UNIVERSIDAD EAFIT,

Introducción a sistemas CAD/CAM

Santiago Hincapie

15 de febrero de 2018

1. CONCEPTOS BASICOS

1.1. FUNCIONES

1.1.1. PRODUCTO CARTESIANO

El *producto cartesiano* de dos conjuntos es una operación, que resulta en otro conjunto, cuyos elemenentos son todos los pares ordenados que pueden formarse de formar que el primer elemento del par ordenado perteneza al primer onjunto y el segundo elemento pertenezca al segundo conjunto.

Mas formalmente el producto cartesiano de A y B es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son los pares ordenados (a, b) donde a es un elemento de A y b un elemento de B.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \;\&\; b \in B\}$$

1.1.2. RELACIONES

Una *relacion* $\mathscr{R}$, entre los conjuntos A, B es un subconjunto propio del producto cartesiano $A \times B$, en el cual se cumple cierta propiedad $\mathscr{P}(a, b)$, de forma que $(a, b) \in A \times B$, es decir

$$\mathscr{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid \mathscr{P}(a, b)\}$$

1.1.3. FUNCION

Una *funcion* $f : A \to B$ es un tipo muy especial de relacion, en la cual, no existen dos pares distintos con la misma primera componente, es decir:

$$\text{si } (a,b) \in f(A) \ \wedge \ (a,c) \in f(A) \implies b = c$$

1.1.4. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

INYECTIVA Una funcion $f : A \to B$ es inyectiva si a elementos distintos del conjunto A les corresponde elemenentos distintos en el conjunto B Mas formalmente una funcion $f : A \to B$ se dice que es inyectiva si

$$\forall_{a_1,a_2} \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Por ejemplo, la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ no es inyectiva, pues el valor 1 puede obtenerse de $f(1)$ o $f(-1)$. Pero si por otro lado, se restringe el dominio a los reales positivos, creando una nueva funcion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por $g(x) = x^2$, esta nueva funcion si es inyectiva.

SOBREYECTIVA Una funcion $f : A \to B$ es sobreyectiva si a cada elemento $b \in B$ existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Asi por ejemplo, la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$ no es sobreyectiva pues en particular no existe una preimagen para $x = -1 \in \mathbb{R}$, ahora, si se restringe la el conjunto de llegada (AKA codominio) a los reales positivos, generando una nueva funcion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $g(x) = x^2$, esta nueva funcion es sobreyectiva Es importante notar que es facil construir una funcion que cumpla la condicion de sobreyectividad, pues normalmente se posee control sobre los conjuntos de partida y llegada.

BIYECTIVA Una funcion es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; Es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida. Las funciones biyectivas son particularmente interesante pues si $f : A \to B$ es biyectiva, existe una funcion $f^{-1} : B \to A$ tal que si $a \in A \wedge b \in B$ entonces $f(x) = y \implies f^{-1}(y) = x$. Otra implicacion curiosa (y no muy importante para el curso) es que si 2 conjuntos poseen la misma cardinalidad (el mismo numero de elementos) existe una biyeccion entre ellos, esto ademas de tener una gran importancia matematica, trae una implicacion real bastante interesante, cuando se enumera o se cuenta cualquier conjunto de cosas, realmente lo que se está haciendo es establecer una biyeccion entre un subconjunto de los numeros naturales y el conjunto de cosas que se esta numerando.

1.2. GRUPOS

1.2.1. OPERADOR BINARIO

Un operador binario $\odot$ es simplemente una funcion que recibe dos parametros (operantes) $\odot(a,b) = a \odot b$.

1.2.2. Grupo

Un conjunto G equipado con un operador binario $\odot : A \times A \to A$. $(G, \odot)$ es un grupo si cumple las siguientes propiedades:

1. **Clausura** $\forall_{x,y} \in G \implies x \odot y \in G$ Esto quiere decir que al operar cualquier par de elementos del conjunto G utilizando el operador $\odot$ el resultado tambien es un elemento de G.
2. **Existencia de elemento neutro** $\exists_e \in G$ tal que $\forall_x \in G, x \odot e = e \odot x = x$ Esto quiere decir que entre todos los elementos de G debe existir alguno que "no haga nada al operarse" con los otros elementos del grupo, "el 0 de G".
3. **Existencia de el elemento inverso** $\forall_x \in G \exists_{x^{-1}} \in G$ tal que $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e$. Esto quiere decir que si yo seleciono un elemento de G **debe** existir otro que lo "anule".
4. **Asociatividad** $\forall_{x,y,z} \in G \implies x \odot y \odot z = (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ La intuicion detras de esta propiedad es bastante simple, que al operar 3 valores bajo el operador $\odot$ pueda agruparlos de la forma que desee y esto no cambiará el resultado.

1.3. Grupo linear general

1.3.1. Grupo lineal general (GL)

El grupo $GL(n) = (M_n, \cdot)$ esta formado por el conjunto de todas las matrices reales de tamaño $n \times n$ invertibles (AKA M_n), equipado con el producto estandar de matrices $(\cdot)$

1.3.2. Grupo lineal postivo

El grupo $GL^+(n) = (M_n^+, \cdot)$ esta formado por el subconjunto de todas las matrices reales de tamaño $n \times n$, A, tales que $\det(A) > 0$ (AKA M_n^+), equipado con el producto estandar de matrices $(\cdot)$

1.3.3. Grupo ortogonal

El grupo $O(n)$ es el subconjunto de $GL(n)$ formado por las matrices A tales que $A \cdot A^T = I$, es posible demostrar que $\det(A) = \pm 1$

1.3.4. Grupo ortogonal especial

El grupo $SO(n)$ es el subconjunto de $O(n)$ formado por las matrices A tales que $\det(A) = +1$.

La figura1.1 posee un resumen de esta informacion

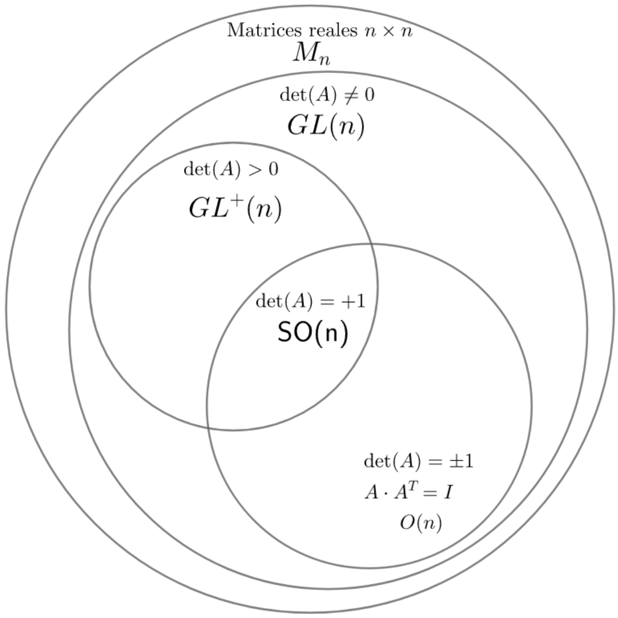

Figura 1.1: Grupo ortogonal y ortogonal especial

1.4. Transformaciones

Una transformacio $f : A \to B$ es una funcion, con $A, B \subset \mathbb{R}^n$ que cumple:

1. f es bijectiva
2. las derivadas parciales de cualquier orden de f son continuas.
3. $\det(J_f) \neq 0$, es decir, el determinante de la matrix jacobiana es diferente de 0 para cualquier valor de la funcion f

$$J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1.4.1. Transformacion lineal

una transformacion lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene la forma $f(p) = A \cdot p$ donde $A \in GL(n), p \in \mathbb{R}^n$ y $\cdot$ es el producto estandar de matrices.

1.4.2. TRANSFORMACION AFÍN

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transforma cualquier linea recta en otra linea recta, luego se dice que f es una transformacion afin. Una transformacion afin tiene la forma $f_{A,T}(p) = A \cdot p + T$, donde $A \in GL(n)$; $T, p \in \mathbb{R}^n$ y $\cdot$ es el producto estandar de matrices.
La figura1.2 posee un resumen de esta informacion

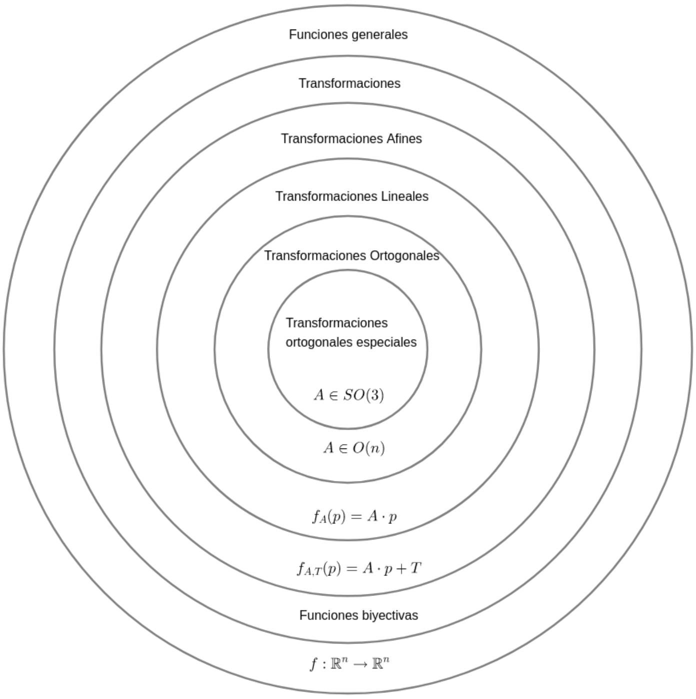

Figura 1.2: Grupo ortogonal y ortogonal especial