

量子计算理论基础与软件系统

理论作业三 量子纠错

高玮轩 3230105892

理论作业三 量子纠错

1. 写出 9 量子比特 Shor 编码的稳定子，并证明其稳定 $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ 张成的向量空间，其中

$$|0_L\rangle = \frac{(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

$$|1_L\rangle = \frac{(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

解. 稳定子为

- $S_1 = Z_1 Z_2$
- $S_2 = Z_1 Z_3$
- $S_3 = Z_4 Z_5$
- $S_4 = Z_4 Z_6$
- $S_5 = Z_7 Z_8$
- $S_6 = Z_7 Z_9$
- $S_7 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6$
- $S_8 = X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9$

对 $i \in [1, 6]$ ，作用两次 Z 操作，得到与原态相同的态，因此 $S_i |0_L\rangle = +1 |0_L\rangle$ ，
 $S_i |1_L\rangle = +1 |1_L\rangle$ ， $S_i |\varphi_L\rangle = +1 |\varphi_L\rangle$ 。

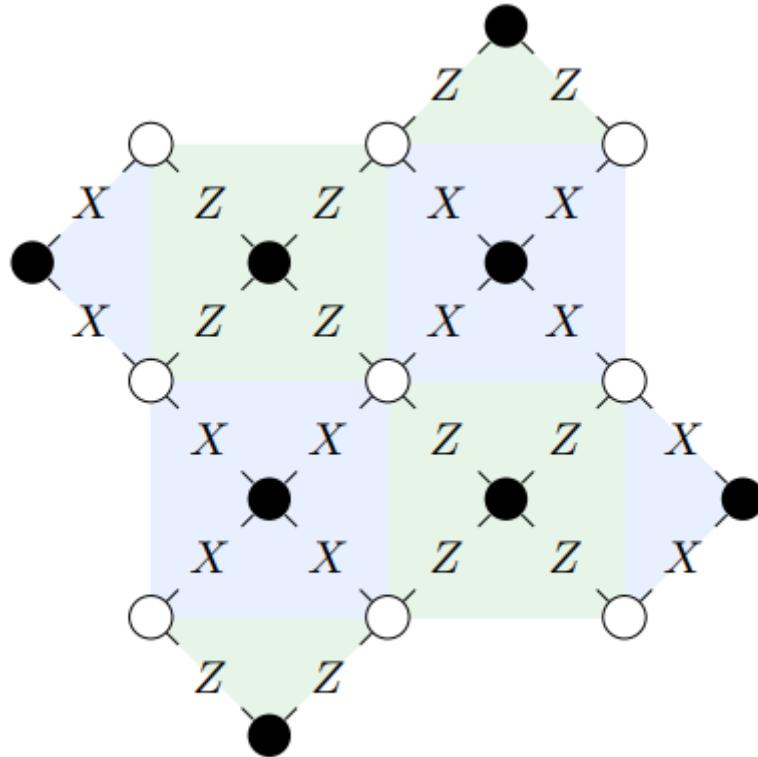
对 $i = 7$ ，作用六次 X 操作，得到 $S_7 |0_L\rangle = |0_L\rangle$ ， $S_7 |1_L\rangle = |1_L\rangle$ ，对 $i = 8$ 同理
因此有 $S_i |\varphi_L\rangle = \alpha S_i |0_L\rangle + \beta S_i |1_L\rangle = \alpha |0_L\rangle + \beta |1_L\rangle = +1 |\varphi_L\rangle$ ，即 S_1, \dots, S_8 稳定 $\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ 张成的向量空间。

2. 证明操作 $\bar{Z} = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9$ 和 $\bar{X} = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 Z_9$ 可以充当 Shor 编码中逻辑量子比特上的逻辑 Z 操作和逻辑 X 操作。(提示：推导 \bar{Z} 和 \bar{X} 作用在 $|0_L\rangle$ 和 $|1_L\rangle$ 上的形式)

解.

- $\bar{Z} |0_L\rangle = |0_L\rangle = Z |0_L\rangle$, $\bar{Z} |1_L\rangle = -|1_L\rangle = Z |1_L\rangle$ ，因此 \bar{Z} 可以充当逻辑量子比特上的逻辑 Z 操作。
- $\bar{X} |0_L\rangle = |1_L\rangle = X |0_L\rangle$, $\bar{X} |1_L\rangle = |0_L\rangle = X |1_L\rangle$ ，因此 \bar{X} 可以充当逻辑量子比特上的逻辑 X 操作。

3. 下图展示了一个二维网格上码距为 3 的表面码。其中，空心圆点表示数据量子比特，
实心圆点表示辅助量子比特，每个辅助量子比特对其相邻的数据量子比特执行征状
测量。写出该纠错码的稳定子，并推导逻辑态 $|0_L\rangle$ 和 $|1_L\rangle$ 的形式。



解. 数据量子比特从上到下, 从左到右编为 1, 2, ⋯, 9; 辅助量子比特从上到下, 从左到右编为 1, 2, ⋯, 8

- $S_{Z1} = Z_1 Z_2 Z_4 Z_5$
- $S_{Z2} = Z_5 Z_6 Z_8 Z_9$
- $S_{Z3} = Z_2 Z_3$
- $S_{Z4} = Z_7 Z_8$
- $S_{X1} = X_2 X_3 X_5 X_6$
- $S_{X2} = X_4 X_5 X_7 X_8$
- $S_{X3} = X_1 X_4$
- $S_{X4} = X_6 X_9$

从 $|0\rangle^{\otimes 9}$ 开始构造。其已经是所有 Z 型稳定子和逻辑 \bar{Z} 的 +1 本征态。接下来需要对所有 X 型稳定子进行投影 ($|0_L\rangle$ 是通过将所有 X 型稳定子群的元素作用在 $|0\rangle^{\otimes 9}$ 上得到的叠加态)

$|0_L\rangle \propto \prod_{i=1}^4 (I + S_X i) |0\rangle^{\otimes 9}$, 展开后为 $|0_L\rangle = \frac{1}{4} \sum_{g \in G_X} g |000000000\rangle$, 其中 $G_X = \langle S_{X1}, S_{X2}, S_{X3}, S_{X4} \rangle$ 。

$|1_L\rangle$ 可以通过对 $|0_L\rangle$ 作用逻辑 \bar{X} 得到, 即 $|1_L\rangle = \bar{X} |0_L\rangle = X_1 X_2 X_3 |0_L\rangle$ 。代入得到 $|1_L\rangle = \frac{1}{4} \sum_{g \in G_X} g (X_1 X_2 X_3 |000000000\rangle)$