

数值解析・最適化工学特論 課題 2

提出日：2024/07/30

M223303

井口実紅

1. 入力画像を次の相似変換によって変換した出力画像から回転角度 θ とスケールパラメータ s をガウス・ニュートン法によって推定しなさい。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

以下の項目について検討しなさい。

1. 初期値を変えたときの収束の仕方の違い
2. 入力画像を変えたときの推定精度の違い
3. その他、独自に考えた検討項目

以下にガウス・ニュートン法のアルゴリズムを示す。

1. θ と s の初期値を適当に与える。
2. 画像 I に対して平滑微分画像 $I'_{x'}$ 、 $I'_{y'}$ を作成する。平滑微分画像はガウシアンフィルタで平滑化し、その画像に対し x 軸方向、 y 軸方向で微分することにより、得ることができる。
3. J の θ に対する 1 階微分 J_{θ} と 2 階微分 $J_{\theta\theta}$ を計算する
ガウス・ニュートン法で最小化する式

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in I} (I'(x', y') - I(x, y))^2$$

1 階微分

$$J_{\theta} = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in I} (I'(x', y') - I(x, y)) (I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta})$$

2 階微分

$$J_{\theta\theta} = \sum_{(x,y) \in I} (I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta})^2$$

このとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と置くと、 $\frac{dx'}{d\theta}$ 、 $\frac{dy'}{d\theta}$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\theta} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{dx'}{da_{ij}} \frac{da_{ij}}{d\theta} \\ \frac{dy'}{d\theta} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{dy'}{da_{ij}} \frac{da_{ij}}{d\theta} \end{aligned}$$

4. J の s に対する 1 階微分 J_s と 2 階微分 J_{ss} を計算する

1 階微分

$$J_s = \sum_{(x,y) \in I} (I'(x',y') - I(x,y)) (I'_{x'} \frac{dx'}{ds} + I'_{y'} \frac{dy'}{ds})$$

2 階微分

$$J_{ss} = \sum_{(x,y) \in I} (I'_{x'} \frac{dx'}{ds} + I'_{y'} \frac{dy'}{ds})^2$$

$\frac{dx'}{ds}$ 、 $\frac{dy'}{ds}$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\theta} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{dx'}{da_{ij}} \frac{da_{ij}}{d\theta} \\ \frac{dy'}{d\theta} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{dy'}{da_{ij}} \frac{da_{ij}}{d\theta} \end{aligned}$$

5. J の θ と s での微分 $J_{\theta s}$ を計算する

$$J_{\theta s} = \sum_{(x,y) \in I} (I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta}) (I'_{x'} \frac{dx'}{ds} + I'_{y'} \frac{dy'}{ds})$$

6. $(\Delta \theta, \Delta s)$ を次のように計算する

$$\begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_{\theta\theta} & J_{\theta s} \\ J_{\theta s} & J_{ss} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_{\theta} \\ J_s \end{pmatrix}$$

7. $\theta \leftarrow \theta + \Delta \theta$ 、 $s \leftarrow s + \Delta s$ として収束するまで繰り返す。

実験

以下の 3 点について検討を行う。

1. 初期値を変えたときの収束の仕方の違い
2. 入力画像を変えたときの推定精度の違い
3. 入力画像のサイズを変えたときの推定精度の違い

1. 初期値を変えたときの収束の仕方の違い

入力画像を図 1 に、入力画像を $\theta = 30$ 、 $s=0.7$ で相似変換した際の出力画像を図 2 に示す。画像サイズは双方 1080×1080 である。

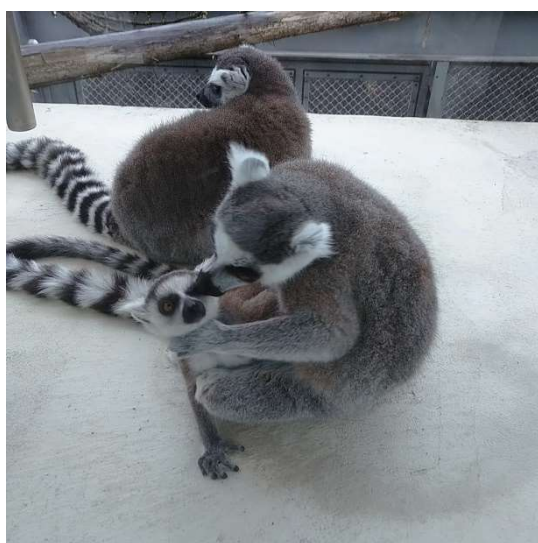


図 1 入力画像

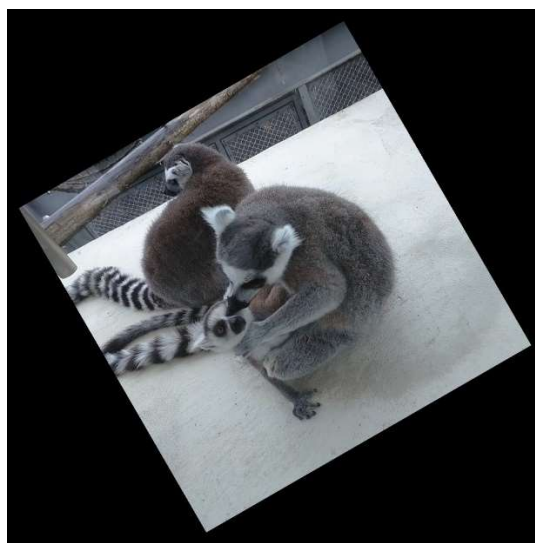


図 2 出力画像

これらの画像を用い回転角度 θ とスケールパラメータ s の推定をガウス・ニュートン法により行った。今回はループ回数を 100 として実験を行う。

θ の初期値を 0、 s の初期値を 1 としたときのループごとの θ 推定値の様子を図 3、 s 推定値の様子を図 4 に示す。

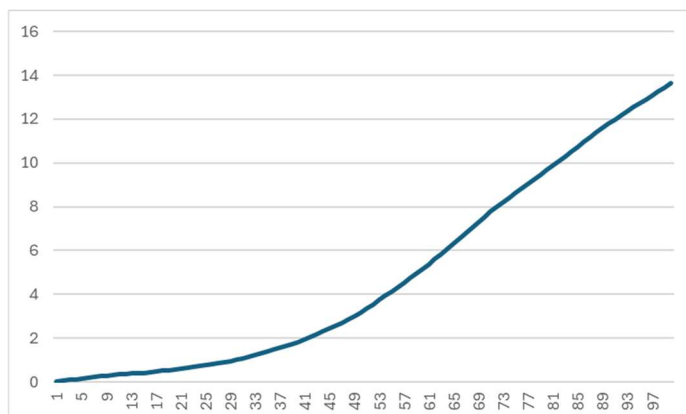


図 3 $\theta = 0$ 、 $s=1$ の際の θ 推定値の推移

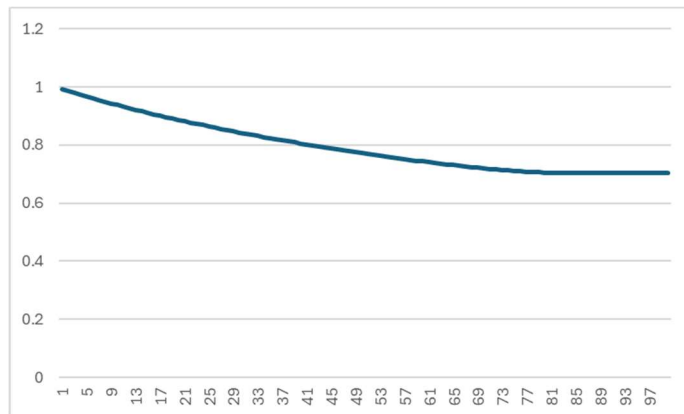


図4 $\theta=0$ 、 $s=1$ の際の s の推定値の推移

ループ回数が 100 回目の時点で $\theta=13.62932$ 、 $s=0.703209$ となった。 s の値は真値に非常に近いが、 θ の値は真値からかなり離れている。これは、 θ 推定がまだ収束していないためだと考えられる。

次に θ の初期値を 20、 s の初期値を 0.5 としたときのループごとの θ 推定値の様子を図 5、 s 推定値の様子を図 6 に示す。

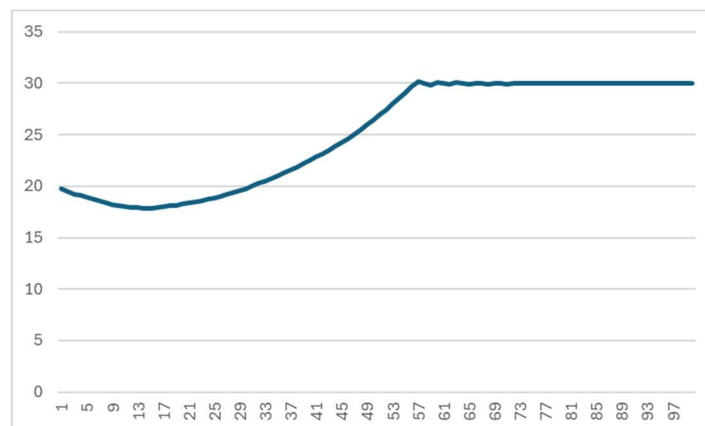


図5 $\theta=20$ 、 $s=0.5$ の際の θ 推定値の推移

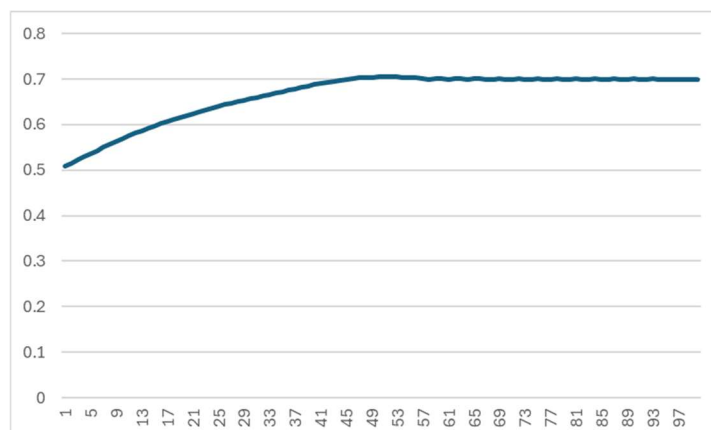


図6 $\theta=20$ 、 $s=0.5$ の際の s 推定値の推移

ループ回数が 100 回目の時点で $\theta = 30.00498$ 、 $s = 0.699834$ となった。 θ 、 s の双方ともに真値に近い値で収束していることが確認できる。 θ の初期値を 20 としたため、初期値から真値の値が近づきループが 100 回の間に収束することができたのだと考えられる。

2. 入力画像を変えたときの推定精度の違い

入力画像を図 1 に、入力画像を $\theta = 30$ 、 $s = 0.7$ で相似変換した際の出力画像を図 2 に示す。画像サイズは双方 1080×1080 である。



図 7 入力画像



図 8 出力画像

実験 1 と同様にループ回数を 100 として実験を行った。 θ の初期値を 0、 s の初期値を 1 とした。ループごとの θ 推定値の様子を図 9、 s 推定値の様子を図 10 に示す。

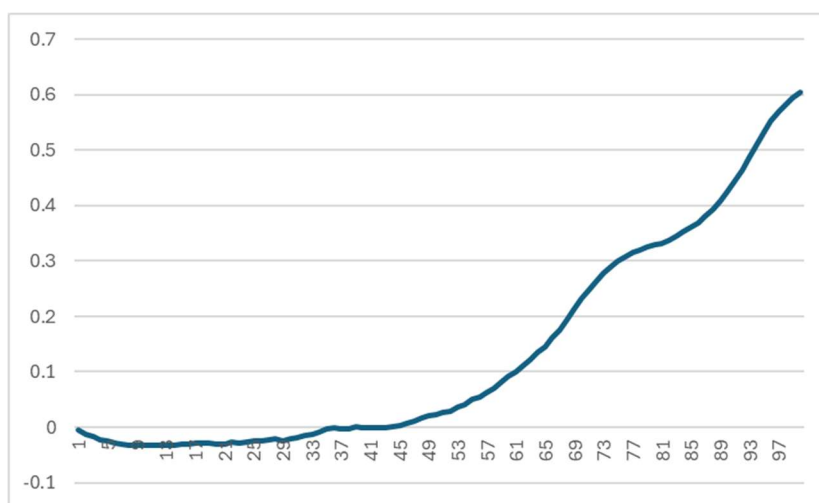


図 9 入力画像を変更した際の θ 推定値の推移

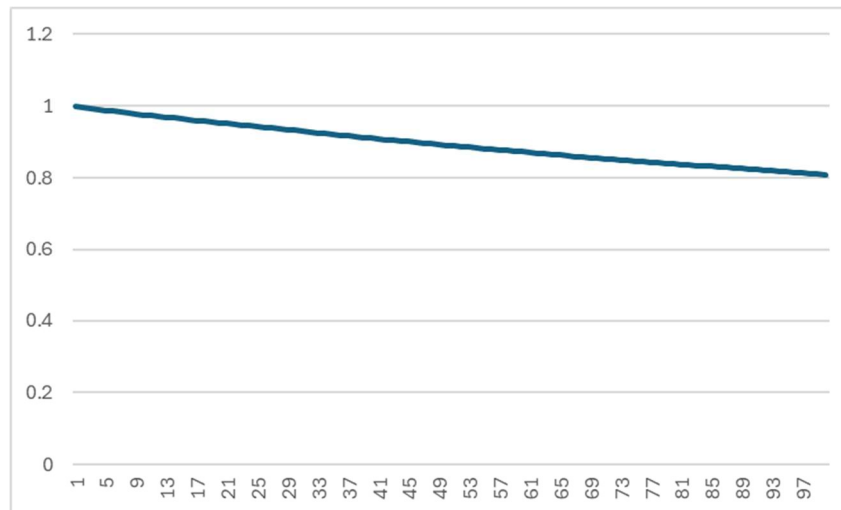


図 10 入力画像を変更した際の s 推定値の推移

ループ回数が 100 回目の時点で $\theta = 0.603901$ 、 $s = 0.80861$ となった。 θ 、 s 双方ともに収束していないことが確認できる。これは、画像が変わることにより、特徴が大きく変化したため、元のアプローチが期待する特徴との一致が難しくなり、最適化がうまくいかなくなったのではないかと考えられる。

3. 入力画像のサイズを変えたときの推定精度の違い

入力画像を図 11 に、入力画像を $\theta = 30$ 、 $s = 0.7$ で相似変換した際の出力画像を図 12 に示す。画像サイズは双方 250×250 である。

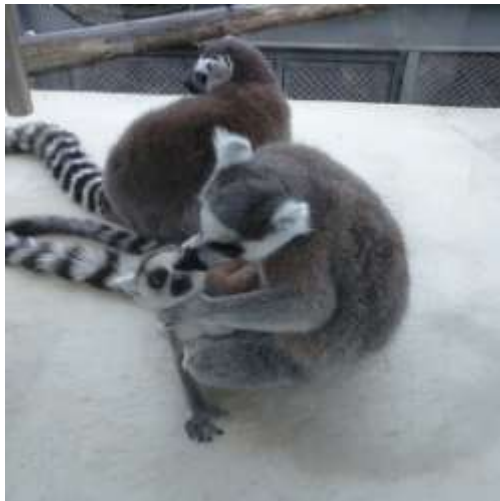


図 11 入力画像



図 12 出力画像

実験 1 と同様にループ回数を 100 として実験を行った。 θ の初期値を 0、 s の初期値を 1 とした。ループごとの θ 推定値の様子を図 13、 s 推定値の様子を図 14 に示す。

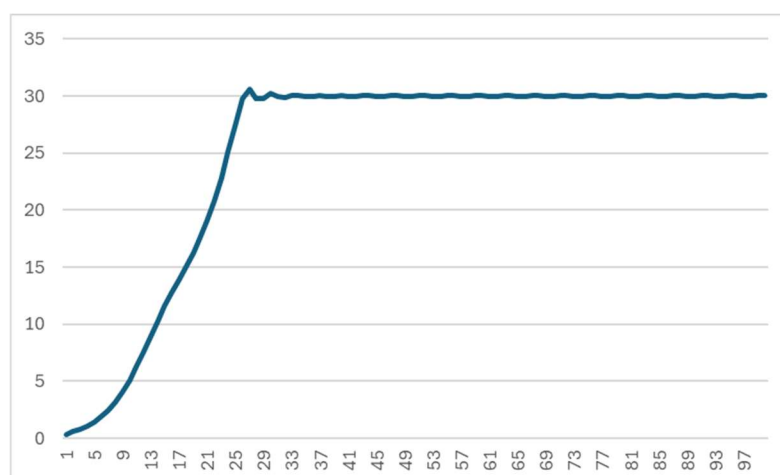


図 13 画像サイズを変更した際の θ 推定値の推移

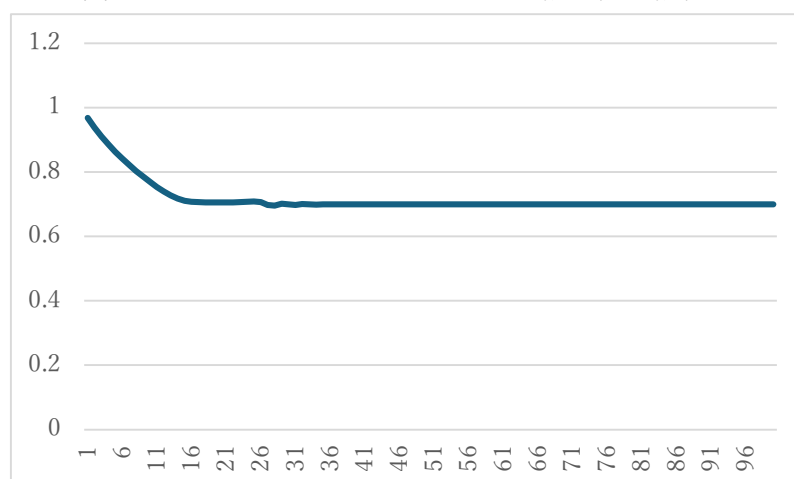


図 14 画像サイズを変更した際の s 推定値の推移

ループ回数が 100 回目の時点で $\theta = 30.00918$ 、 $s = 0.699464$ となった。 θ 、 s の双方ともに真値に近い値で収束していることが確認できる。また、実験 1 の結果と比較して、早い段階で収束しており、計算時間も非常に短い時間で終了した。これは、画像のサイズが小さくなることで、処理しなければならないピクセルの数が減少し、各反復で必要な計算の総量が大幅に減少したためだと考えられる。