数値解析・最適化工学特論　課題 1

提出日：2024/07/09

M223303

井口実紅

1． $J=\sum_{a=1}^{N}(x_a-\bar{x}_a, V[x_a]^{-1}(x_a-\bar{x}_a))$からラグランジュの未定乗数法を用いて$\bar{x}_a$をもとめ次の関数を導出しなさい。

$$J=\sum_{a=1}^{N}\frac{(x_a,\boldsymbol{u})^2}{(\boldsymbol{u},V[x_a]\boldsymbol{u})}$$

$\bar{x}_a$：データの真値、Δx_a：真値との誤差、x_a：データとすると$\bar{x}_a$は

$$\bar{x}_a=x_a-\Delta x_a \tag{1}$$

と書ける。

$J=\sum_{a=1}^{N}(x_a-\bar{x}_a, V[x_a]^{-1}(x_a-\bar{x}_a))$に式(1)を代入すると、

$$J=\sum_{a=1}^{N}\left(x_a-\left(x_a-\Delta x_a\right), V[x_a]^{-1}\left(x_a-\left(x_a-\Delta x_a\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{a=1}^{N}\left(\Delta x_a, V[x_a]^{-1}\Delta x_a\right) \tag{2}$$

u をパラメータとしたときの制約条件は以下のようになる。

$$\overline{(x}_a,u)=\left(x_a-\Delta x_a,u\right)=0, a=1,\dots,N$$

制約条件と式(2)を用いてラグランジュの未定乗数法を計算する。

$$F(x_a,\lambda)=f(x_a)-\lambda x_a=\sum_{a=1}^{N}\left(\Delta x_a, V[x_a]^{-1}\Delta x_a\right)-\sum_{a=1}^{N}\lambda\left(x_a-\Delta x_a,u\right) \tag{3}$$

式(3)をΔx_aで微分。

$$\frac{\partial}{\partial\Delta x_a}F(x_a,\lambda)=2V[x_a]^{-1}\Delta x_a-\lambda_a u=0 \tag{4}$$

$$\Delta x_a=\frac{\lambda_a}{2}V[x_a]u \tag{5}$$

式(5)を制約条件に代入する。

$$\left(x_a-\frac{\lambda_a}{2}V[x_a]u,u\right)=0$$

$$(x_a,u)-\frac{\lambda_a}{2}(u,V[x_a]u)=0$$

$$\frac{\lambda_a}{2}(u,V[x_a]u)=(x_a,u)$$

$$\lambda_a=\frac{2(u,x_a)}{(u,V[x_a]u)} \tag{6}$$

式(2)に式(5)(6)を代入。

$$J=\sum_{a=1}^{N}\left(\Delta x_a, V[x_a]^{-1}\Delta x_a\right)$$
$$=\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\lambda_a}{2}V[x_a]u, V[x_a]^{-1}\frac{\lambda_a}{2}V[x_a]u\right)$$
$$=\sum_{a=1}^{N}\frac{{\lambda_a}^2}{4}(V[x_a]u, V[x_a]^{-1}V[x_a]u)$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{N}{\lambda_a}^2(V[x_a]u,u)=\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{N}{\lambda_a}^2(u,V[x_a]u)$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{2(u,x_a)}{(u,V[x_a]u)}\right)^2(V[x_a]u,u)$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{N}\frac{4(u,x_a)^2}{(u,V[x_a]u)^2}(V[x_a]u,u)$$
$$=\sum_{a=1}^{N}\frac{(x_a,u)^2}{(u,V[x_a]u)}$$

よって、

$$J=\sum_{a=1}^{N}\frac{(x_a,u)^2}{(u,V[x_a]u)}$$

2. x=300cos θ , y=200sin θ で表される楕円上の点列(x_i,y_i)を次のように生成しなさい。また、生成した点列を描画してその分布を確認しなさい。

$$(x_i,y_i)=(300cos\theta_i, 200sin\theta_i),\ \theta_i=-\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{12N}i, i=0,\dots,N-1$$

N=2 として表示した際の図を図 1 に示す。

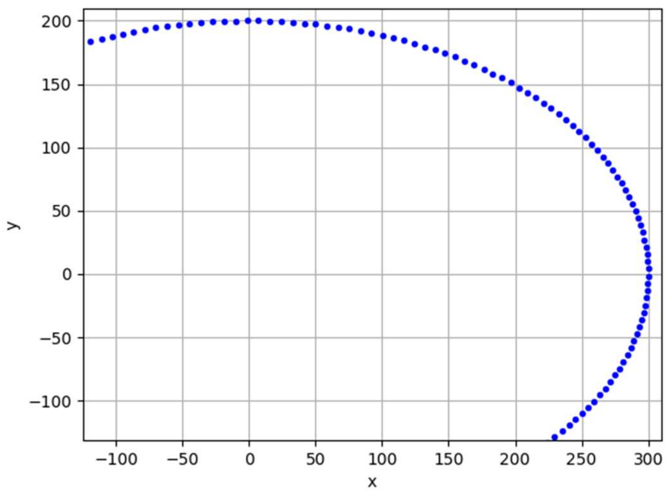

図 1　N＝100 で生成した楕円

3. 課題 2 で生成した点列の x 座標、y 座標にそれぞれ独立に、平均 $\mu = 0$、標準偏差 $\sigma = 3.0$ の正規分布に従う誤差を加えたデータを作成しなさい。それを確認するために課題 2 の描画結果と重ねて描画しなさい。

真値と誤差を加えた点を重ねた際の結果を図 2 に示す。

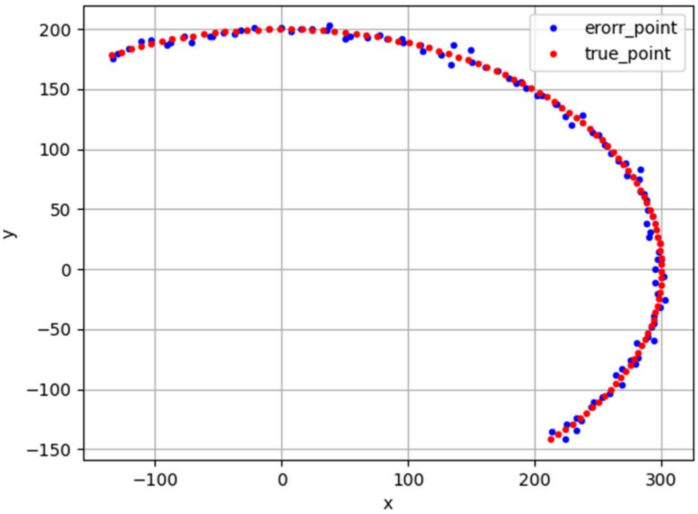

図 2　2 に誤差を加えた点を重ねた楕円

4. 課題 3 の σ の値を 0.1 からσ_{max}まで 0.1 刻みで変化させたデータを作成し、そのデータに対して最小 2 乗法と最尤推定法によって楕円のパラメータを推定しなさい。このとき、同一の σ の値に対して異なる誤差を付加したデータを 1000 回生成して、パラメータを推定し、RMS 誤差を計算して、横軸に σ の値、縦軸に RMS 誤差としたグラフを描画しなさい。ただし、σ_{max}の値は適切と思われる値を自分で設定しなさい。

$$\xi(x) = (x^2, 2xy, y^2, 2x, 2y, 1)^T \tag{7}$$

最小二乗法と最尤推定法でのパラメータ推定の方法を示す。

・最小二乗法

M=$\sum_{a=1}^{N} \xi_a \xi_a{}^T$を計算し、計算した最小固有値に対する固有ベクトルから求めた。

・最尤推定法

$M = \sum_{a=1}^{N} \frac{\xi_a \xi_a{}^T}{(u, V[\xi_a]u)}$, L=$\sum_{a=1}^{N} \frac{(\theta\ {}_a\xi_a)^2 V[\xi_a]}{(u, V[\xi_a]u)^2}$とし、(M-L)u=0 となる 0 を反復法で計算する。u の変化量が10^{-6}以下になるまで計算を行った。

・RMS 誤差

u：真値、$u^{(i)}$：推定値としてのそれぞれの単位ベクトル

$u^{(i)}$を用いて式(8)より、RMS 誤差を求められる。

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|\Delta u^{(i)}\|^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|\mathrm{P}_u u^{(i)}\|^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|I - \overline{uu}^T u^{(i)}\|^2} \tag{8}$$

最小二乗法と最尤推定法を用いて楕円のパラメータを推定し、$\sigma_{max} = 2.0$としたときの結果を図 3 に示す。

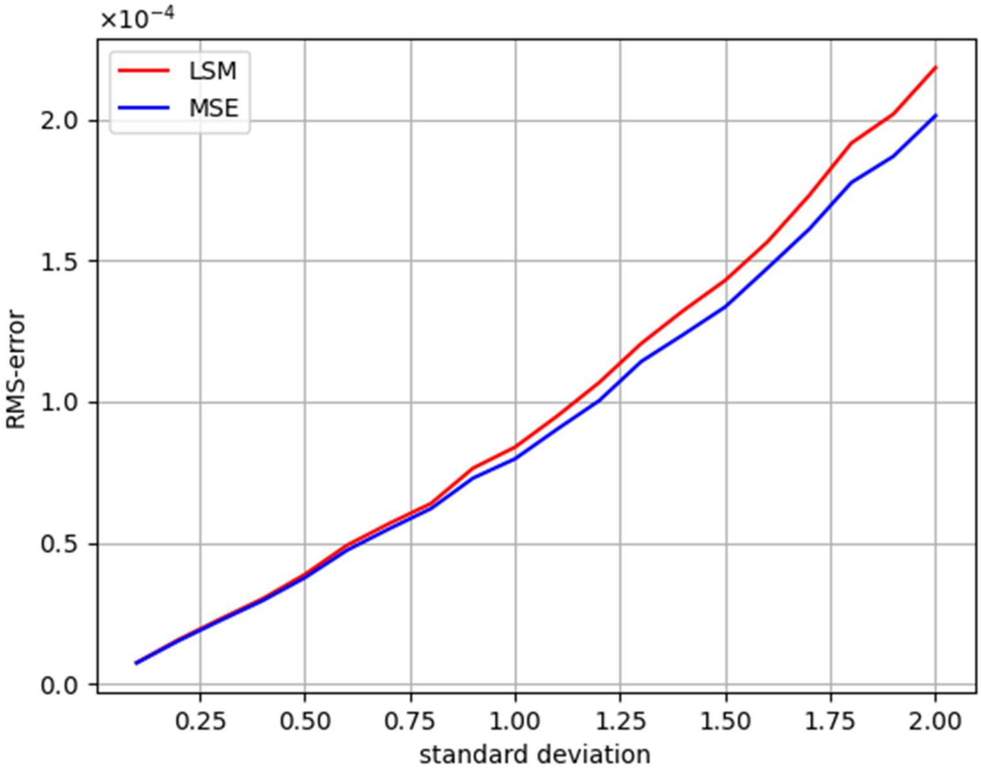

図 3　最小二乗法と最尤推定法の RMS 誤差

赤いラインが最小二乗法、青いラインが最尤推定法の RMS 誤差である。σが大きくなるにつれ最小二乗法の RMS 誤差が最尤推定法と比べ、大きくなっていることがわかる。このことから最尤推定法の方がより、誤差から受ける推定の影響が小さいといえる。

5. 課題 4 で作成したグラフ上に KCR 下界を描画しなさい。

KCR 下界

パラメータの真値を利用し、$\bar{M} = \sum_{i=1}^{N} \left\| I - \overline{uu}^T u^{(i)} \right\|^2 \frac{\overline{\xi_a \xi_a{}^T}}{(\bar{u}, V[\xi_a]\bar{u})}$を計算する。

$\bar{M}$の固有値$\lambda(1)_1 \geq \lambda(1)_2 \geq \cdots > \lambda(1)_6 = 0$を用いて式(9)より計算する。

$$\mathrm{D}_{KCR} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{\lambda(1)}} \tag{9}$$

図 4 に、3 の結果に KCR 下界を重ねたものを示す。

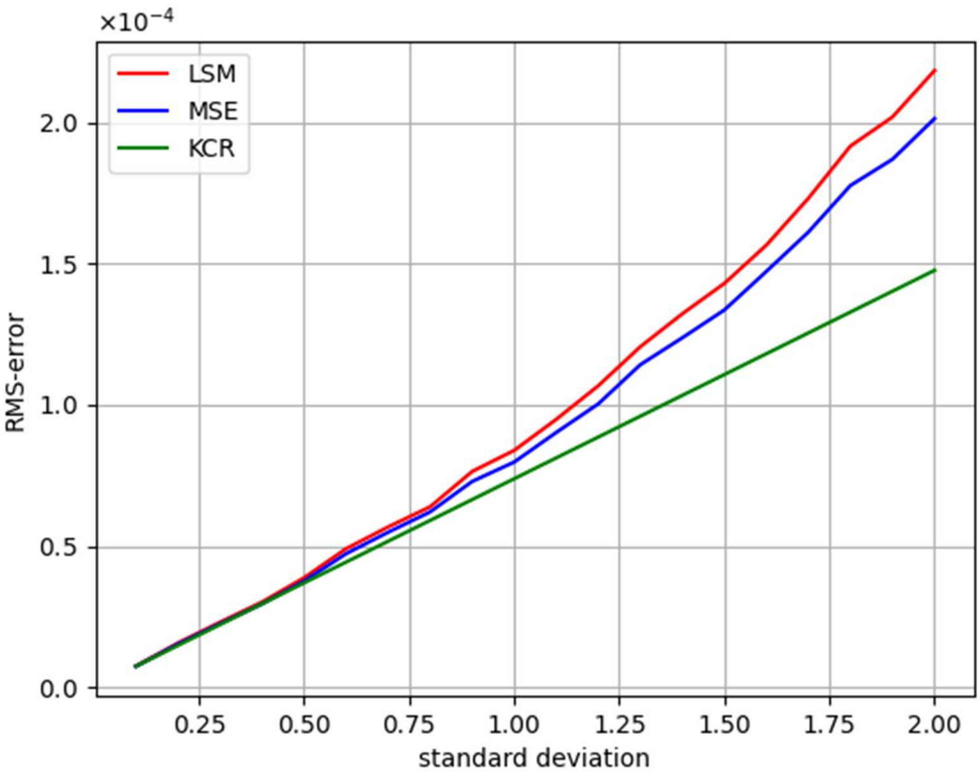

図 4　3 の結果に KCR 下界を加えた結果

緑のラインは KCR 下界を示すものである。図 4 から KCR 下界は最小二乗法及び、最尤推定法よりも、低い値を常に示している。これは、KCR 下界が精度限界を表す指標となるものだからである。RMS 誤差を KCR 下界に近づけるためにはできる限り σ の値を小さくする必要がある。