Определения и теоремы по комплексному анализу

(1.) Метрика и метрическое пр-во, пр-во, метрика и норма в $\mathbb{C}$, открытые, замкнутые, ограниченные, (би)компактные подмн-ва $\mathbb{C}$.

Метрика — расстояние, опред. для любых двух элементов (точек) некоторого мн-ва X.
Метрика — это ф-я $d(x,y)$, определённая для $\forall x, y \in X$, удовлетворяющая условиям:

1) $d(x,y) \geq 0$ и $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$

Метрическое пр-во — это мн-во вместе со способом измерения расстояния м/у его эл-ами (метрикой).

Пусть на $\mathbb{R}^2$ введена декартова ск xOy. Определим на $\mathbb{R}^2$ операции $+$ и $\cdot$

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = ((x_1 x_2 - y_1 y_2), (x_2 y_1 + x_1 y_2))$$

Евклидову пл-ть $\mathbb{R}^2$ с введёнными операциями сложения и умножения будем (н) комплексной пл-ю, или **полем комплексных чисел**.

Две метрики на $\mathbb{C}$:

1) евклидова $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

2) хордовую $\rho(z_1, z_2) = \dfrac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}}$

2. Сх-ть п-ти (~~направленности~~) в $\mathbb{C}$, связь со сходимостью Re и Im частей, предел п-ти, необходимое условие сх-ти числовой п-ти, фундаментальная п-ть и н-ть в $\mathbb{C}$, критерий Коши сх-ти п-ти (н-ти).

$\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ сх-ся к (.) $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если $\forall V \in O_{z_0} \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad z_n \in V$.

$\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ сх-ся к (.) $z_0 \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$

z_0 - предел п-ти $\{z_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \mathbb{C} \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z_0 \end{cases}$$

Критерий Коши

$\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ сх-ся $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall k, m > n_0 \quad |z_k - z_m| < \varepsilon$

П-ть $\{z_n\}$ (н) фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall k, m > n_0 \quad |z_k - z_m| < \varepsilon$

Необходимое условие сх-ти:

Если п-ть сх-ся, т.е имеет конечный предел, то она ограничена.

Мн-во K в $\mathbb{C}$ (н) компактным, если из любого открытого покрытия K можно выделить конечное подпокрытие.

Мн-во A в $\mathbb{C}$ (н) относительно компактным, если его замыкание $\overline{A}$ компактно.

Мн-во K в $\mathbb{C}$ (н) секвенциально компактным, если из любой посл-ти эл-ов K можно выделить сх-ся посл-ть, предел которой $\in K$.

комп. ~ секв. комп.

3) Предел в точке, непрерывность в точке, (равномерная) непрерывность на мн-ве отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

Опр. Пусть $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная (т.) $\operatorname{dom} f$. Эл-т $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ (н) пределом ф-ии f в (т.) z_0, если $\forall V \in O_{w_0}\ \exists U \in O_{z_0}: f(U) \subset V$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Если $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, то $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall z \in \operatorname{dom} f\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$

Опр. Ф-я $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерыв в (т.) z_0, если
1) $z_0 \in \operatorname{dom} f$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall z \in \operatorname{dom} f\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$
2') $\forall V \in O_{f(z_0)}\ \exists U \in O_{z_0}: f(U) \subset V$

Опр. Ф-я $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерыв на мн-ве $A \subset \mathbb{C}$, если
1) $A \subset \operatorname{dom} f$.
2) $\forall z_0 \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta: \forall z \in A\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Опр. Ф-я $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ равномерн. непрерыв на $A \subset \mathbb{C}$, если
1) $A \subset \operatorname{dom} f$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall z_1, z_2 \in A\ |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

4. Разбиение отрезка, диаметр разбиения, интегральная сумма, суммы Дарбу, интегралы Дарбу, интеграл Римана.

Опр. Разбиение отрезка $[a, b]$ – это конечный набор точек $t_0, \dots, t_n$:
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$
$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ – обознач.

Диаметр разбиения P – это $\max\limits_{i=0,\dots,n-1} \{t_{i+1} - t_i\}$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ – параметризация гладкой кривой на комплекс. пл-ти

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, опред на γ, P – разбиение $[a, b]$
выберем $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ $i = 0, \dots, n-1$

Интегральная сумма f по γ для P
и выборки $\{\tau_i\}$ определяется как

(4) Модуль и аргумент комплексного числа, алгебр. и показ. формы записи к.ч., формула Эйлера

алгебраич. ф з: $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$
тригонометрич: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
показат.: $z = |z| e^{i\varphi}$

ф-ла Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$

модуль z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

аргумент z: это угол му положительно вещ. осью и вектором, провед из начала координат в точку, соотв числу.

$\varphi = \arg z$
$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

(6) Числовой ряд, частичная сумма ряда, сходимость и сумма ряда, критерий Коши, необх. признак сх-ти

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ - числовым рядом (Н) формальная сумма членов n-ти комплексных чисел.

$S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ - частичная сумма ряда

если $\{S_n\}$ сх-ся в $\mathbb{C}$, то исх. ряд (Н) сх-ся,
а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =: \sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathbb{C}$ - сумма исх. ряда.

(Т) критерий Коши сх-ти рядов
ряд $\sum z_n$ сх-ся в $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ когда
$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n>n_0\ \forall k\ |S_{n+k}-S_n| = |z_{n+1}+\dots+z_{n+k}| < \varepsilon$

(Т) Необходимый признак сх-ти
если $\sum z_n$ сх-ся, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

(8) Путь в $\mathbb{C}$, эквивалентные пути, кривая, жорданова путь и кривая, (кусочно) гладкие путь и кривые, гомотопные пути.

Путём (Н) непрерывное отображение некоторого отрезка числ. прямой в $\mathbb{C}$ $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$

$\gamma_1:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ $\gamma_2:[a,b]\to\mathbb{C}$
γ_1 и γ_2 (Н) эквивалентными, если $\exists$ непрерыв. возраст. ф-я $\varphi:[a,b]\to[\alpha,\beta]$:
$\forall t\in[a,b]$ $\gamma_2(t)=\gamma_1(\varphi(t))$

Совокупность всех экв. путей (Н) кривой.

Если ф-я, определяющая путь является взаимнооднозначной, то этот путь наз. жордановым.

Все эквив. пути жордана наз. жордановой кривой.

Каждый путь может быть записан $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$

если $x, y \in C^1[a, b]$ - непрерыв. диф. путь

если кроме того $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$, то путь наз. гладкий.

Непрерыв. диф/гладкой кривой наз. совокупность всех эквив. непрерыв диф./гладких путей

Если путь состоит из конечного числа гладких путей, то он наз. кусочно гладкий.

Если кривая сост. из конечного числа гладких кривых, то она наз. кусочно гладкой.

Пути γ_1 и γ_2 наз. гомотопными, если $\exists$ непрерыв. отобр $\Gamma: [0,1] \times [0,1] \to D$:

$\Gamma(0, t) = \gamma_1(t)$, $\Gamma(1, t) = \gamma_2(t)$, $\Gamma(s, 0) = A$, $\Gamma(s, 1) = B$

$t, s \in [0, 1]$.

$[0, 1] \ni t \longmapsto (b-a)t + a \in [a, b]$

9 (линейно) связное подмн-во в $\mathbb{C}$, область, компонента связности, n-связное мн-во, жорданова обл-ть, т. Жордана, ориентация кривой

Мн-во $D \subset \mathbb{C}$ Н **связным**, если $\neg\exists\, u, v \in Op\,\mathbb{C}: D \subset u \cup v$ и $D \cap u \neq \varnothing$, $D \cap v \neq \varnothing$ и $u \cap v = \varnothing$

Мн-во $D \subset \mathbb{C}$ Н **линейно связным**, если любые две его различ. точки можно соед. путём, лежащим в D.

Областью в $\mathbb{C}$ Н открытое связное мн-во.

Компонентой связности мн-ва Н его максимальное (по включению) связное подмн-во.

Если мн-во имеет n компонент связности, то оно Н **n-связным**

Область D в $\mathbb{C}$ Н **жордановой**, если $D = D(\Gamma)$ для некоторой замкнутой жордановой кривой

Т **Жордана**

Любая замкнутая кривая Жордана делит $\overline{\mathbb{C}}$ на две (односвязные) области, одна из которых ограничена

Ориентация кривой – направление обхода кривой.

10. Вещественно и комплексно линейные отображения. Теорема о структуре линейных отображений.

опр ф-я $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (Н) линейной, если
1) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$
2) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad f(\lambda z) = \lambda f(z)$

Иногда опред таким образом ф-ю (Н) $\mathbb{C}$-линейной, а если усл 2) вып. только для $\lambda \in \mathbb{R}$, то ф-я (Н) $\mathbb{R}$-линейной

(Т) любое $\mathbb{R}$-линейное $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ может быть представлено в виде:

$$f(z) = Az + B\bar{z} \qquad , A, B \in \mathbb{C}$$

11. $\mathbb{R}$-диф-ть, $\mathbb{C}$-диф-ть отображения, производная отобр из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, связь с $\mathbb{C}$-диф-тью, условие Коши-Римана и их связь с $\mathbb{C}$-диф, аналитичность ф-ии в (·) и области, диф-ть в беск. удал. (·).

Ф-я (Н) аналитической в точке, если в нек. окр-ти этой (·) она представима в виде суммы степенного ряда с центром в этой точке.

f аналитична в $(\cdot) z_0 \in \mathbb{C}$, если $\exists r > 0$ и п-ть $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$: при

$$|z - z_0| < r \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Ф-я (Н) аналитичной в обл-ти, если она аналитич. в каждой (·) этой обл.

$\mathbb{C}$ - дифф-ть, $\mathbb{R}$ - дифф-ть.

под $\mathbb{R}$ дифф-тью f в (·) z_0 понимается след. равенство $f(z) - f(z_0) = L(z-z_0) + o(z-z_0)$, где L - $\mathbb{R}$-линейная ф-я $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ дифф-ть f равносильна дифф-ти её веществ. и мнимой частей в (·) (x_0, y_0)

$\mathbb{R}$ дифф-мая ф-я в точке $\mathbb{C}$ дифф-ма $\Leftrightarrow$ выполняется усл Коши-Римана.

(Т) Условие Коши-Римана

Пусть ф-я f опред. в обл $D \subset \mathbb{C}$. Тогда, для того чтобы f была дифф. в (·) $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ необходимо и достаточно, чтобы её вещ. $\operatorname{Re} f =: u$ и мнимая $\operatorname{Im} f =: v$ части были дифф-мы в (·) (x_0, y_0) и в этой точке выполнялись равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Ф-я f (Н) дифф-ой в бесконечно удал. точке, если ф-я $f(1/z)$ дифф-ма в нуле.

⑤ Поточечная и равномерная сх-ть п-ти ф-й на мн-ве, критерий Коши равномерной сх-ти, равномерная сх-ть внутри области

П-ть ф-ий $\{f_n\}$ сх-ся **поточечно** на мн-ве ~~A~~ $A \subset \mathbb{C}$ к ф-ии f, если

$\forall x \in A \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $\quad (f_n \to f)$

$(\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{(\varepsilon, x)} \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

П-ть $\{f_n\}$ **равномерно** на $A \subset \mathbb{C}$ сх-ся к f, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \underbrace{\forall z \in A}_{\forall n \geq n_0} \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

обознач. $f_n \rightrightarrows f$ на A при $n \to \infty$

① **Критерий Коши равномерн. сх-ти.**

П-ть $\{f_n\}$ сх-ся равномерно на $A \subset \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ когда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in A \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Говорят, что $\{f_n\}$ сх-ся равномерно внутри области D, если она сх-ся равномерно на любом компактном подмн-ве $K \subseteq D$

7. Криволинейные ∫-лы 1-го и 2-го рода.

1-го рода (скалярный):
Интеграл от $f(z)$ вдоль кривой γ в $\mathbb{C}$:

$$\int_\gamma f(z)\,|dz|,$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – эл-т длины дуги
если γ задано параметрич.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{, то} \quad t \in [a, b]$$

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(z(t))\,|z'(t)|\,dz$$

2-го рода (комплексный)
Инт-л от $f(z)$ вдоль ориентир. кривой γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz, \quad \text{где} \quad dz = dx + i\,dy$$

(10.) Точки симметричные относительно окружности.

Точки z_1 и z_2 (Н) симметричными относительно окр Γ, если любая окр γ, проходящая через (·) z_1 и z_2, ортогональна Γ.

(12.) Консерватизм углов, постоянство искажения масштаба, конформное, регулярное и однолистное отображения

Консерватизм углов - св-во конформного отображения, заключающееся в сохранении углов м/у кривыми. (сохр $\angle$ м/у касат и направ-я) (если $\gamma_1 \wedge \gamma_2 = z_0$ под углом α, то их образы $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ пересекаются в $w_0 = f(z_0)$ под тем же углом α)

Постоянство искажения масштаба - св-во конф. отобр, заключ в том, что в окрестности которой точки z_0 масштаб изменения всех длин кривых, проходящих через эту точку одинаков

Отображение $w = f(z)$ (Н) конформным в точке, если в этой (·) имеет место консерватизм углов и постоянство искажения масштаба.

Ф-я (Н) регулярной в (·), если она дифф-ма в этой точке и ее произв. в этой (·) $\neq 0$.

Ф-я (Н) рег в обл, если она рег в которой точке этой обл.

Отобр. одной пл-ти на другую (Н) **конформным**, если оно явл. гомеоморфизмом и в каждой точке исх. обл-ти имеет место искаж. малых и консерв. $\angle$.

Отображение (Н) **однолистным** в области D, если оно отображает различные $(\cdot)$ обл-ти D в разные точки т.е. $\forall z_1, z_2 \in D$, если $z_1 \neq z_2$, то $f(z_1) \neq f(z_2)$

13 **Ангармоническое отношение для дробно-лин. отображения**

Под ангармоническим отношением упорядоч. четверки попарно различ. точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ понимается комплексное число, опред. равенством

$$[z_1; z_2; z_3; z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

$$= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

14. Элементарные ф-ии комплексного переменного.

1. показательная

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\cdot\sin y)$$

2. логарифмическая

$$\ln w := \ln|w| + i\cdot \arg w$$
$$\mathrm{Ln}\, w := \ln|w| + i\cdot \mathrm{Arg}\, w$$

3. тригонометрические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

4. гиперболические:

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

5. степенная

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}$$

6. обратные тригонометрические

$$\mathrm{Arcsin}\, w = i\cdot \mathrm{Ln}\, i(w + \sqrt{w^2+1})$$
$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\, \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$$
$$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2+1})$$
$$\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$$

7. Дробно-линейные

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

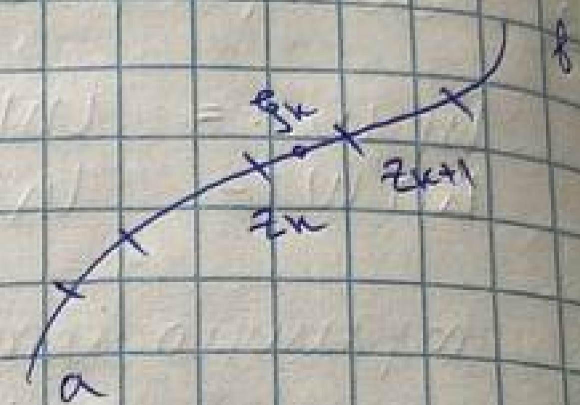
$$w(\infty) = \frac{a}{c} \qquad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

8. Жуковского

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad z = w + \sqrt{w^2-1}$$

15. Интеграл Коши от ф-ции по кривой и его основные св-ва.

Если $\exists \lim\limits_{d(\sigma)\to 0} S_\sigma(f) \in \mathbb{C}$, то он обознач $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ и наз. инт-ом Коши от ф-ции f по кривой γ.



[$\sigma = \{z_0, z_1, \dots, z_n, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ – разбиение кривой γ.

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

$d(\sigma) := \max\limits_{0\le k\le n-1} |\Delta z|$ – диаметр разбиения

$\sigma(\gamma)$ – мн-во всех разбиений γ.

$$f : \gamma \to \mathbb{C}$$

$$S_\sigma(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta z_k$$

$\lim\limits_{d(\sigma)\to 0} S_\sigma(f) = w \in \mathbb{C}$, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall \sigma \in \sigma(\gamma)\ \ d(\sigma)<\delta \Rightarrow |S_\sigma(f) - w| < \varepsilon \ ]$$

Св-ва $\int$-ла Коши.

1) Если γ – кусоч.-гл. кривая Жордана и $\gamma(t)$ какая-то её параметризация $(\alpha \le t \le \beta)$, а f непрерыв. ф-я на γ, то

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

если $\eta : [a, b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha, \beta]$ непр. диф. $\nearrow$ ф-я, то

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(\gamma(\eta(t)))\,\gamma'(\eta(t))\,\eta'(t)\,dt$$

2) если ф-ии f и g инт. по Коши вдоль кривой γ, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ф-ия $\alpha f + \beta g$ также инт., при этом

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_\gamma f(z) dz + \beta \int_\gamma g(z) dz$$

3) если γ состоит из нескольких послед. соед. γ_k $(\gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k)$ и

f - инт по Коши вдоль γ, то

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

4) γ_- - γ ориентир. в обратном порядке
если f инт. по γ, то f инт и по γ_- и

$$\int_{\gamma_-} f(z) dz = -\int_\gamma f(z) dz$$

5) если γ - спрямл. кривая Жордана
$\{f_n\} \subset C(\gamma)$ и $\{f_n\} \rightrightarrows f$ на γ, то
f непр (по т. Вейерштрасса) и инт
по Коши и $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$

6) γ - замкн. спрямляемая кривая Жордана,
f - голом в D, u, v непрерыв диф в D
$f = u + iv$

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma u dy + v dx$$

(16) Лемма Гурса, интегральная теорема Коши, обобщенная инт-ая т. Коши и её следствия, интегральная ф-ла Коши, интеграл типа Коши, теорема об интеграле типа Коши (голоморфность и ф-ла для производных) и её следствия, теорема Лиувилля, критерий голоморфности (независимость интеграла от пути), теорема Морера и Вейерштрасса

Ⓣ Лемма Гурса

Пусть ф-я f непрерывна в односвяз обл-ти $D \subset \mathbb{C}$. Тогда $\forall$ кусочно гладкой кривой Жордана γ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ломаная P, правильно вписанная в γ, такая что

$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon$$

Ⓣ Инт. т. Коши

Пусть ф-я f голоморфна в односвяз. обл-ти $D \subset \mathbb{C}$. Тогда $\forall$ замкнутой кусочно гладкой кривой Жордана γ

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Ⓣ Обобщенная т. Коши.

Если γ замкн. кусочно-гладкая кривая Жордана, ограничивающая односвяз. обл D и ф-я f голом. в D и непрерыв. вплоть до границы (т.е f непр. в $\overline{D} := \mathrm{cl}\, D$), то

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Сл. 1. Если γ - граница $(n+1)$ связной обл D, состоящей из $(n+1)$-й замкн. кусоч гл. кривой Жордана, а f - голом в D и непрерыв. вплоть до границы, то

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Сл.2. Если в усл. Сл.1 голоморфность в области D нарушается в конечном числе точек $z_1, \dots, z_m \in D$: $\lim\limits_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0$, то

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

(Т) инт. ф-ла Коши

Пусть γ - замкн. кусоч. гладкая кривая, ограничивающая односвяз. обл. D и ф-я f голоморфна в D. Тогда $\forall z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

опр. Пусть γ - кусоч. гл. кривая Жордана и f - непрерыв. на γ. Тогда

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ $\quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

$F(z)$ (Н) инт-ом типа Коши.

(Т) об интеграле типа Коши

Пусть γ - кусоч. гл. кривая Жордана и f непрерыв на γ, тогда $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ $F(z)$ явл. бесконечно диф-ой ф-ей, при этом

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Сл.1. Если ф-я голом в обл-ти, то она бесконечно диф-ма в этой обл-ти.

Сл.2. (т. о среднем)

Пусть f голом. в D, $z_0 \in D$ и число $R > 0$: $B_R[z_0] \subset D$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi$$

Ⓣ Лиувилля.

Каждая голом в $\mathbb{C}$ огранич. ф-я постоянна.

Ⓣ Критерий голоморфности.

Непрерыв в односвяз обл-ти D ф-я f голоморфна в этой обл $\Leftrightarrow$ $\forall z_1, z_2 \in D$ $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ не зависит от пути, соед. (·) z_1 и z_2 и лежащего в D.

Ⓣ Морера

Для того чтобы непрерыв. в односвяз. обл-ти ф-я f была голоморфна необходимо и достаточно, чтобы $\forall$ замкн. кусочно гладкой кривой Жордана

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Ⓣ Вейерштрасса

Если $\{f_n\}$ - п-ть голом в односвяз обл. D ф-й и $f_n \rightrightarrows f$ в D, то f - голом в D

17. Гармоническая ф-я, связь гармонических и голоморфных ф-й.

Опр. $\Omega \subset R^2$, $u \in C^2(\Omega)$ (дважды диф ф-я) и (н) гармонической, если она удовлет. уравнению Лапласа

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ — оператор Лапласа

Зам. Если f — голом в обл $D \subset \mathbb{C}$, то её Вещ. и мнимая части являются сопряженными гармоническими ф-ями относительно друг друга

Опр. если u — гармонич. ф-я в обл $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то ф-я $v \in C^2(\Omega)$ (н) сопряж гарм. ф-ей к ф-ии u, если

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

норма в $\mathbb{C}$

$\|z\| = |z| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Подмн-во в $\mathbb{C}$ Н открытым, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Подмн-во в $\overline{\mathbb{C}}$ Н замкнутым, если его дополнение открыто.

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ Н граничной (·) A, если $\forall V \in O_{z_0}$ $V \cap A \neq \emptyset$ и $V \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus A) \neq \emptyset$

$\operatorname{diam} A := \sup\limits_{z_1, z_2 \in A} |z_1 - z_2|$ (диаметр мн-ва)

Каждое мн-во, имеющее конечный диаметр Н ограниченным.

$A \subset \overline{\mathbb{C}}$. U - покрытие мн-ва A, если $A \subset \bigcup\limits_{V \in U} V$.

Подпокрытие Н открытым, если $\forall V \in U$ V - открыто

Подмн-во в $\overline{\mathbb{C}}$ Н компактным, если $\forall$ его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

18. Степенной ряд, первая и вторая теоремы Абеля, теорема о радиусе сходимости степенного ряда и теорема Коши-Адамара, теорема о свойствах степенных рядов (равномерная сходимость, возможность почленного интегрирования и дифференцирования, голоморфность суммы), теорема единственности для степенных рядов.

- **Степенной ряд это – ряд вида:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

- **1-ая Теорема Абеля:**

  Если $\sum_{n-0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно для всех $z \in \mathbb{C}$:

$$|z-z_0| < |z_1 - z_0|$$

  Если ряд $\sum_{n-0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ в точке z_1 расходится, то при

$$|z-z_0| > |z_1 - z_0|$$

  Ряд также расходится

- **2-ая Теорема Абеля**

  Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то

$$\lim_{z\to z_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$$

  Где $z \to z_1$ по любому пути, лежащему между произвольными хордами окружности радиуса $|z_1 - z_0|$ с центром в точке z_0 исходящим из точки z_1

- **Теорема о радиусе сходимости степенного ряда**

  Радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ равен $R = \frac{1}{l}$, где $l := \overline{\lim\limits_{a\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- **Теорема Коши-Адамара**

  Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ положим $l := \overline{\lim\limits_{a\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ тогда,
  - если $l = 0,$ то исходный ряд сходится для $\forall z \in \mathbb{C}$;
  - если $l = +\infty$, то исходный ряд расходится для $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$;
  - если $0 < l < +\infty$, то ряд при $|z-z_0| < \frac{1}{l}$, ряд абсолютно сходится, а при $|z-z_0| > \frac{1}{l}$ расходится

- **Теорема единственности**

  Предположим, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ и } \sum_{n-0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

Сходятся при $|z - z_0| < R$ и в точках некоторой последовательности z_k:

$$0 < |z_k - z_0| < R$$

Суммы этих рядов равны, тогда

$$\forall n \in \overline{\mathbb{N}} : a_n = b_n$$

- **О равномерной сходимости**

  Если R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, то $\forall z \in (0, R)$ равномерно абсолютно сходится при $|z - z_0| \leq r$ < R

- **О возможности почленного интегрирования и дифференцирования**

  Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R$ и $S(z)$ – его сумма, то $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ при $|z| < R$

- **О голоморфности суммы**

  Сумма любого степенного ряда в круге его сходимости является голоморфной функцией

19. Теорема о ряде Тейлора, теорема единственности для аналитических функций, нуль функции, нуль порядка m функции, неравенства Коши.

Теорема (о ряде Тейлора): Если функция f - голоморфна в односвязной области $D \subset C$, то

$$\forall z_0 \in D \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

радиус сходимости которого не меньше $d := dist(z_0, \partial D)$

Теорема (о единственности для аналитических функций):

Если функции f, g - аналитические в области $D \subset C$, и совпадают на множестве $E \subset D$, имеющем в D предельную точку, то $f \equiv g$ в D

Определение: $z_0 \in C$ называется *нулём функции* $f(z_0)=0$.
Отличия от нуля в области аналитическая функция в любой ее конечной подобласти имеет конечное число нулей.

Если $$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$, то точка z_0 называется *<u>нулём m-ого порядка</u>*, где c_m!=0.

Примеч.: точка z_0 называется *<u>нулём m-ого порядка</u>*, если

$$\forall k \in \overline{0, m-1} \quad f^{(k)}(z_0) = 0$$

Определение: Неравенство Коши -

(!) Если ф-я f аналит. в круге $|z - z_0| < R$ и огр-на в нем числом M, то

$\forall r \in (0, R)\ |c_n| \le \frac{M}{r^n} \quad \forall n \in \overline{N}$

Д. $$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|} |d\xi| \le \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} |d\xi| = \frac{M}{z^n}$$

20. Теорема о ряде Лорана, неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Т (о ряде Лорана)

$$f - \text{аналит. в укльце } 0 < r < |z - z_0| < R.$$

$$\text{Тогда } \forall \rho \in (r, R) \text{ и } \forall z \text{ из кольца } f(z) = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{где } c_n$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

<u>След.</u> Нер-во Коши для коэф-ов ряда Лорана

$$\text{Если } f \text{ голомор. в кольце } 0 < r < |z - z_0| < R \text{ и } c_n (n \in \mathbb{Z}) - \text{коэф. её ряда Лорана,}$$

$$\text{и } \rho \in (r, R), \text{а } M := sup_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|, \text{то } \forall n \in \mathbb{Z}\ |c_n| \le \frac{M}{\rho^n}$$

21. Особые точки, их классификация, критерии особых точек.

<u>Опр.</u> $(.)\ z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ назыв-ся изолир. особ. точкой $f,$ если ф-ия $f -$ $\text{голоморфна в нек. проколотой окрестности точки, а в самой точке не определена}$

<u>Опр.</u> изолир. особ. точка $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ наз-ся:

1) Устранимой особ. точкой, если кол-во ненулевых слагаемых в главной части ряда лорана равно 0, то $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$
2) Полюсом, если кол-во ненулевых слагаемых в гл. части ряда Лорана конечно и >0, т.е. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$
3) существенной особой точкой, если кол-во ненулевых слаг. в гл. части ряла Лорана $= \infty$, т.е. $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \underline{\mathbb{C}}$

Опр. $] z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ изол. $\mu := inf\{n \in \mathbb{Z} : \ c_n \neq 0\}$ особая точка ф-ии f и $f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \quad c_n(z - z_0)$

Критерий особых точек

$] z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ - изолир. особ. точка

1) $z_0 -$ устранимая $\Leftrightarrow \mu \geq 0;$ т. е. f огр в прокол. окр. z_0
2) $z_0 -$ полюс $\Leftrightarrow \mu \in (-\infty; 0),$ это равносильно тому, что $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

   $z_0 -$ полюс n-го порядка $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} \quad c_n(z - z_0) \qquad c_{-m} \neq 0 \ m - \text{порядок полюса}$$

3) $z_0 -$ сущ. особая точка $\Leftrightarrow \mu = -\infty$ равносильно тому, что $\forall V \in O_{z_0} f(\dot{V})$ плотен в $\bar{\mathbb{C}}$, т. е. $\forall w \in \bar{\mathbb{C}} \ \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \backslash \{z_0\}$

$$f(z_n) \to w$$

22 Вычеты в конечной и бесконечно удаленных точках, формулы их вычисления

Вычетом f особ. точки z, называется $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$, где γ - замкнутый контур окр точки z_0 и лежащий в обл. $\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \operatorname{Res}_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$

Ф-лы вычисл вычетов

1) если z_0 - простой полюс
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

2) если z_0 - полюс порядка n, то
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)}$$

3) если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$ и $\psi'(z_0)\neq 0$
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

4) если ∞ - полюс n-го порядка, то $\operatorname{Res} f = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\lim_{z\to\infty} z^{n+2} f^{(n+1)}(z)$

5) если $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, то $\operatorname{Res}_\infty f = -\lim_{z\to\infty} z f(z)$

6) если в окр. ∞ f - огранич (∞ - устр особ. т.), то
$$\operatorname{Res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = \lim_{z\to\infty}\left(f(\infty)-f(z)\right),\ \text{где } f(\infty)=\lim_{z\to\infty} f(z)$$

23 Теорема Коши о вычетах, теорема о сумме вычетов.

Т Коши о вычетах

Пусть f голом в обл D, (огранич. кусоч глад контуром γ и непрерывн) за искл конеч числа особых точек $z_1 \dots z_n$ и непрерывн вплоть до границ. огранич кусоч. гл контуром γ,

тогда
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f$$

7 О сумме вычетов

Пусть f — голом. в $\mathbb{C}$ всюду, за искл. $z_1, \dots, z_n$,

тогда $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0$

24. ЛЕММА ЖОРДАНА, ТЕОРЕМА О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

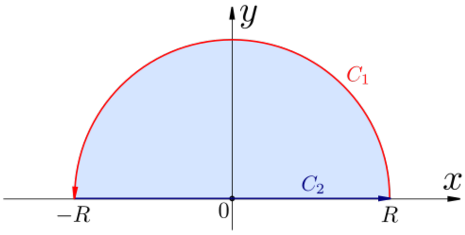
Памятка: $\oint f(x)dx$ *– обозначение интеграла по контуру*

Лемма Жордана:

Пусть f – непрерывная в G_f функция, которая удовлетворяет условиям:

$G_f = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0 \; \& \; |z| \geq R_0 > 0\}$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{z\in\gamma_R} |z * f(z)| = 0$$



Тогда:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0, \alpha > 0$$

Теорема о вычислении несобственного интеграла (оно же – следствие леммы Жордана):

При условии леммы Жордана ⇒ z_n – это особая точка в $Im(z) > 0$

$$\forall \alpha > 0 \text{ v.}p. \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z)e^{i\alpha z}$$

25. ТЕОРЕМЫ СОХОЦКОГО И ПИКАРА. ПРИНЦИП СИММЕТРИИ. ТЕОРЕМА РИМАНА.

Теорема Сохоцкого:

Если $a \in \mathbb{C}$ - существенная особая точка функции f, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ можно найти последовательность точек $z_n \to a$ такую, что

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A$$

Иная формулировка:

Изоморфная особая точка z_0 функции f является существенной особой точкой

$$\Leftrightarrow$$

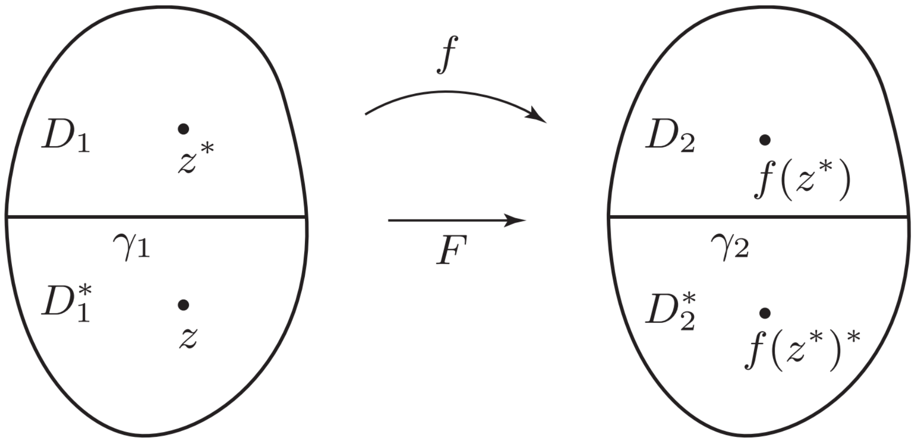
$\forall$ её прилегающая окрестность функции f находится вблизи $w \in \overline{\mathbb{C}}$

Теорема (Большая) Пикара:

В $\forall$ проколотой окрестности существенной особой точки z_0 функции f для $\forall a \in \mathbb{C}$ за исключением, быть может, одного, $\exists$ последовательность точек $A \in \mathbb{C} \to z_0$

Принцип симметрии (взято из лекций МГУ):

Пусть D_1, D_2 — области в C. Допустим, что граница ∂D_1 содержит дугу (т.е. непустое открытое связное подмножество) γ_1 обобщенной окружности l_1, а граница ∂D_2 — дугу γ_2 обобщенной окружности l_2. Обозначим через D_j^* , $j = 1, 2$, область, симметричную области D_j относительно l_j . Мы будем предполагать, что $D_1 \cap D_1^* = \emptyset = D_2 \cap D_2^*$, а множества $G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ и $G_2 := D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$ являются областями в $\mathbb{C}$. Пусть, далее, функция f, голоморфная в области D_1 и непрерывная вплоть до γ_1 , биголоморфно отображает D_1 на D_2 и задает гомеоморфизм γ_1 на γ_2 . Тогда она голоморфно продолжается через γ_1 в область G_1. Иными словами, существует функция $F \in O(G_1)$, совпадающая с f на $D_1 \cup \gamma_1$, которая биголоморфно отображает область G_1 на область G_2 . При этом $F(z) = f(\mathrm{z}^*)^*$ для $z \in D_1^*$ (18.3) (в этом равенстве z^* — точка, симметричная $z \in D_1^*$ относительно l_1, а $f(z^*)^*$ — точка, симметричная $f(z^*) \in D_2$ относительно l_2), Формула (18.3) объясняет название “принцип симметрии”: отображение F, задаваемое этой формулой, переводит точки, симметричные относительно l_1 в точки, симметричные относительно l_2.



Теорема Римана:

Любая односвязная область $D \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит более одной точки, биголоморфна единичному кругу U

БИГОЛОМОРФНОСТЬ:

Биголоморфное отображение — отображение f области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $D \subset \mathbb{C}^n$, голоморфное в D, а также обладающее обратным отображением $g = f^{-1}$, которое также голоморфно в $G = f(D)$[7][3][8][9].

Области D_1 и D_2 ***биголоморфно эквивалентны***, $D_1 \sim D_2$, когда имеется биголоморфное отображение D_1 на D_2[3].

Предложение 1. *Отображение биголоморфно, если оно голоморфно и взаимно однозначно*[10].

Это предложение иногда используют при определении биголоморфного отображения[2][5][6].

Биголоморфное отображение — голоморфное взаимно однозначное отображение области $D \subset \mathbb{C}^n$ на область $D' \subset \mathbb{C}^n$. Любое биголоморфное отображение невырождено в D[2][5][6].

Предложение 2. *Отображение, обратное к биголоморфному отображению, всегда биголоморфно*[2][5].

Отсюда следует, что биголоморфное отображение гомеоморфно глобально, а не только локально[5].