

理论作业一 量子比特与量子门

姓名 redacted 学号 redacted

2025 年 11 月 1 日

1. 已知双量子比特系统的量子态如下 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x & 3x & \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^4$ ，求该系统处于 $|01\rangle$ 态的概率。

解. 由于 $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + x|01\rangle + 3x|10\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|11\rangle$ ，于是 $P(\text{系统处于 } |01\rangle \text{ 态}) = |x|^2 = x^2$

2. 已知单量子比特的态矢量为 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ，求该量子比特的 Bloch 球坐标。

解. 在 Bloch 球中， $|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}|1\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle$

由于态矢量的系数为实数， $\phi = 0$ ，于是得到 $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}, \sin \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$

因此 $\cos \theta = -\frac{7}{25}, \sin \theta = \frac{24}{25}$

在笛卡尔坐标系中， $x = \sin \theta \sin \phi = \frac{24}{25}, y = \sin \theta \cos \phi = 0, z = \cos \theta = -\frac{7}{25}$ ，因此该量子比特的 Bloch 球坐标为 $(\frac{24}{25}, 0, -\frac{7}{25})$

3. Bell 态指双量子比特系统的四个特殊量子态，他们是双量子比特系统中纠缠度最高的量子态，因此也称为最大纠缠态，在量子隐形传态、量子算法中有着广泛的应用。一般而言，Bell 态定义如下：

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x|1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \{0, 1\}, \quad \bar{y} = 1 - y \quad (1)$$

a. 证明 Bell 态是纠缠态。

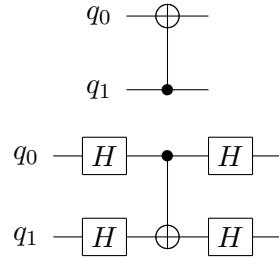
b. 用 H、X、Z 和 CNOT 门设计四个量子电路，使得初态为 $|00\rangle$ 的双量子比特系统经这些量子电路作用后分别演化为四个 Bell 态。

解. 对于 $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ，假设其能表示为两个单量子比特 ($|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, |\psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$) 的张量积形式 $|\phi\rangle \oplus |\psi\rangle = ac|00\rangle + bc|10\rangle + ad|01\rangle + bd|11\rangle$

那么有 $ac = bd = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $bc = ad = 0$, 显然不存在这样的 a, b, c, d 使得这些等式同时满足, 因此 $|\beta_{00}\rangle$ 无法表示为两个单量子比特的张量积, 即其是纠缠态。

同理可证明剩下三种贝尔态也是纠缠态。

4. 证明下图中的两个量子电路等价。(提示: 计算两个量子电路对应的酉矩阵)



解. 上为 $CNOT_{high} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 下为 $(H \otimes H)CNOT_{low}(H \otimes H)$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可见二者等价

5. 证明厄米算符 A 的任一本征值均为实数, 且不同本征值对应的本征态正交。

证明.

1. 任取一本征值 λ , 其对应本征向量为 $|\phi\rangle$, 那么有 $A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$

由厄米算符的性质, 有 $\langle\phi|A|\phi\rangle^* = (\langle A^\dagger\phi|\phi\rangle)^* = \langle\phi|A^\dagger\phi\rangle = \langle\phi|A|\phi\rangle$

由于其共轭等于本身, 因此 $\langle\phi|A|\phi\rangle = \lambda\langle\phi|\phi\rangle$ 为实数, 而 $\langle\phi|\phi\rangle > 0$, 因此 λ 一定为实数。

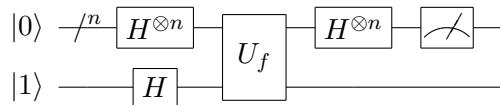
2. 任取两个 A 的本征值 $\lambda \neq \mu$, 其分别对应本征态 $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$, 即有 $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, A|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle$

考虑内积 $\langle\psi|A|\varphi\rangle$, 一方面有 $\langle\psi|A|\varphi\rangle = \mu\langle\psi|\varphi\rangle$, 另一方面有 $\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle A^\dagger\psi|\varphi\rangle = \langle A\psi|\varphi\rangle = \lambda\langle\psi|\varphi\rangle$, 于是 $(\lambda - \mu)\langle\psi|\varphi\rangle = 0$, 由于 $\lambda \neq \mu$, 那么 $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$, 这就说明这两个本征态是正交的, 由任意性可得, A 的不同本征值对应的本征态正交。

6. Deutsch 算法展示了量子计算机强大的并行计算能力。Deutsch-Jozsa 算法是其推广形式，将可分类的函数推广至多比特情形。

已知函数 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ，该函数是常数函数（对所有输入均输出 0，或对所有输入均输出 1）或平衡函数（对恰好一半的输入输出 0，对另一半输入输出 1）。Deutsch-Jozsa 算法只需对实现函数 f 的结构进行一次查询，即可判断 f 是常数函数还是平衡函数。

下图是实现 Deutsch-Jozsa 算法的量子线路。其中， $U_f : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$ 是实现函数 f 的 $n + 1$ 比特的量子门。



推导该量子电路中量子态的演化过程，并说明如何基于测量结果判断 f 是常数函数还是平衡函数。（提示：计算 f 为常数函数或平衡函数时的测量结果）

量子态演化推导

1. 初始态：

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$$

2. 应用 Hadamard 门：

$$|\psi_1\rangle = (H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}) \otimes (H|1\rangle)$$

由于：

$$H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle, \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

因此：

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

3. 应用 U_f 门： U_f 门定义为 $U_f|x, y\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle$ 。应用后：

$$|\psi_2\rangle = U_f|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle \otimes \frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}$$

注意到：

$$|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$$

因此：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

输入寄存器的状态为：

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle$$

4. 再次应用 Hadamard 门到输入寄存器:

$$|\psi_3\rangle = H^{\otimes n}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x (-1)^{f(x)} H^{\otimes n}|x\rangle$$

由于 $H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot z}|z\rangle$, 其中 $x \cdot z$ 是点积模 2:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_z \left(\sum_x (-1)^{f(x)+x \cdot z} \right) |z\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量输入寄存器, 得到结果 z 的概率振幅为:

$$\alpha_z = \frac{1}{2^n} \sum_x (-1)^{f(x)+x \cdot z}$$

基于测量结果判断函数类型

- 如果 f 是常数函数: - 若 $f(x) = 0$ 对于所有 x , 则:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2^n} \sum_x (-1)^0 = 1, \quad \alpha_z = 0 \quad (\text{对于 } z \neq 0)$$

- 若 $f(x) = 1$ 对于所有 x , 则:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2^n} \sum_x (-1)^1 = -1, \quad \alpha_z = 0 \quad (\text{对于 } z \neq 0)$$

- 因此, 测量结果总是 $z = 0$ (全零)

- 如果 f 是平衡函数:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2^n} \sum_x (-1)^{f(x)} = 0$$

因为一半 x 有 $f(x) = 0$, 另一半有 $f(x) = 1$ - 因此, 测量结果 $z = 0$ 的概率为 0, 测量结果不会是全零

结论

测量输入寄存器后, 如果结果为全零 (即 $z = 0$), 则 f 是常数函数; 否则, f 是平衡函数。