Kalman filter

Gain algorithm

$$M(k+1) = -FP(k|k-1)\,C^T\left(R + CP(k|k-1)\,C^T\right)^{-1}$$

Variance algorithm:

$$P(k+1|k) = FP(k|k-1)\,F^T + Q - FP(k|k-1)\,C^T\left(R + CP(k|k-1)C^T\right)^{-1}$$
$$\cdot\, CP(k|k-1)\,F^T$$

$$P(0|0) = P_0$$

Q: Determine the Kalman gain $K(k)$ for $k = 1$ to 2 for the following estimation problem:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + v(k)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution -

$$x(k+1) = F\,x(k) + G\,u(k) + w(k)$$

$$y(k) = c\,x(k) + v(k)$$

$$\therefore \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(1) = -F\,P(0|-1)\,C^T\left[R + C\,P(0|-1)\,C^T\right]^{-1}$$

$$= -F\,P(0|0)\,C^T\left[R + C\,P(0|0)\,C^T\right]^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left\{\left(1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right\}^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\left[1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + 10 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} [11]^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)$$

$$M(1) = \begin{bmatrix} -10/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}$$

Ans

$$P(1|0) = F\,P(0|-1)\,F^T + Q - F\,P(0|-1)\,C^T\underbrace{\left[R + C P(1|-1)\,C^T\right]^{-1}}_{\text{This is } M(1)} \cdot C\,P(0|-1)\,F^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -10/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}}_{\text{Value of } M(1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{100}{11} & -\frac{50}{11} \\ -\frac{50}{11} & -\frac{25}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+0-\frac{100}{11} & 5+0-\frac{50}{11} \\ 5+0-\frac{50}{11} & 5+0.5-\frac{25}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{10}{11} & +\frac{5}{11} \\ +\frac{5}{11} & +\frac{71}{22} \end{bmatrix}$$

$$M(2) = -FP(1|0)\,C^T\,[R + CP(1|0)\,C^T]^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{71}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22/133 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15/11 \\ 81/22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22/133 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 111/22 \\ 81/22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22/133 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} +\frac{111}{22} * \frac{22}{133} \\ \frac{81}{22} * \frac{22}{133} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -111/133 \\ -81/133 \end{bmatrix}$$

Note:

$$[R + CP(1|0)\,C^T]^{-1}$$

$$\left\{1 + [1 \ \ 1] \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{71}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$\left\{1 + [1 \ \ 1] \begin{bmatrix} 15/11 \\ 81/22 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{15}{11} + \frac{81}{22}\right)\right\}^{-1}$$

$$= \left\{1 + \frac{111}{22}\right\}^{-1}$$

$$= \left[\frac{133}{22}\right]^{-1}$$

$$= 22/133$$

Ans:

$$M(1) = \begin{bmatrix} -10/11 \\ -\frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

$$M(2) = \begin{bmatrix} -111/133 \\ -81/133 \end{bmatrix}$$