

1. 将如下句子翻译为命题公式：

- 今天下雨或天晴，但不会两者都发生。
  - $p = \text{今天下雨}, q = \text{天晴}$
  - $p \vee q \wedge \neg(p \wedge q)$
- 如果有一个请求，那么该请求最终被接受，或者不会有任何进展。
  - $p = \text{有一个请求}, q = \text{该请求最终被接受}, r = \text{不会有任何进展}$
  - $p \rightarrow q \vee r$
- 癌症不会被治愈，除非可以确定其原因，并且找到了抗癌新药。
  - $p = \text{癌症被治愈}, q = \text{可以确定其原因}, r = \text{找到了抗癌新药}$
  - $p \rightarrow q \wedge r$
- 只有当小明努力学习并且认真考试，他才能取得好成绩。
  - $p = \text{小明努力学习}, q = \text{认真考试}, r = \text{取得好成绩}$
  - $(p \wedge q) \rightarrow r$

2. 用真值表证明  $\neg p \vee q$  和  $p \rightarrow q$  是等值的。

$p$	$q$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

3. (证明定理 3.3) 设  $\Phi$  是命题公式。那么， $\Phi$  是可满足的，当且仅当  $\neg\Phi$  不是有效的； $\Phi$  是有效的，当且仅当  $\neg\Phi$  不是可满足的。

- $\Phi$  是可满足的  $\Leftrightarrow \exists v, s.t. \Phi^v = 1 \Leftrightarrow \neg(\forall v, \Phi^v = 0) \Leftrightarrow \neg(\forall v, (\neg\Phi)^v = 1) \Leftrightarrow \neg \models \neg\Phi$
- $\Phi$  是有效的  $\Leftrightarrow \forall v, \Phi^v = 1 \Leftrightarrow \neg(\exists v, s.t. (\neg\Phi)^v = 1) \Leftrightarrow \neg(\neg\Phi \text{ 是可满足的}) \Leftrightarrow \neg\Phi \text{ 不是可满足的。}$

4. 给定  $\phi \equiv \psi$ ，且  $\phi$  是  $\varphi$  的一部分。把  $\varphi$  中的  $\phi$  换成  $\psi$  得到  $\varphi'$ 。我们有  $\varphi \equiv \varphi'$ 。

- 由于  $\phi \equiv \psi$ ，即在任何赋值  $v$  下， $\phi^v \equiv \psi^v$ 。因此在替换后，公式  $\varphi'$  的结构仅在  $\phi$  的部分进行了替换，而真值不受影响，因此  $\varphi \equiv \varphi'$ 。

5. 证明：

- $p \rightarrow (q \wedge r) \mid = \mid (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

►

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

► 利用真值表即证。

•  $(p \wedge q) \rightarrow r \mid = \mid (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

►

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	<b>1</b>	1	1	<b>1</b>
0	0	1	0	<b>1</b>	1	1	<b>1</b>
0	1	0	0	<b>1</b>	1	0	<b>1</b>
0	1	1	0	<b>1</b>	1	1	<b>1</b>
1	0	0	0	<b>1</b>	0	1	<b>1</b>
1	0	1	0	<b>1</b>	1	1	<b>1</b>
1	1	0	1	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
1	1	1	1	<b>1</b>	1	1	<b>1</b>

► 利用真值表即证。