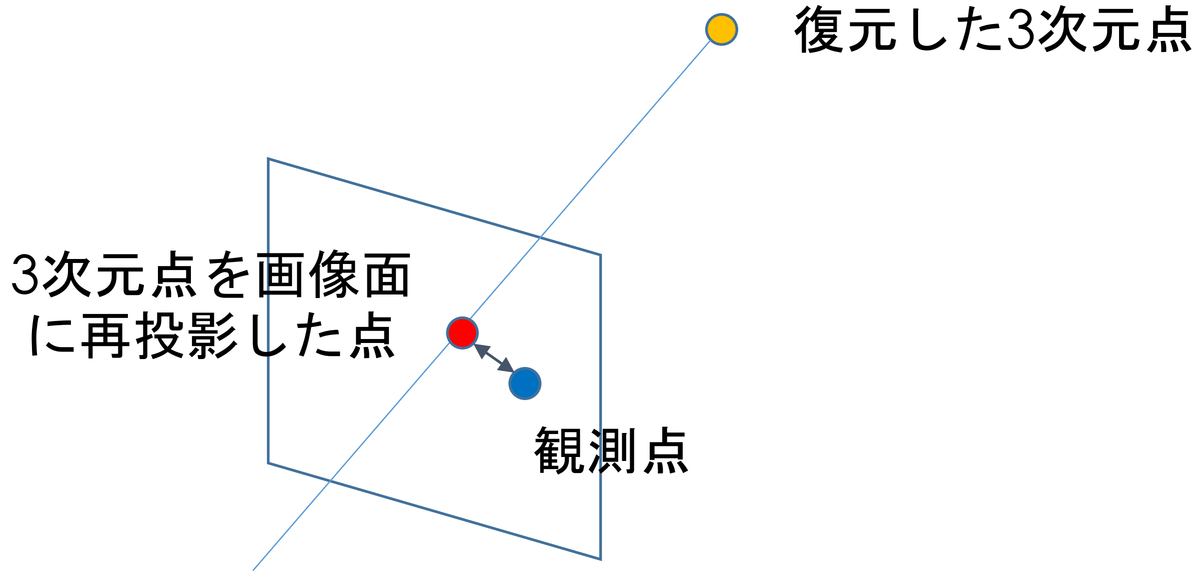
数値解析・最適化工学特論

コンピュータビジョンでの応用例

バンドル調整

- 観測した画像上の特徴点とそこから復元した3次元点の再投影点との距離が最小になるように、
  - 3次元座標
  - カメラの内部パラメータ（焦点距離、光軸中心など）
  - カメラの外部パラメータ（回転、並進）

  を求める方法
- 反復解法によって求めるパラメータを最適化していく



3次元点の投影

- 画像上の特徴点と3次元点の間には次のような関係が成り立つ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix} \approx \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 行列$\boldsymbol{P}$を射影行列と呼び、カメラパラメータにより次のように定義される

焦点距離　光軸中心

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} f & 0 & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix} \boldsymbol{R}^\top (\boldsymbol{I} \quad -\boldsymbol{t})$$

回転　並進

- 3次元点とカメラパラメータから画像面への再投影点は次のように計算できる

$$x = f_0 \frac{P^{11}X + P^{12}Y + P^{13}Z + P^{14}}{P^{31}X + P^{32}Y + P^{33}Z + P^{34}}$$

$$y = f_0 \frac{P^{21}X + P^{22}Y + P^{23}Z + P^{24}}{P^{31}X + P^{32}Y + P^{33}Z + P^{34}}$$

- 再投影誤差（再投影点と観測点との距離）を次のように定義する

$$E = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\kappa=1}^{M} \left[\left(\frac{P_\kappa^{11}X_\alpha + P_\kappa^{12}Y_\alpha + P_\kappa^{13}Z_\alpha + P_\kappa^{14}}{P_\kappa^{31}X_\alpha + P_\kappa^{32}Y_\alpha + P_\kappa^{33}Z_\alpha + P_\kappa^{34}} - \frac{x_{\kappa\alpha}}{f_0} \right)^2 + \left(\frac{P_\kappa^{21}X_\alpha + P_\kappa^{22}Y_\alpha + P_\kappa^{23}Z_\alpha + P_\kappa^{24}}{P_\kappa^{31}X_\alpha + P_\kappa^{32}Y_\alpha + P_\kappa^{33}Z_\alpha + P_\kappa^{34}} - \frac{y_{\kappa\alpha}}{f_0} \right)^2 \right]$$

再投影誤差の最小化

- 定義した再投影誤差を最小化するには、推定するパメラメータで再投影誤差を微分して最小化の定式化をする必要がある

$$E=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\kappa=1}^{M}\left[\left(\frac{P_{\kappa}^{11}X_{\alpha}+P_{\kappa}^{12}Y_{\alpha}+P_{\kappa}^{13}Z_{\alpha}+P_{\kappa}^{14}}{P_{\kappa}^{31}X_{\alpha}+P_{\kappa}^{32}Y_{\alpha}+P_{\kappa}^{33}Z_{\alpha}+P_{\kappa}^{34}}-\frac{x_{\kappa\alpha}}{f_0}\right)^2+\left(\frac{P_{\kappa}^{21}X_{\alpha}+P_{\kappa}^{22}Y_{\alpha}+P_{\kappa}^{23}Z_{\alpha}+P_{\kappa}^{24}}{P_{\kappa}^{31}X_{\alpha}+P_{\kappa}^{32}Y_{\alpha}+P_{\kappa}^{33}Z_{\alpha}+P_{\kappa}^{34}}-\frac{y_{\kappa\alpha}}{f_0}\right)^2\right]$$

- 再投影誤差の式中に推定すべきパラメータが明記されていないため、一見して微分の仕方がわからないことが多い

再投影誤差の微分①

- 以下のようにおくと、

$$E = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\kappa=1}^{M}\left[\left(\frac{p_{\kappa\alpha}}{r_{\kappa\alpha}} - \frac{x_{\kappa\alpha}}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{q_{\kappa\alpha}}{r_{\kappa\alpha}} - \frac{y_{\kappa\alpha}}{f_0}\right)^2\right]$$

$$p_{\kappa\alpha} = P_\kappa^{11}X_\alpha + P_\kappa^{12}Y_\alpha + P_\kappa^{13}Z_\alpha + P_\kappa^{14}$$
$$q_{\kappa\alpha} = P_\kappa^{21}X_\alpha + P_\kappa^{22}Y_\alpha + P_\kappa^{23}Z_\alpha + P_\kappa^{24}$$
$$r_{\kappa\alpha} = P_\kappa^{31}X_\alpha + P_\kappa^{32}Y_\alpha + P_\kappa^{33}Z_\alpha + P_\kappa^{34}$$

再投影誤差の微分が形式的に次のように書ける（2階微分はガウス・ニュートン近似を使用）

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_k} = 2\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\kappa=1}^{M}\frac{1}{r_{\kappa\alpha}^2}\left[\left(\frac{p_{\kappa\alpha}}{r_{\kappa\alpha}} - \frac{x_{\kappa\alpha}}{f_0}\right)\left(r_{\kappa\alpha}\frac{\partial p_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k} - p_{\kappa\alpha}\frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}\right) + \left(\frac{q_{\kappa\alpha}}{r_{\kappa\alpha}} - \frac{y_{\kappa\alpha}}{f_0}\right)\left(r_{\kappa\alpha}\frac{\partial q_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k} - q_{\kappa\alpha}\frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}\right)\right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_k \partial \xi_l} = 2\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\kappa=1}^{M}\frac{1}{r_{\kappa\alpha}^4}\left[\left(r_{\kappa\alpha}\frac{\partial p_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k} - p_{\kappa\alpha}\frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}\right)\left(r_{\kappa\alpha}\frac{\partial p_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_l} - p_{\kappa\alpha}\frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_l}\right) + \left(r_{\kappa\alpha}\frac{\partial q_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k} - q_{\kappa\alpha}\frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}\right)\left(r_{\kappa\alpha}\frac{\partial q_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_l} - q_{\kappa\alpha}\frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_l}\right)\right]$$

再投影誤差の微分②

- 各パラメータについて具体的な微分を計算して、ガウス・ニュートン法などの反復解法で最適解を計算する

$$\frac{\partial p_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}, \frac{\partial q_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}, \frac{\partial r_{\kappa\alpha}}{\partial \xi_k}$$

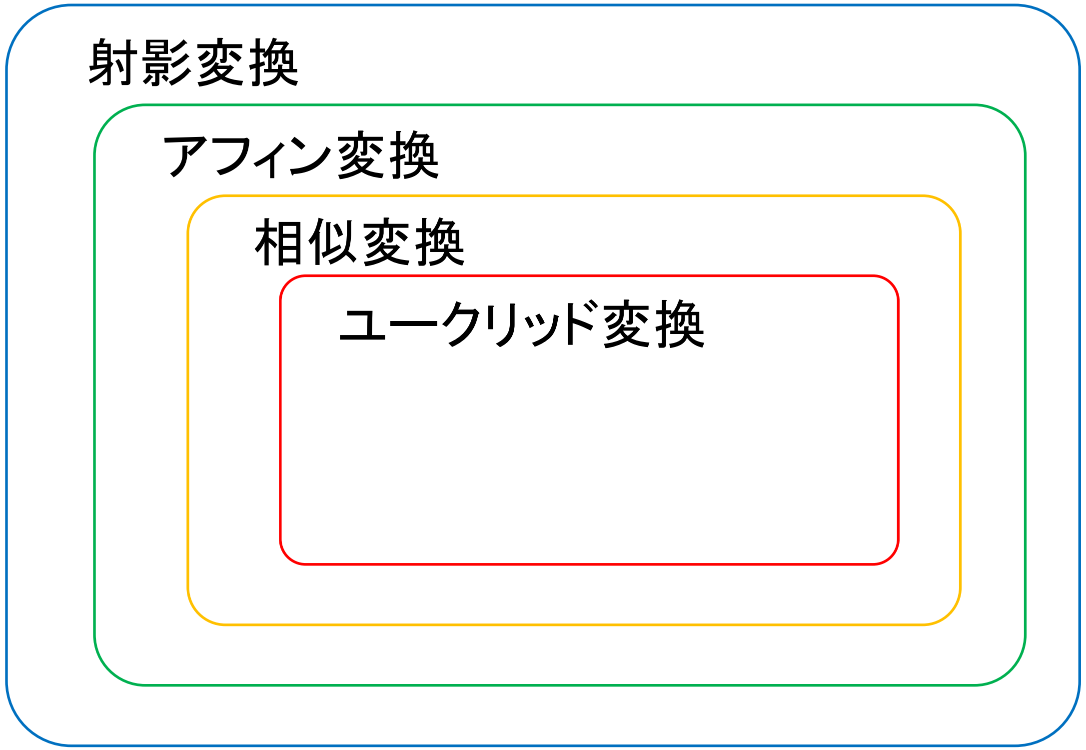
$$\xi_k = X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha, \alpha = 1,\ldots N, f_\kappa, u_{0\kappa}, v_{0\kappa}, \boldsymbol{t}_\kappa, \boldsymbol{R}_\kappa, \kappa = 1,\ldots, M$$

- 微分の例

$$\frac{\partial p_{\kappa\alpha}}{\partial X_\beta} = \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{11} \qquad (p_{\kappa\alpha} = P_\kappa^{11} X_\alpha + P_\kappa^{12} Y_\alpha + P_\kappa^{13} Z_\alpha + P_\kappa^{14})$$

空間の幾何学的変換

- 空間の幾何学的変換には次にあげる変換がある
  - ユークリッド変換
  - 相似変換
  - アフィン変換
  - 射影変換



ユークリッド変換

- 次の式で表す変換をユークリッド変換と呼ぶ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ -\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 回転と並行移動を組み合わせた変換
  - 2点間の距離が保たれる
  - 2直線間の角度が保たれる

相似変換

- 次の式で表す変換を相似変換と呼ぶ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ -s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 拡大縮小と回転、並行移動を組み合わせた変換
  - 2点間の距離は保たれない
  - 2直線間の角度は保たれる

アフィン変換

- 次の式で表す変換をアフィン変換と呼ぶ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 回転と並行移動を組み合わせた変換
  - 2点間の距離や2直線間の角度は変化する
  - 平行性は保たれる
  - 直線上の点の比は保たれる

射影変換

- 次の式で表す変換を射影変換と呼ぶ

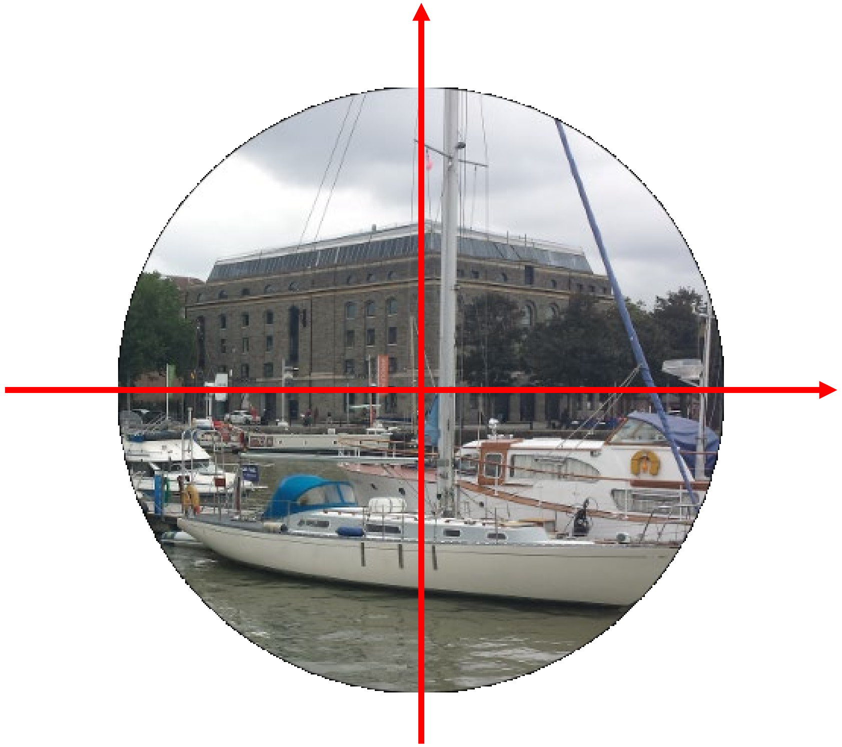
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 拡大縮小と回転、並行移動を組み合わせた変換
  - 直線性が保たれる

画像の拡大、回転パラメータの推定

- 入力画像と出力画像の間には次のような関係が成り立つ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$:相似変換



入力画像

出力画像

ガウス・ニュートン法による解法①

- 次式を最小化するパラメータをガウス・ニュートン法を用いて求める方法を考える。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in I} \left(I'(x', y') - I(x, y) \right)^2$$

  - $I(x,y)$：入力画像の点(x,y)での画素値
  - $I'(x',y')$：出力画像の点(x',y')での画素値

ガウス・ニュートン法による解法②

- ガウス・ニュートン法を適用するには求めるパラメータθ、sでの1階微分、2階微分を計算する必要がある
  - θでの1階微分：

$$J_\theta = \sum_{(x,y)\in I} \big(I'(x',y') - I(x,y)\big)\Big(I'_{x'}\frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'}\frac{dy'}{d\theta}\Big)$$

  - $I'_{x'}$：画像I'のx'方向の平滑微分画像における点(x',y')の画素値
  - $I'_{y'}$：画像I'のy'方向の平滑微分画像における点(x',y')の画素値

ガウス・ニュートン法による解法③

- ガウス・ニュートン法を適用するには求めるパラメータθ、sでの1階微分、2階微分を計算する必要がある
  - θでの2階微分のガウス・ニュートン近似：

$$J_{\theta\theta} = \sum_{(x,y)\in I} \left(I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta} \right)^2$$

$$\frac{dx'}{d\theta} = \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial x'}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \theta} \quad , \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ガウス・ニュートン法による解法④

- ガウス・ニュートン法のアルゴリズム

1. θとsの初期値を適当に与える
2. 画像I'に対して平滑微分画像$I'_{x'}$、$I'_{y'}$を作成する
3. Jのθに対する1階微分J_θと2階微分$J_{\theta\theta}$を計算する
4. Jのsに対する1階微分J_sと2階微分J_{ss}を計算する
5. Jのθとsでの微分$J_{\theta s}$を計算する
6. $(\Delta\theta, \Delta s)$を次のように計算する

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta s \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} J_{\theta\theta} & J_{\theta s} \\ J_{\theta s} & J_{ss} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_\theta \\ J_s \end{pmatrix}$$

7. $\theta \leftarrow \theta + \Delta\theta$、$s \leftarrow s + \Delta s$として収束するまで繰り返す。