0.1 Implementacion

0.2 Diferencias Finitas aplicadas a la valoración de opciones

En el desarrollo de este trabajo se utiliza el método numérico de diferencias finitas explícitas para determinar el valor de una opción resolviendo la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \tag{1}$$

Sea T el término de vencimiento de la opción y sea S_{max} un precio del activo suficientemente grande. Para obtener la malla discreta, se busca dividir el intervalo de tiempo $[0, T]$ en N subintervalos iguales de longitud $\Delta t = \frac{T}{N}$ y se obtienen un total de $N + 1$ periodos de tiempo. Por otra parte, el intervalo $[0, S_{max}]$ se va a dividir en M subintervalos de longitud $\Delta S = \frac{S_{max}}{M}$ obteniendo asi $M + 1$ precios del activo espaciados igualmente. De esta manera, la malla estará conformada por un total de (M+1)*(N+1) puntos. Los intervalos obtenidos son de la forma:

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, N\Delta t$$
$$S = 0, \Delta S, 2\Delta S, \ldots M\Delta S$$

Se debe escoger el valor S_{max} de tal modo que uno de los valores ΔS sea el precio presente del activo. Por lo general, funciona bien escoger S_{max} como 3 veces el precio inicial del activo ($S_{max} = 3S_0$). El nodo (i, j) sobre la malla es el punto que corresponde al tiempo $i\Delta t$ y al precio del activo $j\Delta S$. Así, $f_{i,j}$ denota el valor de la opción para el tiempo i y un precio del activo j.

Cada uno de los diferenciales de la ecuación (**??**) puede ser aproximado mediante una diferencia finita explícita. Para un nodo interior $(i+1, j)$ por ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial S}$ puede ser aproximado mediante:

Diferencias adelantadas

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{\Delta S} \tag{2}$$

Diferencias atrasadas

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1}}{\Delta S} \tag{3}$$

Diferencias centradas

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \tag{4}$$

La forma más adecuada para aproximar $\frac{\partial f}{\partial S}$ es utilizando la aproximación simétrica (diferencias centradas).

Para $\frac{\partial f}{\partial t}$ se utilizará la diferencia hacia adelante dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \tag{5}$$

Y para $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ también se va a utilizar una diferencia hacia adelante dada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1}}{\Delta S}}{\Delta S} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta S)^2} \tag{7}$$

De esta manera, la ecuación en diferencias finitas asociada a la ecuación de Black-Scholes-Merton es de la forma:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S\left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 (\Delta S)^2 \left(\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{(\Delta S)^2}\right) = rf_{i,j}$$

Agrupando términos obtenemos:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2}\right) f_{i+1,j-1} + \left(\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2\right) f_{i+1,j} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{rj}{2}\right) f_{i+1,j+1} = \left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) f_{ij}$$

Finalmente,

$$f_{i,j} = \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2}\right) f_{i+1,j-1} + \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2\right) f_{i+1,j} + \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{rj}{2}\right) f_{i+1,j+1} \tag{8}$$

En este punto, es importante notar que $f_{i,j}$ puede ser interpretada como el valor esperado de una variable aleatoria discreta. De esta manera, la ecuación (**??**) puede escribirse de la siguiente manera:

$$f_{i,j} = a_j f_{i+1,j-1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j+1} \tag{9}$$

donde

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2}\right) \\ b_j &= \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2\right) \\ c_j &= \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{rj}{2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Ahora, debemos garantizar que a_j, b_j y c_j se encuentren en el intervalo $[0,1]$ y de esta manera, podemos encontrar las condiciones de estabilidad.

En primer lugar, vamos a ver que $0 \leq a_j \leq 1$:

$$\begin{aligned}
&0 \leq a_j \leq 1 \\
&0 \leq \frac{\Delta t}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2}\right) \leq 1
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
&0 \leq \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2} \\
&0 \leq \sigma^2 j^2 - rj \\
&0 \leq j(\sigma^2 j - r) \\
&r \leq \sigma^2 j
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2} \leq \frac{1+r\Delta t}{\Delta t}$$

Ahora, vamos a ver que $0 \leq b_j \leq 1$:

$$\begin{aligned}
&0 \leq b_j \leq 1 \\
&0\frac{\Delta t}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2\right) \leq 1
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\sigma^2 j^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \tag{11}$$

Sabemos que $\frac{1}{\Delta t} \to \infty$ cuando $\Delta t \to 0$. Entonces, escogemos el j más grande, el cual es M y lo reemplazamos en la ecuación (**??**).

$$\sigma^2 M^2 \leq \frac{1}{\Delta t}$$

Además, $S_{max} = M\Delta S \implies M = \frac{S_{max}}{\Delta S}$.

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 (\frac{S_{max}}{\Delta S})^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \\
&\Delta t \leq (\frac{\Delta S}{\sigma S_{max}})^2
\end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos un Δt en términos del ΔS. Y finalmente, esta es la condición que nos determinará la estabilidad.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2 &\leq \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t} \\ -\sigma^2 j^2 &\leq r\end{aligned}$$

Finalmente, el Δt calculado va a ser utilizado para calcular un $N_p = \frac{T}{\Delta t_p}$, el cual es un N de prueba. El N real se va a calcular aproximando N_p al siguiente número entero ($N_p = \lceil N \rceil$).

Finalmente, las condiciones de frontera dependen del tipo de opción que se quiera valorar. Para opciones de tipo call, las condiciones de frontera están dadas por:

$$\begin{aligned}f_{i0} &= Max(S_T - K, 0) \approx Max(-K, 0) = 0, & \forall i \quad i = 0, 1, \ldots, N \\ f_{Nj} &= Max(S_T - K, 0) \approx Max(j\Delta S - K, 0), & \forall j \quad j = 0, 1, \ldots M \\ f_{iM} &= Max(S_T - K, 0) \approx Max(S_{max} - K, 0), & \forall i \quad i = 0, 1, \ldots, N\end{aligned}$$

Y para opciones de tipo put están dadas por:

$$\begin{aligned}f_{i0} &= Max(K - S_T, 0) \approx Max(K - 0, 0) = K, & \forall i \quad i = 0, 1, \ldots, N \\ f_{Nj} &= Max(K - S_T, 0) \approx Max(K - j\Delta S, 0), & \forall j \quad j = 0, 1, \ldots M \\ f_{iM} &= Max(K - S_T, 0) \approx Max(K - S_{max}, 0) = 0, & \forall i \quad i = 0, 1, \ldots, N\end{aligned}$$