理论计算机科学导引

TCS - 毛宇尘老师班

shrike505

目录

> Reference: introtcs.org

问题与编码

> 一言以蔽之，它（TCS）研究的是问题的上界与下界。

需要界定计算所需要解决的问题，以及计算所需要的设备（模型）。

这一节先规定前者。回顾一些经典的算法或数学上的问题：给定带权重的图 G，求其中的最短路/其的最小生成树；提供矩阵 A, B，求其乘积 AB。这些问题都可以看作一个函数：给定输入，求输出。

与程序设计中的函数强调 implementation（即 How to compute the answer）相比，这里的函数更多具有数学意义，强调 specification（即 What should the answer be）。

接下来聚焦这些函数的输入，计算机无法理解图、矩阵这些概念，只能理解二进制串（binary string），也就是一串又一串的 0 和 1——于是要通过某些编码方式将这些元素编码为 01 串。先定义一个字符表（Alphabet）：$\Sigma = \{0, 1\}$，于是长度为 n 的二进制串的集合可表示为 $\Sigma^n = \Sigma \times \Sigma \times ... \times \Sigma = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \Sigma\}$

特别规定 Σ^0 是长度为 0 的串的集合，这个串用 e 表示，即 $\Sigma^0 = \{e\}$

$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$ 即为所有长度的二进制串集合。

♣

前缀（Prefix）

$x = a_1 a_2 ... a_n, y = b_1 b_2 ... b_n$ 的拼接（Concatenation）为 $xy = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_n$
x 是 y 的一个前缀（Prefix），当对于某些 $z \in \Sigma^*, y = xz$
类似的可以定义后缀（Suffix），不再赘述

可以将 Σ 中的 0 和 1 换成任意字符，例如 26 字母，方框三角圆，以此组建你自己的 Alphabet!

♡

编码（Encoding）

有了最基础的元素（字符），将图、矩阵、等等等等计算函数的输入转化为字符串的过程，称为编码，即一个映射 $E : A \to \{0, 1\}^*$。

编码性质

显然，这个映射需要是单射（injective，在下文中会频繁表示为 one-to-one），即不同元素的映射结果（得到的字符串）必须是不同的。

例子

- 自然数 $n \in N$（$\text{parity}(n)$ 是 n 对 2 取余的结果）：$NtS(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n{=}0 \\ 1 & \text{if } n{=}1 \\ NtS(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)\ \text{parity(n)} & \text{if } n{>}1 \end{cases}$
  - 亦即 n 的二进制表示
- 自然数对 $(a,b) \in N \times N$，自然的想法是 a 的编码拼接 b 的编码，但是会出现编码重复，并不是单射
  - 对于 1110，可以解释为 $(1,6)$ 和 $(3,2)$，这实质上是因为在计算机读取完前两个 1 时，并不知道它代表 3 还是一个其他数的前缀

prefix-free 编码

在第二个例子的教训下，我们需要找到的编码映射是 prefix-free 的，即对于任何的 $x \neq x'$，$E(x)$ 都不是 $E(x')$ 的前缀。

接下来 myc 老师突然就这个 prefix-free 证明了两个寻找另一种编码的引理，感觉很突兀。

引理 1

假设已经存在一个 prefix-free 的编码 $E : A \to \{0,1\}^*$，那么对于编码 $\bar{E} : A^* \to \{0,1\}^*$（$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$，我理解为一个由任意长待映射元素（$a_i \in A$）序列组成的集合，接下来要找到对这些元素序列的编码），命 $\bar{E}(a_1 a_2 ... a_n) = \begin{cases} E(a_1)E(a_2)...E(a_n) & \text{if } n \geq 1 \\ e & \text{if } n{=}0 \end{cases}$，那么 $\bar{E}$ 是 one-to-one 的。

证明. 假设存在 $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (b_1, b_2, ..., b_m)$，使得 $\bar{E}(a_1 a_2 ... a_n) = \bar{E}(b_1 b_2 ... b_m)$，那么 $E(a_1)E(a_2)...E(a_n) = E(b_1)E(b_2)...E(b_m)$，且 $\exists i, s.t. \forall j < i, a_j = b_j$，且 $a_i \neq b_i$（即在第 i 个字符前两个元素序列的每个元素都相同）

那么 $E(a_1)E(a_2)...E(a_{i-1}) = E(b_1)E(b_2)...E(b_{i-1})$，则 $E(a_i)...E(a_n) = E(b_i)...E(b_m)$，那么对于 $E(a_i)$ 和 $E(b_i)$，要么前者是后者的前缀，要么后者是前者的前缀，又考虑到 $a_i \neq b_i$，则 E 不是 prefix-free 的，这与题设冲突。 □

引理 2

如果存在 one-to-one 的 $E : A \to \{0,1\}^*$，那么存在 prefix-free 的 $E' : A \to \{0,1\}^*$，且使得 $|E'(a)| \leq 2|E(a)| + 2, \forall a \in A$

证明. 将原编码中的 0 映射为 00，1 映射为 11，该元素再次编码结束后再添加一个 01，例如对于 $E(a) = 010$，$E'(a) = 00110001$

这种编码显然有性质 0：01 不会出现在任何编码的奇数-偶数位置，即 $\forall k \in N, E'(a_{2k+1})E'(a_{2k+2}) \neq 01$

试证 prefix-free 性：假设 $E'(a)$ 是 $E'(b)$ 的前缀，由于 01 标识了 $E'(a)$ 和 $E'(b)$ 的结束，且由于 性质 0，很明显有 $E'(a) = E'(b)$，那么 $E(a) = E(b)$，且 E 是单射，则 $a = b$，于是 prefix-free 得证。 □

结合两个引理可以得到一个结论：

定理

如果存在 one-to-one 的 $E : A \to \{0,1\}^*$，那么便存在 one-to-one 的 $E' : A^* \to \{0,1\}^*$

这是很重要的，对于数学元素，如果我们可以给数字做编码，那么就可以编码向量，再运用一次定理就能编码矩阵，然后是更高维的张量。

编码与可数的关系

下面四条等价

1. A 是可数的
2. A 是有限的，要么存在一个双射 $f : A \to N$
3. 存在单射 $g : A \to N$
4. 存在满射 $h : N \to A$

引理 3

$\{0,1\}^*$ 是可数的

证明. 对 $\{0,1\}^*$ 的元素进行这样的排序：e,0,1,00,01,10,11⋯

即先按长度排序，内部再按二进制数大小排序。

那么定义从字符串映射到排序后序号的函数 $f : \{0,1\}^* \to N$：$\forall x \in \{0,1\}^*, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x=e \\ 2^{|x|}+(x \text{ 对应的二进制数大小}) & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}$

可理解为组的序号+组内的序号，这是一个单射，于是可数。 □

这个引理也引导出一个定理，即可数性和单射编码的关系：

定理

A 是可数的当且仅当存在单射 $E : A \to \{0,1\}^*$

编码的设定完备后，我们面临的问题（Problem）就抽象为了一个从二进制串到二进制串的函数了（即对输入和输出都做编码）

计算模型

布尔电路（Boolean Circuit）

可以可以，问题（Problem）的输入输出已经被我们编码，可以投诸于计算了——那么，计算的具体步骤，或者说方法，是什么呢?

这一节里探讨的一类问题/函数统称为有限函数（Finite Function），其输入输出均为固定长度的一个二进制串，即 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$

一个很经典的有限函数计算模型即布尔电路（Boolean Circuit，我去，计算机系统 1），显然对于与门（AND）和或门（OR）而言，$n = 2, m = 1$，非门的 n 为 1，别的门电路可类比；另一个例子是 MAJ 函数，即对于 $n = 3$ 的输入的每一位，如果 1 占多数，则输出 1，否则输出 0

一个『电路』还是太具体了，不利于更本质的计算理解——将一个布尔电路 C 抽象为一个有向无环图 G，它包含如下节点（Nodes）：

- n input nodes：记为 $X[0], X[1], ..., X[n-1]$，均没有入度且出度至少为 1
- s gates：即逻辑门，根据种类有不同的度
  - 一个电路 C 的 size 定义为 $|C| = s$
- m output nodes：记为 $Y[0], Y[1], ..., Y[1]$

舒服了，可以利用门电路模拟从输入到输出的计算过程了：对于输入长为 n 的 $x \in \{0,1\}^n$，令其第 i 位即为 input nodes 中的 $X[i-1]$，输出答案 $y \in \{0,1\}^m$ 同理。

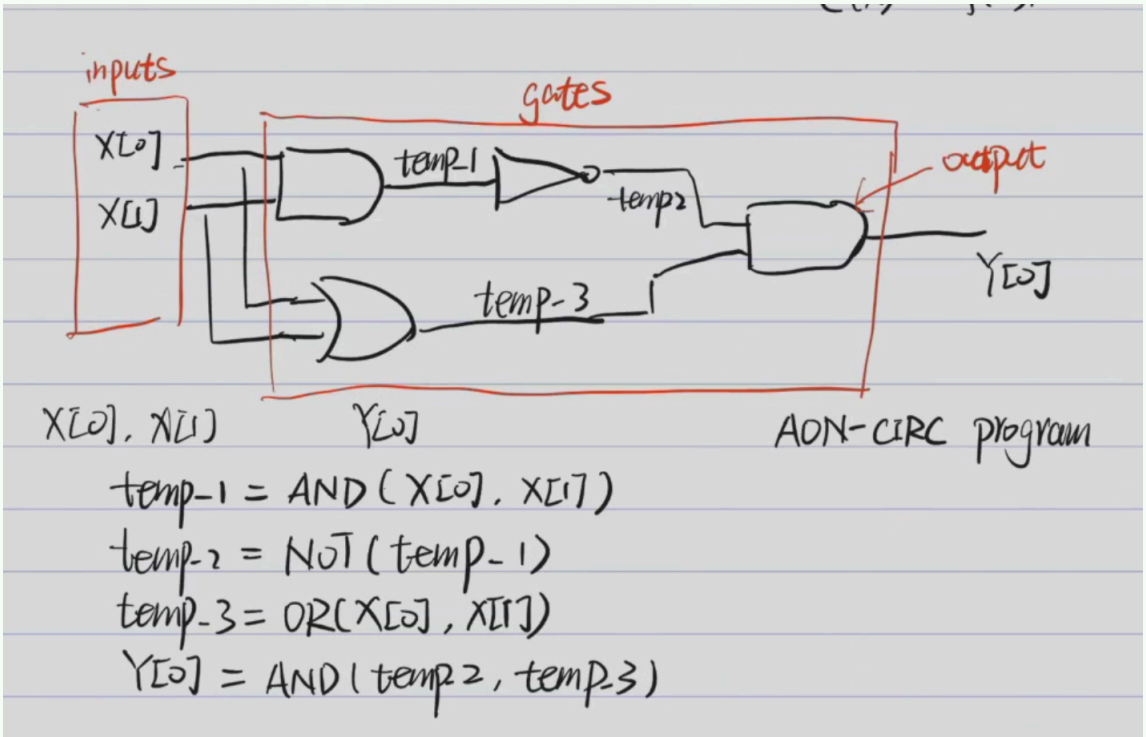
定义 1

记 $C(X) = (Y[0], Y[1], ..., Y[m-1])$，如果 $\forall x \in \{0,1\}^n, C(x) = f(x)$，则称电路 C 计算了函数 f.

♣

现在还亟待一种对计算过程的书面化描述，即，这个电路的每一步，信号（或者说数据）流过每一个门时得到了什么中间结果？于是 ~~Anonjac~~ ~~Anon-Circ~~ AON-Circ（AND-OR-NOT Circuit）Program 登场了。

定义 2 (AND-OR-NOT Circuit Program)



对于图中的电路，将其每个中间逻辑门的输出保存为一个 temp 变量，便得到了下方的多行（Lines），这就是 AON-Circ Program

不难发现每一行对应一个逻辑门的计算过程，于是 Program 的行数与其对应电路中逻辑门的个数相同。此时 Program 的行数即为电路的 size

AON-C Program 计算了某个函数的定义与上方电路 C 计算函数类似，不再赘述。

♣

实际上程序和电路这种对应关系就是等价的。

定理 3

一个函数可被一个有 s 个逻辑门的布尔电路计算，当且仅当它可以被 s 行的 AON-C Program 计算。

♡

NAND 电路（NAND Circuit）

接下来介绍一种门：NAND，即 NOT(AND)，易知 AON 三者都可以只用 NAND 实现，于是可以搭建一个仅由 NAND 门构成的电路。

NAND Circuit	$\Leftrightarrow$	AON Circuit
s gates	$\rightarrow$	$\leq 2s$ gates, for NAND decomposes to NOT(AND)
$\leq 3s$ gates,for NAND(NAND(a,a),NAND(b,b)) $\equiv$ OR(a,b)	$\leftarrow$	s gates

相类似的，有 NAND-Circ Program，其每一行都形如 `foo = NAND(bar,blah)`。

定理 4

Boolean Circuit, AON-Circ Program, NAND-Circ Program,NAND Circuit 四者的转化只需要 s 的常数倍（即 $\Theta(s)$）

定理 5

$\forall n, m, f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$，都存在一个布尔电路计算这个函数，其含有 $O(m \cdot n \cdot 2^n)$ 个逻辑门。

证明. 对于输出的某一位 $Y[j]$，其计算情况可枚举如下表：

$X[0]$	$\cdots$	$X[n-1]$	$Y[j]$
0	$\cdots$	0	some value
0	$\cdots$	1	some value
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	$\cdots$	1	some value

写出 $Y[j]$ 的具体计算式，用析取范式表示：$Y[j] = (... \wedge ... \wedge ...) \vee (... \wedge ... \wedge ...) \vee ... \vee (... \wedge ... \wedge ...)$，其中共有 2^n 个括号，对应上表中的 2^n 行，每一行通过合取计算出一种情况下的 $Y[j]$，再析取得到 $Y[j]$ 的具体表达；每个括号中共有 n 项，对应 $X[0]$ 到 $X[n-1]$ 本身或取反再进行合取，于是得到 $n \cdot 2^n$

而 Y 的长度为 m，于是得到 $O(m \cdot n \cdot 2^n)$ □

满足上述定理，即可以计算任意函数的电路，称为*通用*（universal）的；要判断一个函数集合（化成的电路）是否是通用的，只需要判断其是否能计算 NAND。

计算规模

可以可以，已经可以用电路/程序计算某个函数/问题了，那么对于某个函数，我们需要多少个门的电路，多少行的程序，这是可以估量的吗？由上面的定理似乎已经有了上界：$O(m \cdot n \cdot 2^n)$（myc 剧透：其实可以把数量打到 $O\left(\frac{m \cdot 2^n}{n}\right)$）。我们来从 NAND 电路入手。

ADD Function

试设计电路程序，计算 $\mathbf{ADD}:\{0,1\}^{2n}\to\{0,1\}^{n+1}$，$\mathrm{ADD}(x_0,\ldots,x_{2n-1})=x_0\ldots x_{n-1}+x_n\ldots x_{2n-1}$

解.

```
def ADD(X[0], ..., X[2n-1]):
  Result = [0] * (n+1)
  Carry = [0] * (n+1)
  for i in range(n):
    Result[i] = XOR(Carry[i], XOR(X[i], X[i+n]))
    Carry[i+1] = MAJ(Carry[i], X[i], X[i+n])
  Result[n] = Carry[n]
  return Result
```

XOR 和 MAJ 函数只需要常数行的 NAND-Circ Program 实现，经过 n 次循环，于是该加法函数的规模（行数）即为 $O(n)$

这是很好的，计算规模与输入串的长度成正比。

MUL Function

乘法基于加法，摆了。

规模可以不断优化：$O(n^2)\to O(n^{\log_2 3})\to$ even better.

LOOKUP Function

试设计电路程序，计算 $\mathbf{LOOKUP}:\{0,1\}^{2^k+k}\to\{0,1\}$，具体而言，输入分为两段：$2^k$ 位作为表，k 位视作一个最大可表达 2^k-1 的二进制数 i，输出为表中的第 i 位。

解. 利用归纳思想，$k=1$ 时：

```
def LOOKUP_1(X[0],X[1],i[0]):
  if i[0] == 0:
    Y[0] = X[0]
  else:
    Y[0] = X[1]
```

对于 k 时的情形

```
def LOOKUP_k(X[0],X[1],...,X[2^k-1],i[0],...,i[k-1]):
  if i[0] == 0: # 根据剩下的 i 查 X 的前半段
    Y[0] = LOOKUP_(k-1)(X[0],...,X[2^(k-1)-1],i[1],...,i[k-1])
  else:
    Y[0] = LOOKUP_(k-1)(X[2^(k-1)],...,X[2^k-1],i[1],...,i[k-1])
```

于是有规模 $\begin{cases}L(k)=C+2L(k-1)\\ L(1)=O(1)\end{cases}$，解得 $O(2^k)$

优化效率

现在来探讨如何将某函数（n input, m output）计算的规模从 $O(m\cdot n\cdot 2^n)$ 优化至 $O(\frac{m\cdot 2^n}{n})$。

我们用上面介绍过的 LOOKUP 函数来理解，对于如下函数计算的过程真值表：

$X[0]$	$\cdots$	$X[n-1]$	$Y[j]$
0	$\cdots$	0	some value
0	$\cdots$	1	some value
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	$\cdots$	1	some value

进行计算时可以看作是将 $X[0]-X[n-1]$ 作为输入的二进制数索引 i，原函数输出 Y 的某一位 $Y[j]$ 在所有情况的 X 下的输出列作为输入的表（有 2^n 个取值可能性，即上表中的 2^n 行），从而计算 $Y[j]$ 确定取得的值）

例如对如下函数 g 的真值表：

$X[0]$	$X[1]$	$Y[0]$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

命 $G_0=1,G_1=0,G_2=1,G_3=1$（即函数输出的 2^2 中情况），那么 $g(X[0],X[1])=\text{LOOKUP}_2(G_0,G_1,G_2,G_3,X[0],X[1])$

接下来分析这种方法的效率：对于抽出输出的 2^n 种情况，每种 0 或 1 利用 ONE/ZERO 函数便可用常数行实现，于是共有 $O(2^n)$ 行；而 LOOKUP 函数的规模也为 $O(2^n)$，于是计算 $Y[j]$ 的规模为 $O(2^n)$；而 Y 有 m 位，于是总规模优化为 $O(m\cdot 2^n)$

> ⚠ Incomplete Section
>
> 接下来是如何将规模进一步优化到 $O(\frac{m\cdot 2^n}{n})$，但我没听咋懂 myc 的讲解，于是 skip 了

编码程序

现在考虑将 Circ-Program 编码为字符串形式：就一个有 s 行的 NAND-Circ Program 而言，其每一行都是 `foo = NAND(bar,blah)` 的形式，因此只需要考虑编码其中所有的变量（易知涉及的变量个数不超过 $3s$ 个），且每一行都可以看作是一个三元组（triple）：`(foo, bar, blah)`，于是共得到 s 个三元组。

（以 $3s$ 个变量为例）将这些变量记作 $0,1,2,3,...,n-1,n,...,n+m-1,...,3s-1$，其中前 n 个为对应函数的 input 变量（$X[0],X[1],...,X[n-1]$），中间 m 个为 output 变量（$Y[0],Y[1],...,Y[m-1]$，其余为中间变量。

于是每一个变量都可以编码为一个长度为 $\lceil\log(3s)\rceil$（hey where does this come from）的二进制串，只需要按照程序顺序拼接每个三元组中变量的编码，便得到了一个长度为 $3s\cdot\lceil\log(3s)\rceil$ 的二进制串。

编码完成了——但是，为什么要做这件事，难道说？没错，有了字符串编码的程序，我们甚至能将这个程序作为另一个程序的输入💀，例如下面这个例子。

EVAL Function

函数 $\mathrm{EVAL}_{s,m,n}:\{0,1\}^{3s\lceil\log(3s)\rceil+n}\to\{0,1\}^m$ 是对一个 NAND-Circ Program p（含 s 行，计算 $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}^m$）和一个输入 $x\in\{0,1\}^n$ 的计算（或者说，运行），其输入的前 $3s\cdot\lceil\log(3s)\rceil$ 位为 p 的编码，后 n 位为 input x，输出为 $f(x)$.

定理 1 (EVAL 的规模)

$\forall s,n,m,\exists$ NAND-Circ Program $U_{s,n,m}$ 计算函数 $\mathrm{EVAL}_{s,m,n}$，且其规模为 $O(s^2\cdot\log s)$

♡

更长的输入：Infinite!

更一般的计算方法无疑是针对任意长度输入的函数 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}^n$，然而这是无法利用已经讲述过的布尔电路/程序来计算的（回顾：我们的方法是，使用一个真值表，记录每组输入 $X[0]-X[n-1]$ 下 $Y[m]$ 的取值）

定理 2

For every $F:\{0,1\}^*\to\{0,1\}^*$, $BF=\begin{cases}F(x)_i & \text{if } i<|F(x)|,b=0\\ 1 & \text{if } i<|F(x)|,b=1\\ 0 & \text{if } i\geq|F(x)|\end{cases}$

使用 BF 计算 F 只需要遍历 0 到 $|F(x)|-1$ 即可，反过来只需要取每一位

♡

语言

DFA 与正则语言

显然一个布尔函数 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$ 和这样一个集合对应：$A_f=\{x\in\{0,1\}^*\mid f(x)=1\}$，这个集合称为语言（Language）；此时显然有 $f(x)=1$ 当且仅当 $x\in A_f$

于是计算函数的值 $f(x)=?$ 与判断 $x\in?\,A_f$ 是等价的。

于是来研究语言的性质（自己觉得突兀不（流汗

考虑累加 x 的每一位再模二的 XOR 算法，可得到以下流程图：

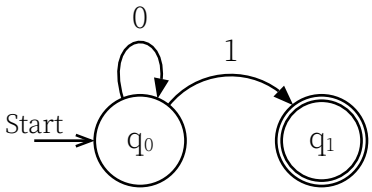


图 1　假设 q_1 为末态

定义 1

这被称作一个确定性有限自动机（Deterministic Finite Automaton, DFA），它可以看作一个四元组 (K, s, F, δ)，其中：

- K - 一组状态的有限集合
- $s \in K$ - 初始状态
- $F \subseteq K$ - 末态（接受状态）的集合
- $\delta : K \times \{0,1\} \to K$ - 状态转移函数

♣

假设有输入字符串 $x_0 x_1 ... x_{n-1}$，DFA 的计算过程为：$s_0 = s, s_1 = \delta(s_0, x_0), s_2 = \delta(s_1, x_1), ..., s_n = \delta(s_{n-1}, x_{n-1})$，然后判断 $s_n \in F$，如果是则接受（accept），否则拒绝（reject）。

定义 DFA 计算某个函数的方法：M computes f if M accepts x 当且仅当 $f_x = 1$

同时定义 DFA Decides 某个语言的方法：M decides A_f if M accepts x 当且仅当 $x \in A_f$

被 DFA 决定的语言称为正则语言（Regular Language）。

定理 2

某台 DFA M 可判断的语言有且仅有一个，即 $L(M) = \{x \in \{0,1\}^* \mid M \text{ accepts } x\}$

♡

练习. 证明空集，$\{0,1\}^*$，$\{e\}$, $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 有一个字串是 101（何意味）$\}$ 是正则语言

解.

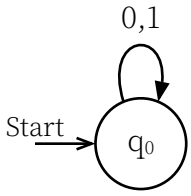


图 2　空集，使可接受集为空即可

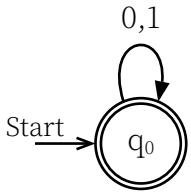


图 3　$\{0,1\}^*$，使所有状态均为可接受状态即可

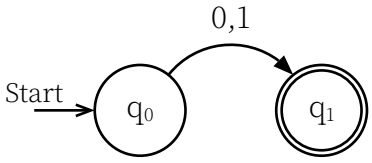


图 4　$\{e\}$，使初始状态为唯一可接受状态即可

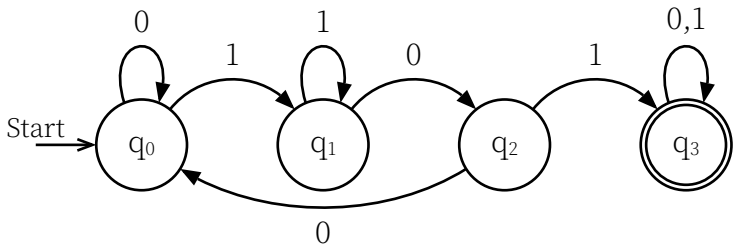


图 5 $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 有一个字串是 $101\}$，设计状态转移使得读到连续的 101 时进入可接受状态即可

定理 3

如果 A 和 B 都是正则的，那么 $A \cup B$ 是正则的。（对新 DFA 的每一个成员进行探究即可）♡

NFA

定义 1

不确定性有限自动机（Nondeterministic Finite Automaton, NFA），如下是其与 DFA 的区别：

- 状态转移函数中，下一个状态可以有多个
- 读入空串也可导致状态转移

可见是在状态转移时有所不同；实际上这里的状态转移比“函数”要更一般，即关系。

$N = \{K, s, F, \Delta(\text{transition relation})\}$, $\Delta \subseteq K \times \{0, 1, e\} \times K$

NFA 做计算的过程也比 DFA 宽松一些：能读入字符串输入的全部并且“有一条路可以走通并走到可接收状态”（可理解为并行计算的）即可。♣

练习. 设计 NFA，计算 $W = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 的倒数第二位是 $1\}$

解.

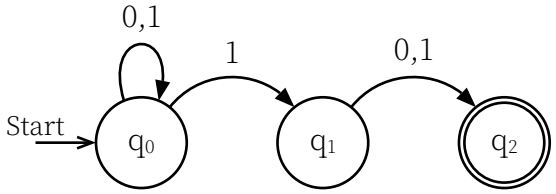


图 6 计算 $W = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 的倒数第二位是 $1\}$

DFA 看起来可以猜测出一条正确的路径，似乎比 NFA 更强大一些，但实际上两者是等价的。

定理 2

DFA 能判断一个语言等价于 NFA 也能判断这个语言。

证明. DFA 本身就是一台特殊的 NFA，这个方向是显然的。

反过来的证明，想法是让 DFA 模拟 NFA 的 tree-like 计算过程。下面先研究一个 NFA 的情况

对于 $p \in K$，定义 $E(p) = \{p\} \cup \{q \mid (p, e, q) \in \Delta\}$（即 p 和不读入 symbol 即可到达的状态组成的集合）；假设该 NFA 从某层（tree-like arch）状态集合 Q 接收一个 0 到达下一层 Q'，那么 $Q' = \bigcup_{q \in Q} \bigcup_{p \in (q,0,p)} E(p)$

接下来用 DFA 模拟这个过程。很明显其每个元素有如下表示:

- 状态集合 $K' = \{Q | \ Q \subseteq K\}$
- 初始状态 $s' = E(s)$
- accepting states $F' = \{Q \mid Q \subseteq K, Q \cap F \neq \emptyset\}$
- transition function $\delta(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \bigcup_{p \in (q,a,p)} E(p)$

□

因此正则语言也可以使用 NFA 来判断。

♡

定理 3

如果 A 和 B 都是正则的，那么 AB （拼接，Concatenation）是正则的。（构造一个新 DFA，其状态为原两个 DFA 状态的笛卡尔积，且仅当两个状态均为可接受状态时新状态才为可接受状态）

证明. 总有一个 A 和 B 的交界处，其前面的字串用 NFA_A 判断，后面的字串用 NFA_B 判断。交界处由 NFA“猜测”，通过 e 切换。 □

♡

定理 4

如果 A 是正则的，那么 $A^* = \{a_1 a_2 ... a_k : k \geq 0 \text{ and } a_i \in A\}$ （即从 A 中选取若干串做拼接）是正则的。

证明. 对于 NFA_A，每次跑完一个字串后利用“猜测”功能返回其初态。 □

♡

正则表达式

每种正则语言可以用正则表达式（Regular Expression, RE）表示:

定义 1

- Base Case：$0, 1, \emptyset$ are REs，分别对应 $L(0) = \{0\}, L(1) = \{1\}, L(\emptyset) = \emptyset$
- 如果 R 和 S are REs，那么以下也是 REs：
  - $(R \cup S)$，对应 $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
  - (RS)，对应 $L(RS) = L(R)L(S)$（recall it is concatenation）
  - (R^*)，对应 $L(R^*) = (L(R))^*$
  - 括号书写时很麻烦，记录一个算数优先级 precedence：$*$ > concatenation > $\cup$

例子

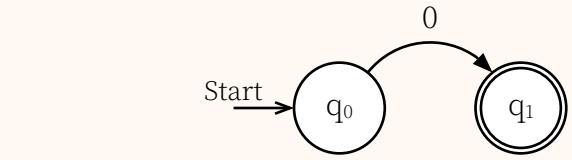
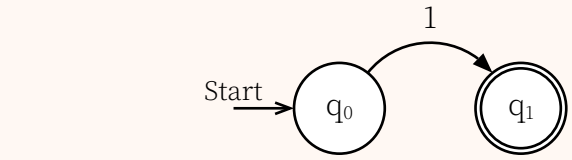
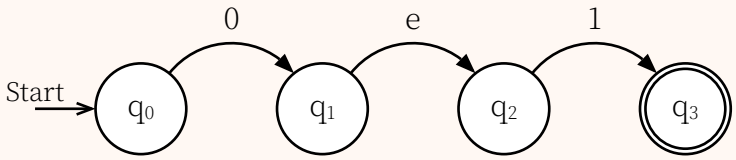
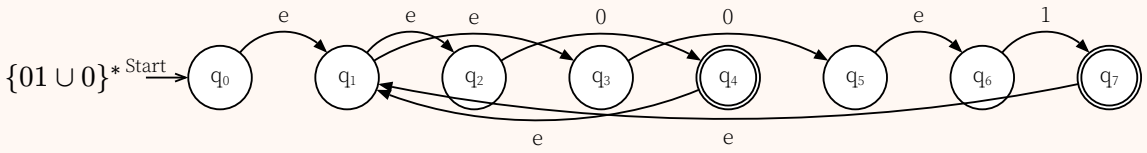
Language	RE
$\{e\}$	$\emptyset^*$
$\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ starts with 0 and culminates with 1}\}$	$0(0 \cup 1)^*1$
$\{w \in \{0,1\}^* : w$ 至少包含两个 $0\}$	$(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*$

定理 2

语言是正则的当且仅当其可以被某个正则表达式表示。

练习. 画出 $(01 \cup 0)^*$ 对应的 NFA。

解.

RE	NFA
0	
1	
01	
$\{01 \cup 0\}^*$	

证明. 上面的练习可以总结出正则表达式向 NFA 的转化。从 NFA 向正则表达式的转化采用状态消除法（State Elimination Method）：

给定 NFA $N = (K, s, F, \Delta)$，由以下步骤得到正则表达式 R:

- 将 N 转化为 N'
  - N' 中没有状态指向其的 initial state（新建一个初态，通过 e transition 指向原先的初态）
  - N' 的 accepting state 只有一个，且该状态不指向任何状态（新建一个 accepting state，使原先的若干 accepting states 通过 e transition 指向它）
- 删除 N' 中的非初态非末态状态，直到只剩下初态和末态

□