги на розряді, відбувається за рахунок приросту площини катодної плями, густота струму з якої залишається незмінною (так звана нормальна густота струму) [2]. Одночасно можуть існувати декілька катодних плям, поведінка яких нагадує динаміку фаз при фазових переходах першого роду (існування мінімального розміру плями та поглинання більшою плямою меншої, коли відстань між ними стає критичною) [9].

Механізми, що приводять до такої поведінки жевріючого розряду, досі не до кінця зрозумілі, а запропоновані пояснення носять якісний характер [2, 6]. Частково це пояснюється складністю побудови аналітичної теорії, яка б описувала процес встановлення та горіння розряду, принаймні у двовимірній геометрії.

Ряд особливостей нормального режиму жевріючого розряду, як то існування двох стійких станів з нормальнюю та нульовою густотами струму в певному діапазоні прикладеної напруги, збереження нормальної густоти струму при зміні прикладеної напруги та наявність розподіленого зворотного зв'язку, обумовленого активним опором у зовнішньому

колі, що приводить до залежності режиму розряду від стану кожної точки на поверхні катода, дозволяють провести аналогію між цим режимом та відомим у синергетиці класом дисипативних структур – аперіодичних структур, обумовлених розподіленим зворотним зв'язком [1]. Критерієм застосовності цієї аналогії є специфічна залежність кінетичної функції для густини розрядного струму від самої густини струму. Вона повинна мати дві стійкі стаціонарні точки і одну нестійку, що визначає межі притягання стійких станів. Отимати цю кінетичну функцію аналітично не вдається. Можливо, це вдається зробити за допомогою комп'ютерного моделювання, яке поширене в фізиці газового розряду і дозволило отимати ряд важливих результатів.

Існуючі числові моделі жевріючого розряду [5, 7-9], що в більшості своїй спираються на гідродинамічний опис, мають як ряд переваг, так і ряд недоліків.

Так, роботи [7-8], що ведуться з кінця 1980-х років, привели до створення тривимірної числової моделі жевріючого розряду [7]. Недоліком запропонованих алгоритмів є апроксимація першого порядку за просторовими координатами і, як наслідок, необхідність працювати з неоднорідною сіткою.

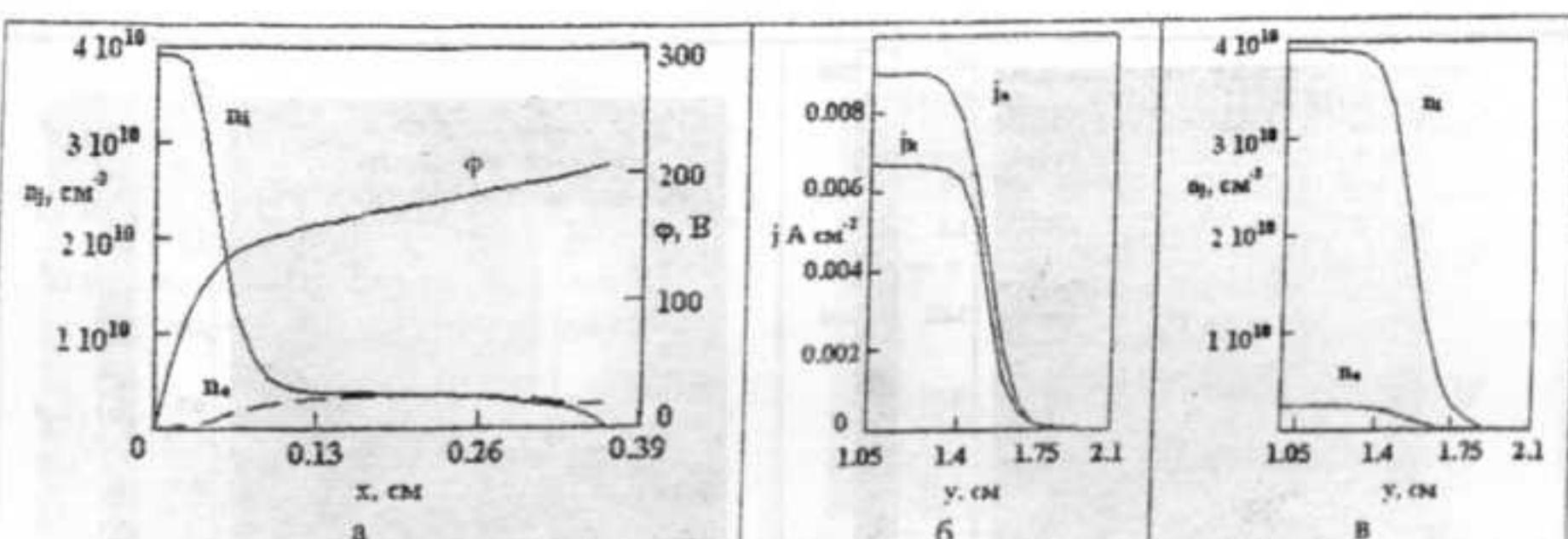


Рис. 1. Розрахована двовимірна структура жевріючого розряду за даними Табл. 2-3: а – розподіл концентрацій електронів  $n_e$ , іонів  $n_i$ , та потенціалу  $\varphi$  вздовж осі розряду; б – розподіл електронної густини струму  $j_e$  на аноді та іонної густини струму  $j_i$  на катоді; в – розподіл концентрації електронів  $n_e$  на аноді та концентрації іонів  $n_i$  на катоді.

Роботи [5, 9], виконані для двовимірної геометрії, відрізняються використанням апроксимації другого порядку за просторовими координатами, тобто забезпечують прийнятну точність при використанні однорідної сітки з меншою кількістю комірок. Однак цей алгоритм дозволяє дослідити лише стаціонарний режим розряду.

Щоб знайти кінетичну функцію для густини струму, необхідно побудувати числовий алгоритм, придатний для детального аналізу нестаціонарних режимів жевріючого розряду. Цей алгоритм повинен задовольняти ряду умов: мінімальна кількість операцій для розрахунку одного кроку по часу, мінімальна за кількістю комірок  $i$ , бажано, однорідна сітка. Наслідком останньої умови є необхідність використання апроксимації другого порядку за просторовими координатами. Розробці та тестуванню двовимірного алгоритму, що задовольняє цим умовам, і присвячена дана робота.

## 2. Вихідні рівняння та граничні умови

Жевріючий розряд можна описати в дифузійно-дрейфовому наближенні за допомогою неоднорідних рівнянь неперервності для електронної та іонної компонент

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{J}_j) = S \quad (1)$$

( $n_j$  та  $J_j$  – відповідно концентрації та потоки частинок, індекс  $j=e$  відповідає електронам,  $j=i$  – іонам,  $S$  – функція, що характеризує швидкість зміни концентрації частинок за рахунок іонізації

та рекомбінації) та рівняння Пуассона для опису розподілу потенціалу  $\varphi$  між електродами:

$$\Delta\varphi = -4\pi q(n_e - n_i) \quad (2)$$

( $q$  – елементарний заряд).

Потоки частинок обумовлені дифузією та дрейфом в електричному полі:

$$\bar{J}_j = -D_j \nabla n_j + a_j n_j \mu_j \bar{E}, \quad D_j = \mu_j T_j, \quad (a_j = +1, a_i = -1). \quad (3)$$

де  $\mu_j$ ,  $T_j$ ,  $D_j$  – відповідно рухливості, температури та коефіцієнти дифузії частинок сорту  $j$ . Електричне поле є потенціальним, так що

$$\bar{E} = -\nabla\varphi. \quad (4)$$

Народження іонів та електронів у розряді відбувається за рахунок іонізації нейтральних атомів електронним ударом, рекомбінація – за рахунок парних електрон-іонних зіткнень. Тоді об'ємна швидкість зміни концентрації заряджених частинок  $S$  може бути записана у формі

$$S = A p \exp\left(\frac{-B p}{|\bar{E}|}\right) |\bar{J}_e| - \beta n_i n_e, \quad (5)$$

де  $p$  – тиск нейтрального газу,  $A$ ,  $B$  – коефіцієнти Таунсенда,  $\beta$  – коефіцієнт рекомбінації.

Систему рівнянь (1)-(5) необхідно доповнити граничними умовами на катоді ( $x=0$ ), аноді ( $x=L$ ) та бічних стінках ( $y=0, y=l$ ).

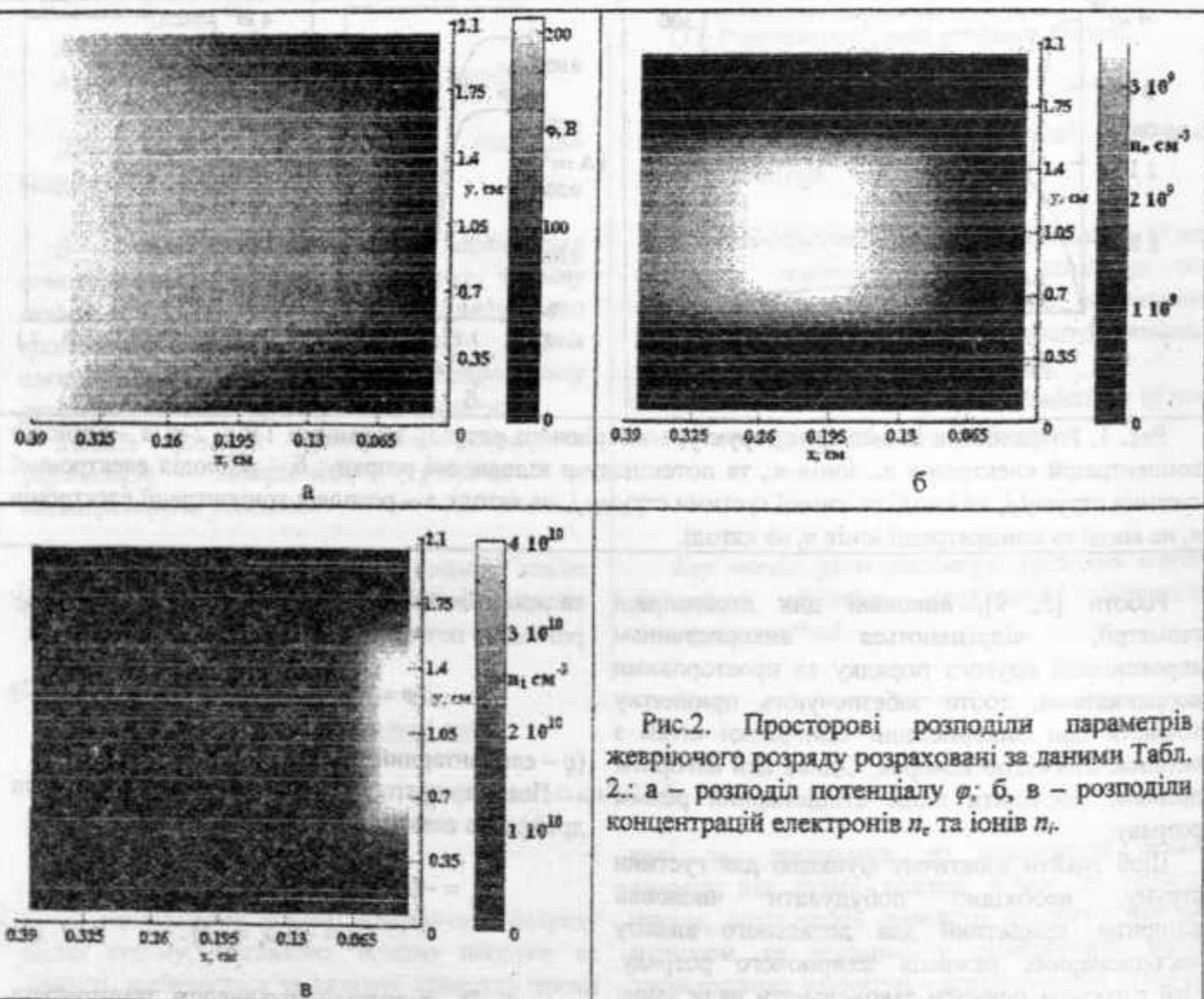


Рис.2. Просторові розподіли параметрів жевріючого розряду розраховані за даними Табл. 2.: а – розподіл потенціалу  $\varphi$ ; б, в – розподіли концентрацій електронів  $n_e$  та іонів  $n_i$ .

Вважатимемо, що на катоді потенціал дорівнює нулеві. Народження електронів на ньому відбувається за рахунок вторинної іон-електронної емісії. Тоді на катоді виконуються співвідношення

$$\varphi(x=0)=0, \quad \bar{J}_e(x=0)=\gamma \bar{J}_i(x=0), \quad (6)$$

де  $\gamma$  – коефіцієнт вторинної іон-електронної емісії.

На аноді потенціал дорівнює прикладений до розряду напружи  $V$ . Іони поблизу аноду відсутні. Тому

$$\varphi(x=L)=V, \quad n_i(x=L)=0. \quad (7)$$

Вважатимемо, що бічні поверхні розташовані на значній віддалі від катодної плями. Тоді поздовжній хід потенціалу за відсутності об'ємного заряду буде лінійним. Можна вважати, що поперечні градієнти концентрацій заряджених частинок та поперечне електричне

поле відсутні, а абсолютні значення концентрацій відповідають фоновій іонізації. Таким чином,

$$n_e(y=0, y=L) = n_i(y=0, y=L) = 10^3 \text{ cm}^{-3};$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial y} \Big|_{y=0, y=L} = \frac{\partial n_i}{\partial y} \Big|_{y=0, y=L} = 0; \quad (8)$$

$$\varphi(x) \Big|_{y=0, y=L} = \frac{V}{L} x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0, y=L} = 0.$$

Якщо досліджується розряд зі змінною напругою на електродах, то рівняння (1)-(5) та граничні умови (6)-(8) слід доповнити законом Ома для повного кола

$$V = E + Rq \int \bar{J}_e(x=L) dS, \quad (9)$$

де  $E$  – зовнішня ЕРС,  $R$  – опір.

Наведені рівняння достатні для опису ефектів виникнення катодних плям і встановлення в них нормальної густини струму.

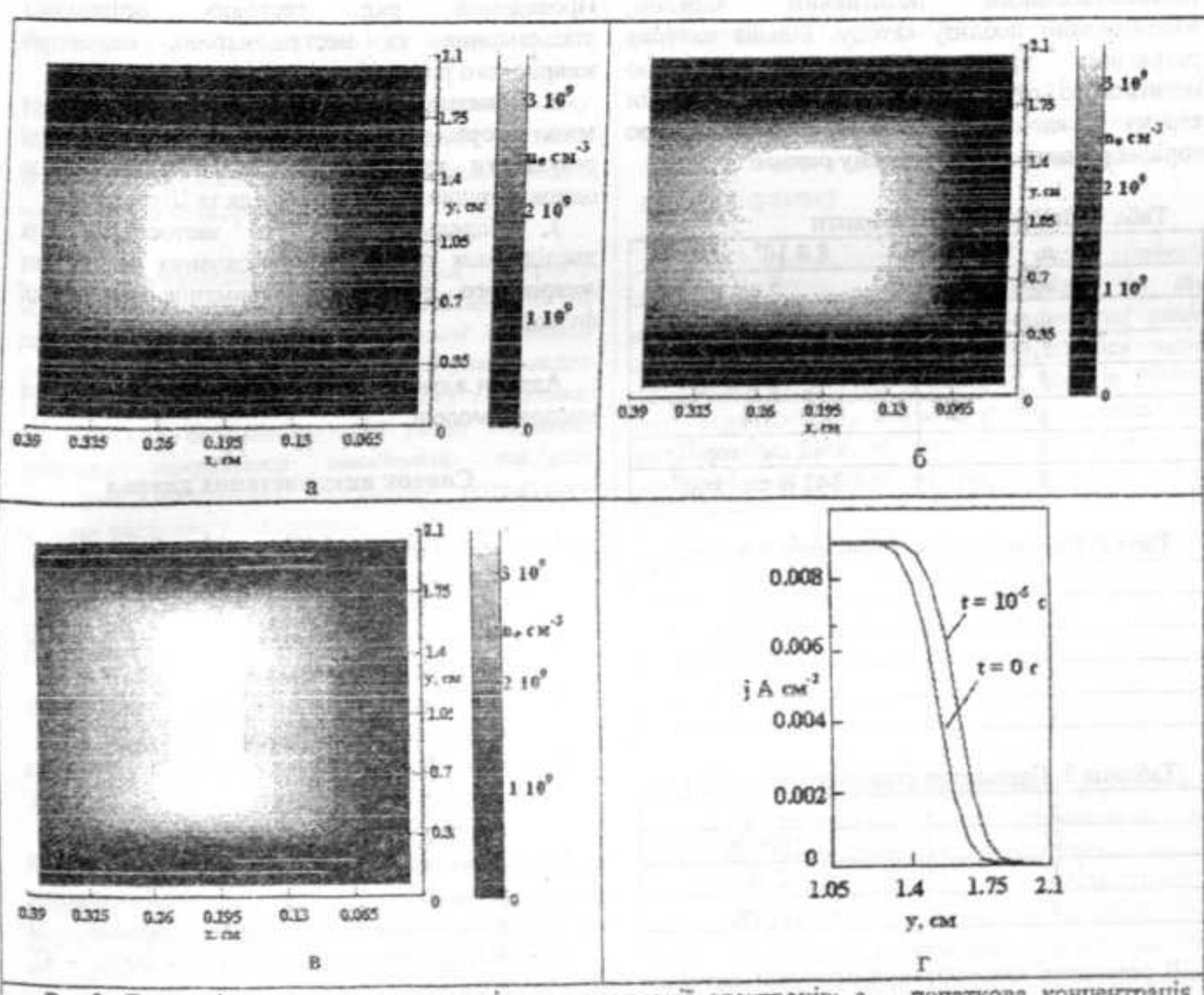


Рис.3. Еволюція початкового розподілу концентрації електронів: а – початкова концентрація ( $t = 0$ ); б –  $t \approx 10^{-6}$  с.; в –  $t \approx 10^{-5}$  с.; г – розподіл анодної густини струму для різних моментів часу.

### 3. Особливості числового розв'язку рівнянь

Для апроксимації дрейфових складових потоків у рівняннях неперервності (1) використовувалася схема проти потоку, яка має перший порядок просторової апроксимації [4]. Другий порядок апроксимації повних потоків забезпечило використання факторизованого коефіцієнта дифузії [3].

Дискретний аналог системи диференціальних рівнянь (1)-(4) будувався на рівномірній сітці з використанням інтегро-інтерполяційного методу [3]. Це дало змогу зменшити прояв сіткової дифузії і забезпечило збереження повного струму в будь-якому перерізі розряду.

Розв'язок рівнянь неперервності (1) за явною схемою дозволяє отримати детальну часову картину зміни густини струму.

Для зменшення часу розрахунку одного кроку за часом розв'язок рівняння Пуассона відбувався

очергово-трикутним методом з оптимальним набором ітераційних параметрів [3].

### 4. Результати тестових розрахунків стаціонарного режиму

За допомогою програми, що використовувала описані вище математичну модель та алгоритм її розв'язку, було виконано тестові розрахунки жевріючого розряду в стаціонарному та нестаціонарному режимах. Робочим газом служив азот. Розрахункова сітка мала розмір 30 × 30.

Використані константи, взяті з [8], подані у табл.1, параметри розрахунків – в табл. 2-3.

Наведені на рис.1 графіки відповідають стаціонарному режиму розряду. В цілому вони відповідають відомим з літератури експериментальним та розрахунковим результатам [2, 8]. Розподіл потенціалу між електродами викликаний значним

некомпенсованим позитивним зарядом, зосередженим поблизу катоду. Більша частина розрядного проміжку заповнена плазмою позитивного стовпа. Розподіл іонної густини струму на катоді (див. рис. 1 б) свідчить про горіння розряду в нормальному режимі.

Табл.1. Використані константи

$\mu_e$	$8.8 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$
$T_e$	5 еВ
$\mu_i$	$289 \text{ см}^2/\text{с}$
$T_i$	0.026 еВ
$\beta$	$2 \cdot 10^7 \text{ см}^3/\text{с}$
$\gamma$	1/3
$A$	$12 \text{ см}^{-1} \text{ тор}^{-1}$
$B$	$342 \text{ В см}^{-1} \text{ тор}^{-1}$

Табл.2. Параметри нестационарного розряду

$p$	5 тор
$EPC$	425 В
$R$	300 кОм
$L$	0.39 см
$I$	2.1 см

Таблиця 3. Параметри стаціонарного розряду

$P$	15 тор
$U$	1500 В
$L$	2 см.
$I$	2.1 см

В результаті моделювання отримані значення товщини катодного шару  $d_k \approx 0.05$  см, катодного падіння  $V_k \approx 127$  В та густини струму  $j \approx 9 \cdot 10^3 \text{ А см}^{-2}$ . Порівняння цих результатів з розрахунками за одновимірною теорією Енгеля та Штеенбека дає прийнятний збіг ( $V_k = 110$  В та  $j = 2.9 \cdot 10^3 \text{ А см}^{-2}$ ) [6, 4].

На рис. 3. зображені просторові розподіли концентрації електронів, що ілюструють встановлення нормального режиму при зменшенні опору в зовнішньому колі з  $3 \cdot 10^5$  Ом до  $3 \cdot 10^4$  Ом. Видно, що в розрахунку зберігається нормальні значення густини струму.

## 5. Висновки

1. Запропонована двовимірна чисрова модель розрахунку стану жевріючого розряду постійного струму, яка враховує процеси ударної іонізації електронами нейтральних атомів, електрон-іонну рекомбінацію та вторинну емісію з катоду.

Проведений ряд тестових розрахунків стаціонарних та нестаціонарних параметрів жевріючого розряду.

2. Показано, що в даній моделі виконується закон нормальної густини струму, отримані результати узгоджуються з розрахунками за одновимірною моделлю Енгеля та Штеенбека.
3. Модель може бути застосована для дослідження процесів встановлення та горіння жевріючого розряду і отримання кінетичної функції.

Автори вдячні Т.Є.Літошенку за обговорення числової моделі.

## Список використаних джерел

1. Лоскутов А.Ю., Михайлова А.С. Введение в синергетику. Москва: «Наука», 1990.
2. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. Москва: «Наука», 1992.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: «Наука», 1989..
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т.1. Москва: «Мир», 1991
5. Исламов Р.Ш. Экономичный численный алгоритм для моделирования двумерного тлеющего разряда. // ЖВМиМФ. – 46. – №11. – 2006. – С. 2065-2080.
6. Мелехин В.Н. Наумов Н.Ю. О природе катодного пятна нормального тлеющего разряда. // Письма в ЖТФ. – 12. – №2. – 1986. – С. 99-103.
7. Петрусеев А.С., Суржиков С.Т. Эффективный алгоритм для моделирования многомерного тлеющего разряда. // ФП. – 34. – №3. – 2008. – С. 269-274.
8. Райзер Ю.П., Суржиков С.Т. Двумерная структура нормального тлеющего разряда и роль диффузии в формировании катодного и анодного токовых пятен. // ТВТ. – 26. – №3. – 1988. – С. 428-436.
9. Исламов Р.Ш. Моделирование самоорганизации токовых структур в тлеющем разряде. // Изв. Акад. Наук сер. Физ. – 64 – № 7 . – 2000. – с. 1402-1406.

Надійшло до редакції 10 березня 2009 року

УДК 537.8, 621.272.832.01

Прокопенко О. В., канд. фіз.-мат. наук

## Підвищення ефективності алгоритму чисельного розрахунку власної частоти фундаментальної моди чвертьхвильового резонатора поверхневої хвилі

Проілюстровано застосування методу часткових областей (МЧО) з особливістю на ребрі до задачі визначення власної частоти фундаментальної моди чвертьхвильового резонатора поверхневої хвилі (РПХ). Показано, що МЧО з особливістю на ребрі дозволяє суттєво покращити швидкодію та / або точність чисельного алгоритму розрахунку власної частоти резонатора.

**Ключові слова:** резонатор поверхневої хвилі, геометрична сингулярність, метод часткових областей, особливість на ребрі, власна частота.

E-mail: mga@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Данилов В. В.

### Вступ

Резонатори поверхневої електромагнітної хвилі (РПХ) мають помітні переваги порівняно з іншими типами мікрохвильових резонаторів [3–4]. Завдяки своїм унікальним властивостям, у першу чергу, наявності великої однорідності розподілу мікрохвильового струму для фундаментальної моди основного класу коливань, РПХ є зручною системою для побудови на його основі пристрій з джозефсонівськими контактами [4–5]. В останній час РПХ також успішно застосовується при дослідженні комплексного показника заломлення рідин та твердих діелектриків [6–7].

Широкомасштабне впровадження РПХ як базового елемента для різноманітних активних та пасивних пристрій сучасної мікрохвильової електроніки стримується тим, що на даний момент відсутній швидкий алгоритм чисельного розрахунку мікрохвильових властивостей РПХ. Однією з причин є те, що теоретичний розгляд РПХ до цього часу проводився за допомогою стандартного методу часткових областей (МЧО), який недостатньо враховує особливості електромагнітних полів (ЕМП) поблизу від геометричних сингулярностей [1–2, 8–11]. В цьому випадку для збільшення точності розрахунку виявляється необхідним враховувати

Prokopenko O. V., Ph.D. (Phys. & Math.)

## Increase of the effectiveness of numerical estimation algorithm for quarter-wave surface wave resonator fundamental mode eigen frequency

The application of partial wave synthesis method (PWSM) with edge specialty for the problem of determination of fundamental mode eigen frequency of quarter-wave surface wave resonator is presented. It is shown, that the PWSM with edge specialty allow to greatly increase the performance and/or precision of numerical estimation algorithm of the resonator eigen frequency.

**Key words:** surface wave resonator, geometric singularity, partial wave synthesis method, edge specialty, eigen frequency.

значну кількість парціальних мод у кожній з часткових областей, що призводить до збільшення часу машинного розрахунку.

Мета цієї роботи – проілюструвати застосування МЧО з особливістю на ребрі [1–2, 8–11] до задачі визначення власної частоти фундаментальної моди основного класу коливань чвертьхвильового РПХ.

### Теорія

Загальний підхід до теоретичного аналізу чвертьхвильового РПХ за допомогою стандартного МЧО наведено у роботах [3–5]. Далі зосередимо увагу лише на тих особливостях теоретичного аналізу РПХ, які виникають при врахуванні особливостей ЕМП поблизу від геометричних сингулярностей, і врахування яких дозволяє підвищити ефективність чисельного алгоритму розрахунку власної частоти резонатора.

Задача про чвертьхвильовий РПХ розглядається в два етапи. Спочатку розглядається задача про нескінченно довгий резонатор (поздовжній розмір РПХ  $w \rightarrow \infty$ ), який розташовано у прямокутному хвильоводі з відомим поперечним перерізом (рис. 1). Потім враховується скінченість поздовжнього розміру  $w$  резонатора. Для спрощення,

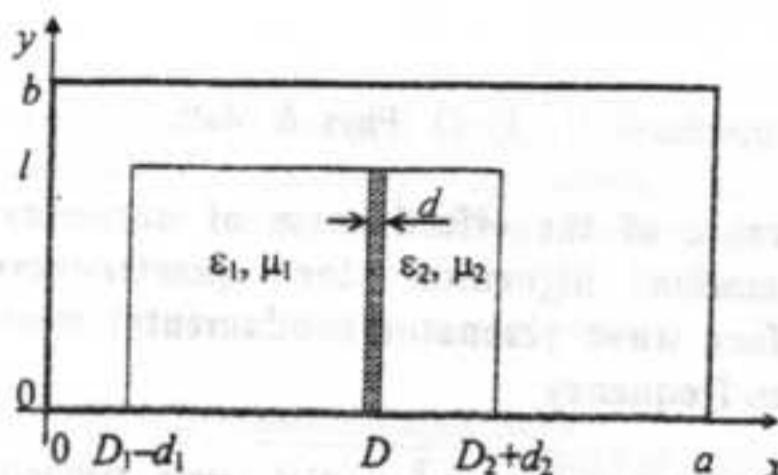


Рис. 1 Поперечний переріз прямокутного хвилеводу з чвертьхвильовим резонатором поверхневої хвилі.

обмежимось урахуванням особливостей ЕМП тільки в поперечному перерізі хвилеводу з резонатором (див. рис. 1). Як буде показано далі, цього досить для суттєвого покращення швидкодії та / або точності чисельного алгоритму розрахунку власної частоти фундаментальної моди чвертьхвильового РПХ.

На рис. 1 геометричним сингулярностям відповідають метало-діелектричні ребра при  $x = D_{1,2}$ ,  $y = l$  та діелектричні ребра при  $x = D_{1,2} \pm d_{1,2}$ ,  $y = l$ ;  $D_{1,2} = D \mp d/2$ . Поблизу від цих ребер ЕМП повинні поводити себе наступним чином:

при  $x \rightarrow D_1$ ,  $y = l$ :

$$E_x - |x - D_1|^{\rho_1}, H_x - |x - D_1|^{\theta};$$

при  $x \rightarrow D_2$ ,  $y = l$ :

$$E_x - |x - D_2|^{\rho_2}, H_x - |x - D_2|^{\theta};$$

при  $x \rightarrow D_1 - d_1$ ,  $y = l$ :

$$E_x - |x - D_1 + d_1|^{\rho_1}, H_x - |x - D_1 + d_1|^{\theta};$$

при  $x \rightarrow D_2 + d_2$ ,  $y = l$ :

$$E_x - |x - D_2 - d_2|^{\rho_2}, H_x - |x - D_2 - d_2|^{\theta}, \quad (1)$$

де

$$\rho_{1,2} = \frac{2}{\pi} \arccos \left( \frac{1 - \epsilon_{1,2}}{2 \epsilon_{1,2} + 1} \right), \quad \zeta_{1,2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{1 + 2\epsilon_{1,2}}.$$

Для спрощення в (1) припускається, що діелектричні підкладки РПХ виготовлені з немагнітних діелектриків і  $\mu_1 = \mu_2 \approx 1$ .

Для врахування особливостей ЕМП на границі  $y = l$  введемо нові функції  $E_x^{(1,2)}(x)$ ,  $E_z^{(1,2)}(x)$ ,  $H_x^{(1,2)}(x)$ ,  $H_z^{(1,2)}(x)$  координати  $x$ , визначені в площині  $y = l$  (єдиний для всіх функцій множник  $e^{\beta z}$ , де  $\beta$  – стала поширення власної хвилі, опускається):

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(x) &= \sum_{j=1} C_{1j} \Phi_{x1j}(x), \quad E_x^{(2)}(x) = \sum_{k=1} C_{2k} \Phi_{x2k}(x), \\ H_x^{(1)}(x) &= \sum_{j=1} D_{1j} \Psi_{x1j}(x), \quad H_x^{(2)}(x) = \sum_{k=1} D_{2k} \Psi_{x2k}(x), \\ \Phi_{x1j}(x) &= \sum_{j=1} C_{1j} \Phi_{x1j}^e(x) + \sum_{j=1} D_{1j} \Psi_{x1j}^e(x), \\ \Phi_{x2k}(x) &= \sum_{k=1} C_{2k} \Phi_{x2k}^e(x) + \sum_{k=1} D_{2k} \Psi_{x2k}^e(x), \\ \Psi_{x1j}(x) &= \sum_{j=1} C_{1j} \Phi_{x1j}^h(x) + \sum_{j=1} D_{1j} \Psi_{x1j}^h(x), \\ \Psi_{x2k}(x) &= \sum_{k=1} C_{2k} \Phi_{x2k}^h(x) + \sum_{k=1} D_{2k} \Psi_{x2k}^h(x), \quad (2) \end{aligned}$$

де функції  $\Phi_{x\theta}(x)$ ,  $\Psi_{x\theta}(x)$ ,  $\theta = \{1j, 2k\}$  визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \Phi_{x1j}(x) &= \\ &= \begin{cases} (1 - u_1)^{\rho_1} C_{2j}^{\rho_1 + 0.5}(u_1), & 0 \leq x \leq D_1 - d_1, \\ (u_1 - 1)^{\rho_1} (1 + u_2)^{\zeta_1} P_j^{\zeta_1, \rho_1}(u_2), & D_1 - d_1 \leq x \leq D_1, \end{cases} \\ \Phi_{x2k}(x) &= \\ &= \begin{cases} (u_3 + 1)^{\zeta_2} (u_4 - 1)^{\rho_2} P_k^{\zeta_2, \rho_2}(u_3), & D_2 \leq x \leq D_2 + d_2, \\ (1 - u_4)^{\rho_2} C_{2k}^{\rho_2 + 0.5}(u_4), & D_2 + d_2 \leq x \leq a, \end{cases} \\ \Psi_{x1j}(x) &= \begin{cases} C_{2j+1}^{0.5}(u_1), & 0 \leq x \leq D_1 - d_1, \\ C_{2j}^{0.5}(u_2), & D_1 - d_1 \leq x \leq D_1, \end{cases} \\ \Psi_{x2k}(x) &= \begin{cases} C_{2k}^{0.5}(u_3), & D_2 \leq x \leq D_2 + d_2, \\ C_{2k+1}^{0.5}(u_4), & D_2 + d_2 \leq x \leq a, \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } u_1 &= u_1(x) = \frac{x}{D_1 - d_1}, \quad u_2 = u_2(x) = \\ &= \frac{x - (D_1 - d_1/2)}{d_1/2}, \quad u_3 = u_3(x) = \frac{x - (D_2 + d_2/2)}{d_2/2}, \\ u_4 &= u_4(x) = \frac{a - x}{a - D_2 - d_2}; \quad C_n^\lambda(x) \text{ – поліноми} \end{aligned}$$

Гегенбауера,  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  – поліноми Якобі;  $\rho_1 = -1 + \tau_1$ ,  $\rho_2 = -1 + \tau_4$ ,  $\zeta_1 = -1 + \tau_2$ ,  $\zeta_2 = -1 + \tau_3$ , а  $\tau_{1,2,3,4}$  – параметри сингулярності поля поблизу від ребер  $x = D_1 - d_1$ ,  $x = D_1$ ,  $x = D_2$ ,  $x = D_2 + d_2$  відповідно. В загальному випадку параметри сингулярності  $\tau_{1,2,3,4}$  знаходяться за допомогою алгоритму, викладеного у [2, 8–11].

Використовуючи стандартні граничні умови неперервності тангенціальних складових полів при  $y = l$ , а також граничні умови на поверхні ідеального металу при  $D_1 \leq x \leq D_2$ , одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно коефіцієнтів розкладу ЕМП у кожній з

часткових областей. З умови рівності нулю визначника цієї системи знайдено сталі поширення  $\beta_n$  та поля власних хвиль у прямокутному хвилеводі з нескінченно довгим РПХ;  $n=1, 2, 3, \dots$ . Використовуючи одержані вирази для ЕМП та знайдені значення  $\beta_n$ , за допомогою стандартного МЧО розв'язано задачу про резонатор зі скінченним повздовжнім розміром  $w$ . У результаті розв'язку було визначено власну частоту  $f_0$  фундаментальної моди чвертьхвильового РПХ.

### Чисельний експеримент

Чисельний розрахунок власної частоти  $f_0$  чвертьхвильового РПХ проводився за допомогою комп'ютерної програми мовою C++, яку розроблено автором роботи. Розрахунки проводились для РПХ з розмірами  $l=3,0$  мм,  $w=10,0$  мм, розташованого посередині стандартного 8-мм хвилеводу:  $a=7,2$  мм,  $b=3,4$  мм,  $D=3,6$  мм. Розглядався випадок резонатора з однією діелектричною підкладкою товщиною  $d_1=0,5$  мм, діелектрична проникність якої  $\epsilon_1$  могла змінюватись;  $\epsilon_2=1$ ,  $d_2=0$ . Під час експерименту також могла змінюватись товщина резонатора  $d$ .

Як еталонне значення частоти  $f_{00}$  обрано значення частоти, розраховане за допомогою стандартного алгоритму МЧО, що не враховує особливостей ЕМП. При цьому кількість парціальних мод, які враховувались в кожній з часткових областей, становила  $N=10^3$ , що давало змогу вважати похибку визначення частоти достатньо низькою (меншою за 1%).

### Результати та їх обговорення

На рис. 2–3 показано залежності похибки визначення частоти  $\delta f = |f_0 - f_{00}| / f_{00}$  від кількості мод  $N$ , що враховуються. З рис. 2–3 випливає, що при врахуванні особливостей ЕМП, як і очікувалось, стабільність та точність алгоритму чисельного розрахунку власної частоти чвертьхвильового РПХ підвищується.

Із збільшенням товщини резонатора  $d$  точність розрахунку за допомогою стандартного МЧО різко спадає, в той час як точність розрахунку для алгоритму, що враховує особливості полів, змінюється несуттєво (див. рис. 2). Це є наслідком того, що зі збільшенням

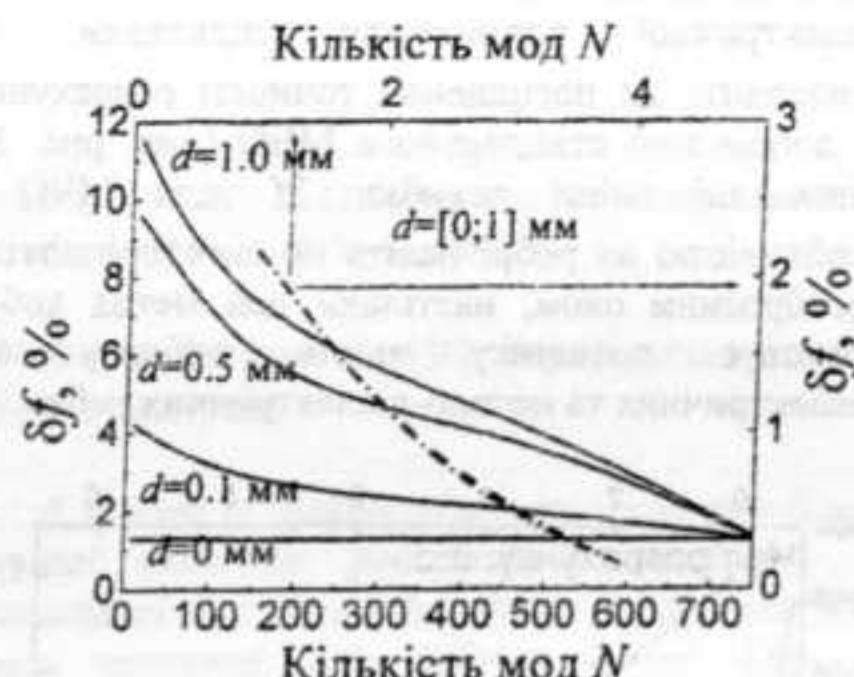


Рис. 2 Графік залежності відносної похибки  $\delta f = |f_0 - f_{00}| / f_{00}$  визначення власної частоти чвертьхвильового РПХ від кількості мод  $N$ , що враховуються для випадку різної товщини РПХ  $d$ . Суцільні криві – стандартний МЧО, пунктирні криві – МЧО з особливістю на ребрі.

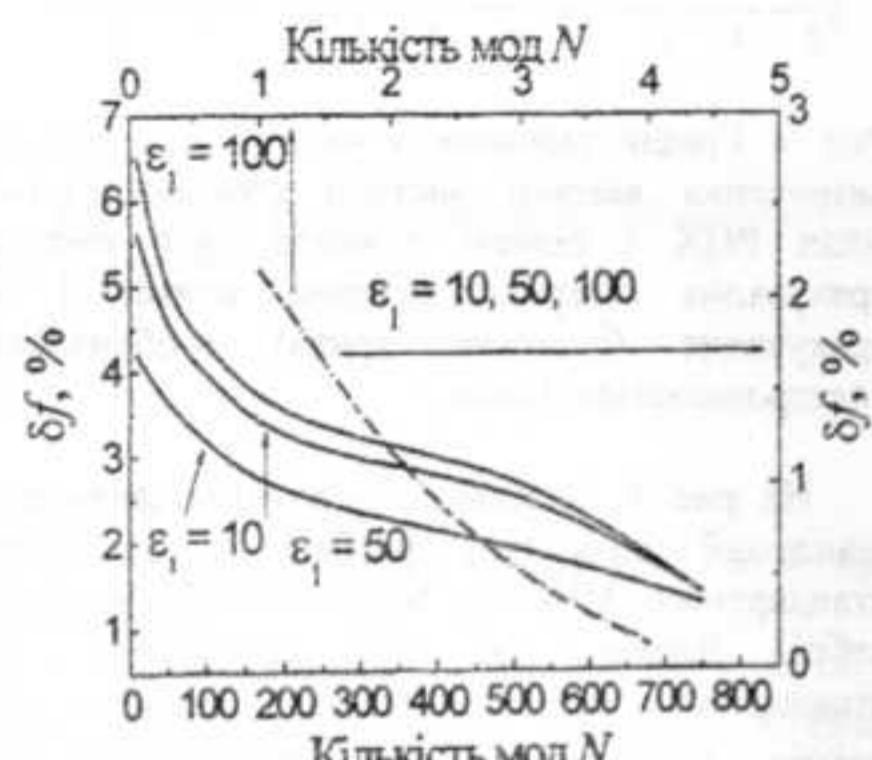


Рис. 3 Графік залежності відносної похибки  $\delta f = |f_0 - f_{00}| / f_{00}$  визначення власної частоти чвертьхвильового РПХ від кількості мод  $N$ , що враховуються для випадку РПХ на різних діелектричних підкладках. Суцільні криві – стандартний МЧО, пунктирні криві – МЧО з особливістю на ребрі.

товщини резонатора  $d$  прояв особливостей ЕМП РПХ стає більш помітним. В той же час, при  $d \rightarrow 0$ , особливості ЕМП спостерігаються лише в малому колі точки  $x=D \pm 0$ ,  $y=l$ , яка не вносить суттєвого збурення у граничні умови, які записані у площині  $y=l$ .

Слід також відмітити, що збільшення

діелектричної проникності підкладки  $\epsilon_1$  призводить до поганшення точності розрахунку за допомогою стандартного МЧО (див. рис. 3). Відповідні зміни похибки  $\delta f$  для МЧО з особливістю на ребрі навіть не спостерігаються неозброєним оком, настільки цей метод добре враховує поведінку полів поблизу від діелектричних та метало-діелектричних ребер.

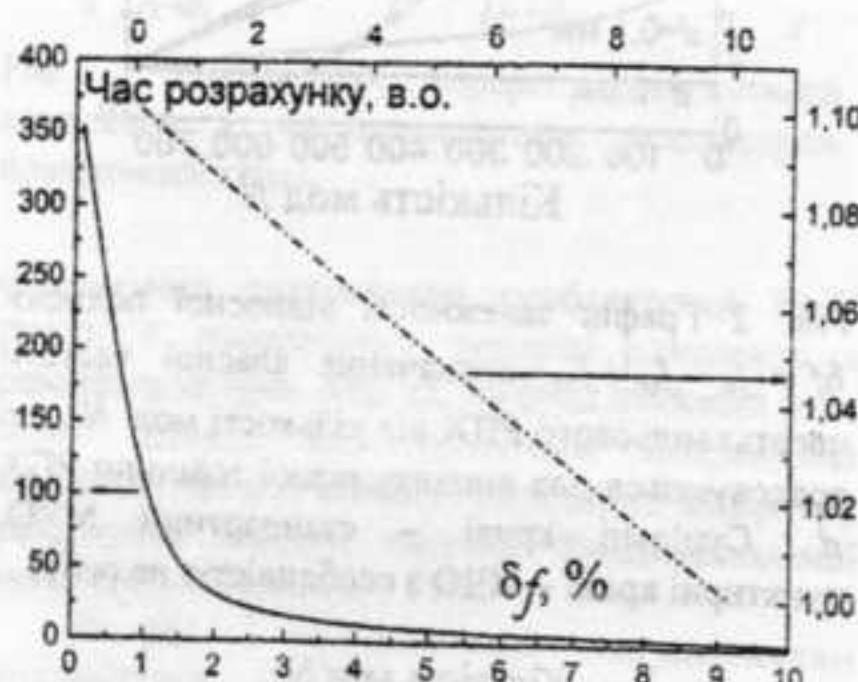


Рис. 4 Графік залежності часу розрахунку для визначення власної частоти фундаментальної моди РПХ з різною точністю для випадку врахування (штрих-пунктирна крива) і не врахування (сузільна крива) особливостей електромагнітних полів.

На рис. 4 показано порівняльні залежності швидкодії алгоритмів розрахунку на основі стандартного МЧО та МЧО з особливістю на ребрі. Видно, що час розрахунку для стандартного МЧО є функцією похибки  $\delta f$ , графік якої схожий на графік згасаючої експоненти, тобто для досягнення малої похибки  $\delta f$  необхідний великий час машинного розрахунку. Графік для МЧО з особливістю на ребрі зображується майже прямою лінією, а значення часу розрахунку при тому ж значенні похибки  $\delta f$  на декілька порядків менше ніж для стандартного МЧО.

### Висновки

Застосування МЧО з особливістю на ребрі дозволяє суттєво підвищити (на декілька порядків) швидкодію та / або точність алгоритму чисельного розрахунку власної частоти фундаментальної моди чвертьхвильового РПХ. Це може бути використано для побудови

швидких систем автоматичного проектування мікрохвильових пристрій на основі РПХ.

### Список використаних джерел

1. Заргано Г.Ф., Лерер А.М., Ляпин В.П., Синявский Г.П. Линии передачи сложных сечений. – Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. – 320 с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 328 с.
3. Melkov G.A., Egorov Y.V., Ivanuta A.N., Malyshev V.Y., Zeng H.K., Wu K.H., Juang J.Y. HTS Surface Wave Resonators // Journal of Superconductivity. – 2000. – 13, № 1. – P. 95-100.
4. Іванюта О.М., Кищенко Я.І., Прокопенко О.В., Ракша В.М. Система збудження джозефсонівських контактів у резонаторі поверхневої хвилі // Український фізичний журнал. – 2002. – 47, № 6. – С. 592-593.
5. Ivanuta O.M., Prokopenko O.V., Raksha V.M., Klushin A.M. Microwave detection using Josephson junction arrays integrated in a resonator // Physica Status Solidi. – 2005. – 2, № 5. – P. 1688-1691.
6. Іванюта О.М., Прокопенко О.В. НВЧ аналізатор біоактивних рідин // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 248-252.
7. Іванюта О.М., Прокопенко О.В. Дослідження водних сольових розчинів за допомогою НВЧ аналізатора на основі резонатора поверхневої хвилі // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – № 1. – С. 180-182.
8. Andersen J.B., Solodukhov V.V. Field Behavior near a Dielectric Wedge // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1978. – 26, № 4. – P. 598-602.
9. Brooke G.H., Kharadly M.M.Z. Field behavior near anisotropic and multidielectric edges // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1977. – 25, № 7. – P. 571-575.
10. Hurd R.A. The edge condition in electromagnetics // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1976. – 24, № 1. – P. 70-73.
11. Meixner J. The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1972. – 20, № 4. – P. 442-446.

Надійшла до редколегії 01.03.2009

УДК 535.51

Савенков\* С.М., к.ф.-м. наук, Клімов О.С.,  
асpirант, Оберемок Є.А., к.ф.-м. наук

## Стокс-поляриметр на рідкокристалічних комірках: аналіз похибок.

Розглянуто схему стокс-поляриметра з перетворювачем поляризації випромінювання, побудованому на двох рідкокристалічних комірках. Показано, що в даній схемі параметри Стокса визначаються з різною точністю. Останнє призводить до залежності точності визначення величин параметрів поляризації від стану поляризації випромінювання, що вимірюється. Розглянуто комбінацію двох рідкокристалічних комірок із кристалічною фазовою пластинкою  $\lambda/4$ , яка дозволяє реалізувати ефективну фазову пластинку, що обертається, що дозволяє програмним шляхом обирати той чи інший варіант стокс-поляриметра.

**Ключові слова:** стокс-поляриметр, вектор Стокса, рідкокристалічний перетворювач поляризації.

\*E-mail: sns@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

### Вступ

Поляриметричні методи дослідження різного роду матеріалів та їх поверхонь є достатньо інформативними та ефективними [1,4]. Вони широко застосовуються в астрономії, в дослідженії поверхонь різних матеріалів, в медицині тощо. Ключовим моментом в методах поляриметричного дослідження є аналіз стану поляризації випромінювання після взаємодії з досліджуваним об'єктом. Таким чином, розвиток та вдосконалення методів вимірювання стану поляризації електромагнітного випромінювання є сучасною актуальною задачею.

Для повного опису поляризації електромагнітного випромінювання використовують формалізм Стокса [1], згідно якого стан поляризації випромінювання представляється за допомогою чотирьох параметрів, які записують у вигляді вектора  $S$  - вектора Стокса:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + I_{90} \\ I_0 - I_{90} \\ I_{45} - I_{135} \\ I_L - I_R \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\beta)\cos(2\varepsilon) \\ \sin(2\beta)\cos(2\varepsilon) \\ \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Savenkov S.N., PhD, Klimov A.S., postgraduate student, Oberemok Y.A., PhD.

## Stokes-polarimeter with liquid crystal cells. Error analysis.

A scheme of stokes-polarimeter with two liquid crystal cells as polarization transducers is considered. It is shown that Stokes parameters have been measured with different errors. One in addition depends on concrete polarization state of radiation that has been analyzed. Also we discuss different conditions on liquid crystal cells parameters and static quarter wave plate  $\lambda/4$  to extend the range of polarization transformations, in particular, this allows to realize the effective continuously rotated wave plate.

**Key Words:** stokes-polarimeter, Stokes vector, liquid crystal cell.

де  $\beta$  – азимут еліпса поляризації;  $\varepsilon$  – кут еліптичності.

Згідно визначення параметри Стокса  $S_{1-4}$  мають наступний фізичний зміст:  $S_1$  – сума інтенсивностей випромінювання, що пройшло крізь лінійний поляризатор з орієнтацією  $0^\circ$  та  $90^\circ$  (тобто повна інтенсивність випромінювання  $I$ );  $S_2$  – різниця тих самих інтенсивностей;  $S_3$  – різниця інтенсивностей випромінювання, що пройшло крізь лінійний поляризатор з орієнтацією  $45^\circ$  та  $135^\circ$ ;  $S_4$  – різниця інтенсивностей випромінювання, що пройшло крізь пристрій з пропусканням тільки право або ліво циркулярно поляризованого випромінювання.

На даний час рядом авторів запропоновані та реалізовані різноманітні схеми пристрій для вимірювання параметрів Стокса випромінювання (стокс-поляриметри) [5-7,13]. У переважній більшості цих схем ключовим елементом є перетворювачі поляризації з керованими параметрами. За способом керування параметрами перетворювачів поляризації стокс-

поляриметри можна розділити на два класи: з механічно керованими параметрами та з електрично керованими параметрами. До механічно керованих відносяться перетворювачі у яких необхідно змінювати положення та орієнтацію відповідних поляризаційних елементів (пересувати або обертати поляризатори, фазові пластинки тощо). Схеми стокс-поляриметрів з механічно керованими перетворювачами поляризації завдяки простоті у реалізації та у налаштуванні є найбільш поширеними. Але, в окремих випадках, вони мають суттєві недоліки внаслідок нездатності забезпечити необхідну точність та швидкодію у керуванні.

Серед електрично керованих можна згадати перетворювачі на основі електрооптичних, магнітооптичних, акустооптичних комірок тощо. Анізотропні властивості цих перетворювачів змінюють шляхом прикладання змінного зовнішнього електричного (магнітного) поля, що можна робити з порівняно великою швидкістю та точністю без механічних втручань. До недоліків електрично керованих перетворювачів поляризації можна віднести те, що їх анізотропні характеристики звичайно: 1) залежать нелінійно від прикладеного зовнішнього поля; 2) діапазон керування параметрами анізотропії є обмеженим; 3) керування здійснюється тільки одного параметру (орієнтацією вісі анізотропії, величини анізотропії). Вказані недоліки ускладнюють юстування відповідних схем стокс-поляриметрів, та вимагають дублювання перетворювачів, або зміни їх положень для розширення загального діапазону перетворення поляризації випромінювання.

В останній час все більшої популярності набувають перетворювачі на рідких кристалах (РКП) [8,15]. Комірка РКП складається з шару рідкого кристалу, який розміщений між двома прозорими електродами, на які подається керуюча напруга. Така комірка виявляє ефект двопроменезаломлення, вісь якого є перпендикулярною до напрямку розповсюдження випромінювання. Таким чином, комірка РКП є фазовою пластинкою, у якої величина двопроменезаломлення (або фазовий зсув) керується за допомогою напруги. Поряд із відносно невеликою ціною та задовільною швидкодією РКП дозволяє отримати широкий діапазон змін величини двозаломлення при керуючих напругах порядку 12В [15]. Два послідовно розміщені РКП дозволяють здійснювати діапазон модуляції поляризації випромінювання, достатній для визначення всіх

четирьох параметрів Стокса. Схему відповідного стокс-поляриметра зображенено на рис.1. В роботі [8] дану схему оптимізовано щодо мінімізації інтегральної похиби вимірювання параметрів Стокса. При цьому, системного аналізу точності визначення кожного з параметрів окремо не проводилось, а припускалось, що параметри Стокса вимірюються з однаковою точністю. На справді, як показано в [14], параметри Стокса в загальному випадку визначаються з різною точністю, яка залежить від значення конкретного параметру, алгоритму та схеми вимірювання. Данна обставина може бути використана для вибору оптимальної схеми вимірювання параметрів Стокса та оптимізації задачі по дослідженню взаємодії поляризованого випромінювання з об'єктами різної природи.

Таким чином метою даної роботи було проаналізувати точність визначення кожного з четырьох параметрів Стокса в схемі з двома комірками РКП.

**Стокс-поляриметр з двома комірками РКП**  
Схема поляриметра (див. рис.1) для вимірювання параметрів Стокса поляризованого випромінювання складається з двох одинакових комірок РКП-1 та РКП-2, аналізатора А, та детектора Д.

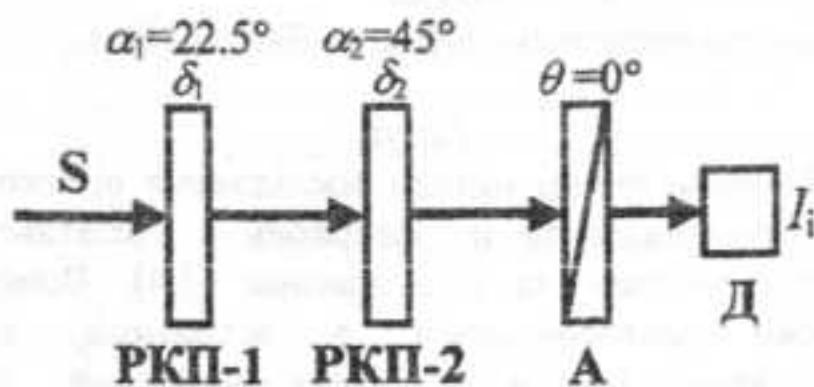


Рис. 1. Схема стокс-поляриметра з перетворювачем на двох РКП комірках.

Швидкі осі РКП комірок зорієнтовані під кутами  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  відносно нерухомого аналізатора А, орієнтацію осі пропускання якого  $\theta$  прийнято в схемі за базовий напрямок ( $\theta=0^\circ$ ). Детектор Д реєструє інтенсивність випромінювання  $I_i$  після аналізатора А.

Виходячи з кількості елементів вектора Стокса  $S$ , система рівнянь для їх визначення повинна складатися як мінімум з четырьох рівнянь. Таку систему можна скласти, якщо зробити виміри інтенсивності на виході аналізатора А при четырьох різних комбінаціях фазових зсувів  $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}$  РКП комірок ( $i=1 \dots 4$ ). При цьому орієнтація швидких осей у комірках

має бути різною  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  для утворення сумісної системи. Ввівши позначення для елементів поляриметра рис. 1 як:  $M_A(\theta)$  - матриця Мюллера аналізатора A з орієнтацією осі максимального пропускання  $\theta$ ;  $M_{\phi\pi}(\delta, \alpha)$  - матриця Мюллера комірки РКП із фазовим зсувом  $\delta$  та орієнтацією швидкої осі  $\alpha$  [1], інтенсивність на виході аналізатора A для довільного вектора Стокса вихідного випромінювання S можемо визначити як:

$$I = (M_A(0^\circ) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_2, \alpha_2) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_1, \alpha_1) \cdot S). \quad (2)$$

В (2) ми одразу зафіксували орієнтацію аналізатора. Відповідно до (2) система рівнянь для визначення елементів вектора Стокса матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M_A(0^\circ) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_2^{(1)}, \alpha_2) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_1^{(1)}, \alpha_1) \cdot S) \\ (M_A(0^\circ) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_2^{(2)}, \alpha_2) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_1^{(2)}, \alpha_1) \cdot S) \\ (M_A(0^\circ) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_2^{(3)}, \alpha_2) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_1^{(3)}, \alpha_1) \cdot S) \\ (M_A(0^\circ) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_2^{(4)}, \alpha_2) \cdot M_{\phi\pi}(\delta_1^{(4)}, \alpha_1) \cdot S) \end{bmatrix} \quad (3)$$

З (3) вектор Стокса визначаємо наступним чином:

$$S = A^{-1} \cdot I \quad (4)$$

де A - так звана характеристична матриця стоксполяриметра,  $A^{-1}$  - матриця, що є оберненою до A.

З формальної точки зору для існування розв'язків системи (3) можна обрати довільні пари фазових зсувів  $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}$  комірок РКП-1 та РКП-2 рис. 1. такі, що забезпечують її сумісність. В реальних умовах похибки у завданні параметрів комірок, у вимірюванні інтенсивності випромінювання тощо, будуть призводити до нестійкості розв'язків системи рівнянь (3).

Відомо, що при розв'язуванні систем лінійних неоднорідних рівнянь типу (3) похибка розв'язків залежить від обумовленості характеристичної матриці A системи [2]. Мірою цієї обумовленості є число  $V_A$ , число обумовленості, що визначається як:

$$V_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (5)$$

де  $\|\cdot\|$  - позначена норма Фробеніуса.

Похибка розв'язків системи рівнянь  $\delta\delta$  визначається величиною числа обумовленості [2] наступним чином:

$$\delta\delta \leq \frac{V_A(\delta A + \delta I)}{1 - V_A \delta A}, \quad (6)$$

де  $\delta\delta, \delta A, \delta I$  - відносні похибки для вектору Стокса, характеристичної матриці та вектору інтенсивностей в (4) відповідно, що визначені у відповідності до [2].

В даному випадку число обумовленості є функцією параметрів  $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}$  та фіксованих кутів  $\alpha_1, \alpha_2$  комірок РКП. Отже, з набору припустимих значень величин  $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}$  та  $\alpha_1, \alpha_2$  слід обрати такі, що забезпечують мінімальне значення числа обумовленості.

Можна показати, що при фіксованих кутах  $\alpha_1, \alpha_2$  існує нескінчений набір з чотирьох пар фазових зсувів  $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}$ , за яких досягається мінімум числа обумовленості  $V_A^{\min} = \sqrt{20} \approx 4.47$ . Для визначеності орієнтації комірок РКП були обрані  $\alpha_1 = 22.5^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$  [8], при цьому, один з варіантів набору пар фазових зсувів може бути таким:

$$(\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}) = (3.2^\circ, 131.1^\circ), (162.5^\circ, 53.4^\circ), (32.6^\circ, 1.3^\circ), (167.0^\circ, 159.7^\circ). \quad (7)$$

На рисунку 2 представлена графік залежності величини числа обумовленості для стоксполяриметра рис. 1. при зміні орієнтації комірок  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  за умови (7).

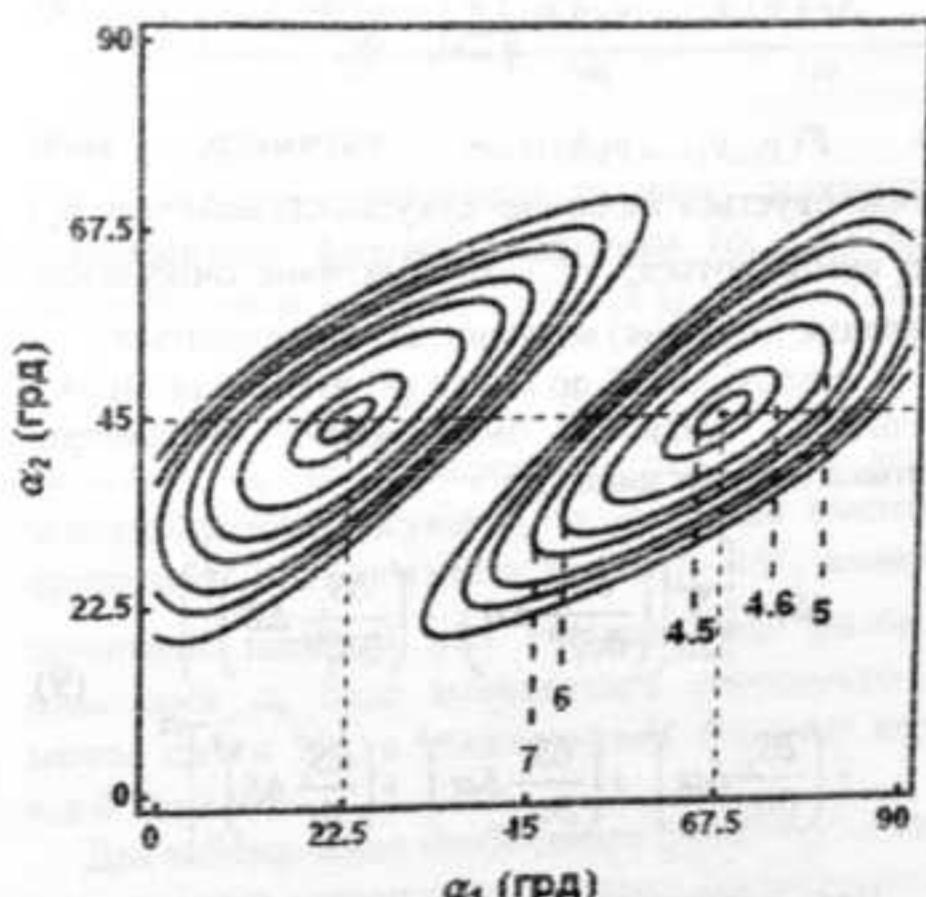


Рис. 2. Залежність величини числа обумовленості  $V_A$  від азимутів орієнтації осей  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  комірок РКП.

Внаслідок симетрії розв'язків на рис. 2 присутні дві оптимальні пари орієнтації комірок РКП-1 та РКП-2:  $(\alpha_1 = 22.5^\circ, \alpha_2 = 45^\circ)$  та

$(\alpha_1 = 67.5^\circ, \alpha_2 = 45^\circ)$ , що забезпечують мінімум числа обумовленості за умови (9).

На рис. 2 видно, що значення числа обумовленості не перевищують 4.5 при відхиленні азимута орієнтації осі комірки на  $\pm 3^\circ$  від оптимального. Тобто, величина похибки розв'язку системи рівнянь (3) мало змінюється. Дані обставини "пом'якшує" вимоги до точності позиціонування комірок РКП стокс-поляриметра.

Визначивши набір параметрів комірок РКП-1 та РКП-2 стокс-поляриметра, проаналізуємо, яким чином недосконалості цих комірок та інших елементів поляриметра впливатимуть на точність визначення кожного з чотирьох параметрів Стокса.

Позначимо абсолютну похибку завдання азимута швидкої осі комірки через  $\Delta\alpha$ , а фазового зсуву –  $\Delta\delta$ . Похибку вимірюв, яку пов'язано з нестабільністю інтенсивності джерела випромінювання, позначимо через  $\Delta I$ . Інші можливі недосконалості елементів стокс-поляриметра в даному випадку нами не розглядалися, оскільки зазначені три є основним джерелом похибок.

Для оцінки похибки визначення кожного з параметрів Стокса використаємо відоме співвідношення з теорії похибок [3]:

$$\Delta F(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial F(y_n)}{\partial y_n} \Delta y_n \right)^2}, \quad (8)$$

де  $F(y_1, y_2, \dots, y_N)$  – параметр, який розраховується на основі сукупності величин  $y_n$ , що вимірюються;  $y_n^0$  – математичне очікування (середнє значення) величин, які вимірюються.

У відповідності до (4) та (8) вираз для оцінки величини похибки знаходження параметрів Стокса набуває вигляду:

$$\Delta S_i = \left[ \sum_{k=1}^4 \left( \left( \frac{\partial S_i}{\partial \delta_1^{(k)}} \Delta \delta \right)^2 + \left( \frac{\partial S_i}{\partial \delta_2^{(k)}} \Delta \delta \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha \right)^2 + \left( \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha \right)^2 + \left( \frac{\partial S_i}{\partial I} \Delta I \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

Для визначеності візьмемо такі оцінки для значень похибок завдання азимуту орієнтації швидкої осі, фазового зсуву та інтенсивності джерела випромінювання:  $\Delta\alpha=0.2^\circ$ ,  $\Delta\delta=0.5^\circ$  та  $\Delta I=0.1\%$  (прийнявши повну інтенсивність за одиницю  $I=1$ ). В результаті, на основі (8), отримані наступні, рис. 3, залежності похибок

визначення кожного з параметрів Стокса  $\Delta S_i$  від азимуту  $\beta$  та кута сліптичності  $\varepsilon$  еліпса поляризації випромінювання, що аналізується.

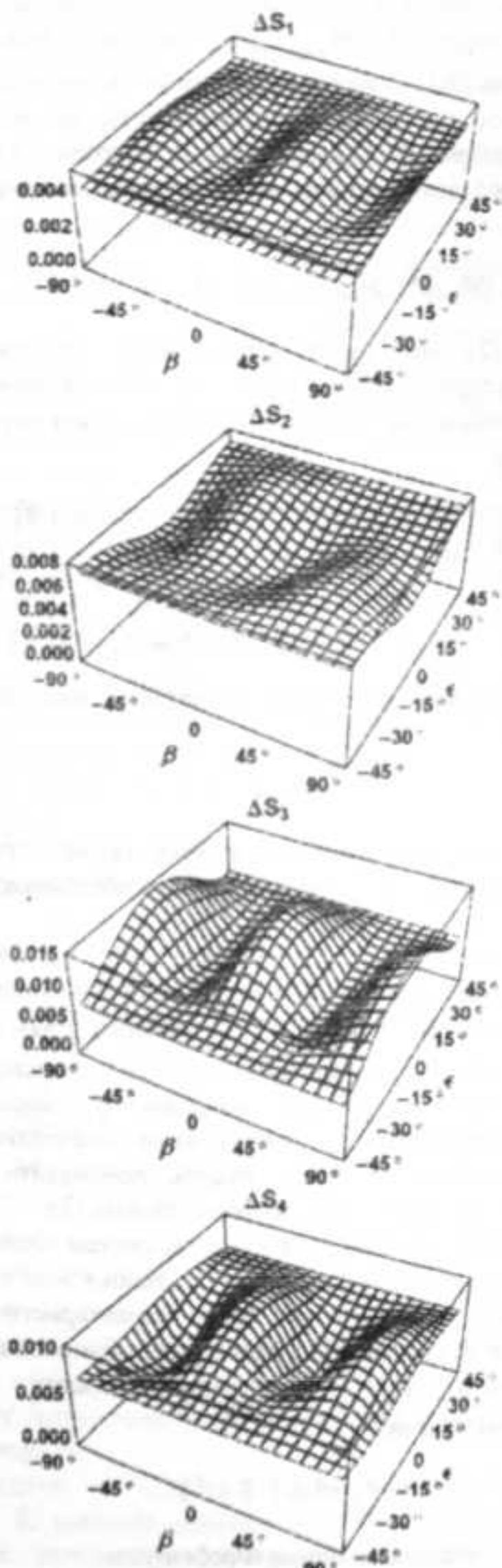


Рис. 3. Залежність похибки визначення параметрів Стокса від стану поляризації випромінювання, що аналізується ( $\beta$  – азимут еліпса поляризації,  $\varepsilon$  – кут сліптичності).

Середнє  $\overline{\Delta S}$  та амплітудне  $\overline{\Delta S}_{pp}$  значення похибки для кожного параметра Стокса складає:

$$\overline{\Delta S} = [0.005 \quad 0.007 \quad 0.010 \quad 0.008] \quad (10)$$

$$\Delta S_{pp} = [0.001 \quad 0.001 \quad 0.006 \quad 0.003]$$

Як це видно з рис. 3, величина похибки при визначенні параметрів Стокса в поляриметрі з комірками РКП рис. 1. залежить від стану поляризації випромінювання. Данна залежність є симетричною відносно знаку еліптичності еліпса поляризації для параметрів  $S_1$  та  $S_3$ , та антисиметричною для параметрів  $S_2$  та  $S_4$ . Відносно нульового значення азимуту  $\beta$  - залежності на рис. 3 антисиметричні для всіх параметрів крім  $S_3$ . З (10) також можна зробити висновок, що в схемі поляриметра, яку розглянуто, в загальному випадку, параметри Стокса вимірюються з різною точністю. При цьому найточніше визначається параметр  $S_1$ , трохи гірше  $S_2$ , потім  $S_4$  і найгірше – параметр  $S_3$ . Для параметра  $S_3$  також найбільшим є діапазон змін величини похибки. Положення екстремумів на залежностях рис. 3 обумовлені орієнтацією осей комірок РКП-1,2 ( $\alpha_1 = 22.5^\circ$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ ) відносно аналізатора А рис. 1.

Таким чином, в розглянутій схемі поляриметра при довільній поляризації випромінювання, що вимірюється, інтенсивність буде визначатись з максимальною точністю. Параметри випромінювання, велика вісь еліпса поляризації якого орієнтована під кутом  $0^\circ$  та  $90^\circ$ , також будуть визначатись з найбільшою точністю, незалежно від еліптичності. Точність аналізу випромінювання з орієнтацією еліпсу поляризації близької до  $45^\circ$  буде найгіршою, та сильно залежатиме від еліптичності еліпсу поляризації. Кут еліптичності стану поляризації випромінювання в даній схемі поляриметра, з врахуванням порівнянності значень  $\overline{\Delta S}_4$  та  $\overline{\Delta S}_{pp,4}$ , буде визначатися з порівняно більшою похибкою залежно від орієнтації еліпсу поляризації.

### Розширення діапазону параметрів перетворювача поляризації на РКП.

Невелика ціна, зручність у керуванні, великий динамічний діапазон величини фазового зсуву та порівняно висока швидкодія РКП роблять актуальним розгляд можливості побудови на їх основі перетворювача поляризації випромінювання з максимально можливим діапазоном

перетворення. Зокрема, такий перетворювач являє собою еквівалентну фазову пластинку  $M_{\text{ФП},e}(\delta_e, \alpha_e)$  з електрично керованими фазовим зсувом у діапазоні  $0^\circ \leq \delta_e \leq 180^\circ$  та орієнтацією швидкої осі у діапазоні  $-90^\circ \leq \alpha_e \leq 90^\circ$ . Попередній аналіз показав, що використання двох комірок РКП з незмінною взаємною орієнтацією, без додаткових поляризаційних елементів, не дозволяє реалізувати бажаний діапазон зміни параметрів еквівалентної фазової пластинки:

$$M_{\text{ФП},e}(\delta_e, \alpha_e) = M_{\text{ФП}}(\delta_1, \alpha_1)M(\delta_2, \alpha_2) \quad (11)$$

Відповідно до (11), якщо  $\delta_1$  та  $\delta_2$  змінюються в межах від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , можна визначити область припустимих значень  $\delta_e$  та  $\alpha_e$  для заданих  $\alpha_1, \alpha_2$ . На рис. 4 проілюстрований випадок для  $|\alpha_1 - \alpha_2| = 22.5^\circ$ .

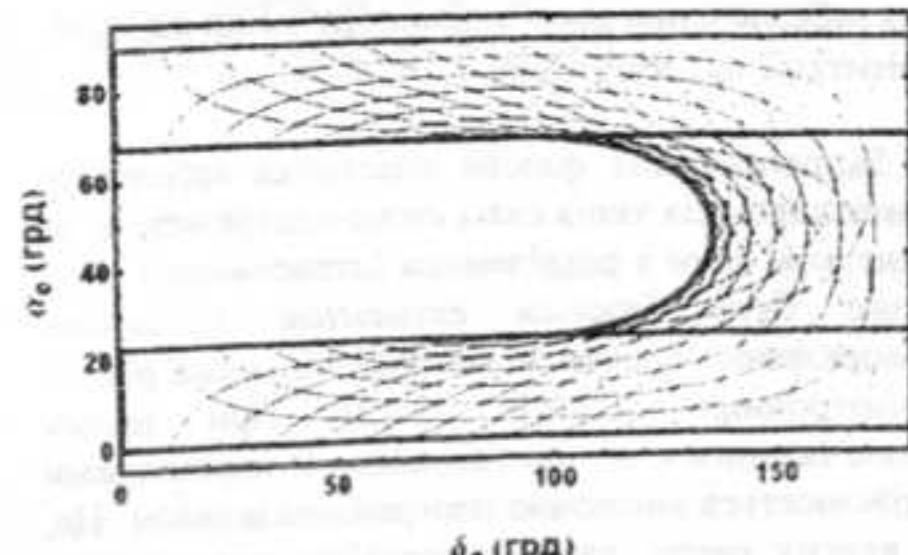


Рис. 4. Область існування величин параметрів еквівалентної фазової пластинки ( $\alpha_e, \delta_e$ ) при взаємній орієнтації осей РКП-1,2  $|\alpha_1 - \alpha_2| = 22.5^\circ$ .

З рис. 4 можна бачити, що існує область, де величини  $\alpha_e$  та  $\delta_e$  нереалізуються ні за яких змінень фазових зсувів  $\delta_1$  та  $\delta_2$ . Якщо взаємну орієнтацію РКП покласти  $|\alpha_1 - \alpha_2| = 45^\circ$ , азимут орієнтації швидкої вісі еквівалентної фазової пластинки  $\alpha_e$  буде змінюватись неперервно в межах смуги  $90^\circ$ , а еквівалентний фазовий зсув від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

Для забезпечення необхідного діапазону зміни кута  $\alpha_e$  нами запропоновано схему еквівалентної фазової пластинки (рис. 5). Вона складається з двох комірок РКП, між якими розміщено фіксовану фазову пластинку ( $\Phi P$ )  $\lambda/4$ . Оси РКП-1,2 співпадають за напрямком ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$ ), а азимут осі  $\Phi P$  складає кут  $45^\circ$  відносно  $\alpha_1$ .

Така фазова пластинка, забезпечує увесь діапазон можливих значень азимута орієнтації

швидкої осі  $\alpha_c$ , але при цьому еквівалентний фазовий зсув  $\delta_c$  змінюється лише в межах від  $90^\circ$  до  $180^\circ$ . Зв'язок між параметрами еквівалентної фазової пластинки ( $\alpha_c$ ,  $\delta_c$ ) та фазовими зсувами комірок РКП ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ) описується за допомогою наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \delta_c &= \arccos(-\sin(\delta_1)\sin(\delta_2)) \\ \alpha_c &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\cos(\delta_2)}{\cos(\delta_1)\sin(\delta_2)}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

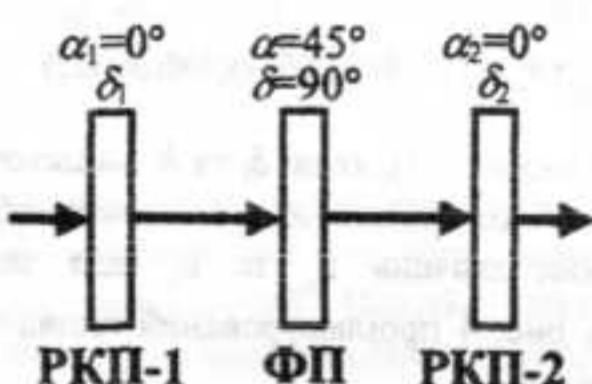


Рис 5. Схема еквівалентної фазової пластинки для забезпечення всього діапазону зміни азимута орієнтації  $\alpha_c$  (-90°÷+90°)

Запропонована фазова пластина забезпечує реалізацію усіх типів схем стокс-поляриметрів, за винятком схем з розділенням інтенсивності [5], і може бути базовим елементом в схемах вимірювання елементів матриці Мюллера різних анізотропних об'єктів [9-13]. При цьому визначальним є те, що керування її параметрами здійснюється виключно програмним шляхом. Це, у власну чергу, дасть можливість програмного вибору схеми стокс-поляриметру для забезпечення максимальної точності вимірювання.

#### Список використаних джерел

1. Аззам Р.А., Башара Н.М. Эллипсометрия и поляризованный свет. – М.: Мир, -1981. –584с.
2. Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 303 с.
3. Агекян Т.А., Основы теории ошибок. 2-ое изд. – М.: Наука, 1972. – 170 с.
4. Kiselev N., Rosenbush V.K. Polarimetry of comets: progress and problems // Photopolarimetry in remote Sensing. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. – 2004. – P. 411-430.
5. Шутов А.М. Оптические схемы устройств изменения параметров поляризованного излучения.
6. Azzam R.M.A. Mueller-matrix ellipsometry: a review // SPIE Proc. – 1997. – 3121. – P. 396-405.
7. Sabatke D.S., Dascour M.R., Derenik E.L., Sweatt W.C., Kemme S.A., Phipps G.S. Optimization of retardance for a complete Stokes polarimeter // Opt. Letters. – 2000. – 25. – №11. – P. 802-804.
8. Tyo J.S. Noise equalization in Stokes parameter images obtained by use of variable-retardance polarimeters // Opt. Lett. – 2000. – 25, №16 – P. 1198-1200.
9. Savenkov S.N. Optimization and structuring of the instrument matrix for polarimetric measurements // Opt. Engineering. – 2002. – 41. – P. 965-972.
10. Tyo J.S. Design of optimal polarimeters: maximization of signal-to-noise ratio and minimization of systematic error // Appl. Opt. – 2002. – 41, №4 – P. 619-630.
11. Савенков С.Н., Григорук В.И., Климов А.С., Оберемок Е.А., Скобля Ю.А. Метод трех линейных зондирующих поляризаций в мюллера-поляриметрии с источником поляризованного излучения произвольной эллиптичности // Журнал Прикладной Спектроскопии – 2008. – 75, № 6. – С. 875-881.
12. Kaminsky W., Claborn K., Kahr B. Polarimetric imaging of crystals // Chem. Soc. Rev. – 2004. – №33. – P. 514-525.
13. Azzam R.M., Elminyawi I.M., El-Saba A.M. General analysis and optimization of the four-detector photopolarimeter // J.Opt.Soc.Am.A. – 1988. – №5. – P.681-689.
14. Savenkov S.N., Oberemok Y.A., Klimov A.S. Analysis of Generalized Polarimetric Measurement Equations for Stokes Polarimetry Techniques // 3rd World Congress "Aviation in the XXI-st Century" 2008 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium Kiev, Ukraine, September 22-24, – 2008 MRRS-2008 Symposium Proceedings P.4-57.
15. Paul A.S. Scientific and Industrial Liquid Crystal Polarimetry Applications (5741-23) – Meadowlark Optics, Inc., Frederick, Colorado, USA.

Надійшла до редколегії 26.02.09

# **СУЧАСНА ФІЗИКА**

Відомі фахівці та вчени

з усієї світової фізики

загальні та спеціальні теми

з фізики та фізичного хімія



УДК 532.536

Альохін О.Д., доктор ф.-м. наук, професор  
Абдікарімов Б.Ж., кандидат ф.-м. наук  
Рудников С.Г., кандидат ф.-м. наук  
Білоус О.І., кандидат ф.-м. наук  
Скляров Ю.П., кандидат ф.-м. наук

## Теплосмість наносистем поблизу критичної точки

У роботі на основі флюктуаційної теорії фазових переходів в макро- та нано- системах були запропоновані рівняння теплосмістості наносистем вздовж граничних напрямків критичної ізохори, критичної ізотерми, межі поділу фаз. Одержані рівняння узгоджуються з експериментальними даними поведінки теплосмістості розчину 2,6-лутідин-важка вода в обмежених нано системах поблизу критичної температури розширування.

**Ключові слова:** критична точка, обмежені системи, наносистеми, теплосмість

UDK 532.536

Alekhin A.D., Dr. of Sci., Prof.  
Abdikarimov B.Zh., Ph.D.  
Rudnikov E.G., Ph.D.  
Bilous O.I., Ph.D.  
Sklyarov Yu.P., Ph.D.

## Heat capacity of nano-systems near the critical point

On the basis of the fluctuation theory of phase transitions and equations of macro- and nano-systems, the equations of heat capacity for nano-systems have been proposed along the limiting critical directions: critical isochore, critical isotherm, phase interphase. The obtained equations are in agree with the experimental data of the behavior of the heat capacity of the solution 2,6-lutidine-heavy water in the confined nano-systems near the critical consolute temperature.

**Keywords:** critical point, confined systems, nano-systems, heat capacity

E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

На даний час впродовж інтенсивних досліджень критичного стану речовини в макроскопічних системах [1,2] значної актуальності набув науковий напрямок вивчення малих обмежених систем, розмір яких  $L$  близький до величини радіуса кореляції  $R_c$  поблизу критичної точки (КТ). Для таких систем М. Фішером [3,4] запропоновані рівняння для  $R_c$  і термодинамічного потенціалу  $\Phi_{\text{синг}}$  у вигляді

$$R_c = L f_{R_c}(x, y) = L f_{R_c}(a|t|L^{1/\nu}, b\Delta\mu L^{1/\xi}) \quad (1)$$

$$\Phi_{\text{синг}} = L^{-d} f_{\Phi_{\text{синг}}}(x, y) = L^{-d} f_{\Phi_{\text{синг}}}(a|t|L^{1/\nu}, b\Delta\mu L^{1/\xi}) \quad (2)$$

Тут  $f_{R_c}$  і  $f_{\Phi_{\text{синг}}}$  – масштабні функції змінних  $x$  і  $y$ :  $t = (T - T_k)/T_k$ ;  $\Delta\mu = (\mu - \mu_k)/\mu_k$ ;  $T_k, \mu_k$  – критичні значення температури і хімічного потенціалу;  $\nu$  і

$\xi$  – критичні показники радіуса кореляції [1]. В загальному вигляді при  $L \gg R_c$  вид функції  $f_{R_c}$  –  $f_{\Phi_{\text{синг}}}$  – не визначений. Але у випадку  $L \gg \infty$  рівняння (1), (2) переходят у рівняння флюктуаційної теорії фазових переходів (ФТФП) [1]. Для обмежених систем ( $L \gg R_c \sim |t|^{\zeta}$ ,  $L \gg R_c \sim \Delta\mu^{-\xi}$ ) виходячи з (1) [3–4] знаходимо, що  $\Delta\mu \sim L^{-1/\xi}$  і  $|t| \sim L^{-1/\nu}$ .

Об'єктивну інформацію про властивості речовини в цих малих обмежених системах можна одержати, вивчаючи особливості поведінки неоднорідних макроскопічних систем в гравітаційному полі поблизу КТ. Річ у тім, що саме така неоднорідна система складається з неперервного висотного розподілу малих флюктуаційних систем, розмір яких  $L = 2R_c$ .

змінюється в межах величин  $L = (10^2 - 10^4) \text{ \AA}$ . А індивідуальні характеристики цих малих обмежених систем визначають і неодмінно

впливають на властивості загальної макроскопічної системи.

Цей висновок підтверджується аналізом властивостей макро неоднорідних систем в полі гравітації Землі і властивостей наносистем поблизу КТ, проведений в роботах [5,6].

Виходячи з тотожної поведінки систем макронеоднорідних і наносистем поблизу КТ на основі ФТФП [1,2] і [3,4] в роботах [5,6] були запропоновані наступні рівняння радіусу кореляції  $R_c(L, \mu)$  і термодинамічного потенціалу  $F_{\text{синг}}$  наносистем: вздовж напрямку критичної ізохори  $Z_1^* = |\Delta\mu|/|t|^{\nu/\xi} \ll 1$

$$R_c^{-1} = (L f_{R_c})^{-1} = t^\nu \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_1^{*2n} \right).$$

$$F_{\text{синг}} = L^{-d} f_{\Phi_{\text{синг}}} = t^{3\nu} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_1^{*2n} \right)^3; \quad (3)$$

вздовж напрямку межі поділу фаз  $Z_1^* = \Delta\mu/|t|^{\nu/\xi} \ll 1, t < 0$

$$R_c^{-1} = (L f_{R_c})^{-1} = |t|^\nu \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z_1^{*n} \right),$$

$$F_{\text{синг}} = L^{-d} f_{\Phi_{\text{синг}}} = |t|^{3\nu} \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z_1^{*n} \right)^3; \quad (4)$$

вздовж напрямку критичної ізотерми  $Z_2^* = t/\Delta\mu^{\xi/\nu} \ll 1$

$$R_c^{-1} = (L f_{R_c})^{-1} = |\Delta\mu|^\xi \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n Z_2^{*n} \right),$$

$$F_{\text{синг}} = L^{-d} f_{\Phi_{\text{синг}}} = |\Delta\mu|^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n Z_2^{*n} \right)^3. \quad (5)$$

При цьому в рівняннях (3)–(5) при переході від систем макроскопічних ( $L \gg 2R_c$ ) до малих, обмежених ( $L \leq 2R_c$ ) слід поступово враховувати і зміну залежності хімічного потенціалу  $\Delta\mu(L)$  від лінійного розміру системи  $L$ . Так, якщо для систем макроскопічних, згідно [6]  $\Delta\mu \sim \text{const}/(1 - \epsilon L^{-1}) \sim L^{-\xi}$  ( $\xi \approx 0.4$ ), то для обмежених, згідно М.Фішеру [3,4], ця залежність значно зростає ( $\Delta\mu \sim L^{-1/\xi}, |t| \sim L^{-1/\nu}$ ).

Тоді на основі (3)–(5) можна знайти термічні і калоричні рівняння стану речовини в обмежених системах:  $\Delta p = d\Phi/d\mu : \beta_t = dp/d\mu = d^2\Phi/d\mu^2 : \Delta s = d\Phi/dt$  і  $C_v = ds/dt = d^2\Phi/dt^2$ . В загальному ж випадку рівняння стану обмежених систем ( $L \geq 2R_c$ ) [3,4] можна представити за допомогою рівнянь параметричного скейлінгу [7].

Виходячи з виду масштабних функцій  $f_{R_c}$  (3)–(5) можна констатувати, що в малих обмежених системах ( $L \leq 2R_c$ ), як і в системах макроскопічних ( $L \gg 2R_c$ ), температурні похідні  $(dR_c/dt)_{\Delta\mu}$  при сталих полях  $\Delta\mu$  в різних граничних випадках  $Z_1^* \ll 1$  і  $Z_1^* \gg 1$  ( $Z_2^* \ll 1$ ) мають різні знаки:  $[dR_c(Z_1^* \ll 1)/dt]_{\Delta\mu} < 0$  і  $[dR_c(Z_1^* \gg 1)/dt]_{\Delta\mu} > 0$ . Тобто температурна залежність радіуса кореляції  $R_c(t)$ , стисливості  $\beta_t(t) \sim R_c^{-2-\eta}$ , як і систем макроскопічних [5,6], є немонотонними з максимумами в закритичній області температур  $t_M > 0$ . На основі того, що в обмежених системах  $\Delta\mu \sim L^{-1/\xi}$  [3,4], можна спрогнозувати, що такі ж самі немонотонні залежності  $R_c(t)$  і  $\beta_t(t)$  будуть спостерігатись і при постійних розмірах  $L$  обмежених систем. Тобто ці залежності в закритичній області температур  $t > 0$  будуть мати вигляд такий, як для систем макроскопічних.

Для перевірки виду запропонованих рівнянь (3)–(5) необхідно залучити результати експериментальних досліджень властивостей наносистем поблизу КТ. На даний час найбільш інтенсивно досліджується калорична характеристика наносистем – теплосмінність. Такі досліди проводяться як в земних умовах [8] так і в космосі [9,10]. Ці дані показані на рис. 1–3.

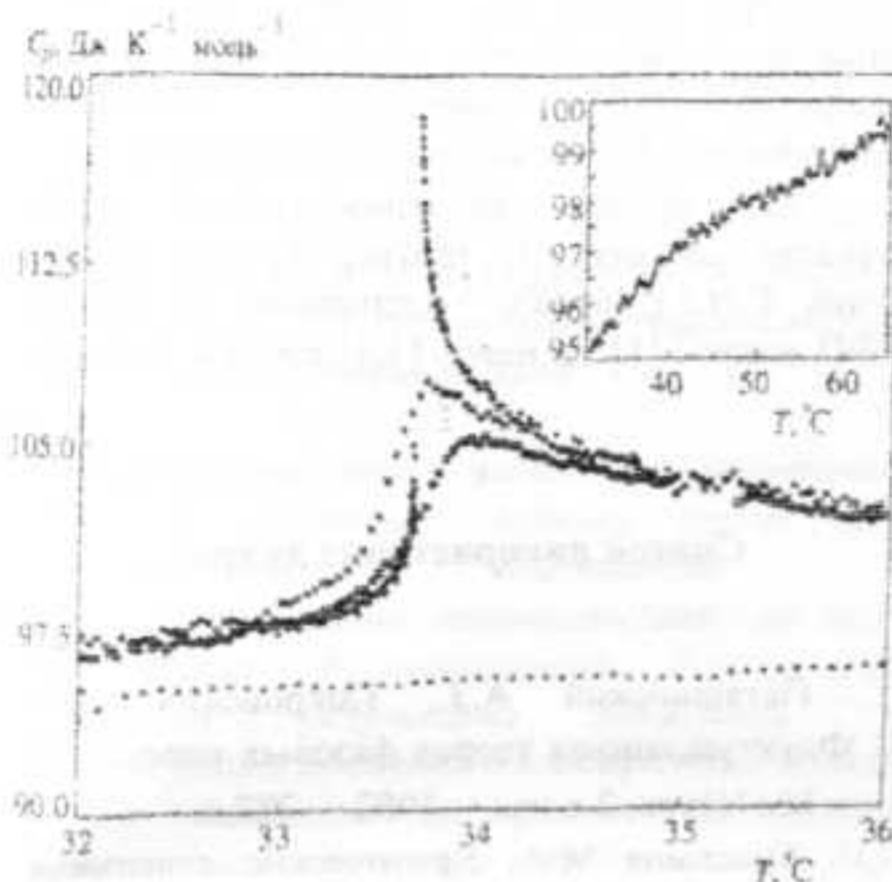


Рис. 1. Немонотонні температурні залежності теплоємності в земних умовах в малих обмежених системах поблизу критичної температури розшарування подвійного розчину 2.6 - лутідін - важка вода [8] розміру: 1 -  $L = 1000 \text{ \AA}$ ; 2 -  $L = 2500 \text{ \AA}$ , 3 - макроскопічного зразка.

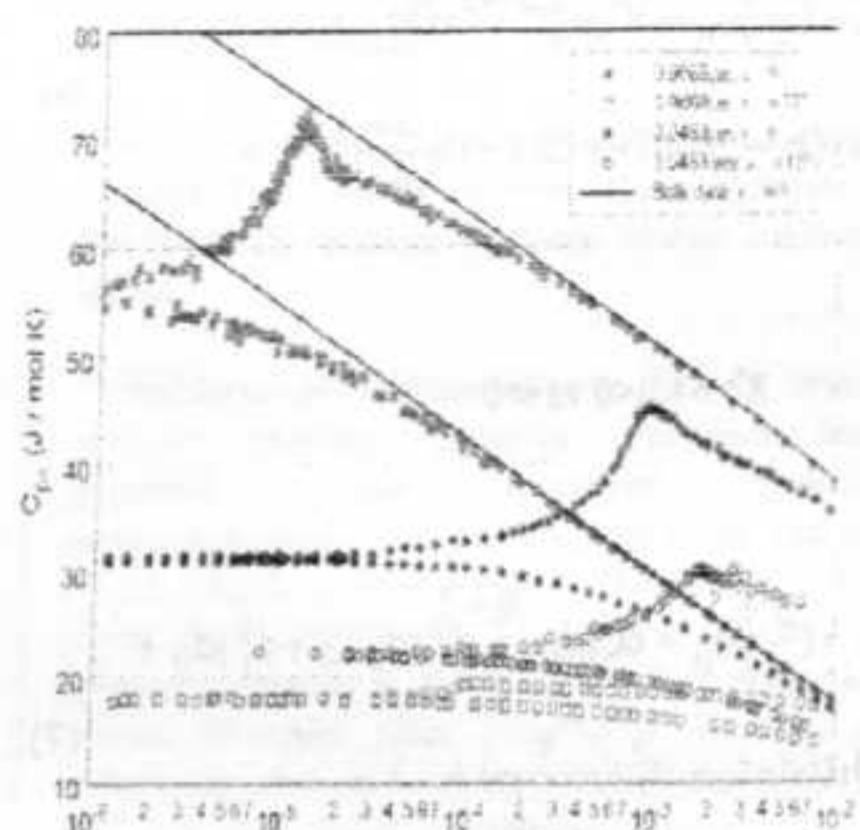


Рис. 3. Немонотонні температурні залежності теплоємності  ${}^3\text{He}$  та  ${}^4\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  в космічних умовах в малих обмежених системах [10].

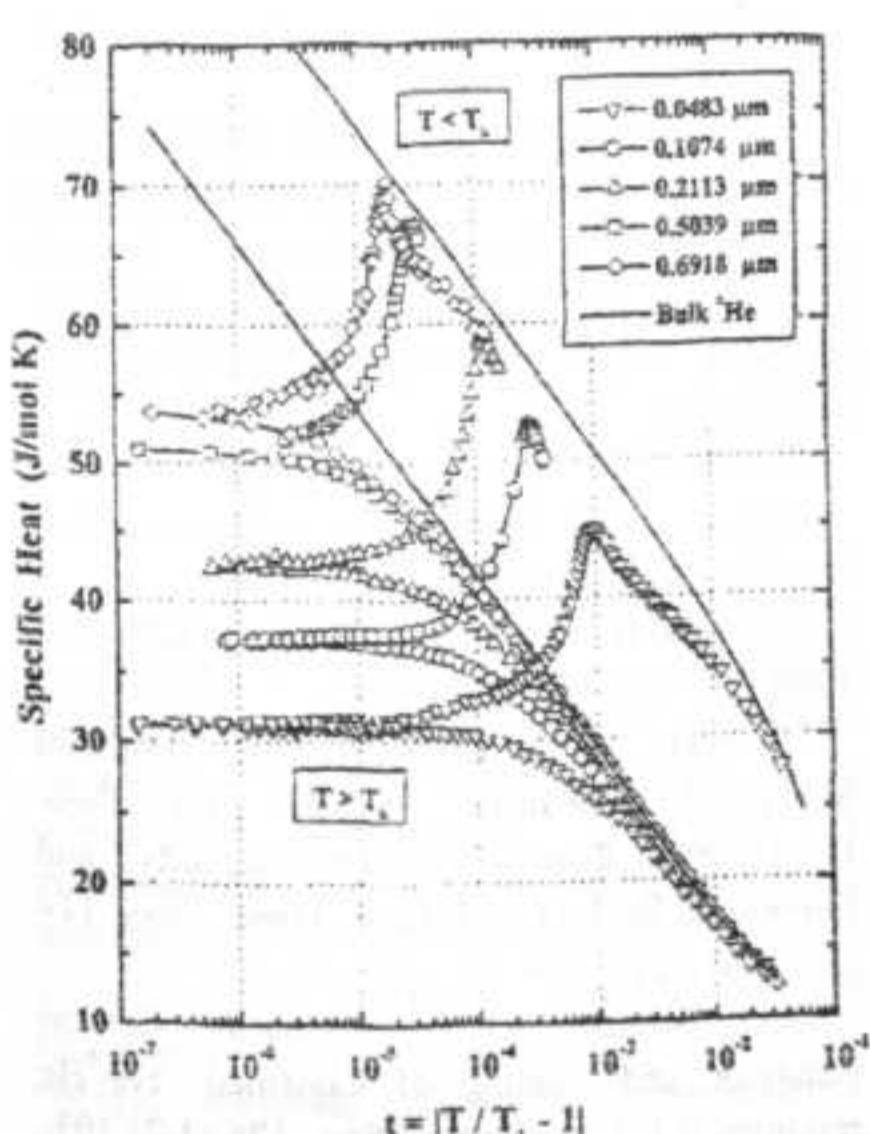


Рис. 2. Немонотонні температурні залежності теплоємності  ${}^4\text{He}$  в космічних умовах в малих обмежених системах [9].

З цих даних слідує немонотонна температурна залежність теплоємності наносистем при постійних лінійних розмірах системи  $L \sim \Delta\mu^{-1}$ . При збільшенні лінійних розмірів системи  $L$ , що приводить до зменшення хімічного потенціалу  $\Delta\mu$ , теплоємність системи збільшується. Якісно такий самий результат слідує з поведінки стисливості неоднорідних систем при сталих значеннях хімічного потенціалу  $\Delta\mu \sim h$  [5,6].

Для аналізу цих даних в даній роботі на основі рівнянь (3)-(5) були запропоновані рівняння теплоємності наносистем в критичному стані вздовж граничних критичних напрямків критичної ізохори, критичної ізотерми, межі поділу фаз, які мають вигляд

$$Z' \ll 1, t > 0$$

$$C_v = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_{\mu} = 3C_0 a_0^2 t^{3v-2} ((3v-1)v a_0 + \\ + a_2 (3v-2\beta\delta)(3v-2\beta\delta-1) \left( \frac{\Delta\mu}{t^{\beta\delta}} \right)^2 + \dots) \quad (6)$$

2).  $Z' \gg 1, t < 0$  та  $t > 0$

$$C_v = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_{\mu} = 6C_0 \Delta\mu^{\frac{3v-2}{\beta\delta}} (d_2 d_0 + d_1^2) d_0 + \\ + d_1 (6d_2 d_0 + d_1^2) \left( \frac{t}{\Delta\mu^{\beta\delta}} \right) + \dots \quad (7)$$

3).  $Z' \ll 1, t < 0$

$$C_v = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_{\mu} = 3C_0 b_0^2 |t|^{3v-2} ((3v-1)v b_0 + \\ + b_1 (\beta\delta - 3v)(\beta\delta - 3v + 1) \left( \frac{\Delta\mu}{|t|^{\beta\delta}} \right) + \dots) \quad (8)$$

Тут згідно (1), (2)  $|\Delta\mu| \sim L^{-1/\zeta}$  і  $|t| \sim L^{-1/v}$ .

Проаналізуємо одержані результати на основі даних, показаних на рис. 1. Як видно з рис. 1., поблизу напрямку критичної ізохори  $Z' \ll 1$  при сталій висоті системи  $L$  ( $L \sim \Delta\mu^{-\zeta}$ ) при наближенні до критичної температури ( $t=0$ ) теплоємність наносистем збільшується ( $C_v \sim t^{-\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 = 2-3v$ ). При сталій температурі  $t=\text{const}$  збільшення розміру наносистеми приводить до збільшення теплоємності речовини.

Така сама залежність теплоємності системи від лінійного розміру системи  $L$  і температури  $t$  спостерігається і поблизу напрямку критичної ізотерми  $Z' \gg 1$ . Тобто при збільшенні  $L$   $C_v$  також збільшується. Але в цьому випадку при наближенні до критичної

температури ( $t=0$ )  $C_v$  зменшується. Тоді виходячи з (6), (7) в закритичній області температур ( $t>0$ ) температурна залежність теплоємності  $C_v(t)$  має немонотонний характер.

Як видно, експериментальні дані, приведені на рис. 1. підтверджують вигляд рівнянь  $C_v(t, L)$  (6)-(8), одержаних на основі ФТФП макро- [1] та нано- [3,4] систем поблизу КТ.

### Список використаних джерел

1. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 2-е изд. – 1982. – 382 с.
2. Аннисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. – Москва, 1987. – 272 с.
3. M.E. Fisher, M.N. Barber. // Phys. Rev. Lett. 1972. – 28 – 1516.
4. K. Binder // Annu. Rev. Phys. Chem. – 1992. – Vol. 43 – P. 33-59.
5. Алексин А.Д., Булавин Л.А. Свойства нанофлуктуационных дисперсных систем вблизи критической точки. // Физика аэродисперсных систем. Одесса. – 2006. Вып. 43. С. 55-66.
6. Алексин А.Д. Взаємозв'язок властивостей макронеоднорідних і нанофлуктуаційних систем поблизу критичної точки // Сучасні проблеми молекулярної фізики. Збірник наукових праць. Київський університет 2006. С. 160-168
7. Schofield P. Parametric representation of the equation of state near a critical point // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V.22, N 12. – P.606.
8. Воронов В.П., Булейко В.М. // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 113, № 3. – С. 1071.
9. S. Mehta, M.O. Kimball, F.M. Gasparini Superfluid Transition of  ${}^4\text{He}$  for Two-Dimensional Crossover, Heat Capacity, and Finite-Size Scaling // J. Low. Temp. Phys. 114 (5-6) 467-521, 1999.
10. M.O. Kimball, F.M. Gasparini Critical Behavior and Scaling of Confined  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  mixtures // J. Low. Temp. Phys. 126 (1-2) 103-108, 2002.

Надійшла до редакції 18.02.2009

УДК 678.01 : 537.212

Віленський В.О., д.х.н., пр.н.с., Демченко В.Л.,  
асп.

## Вплив величини напруженості постійного електричного поля на структуру, теплофізичні властивості та провідність нанокомпозитів поліепоксид – оксид металу

Досліджено вплив постійного електричного поля на структуру, питому теплосмінність, термомеханічні властивості та електропровідність нанокомпозитів на основі поліепоксиду і наповнювачів  $Fe_2O_3$ ,  $Al_2O_3$ . Отримані результати показують, що застосування постійного електричного поля дає змогу впливати на рівень досконалості кристалічної структури наповнювача ( $Fe_2O_3$ ) в складі композиту, при цьому розмір кристалів зменшується від 18,0 нм (для вихідних зразків композитів) до 7,7 нм (для композитів, сформованих під дією ПЕП). Нанокомпозити сформовані в ПЕП характеризуються вищими значеннями електропровідності

**Ключові слова:** електричне поле, нанокомпозит, структура, питома теплосмінність, електропровідність.

E-mail: dvaleriy@ukr.net

Статтю представив

### Вступ

Фізична модифікація полімерів і полімерних композитів є ефективним засобом регулювання їх структури та властивостей. Основними напрямками фізичної модифікації є піддавання полімеру дії зовнішніх силових полів (електричного [1], магнітного [2], температурного [3] та інших).

Оскільки більшість полімерів є діелектриками [4], то при внесенні їх в електричне поле відбувається поляризація ( $\alpha$ ) наслідком якої центри тяжіння позитивних та негативних зарядів, що є частиною елементів структури зміщуються відносно своїх рівноважних положень і у частинок з'являється індукований електричний дипольний момент  $p = \alpha E$ , який зникає при виключенні постійного електричного поля (ПЕП). Для багатоатомних систем, зокрема, полімерів поляризація може ставати анізотропною і в цьому випадку залежність  $p(E)$  набуває складної залежності:

$$p_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j,$$

V.O.Vilensky, doctor of science .V.L.Demchenko, postgraduate student

The influence of value of intensity of constant electric field on structure, thermalphysic and conductivity nanocomposites epoxy resin-oxide metal

Influence of constant electric field on structure, specific thermal capacity, thermomechanical properties and electrical conduction nanocomposites on a basis epoxy resin and fillers  $Fe_2O_3$ ,  $Al_2O_3$  is investigated. The received results show, that application of constant electric field gives the chance to influence level of perfection of crystal structure filler ( $Fe_2O_3$ ) in structure to a composite, thus the size of crystals decreases from 18,0 nm (for initial samples of composites) to 7,7 nm (for the composites generated under the influence of CEF). Nanocomposites generated in CEF characterization the higher values of a electrical conduction

**Key Words:** electric field, nanocomposite, structure, specific heat, electrical conduction.

де  $\|\alpha\|$  – симетричний тензор другого рангу.

Для полімерів притаманні наступні види діелектричної поляризації [4]: 1) електронна поляризація ( $\alpha_m$ ), обумовлена зсувом в полі  $E$  електронних оболонок відносно атомних ядер; 2) іонна поляризація ( $\alpha_i$ ), в іонних кристалах обумовлена пружним зміщенням в полі напруженості  $E$  протилежно заряджених іонів з їх рівноважних положень; 3) атомна поляризація ( $\alpha_{at}$ ) молекул обумовлена зсувом в електричному полі атомів різного типу зі складу молекул, що пов'язано з існуванням в молекулах несиметричного розподілу електронної густини; 4) орієнтаційна поляризація ( $\alpha_{op}$ ) притаманна полярним діелектрикам, що складаються з молекул, груп та сегментів макромолекул з постійними дипольними моментами. Слід відмітити, що крім іонної поляризації решта її типів мають пряме

відношення до зразків, що є предметом даного розгляду.

Величина поляризації полімерних діелектриків залежить від кількості диполів в одиниці об'єму полімеру [5]; взаємодії може макромолекулами [6] та дипольного моменту  $p_0$  повторюваної ланцюг макромолекул [7].

Отже, метою даного дослідження було вивчення впливу напруженості ПЕП на структуру нанокомпозитів, що отвердені в постійному електричному полі з напруженістю  $E = (1.5 \pm 6) \cdot 10^4$  В/м.

### Експериментальна частина

Дослідження проводили на зразках композитів, отриманих на основі епоксидної смоли (ЕС) ЕД-20 (ГОСТ 10577-84, виробник Росія), отверднення якої виконували триетилентетраміном (ТЕТА, виробник завод „РІАП“, Україна). Епоксидну смолу використовували без додаткової обробки, а ТЕТА очищували вакуумною дистиляцією. Отверднення ЕС виконували шляхом змішування її з ТЕТА у співвідношенні 1,00:0,18 відповідно.

Як наповнювачі використовували тонкодисперсні порошки оксидів металів (розмір частинок порошку близько 200 нм) –  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  і  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Оксиди металів  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (ТУ 6-09-1418-78) і  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (ТУ 6-09-426-75) перед змішуванням зі смолою сушили у вакуумі протягом 24 год. за  $T=373$  К. Концентрація наповнювачів у композитах становила 3 об. % (далі скрізь 3%), що згідно з результатами дослідження [8] відповідає стану формування кластера наповнювача в структурі поліепоксидної сітки.

З метою однорідного розподілу порошків наповнювача у полімерній матриці перед його введенням у об'єм ЕС його поверхню обробляли 1%-вим розчином ЕС у ацетоні протягом 1 год. з наступним додаванням необхідної кількості ЕС та перемішуванням суміші протягом 1 год. за допомогою магнітної мішалки, після чого до неї додавали стехіометричну кількість ТЕТА з наступним перемішуванням ще протягом 0,5 год. Усі композити піддавали температурній стабілізації за  $T=333$  К протягом 24 год., після чого зразки вважали придатними до досліджень.

Композити досліджували у вигляді плівок, отриманих на плоскій тетрафторетиленовій пластині, отверднення яких тривало протягом 10 год. між пластинами конденсатора з  $E = (1.5; 3; 4.5; 6) \cdot 10^4$  В/м за  $T=295 \pm 1$  К.

Структуру поліепоксиду та композитів на його основі і наповнювачів ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) досліджували методом ширококутового розсіювання рентгенівських променів з використанням рентгенівського дифрактометра ДРОН-4-07, рентгенооптична схема якого виконана за

методом Дебая–Шерера (на проходження первинного пучка рентгенівських променів через досліджуваний зразок полімеру).

Експериментальні профілі інтенсивності нормували на величину фактора послаблення первинного пучка випромінювання зразками композитів, а також на величину їх розсіювального об'єму. Дослідження проводили в СuK $\alpha$ -випромінюванні, монохроматизованому Ni-фільтром [9] за  $T=295 \pm 1$  К. Похибка вимірювань інтенсивності розсіювання не перевищувала  $\pm 3$  %.

Температурну залежність питомої теплосмінності композитів досліджували методом диференційної скануючої калориметрії (ДСК) з використанням калориметра, конструкція якого аналогічна описаній у роботі [10]. Дослідження проводили у квазістационарному режимі зі швидкістю нагрівання калориметричного блока  $2.0 \pm 0.1$  К/хв. Похибка вимірювань питомої теплосмінності не перевищувала  $\pm 2.5$  %.

Термомеханічні властивості зразків досліджували на універсалій термомеханічній установці, описаній у роботі [11] у режимі аксіального стискання за питомого навантаження  $\sigma_{\text{пп}} = 2.56$  МПа в інтервалі температур 293–600 К: зразки у вигляді дисків розміром 0,005–0,006 м нагрівали зі швидкістю 2,5 К/хв; похибка вимірювання деформації  $\varepsilon$  (%) від  $T$ , К не перевищувала 5 %.

Електропровідність зразків вимірювали на постійному струмі двохелектродною схемою за температури  $295 \pm 2$  К за допомогою тераометра ЕБ-13А. Значення електропровідності  $\sigma$  (См/м) обраховували зі співвідношення:

$$\sigma = \frac{1}{R} \cdot \frac{h}{S},$$

де  $R$  (Ом) – опір зразка, виміряний тераометром,  $h$  – товщина зразка,  $S$  – ( $\text{м}^2$ ) – площа зразка. Дослідження температурної залежності електропровідності проводили при лінійній швидкості розігріву зразка 3 К/хв.

### Результати дослідження та їх обговорення

На рис. 1 наведено ширококутові рентгенівські дифрактограми композитів ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  в залежності від напруженості електричного поля ( $E \cdot 10^4$  В/м). Порівняння змін дифракційних картин композитів ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , що викладені в роботі [12] та наведених на рис. 2 встановлює тотожність дії постійних магнітного та електричного полів на кристалічну структуру композитів, яка полягає в тому, що найбільше збурення щільності пакування композитів відбувається при отвердненні в полях з мінімальною величиною напруженості (в даному разі  $E = 1.5 \cdot 10^4$  В/м). Аналіз дифрактограм

композиту ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (рис. 1) показує, що на відміну від постійного магнітного поля (ПМП) дія ПЕП не сприяє поліморфізму оксиду заліза і дію поля можна визначити як „м'яку“ руйнацію кристалічної фази  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Таке визначення дії ПЕП виникає при аналізі змін характеристик кристалічних рефлексів на дифрактограмах: дійсно зростання величини  $E$  супроводжується частковою зміною рефлексів без зміни їх кутового положення.

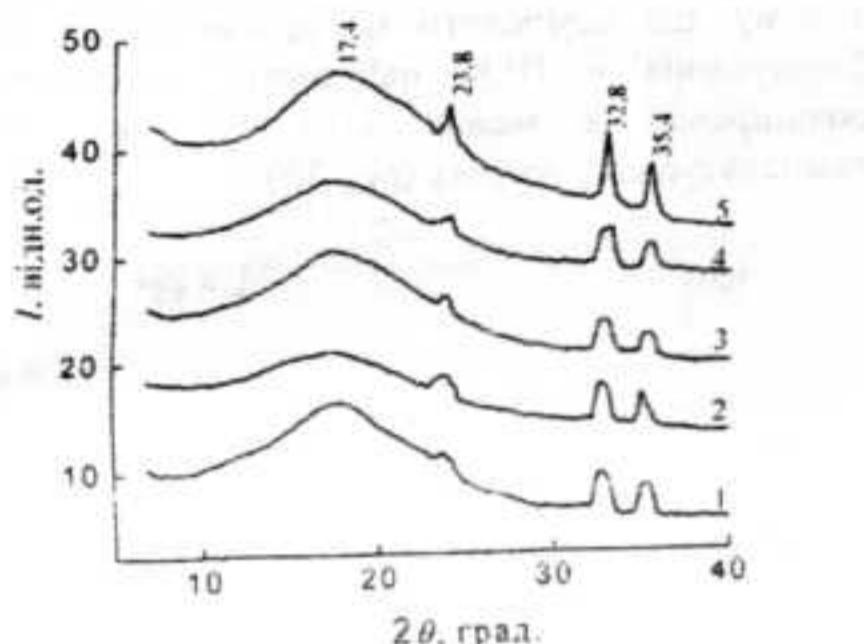


Рис. 1 Ширококутові рентгенівські дифрактограми композитів ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , отверднених при напруженостях ПЕП: 1- $E=1.5 \cdot 10^4$  В/м; 2- $E=3 \cdot 10^4$  В/м; 3- $E=4.5 \cdot 10^4$  В/м; 4- $E=6 \cdot 10^4$  В/м; 5- $E=0$  В/м

Оцінка ефективного розміру (порядку величини)  $L$  кристалітів  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  вихідного і сформованого у ПЕП зразків композиту, проведена із використанням рівняння Шерера [13]:

$$L = 0.9\lambda(\beta \cos \theta_{\max})^{-1},$$

де  $\beta$  – кутова напівширина  $i$ -го дифракційного максимуму дискретного типу ( $2\theta_{\max}=32.8^\circ$  або  $35.3^\circ$ ), показала, що під дією ПЕП формуються значно менші кристаліти  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (табл. 1).

Таблиця 1

Залежність поздовжніх розмірів кристалітів оксиду заліза в композиті ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  від напруженості ПМП і ПЕП.

$H \cdot 10^{-5}$ А/м	$L$ (нм)	$E \cdot 10^4$ В/м	$L$ (нм)
0	18,0	0	18,0
2	5,4	1,5	7,7
4	10,0	3	9,9
6	9,5	4,5	8,4
8	9,9	6	8,3

Такі зміни в положенні кристалічних площин  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  цілком узгоджується з проявом дії орієнтаційної поляризації на структуру полярних діелектриків з постійним дипольним моментом [4]. Композити, що є предметом дослідження складаються з сполук в яких дипольні пари  $\{\text{O}^- \text{H}^+; \text{N}^- \text{H}^+\}$  утворюються в перебігу хімічних реакцій і сполук в структурі, яких є зв'язані диполі  $\{\text{O}^- \text{Fe}^+ \text{O}^- \text{Fe}^+ \text{O}^-; \text{O}^- \text{Al}^+ \text{O}^- \text{Al}^+\}$ . Розрахунки зроблені в [8] показали, що поліепоксидна сітка та оксиди заліза і алюмінію мають достатньо великі постійні дипольні моменти:  $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 3.395 \text{ D}$  {-2.848; -1.845; 0.036};  $\mu_{\text{Fe}_2\text{O}_3} = 2.625 \text{ D}$  {0.0165; -2.275; 1.356} та  $\mu_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 2.331 \text{ D}$  {1.495; 0.745; 1.627} і відповідно до цього вплив вище перелічених типів поляризації структури композитів буде визначатись, як особливостями структури сполук так і буде пропорційним величині  $E$ . Різниця в особливостях взаємодії оксидів заліза та алюмінію з поліепоксидною матрицею, що встановлена в роботах [8, 12] проявляється в неспроможності  $\text{Al}_2\text{O}_3$  формувати чітко виражену кристалічну фазу в складі поліепоксиду. Загалом, приймаючи до уваги дані результати а також висновки роботи [12] можна стверджувати, що орієнтаційні процеси дипольних моментів є домінуючими в змінах структури композитів, незалежно від природи їх виникнення.

На рис. 2 наведено температурні залежності питомої теплосмінності композитів ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (а), ЕС-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (б) та поліепоксидної матриці (в), сформованих в одинакових умовах при різних напруженостях ПЕП. Актуальність цього дослідження полягає в тому, що виникає можливість оцінки впливу величини напруженості електричного поля на формування теплосмінності матричного полімеру і аналітично визначити зміни які набуває теплосмінність композиту, наповненого оксидом металу, який характеризується певним дипольним моментом. Побіжний аналіз термограм, наведених на рис. 3 (а-в), свідчить, що  $C_{P1}$  зшитого ненаповненого полімеру менша за теплосмінність наповнених композитів  $C_{P2}$ , і це закономірно оскільки в їх структурі присутні не лише частинки наповнювача, що мають суттєво іншу теплосмінність  $C_{P3}$ , але й мікрообласті (перехідні шари) з усередненою теплосмінністю  $C_{P1-P3}$ . При цьому слід брати до уваги, що величина  $C_{P1-P3}$  не є сталою по об'єму і залежить від градієнту густини перехідного шару від матричного полімеру до наповнювача. Гетерогенність структури ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  та ЕС-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$

підтверджується температурними переходами, які відсутні на термограмі ЕС крива 1 (рис. 3в). Процеси, які відбулися в структурі ЕС та композитах при їх формованні в ПЕП криві 2 (рис. 3), свідчать про подібність механізму змін континуума молекул і підтверджують висновок зроблений вище про те, що це є результат дії орієнтаційної поляризації електричних диполів, що утворюються під впливом ПЕП.

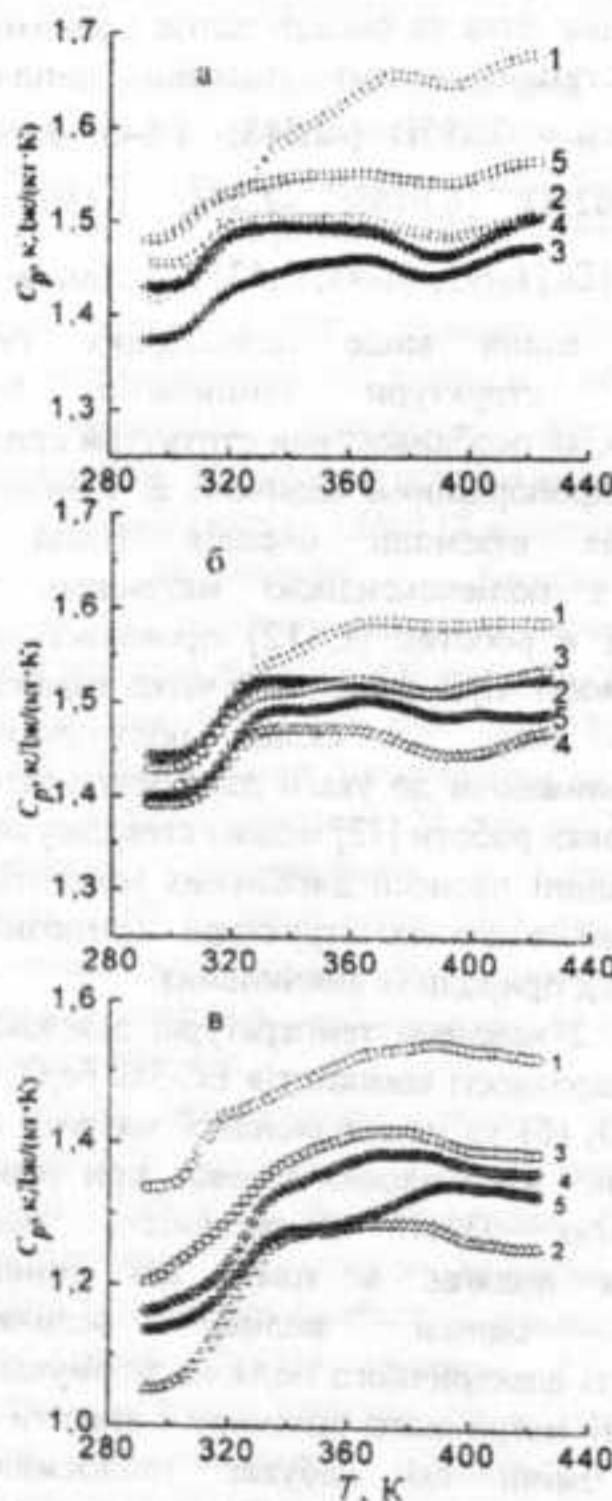


Рис. 2 Криві температурної залежності питомої теплоємності композитів ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (а); ЕС-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (б) та поліепоксиду (в), отверднених при напруженостях ПЕП: 1- $E=0$  В/м; 2- $E=1.5 \cdot 10^4$  В/м; 3- $E=3 \cdot 10^4$  В/м; 4- $E=4.5 \cdot 10^4$  В/м; 5- $E=6 \cdot 10^4$  В/м.

Даний висновок узгоджується з ефективністю дії ПЕП на зразки з різною ступенем однорідності структури, як це видно криві 2 (рис. 3), де поле з напруженістю  $E=1.5 \cdot 10^4$  В/м більше змінює питому теплоємність в ряду: ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3 \rightarrow$  ЕС-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3 \rightarrow$  поліепоксид. Слід звернути увагу, що лінійне зростання напруженості ПЕП, в ряду отверднення зразків, змінює питому теплоємність

зразків не відповідає до величини напруженості поля і в той же час не впливає на гетерогенність його структури.

Зрозуміло, що будова переходних шарів буде позначатись на термічних, а саме термомеханічних властивостях композитів, що були сформовані при різних напруженостях ПЕП. Результати дослідження термомеханічних властивостей від напруженості ПЕП представлени на рис. 3 і як видно з наведених даних вони узгоджуються вище викладеними результатами, в тому, що композити на основі  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , після формування в ПЕП набувають властивостей розширення в межах 2-15 % в умовах температурного нагріву (рис 3б).

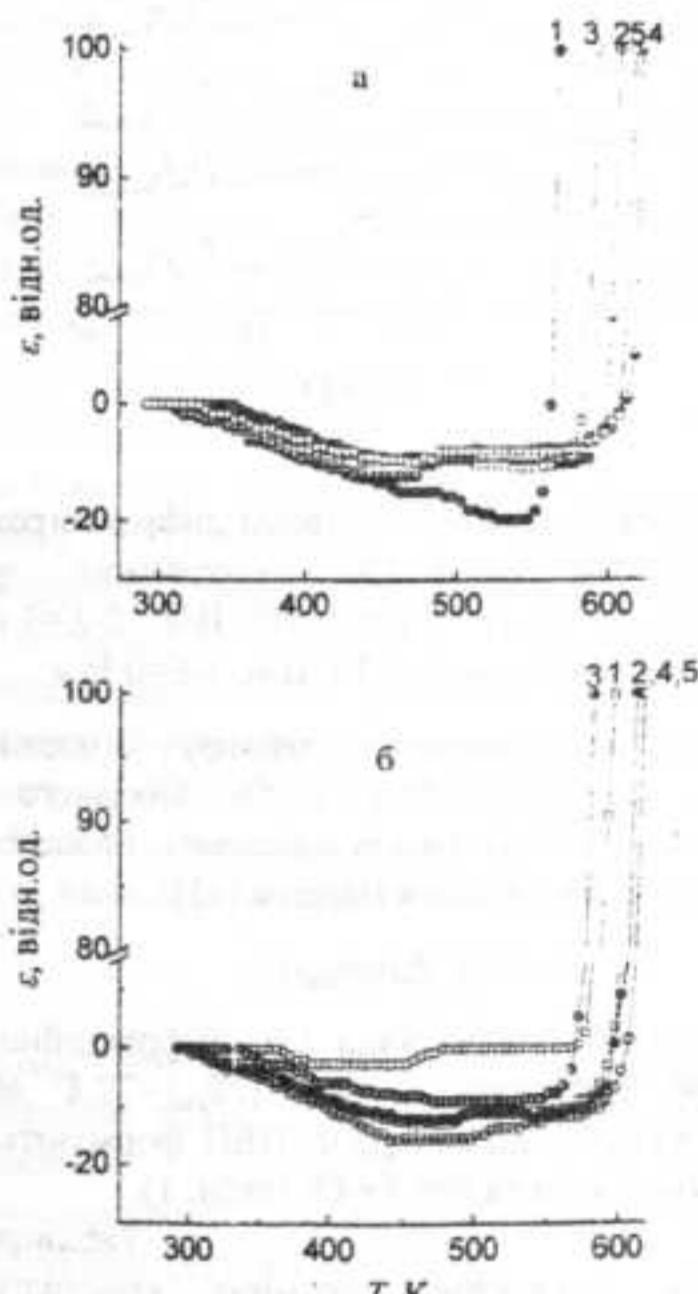


Рис. 3 Термомеханічні криві композитів ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (а) та ЕС-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (б), отверднених при напруженостях ПЕП: 1- $E=0$  В/м; 2- $E=1.5 \cdot 10^4$  В/м; 3- $E=3 \cdot 10^4$  В/м; 4- $E=4.5 \cdot 10^4$  В/м; 5- $E=6 \cdot 10^4$  В/м.

Відсутність певного зв'язку між величиною  $E$  та зміною ступеня розширення, як і зміною  $T_p$  – температурою розм'якшення композиції, може свідчити про обмеженість можливостей до зміни структури матричного полімеру під впливом ПЕП. Термомеханічна поведінка композиту ЕС-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  свідчить про його більшу рухливість як

у вихідному стані так і сформованому під дією ПЕП (рис. 3а). Ця композиція здатна до розширення на ≈20 %, що не є характерним для зшитих полімерів. Формування композиту в умовах дії ПЕП приводять, як видно з рис. 3а, до змін в структурі, які обмежують її здатність до розширення з ≈20 % до 10-12 %, при практично симбатному зростанні термостійкості композиції з 560 К до 620 К та напруженості поля. На нашу думку, такий результат може бути досягнутий, якщо складна структура ліганду буде поступово змушена до змін зростаючою силою орієнтаційної поляризації, яка пропорційно залежить від величини напруженості електричного поля [1]:

$$\alpha_{op} = \sum_i \alpha_i E_i / N,$$

де  $N$  кількість частинок в одиниці об'єму.

В роботі [12] було показано, що формування композитів EC-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  та EC-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  в постійних магнітних полях з напруженістю на рівні  $H=(2-8) \cdot 10^3$  А/м надає сполукам, які за природою є полярними діелектриками, електричної провідності характерної для напівпровідників. За результатами досліджень цей результат був пояснений зміною механізму провідності з поляризаційного на стрибковий внаслідок зменшення діелектричних шарів EC орієнтацією диполів полярних молекул органічної та неорганічної фаз. В зв'язку з цим було актуально дослідити зміни провідності вказаних композитів, що формувались в постійних електрических полях напруженістю яких змінювали  $E=(1.5-6) \cdot 10^4$  В/м. На рис. 4 наведено результати дослідження  $Ig\sigma$  від напруженості  $E$  електричного поля за  $T=293 \pm 2$  К. З рисунка видно, що полярний діелектрик EC (крива 1) під впливом ПЕП проявляє зміни провідності величина якої зростає лінійно до напруженості поля. Структура EC насичена фенільними ядрами [14, 15], які за своєю природою є пастками вільних електронів, що приводить до неможливості переносу електронів. Зростання напруженості ПЕП, як видно з кривою 1, приводить до зменшення глибини пасток, проте відсутність достатньої кількості спряжених зв'язків в структурі EC, обумовлює нестачу вільних електронів внаслідок чого навіть велике значення  $E$  не сприяє переходу полярного діелектрика до напівпровідника. Стрибок електричної провідності на 1-2 порядки, як це видно з криві 2, 3 (рис. 4), що спостерігається в композитах свідчить, що оксиди металів блокують частину пасток що сприяє переносу заряду за стрибковим механізмом.

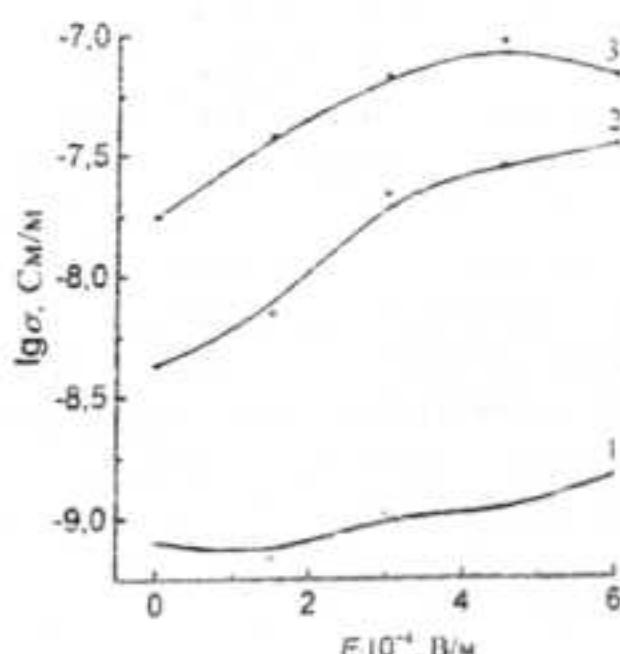


Рис. 4. Залежність електропровідності поліепоксиду (1) та композитів EC-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (2), EC-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (3) від величини напруженості електричного поля.

Відмінність у провідності вихідних композитів  $Ig\sigma=-8.26$  та  $-7.75$  См/м відповідно EC-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (крива 2) та EC-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (крива 3) підтверджує висновок про відмінність механізмів взаємодії оксидів з полярними групами матричного полімеру зроблений в роботі [8].

### Висновки

В результаті проведених досліджень структури, теплофізичних, термомеханічних властивостей та електропровідності поліепоксиду і нанокомпозитів EC-3%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , EC-3%  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , що були отвердені в постійному електричному полі з напруженістю  $(1.5-6) \cdot 10^4$  В/м встановлено, що найбільше збурення вихідної структури EC та нанокомпозитів відбувається при отвердненні в полі з мінімальним значенням напруженості ( $E=1.5 \cdot 10^4$  В/м), що обумовлене проявленням впливу атомної, молекулярної та іонної поляризації. Отримані результати показують, що застосування постійного електричного поля дає змогу впливати на рівень досконалості кристалічної структури наповнювача ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) в складі композиту, при цьому розмір кристалів зменшується від 18.0 нм (для вихідних зразків композитів) до 7.7 нм (для композитів, сформованих під дією ПЕП напруженістю  $E=1.5 \cdot 10^4$  В/м). Поступове відновлення впорядкування під впливом зростаючої величини напруженості електричного поля показало, що на відміну від ПМП дія ПЕП не сприяє поліморфізму оксиду заліза і дію поля можна визначити як "м'яку" руйнацію кристалічної фази  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Орієнтаційні поляризаційні процеси ПЕП, як явище більш глобальне в порівнянні з дипольними орієнтаційними процесами ПМП не можуть

створювати стійкого стану структури при якому поляризація континуума молекул і атомів залишалась би сталою після виключення поля. Саме статистичність залишкового стану змін структурних перетворень в композиті обумовлює відсутність кореляції зміни  $L$  від  $E$  в порівнянні з подібною залежністю у випадку ПМП. Ці обставини визначили використання ПЕП напруженістю  $E=3 \cdot 10^4$  В/м для подальшої модифікації композитів, які відрізняються концентраційним складом, оскільки як встановлено з вище наведених результатів при цій напруженості відбувається відтворення структури та властивостей зразків ініційованих

електричним полем.

Дослідження термомеханічних властивостей композитів сформованих в ПЕП показало, що орієнтаційна поляризація полярних полімерів, що здатні зшиватись в продовж дії поля, надає їм здатності до аномального ( $\varepsilon \approx 20\%$ ) розширення при нагріванні, що може бути підставою для створення на їх основі температурних перемикачів в електронних пристроях.

Дослідження електропровідності показали зростання цієї величини на 1-2 порядки для композитів сформованих при різних напруженостях ПЕП.

#### Список використаних джерел

1. Віленський В.О., Осянкіна В.О., Штампель В.І., Керча Ю.Ю. Дослідження впливу постійного електричного поля на процеси структуроутворення в композитах поліестеруретану і ацетобутирату целюлози, отриманих з розчину // Доп. НАН України. – 2004. – № 7. – С. 131-136.
2. Демченко В.Л., Штампель В.І., Віленський В.О., Керча Ю.Ю. Вплив постійного магнітного поля на структуру композитів на основі епоксидного полімеру та оксиду Fe(III) або Al(III) // Полімер. журн. – 2008. – 30, № 4. – С. 302-310.
3. Штампель В.І., Керча Ю.Ю. Структура лінійних поліуретанов. – Київ: Наук. думка, 2008. – 248 с.
4. Физическая Энциклопедия / Ред. А.М.Прохоров, М.: Большая Российская Энциклопедия, 1994. – 4. – С. 55-74.
5. Kovalevsky A.Yu, Ponomarev I.I., Antipin M.Yu Influence of steric and electronic effects of substituents on the molecular structures and conformational flexibility of 1,8-naphthalenedicarboximides // Russ. Chem. Bl. – 2000. – 49, № 1. – P. 70-76.
6. Cummings E.B., Griffiths S.K., Nilson R.H., Paul P.H. Conditions for similitude between the fluid velocity and electric field in electroosmotic flow // Anal. chem. – 2000. – 72, № 11. – P. 2526-2532.
7. Nobuhiro O., Masaru K., Yoshinobu N., Iwao Y., Yoshifumi T., et al. External electric field effects on fluorescence of methylene-linked D-A systems in polymer films: (Carbazole)-(CH<sub>2</sub>)<sub>n</sub>-(Terephthalic acid methyl ester) // J. Phys. Chem. – 1996. – 100, № 50. – P. 19295-19302.
8. Віленський В.О., Демченко В.Л. Вплив природи дисперсних наповнювачів на структуру, теплофізичні властивості та електропровідність композитів на основі епоксидної смоли // Полімер. журн. – 2008. – 30, № 2. С. 133-140.
9. Kratky O., Pilz I., Schmitz P.J. Absolute intensity measurement of small-angle x-ray scattering by means of a standard sample // J. Colloid Interface Sci. – 1966. – 21, № 1. – P. 24-34.
10. Годовский Ю.К. Теплофизические методы исследования полимеров. – М.: Химия, 1976. – 216 с.
11. Віленський В.А., Файнерман А.Е., Керча Ю.Ю. Физические методы исследования полимеров. К.: Наук. думка, 1981. – С. 71-79.
12. Віленський В.О., Демченко В.Л. Вплив величини напруженості постійного магнітного поля на структуру та властивості композитів на основі епоксидного полімеру та оксидів металів (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) // Журнал фізичних досліджень (в другі). – 2008. – 30, № 4. – С. 302-310.
13. Гинье А. Рентгенография кристаллов. Теория и практика: Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1961. – 604 с.
14. Callister W. D. Jr. Materials Science and Engineering an Introduction. Fourth Ed. by John Wiley & Sons. Inc., 1997. – 803 p.
15. Чернін И.З., Смехов Ф.М., Жердов Ю.В. Эпоксидные полимеры и композиции. – М.: Химия, 1982. – 232 с.

Надійшла до редколегії 06.03.09

УДК 535.33

Дегода В.Я., д.ф.м.н.  
Софієнко А.О., асп.

## Вплив електричного поля на люмінесценцію селеніду цинку

Наведено результати експериментальних досліджень фото- та рентгенолюмінесценції монокристалічного селеніду цинку при різних значеннях напруженості прикладеного електричного поля до зразків. Спостерігається, що електричне поле зумовлює зміну як інтенсивності, так і форму смуг в спектрах стаціонарної люмінесценції. При стрибкоподібній зміні різниці потенціалів на електродах кристала в люмінесценції відбуваються довготривалі релаксаційні процеси, характер яких суттєво залежить від типу збудження зразка.

**Ключові слова:** рентгенолюмінесценція, фотолюмінесценція, рентгенівське випромінювання.

E-mail: degoda@univ.kiev.ua

### Вступ

Напівпровідникові сполуки  $A^2B^6$  в наш час досить широко досліджені в якості потенціальних матеріалів для світлодіодної електроніки [1-2]. Такий інтерес підкріплений їх люмінесцентними властивостями, зокрема, високим значенням світловихходу при перетворенні енергії зовнішнього збудження в люмінесцентне випромінювання. Для селеніду цинку, що є характерним представником вказаної групи напівпровідників, відомі роботи по дослідженню явища фотолюмінесценції (ФЛ) та рентгенолюмінесценції (РЛ), електропровідності селеніду цинку, що детально досліджувалися в роботах [5-8], де було встановлено визначальний вплив типу збудження на кінетику люмінесценції та провідності, фосфоресценцію та релаксацію струму. Явища електролюмінесценції (ЕЛ) досліджувалися рядом авторів найчастіше в спеціально легованих кристалах з утворенням р-п-переходу [9] і результати досліджень вказують на залежність спектрів електролюмінесценції від способу легування та величини електричного поля в зразках. Нелеговані монокристали ZnSe з омічними контактами не відрізняються наявністю електролюмінесценції, однак в них спостерігається зміна кінетики стаціонарної фотолюмінесценції та рентгенолюмінесценції при прикладанні до електродів зразка постійної

Volodimir. Ya. Degoda  
Andriy. O. Sofienko

## Influence of electric-field is on luminescence of ZnSe

The results of experimental researches of photoluminescence and X-ray luminescence in crystal ZnSe are presented at the different values of tension of electric-field to samples. Observed, that the electric field changes both intensity of stationary luminescence and form of bars in the spectrums of luminescence. At the salient change of difference of potentials on the electrodes of crystal in luminescence there are of long duration relaxation processes character of which substantially depends on the type of excitation of standard.

**Key Words:** X-ray luminescence,  
Photoluminescence, x-ray radiation.

різниці потенціалів, а також тривалі релаксаційні процеси при знятті зовнішнього поля. Метою даної роботи було дослідження впливу зовнішнього електричного поля на кінетику стаціонарної фото- і рентгенолюмінесценції монокристалічного селеніду цинку.

### Методика експериментальних досліджень

В експериментальних дослідженнях використовувалися спеціально нелеговані монокристали ZnSe, які вирощували після попередньої очистки шихти для одержання кристалів з мінімальною концентрацією домішок. Для вимірювання провідності на поверхню зразків резистивним методом напилювали індієві електричні контакти (у вигляді паралельних смужок  $5 \times 2$  мм), до яких підпаювали провідники. Відстань між електродами становила 5 мм. На один електрод подавалася напруга до 1000 В, а інший через цифровий наноамперметр (чутливість на рівні 1 пА) був заземленим. Для дослідження люмінесценції в монокристалічних зразках ZnSe в якості джерел збудження використовувалися ультрафіолетові світлодіоди UF-301 (3-30 мА х 7 шт.) з максимумом випромінювання 395 нм та рентгенівська трубка БХВ-Re в режимі роботи 20mA/20kV (інтегральне випромінювання). Інтенсивність випромінювання змінювалася ціляком регулюванням робочого

Представлено: член-кор. НАН України,  
д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

струму живлення світлодіодів та накалу аноду рентгенівської трубки. Це дозволяє пропорційно змінювати інтенсивність випромінювання вказаних джерел без зміни спектрів випромінювання.

Між окремими експериментами, що проводилися при температурі зразка 295 К його прогрівали до 500 К для гарантованого спустощення накопиченої в кристалі світлосуми. Спектри люмінесценції при фото- та рентгенівському збудженні вимірювали за допомогою світлосильного монохроматора МДР-2 з використанням в якості фотоприймачів ФЕП - 106. Це дозволило реєструвати свічення зразка в діапазоні довжин хвиль 400 – 800 нм. В процесі досліджень при фото- та рентгенівському збудженні одержано спектри фотolumінесценції (ФЛ) та рентгенolumінесценції (РЛ) в області 400 – 800 нм при різних значеннях напруженості електричного поля в зразку. Релаксацію люмінесценції вимірювали з моменту початку збудження та в момент стрибкоподібної зміни різниці потенціалів на електродах кристалу.

#### Вплив поля на форму рекомбінаційної смуги свічення 626 нм

В спектрах РЛ та ФЛ монокристалів ZnSe при температурі 295 К спостерігаються широкі рекомбінаційні смуги свічення з максимумами при 626 нм та 963 нм. В короткохвильовій області спектра з енергіями фотонів близькими до ширини забороненої зони практично не спостерігається крайове свічення та свічення донорно-акцепторних пар (ДАП). Останнє є характерним для полікристалічних зразків або ж легованих монокристалів [4]. Відсутність ДАП в спектрах свічення досліджуваних зразків вказує на низьку концентрацію неконтрольованих домішок, а дуже слабке крайове свічення при 295 К зумовлено сильним температурним згасанням. Домінуючою в спектрі є смуга самоактиваційної люмінесценції  $\lambda_{\text{max}} = 626$  нм (1.98 eV), яка приписується авторами [4] комплексному центру, що складається з вакансії цинку та домішкового мілкого донора ( $V_{\text{Zn}} + \text{D}$ ). Відомо, що спектри люмінесценції селеніду цинку також характеризуються наявністю інфрачервоної смуги свічення з  $\lambda_{\text{max}} = 963$  нм (1.29 eV) [4; 10] і обумовлена вакансіями селену ( $V_{\text{Se}}$ ). З літератури [10] також відомі смуги свічення з  $\lambda_{\text{max}} = 1300 - 1400$  нм, що в даному випадку не спостерігалися через низьку спектральну чутливість ФЕП – 106 у вказаному спектральному діапазоні.

Після прикладання до електродів зразка ZnSe постійної різниці потенціалів спостерігається помітна зміна спектрів свічення ФЛ і РЛ при температурі 295 K (рис. 1-2). У випадку РЛ збільшення величини поля зумовлює уширення основної рекомбінаційної смуги з максимумом 626 нм та відповідно, зменшення її інтенсивності. При цьому спостерігається невелике збільшення інтенсивності свічення в сторону інфрачервоної області спектру.

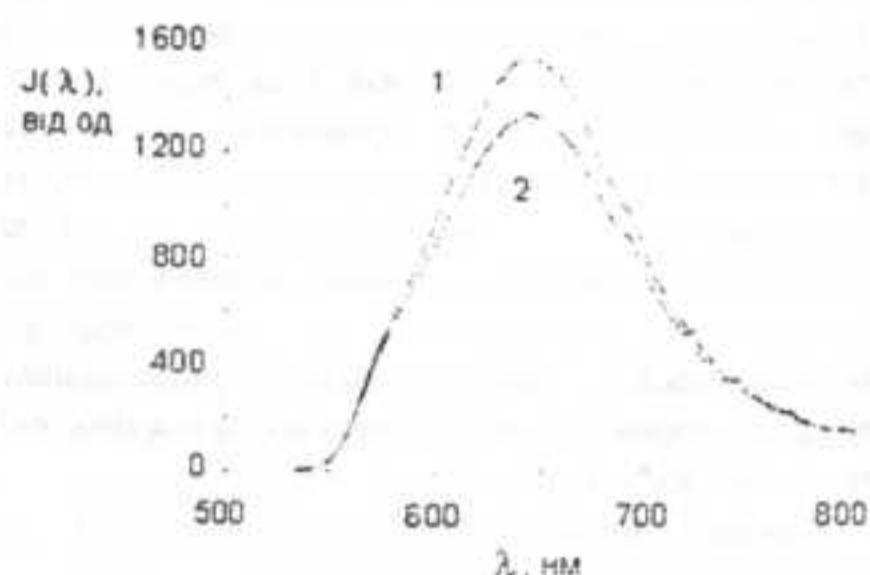


Рис. 1 Спектр свічення ZnSe у видимій області при фотозбудженні при різних значеннях величини електричного поля в зразку (1 – 0 В/см, 2 – 600 В/см).

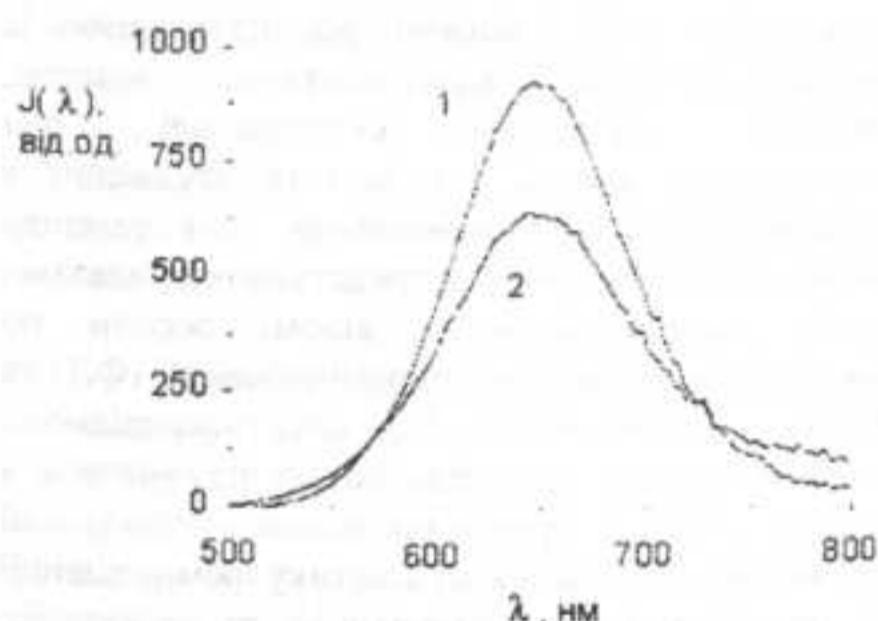


Рис. 2 Спектр свічення ZnSe у видимій області при рентгенівському збудженні при різних значеннях величини електричного поля в зразку (1 – 0 В/см, 2 – 1600 В/см).

У випадку ФЛ уширення лінії не таке помітне і спостерігається лише зміна її інтенсивності, що найбільш сильно помітно в центральній частині смуги 626 нм. Спектри свічення при різних значеннях електричного поля в зразку для

випадків фото- та рентгенівського збудження наведено на рис. 1-2.

Незважаючи на те, що досліджуваний зразок був вміщений у кріостат, в якому підтримувався вакуум на рівні  $\sim 10^{-2}$  мм.рт.ст., однак при високих значеннях різниці потенціалів на електродах повністю не виключалася можливість поверхневого електричного пробою в зразку, що і спостерігалося неодноразово. Для випадку фотозбудження, коли внаслідок зон-зонного поглинання основна генерація носіїв відбувається в тонкому приповерхневому шарі  $<10$  мкм, збільшення величини електричного поля до значень 700 В/см вже є практично передпробійним. Це значно звужує діапазон досліджень впливу величини поля на інтенсивність ФЛ у вибраній геометрії контактів на поверхні зразка. При рентгенівському збудженні поверхнева макроскопічна густина згенерованих носіїв є значно меншою в силу більшої проникності рентгенівських квантів з середніми енергіями 10 КеВ, а це в свою чергу дозволяє створювати в кристалах селеніду цинку напруженості електричного поля до 2000 В/см без загрози пробою і виходу з ладу наноамперметра.

Відношення інтенсивності люмінесценції в спектрі для домінуючої смуги 626 нм у випадку без поля до інтенсивності з полем дозволяє проаналізувати зміни в формі кривих спектрів свічення. На рис. 3 наведено такі відношення інтенсивностей люмінесценції для випадку фото- та рентгенівського збудження селеніду цинку.

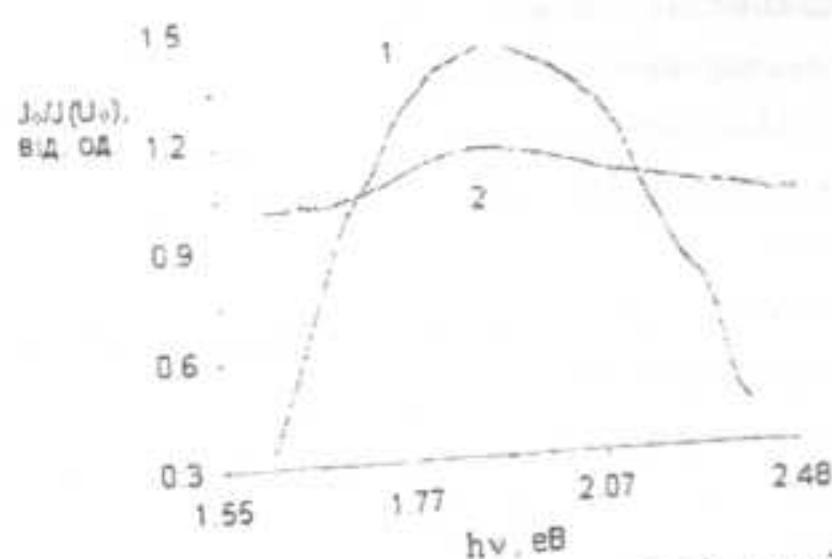


Рис. 3 Відношення інтенсивності люмінесценції в спектрі для смуги 626 нм (1.98 еВ) у випадку без поля до інтенсивності свічення з полем в зразку: 1 - РЛ, 2 - ФЛ, ( $E=600$  В/см).

З рис. 3 видно, що у випадку фотозбудження при наявності зовнішнього електричного поля

основне зменшення інтенсивності люмінесценції спостерігається в центральній частині смуги. У випадку РЛ не просто спостерігається падіння інтенсивності люмінесценції, але і значна деформація спектральної форми смуги свічення, причому деформація є симетричною відносно її центра ваги.

### Вплив поля на інтенсивність фото- та рентгенолюмінесценції ZnSe

Після прикладання різниці потенціалів до електродів кристалу відбувається зміна форми смуг в спектрах свічення селеніду цинку, а інтенсивність інтегральної люмінесценції при цьому падає. Така тенденція чітко прослідовується в монокристалічних зразках селеніду цинку при фото- та рентгенівському збудженні саме при температурі зразків 295 К (при охолодженні до 90 К ефект впливу поля значно зменшується). На рис. 4 наведено експериментально отримані залежності інтенсивності свічення зразка селеніду цинку при фотозбудженні при різних значеннях різниці потенціалів на електродах та різних інтенсивностях збудження УФ-випромінюванням.

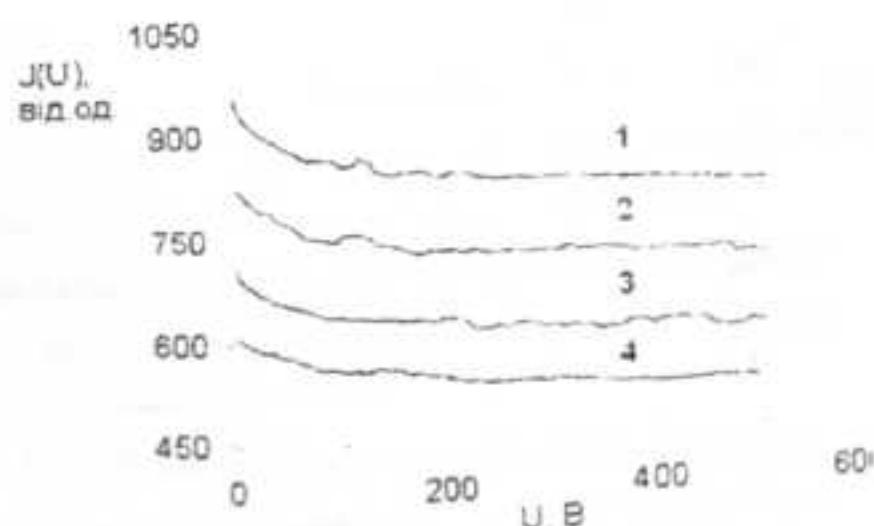


Рис. 4 Залежність інтенсивності фотolumінесценції ZnSe від величини різниці потенціалів на електродах при різних інтенсивностях УФ-збудження: 1 -  $J_{\max}$ , 2 -  $0.87 \times J_{\max}$ , 3 -  $0.73 \times J_{\max}$ , 4 -  $0.6 \times J_{\max}$ .

Незалежно від струму УФ-світлодіодів, і відповідно їх інтенсивності свічення, відносні зміни інтенсивності люмінесценції при сталому значенні зовнішнього електричного поля залишаються однаковими, що підтверджує визначальний характер саме впливу

електричного поля на кінетику рекомбінації згенерованих електронно-діркових пар в зразку.

Аналогічний результат отримано і при збудженні зразка рентгенівським випромінюванням, але до певних значень величини напруженості електричного поля. При збільшенні поля до  $\approx 1200$  В/см і більше інтегральна інтенсивність свічення зразка по всьому спектру починає збільшуватися і при певних значеннях поля може навіть переважати початкове стаціонарне значення інтенсивності свічення, що спостерігалося за відсутності поля. В той же час, інтенсивність свічення на довжині хвилі 626 нм продовжує спадати. Типові залежності інтенсивності рентгенолюмінесценції ZnSe при реєстрації РЛ в інтегральному світлі та на довжині хвилі 626 нм при різних значеннях напруженості електричного поля в зразку наведено на рис. 5.

Така суттєва різниця в інтенсивності свічення на смузі 626 нм та інтегрально по всьому спектру,

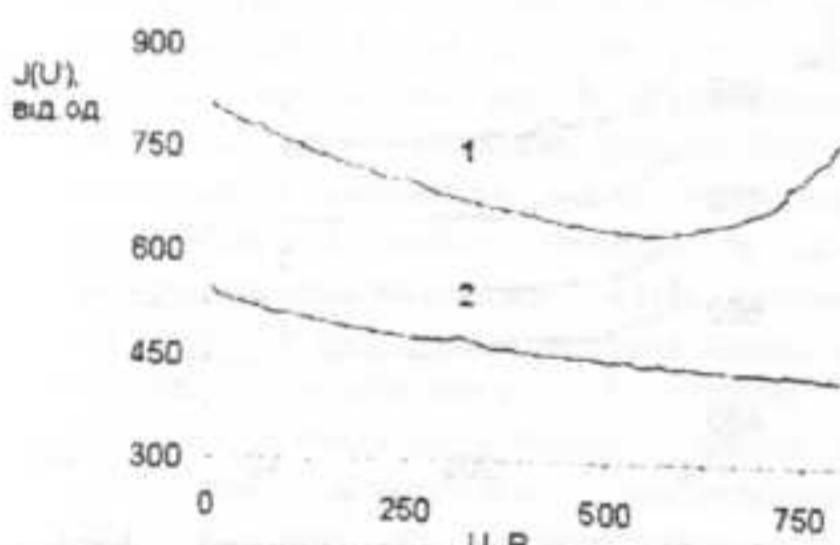


Рис. 5 Залежність інтенсивності РЛ ZnSe від величини різниці потенціалів на електродах: 1 – інтегрально по всьому спектру свічення, 2 – на довжині хвилі 626 нм; T=295 K.

очевидно, вказує на виникнення в зразку додаткових центрів свічення, спектральне положення яких не належить діапазону довжин хвиль 400 – 800 нм, і можливо, розташоване в інфрачервоній області спектру.

## Релаксація свічення при вимкненні електричного поля

Ще однією характерною особливістю рентгенолюмінесценції монокристалічного сelenіду цинку є тривала релаксація до рівноважного значення інтенсивності свічення після стрибкоподібного вимкнення зовнішнього електричного поля. При фотозбудженні

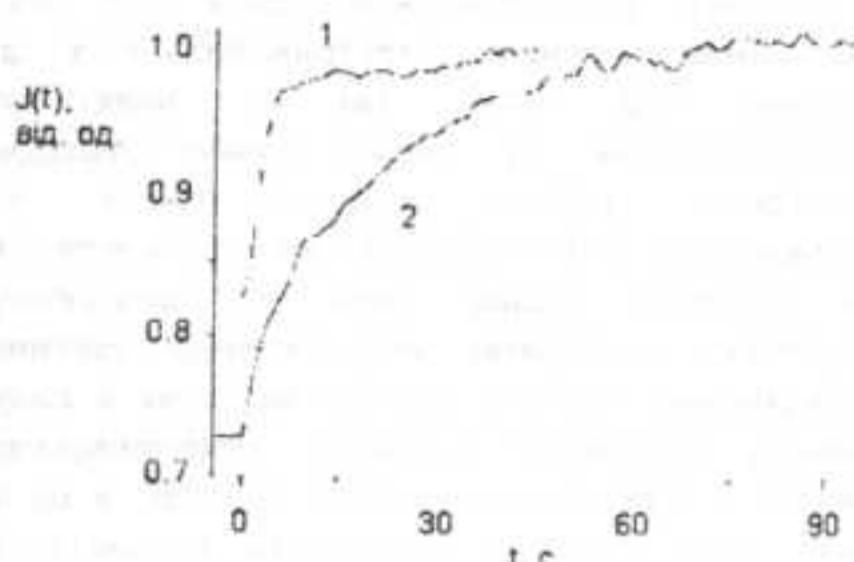


Рис. 6 Релаксація люмінесценції в монокристалічному сelenіду цинку при фото- та рентгенівському збудженні відразу після зняття різниці потенціалів з електродів зразка.

спостерігаються швидкі релаксаційні процеси і інтенсивність люмінесценції повертається в початкове рівноважне значення не довше ніж за час 1-3 с, що практично становить час реакції електронного підсилювача на основі інтегратора струму. На рис. 6 наведено експериментально отримані криві релаксації люмінесценції в монокристалічному сelenіду цинку при фото- та рентгенівському збудженні відразу після зняття різниці потенціалів з електродів зразка.

Релаксація РЛ на довжині хвилі домінуючої смуги свічення 626 нм та інтегрально по всьому спектру свічення відбувається за законом, близьким до експоненційного, і характеризується сталою часу досягнення стаціонарного значення  $t_r \approx 20$  с. Зазначимо, що в момент початку опромінення зразка рентгенівськими квантами

також спостерігається поступове нарощання інтенсивності рекомбінаційного свічення, яке при температурі 295 К описується функцією часу, близькою до експоненційної зі сталою часу  $t_r \approx 3$  с, що значно менше, ніж у випадку релаксації після вимкнення зовнішнього електричного поля. Це свідчить про те, що релаксація РЛ після зняття напруги визначається не лише процесом перерозподілу носіїв між центрами і зоною провідності, але і явищами іншого типу, що напевно пов'язані зі створенням об'ємного заряду в зразку.

#### Аналіз експериментальних результатів

Явище впливу електричного поля на люмінесценцію широкозонних матеріалів, як наприклад, лужно-галоїдних кристалів, відоме досить давно [3: 11-13], однак, на сьогоднішній день відсутні детальні фізичні моделі, які пояснюють експериментальні факти впливу поля. В роботах [12; 14], наприклад, автори роблять припущення про визначальний вплив поля на початкових стадіях люмінесцентного імпульсу при поглинанні гамма, або рентгенівського випромінювання в кристалі, коли внаслідок прикладання зовнішнього поля згенеровані електрони та дірки розходяться в різні напрямки дії поля, що зменшує число актів рекомбінації на активаторі (в роботі [12] також досліджувався вплив електричного поля на радіолюмінесценцію CsI-Tl). Оцінка необхідної рухливості носіїв, при якій за час життя у відповідних зонах ( $\sim 10^{-8}$  с) при напруженості поля  $\sim 10^3$  В/см вони розійдуться на відстань значного зменшення їх кулонівської взаємодії ( $\sim 10$  нм) становить  $0.1$   $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ . Типові значення рухливості носіїв в селеніді цинку є на порядки більшими ( $\mu \approx 700 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ ,  $\mu' \approx 30 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ ). Це дозволяє пояснити, чому у випадку рентгенівського збудження, коли існує велика початкова концентрація електронно-діркових пар, спостерігається значна зміна інтенсивності

люмінесценції при збільшенні величини поля. Зона генерації носіїв при поглинанні одного кванту є незначною, а основна кількість актів рекомбінації відбувається до моменту значного дифузійного розбігання та локалізації електронів і дірок (оскільки такий варіант відповідає вже етапу фосфоресценції). Таким чином, умови створення електронних збуджень в кристалі при поглинанні рентгенівських квантів можна вважати основною передумовою для наступної кореляції між інтенсивністю люмінесценції та величиною зовнішнього електричного поля. При фотозбудженні маємо іншу фізичну картину. Електрон-діркові пари хоч і мають більшу макроскопічну густину створення на поверхні кристалу при його опроміненні, однак в цілому є однорідно розподіленими по області реєстрації квантів світла в кристалі і їх зміщення один відносно одного в зовнішньому полі не має значного впливу на люмінесценцію та спектри свічення.

#### Висновки

Можна виділити декілька основних результатів та висновків, отриманих при дослідженні впливу електричного поля на фотота рентгенолюмінесценції монокристалічного ZnSe:

1. Незалежно від типу збуджуючого випромінювання при збільшенні величини електричного поля в зразку до значення 1000 В/см інтенсивність люмінесценції падає.
2. У випадку рентгенолюмінесценції значне збільшення поля (до  $\approx 1200$  В/см і більше) може призводити до зростання загальної інтенсивності люмінесценції інтегрально по всьому спектру свічення, однак не на довжині хвилі 626 нм.
3. Виключно для рентгенівського збудження монокристалів ZnSe після стрибкоподібного зняття зовнішнього електричного поля спостерігаються тривалі релаксаційні процеси по відновленню стаціонарного значення інтенсивності свічення.

чення до початкового рівня (час відновлення становить ~ 70 с).

4. При рентгенівському збудженні ZnSe спостерігається помітне уширення смуги свічення на довжині хвилі 626 нм. Отриманий ефект може свідчити про помітний вплив поля на процеси внутрішньоцентрових переходів в збуджених центрах свічення.

Одержані експериментальні результати для монокристалічного селеніду цинку та ЛГК [3] однозначно свідчать про визначальний вплив просторового розподілу електронних збуджень на кінетику рекомбінаційної люмінесценції при наявності зовнішнього електричного поля. Пояснення отриманих результатів може бути знайдено після більш детального теоретичного розгляду впливу поля на рух та локалізацію просторово розподілених носіїв, значна концентрація яких зумовлена поглинанням в кристалі високоенергетичної іонізуючої частинки (рентгенівського кванту).

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.4/138).

#### Список використаних джерел

1. Берг А., Дин П. Светодиоды. – М.: Мир, 1979. – 345 с.
2. Атрощенко Л.В., Бурачес С.Ф., Гальчинецкий Л.П., Гринев Б.В., Рыжиков В.Д., Старжинский Н.Г. Кристаллы сцинтилляторов и детекторов ионизирующих излучений на их основе. – Киев: Наук. думка, 1998, гл. 3. с. 166.
3. Андрианов А.С. Кац М.Л. Физика щілочногалоїдних кристаллов. – Рига: АН Латв. ССР, 1962.
4. Недеогло Д.Д., Симашкевич А.В., Электрические и люминесцентные свойства селенида цинка, Кишинёв: «Штиинца», 1984.
5. Degoda V. Phosphorescence of Crystallophosphors under X-Ray Excitation // Ukrainian Journal of Physics. – 2001. - vol. 46, No. 1. - pp.105-112.
6. Весна Г.В., Гуцуляк Х.В., Дегода В.Я., Кияк Б.Р., Манжара В.С., Проскура А.Н., Рентгенопроводимость поликристаллического селенида цинка // Неорганические материалы. – 1997. - т.33, в.2. - С.178-180.
7. Дегода В.Я., Кияк Б.Р., Манжара В.С., Родионов В.Е., Проскура А.И. Фото- и рентгенолюминесценция ZnSe // Неор. мат. – 2000. - т.36. №5. - С.624-627.
8. Дегода В.Я., Софієнко А.О. Вплив характеру збудження на люмінесценцію та провідність селеніду цинку // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2008. – № 9. – С. 52-55.
9. Эльмуротова Д.Б., Ибраимова Э.М. Усиление электролюминесценции кристаллов ZnSe (Te, O) после  $\gamma$ -облучения // ФТП, 2007, т. 41. вып. 10, с. 1153 – 1157.
10. Морозова Н.К., Каретников И.А., Блинов В.В., Гаврищук Е.М. Исследование спектров инфракрасной люминесценции ZnSe, содержащего медь и кислород // ФТП. – 2001. - т.35, в.5. - С.534-536.
11. Андрианов А.С. Кац М.Л. // Оптика и спектроскопия, 1961, вып. 11, с. 422.
12. Волков Н.Г., Григорьев В.А., Ляпидевский В.К., Ободовский И.М., Рыльцов В.В. // Радиационная физика, 1967, т. 5, с. 79-101.
13. Денкс В.П. – Труды ИФА АН ЭССР, 1963. вып. 23, с. 229.
14. Vandysev E.N., Zhuravlev K.S., Gilinsky A.M., Shokura W. Influence of electric field on the photoluminescence of silicon nanocrystals // Thin Solid Films. - 2005, - № 493. - с. 297-300.

Надійшла до редакції 23.02.2009

УДК 520.17

Держипольська<sup>1</sup> Л.А., аспірантка,  
Гнатовський<sup>2</sup> О.В., к. ф.-м. н.,  
Удалов<sup>3</sup> Є.П., к. ф.-м. н.,  
Єжов<sup>4</sup> П.В., наук. співр.

## Новий підхід до вимірювання фазових збурень об'єктів за допомогою інтерферометричного панорамного корелятора

Розглядається можливість при кореляційному співставленні двох просторових статистичних фазових розподілів використовувати голограмічний інтерферометр (замість більш складного корелятора). Доведено, що параметр контрастності інтерференційних смуг для ділянки змінних фазових розподілів і пікове значення їх просторової крос-кореляційної функції отримуються однаковими формулами.

Це досконале можливість методом двохекспозиційної голограмічної інтерферометрії визначати просторову кореляцію складних динамічних фазових розподілів одночасно по всьому перетину світлового пучка. На погляд авторів, підхід має бути корисним при дослідженнях динаміки спекл-полів, шорсткості поверхонь, тощо.

**Ключові слова:** кореляційне співставлення, голограмічний корелятор, голограмічний інтерферометр, крос-кореляційна функція, шорсткість.

<sup>1</sup> E-mail: lida@iop.kiev.ua  
WWW: [www.phys.iitv.kiev.ua/derzhypolska.html](http://www.phys.iitv.kiev.ua/derzhypolska.html)

<sup>2</sup> E-mail: gnat@mail.ru

<sup>3</sup> E-mail: udalov@univ.kiev.ua

WWW: <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/~udalov.html>

<sup>4</sup> E-mail: ludu@iop.kiev.ua

WWW: <http://www.iop.kiev.ua/site/index.php>

### Вступ

Голограмічні перетворення світлових полів по своїй суті є кореляційними перетвореннями, хоча увагу на цю обставину звичайно не акцентують. Фундаментальна властивість голографії, її відмінність від інших оптических перетворень – це двохступінчастий процес формування результуючого оптичного поля. При цьому на першому етапі відбувається реєстрація якогось проміжного поля, а на другому етапі проміжне поле підлягає впливу ще якогось іншого поля. В загальному вигляді такий алгоритм

L.A. Derzhypolska<sup>1</sup>, Post-graduate student,  
O.V. Gnatovskyi<sup>2</sup>, Ph.D. of phys. & Math.,  
E.P. Udalov<sup>3</sup>, Ph.D. of phys. & Math.,  
P.V. Yezhov<sup>4</sup>, Research.

The novelst approach to measuring phase disturbances of objects with the using interferometric panoramic correlator

The capability is considered to use the holographic interferometer (instead of more composite correlator) by correlation comparison of two spatial statistical phase allocations. It proved, that are described by equal formulas parameter of contrast range of fringes for a segment of variable phase allocations and a peak value their spatial cross-correlation function.

It enables to determine space correlation of the composite dynamic phase allocations simultaneously on all section light beam with use method two-exposition interferometric holography. At probes of dynamics a speckle-fields, roughness of surfaces, etc., and this approach should be the useful, in opinion of authors.

**Key Words:** correlation comparison, holographic correlator, holographic interferometer, cross-correlation function, roughness.

притаманний і для випадку декількох різних або ж однакових полів.

Наявність взаємодіючих просторових розподілів полів саме і визначає потребу їх порівняння. Інтегральною характеристикою для таких порівнянь є визначення і вимірювання їх просторових кореляційних розподілів. При цьому форма результуючого розподілу може бути різноманітна і визначатися практичними потребами дослідження. В загальному випадку вона називається формою представлення кореляційного відгуку.

В цій роботі ми вперше звертаємо увагу на дещо неочікувану спорідненість параметрів

Представлено: д. ф.-м. н., проф. Єжов С.М.

пікового значення класичної просторової кореляційної функції двох відмінних дифузних об'єктів і контрастності інтерференційних смуг при порівнянні цих же об'єктів. Ці параметри, таким чином, виявляються лише різними формами представлення кореляційного сигналу.

В найбільш загальному вигляді і кореляційний і інтерферометричний досліди порівнюють два розподіли поля з метою визначення їх відмінностей. Під час порівняння як макроскопічні характеристики поля, що описує форму досліджуваного об'єкта, так і мікрокопічні (статистичні) характеристики, які описують стан поверхні об'єкта, можуть змінюватись. Таким чином, задача зводиться до кореляційного порівняння двох полів, в яких є детермінована і статистична складові. Рішенням такої задачі є пошук оптимальної форми представлення деякої просторової кореляційної (радше крос-кореляційної) функції, яка б

одночасно визначала зміни форми об'єкта та його поверхні. З точки зору передачі оптичного сигналу, це відповідає випадкам, коли інформаційна компонента сигналу модулюється фазовим статистичним дифузором. Такі задачі виникають при порівнянні змінних спекл полів, розподілів поля на виході світловодних пристрій, розпізнанні певних ознак об'єктів, криптографії тощо.

### I. Теоретичні передумови.

Теоретичний розгляд і експериментальні модельні досліди проводилися згідно класичної схеми запису Фур'є голограми при її кореляційному типі відтворення, тобто сигнальним пучком.

Схема запису та відновлення Фур'є голограми зводиться до еквівалентної телескопічної системи [1], яка наведена на Рис.1.

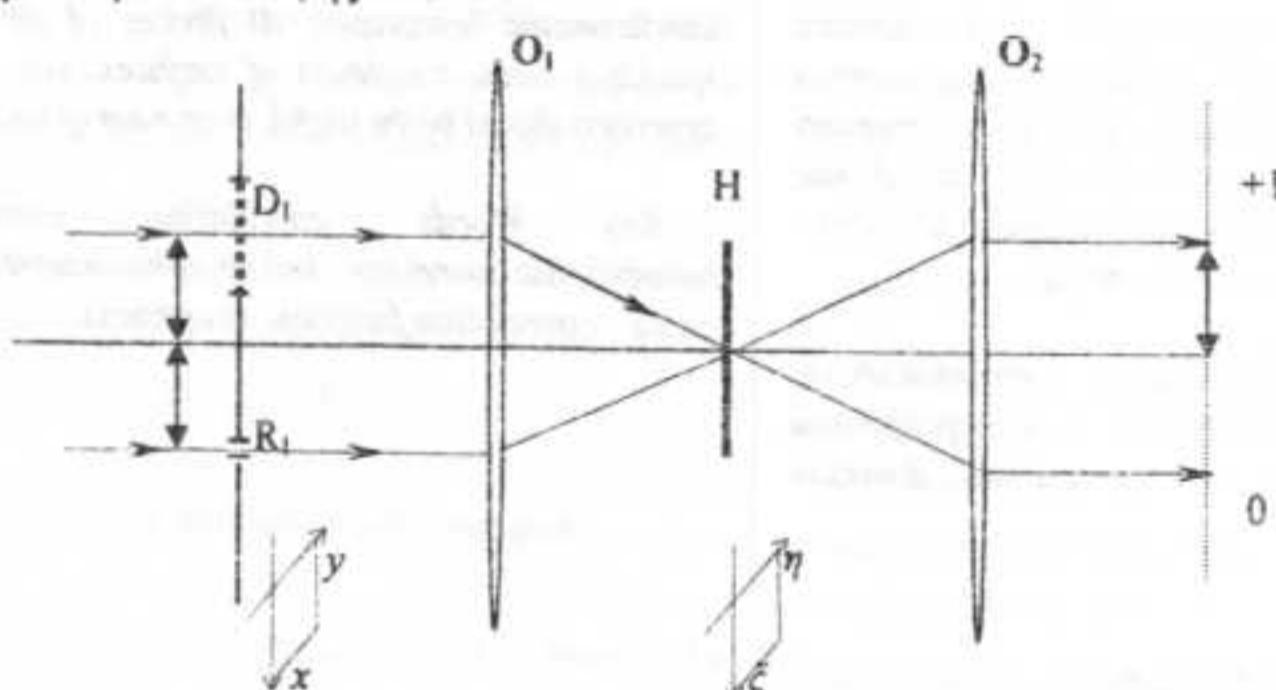


Рис. 1 Узагальнена схема запису та відновлення Фур'є-голографії.

У передній фокальній площині об'єктива  $O_1$  з координатами  $(x, y)$  розміщені дифузор  $D_1(x, y, t_1)$  та точкове джерело  $R_1 = \delta(x_0, y_0)$ . Дифузор  $D_1(x, y, t_1)$ , із складним розподілом фази, формує предметний пучок, точкове джерело – опорний. У задній фокальній площині цього об'єктива (координати  $(\xi, \eta)$ ) записується голограма  $H$  кутових спектрів сигнального та опорного пучків. Відновлювальний пучок формується іншим дифузором  $D_2(x, y, t_2)$ , у якому відбулися випадкові зміни набігу фази по відношенню до розподілу фази першого дифузора.

Оптичне поле у площині голограми  $H$  матиме вигляд:

$$H(\xi, \eta, t_1) = F \{D_1(x, t_1) + R(x_0)\} = d_1 + r \quad (1)$$

а його інтенсивність

$$\begin{aligned} I(\xi, \eta) &= |H(\xi, \eta, t_1)|^2 = \\ &= |d_1|^2 + |r|^2 + d_1^* r + d_1 r^*, \end{aligned} \quad (2)$$

де перетворення  $d = F/D$  відповідає операції Фур'є перетворення.

Записаний на голограмі розподіл інтенсивності (2) відновлюється у передній

фокальній площині другого об'єктива  $O_2$  пучком  $d_2 = F[D_2(x, y, t_2)]$ , який піддається модуляції змінним дифузором. Результат перетворення спостерігається в задній фокальній площині об'єктива  $O_1$ .

Комплексне пропускання дифузорів  $D_1(x, y, t_1)$  та  $D_2(x, y, t_2)$  визначається виразами:

$$D_1(x, y, t_1) = A_1(x, y) \exp\{i\phi(x, y, t_1)\},$$

$$D_2(x, y, t_2) = A_2(x, y) \exp\{i[\phi(x, y, t_1) + \psi(x, y, t_2)]\} \quad (3)$$

Згідно з рівнянням голограми, в ії +1 дифракційному порядку після відновлення, в задній фокальній площині об'єктива  $O_2$ , сформується поле з комплексною амплітудою:

$$r_{+1} = F^{-1}\{d_1^* d_2 r\} \propto (D_1^* * D_2) \otimes R \approx K(x, y, t_{1,2}) \quad (4)$$

Вираз (4) є наслідком теореми згортки і, таким чином, розподіл  $K(x, y, t_{1,2})$  визначає просторову крос-кореляційну функцію для використаних дифузорів  $D_1(x, y, t_1)$  і  $D_2(x, y, t_2)$ , які модулюють пучки з перетином  $S$ . З урахуванням того, що поле опорного пучка описується сталими розподілами, а також того, що пікове значення кореляційної функції визначається інтегралом Фур'є перетворення на нульовій просторовій частоті, запишемо (4) в явному вигляді:

$$r_{+1} \propto \iint_S \exp[i(\phi - \phi - \psi)] dx dy =$$

$$= \iint_S \exp[-i\psi] dx dy \quad (5)$$

Розглянемо значення інтеграла (5):

$$\iint_S \exp[-i\psi] dx dy = \iint_S (\cos(\psi) - i \sin(\psi)) dx dy =$$

$$= \iint_S (\cos(\psi)) dx dy - \iint_S (i \sin(\psi)) dx dy \quad (6)$$

Проаналізуємо другий доданок в (6). Функція  $\sin(\psi)$  є непарною і її аргумент – випадкова величина із нульовим середнім значенням. В межах інтегралу аргумент набуває значень більших, або менших нуля в однаковій кількості.

Як наслідок цього  $\iint_S (i \sin(\psi)) dx dy = 0$

(7) Перший доданок виразу (6), якщо його значення розділити на площа дифузора  $S$ , визначатиме середнє значення функції  $\cos(\psi)$  [2].

З іншого боку, середнє значення величини  $\cos(\psi)$  визначається як:  $\int \cos(\psi) \rho(\psi) d\psi = M(\cos(\psi))$  [3], де  $M(\cos(\psi))$  позначає математичне очікування величини  $\cos(\psi)$ , а  $\rho(\psi)$  позначає густину розподілу цієї величини, тобто фази.

В попередніх роботах [3,4] для голографічного інтерферометра ми аналізували вплив нестационарних фазових збурень на поверхні об'єкта на контрастність смуг отриманої інтерференційної картини. Параметр контрастності  $V$  виявився пропорційним виразу:  $V \sim \int \cos(\psi) \rho(\psi) d\psi$ , де розподіл  $\psi(x, y, t)$  описує просторові зміни фази для неконтрольованих збурень, а  $\rho(\psi)$  – густина розподілу таких змін.

В роботі розглядалися два загально вживаних розподіли: Гаусса і нормальні, а також було отримано функції контрастності для цих розподілів.

Зокрема для розподілу Гаусса:

$$V = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\right] \quad (8)$$

Для рівномірного розподілу:

$$V = \text{sinc}(a) \quad (9)$$

Видно, що обидва вирази для пікових значень просторової кореляційної функції і для контрастності інтерференційних смуг визначаються середнім значенням функції косинуса для фазових збурень. З цього можна зробити висновок, що за умови випадкових фазових шумів в об'єктах співставлення, амплітуда кореляційного піку для розподілів фаз в двох дифузорів ( $E \sim \iint_S (\cos(\psi)) dx dy$ ) є пропорційною функції контрастності інтерференційних смуг.

I, навпаки, просторовий розподіл для функції контрастності інтерференційних смуг визначатиме міру кореляції фази змінних статистичних фазових збурювачів на конкретній ділянці досліджуваного об'єкта. Тобто маємо  $E \sim V$ . I, оскільки інтенсивність кореляційного піку

$I = |E|^2$ , то остаточно одержимо:

$$I \sim V^2 \quad (10)$$

## 2. Експериментальні результати.

Одержані теоретичні висновки піддавалися експериментальній перевірці, при проведенні модельних дослідів з штучними об'єктами. Необхідність використання таких об'єктів обумовлюється складністю умов отримання дифузних поверхонь з контролюваними розподілами та змінами фази на дифузних поверхнях. Тому застосовувався наступний прийом. Потрібний фазовий розподіл створювався за допомогою динамічного фазового транспаранта (зокрема ПМС LC2002 з розмірами елементарної РК комірки  $32 \times 32 \mu\text{m}$ ) і потім

проектувався на поверхню макроскопічних об'єктів. Умови калібрування та настройки динамічного транспаранта в наших дослідах можна знайти в [5].

Далі на комп'ютері в програмі MatLab розраховувалася фазова поверхня для дифузорів, в яких роль елементарного фазового збурювача відігравала фазова комірка (одна чи декілька). Розподіл фази для всіх наступних змінених дифузорів є сумою розподілу фази в початковому дифузорі та певному зміненому дифузорі. Для цього вибиралася відома величина дисперсії просторового розподілу фазових збурень.

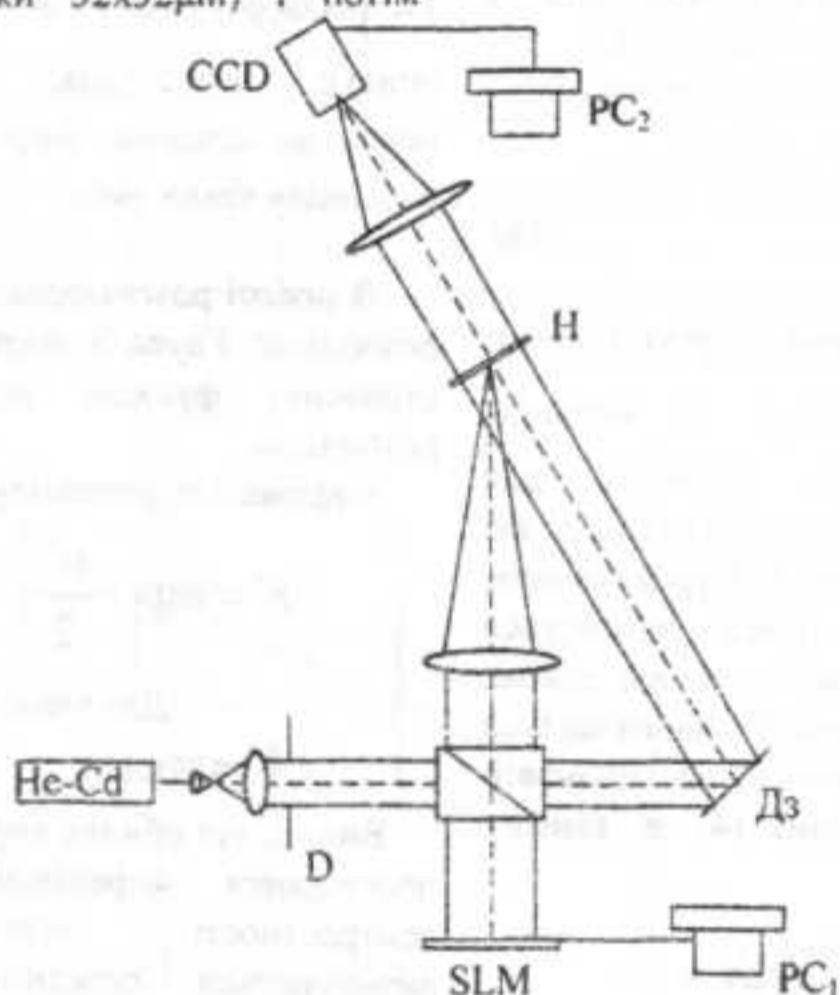


Рис. 2 Схема оптико-цифрового корелятора.

В роботі використовувалися два загально вживаних розподіли: рівномірний і нормальній. Перший відповідає однаковій ймовірності знайти фазовий збурювач в межах інтервалу зміни фази [0, a]. В другому випадку розміри фазових розсіювачів (по затримці в них фази коливань поля) описувалися функцією Гаусса з дисперсією σ. Таким чином, згідно з теоретичними міркуваннями цієї роботи, а також [5], були отримані залежності для пікових значень кореляційних співставлень та параметра контрастності інтерференційних смуг від величини дисперсії a та σ для обох розподілів (див. суцільну лінію на рис. 3), які перевірялися. В процесі модельних експериментів були

отримані данні: A - для розподілу Гаусса (формула (9.11))

$$r_{A_{\text{max}}} = V = \sin \alpha(a) \quad (11)$$

та B - для рівномірного розподілу (формула 8)

$$r_{B_{\text{max}}} = V = \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \right] \quad (12)$$

Вимірювання проводилися за допомогою оптико-цифрового корелятора, оптична схема якого наводиться на рис. 2. Згідно цією схемою, випромінювання гелій-кадмієвого лазера після вирівнювання за допомогою телескопа та обмежувальної діафрагми розподілу інтенсивності на робочому перерізі пучка, розділялось на сигнальний та опорний пучки.

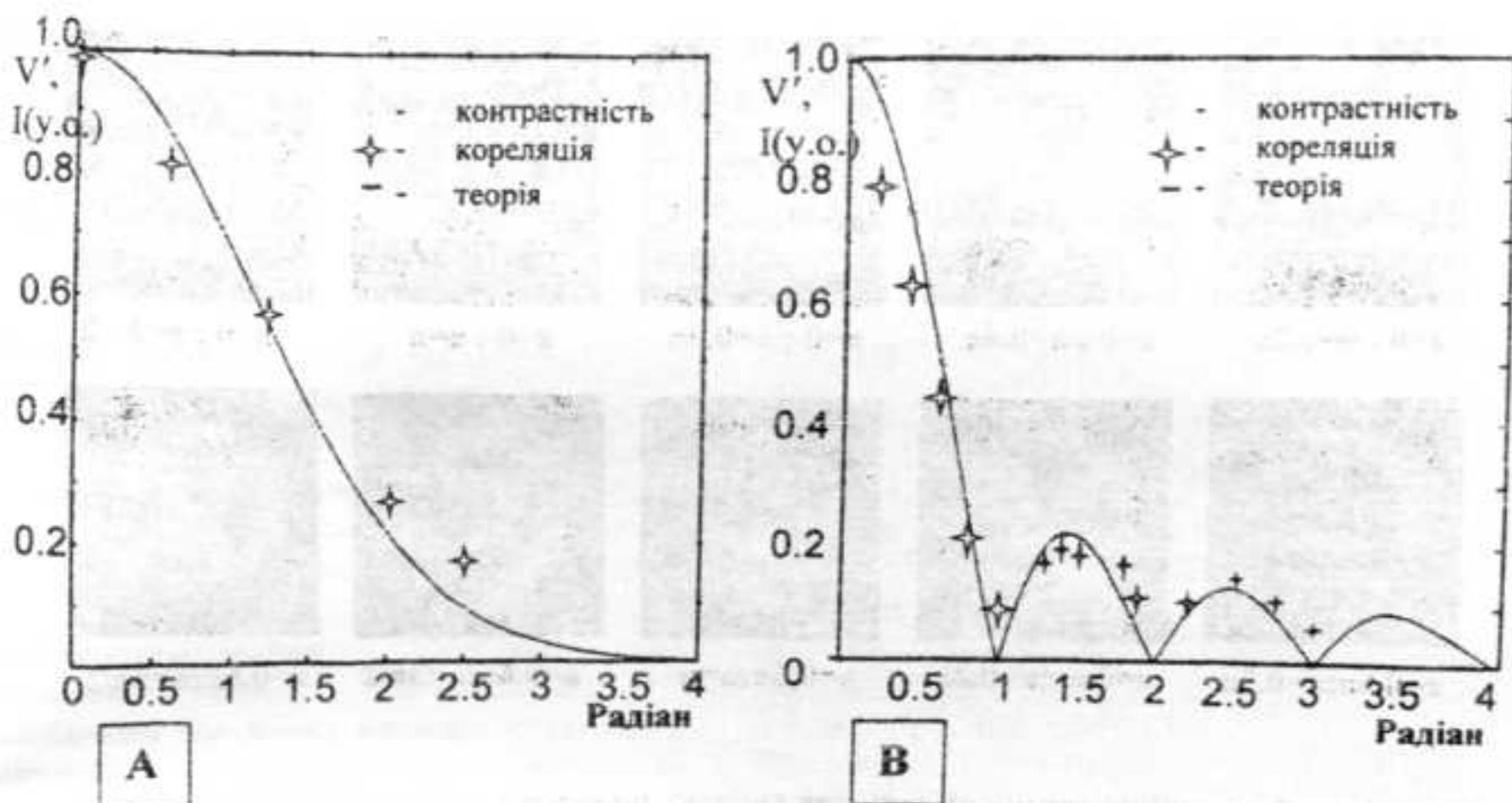


Рис. 3 А) графік залежності  $V'(a)$  та  $I(a)$  для розподілу Гаусса.  
Б) графік залежності  $V'(a)$  та  $I(a)$  для рівномірного розподілу.

В каналі сигнального пучка знаходився фазовий транспарант SLM, який керувався комп’ютером РС, і давав можливість покривати поверхню об’єкта потрібними фазовими розподілами. Одержані після відтворення голограми кореляційні та штучні інтерференційні картини спостерігались на телекамері і оброблялись на іншому комп’ютері РС. За допомогою корелятора вимірювалась інтенсивність кореляційного піку між нульовим дифузором і дифузорами з контролюваною дисперсією. Для цього на SLM відтворювався розподіл фази початкового дифузора, кутовий спектр якого записувався на голограму Н. Далі на SLM послідовно відтворювались змінені дифузори з заданою дисперсією. Після кожного нового дифузора на CCD камері фіксувалась інтенсивність кореляційного піка між дифузором на SLM та раніше записаним на голограмі Н початковим дифузором. На цьому ж кореляторі моделювались інтерференційні смуги для вимірювання їх контрастності. Зокрема, ліва та права частина зображення піддавалися модуляції різними дифузорами, а інтерференційні смуги утворювались при

штучному введенні за допомогою SLM додаткового фазового клину в повне зображення об’єкта.

**Обробка результатів.** В програмі MatLab будувалась залежність інтенсивності кореляційного піку, отриманого на експерименті, від величини дисперсії (для розподілу Гаусса), або ж на півширини оптичної довжини для фазових збурювачів (для рівномірного розподілу) відповідного дифузора. Отримана залежність порівнювалась з функцією контрастності інтерференційних смуг для відповідних розподілів (8), (9). Результат наведений на рис.3.

На рис.3А зображено залежність кореляційного піку для дифузорів в розрахунку, яких використовувався розподіл Гаусса, і функція контрастності (9), а на рис.3Б залежність кореляційного піку для дифузорів в розрахунку, яких використовувався рівномірний розподіл і відповідну функцію контрастності (8).

На рис.4 наводяться інтерференційні картини, які використовувалися для визначення параметра контрастності інтерференційних смуг у випадку рівномірного розподілу величин для фазових збурень. Під кожною фотографією наводяться параметри розподілів для лівої та правої половини зображення. В цьому наборі фотографій варто

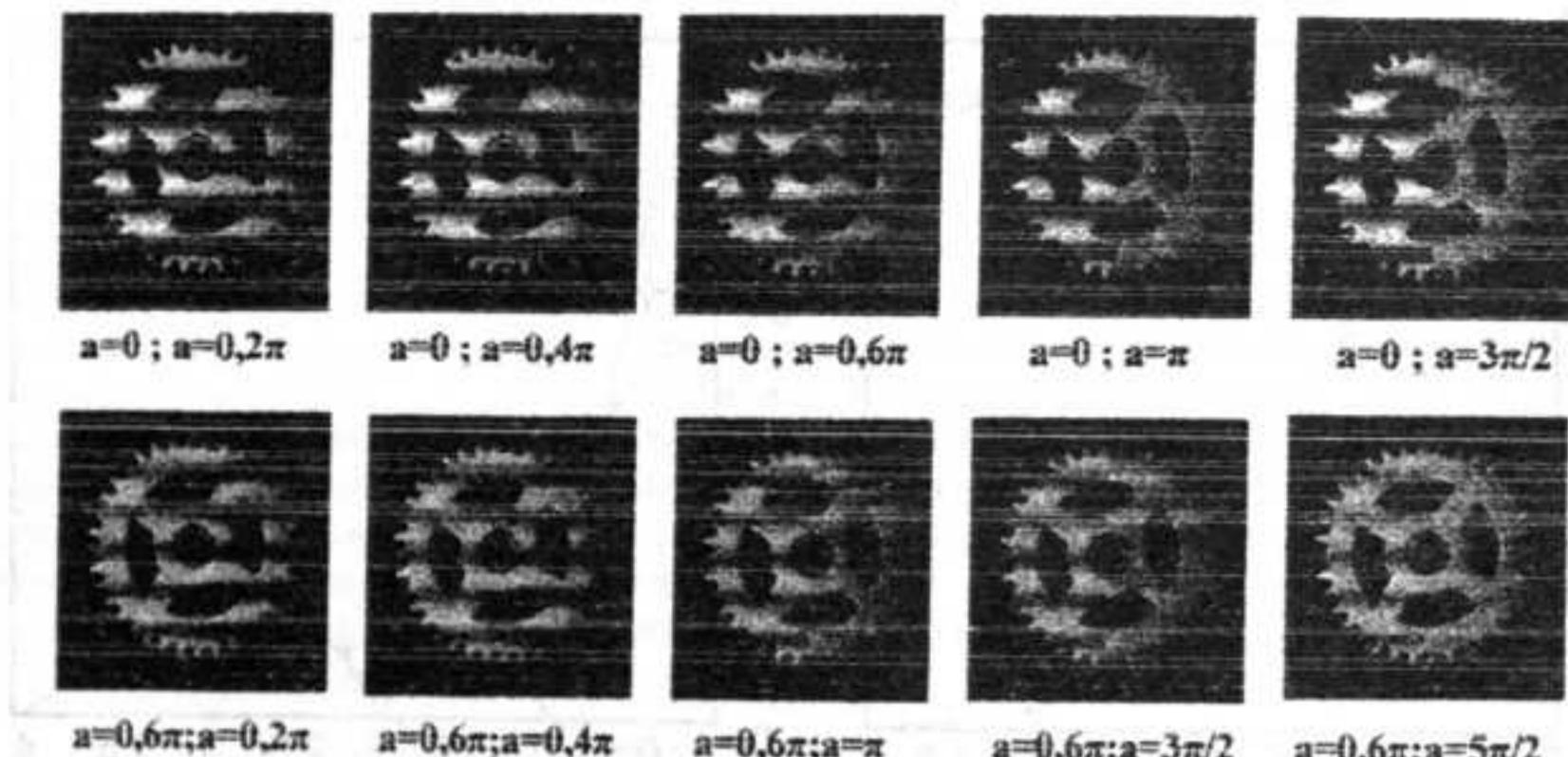


Рис. 4 Інтерференційні картини об'єкту для випадку рівномірного розподілу фазових збурень.

звернути увагу на четверту зліва в нижньому ряду. Згідно з виразом (8) параметри рівномірних розподілів для цього випадку знаходяться в різних максимумах функції  $Sinc$ . Це призводить до протифазних коливань поля для лівої та правої частин зображення, що проявляється у зміщенні інтерференційних смуг на половину періоду. Відповідно і амплітуда поля в центральному максимумі просторової кореляційної функції має змінювати знак. Але традиційно міра кореляції визначається квадратом модуля поля (інтенсивністю), тому на такі обставини звичайно не звертали уваги.

### Висновки

Таким чином, в цій роботі ми показали, що просторовий розподіл поля в інтерференційній картині можна трактувати як згортку чистої смугастої картини з кореляційним піком просторових статистичних розподілів для випадку фазових збурень на поверхні об'єкту. Відповідно до цього сам інтерферометр можна визначити як панорамний корелятор статистичних полів з подаванням сигналу у формі просторового розподілу параметра контрастності інтерференційних смуг, що з'являються при зміні форми та поверхні об'єктів. Такі результати розширяють область застосування голограмичної інтерферометрії і дозволяють одночасно досліджувати

макроскопічні і мікрокопічні характеристики об'єкту.

### Список використаних джерел

1. George W. Stroke. An introduction to coherent optics and holography. –Academic Press, New York London, 1966. –270p.
2. G. Korn, T. Korn. Mathematic handbook. – Moscow, "Nauka", 1978. – 831p.
3. Derzhypolska L.A., Gnatovskiy O.V. Holographic interferometry under phase distortions // Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics. – 2006. – V9, №3. – P. 56-59.
4. Держильська Л.А., Гнатовський О.В., Удалов Е.П. Моделювання роботи цифрового голографічного корелятора за умови фазових перешкод в робочому пучку // Вісник київського університету. серія: Фізико-математичні науки. –2007. – №2. – С. 314-320.
5. Yezhov P.V., Kuzmenko A.V., Smirnova T.N., Ivanovskiy A.A. Method for replacing objects in 4F correlator: testing. // Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics. –2005. – V8, №2. –P75-80.

Надійшла до редакції 20.10.2008

УДК 678.1. 541.64, 532.2

Копитков<sup>\*</sup> В.В. к.т.н., Селькин В.П. к.т.н.,  
Гуринович Л.М. к.т.н., Кудіна О.Ф. к.т.н.,  
І.І. Адаменко д.ф.-м.н.,  
В.Ф. Королович аспірант

## Вивчення впливу солей на кислотність водних розчинів полімерів

Представлене експериментальне дослідження впливу малих домішок солей  $ZnSO_4$ ,  $CoSO_4$ , і  $CuSO_4$ , та водорозчинних полімерів поліакриламіду (ПАА) і натрієвої солі карбоксиметилцелюлози (NaKMЦ) на кислотність води. Співставлено і проаналізовано для різних розчинів вплив зміни кислотності середовища на структуру поверхні.

Експериментально досліджено залежність тангенсу кута механічних втрат покриттів на основі водорозчинних полімерів в широкому інтервалі зміни температур.

**Ключові слова:** водні розчини, кислотність, полімери.

E-mail: <sup>\*</sup>kopytkou@mail.ru, <sup>\*\*</sup>korolovich@gmail.com

### Вступ

Розчини полікислот і поліоснов в теперішній час все більше привертають увагу дослідників [1, 2, 3], що обумовлено широкими можливостями використання (в біомоделюванні, системах перетворення енергії (хемомеханічні перетворювачі), нанотехнології (керування реакційною здатністю хімічних компонентів за допомогою зовнішніх фізико-хімічних і енергетичних взаємодій, забезпечуючих зміну розмірів поліонів в розчині), очистці питної води [4, 5]. При цьому не існує теорій, пояснюючих наявні ефекти, бо побудова теорії конформаційних властивостей заряджених полімерів стикається з труднощами, оскільки електростатичні взаємодії виявляють сильний, часто домінуючий вплив на структурні властивості таких молекул [6].

Відомо, що в водному середовищі іонізовані групи макромолекул водорозчинних полімерів відштовхуються один від одної, внаслідок чого, останні випрямляються.

В той же час, у водному середовищі введений електроліт виявляє екрануючу дію на іонізовані групи, як наслідок, між ними

Коротков<sup>\*</sup> В.В., Ph.D., Selkin V.P., Ph.D., Gyrinovich L.M., Ph.D., Kudina E.F., Ph.D. I.I. Adamenko, Dr Sci, Prof. V.F. Korolovich<sup>\*\*</sup>, Ph.D. student

## The study of salts influence on acidity water-polymer solutions

It is presented the results of experimental research of the influence of small  $ZnSO_4$ ,  $CoSO_4$ ,  $CuSO_4$  salt additions as well as water-solvent polyacrylamide and sodium salt of carboxyl methyl cellulose additions on acidity of water. It is analyzed how the changes of acidity of medium influence the surface structure.

The tangent of the angle of mechanical loss of coatings based on water-solvent polymers is investigated experimentally in a wide range of temperatures.

**Key Words:** water solution, acidity, polymers.

зменшується взаємодія, що приводить до згортання макромолекул в глобулярну форму [7]. В роботах Каргіна по дослідженням структури полімерних розчинів та полімеромістких тіл, показана залежність надмолекулярного структуроутворення полімерів з фізико-хімічними властивостями [8].

Водорозчинні полімери, зокрема, поліакриламід (ПАА) і натрієва сіль карбоксиметилцелюлози (NaKMЦ) являються асоціюючими полімерами, які містять гідрофільні ланцюги, забезпечуючі розчинність полімера у воді, і гідрофобні ланцюги, відповідаючі за їх асоціацію.

Асоціація гідрофобних груп різних макромолекул може призводити до зшивання полімерних ланцюгів між собою з утворенням фізичного геля. Понизити концентрацію полімера, необхідну для утворення фізичного геля можливо введенням невеликої кількості заряджених ланок в макромолекулу. Це можливо шляхом сополімеризації з іогенным мономером.

Крім того, заряджений мономер, в якості якого може виступати низькомолекулярна сіль, підсилює гідрофобну агрегацію ПАВ і викликає ріст міцел [9]. В присутності солі міцелі

Представлено: аkad. НАН України,  
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

збільшуються, що приводить до збільшення ступеня блочності полімера і як наслідок змін його властивостей. Відомо, що розчини солей, в залежності від природи металів і аніона, можуть мати як лужну так і кислу реакцію, обумовлену процесами дисоціації і гідроліза [10].

Тому метою роботи є визначення інтервалу зміни pH розчинів на основі водорозчинних полімерів ПАА і NaKMЦ при введенні невеликої кількості (до 0,1 мас. %) солей багатовалентних металів.

### Методика проведення експеримента

Об'єктами дослідження обрані водорозчинні полімери промислового виготовлення: дисперсний порошок NaKMЦ (ТУ РБ 00204056.150-98) і 6 %-й ПАА-гель (ТУ 6-01-1049-92).

Для дослідження, полімерні розчини готували в слідуєчій послідовності: при постійному перемішуванні в 900 мл дистильованої води розчиняли необхідну кількість солей і додавали ПАА. Після повного розчинення ПАА та досягнення гомогенності розчину вводили NaKMЦ.

В якості солей, впливаючих на зміну pH середовища, були обрані  $ZnSO_4$ ,  $CoSO_4$  і  $CuSO_4$ .

Для вимірювання концентрації іонів водню використовували pH-метр pH-150M. Виміри проводилися згідно ГОСТ 8.134-98, з похибкою  $\pm 0,2$  pH. Дослідження морфології поверхні та сумісності обраних полімерів з приготованими розчинами проводилося оптичним мікроскопом Intel Play зі збільшенням  $\times 200$  на покритті отриманим методом наливу на ПЕ (інертну) підкладку.

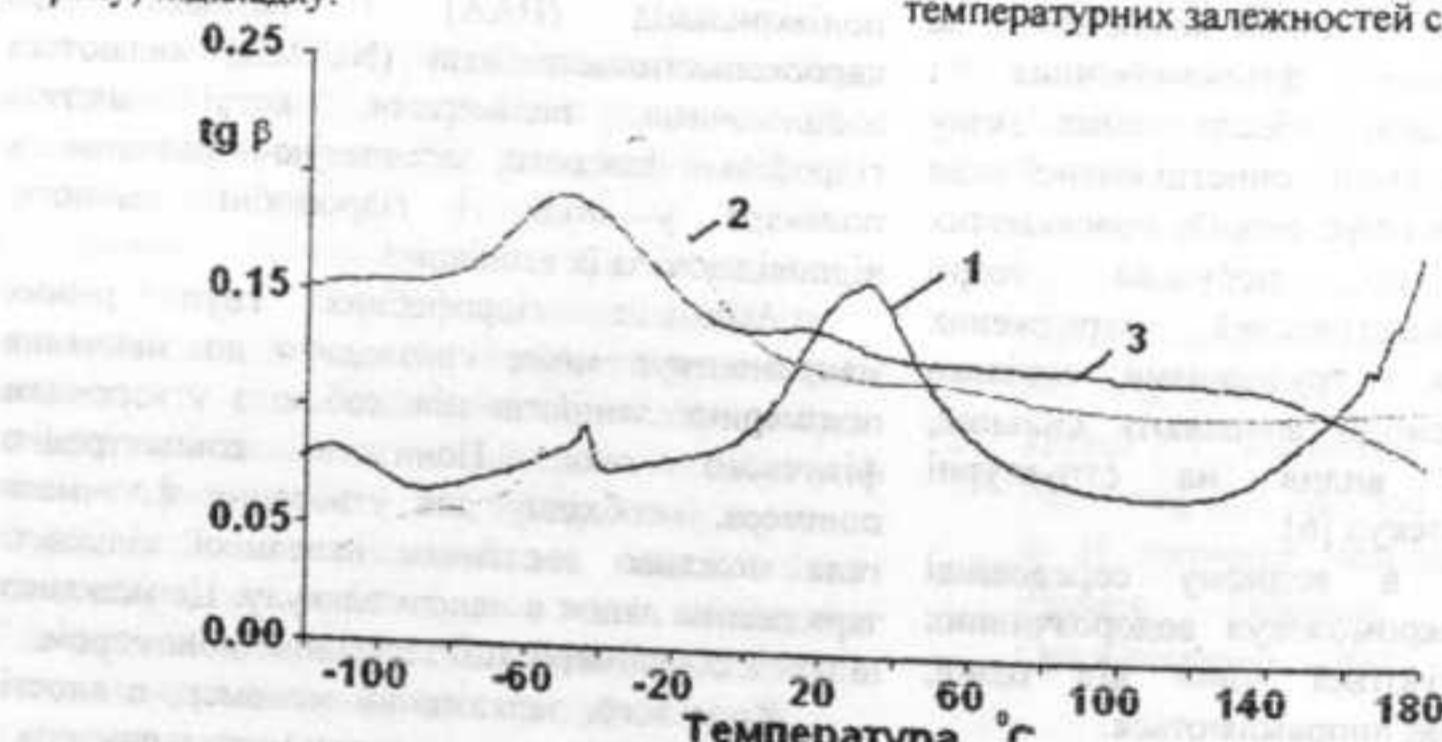


Рис.1. Температурна залежність тангенсу кута механічних втрат. 1 - ПАА, 2 - NaKMЦ, 3 - NaKMЦ+ПАА

Вивчення релаксаційних властивостей покриттів, отриманих з розчинів, проводилося зворотнім крутильним маятником з комп'ютерним управлінням і робочою частотою 1Гц конструкції IMMC НАН Беларусь за методикою описаною в роботі [11].

Зразки були обрані у вигляді пластин розміром  $50 \times 5 \times 1$  мм. Точність контролю і підтримки температури складала  $\pm 0,1$  К. У зв'язку з тим, що зразки здатні абсорбувати вологість з оточуючого середовища, перед дослідженням вони витримувалися на протязі доби в ексикаторах з постійною вологістю 80%. Отримані результати оброблялися методами математичної статистики з надійністю 0,95. Повторність дослідів – п'ятикратна.

### Результати та їх обговорення

Температурна залежність тангенсу кута механічних втрат свідчить, що спектр NaKMЦ характеризується максимумом в області  $-40^{\circ}\text{C}$  (рис.1, крива 2), який пов'язаний з проявом сегментної рухливості в аморфних областях, обумовлених протіканням а-процесу. Analogічний процес відбувається в ПАА, про що свідчить спектр з максимумом в області  $30^{\circ}\text{C}$  (Рис.1, крива 1). Аналіз спектру покриття, отриманих з розчинів на основі двох полімерів (Рис.1, крива 3), свідчить про їх сумісність (максимум при  $-60^{\circ}\text{C}$ ).

Температура склування суміші в порівнянні з початковими компонентами, свідчить, що в такій системі гнучкий ПАА виконує роль пластифікатора по відношенню до жорсткого полімеру NaKMЦ. Аналіз температурних залежностей свідчить про

зростання гнучкості макромолекул у порівнянні з макромолекулами жорсткого NaKMЦ.

Внаслідок хімічної будови і особливостей процеса отримання, водні розчини ПАА мають слабокислу реакцію ( $\text{pH} \approx 6,5$ ), а розчин NaKMЦ – лужну ( $\text{pH} \approx 9,6$ ). Гідрооксиди металів, що входять до складу досліджуваних солей є слабкими основами. (табл. 1) [12, с.236]

При розчиненні даних солей у воді відбувається гідроліз по катіону і розчин набуває кислого середовища, при цьому, чим слабіше основа – тим більша ступінь гідролізу утворених солей.

Аналіз залежностей, представлених на Рис.2, свідчить, що концентрації обраних солей 0,10 мас.% здатні змінити  $\text{pH}$  зразка на 2 одиниці.

Таблиця 1. Константи дисоціації гідрооксидів

Реагент	$\text{Zn}(\text{OH})_2$	$\text{Co}(\text{OH})_2$	$\text{Cu}(\text{OH})_2$
Константа дисоціації	$4 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-5}$	$3,4 \times 10^{-7}$
К. гідроліза (дисоціації)	$2,5 \times 10^{-10}$	$2,5 \times 10^{-10}$	$2,9 \times 10^{-8}$

Згідно приведеним даним найбільші зміни  $\text{pH}$  спостерігаються при введенні солі  $\text{CuSO}_4$  в розчини з NaKMЦ, що пов'язано з ступінню гідролізу іонів міді.

Суміщення двох полімерів у водному середовищі призводить зміну  $\text{pH}$  до значення 8,56 (Рис.2в). Як відомо, в такому середовищі у результаті лужного гідролізу ПАА утворюється макромолекули сополімерів акриламіду з солями акрилової кислоти.

В той же час у зв'язку з сумісністю 2-х полімерів і завдяки наявності значної полярності молекул NaKMЦ у ряді випадків можливий прояв електростатичної абсорбції. Окремо NaKMЦ із-за агрегації молекул проявляє електростатичну абсорбцію головним образом в розбавлених розчинах.

Порівняльний аналіз малюнків 2а-2в свідчить, що за допомогою вибраних солей і водорозчинних полімерів можливо вар'ювання  $\text{pH}$  середовища від 5,00 (розчин на основі ПАА і 0,10 мас. %  $\text{Cu}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ) до 9,57 (розчин на основі NaKMЦ) з кроком 0,5.

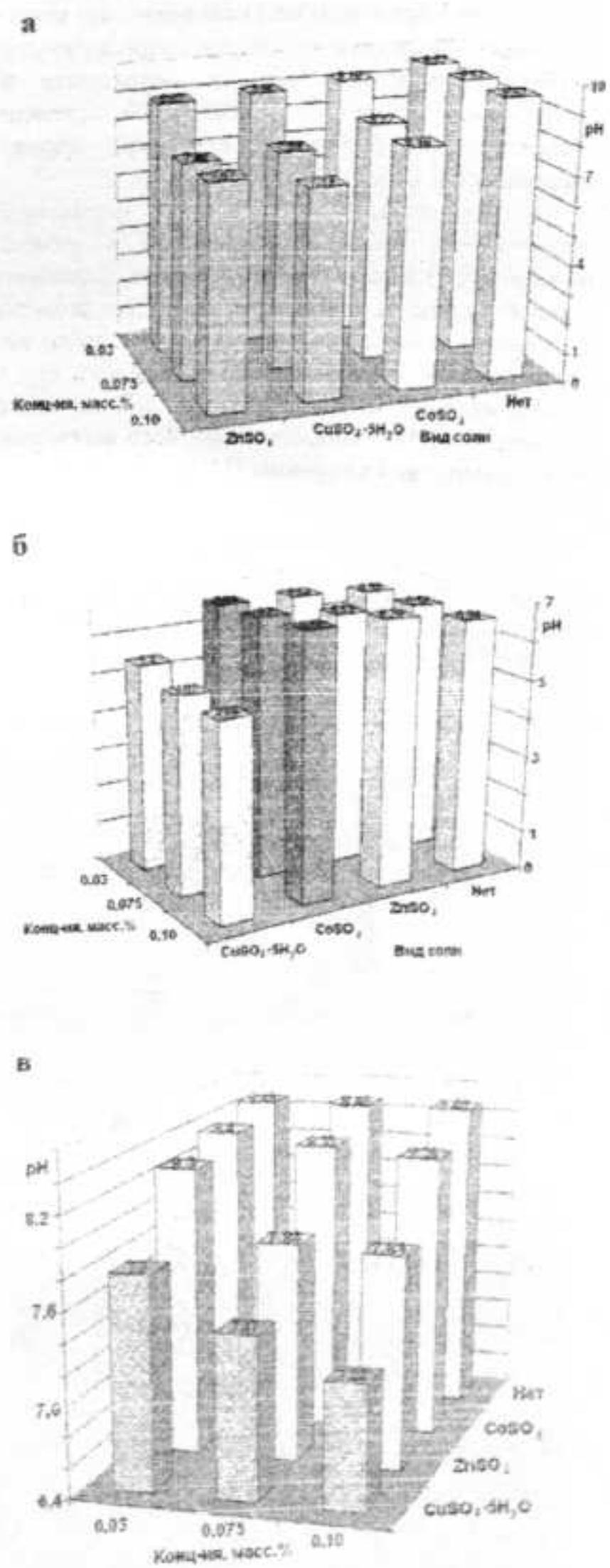


Рис.2. Вплив концентрації солей на  $\text{pH}$  розчинів:  
а – на основі NaKMЦ; б – на основі ПАА; в – на основі NaKMЦ+ПАА.

Аналіз морфології поверхні покріттів, як з солями, так і без них (Рис.3) свідчить, що вони, виявляють екрануючу дію на макромолекули полімерів, змушують останні переходити в глобулярний стан. В найбільшій ступені утворенню глобулярних структур сприяє введення солі  $\text{CuSO}_4$ .

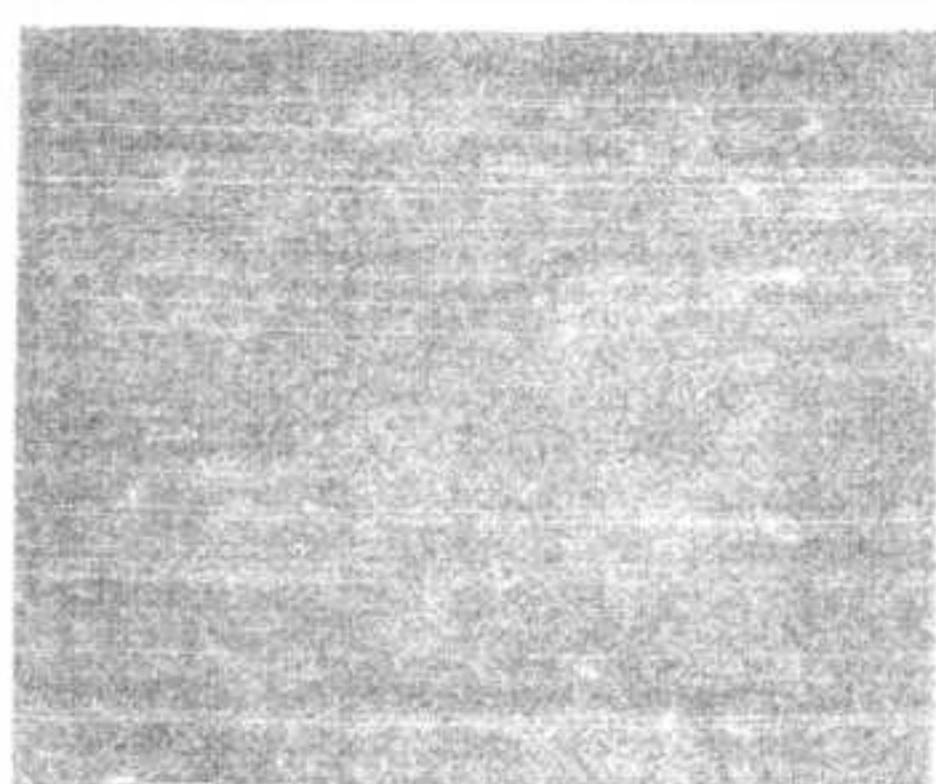
Порівняльний аналіз морфології свідчить, що покріття, отримані з водних розчинів солей з  $\text{NaKMЦ}$ , мають одиничні глобули, а вже на основі двох полімерів розмірні і кількість глобул співрозмірні з покріттями, отриманими на основі ПАА. Це свідчить, що в конформаційні зміни жорстко ланцюгового полімера  $\text{NaKMЦ}$  вносить вклад його взаємодія, як з солями, так і з гнучким ПАА.



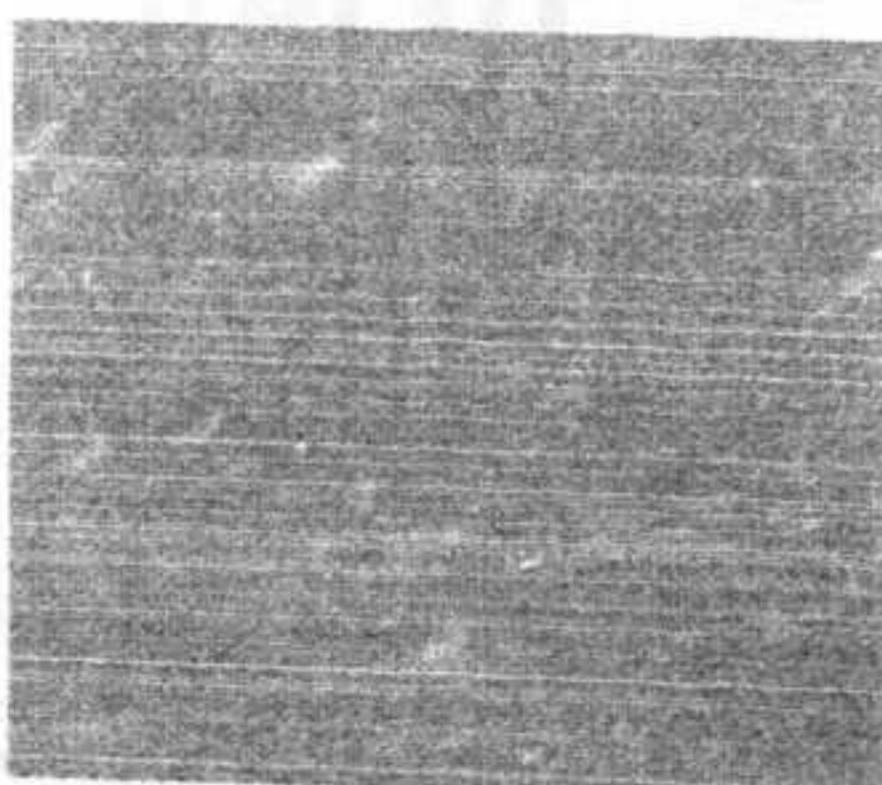
а



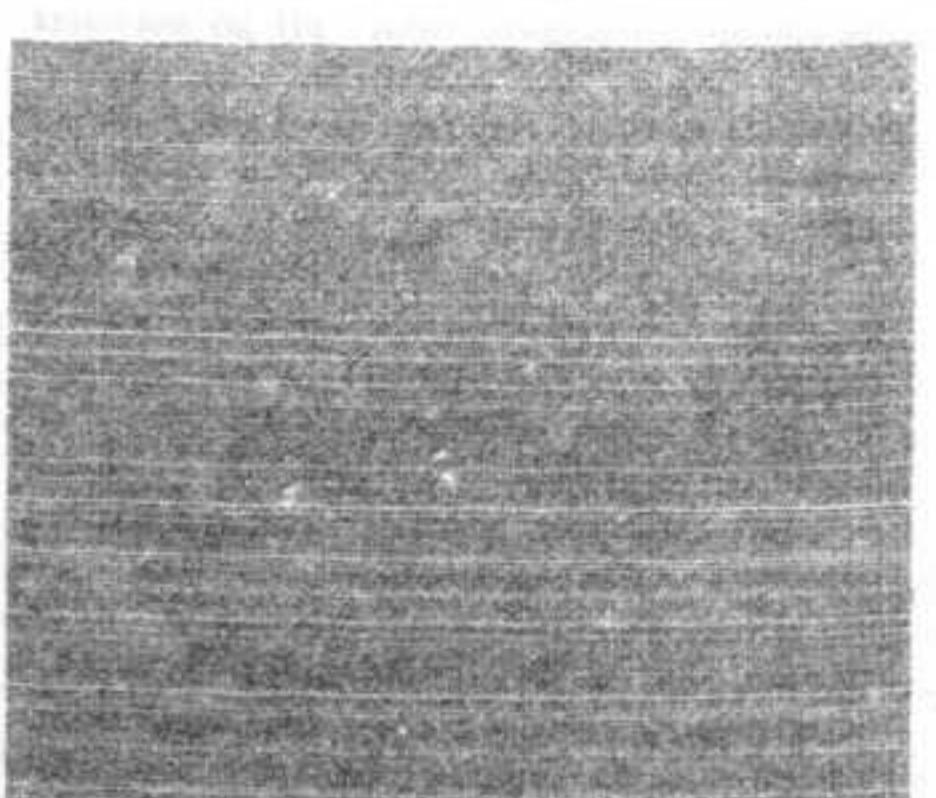
в



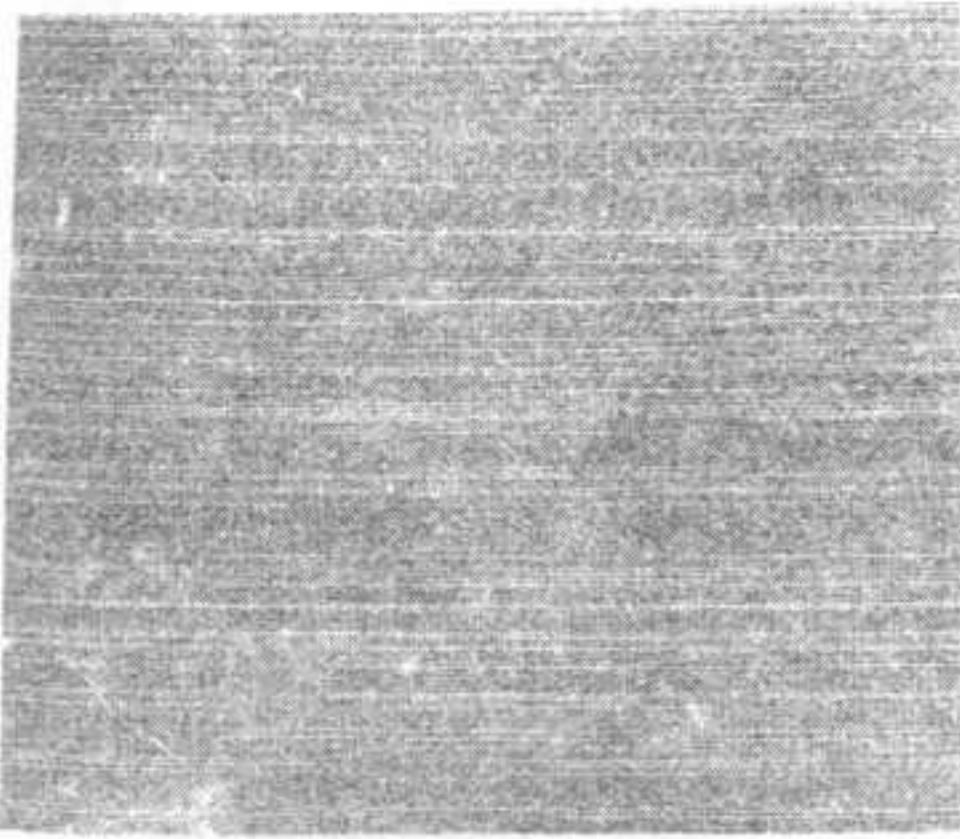
г



б



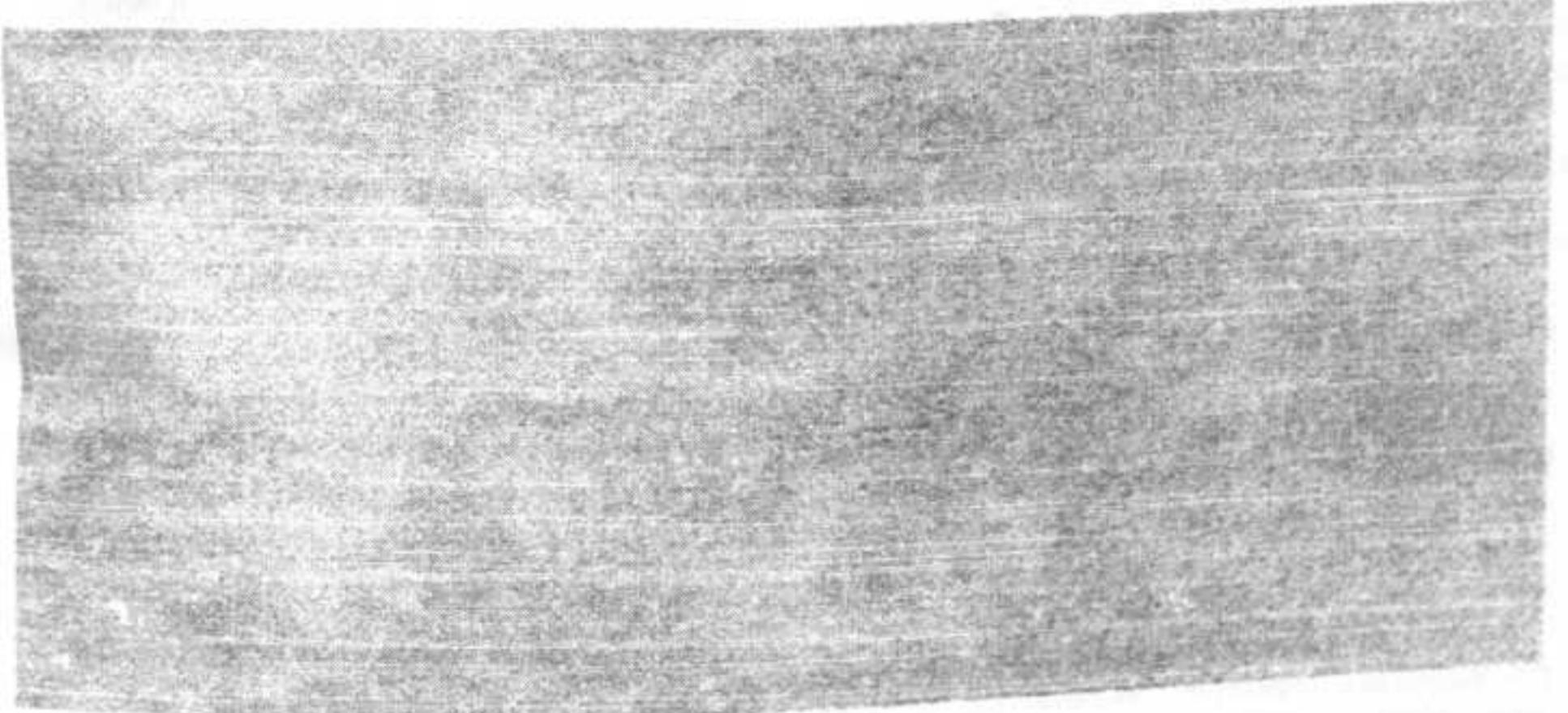
д



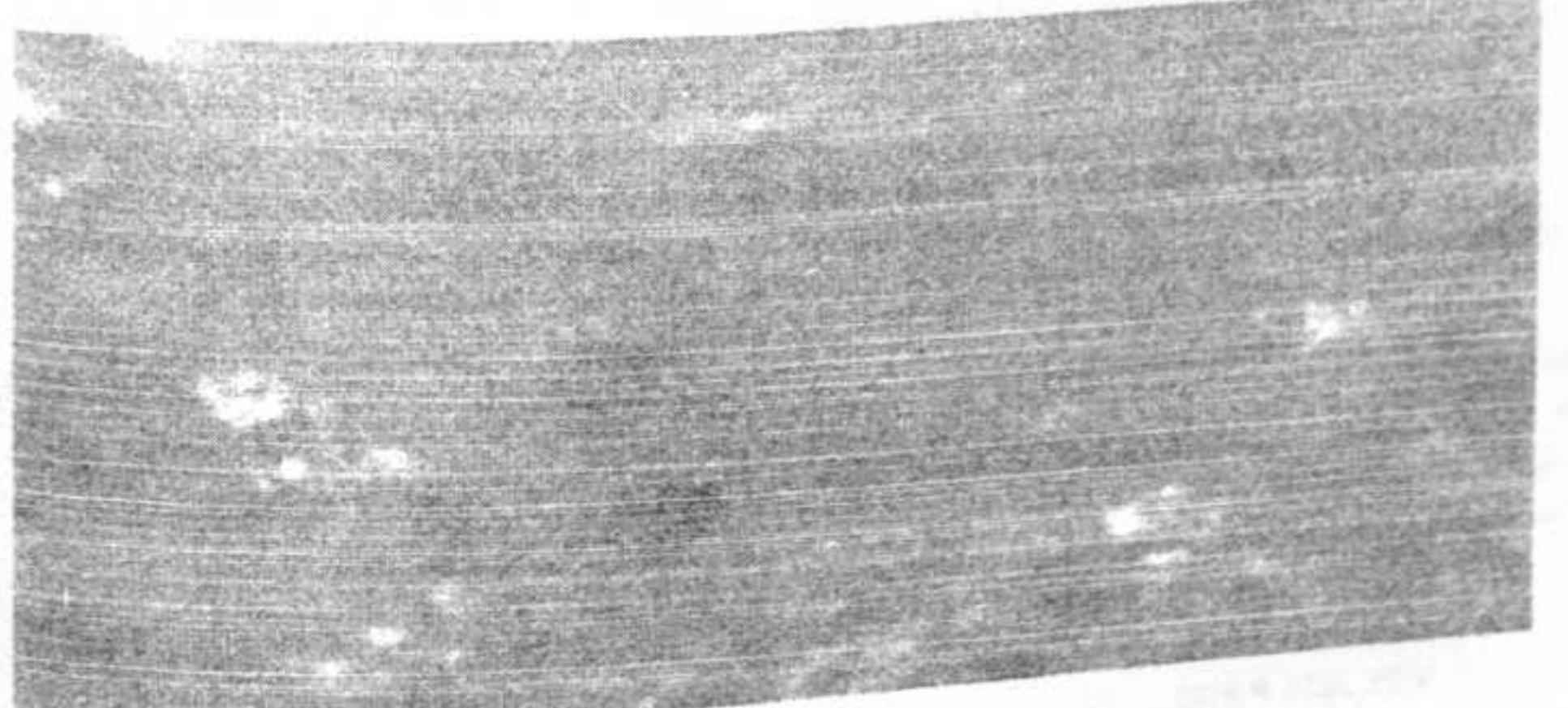
e



3



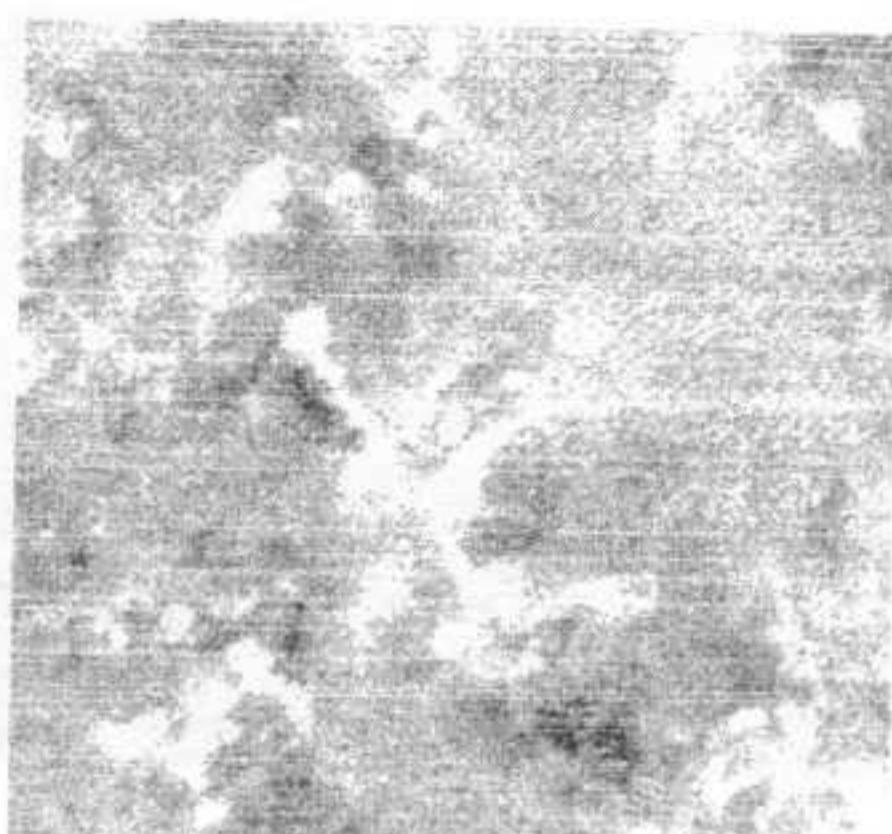
ж



и



К



Л

Рис. 3. Морфологія поверхні (витримка 3 доби; концентрація солей – 0,10 мас %; збільшення × 200). Склад: а – ПАА + ZnSO<sub>4</sub>; б – ПАА + CuSO<sub>4</sub> · 5H<sub>2</sub>O; в – ПАА; г – ПАА + NaKMC + ZnSO<sub>4</sub>; д – ПАА + NaKMC + CoSO<sub>4</sub>; е – ПАА + NaKMC + CuSO<sub>4</sub> · 5H<sub>2</sub>O; ж – ПАА + NaKMC; з – NaKMC + ZnSO<sub>4</sub>; и – NaKMC + CoSO<sub>4</sub>; к – NaKMC + CuSO<sub>4</sub> · 5H<sub>2</sub>O; л – NaKMC

## Висновок

В результаті проведених досліджень, встановлено, що за допомогою вибраних солей можливе регулювання pH водних розчинів, на основі NaKMC і ПАА, в діапазоні 5,0-9,57 pH з кроком 0,5.

Аналіз морфології поверхні вказує, що зміна pH модифікує структуру покриття. Це свідчить про зміну (підсилення чи послаблення) гідрофобної агрегації ПАВ.

Проведені дослідження свідчать про можливість заміни дорогих, хімічно очищених водорозчинних полімерів, використовуваних для отримання частково зшитих гелей різного призначення з необхідним рівнем pH на один або два суміщених полімера (ПАА, NaKMC) з домішками солі.

## Список використаних джерел

1. Yang Yu // J. Macromol. Sci., Phys. 2004. V.43. №4. P. 845
2. Rivas B.L., Pereira E.D. Moreno-Villalada L // Prog. Polym. Sci. 2003. V.28. №1. P.173
3. Mutkumar M. // Macromolecules. 2002. V.35. №24. P.9142.
4. Сулайменов И.Э. и др.// Вестник НАН Республики Казахстан. 2005. №6. С.157.

5. Сулайменов И.Э, Рустемова Э.М., Бектуров Е.А. // ВМС. Сер. А. 2007, Т.49, №3. С.489.
6. Балашова О.А., Павлов А.С., Халатур П.Г. // ВМС. Сер. А. 2007, Т.49, №3. С.481.
7. Влияние электролита на растворимость и геометрические характеристики макромолекул NaKMC и метилцеллюлозы в воде / А.Д. Миланов, А.Н. Прусо; Инст-т неводных раст-р НАН РФ. - Иваново, 1994. - 31 с. - Деп. в ВИНИТИ 04.05.94, №1074-В94
8. Каргин В.А. // Успехи химии. - 1966. - №5. - С. 1006–1012.
9. Абрализон А.А. Поверхностно-активные вещества. - Л.: Химия, 1979.
10. Глинка Н.Л. Общая химия: Учебное пособие для вузов. - 23-е изд., испр.- Л.: Химия, 1983. - 704 с.
11. Pesetskii S.S., Jurkowski B., Storozhuk I.P., Koval V.N. // J. Appl. Polym. Sci. 1999. V.73. №10. P.1823.
12. Рабинович В.А., Хавин З.Я. Краткий хим. справ. Изд. 2-е. Л.:Химия, 1978. - 392 с.

Надійшла до редколегії 18.02.09

УДК 539.213

В.І. Лисов, д.ф.м.н., проф.,  
В.В. Яриш\*, асп.

## Фазове розшарування рідких бінарних сплавів 3d-перехідних та благородних металів

Розраховані відносні інтегральні термодинамічні функції: енталпія, ентропія, енергія Гіббса сплавів на основі 3d-перехідних та благородних металів. Електронами провідності вважаються лише s-електрони. Роль d-електронів, частково заповненої d-оболонки зводиться до резонансного розсіяння s-електронів на d-станах. Взаємодія s-електронів з іонною підсистемою, що не містить частково заповнених d-станів, описується нелокальним модельним псевдо-потенціалом електрон-іонної взаємодії. Взаємодія s-та d-електронів описується потенціалом гібридизації s- і d-станів. Отриманий аналітичний вираз для відносної інтегральної енергії Гіббса є функцією різниці величин однорідної частини електронної густини компонент сплаву і при близькому значенні цих величин сплави близькі до ідеальних.

**Ключові слова:** нелокальний псевдо-потенціал, фазове розшарування, вільна енергія Гіббса.

V. I. Lysov, Dr.Sc., Prof.  
V. V. Yarysh\*, PhD stud.

## Phase stratification in liquid binary alloys of 3d-transition and noble metals

The relative integral enthalpy, entropy, Gibbs energy in liquid binary alloys of 3d-transition and noble metals are carried out. We considered the contribution to conductivity from the s-electrons, described within the model of nearly free electrons. The role of the partially occupied d-bands is reduced to resonance scattering of the s-electrons on d-states. The interaction of the s- and d-electrons is described by the hybridization potential of s- and d-states. The interaction with the ions, not including the partially occupied d-states, is described using the nonlocal model pseudopotential of the electron-ion interaction. The new equations describing relative integral Gibbs energy is function of difference between the electron densities of the alloy components and liquid binary alloys close to ideal alloys when this difference is minimal.

**Key words:** nonlocal pseudopotential, phase stratification, Gibbs free energy.

\*E-mail: yarysh@ukr.net

### Вступ

Термодинамічною умовою фазового розшарування вважають S-подібну форму концентраційної залежності відносної вільної енергії Гіббса для довільної температури  $\Delta G(C_2, T) = \Delta H(C_2, T) - T\Delta S(C_2, T)$ .

Особливостю перехідних металів є наявність у них перекриття зон s- і d-електронів, яке призводить до сильного перемішування (гібридизації) s- і d-станів і появи в енергетичною спектрі області резонансних енергій. Ці обставини, очевидно, були причиною того, що досягнення теорії в описі фізичних властивостей перехідних металів є скромнішими, ніж для простих металів.

У загальному випадку псевдо-потенціал за способом визначення є нелокальним

інтегральним оператором. Нелокальним у принципі повинен бути і модельний потенціал (МП), за допомогою якого апроксимується електрон-іонна взаємодія. У деяких випадках локальна апроксимація МП приводить до доброго узгодження теоретично розрахованих і експериментальних даних.

### Нелокальний модельний псевдо-потенціал перехідних

Псевдо-потенціал перехідних металів має наступну структуру:  $W = W^0 + W^x$ , де  $W^0$  є аналогом псевдо-потенціалу простого металу, в якості якого обрано нелокальний модельний псевдо-потенціал Дутчака - Якібчука - Жовтанецького [1, 2]:

$$W_0^{ABE}(r) = -\frac{Ze^2}{r} + \sum_{i=0}^{j_0} e^{-\frac{r}{R_i}} \left( A_i + \frac{Ze^2}{r} \right) P_i, \quad (1)$$

Представлено: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

де  $A_l$  і  $R_l$  - параметри МП;  
 $P_l = \sum_{m=-l}^l |Y_l^m\rangle\langle Y_l^m|$  - проекційний оператор,  $l$ ,  
 $m$  - орбітальне та магнітне квантові числа  
 відповідно,  $Y_l^m(\vartheta, \phi)$  - кутова частина  
 хвильової функції. Підсумовування в другому  
 доданку формули (1) проводиться тільки за  
 тими значеннями орбітального квантового  
 числа  $l$ , для яких існують зв'язані стани в  
 іонному залишку;  $W^k$  - гібридизаційний  
 потенціал, який описує  $s-d$ -взаємодію [3]:

$$W^k = \sum_d \frac{\Delta(\vec{r})|d\rangle\langle d|\Delta(\vec{r})}{E_s - E_d}. \quad (2)$$

Оператор  $\Delta(\vec{r})|d\rangle$  означений наступним  
 чином  $\Delta(\vec{r}) = \delta V - \langle d|\delta V|d\rangle$ . Якщо б потенціал в  
 металі був такий самий як в атомі, то атомні  $d$ -  
 стани були б власними функціями і для метала  
 і не існувало б матричних елементів  
 гамільтоніана з іншими станами. Насправді ж  
 атомний потенціал в металі відрізняється на  
 деяку величину  $\delta V(\vec{r})$  і існують відмінні від  
 нуля матричні елементи  $\langle \vec{k}|H|d\rangle = \langle \vec{k}|\delta V|d\rangle$ , що  
 гібридизують  $d$ -стани із станами вільних  
 електронів.

### Відносні інтегральні термодимачні функції рідких бінарних сплавів 3d-перехідних та благородних металів

Повну внутрішню енергію рідких  
 перехідних металів і сплавів у другому  
 порядку теорії збурень за псевдопотенціалом  
 (в розрахунку на один іон) представляється у  
 формі [4]:

$$E = E_e + E_{\text{діел}} + E_{\text{ел-ко}} + E_{\text{сп-ко}}. \quad (3)$$

Де  $E_e = \frac{3}{5} Z \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + E_{\text{ід-ко}}$  - енергія  
 взаємодіючого однорідного електронного газу,  
 $E_{\text{ел-ко}}$  - обмінно-кореляційна енергія,

$$E_{\text{сп-ко}} = -0.458 \frac{Z e^2}{r_s} + \frac{Z e^2}{2a_0} \left[ -0.115 + 0.031 \ln \frac{r_s}{a_0} \right]$$

$(r_s = \left( \frac{3V}{4\pi Z} \right)^{\frac{1}{3}}, V = \frac{N}{N_A}, N$  - молярний об'єм  
 рідкого металу,  $N_A$  - стала Авогадро,  $Z$  -  
 валентність металу,  $a_0 = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ fm}$  -  
 борівський радіус).

$E_{\text{діел}}$  - енергію взаємодії однорідного  
 розподілу електронів провідності з іонним  
 залишком з урахуванням гібридизації  $s$ -і  $d$ -  
 зон:

$$\begin{aligned} E_{\text{діел}} = E_{\text{діел}}^0 + E^k &= Z \lim_{q \rightarrow 0} \left[ W^0(k, q) + \frac{4\pi Z e^2}{vq^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_k \sum_d \frac{\langle \vec{k} |\Delta(\vec{r}) |d \rangle \langle d | \Delta(\vec{r}) | \vec{k} \rangle}{E_k - E_d} = \quad (4) \\ &= Z \lim_{q \rightarrow 0} f(k_F, q) + \frac{3}{5} Z \cdot \frac{5h^2 k_F^2}{2\pi m} \left( \frac{r_d}{r_0} \right)^3. \end{aligned}$$

де  $w_0(k, q)$  - формфактор псевдопотенціалу.  
 $\langle \vec{k} + \vec{q} | W^0(\vec{r}) | \vec{k} \rangle = W^0(k, q) = V_q + f(k, q)$   
 $V_q = -\frac{4\pi Z e^2}{vq^2}$  - фур'є - зображення  
 кулонівського потенціалу,  $f(k, q)$  -  
 матричний елемент нелокальної частини МП,  
 $r_d$  - радіус  $d$ -стану, який є характеристикою  
 атома [3].

$E_{\text{ел-ко}}$  - електростатична енергія додатніх  
 точкових іонів в однорідному компенсуючому  
 полі, яка згідно з [4] дорівнює

$$E_{\text{ел-ко}} = -\frac{1}{2} \frac{Z^3 e^2}{r_0} \alpha_M, \quad \text{де } \alpha_M - \text{ стала}$$

Маделунга, яка для рідких металів має  
 приблизно однакове значення для всіх рідких  
 металів і дорівнює  $\alpha_M = -0.735$ .

Енергія зонної структури рідкого  
 металу визначається наступним чином [4]:

$$E_{\text{сп-ко}} = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty a(q) F(q) q^2 dq, \quad (5)$$

де  $F(q)$  - характеристична функція зонної  
 структури:

$$F(q) = \frac{vq^2}{8\pi e^2} \frac{1 - \varepsilon(q)}{\varepsilon'(q)} [V_q + f(k_F, q)]; \quad (6)$$

$\varepsilon(q)$  - діелектрична проникність в  
 наближенні Хартрі,  $a(q)$  - структурний  
 фактор рідкого металу, який будемо  
 визначається в рамках моделі твердих сфер.

Енергія основного стану електронної  
 густини рідкого бінарного сплаву визначається  
 аналогічно чистим компонентам, але  
 необхідно покласти для сплаву,

$$k_F^{sp} = \left( \frac{3\pi^2 Z_{sp} N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad r_s^{sp} = \left( \frac{3V}{4\pi Z_{sp} N} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{де}$$

$Z_{cp} = c_1 Z_1 + c_2 Z_2$  - середня валентність,  $V$  - молярний об'єм сплаву.

Енергія  $E_{\text{сплав}}$  рідкого бінарного сплаву перехідних металів:

$$E_{\text{сплав}}^{\text{cp}} = E_{\text{сплав}}^0 + E_{\text{cp}}^x = \\ = Z_{cp} \left[ c_1 \lim_{q \rightarrow 0} f_1(k_F, q) + c_2 \lim_{q \rightarrow 0} f_2(k_F, q) \right] + \\ + \frac{3}{5} Z_{cp} \cdot \frac{5h^2 k_F^2}{2\pi m r_{0, cp}^3} [c_1 r_{d1}^3 + c_2 r_{d2}^3] \quad (7)$$

де  $f_1(k, q)$ ,  $f_2(k, q)$  - матричний елемент нелокальної частини МП чистих компонент у сплаві відповідно.

Використовуючи аналітичні вирази для внутрішньої енергії сплаву та його компонентів, теплоту утворення сплаву  $\Delta H$  обраховується за формулою:

$$\Delta H = \Delta E(V_0) + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{V_0} \Delta V. \quad (8)$$

Для розрахунку величини відносної інтегральної ентропії  $\Delta S$  та зміни об'єму  $\Delta V/V_0$  при утворенні сплаву будемо використовувати вирази [5]:

$$\Delta S = -R[c_1 \ln c_1 + c_2 \ln c_2] + R[1 + y(\eta_0)] \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \tilde{n}_1 \tilde{n}_2 \frac{V_2 - V_1}{D_0 R} \left[ \left( \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right)_T - \left( \frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right)_T \right]$$

$$- \frac{V_0}{D_0 RT} \left[ \frac{\partial \Delta E}{\partial V_0} + \frac{\partial \Delta E}{\partial V_1} + \frac{\partial \Delta E}{\partial V_2} \right]$$

$$\text{де } D_0 = \left[ \frac{V_0^2}{RT} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial V_0^2} \right)_T - \frac{V_0^2}{R} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial V_0^2} \right)_T \right],$$

$y(\eta_0) = 9,7$  - параметр в моделі твердих,  $\eta_0$  - щільність пакування.

Відносна інтегральна енергія Гіббса

$$\Delta G = \Delta E(V_0) + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{V_0} \Delta V - \\ - RT \left[ (1 + y(\eta_0)) \frac{\Delta V}{V_0} - c_1 \ln c_1 - c_2 \ln c_2 \right] \quad (10)$$

На рис.1 представлені результати розрахунку концентраційної залежності відносної енталпії  $\Delta H$  (формула 8) для рідких сплавів заліза з благородними металами: міддю, сріблом, золотом в залежності від концентрації другого

компоненту (заліза). На рис.2 - рис.4 зображені концентраційні залежності відносної інтегральної енергії Гіббса  $\Delta G$  (формула 10) сплавів CuFe, AuFe, AgFe для трьох температур: T=1800K, 2100K, 2400K в залежності від концентрації другого компонента.

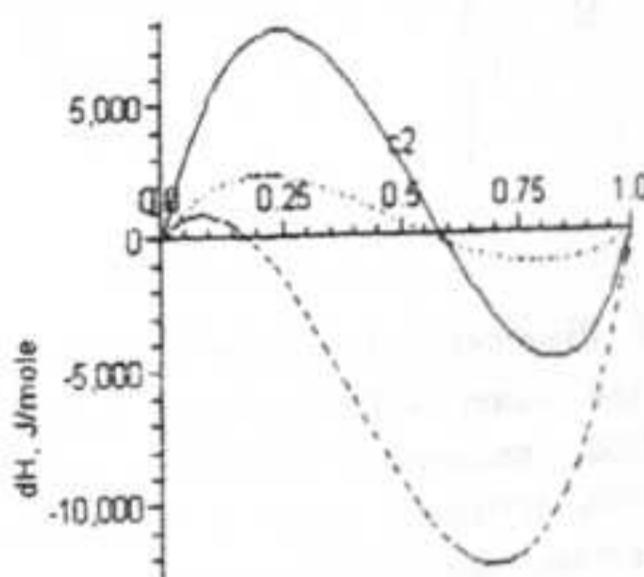


Рис.1 Концентраційна залежність відносної інтегральної енталпії  $\Delta H$  для сплавів: AgFe (суцільна лінія), AuFe (крапками), CuFe (пунктиром) в залежності від концентрації другого компонента.

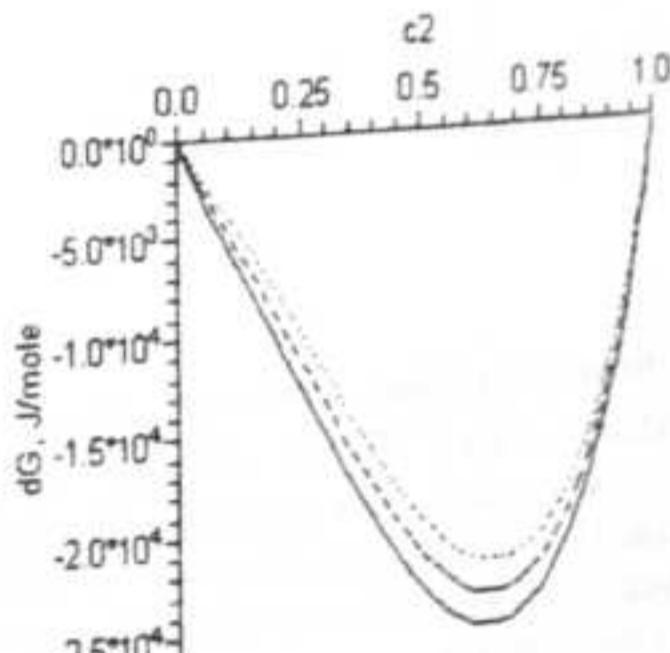


Рис.2 Концентраційна залежність відносної інтегральної енергії Гіббса  $\Delta G$  для сплаву CuFe для трьох температур: T=1800K (крапками), T=2100K (пунктиром), T=2400K (суцільна лінія) в залежності від концентрації другого компонента.

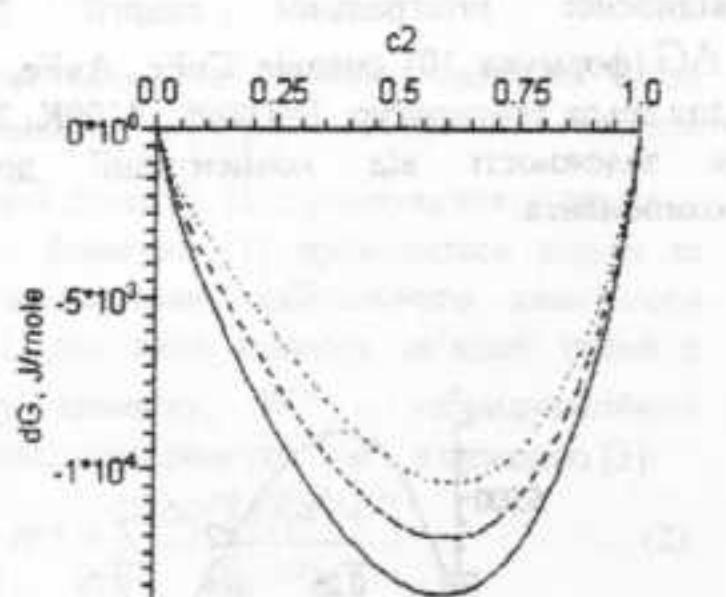


Рис.3 Відносна інтегральна енергія Гіббса  $\Delta G$  для сплаву AuFe для трьох температур:  $T=1800\text{K}$  (крапками),  $T=2100\text{K}$  (пунктиром),  $T=2400\text{K}$  (суцільна лінія) в залежності від концентрації другого компонента.

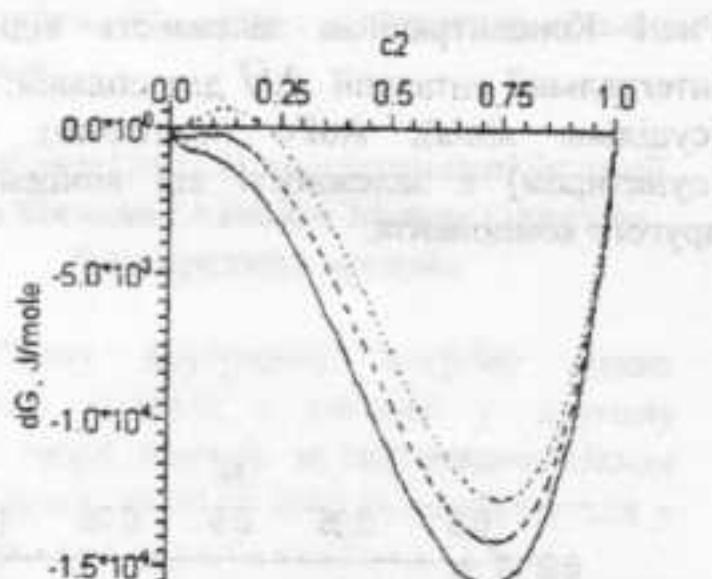


Рис.4 Концентраційна залежність відносної інтегральної енергії Гіббса  $\Delta G$  для сплаву AgFe для трьох температур:  $T=1800\text{K}$  (крапками),  $T=2100\text{K}$  (пунктиром),  $T=2400\text{K}$  (суцільна лінія) в залежності від концентрації другого компонента.

Як видно із концентраційних залежностей відносної інтегральної енергії Гіббса для розглянутих сплавів перехідного металу з благородними металами в рідкій фазі  $S$ -подібну форму цих кривих має сплав заліза тільки з сріблом. Цей факт підтверджено

діаграмами стану [6]. Вочевидь, його можна пояснити співвідношенням величин однорідної частини електронної густини компонентів сплаву, яка в різних формах входить у всі складові внутрішньої енергії сплаву.

### Висновки

1. Вперше розраховані в рамках методу псевдопотенціалу з використанням першопринципного псевдопотенціалу основні термодинамічні властивості бінарних сплавів на основі благородних і  $3d$ -перехідних металів.
2. Встановлено, що тільки в сплавах із сріблом спостерігається розшарування в рідкій фазі. Цей факт пов'язується із різним співвідношенням величин однорідної частини електронної густини компонентів сплаву.

### Список використаних джерел

1. Жовтанецький М.І., Гурський З.А., Дутчак Я.И., Якибчук П.Н. Метод модельного псевдопотенціала в теории переходных металлов // Металлофизика. – 1983. – 5, №1 – с. 22-28.
2. Юхновский И.Р., Гурский З.А. Квантово-статистическая теория неупорядоченных систем. – К.: Наукова думка, 1991. – 288 с.
3. Харрисон У. Электронная структура и свойства твердых тел. Т.2, М.:Мир, 1983. – 316 с.
4. Харьков Е.И., Лысов В.И. Федоров В.Е. Физика жидкких металлов. – К.: Вища школа, 1979. – 248 с.
5. Харьков Е.И., Лысов В.И. Федоров В.Е. Термодинамика металлов. - К.: Вища школа, 1982. – 248 с.
6. Диаграммы состояния двойных металлических систем. Справочник под ред. Н.П. Лякишева. - Москва: Машиностроение, 1996. – 992 с.

Надійшла до редколегії 23.02.2009р

УДК 519.9

Ломакіна О.В., асп.,  
Шайкевич І.А., д. ф.-м. н., проф.

## Спектроеліпсометричні властивості тонких плівок молібдену з переходним шаром між плівкою і діелектричною підкладкою при збудженні поверхневих полярітонів

Проведені розрахунки спектральних залежностей еліпсометричних параметрів, а саме азимута відновленої лінійної поляризації  $\Psi$  і зсуву фаз між  $p$  і  $s$  компонентами відбитої хвилі  $\Delta$ , для тонких плівок молібдену (Mo), нанесених на кварцові ( $SiO_2$ ) та сапфирові ( $Al_2O_3$ ) підкладки з переходним шаром окису  $MoO_3$  на межі поділу металічна плівка – діелектрична підкладка. Цей переходний шар відповідає за адгезію плівки Mo до підкладки. Розрахунки проводились за формулами Еїрі в конфігурації збудження поверхневих полярітонів за методом Кречмана. Одержані результати показали, що еліпсометричні вимірювання при збудженні поверхневих полярітонів дають можливість досліджувати переходні шари між плівкою Mo і підкладкою з кварцу чи сапфіру товщиною до 0,1 нм. Крім того, залежності  $tg\Psi$  від довжини хвилі  $\lambda$  дають можливість виявити і дослідити міжзонні переходи в молібдені.

**Ключові слова:** еліпсометричні дослідження, полярітони, азимут відновленої лінійної поляризації  $\Psi$ , зсув фаз  $\Delta$ .

E-mail: nostra@univ.kiev.ua

### Вступ

В роботі [1] були проведені дослідження залежностей еліпсометричних параметрів від кута падіння на зразок світла, відбитого від

Lomakina O.V., post - graduate,  
Shaykevych I.A., professor, d.sc.

## Spectroelipsometric properties of thin Mo films with transition layer at Mo film – insulator substrate interface at surface polaritons stimulating

Performed spectral dependencies calculations of ellipsometric parameters such us azimuth of recovered linear polarization  $\Psi$  and phase shift between  $p$  and  $s$  components in reflected wave  $\Delta$  for thin Mo films-sapphire or quartz insulator substrate with transition coat of  $MoO_3$  oxide at metal film-insulator substrate interface. This transition responsible for film to substrate adhesion.

Calculations was performed using Eyring's formulas in configuration with Kretschmann method stimulated surface polaritons.

It is shown, that polariton ellipsometric methods allows researching transition layers between Mo film and sapphire or quartz substrate with minimum thickness 0.1 mm. Also, dependencies  $tg\Psi$  of wavelength  $\lambda$  allows discover and research interband transitions in molybdenum.

**Key Words:** ellipsometric research, polaritons, an azimuth of recovered linear polarization  $\Psi$ , a phase shift  $\Delta$

тонких плівок Mo, нанесених на кварцові ( $SiO_2$ ) і сапфирові ( $Al_2O_3$ ) підкладки з переходним шаром окису між плівкою і підкладкою при збудженні поверхневих полярітонів за методом Кречмана. Такі залежності дають можливість

Представлено: д. ф.-м. н., проф. Адаменко І.І.



самих міркувань. Товщини переходного шару для різних кривих вказані цифрами на рис.1.

Аналізуючи хід кривих на рис.1, приходимо до наступних міркувань. По-перше, поляритонний мінімум, який спостерігається при  $\lambda \sim 600$  нм зміщується при збільшенні товщини шару окису в бік більших довжин хвиль, самі залежності  $\text{tg } \Psi$  від довжини світлової хвилі  $\lambda$  при цьому також змінюються. Розрахунки показують, що при чутливості сучасних електроеліпсометрів з електричною реєстрацією сигналу цілком можливо зафіксувати шар окису товщиною в 0.1 нм. з допомогою саме спектроеліпсометричних досліджень. По-друге, як показано в [9], в молібдені спостерігається потужна широка смуга поглинання (оптичної провідності), зумовлена сукупністю різних міжзонних переходів в металі. Ця смуга охоплює діапазон енергій фотонів від 6 еВ до 0.5 еВ, з максимумом при енергії порядку 4 еВ. На рис.1 видно, що в районі  $\lambda = 600 - 400$  нм явно спостерігається смуга  $\text{tg } \Psi$ . Цей діапазон довжин хвиль відповідає енергіям фотонів 2 еВ – 3 еВ. В подальшому, якщо рухатися в бік зменшення  $\lambda$  до 200 нм, спостерігається зростання  $\text{tg } \Psi$ , при цьому максимум, відповідний енергії 4 еВ (рис.1) не спостерігається. Можна вважати, що залежність величини  $\text{tg } \Psi$  від  $\lambda$  дає уявлення про міжзонні переходи в молібдені. В бік великих довжин хвиль на рис.1 величина  $\text{tg } \Psi$  монотонно зростає, що обумовлене наявністю вільних електронів в молібдені.

На рис.2 наведена залежність  $\text{tg } \Psi$  від  $\lambda$  для тієї ж плівки молібдену і при тих же товщинах переходного шару окису, що й на рис.1. Відмінність полягає в тому, що на рис.2

представлені залежності для іншого кута падіння світла –  $\phi = 41^\circ$  – цей кут дуже близький до граничного кута повного внутрішнього відбивання. З рис. 2 видно, що в районі  $\lambda \sim 900$  нм спостерігається потужний максимум для величини  $\text{tg } \Psi$ . В [9] теж спостерігається максимум на кривій оптичної провідності при такій самій енергії фотонів (довжині хвилі  $\lambda$ ), але він не такий значний, як на рис. 2. Все ж таки, ми вважаємо, що ці максимуми можна співставити.

Отже, міжзонні переходи можна спостерігати для тонкої плівки Mo і при куті падіння  $41^\circ$ . Для тонкої плівки Mo, написаної на сапфірову підкладку, криві залежності величини  $\text{tg } \Psi$  від довжини хвилі  $\lambda$  цілком аналогічні тим, що наведені на рис.1 і рис.2, з тією різницю, що вони дещо витягнуті вздовж  $\lambda$  за рахунок різниці показників заломлення підкладок з кварцу і сапфіру. З цієї причини вони не представлені в даній

роботі.

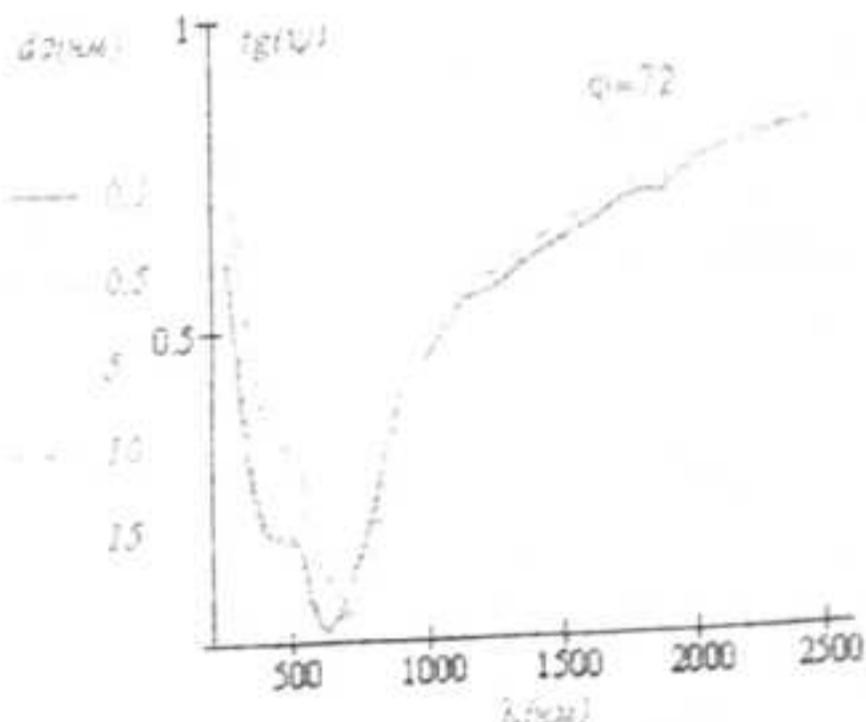


Рис.1. Залежність азимуту відновленої лінійної поляризації  $\text{tg } \Psi$  від довжини світлової хвилі при куті падіння  $\phi = 72^\circ$ .

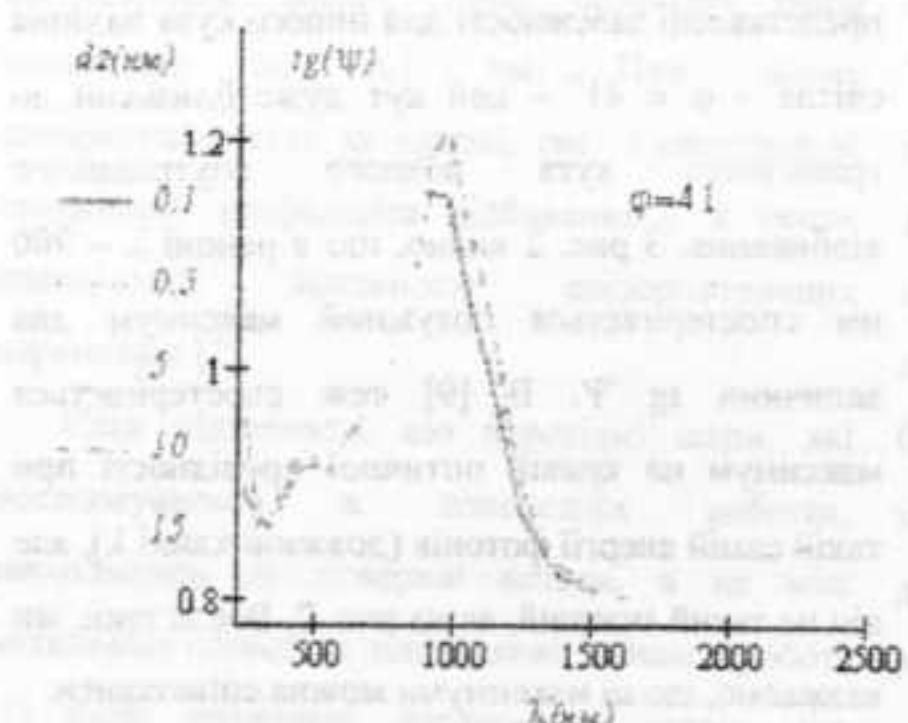


Рис.2. Залежність азимута відновленої лінійної поляризації  $\text{tg}\Psi$  від довжини світлової хвилі при сталому куті падіння  $\phi=41^\circ$ .

### Висновки

Показано, що проміжний переходний шар окису  $\text{MoO}_3$  між плівкою молібдену і кварцову чи сапфіровою підкладкою може бути виявленний і досліджений за допомогою спектроеліпсометричних вимірювань при збудженні поверхневих полярітонів за методом Кречмана. Еліпсометричні вимірювання дозволяють виявити такий шар товщиною всього в 0,1 нм. Аналіз спектральних кривих залежності  $\text{tg}\Psi$  – тангенса азимута відновленої лінійної поляризації – показує, що і для тонких плівок молібдену, як це раніше було виявлено для високо провідних металів [2], залежності  $\text{tg}\Psi$  від довжини хвилі  $\lambda$  можуть бути використані для аналізу міжзонних переходів в молібдені.

### Список використаних джерел

- Ломакіна О.В., Шайкевич І.А. Еліпсометричні дослідження із збудженням поверхневих полярітонів переходного шару на межі поділу тонка плівка Mo – діелектрична підкладка. – Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки 2007, вип.1, с.385-389.
- І.А.Шайкевич, Я.А.Шибіко, Л.Ю.Мельниченко, В.В. Пророк. Спектральні залежності еліпсометричних параметрів тонких плівок високопровідних металів при збудженні поверхневих полярітонів. – Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки 2007, вип.2, с.367-370.
- Е.М. Бори, Э. Вольф. Основы оптики. – Москва, Наука, 1970, 855 с.
- Шайкевич С.С., Костюк Б.Д., Колесниченко Т.А. Адгезия и оптические свойства тонких металлических пленок молибдена и ванадия, нанесенных на неметаллические материалы. Сб. Адгезия расплавов. – Киев, Наукова думка, 1974, с. 42-47.
- Трайдук С.Ф., Шайкевич И.А. Оптические и электрические свойства тонких пленок молибдена и никеля, напыленных с помощью вакуумного дугового разряда. Тезисы II Всесоюзной конференции по физике и технологии пленок. – Ивано-Франковск, 1984, ч.1, стр.201.
- Deb S.K. Physical properties of transition metal oxide: optical and photoelectrical properties of single crystal and thin film molybdenum trioxide. – Proc. Roy. Soc., 1968, A304, №1477, p.211-231.
- Е.М. Воронкова, Б.Н. Гречушников, Г.И. Дистлер, И.П. Петров. Оптические материалы для инфракрасной техники. – Москва, Наука, 1965, 335 с.
- Weaver J.H., Krafka C., Lynch D.W., Koch E.E. Optical properties of metals. v.I, II. – Internal Report D.E.S.J.F41., Hasylab, 81/01, 1981, 172р., 256 р.
- М.М.Носков. Оптические и магнитооптические свойства металлов. – Свердловск, 1983, 218с.

Надійшла до редколегії 19.09.08

УДК 621.315.59

Мельниченко М.М., к.ф.-м.н., ст.н.с.

## Вплив термічного відпалу на процеси формування та властивості наноструктурованого кремнію

У роботі проведено детальне дослідження структурних і фотолюмінесцентних властивостей, а також елементного складу пілок наноструктурованого кремнію. Встановлено, що модифікація поверхні пілок монокристалічного кремнію шляхом їх високотемпературного відпалу приводить до збільшення інтенсивності фотолюмінесценції пілок наноструктурованого кремнію, сформованих на них, у ~ 1.5-2 рази. Отримані результати пояснюються на основі структурних змін, що приводять до більш активного процесу формування наноструктурованого кремнію на відпаленіх пілок. Показано, що зміна елементних властивостей наноструктурованого кремнію при відпалі залежить не тільки від перебудови наноструктури, але і від зміни його елементного складу.

**Ключові слова:** монокристалічний кремній, наноструктурований кремній, фотолюмінесценція.

E-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

В останні роки інтенсивно проводяться дослідження поверхневих напівпровідникових наноструктур завдяки можливості їхнього застосування в нових нанорозмірних пристроях, принцип роботи яких засновано на квантових ефектах. Яскравим прикладом таких наноструктур є наноструктурований (нанопоруваний) кремній, властивості якого в значній мірі залежать від методу та режимів формування. Так з метою збільшення фотолюмінесцентних (ФЛ) властивостей багато дослідників пропонують використовувати оптимальні режими формування наноструктурованого кремнію, обробку різними речовинами, швидке термічне окислювання. Однак, як відомо, на ФЛ властивості наноструктурованого кремнію можуть також впливати і параметри пілок, тип провідності напівпровідника, кристалографічна орієнтація, стан поверхні. Слід зазначити, що вивчення властивостей морфологічної форми кремнію, що

M. M. Melnichenko, senior researcher.

## Influence of thermal annealing on processes of formation and property of nanostructured silicon

In the work detailed research of structural and photo-luminescent properties, element composition of films of nanostructured silicon is conducted. It is established that modification of a surface of a substrate of single-crystal silicon by its high-temperature annealing leads to increase in intensity of a photoluminescence of nanostructured silicon in ~1.5 - 2 times. The received results can be explained on the basis of the structural changes leading to more active process of formation of nanostructured silicon on annealed substrates. It is shown that change of photo-luminescent properties of nanostructured silicon at annealing depends not only on change of nanostructure, but also from change of its element composition.

**Key Words:** single-crystal silicon, nanostructured silicon, photo-luminescent.

містить наноструктури типу ниток та кластерів нанометрового розміру, актуально як для вирішення фундаментальних проблем фізики твердотільних систем нанометрової розмірності, так і для розробки нових типів кремнієвих оптоелектронних пристроя. З аналізу літературних даних видно, що при витримці на повітря відбувається процес доокислення наноструктурованого шару, що характеризується збільшенням інтенсивності фотолюмінесценції [1], а додаткове термічне окислення наноструктурованого кремнію приводить до різкого погіршення його ФЛ властивостей [2]. Таке поводження ФЛ властивостей наноструктурованого кремнію в основному з'язують із трансформацією його монокристалічної структури [3]. При цьому дослідниками в більшості робіт недостатньо враховується вплив хімічного складу поверхні на ФЛ властивості відпалених зразків наноструктурованого кремнію.

Представлено член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Макара В.А.

Метою даної роботи було вивчення впливу високотемпературного відпалу вихідних підкладок монокристалічного кремнію на властивості наноструктурованого кремнію сформованого хімічним процесом травлення на підкладках після відпалу, а також дослідження впливу термічного відпалу в повітряній атмосфері на склад та ФЛ властивості наноструктурованого кремнію.

### Зразки і методи вимірювань

Плівки наноструктурованого кремнію одержували методом хімічного травлення (stain etching) на підкладках монокристалічного кремнію (100) орієнтації, р-типа провідності з питомим опором 1 Ом·см. Відпал підкладок проводився на повітрі в нагрівальній камері. Температура в камері підтримувалася автоматично з точністю – 5°C. Дослідження проводилися в діапазоні температур від 20°C до 1000°C. Вимірювання спектрів ФЛ наноструктурованого кремнію проводився за допомогою призмового монохроматора. Для збудження ФЛ використовувалася ксенонова лампа. Усі вимірювання проводилися при кімнатній температурі. Дослідження морфології поверхні наноструктурованого кремнію проводилося за допомогою скануючого тунельного мікроскопа (СТМ). Елементний склад поверхні наноструктурованого кремнію вивчався методом електронної оже-спектроскопії (ОЕС). Для вивчення розподілу елементів по глибині наноструктурованого кремнію поверхня досліджуваних зразків піддавалася іонному травленню зі швидкістю 30 ангстрім за хвилину.

### Результати та їхнє обговорення

Відпал підкладок монокристалічного кремнію в інтервалі температур 400-1000°C приводить до формування на поверхні плівки окису кремнію, товщина якої залежить від температури і часу відпалу. Так, наприклад, відпал при T=1000°C дозволяє формувати окисну плівку товщиною 30 нм. Товщина контролювалася методом ОЕС з пошаровим травленням (рис.1). При зануренні в розчин для одержання наноструктурованого кремнію (ns-Si), спочатку відбувається травлення окису за 10-20 секунд, а потім розпочинається процес формування шару ns-Si, що підтверджується даними ОЕС. Детальне вивчення морфології поверхні наноструктурованого кремнію на відпалених і не відпалених підкладках методом скануючої

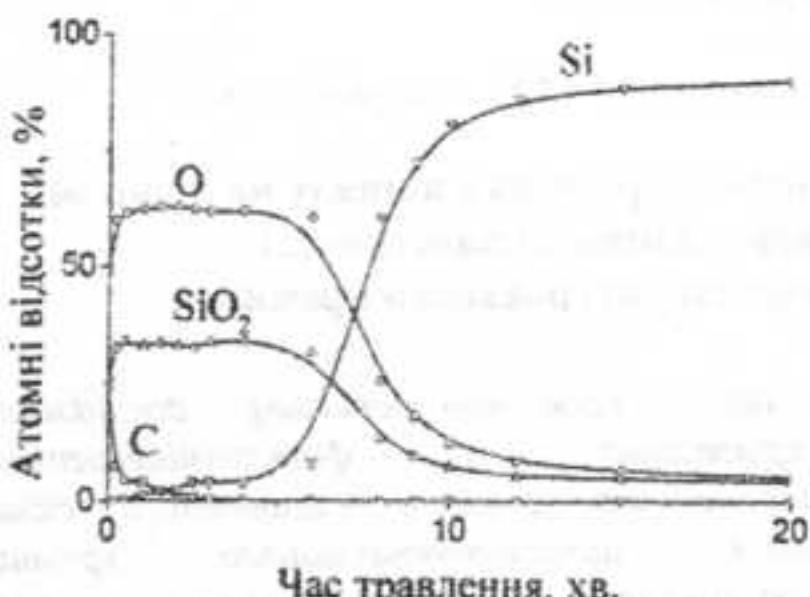


Рис.1. Концентраційні профілі елементів по глибині монокристалічної підкладки кремнію після відпалу при T=1000°C, t=2 год.

тунельної мікроскопії проведено в роботі вказує на відсутність істотних відмінностей у наноструктурі (рис.2).



Рис.2. Тривимірне зображення хімічно модифікованої поверхні монокристалічного кремнію (область сканування 1 x 1 мкм).

Використовуючи метод електронної оже-спектроскопії, у даній роботі, був вивчений хімічний склад отриманої наноструктурованої поверхні. Основними елементами досліджених модифікованих поверхонь є кисень, вуглець, кремній, діоксид кремнію і SiO<sub>x</sub>. За допомогою пошарового іонного травлення було проведено вивчення розподілу зазначених елементів по глибині наноструктурованої плівки ns-Si (рис.3). Як видно з рисунка на поверхні спостерігається значна атомна концентрація кисню і вуглецю, а кремній знаходитьться в комплексах SiO<sub>x</sub>. Слід зазначити, що в глибину плівки ns-Si, сполука зазначених елементів значно зменшується (при цьому кількість атомів кремнію різко зростає), а

при іонному стравлені приблизно 20 нм концентрація комплексів  $\text{SiO}_x$  спадає до нуля.



Рис.3. Концентраційні профілі елементів по глибині наноструктурованої плівки ns-Si.

Усі досліджувані зразки з ns-Si при ультрафіолетовому освітленні мали яскраве світіння з максимумом в області 650 нм. Отримані спектри збудження фотолюмінесценції типові для пористого кремнію і містять широку смугу у видимій області спектра з максимумом збудження 320 нм. Порівняльний аналіз спектрів фотолюмінесценції наноструктурованого кремнію на відпалених і не відпалених підкладках показав, що попередній відпал підкладок в інтервалі температур 400-1000°C привів до значної зміни фотолюмінесцентних властивостей. При цьому інтенсивність фотолюмінесценції для всіх зразків з наноструктурованим кремнієм, на відпалених підкладках, збільшилася в ~1,5 - 2 рази, а максимум фотолюмінесценції має незначне зміщення ~ 10 нм (рис.4) у довгохвильову область. Слід зазначити, що максимальне значення інтенсивності ФЛ спостерігається для зразків з наноструктурованим кремнієм сформованим на підкладках монокристалічного кремнію після відпалу при температурі T=1000°C. В той же час, істотних змін у спектрах збудження ФЛ для плівок, сформованих на попередньо відпалених підкладках, не спостерігалося. Вивчення впливу попереднього відпалу підкладок на хімічний склад плівок ns-Si проводилося методом ОЕС.

Встановлено, що попередній відпал підкладок не впливає істотно на хімічний склад плівок, однак спостерігається збільшення змісту  $\text{SiO}_x$ , як на поверхні, так і в глибину, на відміну від зразків з ns-Si, нанесених на не відпалені підкладки. Слід зазначити, що при збільшенні часу відпалу підкладок спостерігається також збільшення інтенсивності ФЛ зразків з ns-Si. Проте істотне збільшення інтенсивності ФЛ

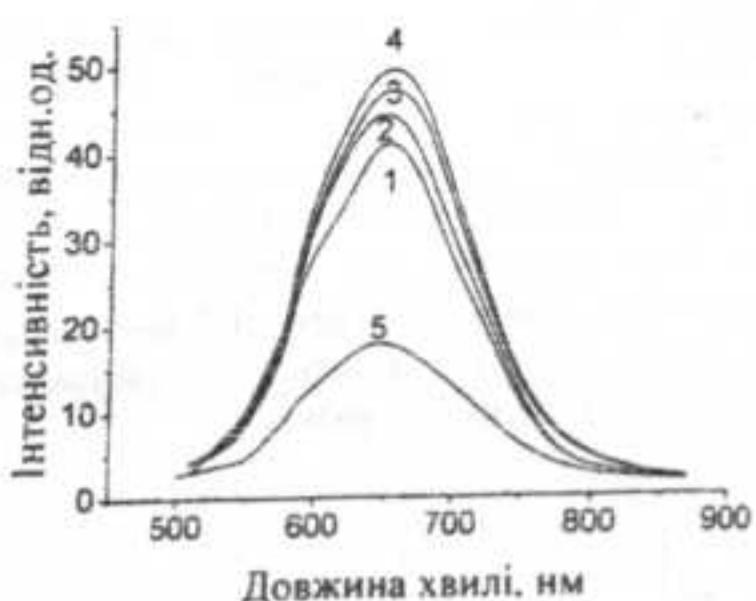


Рис. 4. ФЛ спектри зразків ns-Si, підкладки яких піддавались термічному відпалу при T=400°C (1), 600°C (2), 800°C (3), 1000°C (4) впродовж 2 годин та контрольних зразків ns-Si (5).

відбувається на початковому етапі (до 2 годин), з потім це збільшення уповільнюється (2-4 години). Отримані результати можуть бути пояснені з погляду структурних змін, що відбуваються при термообробці в поверхневих областях підкладок кремнію. Як відомо, термічний відпал призводить до утворення шару окису на поверхні, при цьому має місце релаксація механічних напруженів на межі поділу Si-SiO<sub>2</sub> (приповерхнева область Si розтягнута, а плівка SiO<sub>2</sub> стиснута) внаслідок утворення дефектів (дислокацій, точкових дефектів і їхніх скupчень), які розповсюджуються в кремнії та ініціюють процес формування ns-Si. При цьому збільшення температури та часу відпалу буде приводити до збільшення товщини окису, що в свою чергу буде приводити, до більшої напруженості границі Si-SiO<sub>2</sub>. У такому випадку, слід чекати, що утворення додаткових дефектів дозволить активізувати процес хімічного травлення, причому більш активним він буде на підкладках з більшою товщиною шару окису. Таким чином, утворення додаткових дефектів на межі поділу Si-SiO<sub>2</sub> буде стимулюючим фактором у формуванні плівки ns-Si, причому її товщина буде більшою, ніж товщина плівки, сформованої на не відпаленій підкладці. Крім того, буде збільшуватися ефективна площа поверхні ns-Si. Останнє також може приводити до збільшення інтенсивності ФЛ. Проведення відпалу на повітрі зразків з наноструктурованою плівкою в інтервалі температур 20-300°C призводить до різкого зменшення інтенсивності ФЛ, що добре узгоджується з результатами інших експериментальних досліджень [1,4]. Однак повне зникнення ФЛ властивостей

спостерігається при більш низьких температурах і значно меншому часу відпалу, що можливо пов'язане з невеликими товщинами досліджуваних плівок ns-Si (20-25 нм). Спектри ФЛ вихідного і відпаленого зразків ( $T=150^{\circ}\text{C}$ ,  $t=10$  хв. і  $T=300^{\circ}\text{C}$ ,  $t=40$  хв.) представлені на рис.5. Слід зазначити, що відпал при  $T=300^{\circ}\text{C}$  приводить не тільки до втрати ФЛ властивостей ns-Si, але і до зміни кольорового забарвлення поверхні досліджуваних зразків.



Рис.5. Спектри ФЛ не відпаленого (1) і відпалених зразків ns-Si при  $T=150^{\circ}\text{C}$ ,  $t=10$  хв.(2) та  $T=300^{\circ}\text{C}$ ,  $t=40$  хв. (3).

При цьому втрата ФЛ властивостей ns-Si після відпалу є остаточною та не зворотньою. Вивчення змін елементного складу на поверхні й у глибині плівки ns-Si до і після відпалу в інтервалі температур 20-300°C проводилося за допомогою Оже-електронної спектроскопії. Встановлено, що у відпалених зразках з ns-Si зі збільшенням температури відпалу спостерігається зменшення кількості комплексів  $\text{SiO}_x$  (рис.6а) і збільшення кількості діоксида кремнію  $\text{SiO}_2$  (рис.6б).

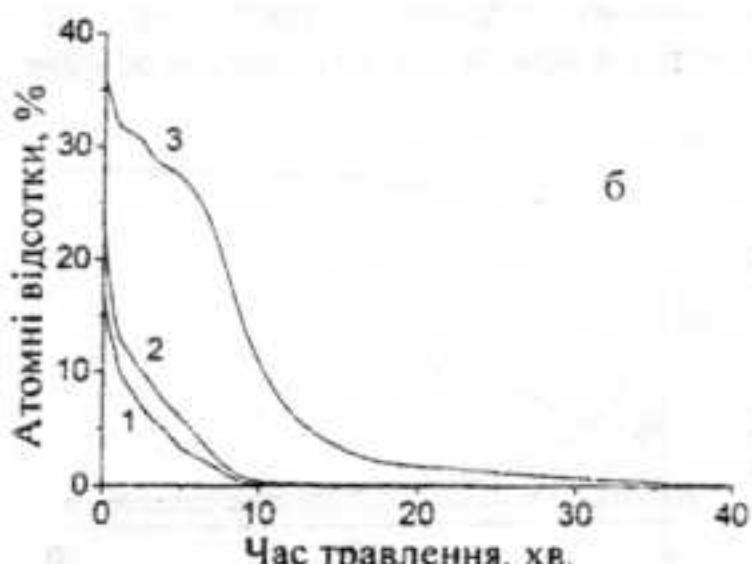
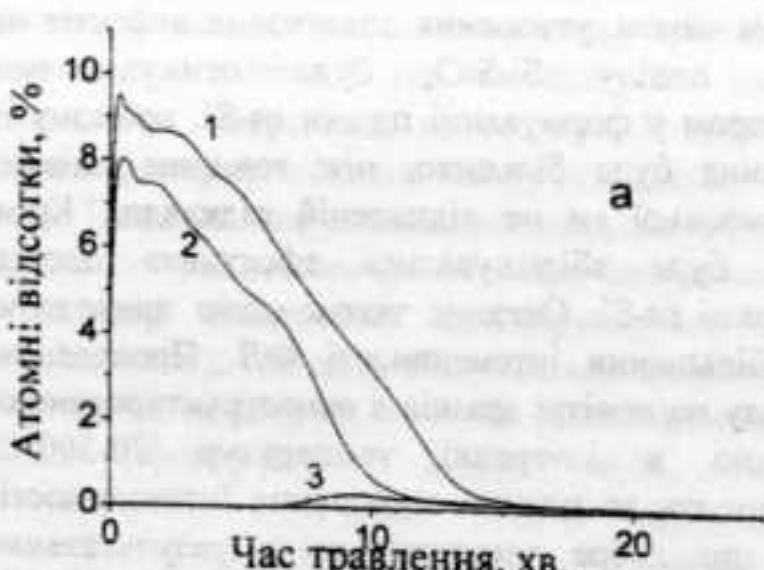


Рис.6. Концентраційні профілі  $\text{SiO}_x$  (а) та  $\text{SiO}_2$  (б) для зразків ns-Si до (1) і після проведення відпалів при температурах 150 (2) і 300°C (3).

При цьому необхідно відзначити, що величина інтенсивності ФЛ ns-Si добре корелює з вмістом  $\text{SiO}_x$  комплексів. Таким чином, аналізуючи вищесказане можна зробити висновок, що зміна ФЛ властивостей наноструктурованого кремнію при відпалі залежить не тільки від перебудови наноструктури, але і від зміни її елементного хімічного складу, на що раніше вказували автори [4] використовуючи інші незалежні методи дослідження.

#### Список використаних джерел

1. Ito T., Hiraki A. Aging phenomena of light emitting porous silicon // J.Luminescence V.57, № 1-6, 1993. – P.331-339.
2. Shelonin E.A., Naidenkova M.V., Khort A.M., Yakovenko A.G., Gvelesiani A.A. and Maronchuk I.E. Effect of thermal annealing and chemical treatment on the photoluminescence of porous silicon // Semiconductors, V.32, № 4, 1998. – P.443-445.
3. Kontkiewics A.J., Kontkiewics A.M. and etc. Evidence that blue luminescence of oxidized porous silicon originates from  $\text{SiO}$  // Appl.Phys.Lett.65, №11, 1994. – P. 1436-1439.
4. Кащаров В.М., Мануковский Э.Ю., Турецев С.Ю. Особенности окисления наночастиц Si в пористом кремнії при його відпалі в атмосфері або отжиге в потоці кислорода // Сборник трудов всероссийского семинара «Наночастицы и нанохимия» - 2000. – Р. 145.

Надійшла до редколегії 21.01.2009

УДК 539

І.В. Овсієнко, к.ф.м.н., асист.

Т.А. Лень, інж.,

Л.Ю. Мацуй д.ф.м.н., с. н. с.

## Термо-ерс нановуглецевого матеріалу, що містить багатостінні вуглецеві нанотрубки

В роботі наведено результати експериментальних досліджень електроопору та термо-ерс нановуглецевого матеріалу, що містить багатостінні вуглецеві нанотрубки. Нановуглецевий матеріал був отриманий методом низькотемпературної конверсії монооксиду вуглецю. За даними рентгенівської дифракції параметри структури багатостінних вуглецевих нанотрубок, що містяться в нановуглецевому матеріалі, близькі до параметрів структури невпорядкованого вуглецю. Вимірювання кінетичних властивостей компактованого нановуглецевого матеріалу проведено в інтервалі температур від 4.2 до 293К. Показано, що кінетичні властивості даного нановуглецевого матеріалу можуть бути описаними в рамках моделі послідовного з'єднання ділянок з різним типом провідності.

**Ключові слова:** багатостінні вуглецеві нанотрубки, електроопір, термо-ерс.

E-mail: intercalant@univ.kiev.ua

Як відомо, сирій нановуглецевий матеріал являє собою складну гетеросистему, до складу якої входять частинки аморфного вуглецю та нанографіту, вуглецеві нанотрубки та частинки металу-кatalізатору. Визначення електротранспортних властивостей таких матеріалів є досить складною задачею, оскільки ці властивості будуть визначатися цілою низкою факторів, зокрема, концентрацією та розподілом кожної з фаз, що складають НВМ, ступенем поруватості (або густину) об'ємного зразка, отриманого з порошку НВМ та іншими. Кожна з фаз, що складають НВМ, характеризується певним механізмом провідності. Провідність нанографіту описується в рамках моделі електронної структури двовимірного графіту Клейна, в якій вважається що валентна зона та зона провідності тільки торкаються одна одної в кутах зони Бріоллюена, а рівень Фермі дещо зміщений в валентну зону [1]. Така модель

I. V. Ovsienko, PhD.

T.A. Len, Eng.

L.Y. Matzui Dr. Sci., Sen. Sci. Res.

## Thermopower of nanocarbon material containing multi-walled carbon nanotubes

Paper presents the results of investigations of resistance and thermopower of nanocarbon material containing multi-walled carbon nanotubes. Nanocarbon material was produced by a low-temperature conversion of a carbon monoxide. The structure parameters of multi-walled carbon nanotubes contained in nanocarbon material are analogous to structure parameters of disordered carbon. The kinetic properties were measured in the temperature range from 4.2K to 300K. It is shown that kinetic properties of present nanocarbon material may be described by means of the model of sequential connection of islets with different conductivity.

**Key Words:** multi-walled carbon nanotubes, resistance, thermopower.

використовується для опису провідності і в багатостінних ВНТ [2]. Проте ряд авторів пропонує використовувати для опису електротранспортних властивостей багатостінних ВНТ модель стрибкової провідності із змінною довжиною стрибку (так звана сильна локалізація в системах з напівпровідниковим характером провідності при наявності локального безпорядку) [3,4]. Ця модель використовується для опису кінетичних властивостей аморфного вуглецю [5].

В даній роботі наводяться результати експериментальних досліджень електроопору та термо-ерс компактованих зразків НВМ та пропонується модель для опису цих властивостей.

Для досліджень був обраний НВМ, отриманий методом низькотемпературної конверсії монооксиду вуглецю з використанням в якості кatalізатору частинок оксиду заліза  $Fe_2O_3$ .

Представлено: член-кор. НАН України, д. ф.-м.н., проф. Макара В.А.

який в процесі отримання ВНТ частково відновлювався до оксиду  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Для видалення частинок катализатору отриманий порошок НВМ відмивався у водному розчині сірчаної кислоти. Проведений в роботі [6] детальний аналіз структурно-фазового складу НВМ методом рентгенівської дифракції показав, що дифрактограма для відмитого НВМ містить тільки графітову 002-лінію, причому ця лінія є подвійною і відповідає відбиттям від впорядкованої графітової фази (нанографіт та можливо багатостінні ВНТ з відстанню між площинами  $\sim 0.335\text{ нм}$ ) та слабовпорядкованої вуглецевої фази (аморфний вуглець з  $d_{002} = 0.342\text{ нм}$ ). Лінії катализатору відсутні.

Таким чином, НВМ, що досліджується, складається з багатостінних ВНТ, можливо з частинок нанографіту та частинок аморфного вуглецю.

З даного НВМ методом холодного пресування з використанням в якості зв'язуючого полівінілацетату (концентрація 20% масових) були отримані об'ємні зразки прямокутної форми розмірами  $15 \times 3.5 \times 1.5\text{ мм}$  з густинною  $1.3\text{ г}/\text{см}^3$ .

Вимірювання електроопору та термо-ерс проводилося за стандартною методикою в інтервалі температур 4.2-293К [5].

На рис. 1 наведено температурну залежність питомого електроопору об'ємного зразку НВМ.

Як випливає з рисунку, для даного матеріалу спостерігається напівпровідниковий характер залежності  $\rho(T)$ , який є характерним для невпорядкованих вуглецевих матеріалів. Відношення  $\rho_{42}/\rho_{293}$  складає 12.

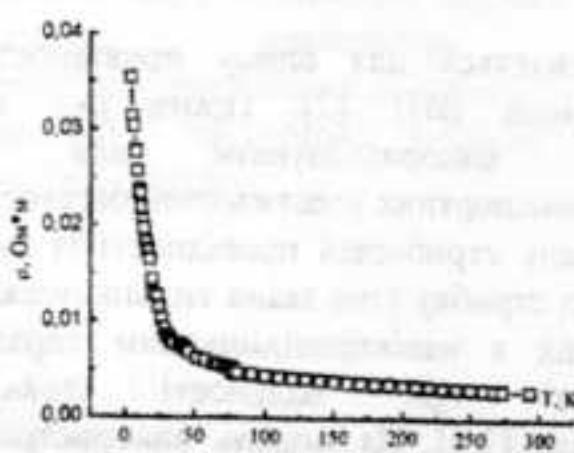


Рис. 1. Температурна залежність питомого електроопору об'ємного зразку НВМ.

На рис. 2 наведено графік температурної залежності термо-ерс об'ємного зразка НВМ, що досліджується.

Як випливає з рисунку, термо-ерс має вигляд, типовий для термо-ерс невпорядкованих вуглеців.

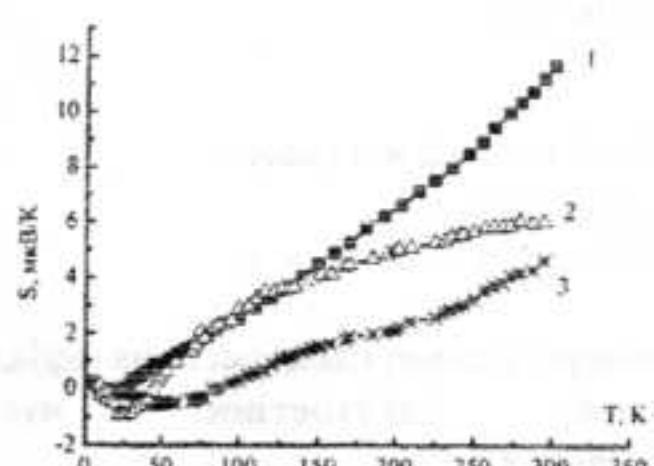


Рис. 2. Температурні залежності термо-ерс для зразків: 1 - НВМ, 2 – аморфний вуглець [5], 3 –неграфітизоване волокно [5].

Аналогічний вигляд має, наприклад температурна залежність термо-ерс для графітизованого вуглецевого волокна або для невпорядкованого вуглецю [5].

Як показано в ряді робіт, в яких досліджувалися кінетичні властивості вуглецевих гетеросистем, зокрема, аморфного вуглецю та ВНТ, в таких системах реалізуються декілька механізмів провідності, пов'язаних з присутністю в матеріалі вуглецевих фаз з різним ступенем структурної досконалості [7, 8]. Якщо жодна з фаз не утворює в зразку, що досліджується, неперервного ланцюга, сумарна провідність матеріалу визначається як провідність послідовно з'єднаних ділянок з різним типом провідності. Для НВМ, що досліджується, в рамках моделі послідовного з'єднання ділянок з різним типом провідності, справедливим є такий вираз:

$$\sigma^{-1} = \sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1} + \sigma_3^{-1}, \quad (1)$$

де  $\sigma_i$  характеризують різні механізми провідності. Як  $\sigma_1$  позначена металічна провідність, характерна для впорядкованого вуглецю. В рамках двовимірної моделі електронної структури вуглецю провідність визначається як [1]:

$$\sigma_1 = \frac{\Delta \cdot e^2 \cdot L}{\pi \sqrt{3} \cdot \gamma_0 \cdot a \cdot d_{002} \cdot h}, \quad (2)$$

де  $\Delta$  – зміщення рівня Фермі у валентну зону, пов'язане з надлишковою кількістю дірок у слабо впорядкованому вуглецю,  $L$  – ефективна довжина вільного пробігу носіїв заряду при різних механізмах розсіяння, яка дорівнює, приблизно розмірам кристаліту,  $\gamma_0$  – перекриття хвильових функцій електронів в графітовому шарі,  $a$  – стала кристалічної решітки графіту.

$d_{\text{ш}} -$  відстань між шарами графіту,  $\hbar$  - стала Планка.

Провідність ділянок, що характеризуються стрибковим механізмом провідності із змінною довжиною стрибка  $\sigma_2$ , визначається як [9]:

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp \left[ - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/4} \right], \quad (3)$$

де  $\sigma_0$  та  $T_0$  є сталими величинами.

Третій доданок  $\sigma_3$  в (1) пов'язаний з механізмом стрибкової провідності із сталою довжиною стрибка.  $\sigma_3$  визначається як [10]

$$\sigma_3 = \sigma_0 \cdot \exp \left[ - \left( \frac{E_C - E_F}{k_b T} \right) \right], \quad (4)$$

де  $E_c$  – край рухливості.

Згідно з такою моделлю [5], загальну термо-ерс  $S$  вуглецевого матеріалу можна записати як суму термо-ерс, які відповідають різним типам провідності, що реалізуються у матеріалі:

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad (5)$$

де  $S_1$  – відповідає металевій провідності,  $S_2$  – відповідає стрибковій провідності із змінною довжиною стрибка,  $S_3$  – відповідає стрибковій провідності з постійною довжиною стрибка.  $S_1$  має лінійну залежність від температури [1]:

$$S_1 = \frac{k_b}{e} \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{k_b T}{\Delta} \cdot (1 + p), \quad (6)$$

де  $\Delta$  – зсув рівня Фермі,  $p$  – параметр, що визначається переважним механізмом розсіювання носіїв струму. Термо-ерс, що відповідає стрибковій провідності зі змінною довжиною стрибка, можна записати як [9]:

$$S_2 = \frac{k_b^2}{2e} \cdot (T_0 \cdot T)^{1/2} \cdot \frac{d \ln N(E)}{dE} \Big|_{E=E_F}, \quad (7)$$

де  $T_0$  – стала величина. Згідно з [68], між енергією й густину електронних станів поблизу точки дотику валентної зони і зони провідності, існує лінійне співвідношення [11]:

$$N(E) = B |E|, \quad (8)$$

де  $B$  – коефіцієнт пропорційності,  $E$  – енергія, відрахована від точки дотику зон. З урахуванням виразу (8) співвідношення (7) приймає вигляд:

$$S_2 = - \frac{k_b^2}{2e} \cdot (T_0 \cdot T)^{1/2} \cdot \frac{1}{E_F(T)}, \quad (9)$$

де  $E_F$  залежить від температури. Однак, відомо, що невпорядкований вуглець має

надлишкові дірки внаслідок акцепторної дії дефектів структури, і для цього виконується умова  $E_F \gg k_b T$ , тому залежність  $E_F$  від температури в досліджуваній області температур можна знехтувати.

Термо-ерс  $S_3$ , пов'язана із стрибковою провідністю з постійною довжиною стрибка описується наступним виразом:

$$S_3 = \frac{k_b}{2e} \cdot \left( \frac{\varepsilon}{k_b T} + C \right) \varepsilon = E_C - E_F, \quad (10)$$

де  $E_C$  – край рухливості,  $\varepsilon > 0$ ,  $C$  – постійна, котра може бути як більше нуля, так і менше нуля [10].

Таким чином, термо-ерс визначається адитивним внеском цих трьох доданків.

Проаналізуємо в рамках моделі послідовного з'єднання ділянок з різним типом провідності отримані експериментальні результати з дослідження температурних залежностей електроопору та термо-ерс НВМ, що містить ВНТ. Розрахунок величини  $\sigma$  за формулою (2) з використанням відповідних значень довжини вільного пробігу 40 нм та величини  $\Delta = 0.2 \text{ eV}$  показав, що  $\sigma$  складає  $\sim 7.5 \cdot 10^5 (\Omega \cdot \text{м})^{-1}$ , що відповідає значенню питомого опору  $\sim 1.36 \cdot 10^{-6} (\Omega \cdot \text{м})$ . Таке значення питомого опору є набагато меншим, ніж отримане експериментальне значення  $\rho(T)$ . Оскільки в сумарний опір НВМ внесок опору, пов'язаного з металічним механізмом провідності, є дуже малим, то при аналізі опору НВМ за формулою (1) перший доданок можна не враховувати.

На рисунку 3 наведена температурна залежність питомого електроопору зразка НВМ, перебудована в координатах  $\ln \rho = f(T^{1/4})$ .

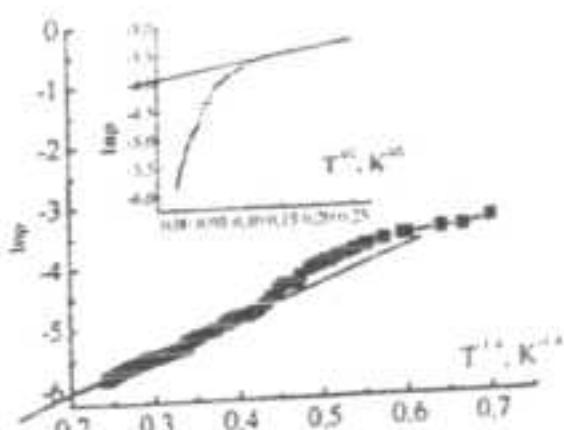


Рис. 3 Температурна залежність опору зразка НВМ в координатах  $\ln \rho = f(T^{1/4})$ , на вставці  $\ln \rho = f(T^{1/2})$ .

Як випливає з рисунку, залежність  $\ln \rho = f(T^{1/4})$  є лінійною типу  $y = b + ax$ , де  $b = \ln \rho_0$ ,  $a = T_0^{1/4}$  в інтервалі температур від  $\sim 30 \text{ K}$  до кімнатної температури. З лінійною ділянкою залежності

$\ln(\rho/T^{1/4})$  визначені константи  $\rho_0$  і  $T_0$ , які складають  $T_0=1139\text{K}$ ,  $\rho_0=1394(\text{Ом}\cdot\text{м})$ . При більш низьких температурах основним механізмом провідності, як вказується вище, є механізм стрибкової провідності з сталою довжиною стрибка, що описується формулою (4). Температурна залежність питомого електроопору зразка НВМ, перебудована в координатах  $\ln(\rho)=f(T^{1/2})$  наведена на рис. 4 на вставці.

Визначений з лінійної ділянки залежності параметр  $\varepsilon=E_F-E_F$  складає  $\sim 3.5 \cdot 10^{-5}$ .

За формулам (6, 7, 10) з використанням отриманих з експериментальних даних по температурній залежності  $\rho(T)$  величин  $T_0$  та  $\varepsilon$  були розраховані значення складових термо-ерс  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  та їх сума (рис. 4).

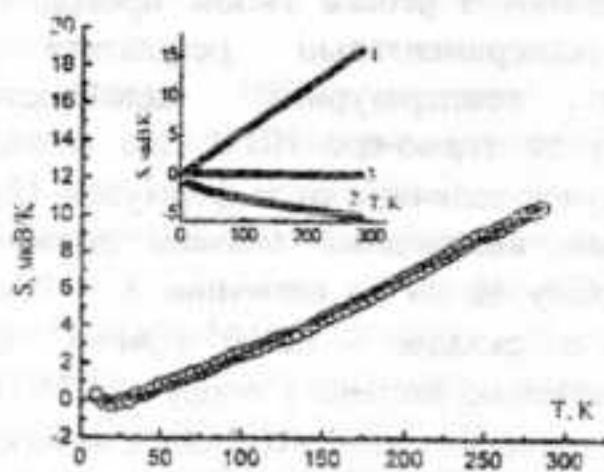


Рис. 4.  $S(T)$  зразка НВМ: точки - експеримент, суцільна лінія - розрахунок, на вставці - розраховані температурні залежності: 1-  $S_1$ , 2-  $S_2$ , 3-  $S_3$ .

Параметри електронної структури  $E_F$  та  $\Delta$  обиралися як підголочні. В таблиці 1 наведені значення цих параметрів, при яких досягається найбільш точне співпадіння розрахованої сумарної термо-ерс з експериментальною. Для порівняння в таблиці також наведені дані параметрів електронної структури, визначені в рамках моделі послідовного з'єднання ділянок з різним типом провідності для аморфного вуглецю [5].

Таблиця 1

Розраховані параметри електронної структури НВМ та аморфного вуглецю.

Зразок	Т, К	$E_F$ , эВ	$\Delta$ , эВ	$\varepsilon$ , эВ
НВ	1	0.	0	$3.5 \cdot 10^{-5}$
М	139	4	.20	$0^{-5}$
Ам	1	0.	0	$4.4 \cdot 10^{-5}$
В [5]	967	4	.45	$0^{-5}$

Таким чином, проведені дослідження показали, що електротранспортні властивості

НВМ, що містить багатостінні ВНТ з параметрами структури, близькими до параметрів структури аморфного вуглецю, зокрема термо-ерс, можуть бути описаними в рамках моделі послідовного з'єднання ділянок з різним типом провідності, яка задовільно описує властивості аморфного вуглецю.

### Список використаних джерел

1. Klein C. STB-model and transport properties of pyrolytic graphites. // Jour. of Appl. Phys. 1964. - V35. - N10. - P. 2947-2957.
2. Song S.N., Wang X.K., Chang R.P.H. and Ketterson J.B. Electronic properties of graphite nanotubes from Galvanomagnetic effect. // Phys. Rev. Lett. - 1994. - 72, №5. - p. 697-700.
3. Masashi Shiraishi, Masafumi Ata. Conduction mechanism in single wall nanotubes. // Synth. Met. - 2002. 128. - p. 235-239.
4. Liu B., Sundqvist B., Andersson O. Electric resistance of single-walled carbon nanotubes under hydrostatic pressure. // Sol. State Commun. - 2001. - 118. - p. 31-36.
5. Л.Ю. Мацуй, Л.Л. Вовченко, И.В. Овсиенко. Низкотемпературная термо-эрс в квазиаморфных углеродах. // ФНТ, 2000, т. 26, выпуск 1, с. 70-75.
6. Лень Т.А., Овсієнко І.В., Мацуй Л.Ю., Брусловець А.І., Капітанчук Л.М. Дія термохімічної обробки на структурно-фазові перетворення в нановуглецевому матеріалі. // Фізика і хімія твердого тіла. - 2005. 6, №4. - с. 680-684.
7. Hishiyama Y., Kaburagi Y., Ono A. Variable-range hopping condition and negative magnetoresistance of disordered carbons at low temperature. // Carbon. - 1978. - V.17, N3. - P. 265-276.
8. Kaiser A.B., Flanagan G.U., Stewart D.M., Beaglehole D. Heterogeneous model for conduction in conducting polymers and carbon nanotubes. // Synth. Metals. 2001, 117, p. 67-73.
9. Звєгин И.П. Кинетические явления в неупорядоченных полупроводниках. М.: Издание Московского университета. 1984.
10. Н.Мотт, Э.Дэвис. Электронные процессы в некристаллических веществах, М.: Мир (1982).
11. А.С.Котосонов. Температурная зависимость уровня Ферми и концентрации носителей заряда в углеродных материалах с турбостратной структурой // Конструкционные материалы на основе углерода, 1979, N14, 55.

Надійшла до редакції 29.10.99

УДК 548:539.32

Онанко А.П., зав. лаб., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

## Вказівна поверхня пружно-непружного тіла сплаву $Ag_{0.9}Zn_{0.1}$

Досліджувалась температурна залежність модуля пружності і внутрішнього тертя і (вказівна поверхня пружно-непружного тіла) сплаву  $Ag_{0.9}Zn_{0.1}$ . Після електронного опромінення виявлені максимуми внутрішнього тертя  $Q'_{M1}$  і  $Q'_{M2}$  при температурах  $T_{M1} \approx 485$  К і  $T_{M2} \approx 580$  К.

**Ключові слова:** модуль пружності, внутрішнє тертя, близкий порядок.

E-mail: [onanko@mail.kiev.ua](mailto:onanko@mail.kiev.ua)

Ця робота є продовженням дослідження впливу радіаційної дії на температурні залежності внутрішнього тертя (ВТ) і модуля пружності Е сплаву AgZn [1], що упорядковується. Виявлені температурні інтервали утворення і перебудови близького порядку. Процеси близького розшарування або упорядкування твердих розчинів Ag-Zn, Ag-Ai обумовлені особливостями зміни при близькому упорядкуванні густини електронних станів поблизу енергії Фермі. До дефектів кристалічної гратки, що порушують умову періодичності кристалічного потенціалу, відносяться поверхня кристалу; дислокації; вакансії V; основні атоми гратки, що перейшли в міжузловину J; домішкові сторонні атоми, які можуть знаходитись в міжузловині або заміщувати основні атоми. Кожен з цих дефектів створює додаткове поле, що діє на електрони у кристалі.

### Експеримент

Для вимірювання температурних залежностей ВТ і модуля пружності Е сплаву  $Ag_{0.9}Zn_{0.1}$  після механічного різання і шліфування використовувалися електростатичний метод згинних резонансних коливань Ш-подібного зразка на частоті  $f \approx 4$  кГц і чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті  $f \approx 118$  кГц при знакозмінній деформації  $\epsilon = 10^{-6}$  у

Onanko A.P., PhD, Sen. Sci. Res.

### Indicator surface of elasticity-inelasticity state of $Ag_{0.9}Zn_{0.1}$ alloy

Temperature dependence of elastic module and internal friction (indicator surface of elasticity-inelasticity state) of  $Ag_{0.9}Zn_{0.1}$  alloy was explored. After electron irradiation maximums of internal friction  $Q'_{M1}$  and  $Q'_{M2}$  at temperatures  $T_{M1} \approx 485$  K and  $T_{M2} \approx 580$  K were observed.

**Key words:** elastic module, internal friction, nearing order.

вакуумі  $P \approx 10^{-3}$  Па [1,2]. Явище деформації шліфуванням ускладнює виробництво мікросхем з тонких напівпровідникових кристалів. Шліфування здійснювалось при зворотно-поступальному русі паралельно вісі зразка. Зразок прикріплювали до латунної пластини. Вона служила опорою і радіатором. Тому середня температура зразка при шліфуванні не перевершувала  $T \leq 350$  К. Діаметр алмазних зерен  $d \approx 10000 \pm 2000$  нм. В пластичному сплаві частка матеріалу видавлюється з канавки на поверхню, утворюючи "бруствер". яка зрізується алмазним зерном і потрапляє в пил при сухому шліфуванні, чи рідині. Термопластичні напруги σ, релаксують з утворенням дислокацій, які рухаються, що призводить до пластичної течії. В крихкому сплаві здійснити видавлювання матеріалу на поверхню важко, можна "впресувати" частину його алмазним зерном в стінки канавки, а частину – перевести в пил.

Опромінення здійснювалось на лінійному електронному прискорювачі ІЛУ-6 електронами з енергією  $W = 1.5$  MeV флюенсом  $\Phi = 5 \cdot 10^{17}$  см<sup>-2</sup>. Погрішність вимірювання відносної зміни модуля пружності  $\Delta E \approx 0.1\%$ , а вимірювання ВТ  $\Delta Q^{-1} \approx 2\%$ . Для визначення температурного положення максимумів ВТ по релаксації модуля пружності  $\Delta E/E$  одночасно вимірювалась температурна залежність Е.

Представлено: член-кор. НАН України,  
д. ф.-м. н., проф. Макара В.А.

## Результати і їх обговорення

На рис. 1 наведено температурну залежність ВТ сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$ .

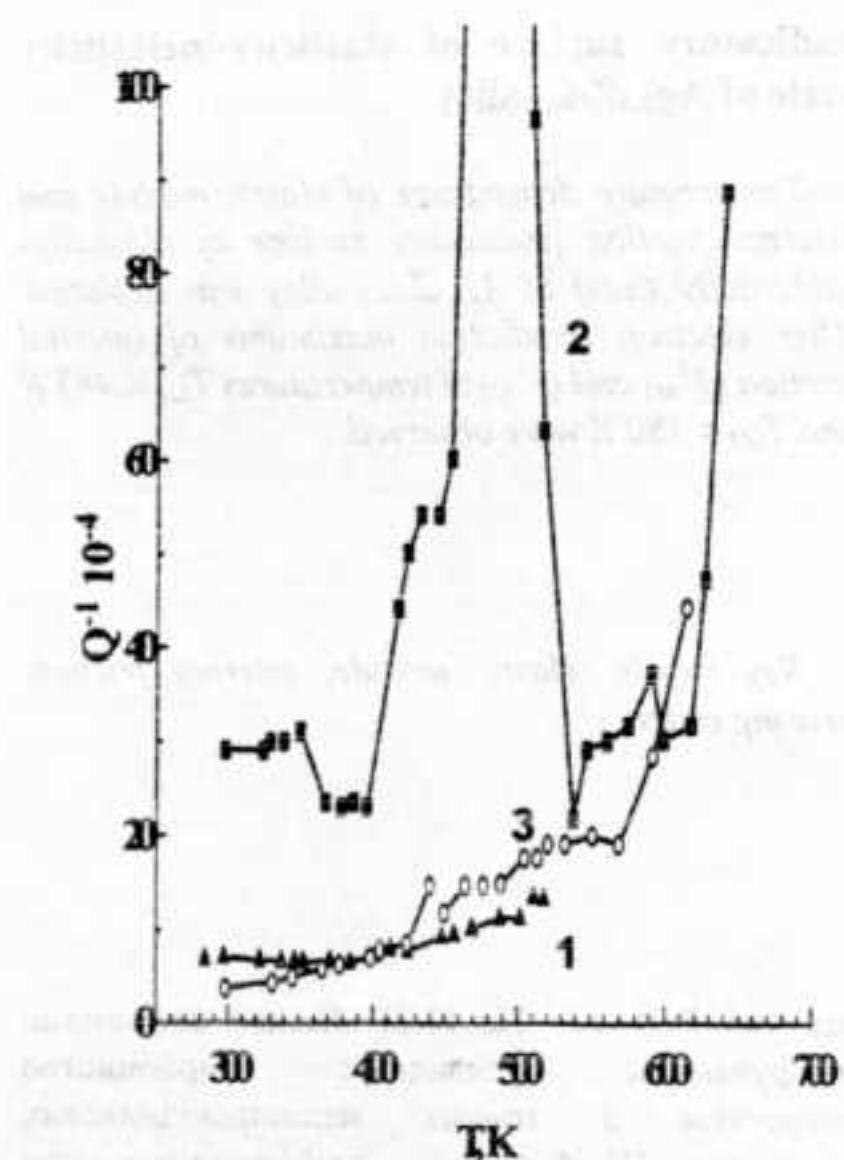


Рис. 1. Температурна залежність внутрішнього тертя  $Q^{-1}$  сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$ :

1 - нагрів сплаву у початковому стані після шліфування; 2 - після електронного опромінення флюенсом  $\Phi \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ ; 3 - повторний нагрів опроміненого зразка.

У початковому стані після шліфування спостерігалося монотонне зростання фону ВТ  $Q_{\phi}^{-1} \approx 0.9 \cdot 10^{-3}$  до  $T \approx 520 \text{ K}$  ВТ на кривій 1. Відпал структурних дефектів викриває вигляд температурного спектру ВТ. При відпале має місце ухід міжузлових атомів J, вакансій V, домішок.

Після електронного опромінення флюенсом  $\Phi \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$  спостерігалася сталість фону ВТ  $Q_{\phi}^{-1} \approx 2.3 \cdot 10^{-3}$  до  $T = 400 \text{ K}$  і різке експоненціальне зростання фону  $Q_{\phi}^{-1}$  при більш високих температурах  $T > 600 \text{ K}$  на кривій 2. Виявлено домінуючий максимум ВТ ( $Q_{m1}^{-1} - Q_{\phi}^{-1} \approx 1.8 \cdot 10^{-2}$  шириною  $\Delta T_{m1} \approx 55 \text{ K}$  при  $T_{m1} = 485 \pm 10 \text{ K}$  та максимум ВТ ( $Q_{m2}^{-1} - Q_{\phi}^{-1} \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$  шириною  $\Delta T_{m2} \approx 25 \text{ K}$  при  $T_{m2} = 580 \pm 10 \text{ K}$  в сплаві  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$ . Для максимуму ВТ умова його існування записується у вигляді [4]:

$$\omega_{m1} \exp(H/k_B T_M) = 1, \quad (1)$$

де  $k_B$  - стала Больцмана. Енергію активації H максимуму ВТ оцінювалася за формулою Верта-Маркса [3]. Для домінуючого максимуму ВТ при  $T_{m1} \approx 485 \text{ K}$  було отримано значення енергії активації  $H_1 = 0.76 \pm 0.1 \text{ eV}$ . З умови існування релаксаційного максимуму ВТ  $\omega_{m1} \exp(H/k_B T_M) = 1$  визначили постійну часу релаксації  $\tau_{m1} \approx 1.7 \cdot 10^{-14} \text{ с}$  і частотний фактор релаксації  $f_{m1} \approx 5.8 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$ . Для максимуму ВТ при  $T_{m2} \approx 580 \text{ K}$  було отримано значення енергії активації  $H_2 = 0.92 \pm 0.1 \text{ eV}$  з постійною часу релаксації  $\tau_{m2} \approx 1.4 \cdot 10^{-14} \text{ с}$  і частотним фактором релаксації  $f_{m2} \approx 7.3 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$ .

Дифузія в сплавах є процесом релаксації збурень різної природи. До таких збурень відносяться неоднорідності дефектів кристалічної будови, розподілення домішок у сплавах, температури T, деформацій ε. Процес дифузії є термоактивованим, якщо коефіцієнт дифузії з великою точністю описуються законом Арреніуса:

$$D = D_0 \exp(-U/k_B T), \quad (2)$$

де  $D_0$  - передекспоненційний множник, U - енергетичний бар'єр або енергія активації дифузії, за порядком величини і фізичним змістом це енергія зв'язку атома в кристалічній гратці. При температурі шліфування  $T \leq 350 \text{ K}$  D незначне. При шліфуванні виникають напруги σ. Тому для дифузії понижується потенційний бар'єр U. Справедливе рівняння [4]:

$$D = D_0 \exp[-(U-\Delta U)/k_B T]. \quad (3)$$

Поки наруги σ ~ ΔU великі, доти мале U-ΔU. Тому дислокації в легкоплавких сплавах Ag-Zn рухаються за рахунок дифузії. В тугоплавких сплавах велика енергія активації дифузії U, високі бар'єри Пайєрлса для руху дислокацій. Тому важко зменшити U-ΔU, щоб активізувати дифузію і рух дислокаций.

Модуль пружності E - відношення прикладеної напруги σ до сумарної деформації ε кристалу. Модуль пружності є чутливою характеристикою процесів фізико-хімічної взаємодії при зміні типу упорядкування по границям розділу фаз, ніж ВТ. При механічному напруженні реального кристалу

сумарна деформація складається з пружної та непружної компонент. Непружна деформація обумовлена рухом дислокаций. Пружна деформація відбувається "миттєво", а непружна має временну залежність. Це обумовлено наявністю часів релаксації  $\tau$ , які характеризують рух дефектів кристалічної структури. Є два лімітних значення пружних модулів: нерелаксаційний  $E_{\text{HP}}$  і релаксаційний модуль пружності  $E_p$ . При приложені зовнішнього періодичного напруження з частотою  $\omega$  динамічний пружний модуль в експериментально буде мати проміжне значення  $E_p < E < E_{\text{HP}}$ . Результати вимірювання температурної залежності модуля пружності  $E$  сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$ , представлені на рис.2.

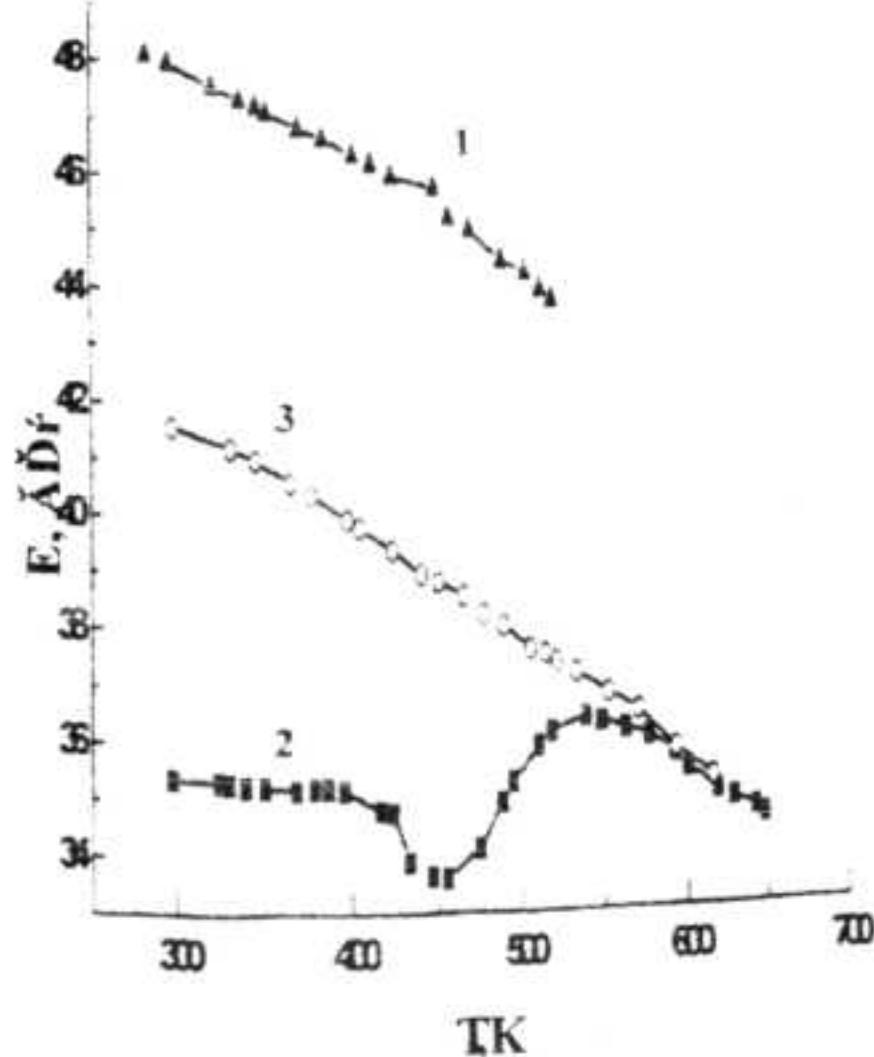


Рис. 2. Температурна залежність модуля пружності  $E$  сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$ :  
1 - нагрів сплаву у початковому стані після шліфування; 2 - після електронного опромінення флюенсом  $\Phi \approx 5 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$ ; 3 - повторний нагрів опроміненого зразка

Модуль пружності  $E$  має спадний лінійний характер, що пояснюється теорією ангармонізму кристалів з врахуванням квадратичних членів [4]. При вимірюванні амплітудної залежності ВТ до і після опромінення ВТ було амплітудно-незалежним, що свідчить про відсутність

дислокаційного гістерезисного механізму ВТ при використовуваних експериментальних ультразвукових деформаціях  $\epsilon \approx 10^{-6}$ .

На кривій 2 рис.2 температурні залежності  $E$  сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$  спостерігалась релаксація модуля пружності  $\Delta E/E$  при  $T \approx 455-485 \text{ K}$  на кривій 3 релаксація модуля пружності  $\Delta E/E$  спостерігалась при  $T \approx 570-580 \text{ K}$ .  $\Delta E/E = (E - E_0)/E_0 = \Delta/(1 + \omega^2 \tau^2)$ , де максимальний дефект модуля  $\Delta = (E_{\text{HP}} - E_p)/E_{\text{HP}}$ ,  $E_{\text{HP}}$  - нерелаксаційний,  $E_p$  - релаксаційний модуль пружності.  $E_{\text{HP}}$  вимірювався у час прикладення напруги  $\sigma$ , коли непружний вклад у деформацію  $\epsilon_{\text{HP}} = 0$ ;  $E_p$  вимірювався після інтервалу часу  $\Delta t \gg \tau$ , коли непружна деформація максимальна  $\epsilon_{\text{HP}} = \text{max}$ . Значення  $\Delta$  визначається кількістю мікрорелаксаторів різного типу і їх індивідуальним вкладом в непружне деформацію приданої температурі  $T$ . Має місце суперпозиція вкладів різних мікрорелаксаторів. При температурах, коли ріст дефекту модуля пружності  $\Delta E/E$  різко зростає, на температурних залежностях спостерігаються релаксаційні максимуми ВТ. Значна ширина по температурі релаксації модуля пружності  $\Delta E/E$  вказує на широкій розподіл активаційних параметрів. Н відповідних релаксаційних процесів.

На рис.3 представлена температурна залежність вказівної поверхні пружно-непружного тіла сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$  у початковому стані після шліфування.

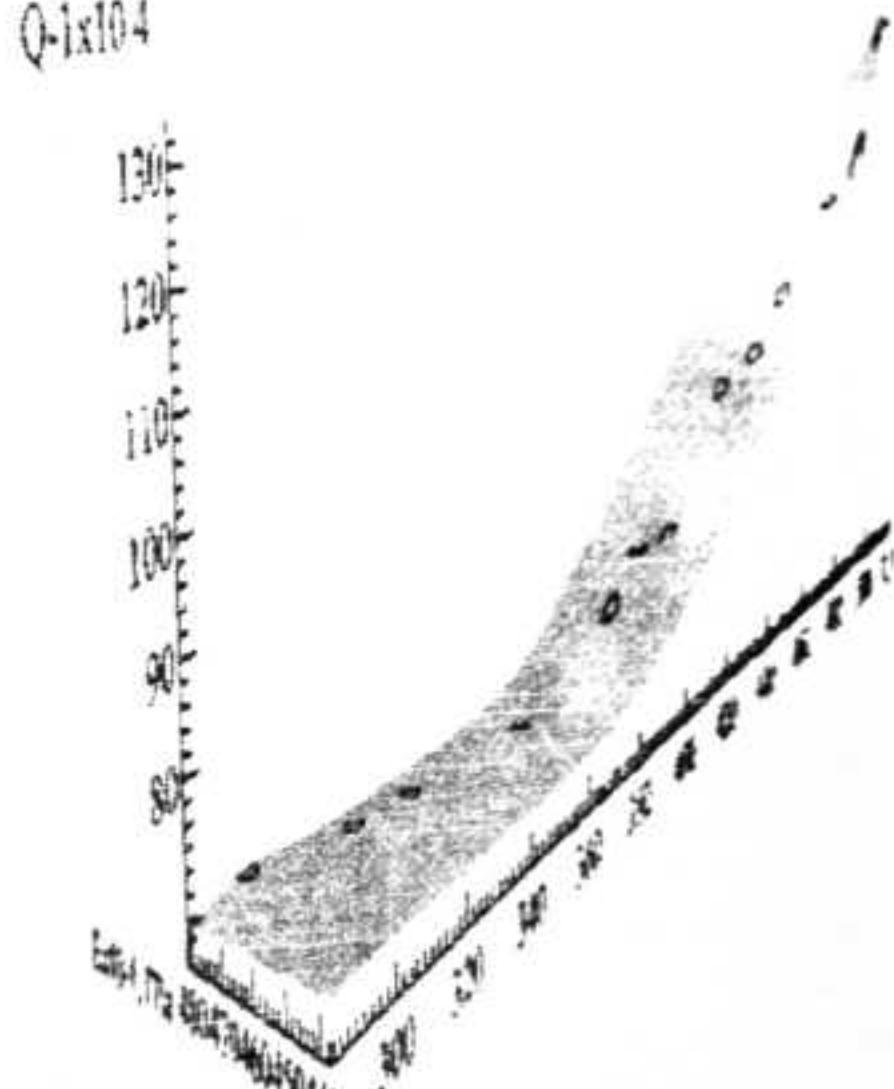


Рис. 3. Температурна залежність внутрішнього тертя  $Q^1$  і модуля пружності Е (вказівної поверхні пружно-непружного тіла) сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$  у початковому стані після шліфування.

У сплавах Ag-Zn створення локально концентраційних неоднорідностей з значною концентрацією розчинених атомів та з іншим по відношенню до матриці типом близького порядку має місце у процесі термообробки. Далі ці неоднорідності розшаруються у гомогенно розподілені частини нової фази або упорядковуються у надструктурні домени. Механізми гомогенної радіаційно-стимулованої сегрегації у бінарних твердих розчинах мають місце в системах з неоднорідним близьким упорядкуванням у термодинамічному рівноважному стані. Зміни параметра гратки при різних температурах дають змогу одержувати інформацію про співвідношення між величинами радіаційних і точкових дефектів у опромінених сплавах та процеси їх перерозподілу при різних рівнях термічної активації. У твердому розчині  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$  у температурному інтервалі  $\Delta T = 570 \pm 300$  К відбувається зміна типу упорядкування від  $L_{12}$  типу до низькотемпературного  $\delta$ -фази. Характер зміни залишкового електроопору  $r(T)$  пояснюється існуванням близького порядку різних типів у різних температурних діапазонах, прообразом яких є відповідні фази, що примикають до твердого розчину. Спостерігався максимум залишкового електроопору  $r(T)$  для сплаву  $\text{Ag}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}$  при  $T_m \approx 570$  К. Хід залежностей  $r(T)$  для загартованих і відпалених зразків свідчив про оборотність процесів, що відбувались.

Встановлення низькотемпературного типу близького порядку утруднено через малу дифузійну рухливість атомів. Стимулювати ці процеси можна введенням різного роду структурних дефектів. Коефіцієнт дифузії міжвузлових атомів  $D_{ij}$  на кілька порядків більший за коефіцієнт дифузії вакансій  $D_V$ , який, у свою чергу, більший за коефіцієнт самодифузії  $D_i$ . У неоднорідно деформованому середовищі дифузія домішок протікатиме з особливостями, що суттєво відрізняють таку дифузію від класичної Фікової дифузії. Зокрема, для такої дифузії типовими ознаками є наявність розподілу домішок за глибиною та велики значення глибин проникнення домішок.

В результаті опромінення електронами з енергією  $W \approx 1.5$  MeV флюенсом  $\Phi = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$

при кімнатній температурі спостерігалося зменшення  $r(T)$  і параметрів Каулі на першій координаційній сфері, що свідчило про поглиблення процесу перебудови близького порядку по низькотемпературному типу. Зміна параметрів близького порядку Каулі, розрахованих для відпалених і загартованих від температур максимуму  $T_m$  опору  $r(T)$  зразків, свідчить про те, що процеси близького упорядкування не можуть бути пояснені в рамках моделі однорідного близького порядку. При зменшенні температури термообробки параметри Каулі на першій координаційній сфері зменшуються, що вказує на зменшення ступені близького порядку. При однорідному упорядкуванні ці параметри повинні були б зростати.

При опроміненні розширяються температурні межі існування сегрегації. Введені внаслідок радіаційного опромінення міжвузлові атоми J і вакансії V стимулюють дифузійні процеси. Таким чином, передбачається, що виявлена релаксація модуля пружності  $\Delta E/E$  обумовлена близьким упорядкуванням відповідно до теорії Ле Клер-Ломера [3].

### Список використаних джерел

1. Онанко А.П. Вказівна поверхня непружно-пружного тіла сплаву  $\text{Ti}_{0.5}\text{Al}_{0.5}$ // Вісник Київського університету. Сер.: фізико-математичні науки.- 2007.- №4.- с.359-361.
2. Onanko A.P., Lyashenko O.V., Lyashenko I.O., Onanko Y.A. Acoustic attenuation in silicon and silicon oxide// J. Acoust. Soc. Am.- 2008.- V.123, № 5, Pt. 2.- p.3701.
3. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах.- М.: Атомиздат, 1975.- 472 с.
4. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Деформація аморфних сплавів і наношаруватих композицій шліфуванням// Вісник Київського університету. Сер.: фізико-математичні науки.- 2007.- №4.- с.338-342.

Надійшла до редколегії 26.02.09

УДК 543.423:574

В.В. Пророк, к.ф.-м.н., ст.н.с.

## Пояснення закономірностей надходження $^{137}\text{Cs}$ та калію до рослини у природних умовах

Запропоновано пояснення закономірностей надходження  $^{137}\text{Cs}$  та калію до рослини у природних умовах. Надходження  $^{137}\text{Cs}$  завжди приблизно пропорційне площі контакту епідерми кореня рослини з ґрутовим розчином. Це с низькоселективний калієвий канал. При дефіциті калію рослина для надходження калію до рослини використовує також високоселективний каліевий канал

**Ключові слова:** цезій, ґрутовий розчин, калій, надходження елементів живлення до рослин, калієві канали

E-mail

### Вступ

Одним з найбільш небезпечних для здоров'я людини довгоживучих радіонуклідів, що утворюються при аварії на атомній станції, є  $^{137}\text{Cs}$ . Цей радіонуклід переходить з ґрунту до рослин, які можуть вживатися людиною. Тому надходження цього нукліда до рослин вивчається вже протягом багатьох років. Короткий огляд моделей надходження  $^{137}\text{Cs}$  до рослини представлений у [1]. На жаль, практика показує, що жодна з цих моделей не описує достатньо точно надходження  $^{137}\text{Cs}$  до рослини.

У роботах [1-4] показано, що концентрація  $^{137}\text{Cs}$  у рослині приблизно пропорційна концентрації у ґрунті розчиненого  $^{137}\text{Cs}$ , тобто добутку концентрації  $^{137}\text{Cs}$  у ґрутовому розчині та вмісту ґрутового розчину в одиниці об'єму ґрунту, а жоден з макроелементів живлення рослин не є гарним аналогом  $^{137}\text{Cs}$  відносно надходження до рослини. Відхилення від пропорційності не перевищувало 2 – 3 разів для всіх досліджуваних ділянок та видів рослин. Це є значний крок уперед у вивченні надходження  $^{137}\text{Cs}$  до рослин. Для порівняння: у тих самих роботах [1-4] для тих самих зразків різниця концентраційних коефіцієнтів рослини: ґрутовий розчин інколи перевищувала чотири математичні порядки. У цих дослідженнях

V.V. Prorok, senior researcher

## Explanation of laws of $^{137}\text{Cs}$ and potassium uptake by plant at nature conditions

Explanation of laws of  $^{137}\text{Cs}$  and potassium uptake by plant at nature conditions is proposed. Uptake of  $^{137}\text{Cs}$  is always approximately proportional to the area of contact of the plant root epidermis and soil solution. It is uptake via low-affinity potassium channel. While potassium deficit, the plant obtains potassium via high-affinity potassium channel, too.

**Key Words:** cesium, soil solution, potassium, uptake nutrition elements by plant, potassium channels

рослини вирощувалися у польових умовах у зоні відчуження Чорнобильської АЕС.

Більшість дослідників намагаються пов'язати надходження цезію до рослини з надходженням калію до неї. На сьогоднішній день вважається достеменно встановленим, що існують дві системи надходження калію до рослини – низькоспоріднена (low-affinity) та високоспоріднена (high-affinity) (див., наприклад, [5,6]). Це низькоселективні та високоселективні калієві канали. Низькоселективна система превалює, коли калію у ґрутовому розчині достатньо, а високоселективна – при дефіциті калію. У більшості публікацій [5,6] вважається, що превалювання високоселективного калієвого каналу починається за сигналом ззовні, коли концентрація калію у ґрутовому розчині стає меншою 0,039 – 0,012 mg/cm<sup>3</sup>. У більшості цих публікацій представлені результати експериментальних досліджень, що проводилися з інтактними рослинами або з частинами рослин у поживному розчині. У роботі [7], де представлені експериментальні результати для рослин, що вирости у природних умовах у зоні відчуження Чорнобильської АЕС, показано, що при концентрації розчиненого калію у ґрунті Ск > 0,002-0,004 mg/cm<sup>3</sup> надходження калію та цезію до рослини відбувається по низькоселективним каналам. Можливо, що це один і той же канал

Представлено: член-кор. НАН України,  
д. ф.-м.н., проф. Макара В.А.

(канали). При концентрації розчиненого калію у ґрунті  $C_k < 0,002-0,004 \text{ мг}/\text{см}^3$  рослина для забезпечення себе калієм використовує також і інший – високоселективний канал. При цьому концентраційний коефіцієнт рослини: ґрутовий розчин для калію стає набагато більшим, ніж для цезію – інколи у 40 - 50 разів. Концентрація цезію у рослині при цьому стає у багато разів меншою. Надходження цезію залишається пропорційним концентрації розчиненого у ґрунті цезію. Він надходить до рослини по тому ж самому низькоселективному каналу (каналам). Результати роботи [7] показують, що включення високоселективного каналу може відбуватися при значно більших концентраціях калію у ґрутовому розчині, коли перехід калію до рослині утруднений низькою вологістю ґрунту, а може відбуватися при набагато меншій концентрації калію у ґрутовому розчині, наприклад, на вологому торф'яному ґрунті. Пропорційність надходження цезію до рослині його концентрації у ґрутовому розчині – результат відомий (якщо мова йде про

мікроконцентрації цезію у ґрутовому розчині). У цій роботі ми спробуємо пояснити встановлений експериментально у роботах [1-4] факт, що вміст цезію у рослині також пропорційний вмісту ґрутового розчину в одиниці об'єму ґрунту, а також той факт [7], що момент початку превалювання високоселективного калієвого каналу залежить від вмісту ґрутового розчину в одиниці об'єму ґрунту.

## Пояснення закономірностей находження $^{137}\text{Cs}$ та калію до рослин

У польових умовах у ґрунті пори повністю або частково заповнені ґрутовим розчином. Чим більш пористий ґрунт, тим більше ґрутового розчину він може поглинуть. Надходження елементів живлення до рослини відбувається через епідерму кореня (див., наприклад, [8]).

Чим більший вміст ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту, тим більша площа епідерми кореня контактує з ґрунтовим розчином. Чим більша площа епідерми

Таблиця 1

Таблиця 1  
Поле А. Вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту  $h_1$ , вміст К та  $^{137}\text{Cs}$  у зразках ґрутових розчинів та висушених рослин, величина  $r = (\frac{^{137}\text{Cs}/\text{K}}{\text{K}})_p / (\frac{^{137}\text{Cs}/\text{K}}{\text{K}})_{sh}$ , концентрація розчиненого калію у ґрунті  $C_K$

$h_1 \text{ g/sm}^3$	Date	Sample	K mg/g	$^{137}\text{Cs Bq/kg}$	r	$C_K \text{ mg/sm}^3$
0,12	09June2002	Soil solution	0,0070	8,0		
--" --	09June2002	<i>Phleum pratense</i>	20,96	5276	0,220	0,00084
0,73	22June 2002	Soil solution	0,0292	8,0		
0,069	22June 2002	Roots of <i>raphanus sativus</i>	64,70	1746	0,099	0,00201
--" --	22June 2002	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	43,49	2018	0,169	0,00201
--" --	22June 2002	<i>Lepidium sativum</i>	48,30	4540	0,343	0,00201
0,73	14July 2002	Soil solution	0,0282	7,9		
0,17	14July 2002	<i>Phleum pratense</i>	12,15	5725	1,682	0,00479
--" --	14July 2002	<i>Stachys palustris</i>	27,67	10206	1,317	0,00479
0,32	08June 2003	Soil solution	0,0214	4,9		
0,018	08June 2003	<i>Raphanus sativus</i>	52,34	216	0,018	0,000385
--" --	08June 2003	<i>Lepidium sativum</i>	38,28	265	0,030	0,000385
--" --	08June 2003	<i>Lactuca sativa</i>	52,617	672	0,056	0,000385
--" --	08June 2003	<i>Stachys palustris</i>	29,774	606	0,089	0,000385
0,34	13July 2003	Soil solution	0,0217	3,2		
0,039	13July 2003	<i>Lactuca sativa</i>	47,39	585	0,084	0,000846
--" --	13July 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	34,07	679	0,135	0,000846
--" --	13July 2003	<i>Stachys palustris</i>	32,35	1722	0,361	0,000846

Таблиця 2

Поле В. Вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту  $h_1$ , вміст К та  $^{137}\text{Cs}$  у зразках ґрутових розчинів та висушених рослин, величина  $r = (\text{Cs}/\text{K})_{\text{p}} / (\text{Cs}/\text{K})_{\text{ss}}$ , концентрація розчиненого калію у ґрунті  $C_K$

$h_1 \text{ g/sm}^3$	Date	Sample	K mg/g	$^{137}\text{Cs} \text{ Bq/kg}$	$r$	$C_K \text{ mg/sm}^3$
0,59	09June 2002	Soil solution	0,0045	61		
--" --	09June 2002	<i>Urticaceae dioica</i>	11,42	609400	3,937	0,00266
--" --	09June 2002	<i>Polygonum hydropiper</i>	23,56	606600	1,899	0,00266
0,80	22June 2002	Soil solution	0,007	40,8		0,00448
0,64	22June 2002	Roots of <i>raphanus sativus</i>	39,29	240760	1,051	0,00448
--" --	22June 2002	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	26,84	414700	2,651	0,00448
--" --	22June 2002	<i>Lepidium sativum</i>	39,8	758800	3,271	0,00448
--" --	22June 2002	<i>Polygonum hydropiper</i>	18,71	305700	2,803	0,00448
0,80	14July 2002	Soil solution	0,0047	95		
0,36	14July 2002	<i>Urticaceae dioica</i>	6,704	230900	1,704	0,00169
--" --	14July 2002	Motley grass	9,522	617500	3,208	0,00169
0,35	08June 2003	Soil solution	0,0217	44,3		
0,12	08June 2003	<i>Lactuca sativa</i>	31,28	35911	0,562	0,00260
--" --	08June 2003	Blades of <i>elytrigia repens</i>	17,03	47741	1,373	0,00260
--" --	08June 2003	<i>Urticaceae dioica</i>	12,79	55260	2,116	0,00260
--" --	08June 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	17,5	118888	3,328	0,00260
0,18	13July 2003	Soil solution	0,020	27		
0,18	13July 2003	<i>Lactuca sativa</i>	40,25	64924	1,195	0,0036
--" --	13July 2003	<i>Raphanus sativus</i>	49,78	26130	0,389	0,0036
--" --	13July 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	24,06	54348	1,673	0,0036
--" --	13July 2003	Blades of <i>elytrigia repens</i>	27,18	36505	0,995	0,0036

Таблиця 3

Поле С. Вміст вологи  $h_1$ , вміст К та  $^{137}\text{Cs}$  у зразках ґрутових розчинів та висушених рослин, величина  $r = (\text{Cs}/\text{K})_{\text{p}} / (\text{Cs}/\text{K})_{\text{ss}}$ , концентрація розчиненого калію у ґрунті  $C_K$

$h_1 \text{ g/sm}^3$	Date	Sample	K mg/g	$^{137}\text{Cs} \text{ Bq/kg}$	$r$	$C_K \text{ mg/sm}^3$
0,47	09June 2002	Soil solution	0,0475	4,8		
0,095	09June 2002	<i>Barbarea vulgaris</i>	32,26	5212	1,599	0,00451
--" --	09June 2002	<i>Convolutula arvensis</i>	36,52	7772	2,106	0,00451
0,21	08June 2003	Soil solution	0,0475	1,9		
<0,014	08June 2003	Leafs of <i>raphanus sativus</i>	40,203	82	0,051	<0,000665
<0,014	08June 2003	<i>Lepidium sativum</i>	25,675	65	0,063	<0,000665
<0,014	08June 2003	<i>Convolutula arvensis</i>	34,455	93	0,067	<0,000665
0,17	13July 2003	Soil solution	0,0528	7,1		
<0,031	13July 2003	Leafs of <i>raphanus sativus</i>	50,7	164	0,024	<0,00163
<0,031	13July 2003	<i>Convolutula arvensis</i>	38,09	165	0,032	<0,00163
<0,031	13July 2003	<i>Barbarea vulgaris</i>	31,61	105	0,025	<0,000846

контактує з ґрунтовим розчином, тим більше калію та цезію надходить до рослини по неселективному пасивному каналу. Можна вважати, що при інших рівних умовах ці величини приблизно пропорційні. А тому концентрація  $^{137}\text{Cs}$  у рослині приблизно пропорційна концентрації у ґрунті розчиненого  $^{137}\text{Cs}$ , тобто добутку концентрації  $^{137}\text{Cs}$  у ґрунтовому розчині та вмісту ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту.

У таблицях 1-3 представлений вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту, вміст К та  $^{137}\text{Cs}$  у зразках ґрунтових розчинів та висушених рослин, концентрація розчиненого калію у ґрунті (добутку концентрації калію у ґрунтовому розчині та вмісту ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту) та величина  $\gamma = (\text{Cs}/\text{K})_p / (\text{Cs}/\text{K})_{so}$  для всіх досліджуваних рослин та ґрунтових розчинів для трьох дослідних ділянок, де  $(\text{Cs}/\text{K})_p$  – відношення концентрації  $^{137}\text{Cs}$  та К у рослині,  $(\text{Cs}/\text{K})_{so}$  – відношення концентрації  $^{137}\text{Cs}$  та К у ґрунтовому розчині. Ці дані взяті з роботи [7]. Розлини вирощувались методом змішаного висіву, що був описаний у роботі [2]. Вміст  $^{137}\text{Cs}$  у зразках визначався за допомогою гама-спектрометра. Вміст калію у зразках вимірювався оптичним методом за допомогою ICP-спектрометра. З таблиць 1-3 можна бачити, що при концентрації  $C_K > 0,002-0,004 \text{ mg/cm}^3$  величина  $\gamma$  приблизно дорівнює одиниці, а при  $C_K < 0,002-0,004 \text{ mg/cm}^3$   $\gamma$  різко зменшується. Спробуємо пояснити таку залежність  $\gamma$  від  $C_K$ .

Чим більша площа ендодерми контактує з ґрунтовим розчином, тим більше калію надходить до рослин по неселективному каналу. А тому чим більший вміст ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту, тим при меншій концентрації калію у ґрунтовому розчині рослина починає використовувати високоселективний канал для переходу калію до рослин. На відміну від калію, для всіх досліджуваних ділянок та видів рослин  $^{137}\text{Cs}$  надходить до рослин завжди по низькоселективному каналу, навіть при дуже низькій вологості ґрунту. Цезій рослині не потрібен, тому у неї нема потреби у спеціальному високо селективному цезієвому каналі. А тому у цьому випадку концентрація  $^{137}\text{Cs}$  у рослині набагато нижча, ніж у випадку великого значення добутку концентрації  $^{137}\text{Cs}$  у ґрунтовому розчині та вмісту ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту.

Результати експериментальних досліджень, що проводилися з ін tactними рослинами або з частинами рослин у поживному розчині, далеко не завжди узгоджуються з результатами, що отримані у польових умовах. А тому дані публікацій [5,6] про момент початку превалювання високоселективного каналу дещо відрізняються від наших даних, що отримані у польових експериментах. Ми вважаємо, що включення високоселективного каналу регулюється самою рослиною виходячи з її потреб у калії у даний момент, а не концентрацією калію у ґрунтовому розчині. Потреби рослин в калії зумовлені вмістом калію у рослині, видом рослинни, її стадією росту та іншими факторами.

#### Список використаних джерел

- Пророк В.В., Булавін Л.А., Агєєв В.А., та ін. Закономірності надходження  $^{137}\text{Cs}$  з ґрунту до рослинні // Ядерна фізика та енергетика. 2007.-19, №1.-С.115 – 122
- Пророк В.В., Масон К.Ф.В., Тимофесів С.Ф. та ін. Залежність вмісту  $^{137}\text{Cs}$  у рослині від параметрів ґрунту // Вісник Київського ун-ту, сер. фіз.-мат., 2004. - Вип. 3. - С. 407 - 416.
- Prorok V.V., Mason C.F.V., Ageyev V.A., та ін. The Transfer of dissolved  $^{137}\text{Cs}$  from soil to plants // Proceeding of WM'06. Session 66. Tucson (Arizona), 26 February – 2 March 2006. –Tucson, 2006. -WM06/66.html
- Булавін Л.А., Пророк В.В., Агєєв В.А., Мельниченко Л. Ю., Осташко В.В. Залежність вмісту  $^{137}\text{Cs}$  у рослині від параметрів ґрунтового розчину // Доповіді НАНУ. 2007. №8. С.197 – 203.
- Maathuis, F.J.M., Sanders, D. Mechanisms of potassium absorption by higher plant roots // Physiol. Plant. 1996. 96, P.158 – 168.
- Maathuis, F.J.M., Ichida, A.M., Sanders, D. et.al. Roles of High Plant K Channels. Plant Physiol. 1997. 114, P.1141 - 1149.
- Пророк В.В. Механізми надходження калію та цезію до рослин // Вісник Київського ун-ту, сер. фіз.-мат., 2007. - Вип. 4. - С. 365 - 368.
- Рейн П., Эверт Р., Айхорн С. Современная ботаника, т.2, Москва, «Мир», 344с.

Надійшла до редколегії 26.01.09 р.

УДК 539.194

Розуван К.П., Розуван\* С.Г., Шайкевич І.А.

## Розрахунки енергії оптичного переходу лазерного барвника

Метод Хартрі-Фока та більш розвинуті методики були застосовані для теоретичного моделювання електронної структури лазерного барвника з смужкою люмінесценції в довгохвильовому інтервалі видимої області спектру. Перед обчисленнями геометрія молекули оптимізувалась з використанням мінімаксних методик. В рамках конфігураційної взаємодії були обчислені молекулярні орбіталі та власні орбіталі барвника. Енергії збудження та коефіцієнти Ейнштейна молекули знаходились з використанням зв'язаної кластерної теорії. Експериментально отримані спектри барвника в полімерній матриці порівнювались з результатами теоретичних розрахунків. Робота являється частиною програми дослідження  $\pi$ -спряжених оптических функціональних матеріалів.

**Ключові слова:** лазерний барвник, самоузгоджене поле, конфігураційна взаємодія, молекулярна динаміка.

\*E-mail: sgr@univ.kiev.ua

Проблема створення функціонального матеріалу з бажаними нелінійно-оптичними властивостями була тематикою інтенсивних досліджень на протязі останніх декад [1-5]. Незважаючи на високу наукову результативність подібних досліджень, задача побудови речовини з бажаними величинами оптичних нелінійностей для індустриальних потреб все ще не вирішена. Необхідним критерієм вирішення цієї проблеми є розуміння деталей процесів, зв'язаних з поглинанням світла. Якщо ми звернемось до  $\pi$ -спряжених полімерів, як до найбільш перспективних матеріалів з високими нелінійностями третього роду, то ще не вирішеною проблемою залишається знаходження зв'язку між силами осциляторів оптичних переходів та колективними властивостями полімерного ланцюжка. Очевидно, що теоретичні розрахунки оптичних нелінійностей таких полімерів мають включати аналіз процесів які виникають при  $\pi \rightarrow \pi^*$  збудженні, оскільки ці переходи відповідають за

K.P. Rozuvan, S.G. Rozuvan\*, I.A. Shaykevich

## Calculations of laser dye optical transition energy

Hartree-Fock and post-Hartree-Fock techniques were applied for theoretically modeling the electronic structure of a laser dye with luminescence band in long wavelength spectral interval. Prior to the computations, the molecule geometry had been optimized using minimax techniques. Molecular orbitals and configuration interaction natural orbitals of the molecule were calculated. Excitation energies and Einstein coefficients were determined using coupled cluster theory. Spectroscopy measurements with the embedded in a polymer matrix dye were also performed and compared with the theoretical investigation. The work is a part of  $\pi$ -conjugated optical functional materials research.

**Key words:** laser dye, self-consistent field, configuration interaction, molecular dynamics.

високі коефіцієнти нелінійностей полімерів у видимій області. Одним із можливих шляхів вирішення подібної задачі може бути використання квантовомеханічних методик обчислення за допомогою сучасних комп'ютерів. Данна робота присвячена теоретичному розрахунку оптичних переходів органічних сполук, які вже досить інтенсивно використовуються в нелінійній лазерній фізиці, для подальшого створення оптических матеріалів з високими оптичними нелінійностями третього роду.

Наближені квантовомеханічні розрахунки параметрів молекули без використання суперкомп'ютерів (паралельних алгоритмів) мають включати в себе декілька етапів. По-перше мають бути знайдені наближені значення координат атомів в молекулі. Координати можуть бути взяті або прямо з різноманітних хіміческих баз даних або проводячи наближені квантохімічні обчислення. По-друге мають

Представлено: акад. НАН України,  
д. ф.-м. н., проф. Л. А. Булавін

бути знайдені наближені розв'язки стаціонарного нерелятивістського рівняння Шредінгера. На цьому етапі можна користуватись, наприклад, методикою Хартрі-Фока. Тонка структура електронних смуг поглинання може бути знайдена шляхом аналізу симетрії отриманих гамільтоніанів, а також знаходженням коливальних мод молекули. Всі розрахунки в даній публікації велись як за допомогою оригінального програмного забезпечення створеного авторами так і з використанням раніше скомпільованих бібліотек підпрограм.

Оптимізація геометричної структури молекули потрібна для подальших обчислень і полягає в знаходженні мінімуму функції потенціальної енергії молекули в квантовохімічному наближенні [6,7]. При цьому обчислюються частинні похідні енергії які складається із напівемпіричних складових які описують довжини міжатомних зв'язків ( $E_{bonds}$ ), кути між зв'язками ( $E_{angle}$ ) та торсіонні кути ( $E_{dihedral}$ ) та взаємодію між незв'язаними сусідніми атомами ( $E_{non-bonded}$ ):

$$g_i = \frac{\partial E}{\partial x_i}$$

$$E = E_{bonds} + E_{angle} + E_{dihedral} + E_{non-bonded} \quad (1)$$

Мінімізація потенціальної енергії включає знаходження похідних потенціальної енергії по ядерних координатах а потім зміну координат в напрямку антиградієнту  $-g$ , до тих пір поки значення енергії не досягне локального мінімуму. Простий критерій знаходження наближеного положення сідової точки полягає в тому що при її невдалому знаходженні, двохелектронні інтеграли (інтеграли самоузгодженого поля) в методі Хартрі-Фока не будуть збіжними. Даний квантовохімічний підхід дозволяє отримати структурну хімічну формулу даної молекули яка повністю узгоджується з базовою хімічною теорією органічних сполук. Сама процедура імплементована в деякі програми-візуалізатори хімічних формул (дивись, наприклад, [8,9]) якими ми і користувались.

Знаходження наближених розв'язків стаціонарного нерелятивістського рівняння Шредінгера потрібно починати з методики Хартрі-Фока (самоузгодженого поля).

При цій методиці гамільтоніан записується у вигляді [10,11]:

$$H_e = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{1}{2} \Delta_i - \sum_a \frac{Z_a}{R_{ia}} + V_i(i) \right) = \sum_{i=1}^N (h(i) + V_i(i)) = \sum_{i=1}^N F_i \quad (2)$$

$i$  представляє собою суму операторів Фока  $F_i$ .  $V_i(i)$  - це оператори самоузгодженого поля.

$$\left\{ h(l) + \sum_i (J_i - K_i) \right\} \psi_i(l) = E_i \psi_i(l) \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

$$\text{де } J_i \psi_i(l) = \int \frac{\psi_i'(2) \psi_i(2)}{r_{12}} d\tau_2 \bullet \psi_i(l)$$

$$K_i \psi_i(l) = \int \frac{\psi_i'(2) \psi_i(2)}{r_{12}} d\tau_2 \bullet \psi_i(l)$$

Ця система рівнянь може бути розв'язана методом послідовних наближень: інтеграли  $J$  і  $K$  обчислюються для хвильової функції при  $s$  ітерації а потім знаходяться хвильові функції для  $s+1$  ітерації. Процедура припиняється при досягненні бажаної точності обчислень. Отримані рішення ще не являються енергіями оптических переходів але вони можуть застосовуватись при прямому розв'язку деяких задач, наприклад, при оцінці постенціалів іонізації молекули за теоремою Купмана (Коортман).

Конфігураційна взаємодія (singly excited configuration interaction (CIS)) це варіаційний метод розв'язку нерелятивістського рівняння Шредінгера для квантової багатоелектронної системи який дозволяє отримати значно кращі наближення розв'язку рівняння Шредінгера в порівнянні з методикою Хартрі-Фока. Спершу ми записуємо лінійну комбінацію хвильових функцій, отриманих на виході методики Хартрі-Фока у вигляді матриці Слетера [12]:

$$\Phi = \det(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{vmatrix} \quad (4)$$

При конфігураційній взаємодії результуюча хвильова функція записується у базисі детермінантів Слетера:

$$\Psi = C\Phi + \sum_{r,a} C'_a \Phi'_a + \sum_{r,a,b} C''_{ab} \Phi''_{ab} + \dots \quad (5)$$

$$\sum_{r,a,b,c} C'''_{abc} \Phi'''_{abc} + \dots$$

У цьому співвідношенні орбіталі які позначаються нижніми індексами замінюються орбіталями позначеними верхніми індексами. Другий доданок у співвідношенні може бути пов'язаний з одноелектронним збудженням молекули. Коефіцієнти  $C$  мають бути визначені мінімізацією функціоналу енергії:

$$E = \langle \Psi | H_e | \Psi \rangle \quad (6)$$

з граничними умовами:  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ . Ці умови можуть бути представлені як система лінійних рівнянь:

$$\sum_{l=1}^M \left( \langle \Phi_K^l | H_e | \Phi_L^K \rangle - E \delta_{KL} \right) C_L^K = 0 \quad (7)$$

де  $K = 1, 2, \dots, M$  і яка має ненульове рішення тільки якщо детермінант системи дорівнює нулеві:

$$\det \left\{ \langle \Phi_K^l | H_e | \Phi_L^K \rangle - E \delta_{KL} \right\} = 0 \quad (8)$$

Обчислень по співвідношенням (7)-(8) може бути зменшений з врахуванням правил відбору Слеттера для одно- і двохелектронних операторів. Дані система рівнянь має в загальному випадку  $M$  коренів для величини  $E$ , яка представляє собою оцінку верхніх границь для енергії системи. Зв'язаний кластерний підхід (coupled cluster approach) [12,13] для описання збудженого електронного стану молекули реалізується аналогічно до співвідношень (7,8), хоча в цьому підході в детермінант Слеттера додатково вводяться віртуальні орбіталі. Практично в якості віртуальних орбіталей можуть братись атомарні орбіталі якщо детермінант Слеттера конструювався з рішень рівнянь Хартрі-Фока. На фізичному рівні зв'язаний кластерний підхід може бути пояснений як процес вторинного квантування. Описуючи процес введення віртуальних орбіталей в детермінант Слеттера, можна користуватись апаратом операторів народження  $a^+$  і знищення  $a$ :

$$a_p^+ |\varphi_1 \dots \varphi_n \rangle = |\varphi_p, \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle \quad (9)$$

$$a_p |\varphi_p, \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle = |\varphi_1 \dots \varphi_n \rangle$$

Одноорбітальний кластерний оператор може бути введеним наступним методом:

$$\hat{i}_i = \sum_b \hat{i}_i^b a_b^* a_b \quad (10)$$

У співвідношенні (10)  $i$  орбіталь знищується, а замість неї з'являється орбіталь  $b$ . Даний процес може бути проінтерпретований як перехід електрону з рівня  $i$  на рівень  $b$ . При цьому хвильова функція збудженого стану може бути записана у вигляді:

$$\psi = \sum_i \hat{i}_i \Phi \quad (11)$$

Ми можемо записати систему рівнянь аналогічно до співвідношень (7,8):

$$\sum_{L=1}^M \left( \langle \hat{i}_K \Phi | H_e | \hat{i}_L \Phi \rangle - E \delta_{KL} \right) = 0 \quad (12)$$

де  $K = 1, 2, \dots, M$ .

На нашу думку методика конфігураційної взаємодії носить більш загальний характер, порівнюючи зі зв'язаним кластерним підходом. Фактично конфігураційна взаємодія може бути представлена як пряме чисельне розв'язання нерелятивістського стаціонарного рівняння Шредінгера. При розв'язку ми автоматично отримуємо певну „конфігурацію“ тобто набір електронних орбіталей. У випадку ж зв'язаного кластерного підходу ми тільки припускаємо що дана конфігурація є основний стан. Якщо ж це не так то отримані чисельні розв'язки можуть не мати фізичного змісту. При наших дослідженнях основним критерієм вибору конкретного методу для обчислень являлась відсутність виродженості отриманих розв'язків.

Часозалежна функціональна теорія матриці густини (time-dependent density functional theory (TDDFT)) [14,15] є метод для дослідження властивостей збудженої квантовомеханічної системи на основі гамільтоніану Кон-Шама (Kohn-Sham (KS)), який активно розвивається на протязі останніх років. Підхід базується на припущення, що електронну густину можна розглядати як неоднорідний електронний газ. Рівняння Кон-Шама для орбіталей можуть бути представлені в їхній канонічній формі:

$$(-\frac{1}{2} \nabla^2 + V_{\text{eff}}) \psi_i = E_i \psi_i, \\ V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \int \frac{\rho(r')}{r-r'} dr' + V_{\text{xc}}(r) \quad (13)$$

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^N \sum_s |\psi_i(r,s)|^2$$

$V_{xc}$  це обмінний кореляційний потенціал  
 $V_{xc} = \frac{\partial E_{xc}(\rho)}{\partial \rho(r)}$ , обмінна кореляційна енергія  $E_{xc}$   
 є різницею між кінетичною енергією  
 $T = \int \left( -\frac{1}{2} \nabla(\rho(r, r')) dr' \right)$  і кінетичною  
 енергією слетерівських хвильових функцій  
 $T_c = \langle \Psi | \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} \nabla_i^2 | \Psi \rangle$ .  $V(r)$ - потенціал ядер.

Чисельний розв'язок системи рівнянь Кон-Шама може бути знайдений за допомогою методу ітерацій.

Для квантовомеханічних розрахунків нами була вибрана молекула бріліантового зеленого лазерного барвника з декількох причин. По-перше фізичні процеси в лазерних барвниках пов'язані з процесами інверсії населеності рівнів, люмінесценції, суперлюмінесценції та лазерної генерації досить добре експериментально вивчені [16,17], що дає можливість легко перевірити точність наших теоретичних розрахунків. По-друге барвники з смугами люмінесценції/генерації зміщеннями в спектральну область 700-800nm мають специфічні особливості які роблять їх спорідненими зі  $\pi$ -спряженими полімерами з максимумами дисперсії нелінійності в тому ж самому спектральному інтервалі. Так, наприклад, імпульсна генерація ультракоротких імпульсів в лазерах з синхронною накачкою на лазерних барвниках може бути реалізована для області 700-800nm лише із застосуванням дуже

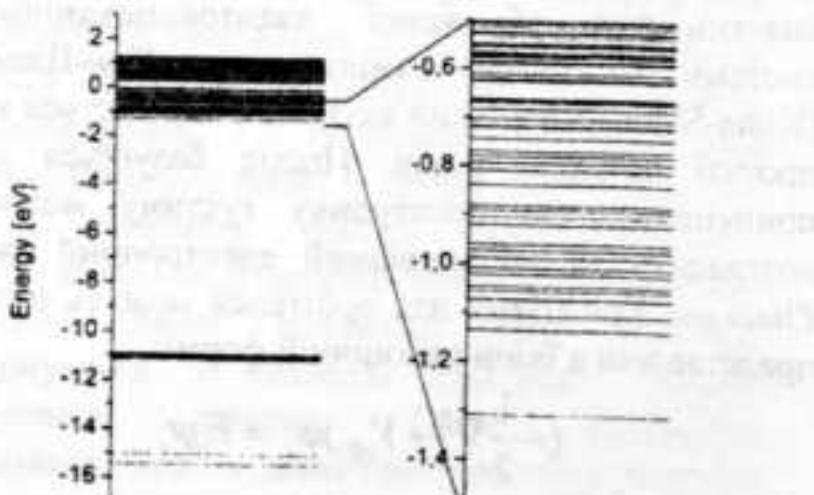


Рис.1 Власні значення фокіана для молекули бріліантового зеленого.

специфічних нелінійних механізмів збудження [18].  $\pi$ -спряжені полімери також демонструють сильну залежність їх нелінійних властивостей від спектрального положення смуги поглинання,

яке може бути легко модифіковане шляхом під'єднання до  $\pi$ -спряженого ланцюжка фрагментів молекул різних барвників [5].

Власні значення енергій отримані по методиці Хартрі-Фока зображені на рис.1.

Ці рішення можуть використовуватись як базис для наступних етапів обчислень. Подальші розрахунки з використанням методики CIS дозволили отримати енергію першого збудженого рівня:  $E_{exc} = 2.48$  [eV].

При розрахунках з використанням часозалежної функціональної теорії матриці

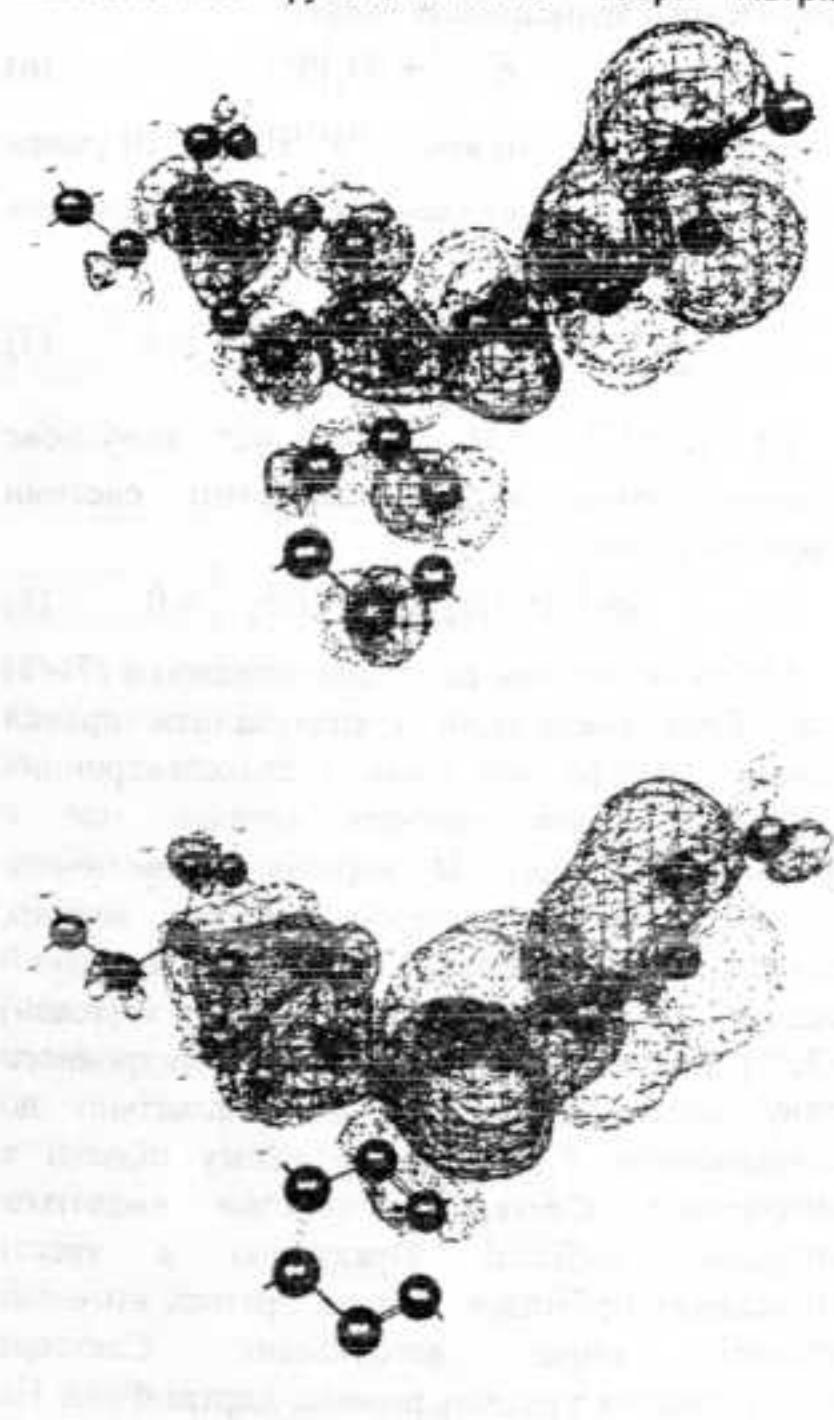


Рис.2 Хвильові функції основного (верхній малюнок) і збудженого (нижній малюнок) станів молекули бріліантового зеленого. Контур поверхонь відповідає значенню  $|\Psi| = 0.05$ .

густини, величина енергії збудження молекули бріліантового зеленого дорівнювала  $E_{exc} = 2.139345$  [eV].

За результатами розрахунків дипольний момент переходу у базисі власних функцій фокіана дорівнює:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{0 \rightarrow 1} \approx -e \int d^3r \vec{r} (0.09046063 \cdot \psi_{94}^* \psi_{97} - \\ 0.77004669 \cdot \psi_{95}^* \psi_{97} + \\ 0.05615410 \cdot \psi_{95}^* \psi_{98} + \\ 0.09786101 \cdot \psi_{95}^* \psi_{101} - 0.57642117 \cdot \psi_{96}^* \psi_{97} + \\ 0.07053444 \cdot \psi_{96}^* \psi_{103}) \end{aligned} \quad (14)$$

Із наступного співвідношення можна обчислити коефіцієнт Ейнштейна для бріліантового зеленого:

$$A = 4k^3 (\bar{d}_{0 \rightarrow 1})^2 / 3\hbar = 3.1431 \cdot 10^8 [c^{-1}] \quad (15)$$

Значення коефіцієнта  $A$  яке відповідає наносекундному часовому інтервалу добре узгоджується з експериментальними даними [18]. Розраховані хвильові функції основного і першого збудженого станів зображені на рис. 2.

Із симетрії окремих ділянок хвильових функцій видно що в оптичному переході з основного на перший збуджений рівень можуть брати процеси виду  $\pi \rightarrow \pi^*$ . Але для строгого аналізу типів симетрії при оптичному збудженні потрібне застосування інших

енергетичними рівнями можна виразити наступним чином:

$$\chi_{ab} = (1/\hbar) \sum_{m=0,1} \frac{N_m d_m^\alpha d_m^\beta}{\omega_m - \omega - i\gamma_m} \quad (17)$$

де  $N_m$  - населеності рівнів. Порівнюючи співвідношення (15,17) з рівняннями для компонент оптичного тензора нелінійності третього роду [4], при умові строго резонансного збудження  $\omega = \omega_0$ , для дворівневої схеми, при додатковій умові відсутності насиченості збудження ( $N_0 \gg N_1$ ), можна записати рівняння для діагональних компонент лінійної та нелінійної сприйнятностей третього роду:

$$\frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(1)}} \approx \frac{(d_{0 \rightarrow 1})^2}{\hbar^2 \gamma^2} \quad (18)$$

Звичайно, співвідношення (18) носить наближений характер тому, що не враховує реальну структуру енергетичних рівнів барвника, а також вплив люмінесценції на величини населостей рівнів. Для випадку лазерних барвників співвідношення (18) не вдається перевірити експериментально внаслідок сильного люмінесцентного фону при фемтосекундному збудженні. Використовуючи рівняння (15,18), для бріліантового зеленого ми можемо отримати  $\chi^{(3)} / \chi^{(1)} = 7.579 \cdot 10^{-8}$ . Цей величині відповідає значення  $\chi^{(3)} / \alpha \approx 10^{-13} [\text{есо} \cdot \text{см}]$  ( $\alpha$  - коефіцієнт поглинання), що практично спіпадає з експериментальними результатами для політиофенових похідних [3,4] незважаючи на той факт, що полімери із  $\pi$ -спряженими ланцюжками повинні мати на порядки вищі значення оптичних нелінійностей [2]. Причини, що не дозволяють експериментально отримати високі значення оптичних нелінійних коефіцієнтів в функціональних матеріалах, на даний момент не знайдені, незважаючи на наявність певного прогресу у цьому напрямку [19].

Для експериментальної перевірки теоретичних розрахунків нами були проведенні спектроскопічні вимірювання бріліантового зеленого внесенного в поліхлорвінілову матрицю (ПХВ). Результати спектральних вимірювань зображені на рис. 3. На рисунку також приведені результати обчислень за методиками конфігураційної взаємодії та часозалежної функціональної теорії матриці густини. Ми бачимо що проведені вище розрахунки дозволяють отримати значення  $E = 2.14$  [еВ] яке

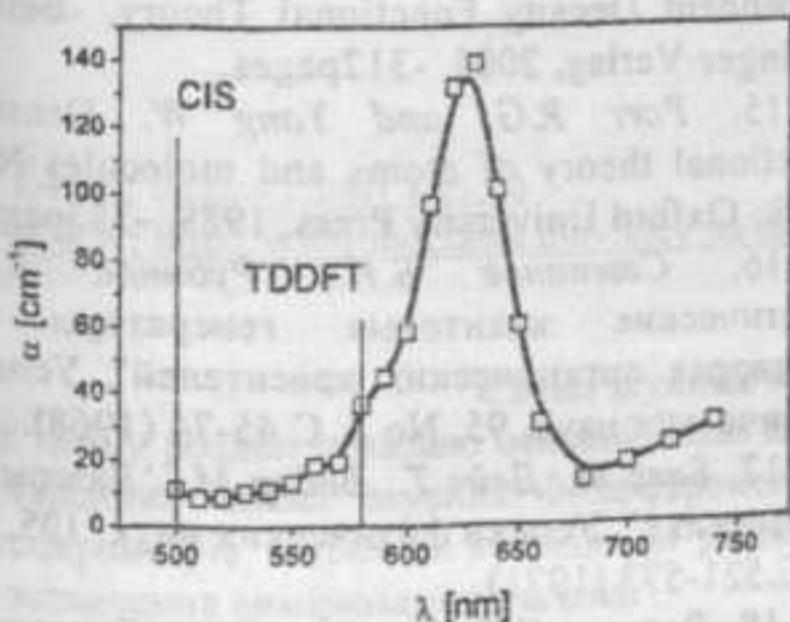


Рис.3 Експериментальна крива поглинання бріліантового зеленого у ПХВ матриці (—○—) та обчислені значення верхньої границі чисто електронного переходу (| ).

квантовомеханічних методик які планується у другій частині даного дослідження.

Співвідношення (14,15) можна використати для оцінки значень компонент  $\chi^{(n)}$  нелінійної поляризації середовища:

$$\begin{aligned} P_\alpha = \chi_{ab} E_b + \chi_{ab\gamma} E_\beta E_\gamma + \\ \chi_{ab\delta} E_\beta E_\gamma E_\delta + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Відомо [2], що величину діелектричної сприйнятності для середовища з двома

в першому наближенні являється значенням енергії чисто електронного переходу молекули бриліантового зеленого.

Методики самоузгодженого поля та часозалежна функціональна теорія матриці густини дозволили знаходити енергії і константи електронних переходів органічної молекули із систематичною похибкою не більше 10%. Розглядаючи рівняння квантової механіки з точки зору варіаційного підходу, отримані тут енергії збудження можуть бути проінтерпретовані як чисельна оцінка верхніх границь енергетичних рівнів. Проведена в даній роботі теоретична оцінка величин оптичних нелінійних коефіцієнтів продемонструвала потенційну результативність даного підходу для ключових проблем фізики полімерів з високими оптичними нелінійностями. Подальший розгляд структури ліній оптичного поглинання бриліантового зеленого з урахуванням спін-орбітальної взаємодії і коливальних мод молекули планується зробити у другій частині даної статті.

#### Список використаних джерел.

1. Nanomaterials Handbook by Yury Gogotsi (Editor) New York: CRC, 2006. -800 pages.
2. Mills D.L. Nonlinear Optics -Berlin: Springer-Verlag, 1991. -184 pages.
3. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич I.A. 'Нелінійна спектроскопія фулеренів', Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат., вип.2, С.349-353 (2007).
4. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич I.A. Лінійна і нелінійна спектроскопія π-зв'язків у політиофенів. Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат., вип.1, С.227-230 (2008).
5. W. Schrot, S.Rozouvan, T.Hartmann, V.Belov, H. Mohwald and E. van Keuren, 'Nonlinear optical properties of novel low-bandgap polythiophenes', Journal of the Optical Society of America B., 15, No 2, 889-894 (1998).
6. McIver J W, Komornicki A., 'Rapid geometry optimization for semi-empirical molecular orbital methods', Chem. Phys. Lett., 10, 303-306 (1971).
7. Pulay P., 'Analytical derivative methods in quantum chemistry', Advan. Chem. Physics, 69, 241-286 (1987).
8. <http://www.yasara.org>
9. <http://www.cscs.ch>
10. Фриш С.Э. Оптические спектры атомов -Москва, Государственное издательство физико-математической литературы. 1963. 640с.
11. Atkins P.W., Friedman R.S. Molecular Quantum Mechanics - New York: Oxford University Press, 1996. -545pages.
12. Cramer, Christopher J. Essentials of Computational Chemistry -Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2002. -412pages.
13. Kümmel H.G., 'A biography of the coupled cluster method'. Recent progress in many-body theories by Bishop R.F., Brandes T., Gernoth K.A., Walet N.R., Xian Y. (Editors.), Proceedings of the 11th international conference, - Singapore: World Scientific Publishing, 2002. -401pages.
14. Marques M.A.L., Ulrich C.A., Nogueira F., Rubio A., Burke K., and Gross E.K.U. Time-Dependent Density Functional Theory. -Berlin: Springer-Verlag, 2006. -312pages.
15. Parr R.G. and Yang W. Density-functional theory of atoms and molecules New York: Oxford University Press, 1989. -333pages.
16. Степанов Б.И., Рубинов А.Н., 'Оптические квантовые генераторы на растворах органических красителей', Успехи физических наук, 95, № 1, С.45-74 (1968).
17. Басс М., Дейч Т., Вебер М., 'Лазеры на красителях', Успехи физических наук, 105, № 3, С.521-573 (1971).
18. Розуван С.Г., Тихонов Е.А., 'Генерація УКІ на красителе с инжеекцией стимулированного затравочного сигнала', Квантовая электроника, 21, № 8, С.737-742 (1994).
19. Rozouvan S., Schrepp W., 'Degenerate four-wave mixing measurements on thin polymer films', Applied Spectroscopy, 54, №9 (2000).

Надійшла до редколегії 23.02.2009р

УДК 520.17

Удалов<sup>1</sup> Є.П., к. ф.-м. н.

## Електронні спекл-зсувні методи голограмичної інтерферометрії з застосуванням керованих світловодних трактів

Робота носить методичний характер і спрямована на краще розуміння процесів які відбуваються в спекл-зсувній електронній інтерферометрії. Розглянуті різні схеми інтерферометрів, які відрізняються чутливістю до переміщень з площини та у площині, наведено кінцеві рівняння для інтенсивностей у точці спостереження. Подано аналіз малих (до 30 нм) вібрацій, для з'ясування їх амплітуди та фази за допомогою методів електронної голометрії

**Ключові слова:** спекл-зсувний, електронний інтерферометр, голометрія.

E.P. Udalov<sup>1</sup>, Ph.D. of phys.& Math.

## Application Controlled Lightguide Trajectory in Electronic Speckle-Pattern Methods of Holometry

Activity has methodical character and directional on the best fathoming of processes which occur in a speckle - pattern of electronic interferometry. Different schemes of interferometers which distinguish sensitivity to translation from plane and in plane surveyed. final equations for intensities in a point of observation are adduced. The assaying small (up to 30 nm) vibrations, for transpiring their amplitude and a phase with the help of methods Electronic Holometric is shown.

**Keywords:** speckle-pattern, electronic interferometer, holometry.

<sup>1</sup> E-mail: [udalov@univ.kiev.ua](mailto:udalov@univ.kiev.ua)  
[WWW: http://www.mechmat.univ.kiev.ua/ua/udalov.html](http://www.mechmat.univ.kiev.ua/ua/udalov.html)

### Спекл зсувний кореляційний інтерферометр

У цьому розділі показано основні типи ЕСЗІ (електронних спекл зсувних інтерферометрів) інтерферометрів. Отримані принципові рівняння для визначення вимірюваних значень.

#### Конфігурація чутливого до змішень у площині

Інтерферометр ЕСЗІ чутливий до змішень у площині показано на Рис. 1. Для такого інтерферометра слід розглядати вектори -  $\vec{k}_{11}, \vec{k}_{12}, \vec{k}_{01}, \vec{k}_{02}$ .

Зразок має грубу поверхню, де виконуються вимоги:

• амплітуда й фаза елементарного збурення у точці ( $x, y, z$ ) незалежні одна від одної й від амплітуд інших елементарних збурень,

• фази  $\phi_k$  рівномірно розподілені в інтервалі ( $-\pi$  до  $\pi$  тобто шорсткість поверхні більша ніж довжина хвилі  $\lambda$  розсіяного світла).

Він освітлений двома взаємно когерентними пучками, які виходять з двох віртуальних вихідних точок  $S_1$  та  $S_2$  з хвильовими векторами  $\vec{k}_n$  і  $\vec{k}_{12}$  відповідно.

Поле розсіяння світла збирається об'єктивом і відображується у площині  $O$ . Розглянемо результат інтерференції світла на поверхні об'єкту. Загальна інтенсивність в точці  $O$ :

$$I_0 = I_\theta + I_m |\cos(\vec{k}_{11} \cdot \vec{S}_1 P - \vec{k}_{12} \cdot \vec{S}_2 P)| \quad (1)$$

$$\text{де } I_\theta = I_1 + I_2, I_m = 2 |A_1 \parallel A_2| \quad (2)$$

якщо  $\vec{k}_{01} = \vec{k}_{02}$ , а  $A_1, A_2$  амплітуди першого та другого променів.

Представлено: д. ф.-м. н., проф. Сжов С.М.

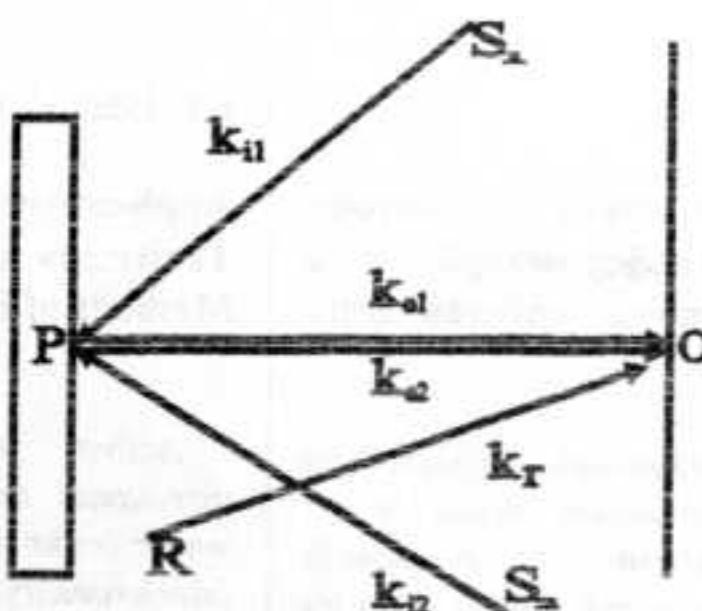


Рис. 1 Типові вектори в інтерферометрі чутливому до зміщень. а) у площині – вектори  $\vec{k}_{ii}, \vec{k}_{i2}, \vec{k}_{01}, \vec{k}_{02}$ . в) з площини – вектори  $\vec{k}_{ii}, \vec{k}_{01}, \vec{k}_r$ .

Тепер будемо розглядати точки  $P'$ , яка відповідає точці  $P$  до переміщення об'єкту та точку  $P''$ , яка відповідає точці  $P$  після переміщення об'єкту. Вектор переміщення визначається як  $\Delta\vec{P} = \overline{P'P''}$ . Тоді розподілення різниці інтенсивностей в точці спостереження до і після трансляції зразка буде мати вигляд:

$$I_R = I_b + I_m \sin^2 \left( \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \Delta\vec{P}) \right) + I_m \sin^2 \left( \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \Delta\vec{P} + \vec{k}_{ii} \cdot \overline{S_1 P'} - \vec{k}_{i2} \cdot \overline{S_2 P'}) \right) \quad (3)$$

де  $\vec{k} = \vec{k}_{i2} - \vec{k}_{ii}$ , який носить назву вектора чутливості точки  $P$ . Перший член в рівнянні (3) описує кореляційні смуги інтерференції обумовлені проекцією вектора переміщення на головний напрям вектора чутливості. Другий член рівняння (3) є швидкозмінною функцією яка обумовлена спектр-фоном.

Вираз може бути приведений до вигляду

$$I_R = I_b + I_m \cos(\vec{k} \cdot \Delta\vec{P}), \quad (4)$$

де  $I_b$  та  $I_m$  фонова та модуляційна складові інтенсивності, відповідно.

Для схеми інтерферометра, яка використовує симетричне освітлення чутливість на зсув в одну смугу буде дорівнювати

$$\Delta u = \frac{\lambda}{2 \sin \Theta}, \quad (5)$$

де  $\Theta$  кут між освітлюючими пучками.

Ця форма інтенсивності зображення використовується у фазово-кроковому алгоритмі для здобуття значення фази інтерференційних смуг.

#### Конфігурація чутлива до зміщень з площини

Якщо розглядати конфігурацію інтерферометра чутливого до переміщень з площини, треба розглядати вектори  $\vec{k}_{ii}, \vec{k}_{01}, \vec{k}_r$ . Де вектор  $\vec{k}_r$  є опорною хвилею з джерелом  $S'$ . Розглядаючи інтерференцію світла на поверхні об'єкту в точці  $O$ , можна отримати вираз для інтенсивності:

$$I = I_b + I_m |\cos(\vec{k}_{ii} \cdot \overline{S_1 P} + \vec{k}_0 \cdot \overline{PO} - \vec{k}_{ref} \cdot \overline{S'P})| \quad (6)$$

$$\text{де } I_b = I_0 + I_{ref}, \quad I_m = \sqrt{2I_0 I_{ref}}.$$

В разі переміщення поверхні об'єкту (розглядається точка  $P$ , а переміщення відбувається з площини) з точки  $P'$  у точку  $P''$ , вектор переміщень буде мати вигляд  $\Delta\vec{P} = \overline{P'P''}$ .

Тоді розподілення різниці інтенсивностей в точці спостереження до і після трансляції зразка буде мати вигляд:

$$I_R = I_b + I_m \sin^2 \left( \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \Delta\vec{P}) \right) + I_m \sin^2 \left( \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \Delta\vec{P} + \vec{k}_{ii} \cdot \overline{S_1 P'} + \vec{k}_0 \cdot \overline{PO} - \vec{k}_{ref} \cdot \overline{S'P}) \right) \quad (7)$$

де  $\vec{k} = \vec{k}_{ii} - \vec{k}_{ref}$ ,

В більш компактній формі вираз (7) можна привести до виразу (4).

Для схеми інтерферометра, яка використовує освітлення під кутом  $\Theta$  і нормальнє спостереження, чутливість на зсув в одну смугу буде дорівнювати

### Аналіз вібрацій методом усереднення часу

Для аналізу амплітуди коливань із зміщенням з площини використовують інтерферометр зображенний на Рис. . При дослідженнях приймемо, що об'єкт вібрує гармонічно з частотою  $\omega$ . Переміщення  $U$  точки  $P$  на поверхні об'єкту можна описати як

$$U(t) = U_M \cos(\omega t + \phi_0) \quad (9)$$

де  $\phi_0$  - початковою фазою вібрації, та стосується залежності від часу.  $U_M$  амплітуда коливань.

Якщо картина спостерігається інтервал часу  $\Delta t$ , а напрям вектора чутливості співпадає з напрямом амплітуди вібрації, то комбінуючи рівняння (9) і (4) та нехтуючи високочастотними складовими отримаємо:

$$I_r = I_0 \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \sin\left(\frac{1}{2} \vec{K} \cdot \vec{U}_M \cos(\omega t + \phi_0)\right) dt \quad (10)$$

де  $\Delta t$  - час інтегрування,  $I_0$  константа, і для камер CCD (приладів зарядового зв'язку) цей час дорівнює 1/25-1/30 сек. Після інтегрування вираз для інтенсивності (6) набере форми:

$$I_r(x, y) = I_0(x, y) J_0(\Omega_r(x, y)), \quad (11)$$

де  $J_0$  - функція Бесселя нульового порядку в першому наближенні. Параметр функції Бесселя визначається як:

$$\Omega_r(x, y) = \frac{4\pi}{\lambda} U_M. \quad (12)$$

Як і в статичних системах інтерферометричного вимірювання з метою отримання картини, яку фіксує камера чи інша система, вираз інтенсивності треба піднести до квадрату:

$$I_R(x, y) = I_0^2(x, y) J_0^2(\Omega_r(x, y)). \quad (13)$$

$$\Delta z = \frac{\lambda}{1 + \cos \Theta}, \quad (8)$$

де  $\Theta$ , кут між освітлюючим пучком та нормальню до поверхні.

На жаль, амплітуда вібрації не може бути кількісно обрахована з цього виразу однозначно. Для її обрахування потрібно застосувати один з фазо-зсувних методів.

Якщо покласти що референтний сигнал має форму:

$$\varphi_r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{U}_R \cos(\omega t + \phi_{r0}) \quad (14)$$

де  $\phi_{r0}$  - початкова фаза вібрації,  $t$  - залежність від часу,  $\bar{U}_R$  - амплітуда вібрації.

У цьому випадку, аргумент функції Бесселя  $J_0^2$  буде поданий у вигляді:

$$\Omega_r(x, y) = \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{U_M^2(x, y) + U_R^2 - 2U_M(x, y)U_R \cos\varphi_r}. \quad (15)$$

Змінюючи амплітуду та фазу опорного (референтного) пучка можна зсунути по фазі вібраційні Бесселевські смуги, які дають можливість вирахувати амплітуду вібрації застосовуючи метод фазових кроків.

В подальшому, були розглянуті методи які дозволяють вимірювати амплітуду (до 30nm) та фазу малих коливань.

### Вимірювання амплітуди і фази

В цій частині подано метод вимірювання амплітуди і фази малих коливань. Такі вимірювання вперше були розвинені Ногтоен і Локберг [6,7] та просунуто іншими [8, 9, 10]. Ця методика базується на вимірюваннях які проводяться у лінійному інтервалі функції  $J_0^2$ , яка обіймає амплітуди переміщення до 30nm. Плот Бесселевської функції для малих значень аргументу показано на Рис 2.

Рівняння (14) може бути розкладено у ряд Тейлора в околі точки  $a$ , на лінійному проміжку кривої (Рис 2), тоді отримаємо вираз для

інтенсивності зображення (зафікованої об'єктів з незначною амплітудою, яка лежить в картинки). Це рівняння дозволяє визначити амплітуду і фазу коливань використовуючи стандартну методику фазових кроків.

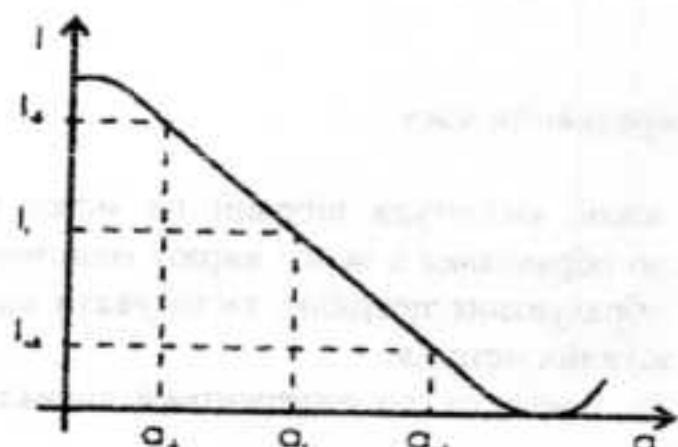


Рис. 2 Розподілення амплітуд в усередненій по часу інтерферограмі  $J_0^2$  для незначних амплітуд вібрацій.  $c_0$  – робоча точка на схилі кривої.

Чотири зображення отримані з різницею фаз між референтним та об'єктним пучками  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  і  $270^\circ$ , відповідно. Отримано відповідний набір картин інтенсивності.

$$\begin{aligned}I_1(x, y) &= I_h(x, y) - k(x, y)a_0(x, y)\cos(\varphi(x, y)), \\I_2(x, y) &= I_h(x, y) + k(x, y)a_0(x, y)\sin(\varphi(x, y)), \\I_3(x, y) &= I_h(x, y) + k(x, y)a_0(x, y)\cos(\varphi(x, y)), \\I_4(x, y) &= I_h(x, y) - k(x, y)a_0(x, y)\sin(\varphi(x, y)).\end{aligned}\quad (16)$$

Коефіцієнт  $k(x, y)$  отримано процедурою калібрування, яка складається з двох кроків в кожну сторону лінійної частини робочої області, яка відповідає амплітудам  $I_{-\delta}$  і  $I_{+\delta}$ , відповідно, і вирахуваним значенням:

$$k(x, y) = \frac{I_{-\delta} - I_{+\delta}}{2\delta}. \quad (17)$$

Фазу і амплітуду можна буде розрахувати використовуючи формули (18).

Обмеження методу полягає в тому, що він може бути використаний для аналізу коливань

$$\begin{aligned}\delta(x, y) &= \arctan \left[ \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right], \\I_m(x, y) &= \frac{\sqrt{(I_1 - I_3)^2 + (I_4 - I_2)^2}}{2k(x, y)}.\end{aligned}\quad (18)$$

### Регульований відгалужувач світла в ЕСЗІ системах

Важливим елементом любого інтерферометра є оптичний поділювач пучків. У даному представленні, для мініатюризації схемних рішень та усунення додаткового розсіяння світла при відбиванні від дзеркальних елементів інтерферометра, пропонується до використання волоконні одномодові світловодні кабелі. В якості оптичного поділювача, можливо використовувати [13,14,15,16] волоконний спрямований відгалужувач з керованим відсotковим співвідношенням відбитий/пропущений. Відношення відбитої енергії до той що пройшла залежить від довжини зони спільногo зв'язку двох світловодів і з періодичною функцією. Це можна подати у схемному вигляді зображеному на Рис. 3.

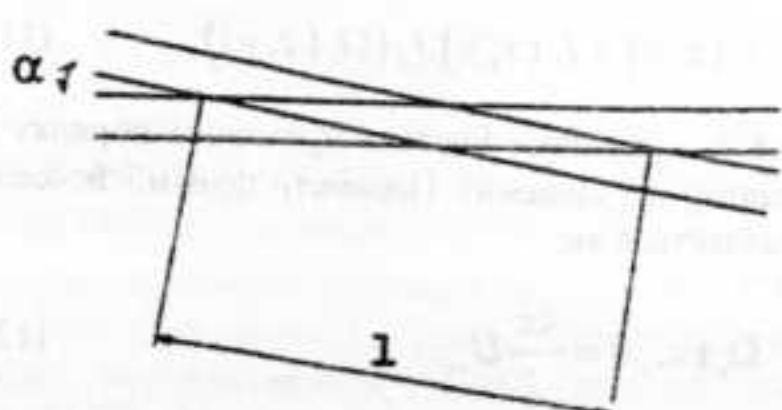


Рис.3 Схематичне представлення довжини зв'язку у регульованому направленому відгалужувачі.

При зміні довжини контакту двох світловодів  $l$ , змінюються співвідношення відбитої енергії до тієї що пройшла. Фізично це виконано так, що два поліровані світловода на оптичному звязуючому зв'язку  $z$  відповідним показником заломлення знаходяться в оптичному контакті. Приєднане волокно, за допомогою механічного пристрою, може дуже точно змінювати кут між вісами обох світловодів  $a$ , тим самим змінюючи довжину зв'язку  $l$ .

### Фазозсувний пристрій

Наступним важливим елементом інтерферометра, що розглядається, є фазозсувний пристрій. Розглянемо його принципову конструкцію.

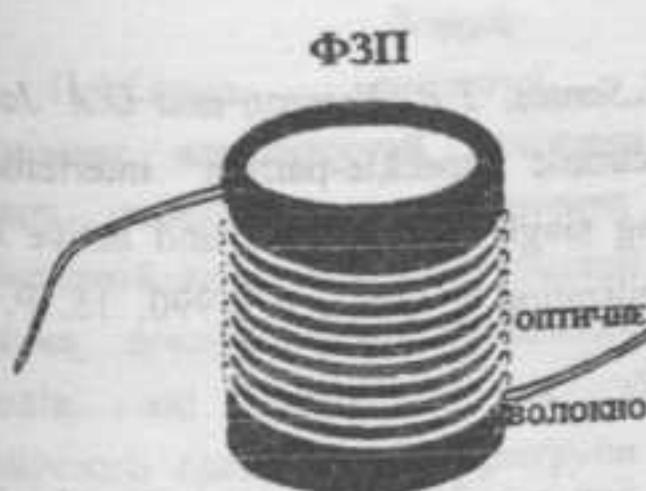


Рис.4 Оптоволоконний фазозсувний пристрій на базі п'єзо-керамічного циліндра.

В загальному випадку фазозсувний пристрій може бути зроблений з п'єзо-керамічного циліндра на якому намотаний світловодний кабель[15]. Під дією відповідного живлення п'єзо-кераміка розширяється і змінює оптичний шлях у волокні. Змінюючи напругу живлення п'єзо-керамічного циліндра, можна змінювати фазу світлової хвилі опорного (референтного) пучку інтерферометра.

Таким чином, ми розглянули зміни які можна внести у наведену раніше схему волоконного інтерферометра. Загальну схему інтерферометра з наведеними змінами у референтному пучку (оптоволоконний фазозсувний пристрій), та наявність регульованого відгалужувача, можна подати у наступному вигляді Рис.5.

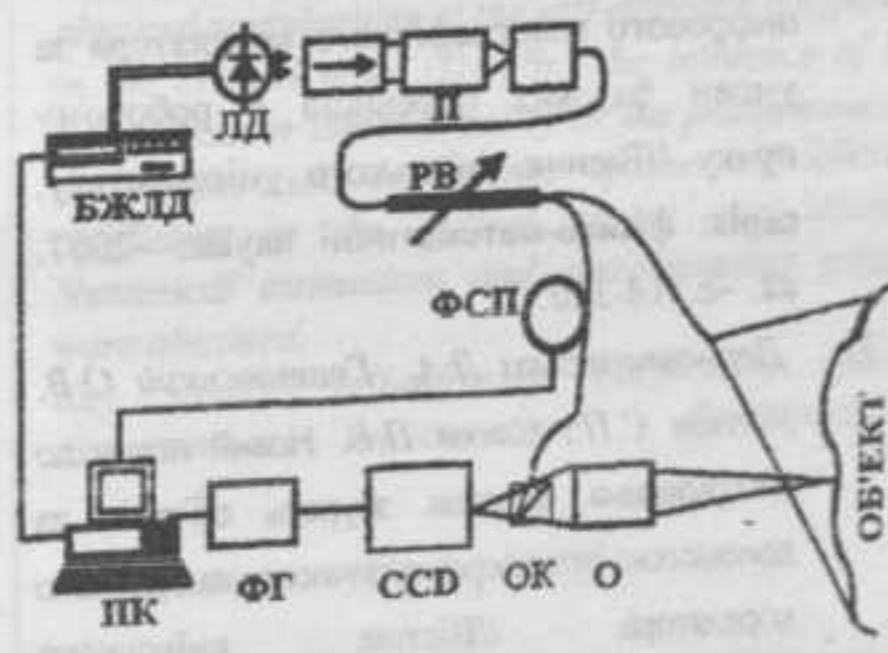


Рис.5 Принципова схема електронного інтерферометра побудована на лазерному діоді (ЛД) з блоком стабілізації (БЖЛД).

П - коліматор пучка та пристрій вводу у світловод.

РВ - регульований відгалужувач.

ФСП - фазозсувний пристрій.

О - об'єктив цифрової камери (CCD).

ОК - оптичний куб для суміщення пучків.

ФГ - фрейм-грабер (захоплювач кадру).

Кінцевим результатом поданої роботи було експериментальне створення лабораторного зразку слідкового спектрального інтерферометра спрямованого на вирішення задач експериментальної механіки[9,10].

Список використаних джерел

1. J. W. Goodman. Statistical properties of laser speckle patterns // In Laser Speckle and Related Phenomena, ed. J. C. Dainty, Springer-Verlag, Berlin. –1975.
2. Держипольська Л.А., Гнатовський О.В. Удалов Є.П. Моделювання роботи цифрового голографічного корелятора за умови фазових перешкод в робочому пучку // Вісник київського університету, серія: фізико-математичні науки. –2007, в2. –с.314-320.
3. Держипольська Л.А., Гнатовський О.В. Удалов Є.П., Єжов П.В. Новий підхід до вимірювання фазових збурень об'єктів за допомогою інтерферометричного панорамного корелятора // Вісник київського університету, серія: фізико-математичні науки, 2008. –в4. –(у друці).
4. R. J. Pryputniewicz and K. A. Stetson Measurement of vibration patterns using electro-optic holography // Proc. SPIE 1989. – 1162. –P456-467.
5. K. Hogmoen and O. J. Lokberg Detection and measurement of small vibrations using electronic speckle pattern interferometry // Appl. Opt. – 1977, 16. –P1869-1875.
6. S. Ellingsrud and O. J. Lokberg Full field amplitude and phase measurement of loudspeakers by using TV-holography and digital image processing // J. Sound Vibr. . – 1993. –168. –P193-208.
7. S. Ellingsrud and G. O. Rosvold Analysis of a data-based TV-holography system used to measure small vibration amplitudes // J. Opt. Soc. Amer. –1992 –A, 9. –P 237-251.
8. O. J. Lokberg, R. Rusiad and M. Espeland. "Reconstruction of sound fields using TV-holography // Proc. SPIE . –1994. – 2358. –P 305-312.
9. E.P. Udalov, V. I. Lavrenuck, Novell approach to determine residual stresses by using of holographic interferometer // 18<sup>th</sup> Symposium on Experimental Mechanics of Solids, Jachranka near Warsaw, Poland, 14-16 October. –1998. –P- 438-442.
10. E.P. Udalov, A. Oliynik Determination of all stress tensor components on the object surfaces using holographic interferometer // The volume "Current Research on Holography and interferometry methods for object properties measurements" is received by SPIE. –2003. –N 5134. –P.12-21
11. J.L.Santos, T.P. Newson and D.A. Jackson Electronic speckle-pattern interferometry using single-mode fibers and active fringe stabilization // Opt.Lett, 1990, 15, P. 573-575.
12. R. Spooren Standard charge-couple device cameras for video speckle interferometry // Opt. Eng. –1994. – 33. – P. 889-896.
13. H. Atcha and R.P. Tatam The use of laser diodes and monomode optical fiber in electronic speckle pattern interferometry // Proc. SPIE . –1584. –1991. –P. 221-232.
14. K. Patorski and A. Olczak Modified in-plane electronic speckle pattern shearing interferometry// . –Proc. SPIE –1996 – 2860 – P. 256-262.

Надійшла до редколегії 01.02.2009

УДК: 539.171

Чалий О.В., д. ф.-м.н., проф.  
Зайцева О.В., асп.

## Коефіцієнт дифузії в критичній області з урахуванням просторової дисперсії та нижньої кросоверної розмірності

Вивчена критична поведінка коефіцієнту дифузії рідин у великих та маліх об'ємах в різних областях наближення до критичної точки по температурній змінній. З метою уникнення нефізичних особливостей коефіцієнта дифузії в критичній точці ( $D \rightarrow 0$ ) враховані ефекти просторової дисперсії. В роботі також вивчений вплив нижньої кросоверної розмірності на особливості температурної залежності коефіцієнта дифузії в критичній області. Отримані числові оцінки та побудовані відповідні графіки, які ілюструють проведені теоретичні розрахунки.

**Ключові слова:** коефіцієнт самодифузії, просторова дисперсія, нижня кросоверна розмірність.

### Вступ.

Проблема критичної поведінки динамічних властивостей речовини в околі фазових переходів та критичних точок в необмеженій та обмеженій геометрії вивчалася багатьма дослідниками в рамках сучасних підходів, які базуються на застосуванні динамічного скейлінгу, ренормгрупи та методу колективних змінних [1-6]. Один з головних результатів проведених досліджень особливостей дифузійних процесів полягає в їх різкому сповільненні (critical slowing down). Експериментальним проявом цього ефекту є зменшення коефіцієнту дифузії, що має своєм наслідком звуження ширини центральної лінії в спектрі розсіяного світла з наближенням до критичної точки.

Критичні явища і фазові переходи в системах з обмеженою геометрією мають значні відмінності від аналогічних явищ і переходів в об'ємній фазі [7-11]. Останні відбуваються в системах, лінійні розміри  $L$  яких задовільняють нерівності  $L \gg \xi$ , де  $\xi$  – радіус кореляції флюктуацій параметру порядку. Виявляється, що для речовин в обмеженій геометрії ( $\xi \leq L$ ) положення екстремумів фізичних властивостей

Chalyi A.V., Dr. Sci., Prof.  
Zaitseva E.V., PhD stud.

**Self-diffusion coefficient in the critical region with taking into account effects of the spatial dispersion and low-crossover dimensionality.**  
*The critical behavior of the self-diffusion coefficient of confined and non-confined fluids in different approaches to the critical point due to temperature variable was studied. The effects of the spatial dispersion were taken into account to avoid non-physical singularities of the self-diffusion coefficient in the critical point ( $D \rightarrow 0$ ). The influence of the low-crossover dimensionality on the peculiarities of the temperature dependence of the self-diffusion coefficient in the critical region was studied. Numerical estimations and corresponding graphs were obtained.*

**Key words:** self-diffusion coefficient, spatial dispersion, low-crossover dimensionality.

повинно зсуватися в бік менших температур з одночасним згладжуванням (rounding) їх особливостей. Подібна специфіка фазових переходів і критичних явищ в обмежених системах різної фізичної природи знаходить своє пояснення при використанні гіпотези просторово-обмеженого скейлінгу (finite-size scaling) [7].

В цій роботі головна увага при вивченні коефіцієнта самодифузії рідин в критичній області буде приділена урахуванню наступних факторів:

1. **Просторова дисперсія.** Нехтування ефектами просторової дисперсії (нелокальності) призводить до нереальних експериментальних і теоретичних наслідків – прямуванню фізичних властивостей в критичних точках чи точках фазових переходів 2-го роду до нескінченості (ізотермічна стисливість, магнітна сприйнятливість, ізобарна та ізохорна теплосмноті тощо) або до нуля (кофіцієнти дифузії та температуропровідності, швидкість звуку тощо).

2. **Нижня кросоверна розмірність.** Послідовний опис критичних явищ і фазових переходів в системах різної природи вимагає використання

поняття класів універсальності. Певний клас універсальності об'єднує всі ті об'єкти, в яких критичні явища і фазові переходи відбуваються у відповідності зі скейлінговими законами з однаковими критичними індексами, тобто ці об'єкти є ізоморфними. Важливо підкреслити, що поняття класу універсальності для просторово обмежених систем повинно включати не лише ознаки, які притаманні об'ємним системам, а саме: однакові просторову розмірність, а також розмірність параметру порядка, симетрію гамільтоніана та короткосяжність (або далекосяжність) потенціалу міжмолекулярної взаємодії, але й збереження (серед інших додаткових умов) незмінною геометрії системи або, іншими словами, так званої нижньої кросоверної розмірності.

Нижня кросоверна розмірність  $d_{\text{NKR}}$  визначає граничну просторову розмірність того геометричного об'єкту, в який переходить реальний об'єм досліджуваної системи, якщо всі його лінійні розміри в напрямку (чи напрямках) просторової обмеженості прямувати до мінімально допустимої величини, тобто до діаметру одної молекули. Зрозуміло, що за таких умов тривимірний плоско-паралельний прошарок переходить у мономолекулярну площину (по суті - у двовимірний об'єкт), тоді як тривимірна циліндрична пора перейде в мономолекулярну нитку (по суті - в одновимірний об'єкт), а обмежені з усіх трьох напрямків сфера чи куб стягнуться в одну молекулу, тобто в нульвимірний об'єкт.

#### Коефіцієнт самодифузії індивідуальних рідин у великих об'ємах

Розглянемо спочатку критичну поведінку коефіцієнта самодифузії у великих об'ємах з лінійними розмірами  $L \gg \xi$  без урахування ефектів просторової дисперсії. У відповідності до відомого результату термодинаміки необоротних процесів для коефіцієнту самодифузії  $D = (L_R + L_S)(\partial\mu/\partial\rho)_T$  (див., наприклад, [12, 13]) та представлення кінетичного коефіцієнту Онзагера  $L$  через суму регулярної  $L_R$  та сингулярної  $L_S$  частин маємо

$$D = (L_R + L_S)(\partial\mu/\partial\rho)_T \quad (1)$$

Динамічний скейлінг [1-3] передбачає, що сингулярна частина кінетичного коефіцієнту Онзагера  $L_S$  поводить себе поблизу критичної точки як радіус кореляції  $\xi$ , тобто  $L_S = L_S^0 \tau^{-\nu}$ , де  $L_S^0$  - амплітуда сингулярної частини коефіцієнту Онзагера. Критичний індекс  $\nu \approx 0.63$  для рідин у великих об'ємах, тобто в об'ємній фазі. Що стосується регулярної частини  $L_R$  коефіцієнта Онзагера, то він співпадає із значенням цього кінетичного коефіцієнта в області  $\tau \geq 1$ , в котрій можна знехтувати впливом флюктуаційних ефектів.

Надалі будемо окремо аналізувати коефіцієнт дифузії в 3-х різних областях, які розрізняються значенням температурної змінної

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \text{що відрізкована від критичної}$$

температури  $T_c$ .

Динамічна флюктуаційна область. В цій області, яка відповідає асимптотично близькому околу критичної точки і визначається подвійною нерівністю  $0 \leq \tau \ll \tau_D$ , сингулярна частина коефіцієнта Онзагера суттєво переважає його регулярну частину. Температура  $\tau_D$  була введена в роботі [14] і визначає так звану температуру динамічного кросоверу, при якій  $L_R \approx L_S$ . Очевидно, що для температури динамічного кросоверу можна запропонувати наступну формулу:

$$\tau_D = (L_S^0 / L_R)^{1/\nu} \quad (2)$$

У динамічній флюктуаційній області з урахуванням того факту, що похідна  $(\partial\mu/\partial\rho)_T$  визначає обернену ізотермічну стисливість рідини  $\beta_T \sim \tau^{-\gamma}$ , де критичний індекс  $\gamma \approx 1.24$ , отримаємо для безрозмірного значення коефіцієнта самодифузії такий вираз:

$$D' = D/L_S (\partial\mu/\partial\rho)_T^0 = D/D_0 = \tau^{\gamma-\nu} \quad (3)$$

В цій формулі використано позначення для амплітуди коефіцієнта самодифузії  $D_0 = L_S (\partial\mu/\partial\rho)_T^0$ . Екстраполюючи формулу (3) на критичну точку, приходимо до висновку:

коєфіцієнт дифузії  $D^*$  прямує до нуля за законом  $D^* = \tau^{0.61}$  при досягненні критичного значення температури ( $T \rightarrow T_c$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ) для індивідуальної рідини, яка займає об'єм, що за своїми лінійними розмірами суттєво переважає радіус кореляції флюктуацій параметра порядка, тобто флюктуацій

регулярної області всередині всієї критичної області  $\tau_1 < \tau \leq 1$  залежить від чисельного значення числа Гінзбурга-Леванюка  $Gi$ , а саме: при  $Gi \ll 1$  динамічна регулярна область існує в температурному інтервалі  $Gi < \tau < \tau_1 < 1$ , якщо  $Gi \geq 1$ , то в усій критичній області  $0 < \tau \leq 1$

$\tau$	$L_R$	$L_S$	$L$	$D = (L_R + L_S)(\partial\mu/\partial\rho)$	$D^*$	$D_{\text{води}}, \text{м}^2/\text{s}$
1.0	1	$10^{-3}$	1.001	1	1.001	$2.30 \cdot 10^{-9}$
$10^{-1}$	1	$4 \cdot 10^{-3}$	1.004	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$1.29 \cdot 10^{-10}$
$10^{-2}$	1	$1.8 \cdot 10^{-2}$	1.018	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$3.36 \cdot 10^{-3}$	$7.73 \cdot 10^{-12}$
$10^{-3}$	1	$10^{-3}$	1.1	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$4.47 \cdot 10^{-13}$
$10^{-4}$	1	$3 \cdot 10^{-4}$	1.3	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$3.29 \cdot 10^{-14}$
$10^{-5}$	1	1	2.0	$6.3 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$2.90 \cdot 10^{-15}$
$10^{-6}$	1	6.3	7.3	$3.6 \cdot 10^{-8}$	$2.63 \cdot 10^{-7}$	$6.05 \cdot 10^{-16}$
$10^{-7}$	1	25	26	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$5.46 \cdot 10^{-8}$	$1.26 \cdot 10^{-17}$

густини  $\Delta\rho = (\rho - \rho_c)/\rho_c$ . Зрозуміло, що цей висновок відповідає наближенню, в якому зняхтувано ефектами просторової дисперсії.

Динамічна кросоверна область. Переходна (кросоверна) область характеризується подвійною нерівністю  $\tau_{11} \leq \tau \ll \tau_1$ , де температура  $\tau_1$  визначає те граничне значення температурної змінної, при перевищенні якої в критичній області вже не слід брати до уваги масштабні (скейлінгові) закони. Більш детально питання щодо температури  $\tau_1$  обговорено в роботі [15]. Оскільки в динамічній кросоверній області при  $\tau \approx \tau_{11}$  регулярна і сингулярна частини коєфіцієнта Онзагера виявляються одного порядку ( $L_R \approx L_S$ ), то для безрозмірного коєфіцієнта самодифузії маємо:

$$D^* = D/D_0 \approx 2\tau^{1-\nu}, \quad (4)$$

тобто з віддаленням від критичної точки коєфіцієнт самодифузії зростає і для  $\tau \approx \tau_{11}$  має амплітуду приблизно вдвічі більшу, ніж у динамічній флюктуаційній області.

Динамічна регулярна область. В цій області, яка визначається нерівністю  $\tau_1 < \tau \leq 1$ , регулярна частина  $L_R$  коєфіцієнта Онзагера суттєво переважає його сингулярну частину  $L_S$ . Очевидно, що можливість існування динамічної

слід враховувати флюктуаційні ефекти і динамічна регулярна область в цьому випадку відсутня.

В першому випадку, тобто при  $Gi \ll 1$ , в динамічній регулярній області  $\tau_1 < \tau \leq 1$  для коєфіцієнта самодифузії маємо

$$D^* = D/L_R(\partial\mu/\partial\rho)_T^0 = D/D_{0R} = \tau^\gamma \quad (5)$$

З формулі (5) випливає зокрема, що зменшення коєфіцієнта самодифузії з наближенням до критичної точки в динамічній регулярній області відбувається більш швидко, ніж в первих двох областях (флюктуаційній та кросоверній), оскільки критичний індекс  $\gamma$  в (8) майже вдвічі перевищує значення показника  $\gamma - \nu$  в (3) і (4). Крім того, слід зазначити, що амплітуда  $D_{0R} = L_R(\partial\mu/\partial\rho)_T^0$  в (5) не співпадає з амплітудою  $D_0$  в (3) і (4), оскільки в загальному випадку  $L_R \neq L_S$ .

У другому випадку, тобто при  $Gi \geq 1$ , розрахунки коєфіцієнту самодифузії повинні вестися за формулами (3) і (4).

Числові розрахунки коєфіцієнту самодифузії рідини в критичній області. Проілюструємо отримані теоретичні результати числовими розрахунками коєфіцієнту самодифузії індивідуальної рідини у великих об'ємах в критичній області. Таблиця 1 містить дані щодо

температурної залежності безрозмірних величин коефіцієнту дифузії  $D^* = D/D_0$ , оберненої ізотермічної стисливості

$$(\partial \mu / \partial \rho)_T^* = (\partial \mu / \partial \rho)_T / (\partial \mu / \partial \rho)_T^0 \quad \text{та}$$

співвідношення між регулярною  $L_R^* = L_R / L_R^0$  і сингулярною  $L_S^* = L_S / L_R^0$  частинами коефіцієнта Онзагера  $L^* = L / L_R^0$ .

Температура динамічного кросоверу обрана як  $\tau_D = 10^{-5}$ , що збігається з оцінками, наведеними в [15]. Що стосується температурного інтервалу для змінної  $\tau$  від  $10^{-7}$  до 1, то в більшості реальних (некомп'ютерних) експериментів з дослідження критичних явищ в класичних рідинах температурні відхилення  $\tau \leq 10^{-6}$ , а разом з ними й динамічна флюктуаційна область  $0 \leq \tau \ll \tau_D$ , є скоріше за все недосяжними. Виключення складають надзвичайно прецизійні експерименти з рідким  $\text{He}^4$  поблизу  $\lambda$ -точки, проведені зокрема в умовах мікログравітації на супутнику Space Shuttle під час космічного польоту, в яких точність фіксації температури досягала 1 нК [16,17].

#### Таблиця 2

На рис.1 наведено графіки температурної залежності кінетичного коефіцієнту Онзагера та його регулярної і сингулярної частин, а на рис. 2 – коефіцієнту самодифузії в критичній області.

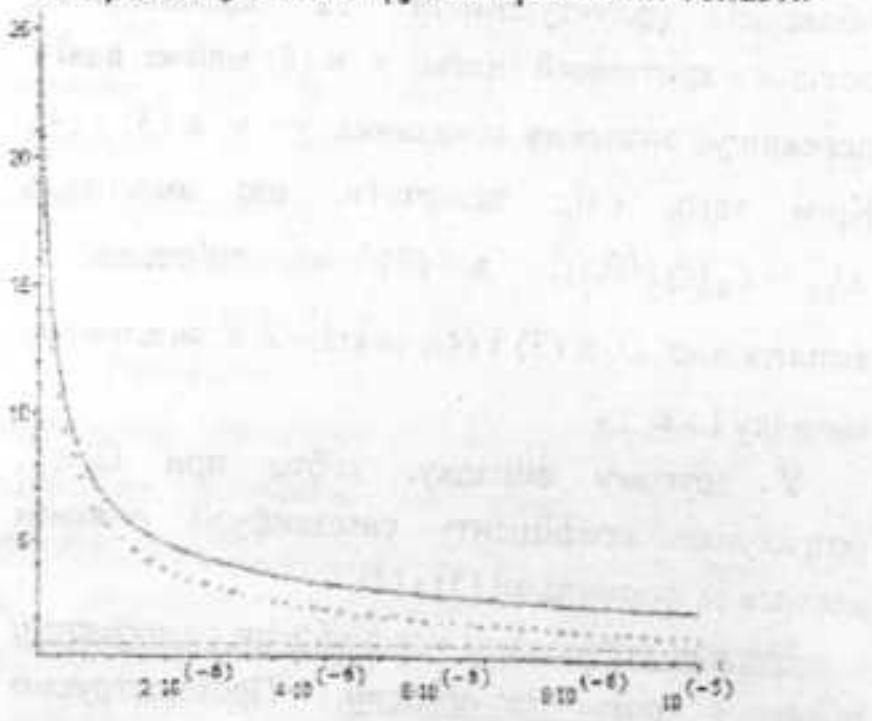


Рис. 1. Температурна залежність кінетичного коефіцієнта Онзагера.

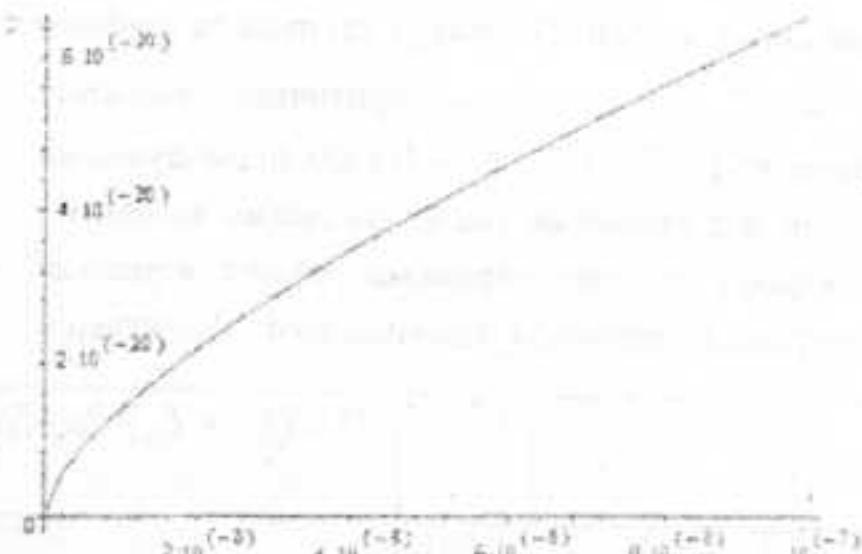


Рис. 2. Температурна залежність коефіцієнта самодифузії.

На закінчення цього розділу зазначимо, що використання безрозмірних величин для коефіцієнту самодифузії  $D^* = D/D_0$  та знання числового значення амплітуди  $D_0 = L_R^0 (\partial \mu / \partial \rho)_T^0$  для певної рідини дозволяє обчислити в явному вигляді коефіцієнт самодифузії  $D$  цієї рідини в усій критичній області. Як приклад, зробимо розрахунок коефіцієнта самодифузії молекул води. Для цього скористаємося числовим значенням амплітуди коефіцієнта самодифузії молекул води  $D_0$ , яка повинна співпадати із значенням коефіцієнту самодифузії води в об'ємній фазі, знайденій в регулярній області далеко від критичної точки. Використаємо значення  $D_0 = 2,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{s}$ , яке було отримане експериментально в роботі [18] для молекул води при температурі  $T = 293 \text{ K}$ , яка відстоїть на декілька сотень градусів від критичної температури води  $T_c = 647 \text{ K}$ . Тоді з урахуванням цього значення  $D_0$ , а також даних для  $D^*$  з передостаннього стовпчика табл. 1, отримаємо числові результати для температурної залежності коефіцієнту дифузії молекул води в критичній області (див. останній стовпчик табл. 1).

#### Коефіцієнт самодифузії рідин у малих об'ємах

В подальшому будемо розглядати критичні явища в рідинах у малих об'ємах різної геометрії з лінійними розмірами в напрямках просторової обмеженості  $L \approx 1 \div 100 \text{ nm}$ . Наведена раніше для рідин у великих об'ємах сильна нерівність  $L \gg \zeta$  перестає виконуватися в таких мезомасштабних рідинах, тому в них слід обов'язково приймати до уваги ефекти

просторової обмеженості [7-11]. До подібних систем можуть бути віднесені порові середовища (наприклад, циліндричні та щілиноподібні пори), біологічні об'єкти (іонні канали, синаптичні щілини, мембрани) та інші утворення.

Коефіцієнт самодифузії просторово обмеженої індивідуальної рідини характеризується не лише залежністю від температурної змінної  $\tau = (T - T_c)/T_c$ , тобто відхилення температури рідини від її критичного значення в об'ємній фазі, та від параметра порядку  $\Delta\rho = (\rho - \rho_c)/\rho_c$ , тобто відхилення густини рідини від її критичного значення в об'ємній фазі, або від польової змінної  $h$ , яка є спряженою до параметра порядку в термодинамічному сенсі, але й від лінійних розмірів системи  $L$  в напрямку(ах) просторової обмеженості. Відповідно до масштабної гіпотези для просторово обмежених систем (див., наприклад, [19]) формули, які характеризують їх залежності, мають наступний вигляд для різних областей наближення до критичного стану рідини:

а) для флюктуаційної динамічної області

$$D = L^{1-\gamma/v} f_D^{(1)}(x, y, z), \quad (6)$$

де аргументи масштабної функції  $f_D^{(1)}(x, y, z)$  дорівнюють

$$x = \tau L^{1/v}, y = \Delta\rho L^{\nu/\beta}, z = kL;$$

б) для кросоверної динамічної області

$$D = L^{1-\gamma/v} f_D^{(2)}(x, y, z), \quad (7)$$

причому асимптотичні вирази для масштабних функцій, які визначають амплітуди коефіцієнта самодифузії, пов'язані між собою співвідношенням  $f_D^{(2)}(x, 0, 0) = 2f_D^{(1)}(x, 0, 0)$ ;

в) для регулярної динамічної області

$$D = L^{-\gamma/v} f_D^{(3)}(x, y, z) \quad (8)$$

З формули (6) випливає, що в близькому околі критичної ізотерми індивідуальної рідини ( $y \rightarrow 0$ ) та за умовою нехтування ефектами просторової дисперсії ( $z \rightarrow 0$ ) коефіцієнт самодифузії досягає екстремума (мінімуму) за

температури  $\tau_M$ , яка визначається співвідношенням

$$\tau_M = -\frac{f_D^{(1)}(x, 0, 0)L^{-1/v}}{v\partial f_D^{(1)}(x, 0, 0)/\partial x} \quad (9)$$

Звідси маємо такі наслідки: 1)  $\tau_M < 0$ , тобто значення температурної змінної, яка відповідає екстремуму коефіцієнта самодифузії  $D$  просторово обмеженої рідини, зсувається в бік від'ємних температур по відношенню до критичної температури  $T_c$  (іншими словами,  $\tau = 0$ ), для якої має місце мінімум  $D$  для рідин у великих об'ємах (див. рис. 2); 2) із зростанням лінійного розміру  $L$  відхилення температурної змінної  $\tau_M$  для екстремума коефіцієнта самодифузії зменшується, прямуючи при  $L \gg \xi$  до нуля, тобто температура екстремума коефіцієнта самодифузії  $\tau_M \rightarrow T_c(\infty)$ , де  $T_c(\infty)$  — критична температура рідини в об'ємній фазі.

Для близького околу критичної ізотерми ( $x \rightarrow 0$ ) та без урахування ефектів просторової дисперсії ( $z \rightarrow 0$ ) коефіцієнт самодифузії досягає мінімума (точніше кажучи, свого нульового значення), якщо параметр порядку рідини дорівнює

$$\Delta\rho_m = -\frac{vf_D^{(1)}(0, y, 0)L^{-\nu/\beta}}{\beta\partial f_D^{(1)}(0, y, 0)/\partial y} \quad (10)$$

Відповідно для польової змінної в точці екстремуму коефіцієнта самодифузії маємо таке значення:

$$h_m = -\frac{vf_D^{(1)}(0, y, 0)L^{-\nu/\beta}}{\beta\delta\partial f_D^{(1)}(0, y, 0)/\partial y} \quad (11)$$

причому в цьому випадку масштабний аргумент  $y = hL^{\nu/\beta}$ .

### Вплив нижньої кросоверної розмірності

Для дослідження впливу нижньої кросоверної розмірності на коефіцієнт самодифузії мезомасштабних рідин скористаємося результатом розрахунку радіуса

кореляції флуктуацій густини  $\xi^*$  для просторово обмежених рідинних систем різної геометрії (див., наприклад, [19])

$$\xi^* = \xi_0 [\tau + (G/S)^{1/v} (1 + \tau)]^{-v} \quad (12)$$

де  $S=L/\xi_0$  - кількість мономолекулярних шарів у напрямку просторової обмеженості  $L$ , а  $G$  - фактор, який враховує геометричну форму обмеженої рідини. Зокрема, для плоско-паралельного прошарку завтовшки  $d=2L_0$  фактор  $G=\pi$ , тоді як  $S=2L_0/\xi_0$ ; для циліндричної пори радіуса  $a$  маємо  $G=\mu_1$ ,  $S=a/\xi_0$ ; для пори квадратного перерізу зі стороною  $H$  фактор  $G=2\sqrt{2}\pi$ , а  $S=H/\xi_0$ .

Тоді, враховуючи, що  $\xi_0/L = 1/S$ , а також скейлінговий вираз  $\xi = \xi_0 \tau^{-v}$  для радіуса кореляції у рідині великого об'єму ( $S \rightarrow \infty$ ) та співвідношення (3)-(5) для коефіцієнта самодифузії, маємо наступні формулі для безрозмірного коефіцієнту самодифузії  $D^* = D/D_0$  в мезомасштабних рідинах різної геометричної форми:

а) для флуктуаційної та кросоверній динамічних областей

$$D^* = \left\{ \left( \frac{G\xi_0}{L} \right)^{1/v} + \left[ 1 + \left( \frac{G\xi_0}{L} \right)^{1/v} \right] \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^{1/v} \right\}^{1-v}, \quad (13)$$

б) для регулярної динамічної області

$$D^* = \left\{ \left( \frac{G\xi_0}{L} \right)^{1/v} + \left[ 1 + \left( \frac{G\xi_0}{L} \right)^{1/v} \right] \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^{1/v} \right\}^v \quad (14)$$

Аналізуючи формулі (13) і (14), можна побачити, що для об'ємів, які вважають малими в сенсі нерівності  $\xi \gg L$ , коефіцієнт самодифузії  $D^*$  залежить лише від лінійних розмірів  $L$  і від геометричного фактору  $G$  у відповідності до співвідношень: а)

$D^* = (G\xi_0/L)^{1/v-1}$  для флуктуаційної та кросоверній динамічних областей; б)

$D^* = (G\xi_0/L)^{1/v}$  для регулярної динамічної області.

Звідси випливає, що з урахуванням числових значень критичних індексів  $v=1,24$  і  $v=0,63$  показники  $1/v-1=0,97 \approx 1$  і  $1/v=1,97 \approx 2$ , тобто із збільшенням  $L$  (в межах нерівності

$\xi \gg L$ ) коефіцієнт самодифузії  $D^*$  зменшується майже лінійно ( $D^* \sim 1/L$ ) для флуктуаційної та кросоверній динамічних областей та приблизно за квадратичним законом ( $D^* \sim 1/L^2$ ) для регулярної динамічної області. Рис. 3 ілюструє отримані вище результати.

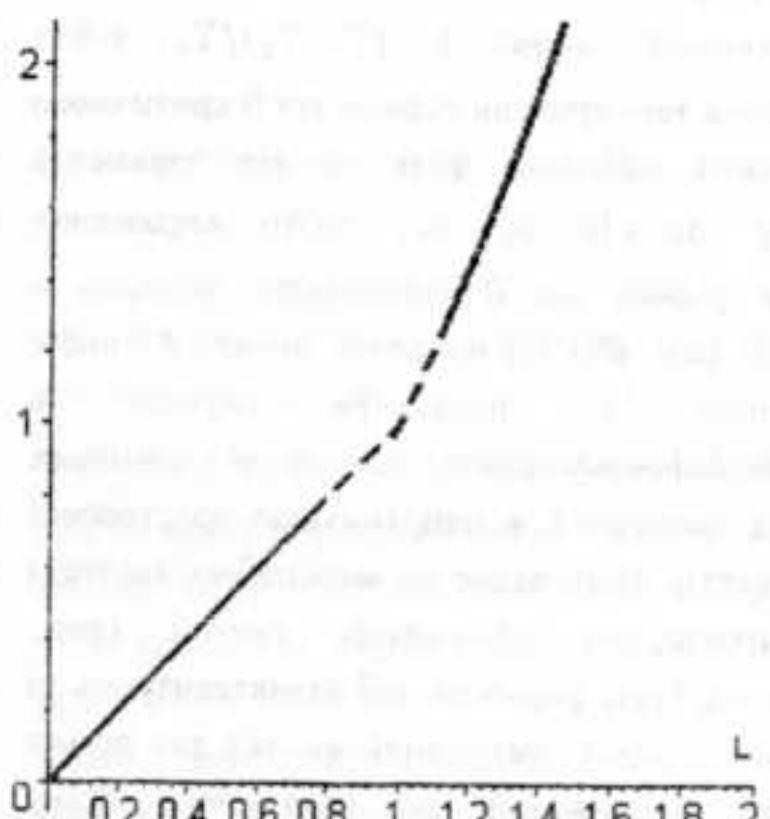


Рис.3. Залежність коефіцієнту самодифузії  $D^*$  від лінійного розміру  $L$  для рідин у малих об'ємах ( $\xi \gg L$ ).

В протилежному випадку достатньо великих об'ємів в сенсі нерівності  $\xi \ll L$  з формул (13),(14) випливає, що коефіцієнт самодифузії  $D^*$  стає залежним лише від радіуса кореляції  $\xi$ , а саме: а)  $D^* = (\xi_0 / \xi)^{1/v-1}$  для флуктуаційної та кросоверній динамічних областей; б)  $D^* = (\xi_0 / \xi)^{1/v}$  для регулярної динамічної області. Залежності  $D^*(\xi)$  легко переформулювати в залежності коефіцієнта самодифузії від температурної змінної  $t$ , параметра порядку  $\Delta p$  та польової змінної  $h$ , враховуючи такі співвідношення:  $\xi = \xi_0 \tau^{-v}$  в околі критичної ізохори,  $\xi = \xi_0 \Delta p^{-v/\beta}$  та  $\xi = \xi_0 h^{-v/\beta}$  в околі критичної ізотерми. Слід зазначити, що у випадку  $\xi \ll L$  вплив нижньої кросоверної розмірності на коефіцієнт

самодифузії проявляється лише в поправочних доданках  $O(G\xi_0/L)$ .

Ще один кількісний результат, який має безпосереднє відношення до впливу нижньої кросоверної розмірності на коефіцієнт самодифузії просторово обмеженої рідини різної геометрії, представлений на рис. 5. На ньому подано температурну залежність  $D^*$  при фіксованому значенні параметра  $S=10$ .

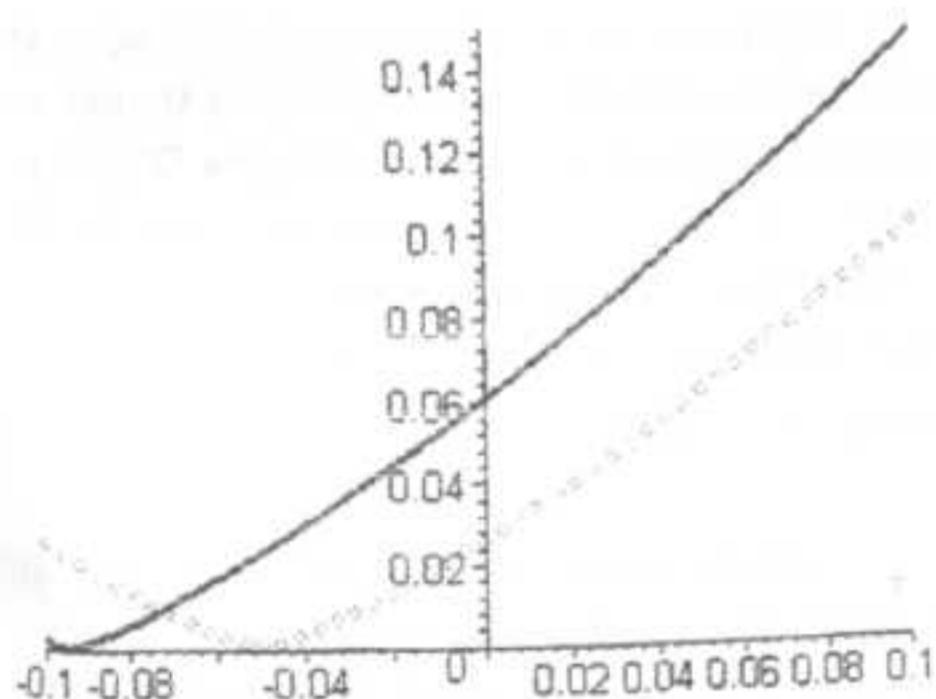


Рис. 4. Температурна залежність коефіцієнта самодифузії в просторово обмежених рідинах з різною нижньою кросоверною розмірністю.

Цікаво зазначити, що абсолютне значення зсуву температури екстремуму (мінімума) коефіцієнта дифузії  $|\tau_m|$  від значення  $\tau = 0$ , при якому спостерігається мінімум коефіцієнта самодифузії в необмеженій рідині, збільшується при зменшенні нижньої кросоверної розмірності  $d_{HKR}$ . тобто при переході від геометрії плоско-паралельної щілини ( $d_{HKR}=2$ ) до циліндричної геометрії ( $d_{HKR}=1$ ). Цей результат якісно підтверджується даними температурної залежності теплоємності просторово обмежених рідин різної геометрії [20], в якій показано, що максимум теплоємності зсувается в бік менших температур і цей зсув зростає при переході від

об'ємної фази до рідин з  $d_{HKR}$ , яка зміниться від 2 до 1 і 0.

На рис. 5 наведені дані числових розрахунків коефіцієнту самодифузії в рідинах з різними  $d_{HKR}$  при збільшенні параметра  $S$  до значення  $S=80$ . Як і повинно бути з фізичних міркувань, при збільшенні кількості мономолекулярних шарів в напрямку просторової обмеженості рідинної системи вплив нижньої кросоверної розмірності на величину  $D^*$  має зменшуватися, а коефіцієнт самодифузії обмеженої рідини повинен наблизятися до коефіцієнту дифузії об'ємної фази.

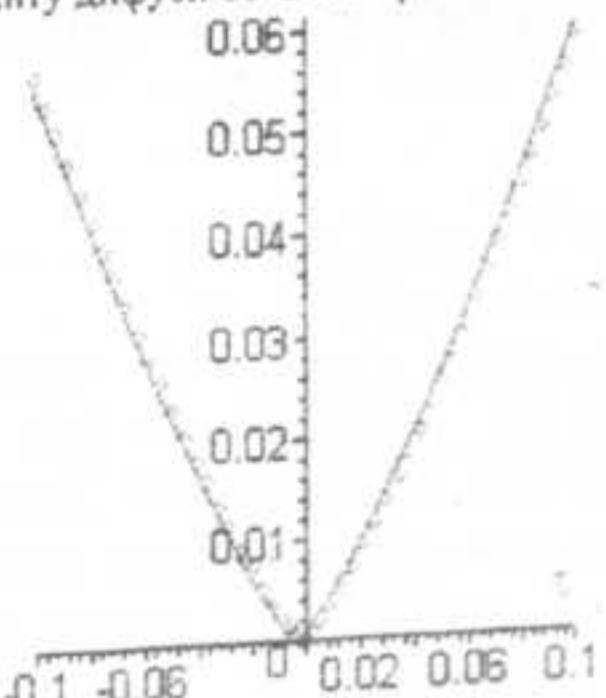


Рис. 5. Зменшення впливу нижньої кросоверної розмірності на коефіцієнт дифузії при збільшенні параметра  $S$ .

#### Урахування ефектів просторової дисперсії коефіцієнта дифузії.

Висновок щодо обертання коефіцієнта самодифузії в нуль в самій критичній точці, як зазначалося вище, відповідає наближенню, в якому не приймаються до уваги ефекти просторової дисперсії. Для врахування цих ефектів слід скористатися ідею, запропонованою в роботі [21], сутність якої зводиться до твердження, що винески від просторової дисперсії повинні додаватися до величин, які обертаються у нуль в критичній точці (наприклад, до коефіцієнту самодифузії  $D$  або до оберненої сприйнятливості  $\chi^{-1}$  чи оберненої

ізотермічної стисливості  $(\partial\mu/\partial\rho)_T$ . Тоді для рідин, які знаходяться як у макроскопічних об'ємах з лінійними розмірами  $L \gg \xi$ , так і у мезоскопічних об'ємах з лінійними розмірами  $L \leq \xi$ , коефіцієнт самодифузії  $D^*$  в залежності від радіусу кореляції  $\xi$  (а через нього від температурної  $\tau$  і польової  $b$  змінних, а також параметра порядку  $\Delta\rho$ ), лінійних розмірів обмеженого об'єму  $L$  та хвильового вектора  $k$  описується такою загальною формулою:

$$D^*(\xi, L, k) = \frac{\left(\frac{G\xi_0}{L}\right)^{1/v} + [1 + \left(\frac{G\xi_0}{L}\right)^{1/v}] \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^{1/v}}{\left(\frac{G\xi_0}{L}\right)^{1/v} + [1 + \left(\frac{G\xi_0}{L}\right)^{1/v}] \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^{1/v}} \tau^v + Bk^2 \quad (15)$$

*Рідини у великих об'ємах.* Для рідин у макроскопічних об'ємах ( $L \gg \xi$ ) та в околі критичної ізохори у формулі (15) залишається залежність від температурної змінної  $\tau$  та хвильового вектора  $k$ . Це фактично означає, що обидва множники у формулі (1) для коефіцієнта самодифузії можуть бути представлені у наступному вигляді:

а) обернена ізотермічна стисливість

$$(\partial\mu/\partial\rho)_T = (\partial\mu/\partial\rho)_T^0 (\tau^v + Bk^2). \quad (16)$$

самого кінетичного коефіцієнту Онзагера, точніше його сингулярної частини  $L_s^0$ .

Відповідно безрозмірний коефіцієнт самодифузії індивідуальної рідини в асимптотично близькому околі критичної точки з урахуванням ефектів просторової дисперсії визначається формулою

$$D^* = D/L_s^0 (\partial\mu/\partial\rho)_T^0 = \frac{\tau^v + Bk^2}{\tau^v + bk^2}. \quad (18)$$

З виразу (18) випливає, що а) без ефектів просторової дисперсії, тобто при  $k \rightarrow 0$ , маємо граничний перехід до формулі (3) для  $D^*$ ; б) за умови  $k \neq 0$  при досягненні критичної температури ( $\tau \rightarrow 0$ ) коефіцієнт дифузії  $D^*$  не обертається в нуль, а прямує до сталою величини:  $D^* \rightarrow B/b$ .

Таким чином, у формулах (15) і (18) вилучено принциповий недолік усіх тих виразів для коефіцієнта дифузії, які мають своїм наслідком нефізичне нульове значення  $D^*$  в критичній точці. Зазначимо, що мікрокопічний зміст коефіцієнта  $B$  перед квадратом хвильового вектора  $k^2$  в дисперсійному доданку був досліджений О.С.Давидовим, який показав, що величина  $B \sim r_0^2$ , де  $r_0$  - радіус прямої міжмолекулярної взаємодії.

Сказане щодо необхідності врахування ефектів просторової дисперсії цілком стосується також ефектів часової (частотної) дисперсії фізичних величин в критичній області. Проте, в даній роботі це питання не розглядається (див., наприклад, [1-5]).

*Рідини у малых об'ємах.* Для просторово обмежених рідин з лінійними розмірами  $L \ll \xi$  загальну формулу (15) для коефіцієнта самодифузії  $D^*$  слід записати наступним чином:

$$L_s^{-1} = (L_s^0)^{-1} (\tau^v + bk^2). \quad (17)$$

Формула (17) записана в такому вигляді, зважаючи на розбіжність в критичній точці

$$D^*(L, k) = \frac{\left(\frac{G\xi_0}{L}\right)^{\gamma/v} + Bk^2}{\left(\frac{G\xi_0}{L}\right) + bk^2} \quad (19)$$

Для подальшого аналізу цього виразу треба прийняти до уваги, що другі доданки в (19), які враховують ефекти просторової дисперсії в просторово обмежених рідинах, містять хвильовий вектор  $k$ , котрий не обертається в нуль. Дійсно, для рідин у малих об'ємах мінімальне значення  $k_{min} = 2\pi/L_{max}$ , де  $L_{max}$  дорівнює радіусу  $a$  циліндричної пори або товщині  $d=2L_0$  щілиноподібної пори. Таким чином, мінімальне ненульове значення коефіцієнта самодифузії

$$D_{min}(L_{max}) = \frac{\left(\frac{G\xi_0}{L_{max}}\right)^{\gamma/v} + 4\pi^2 B/L_{max}^2}{\left(\frac{G\xi_0}{L_{max}}\right) + 4\pi^2 b/L_{max}^2} \quad (20)$$

де  $G = 2,4048$  для циліндричної пори та  $G = 3,14$  для щілиноподібної пори.

#### Асиметрія коефіцієнта самодифузії в закритичній та докритичній областях.

Наприкінці розглянемо питання щодо асиметрії коефіцієнта самодифузії відносно критичної температури  $T_c$  рідини. Теоретичні та експериментальні дослідження коефіцієнта самодифузії у великих рідинних об'ємах демонструють, що  $D(T>T_c)$  в закритичній області перевищує  $D(T<T_c)$  в докритичній області (див., наприклад, статтю [9] та посилання в ній).

Аналогічний результат слід очікувати і для критичної поведінки коефіцієнта самодифузії у просторово обмежених рідинах, тобто в них повинна виконуватись наступна нерівність:

$$D_+^* = \frac{D(|\tau|, L, k)}{D_0^*} > D_-^* = \frac{D(-|\tau|, L, k)}{D_0^-}, \quad (21)$$

де  $D_+, D_-^*$  - безрозмірні коефіцієнти самодифузії, а  $D_0^+, D_0^-$  - амплітуди коефіцієнтів самодифузії

відповідно в закритичній  $T > T_c$  ( $\tau > 0$ ) та в докритичній  $T < T_c$  ( $\tau < 0$ ) областях. Існують принаймні дві причини подібної асиметрії: 1) зміна знаку температурного відхилення  $\tau$  у виразах  $D(\pm|\tau|, L, k)$ , 2) нерівність амплітуд коефіцієнтів самодифузії  $D_0^+ \neq D_0^-$ . Так, в [9] наведено таке співвідношення для амплітуд  $D_0^+/D_0^- = 1,818$ . Використовуючи це співвідношення, а також спираючись на результати для коефіцієнта самодифузії, що були отримані нами вище, маємо температурну залежність коефіцієнта самодифузії для пор циліндричної геометрії, яка зображена на рис. 6. Зелена лінія відображає критичну поведінку коефіцієнта дифузії  $D^*(\tau, L \rightarrow \infty, k \rightarrow 0)$  при  $L \gg \xi$ . Оскільки для таких макроскопічних об'ємів хвильовий вектор в дисперсійних доданках може обертатися в нуль, то з наближенням до критичної точки, тобто при  $T \rightarrow T_c$ , стримуємо нульове значення коефіцієнта дифузії  $D^*$ .

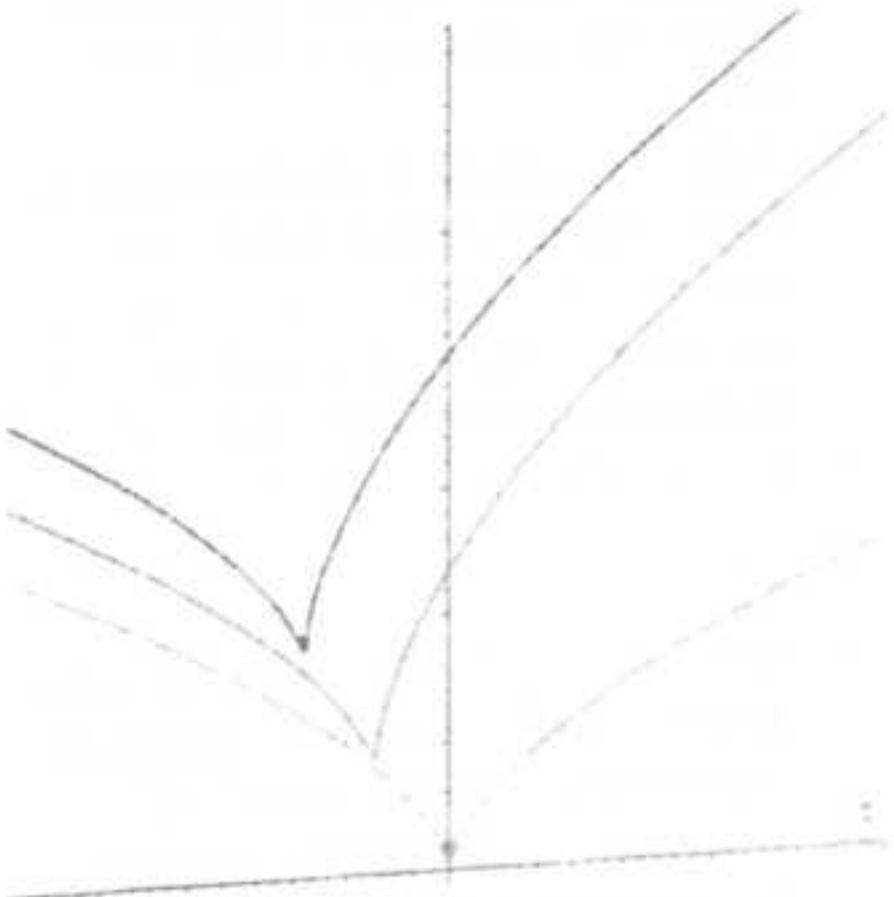


Рис. 6. Температурна залежність коефіцієнта самодифузії для обмежених рідин в циліндричній геометрії з урахуванням ефектів асиметрії та просторової дисперсії.

Червона та синя лінії визначають коефіцієнт самодифузії мезомасштабної рідини у геометрії циліндра та плоско-паралельного шара відповідно, причому мінімальне значення  $D^*(t,L,k)$  досягається в області від'ємних температур і є ненульовим через ефекти просторової дисперсії, оскільки  $k_{\min} = 2\pi/a \neq 0$ , де  $a$  – радіус циліндричної пори. Саме таку температурну залежність коефіцієнта самодифузії слід очікувати в експериментальних дослідженнях дифузійних процесів у просторово обмежених рідинах.

### Список використаної літератури

1. Hohenberg P.C., Halperin B.I. Theory of dynamic critical phenomena // Rev. Mod. Phys.. - 1977. - Vol. 49, № 3. - P. 435-479.
2. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. - М.: Наука, 1982.
3. Лакоза Е.Л., Чалый А.В. Многократное рассеяние света вблизи критической точки // Успехи физ. наук. - 1983. - 140. - С.393.
4. Chalyi A.V., Lebed A.G. Non-homogeneous liquids near the critical point and the boundary of stability and theory of percolation and superconductivity in ceramics. Harwood Academic Publ., 1992.
5. М.А.Анисимов. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. - М.: Наука, 1987.
6. Юхновский И.Р. Фазовые переходы второго рода. Метод коллективных переменных. - К.: Наук. думка, 1985.
7. Фишер М. Критические явления // Устойчивость и фазовые переходы. - М.: Мир, 1973. - С. 245-369.
8. Binder K. Phase transitions in reduced geometry // Annu. Rev. Phys. Chem. - 1992. - Vol. 43. - P. 33-59.
9. Koch W., Dohm V. Finite-size effects on critical diffusion and relaxation towards metastable equilibrium // Phys. Rev. E. - 1998. - Vol. 58, 2 - R1179-R1182.
10. Brovchenko I., Oleinikova A. Molecular organization of gases and liquids at solid surfaces // Handbook Theor. Comput. Nanotechnology. - 2005. - V. 62. - P. 1-98.
11. Чалый К.О., Булавин Л.А., Чалый О.В. Динамічний скейлінг та ширина центральної компоненти спектра критичної опалесценції в рідинах з обмеженою геометрією // Жур. Фіз. Досл. - 2005. - Т. 9, №1. - С. 66-70.
12. Де Гroot S., Mazur P. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964.
13. Чалый А.В. Неравновесные процессы в физике и биологии. - К.: Наукова думка, 1997.
14. Onuki A.. Late stage spinodal decomposition in polymer mixtures // J. Chem. Phys. - 1986. - Vol. 85. - P. 1122-1125.
15. Булавин Л.А., Чалый К.О. Вплив просторової обмеженості на самодифузію молекул води в пористому склі // Вісник КНУ. - 2006. - №1. - С. 328-337.
16. Lipa J.A., Coleman M. et al. // Physica, B 280, 50 (2000).
17. Lipa J.A. et al. Heat capacity and thermal relaxation of bulk helium very near the lambda point. // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 76. - № 6. - P. 944-947.
18. Булавин Л.А. // Физ. Жидк. Сост. - 1992. - Т. 20, - С. 124-129.
19. Чалый А.В., Цехмистер Я.В., Чалый К.А. Флуктуационные модели процессов самоорганизации. - К.: Изд-во "Тираж", 1994.
20. Kimball M.O., Mooney K.P., Gasparini F.M. // Phys. Rev. Lett., 92, 115301, 2004.
21. Сысоев В.М., Чалый А.В. // Теор. Матем. Физика. - 1974. - Т. 18. - С. 410; 1976. - Т.26.- С. 126.

Надійшла до редколегії 20.11.2008р

Підп. до друку 03.04.2009 р.  
Формат 70x100<sup>16</sup>/16.  
Ум. друк. арк. 24,02. Наклад 350.  
Зам. 86.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»  
вул. Еспланадна 4-6, м. Київ, 01601, Україна  
тел/факс 287-03-79, 289-77-62  
E-mail: [iaa@dstat.i.kiev.ua](mailto:iaa@dstat.i.kiev.ua)





