

## 数値解析・最適化工学特論 課題2

提出日：2025年7月29日

学籍番号：M233308

氏名：伊藤 今日香

### グループメンバー

学籍番号	氏名 (分担内容)
------	-----------

M233305	石川 未彩 (実験・レポート執筆)
---------	-------------------

M233308	伊藤 今日香 (実験・レポート執筆)
---------	--------------------

M233320	勝田 尚樹 (プログラム実装・実験・レポート執筆)
---------	---------------------------

M233324	小濱 悠心 (実験・レポート執筆)
---------	-------------------

## 課題内容

入力画像を次の相似変換によって変換した出力画像から回転角度  $\theta$  とスケールパラメータ  $s$  をガウス・ニュートン法によって推定する。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

本課題では以下の項目について検討する：

1. 初期値を変えたときの収束の仕方の違い
2. 入力画像を変えたときの推定精度の違い
3. その他、独自に考えた検討項目

## 1 理論背景

### 1.1 相似変換

#### 1.1.1 相似変換の数式表現

相似変換は、回転、スケーリング（拡大・縮小）、並進移動を組み合わせた幾何学変換である。2次元平面上の座標  $(x, y)$  に対する相似変換によって得られる変換後の座標  $(x', y')$  は、次の式で表される：

- 2次元表現：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

- 同次座標（3次元行列）による表現：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 $s$  はスケールパラメータ、 $\theta$  は回転角度、 $t_x, t_y$  は並進ベクトルである。

本課題では並進成分を除いた、原点を中心とした回転とスケーリングのみの相似変換を扱う。したがって、変換後の座標  $(x', y')$  は、次の式で表される：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

この変換式に基づき、画像の対応点や画素値の誤差を最小化することで、未知パラメータ  $(\theta, s)$  を推定する。

### 1.1.2 回転とスケール

回転は、点  $(x, y)$  を原点を中心に反時計回りに角度  $\theta$  だけ回転させる操作である。スケールパラメータ  $s$  は点を原点からの距離を  $s$  倍するように拡大縮小を制御し、 $s > 1$  の場合は拡大、 $0 < s < 1$  の場合は縮小を意味する。

相似変換の重要な性質として以下が挙げられる：

- 2 直線間の角度が保たれる
- 図形の形状が保たれる
- 2 点間の距離比が保たれる
- 絶対的な距離や面積は  $s$  の値に応じて変化する

### 1.1.3 座標変換

相似変換の式 (2) を展開すると、変換後の座標  $(x', y')$  は以下のように表される：

$$x' = s(x \cos \theta - y \sin \theta) \quad (3)$$

$$y' = s(x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (4)$$

これにより、任意の入力座標  $(x, y)$  に対して出力座標  $(x', y')$  を直接計算できる。

### 1.1.4 座標系の設定

実装では、画像の中心を原点とした座標系を使用する。画像座標  $(u, v)$  から数学座標  $(x, y)$  への変換：

$$x = u - \frac{W}{2} \quad (5)$$

$$y = v - \frac{H}{2} \quad (6)$$

ここで、 $W$ 、 $H$  はそれぞれ画像の幅、高さである。また、変換時の画像範囲外参照を避けるため、画像中心  $(W/2, H/2)$  を中心とし、半径  $\min(W/2, H/2)$  の円内のピクセルのみを計算に使用する。

## 1.2 ガウス・ニュートン法

### 1.2.1 目的関数 $J$ の定義

ガウス・ニュートン法では、入力画像  $I(x, y)$  と相似変換により得られる出力画像  $I'(x', y')$  の差を最小化することで、相似変換における未知パラメータ  $\theta$  と  $s$  を推定する。

目的関数  $J$  は、両画像間の画素値の差の二乗和として次のように定義される：

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(x, y) \in I} (I'(x', y') - I(x, y))^2 \quad (7)$$

ここで、 $(x', y')$  は式 (3)、(4) により  $(x, y)$  から変換された座標であり、 $I(x, y)$  は入力画像の点  $(x, y)$  での画素値、 $I'(x', y')$  は出力画像の点  $(x', y')$  での画素値を表す。

### 1.2.2 1 階微分の導出

目的関数  $J$  を最小化するため、未知パラメータ  $\theta$  および  $s$  に対する 1 階微分を計算する。

$\theta$  に対する 1 階微分：

$$J_\theta = \sum_{(x,y) \in I} (I'(x', y') - I(x, y)) \left( I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta} \right) \quad (8)$$

$s$  に対する 1 階微分：

$$J_s = \sum_{(x,y) \in I} (I'(x', y') - I(x, y)) \left( I'_{x'} \frac{dx'}{ds} + I'_{y'} \frac{dy'}{ds} \right) \quad (9)$$

ここで、 $I'_{x'}$ 、 $I'_{y'}$  はそれぞれ出力画像  $I'$  の  $x'$  方向、 $y'$  方向の平滑微分画像における点  $(x', y')$  の画素値である。

$x'$  および  $y'$  の  $\theta$  による微分の計算は、式 (3)、(4) より以下のように求められる：

$$\frac{dx'}{d\theta} = -s(x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (10)$$

$$\frac{dy'}{d\theta} = s(x \cos \theta - y \sin \theta) \quad (11)$$

同様に、 $x'$  および  $y'$  の  $s$  による微分：

$$\frac{dx'}{ds} = x \cos \theta - y \sin \theta \quad (12)$$

$$\frac{dy'}{ds} = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (13)$$

### 1.2.3 2 階微分（ガウス・ニュートン近似）の導出

ガウス・ニュートン法では、計算の簡素化のため 2 階微分項を近似する。

$\theta$  に対する 2 階微分のガウス・ニュートン近似：

$$J_{\theta\theta} = \sum_{(x,y) \in I} \left( I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta} \right)^2 \quad (14)$$

偏微分の計算について、相似変換を行列形式で表現すると：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta \\ s \sin \theta & s \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (15)$$

ここで、 $a_{11} = s \cos \theta$ 、 $a_{12} = -s \sin \theta$ 、 $a_{21} = s \sin \theta$ 、 $a_{22} = s \cos \theta$  である。

$\frac{dx'}{d\theta}$ 、 $\frac{dy'}{d\theta}$  は連鎖律により：

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\theta} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial x'}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \theta} \\ \frac{dy'}{d\theta} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial y'}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

同様に、 $s$  に対する微分項も：

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{ds} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial x'}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial s} \\ \frac{dy'}{ds} &= \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial y'}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial s} \end{aligned}$$

これにより、 $s$  に対する 2 階微分のガウス・ニュートン近似：

$$J_{ss} = \sum_{(x,y) \in I} \left( I'_{x'} \frac{dx'}{ds} + I'_{y'} \frac{dy'}{ds} \right)^2 \quad (16)$$

$\theta$  と  $s$  の混合微分：

$$J_{\theta s} = \sum_{(x,y) \in I} \left( I'_{x'} \frac{dx'}{d\theta} + I'_{y'} \frac{dy'}{d\theta} \right) \left( I'_{x'} \frac{dx'}{ds} + I'_{y'} \frac{dy'}{ds} \right) \quad (17)$$

この式により、ガウス・ニュートン近似での混合微分項が計算される。

#### 1.2.4 アルゴリズムの説明

ガウス・ニュートン法による相似変換パラメータ推定のアロリズムは以下の手順で実行される：

1.  $\theta$  と  $s$  の初期値を設定する
2. 出力画像  $I'$  に対して平滑微分画像  $I'_{x'}$ 、 $I'_{y'}$  を作成する
3.  $\theta$ 、 $s$ 、式 (1) を用いて、 $x'$  と  $y'$  を求める
4. 式 (8)、式 (14) により、 $J$  の  $\theta$  に対する 1 階微分  $J_\theta$  と 2 階微分  $J_{\theta\theta}$  を計算する
5. 式 (9)、式 (16) により、 $J$  の  $s$  に対する 1 階微分  $J_s$  と 2 階微分  $J_{ss}$  を計算する
6. 式 (17) により、 $J$  の  $\theta$  と  $s$  での混合微分  $J_{\theta s}$  を計算する
7.  $(\Delta\theta, \Delta s)$  を以下の式 (18) により計算する：

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_{\theta\theta} & J_{\theta s} \\ J_{\theta s} & J_{ss} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_\theta \\ J_s \end{pmatrix} \quad (18)$$

8. パラメータを以下の式 (19) より計算し、更新する：

$$\begin{pmatrix} \theta_{k+1} \\ s_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_k \\ s_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta s \end{pmatrix} \quad (19)$$

9. 収束するまで手順 3～8 を繰り返す

ここで、収束判定は以下のいずれかの条件を満たした場合に行う：

- パラメータの変化量が十分小さいとき： $|\Delta\theta| < \epsilon_\theta$  かつ  $|\Delta s| < \epsilon_s$
- 所定の最大反復回数  $N_{\max}$  に到達したとき

## 2 実験

### 2.1 基本実験設定

#### 2.1.1 使用画像

基本実験には以下の画像を使用した：



図 1 実験使用画像 ( $150 \times 150$ )

すべての画像は、半径  $\min(W/2, H/2)$  の円形にクロップし、境界効果を除去した。

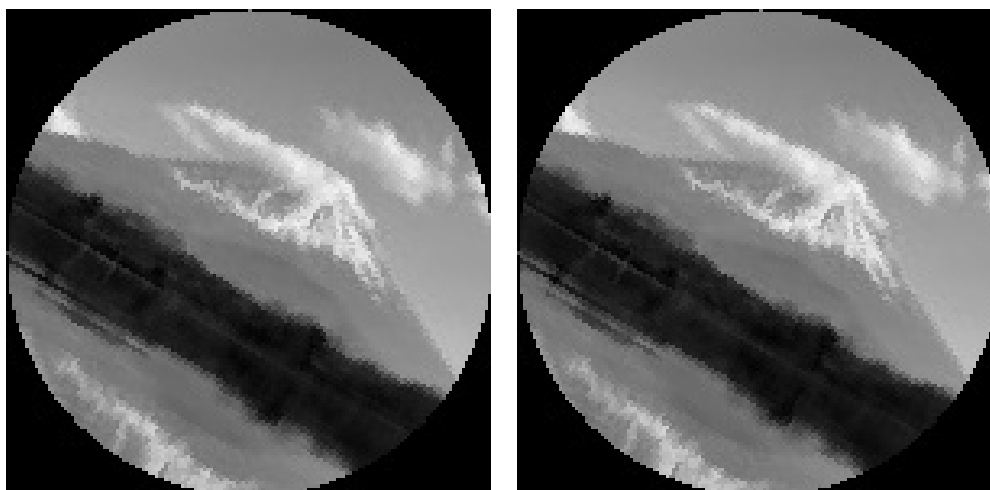
#### 2.1.2 基本パラメータ

- 真値設定：回転角度  $\theta = 30^\circ$  、スケール  $s = 1.5$
- 初期値：回転角度  $\theta_0 = 0^\circ$  、スケール  $s_0 = 1.0$
- 収束判定：閾値  $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ 、最大反復回数 1000 回

## 2.2 基本実験の実行と結果

### 2.2.1 基本実験結果

図 1 を入力画像として用いた実行結果を表 1、出力画像を図 2 に示す。



(a) 真値で変換された画像

(b) 推定パラメータで変換された画像

図 2 出力画像

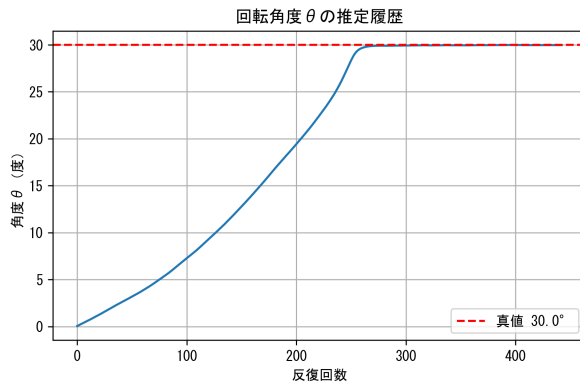
表 1 基本実験結果図 1 画像

パラメータ	真値	推定値	絶対誤差
回転角度 [度]	30.0	29.975422	0.02457
スケール	1.5	1.505850	0.005850
反復回数	-	443	-

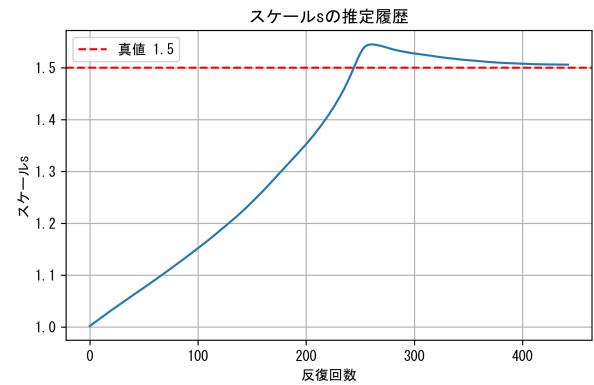
基本実験では、回転角度の推定誤差が約 0.025 度、スケールの推定誤差が約 0.006 と高精度な推定が達成された。443 回の反復で収束しており、ガウス・ニュートン法による相似変換パラメータ推定の有効性が確認できた。

## 2.2.2 収束過程の可視化

図 3 に基本実験での各パラメータの収束過程を示す。

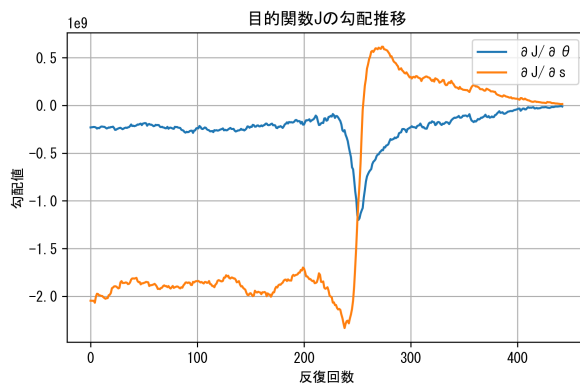


(a) 回転角度  $\theta$  の収束過程

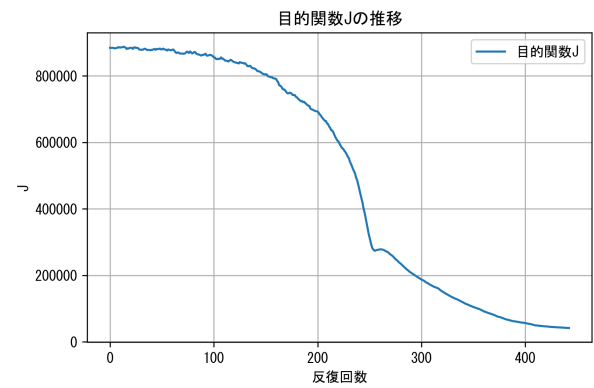


(b) スケール  $s$  の収束過程

図 3 基本実験での収束過程



(a) 勾配の推移



(b) 目的関数値の推移

図 4 基本実験での勾配と目的関数の推移

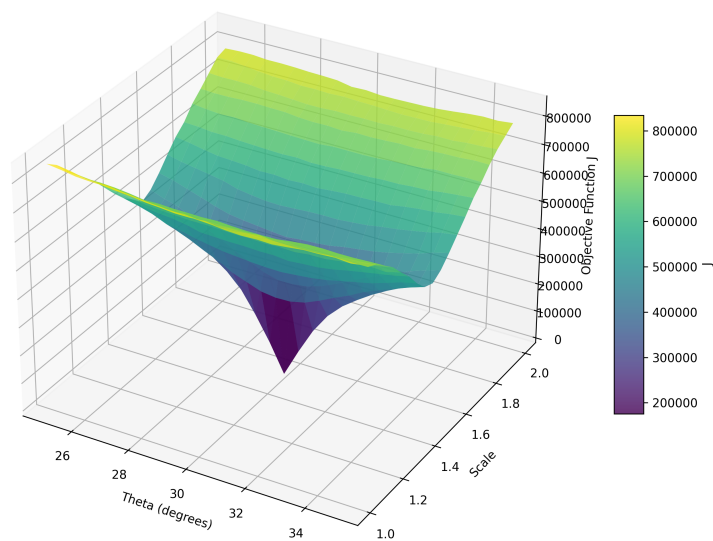


図 5 目的関数  $J(\theta, s)$  の 3 次元可視化と収束軌跡



### 2.2.3 パラメータに対する目的関数の解析

各パラメータに対する目的関数の変化と一階微分を図 6 に示す。

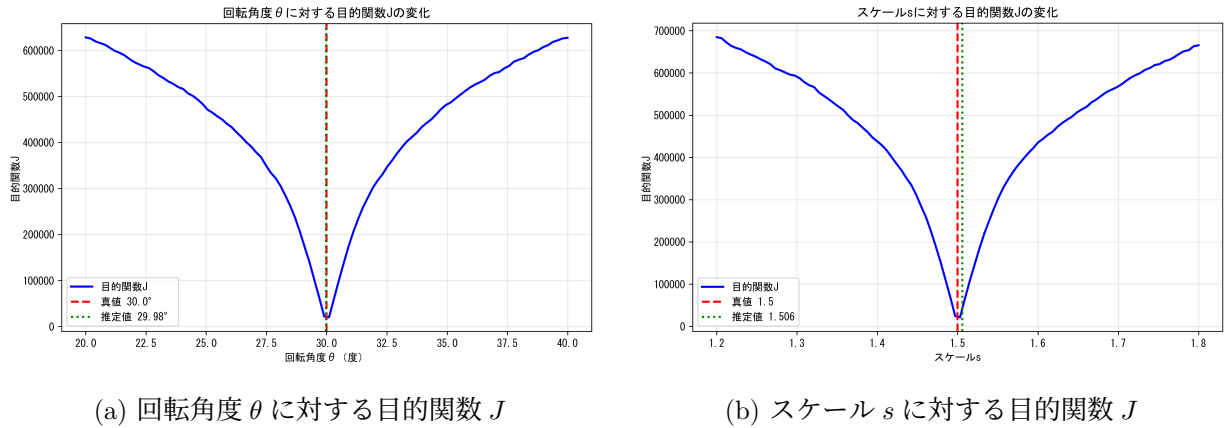


図 6 パラメータに対する目的関数の変化

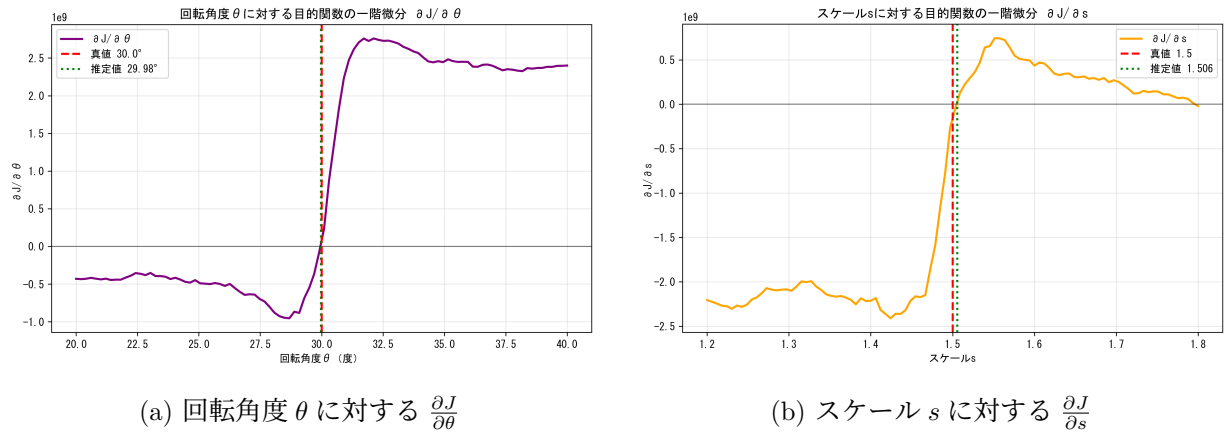


図 7 パラメータに対する目的関数の一階微分

### 2.2.4 実験結果の分析

図 3 から、回転角度  $\theta$  は初期値 0.0 度から真値 30 度に向かって段階的に増加し、反復 221 回（50% 時点）で 22.48 度、反復 332 回（75% 時点）で 29.96 度に達していることがわかる。スケール  $s$  は初期値 1.0 から真値 1.5 に向かって滑らかに収束し、反復 221 回で 1.41、反復 332 回で 1.52 に達している。図 4(a) の勾配推移では、約 250-300 回付近で  $\frac{\partial J}{\partial \theta}$  と  $\frac{\partial J}{\partial s}$  の両方が急激に 0 に近づいており、この時点で最適解に到達したことを示している。図 4(b) の目的関数値の推移では、最終的な目的関数値は約  $5 \times 10^4$  まで減少しており、初期値の約 18 分の 1 に減少、高精度な推定が確認できる。図 5 に目的関数  $J(\theta, s)$  の 3 次元可視化を示す。真値付近 ( $\theta = 30^\circ$ ,  $s = 1.5$ ) に明確な極小値が存在し、滑らかな谷型の形状を持つことが確認できる。初期値から極小値に向かって効率的に収束していることが視覚的に確認できる。

図 6 より、目的関数  $J$  は真値において最小値を取り、回転角度では約  $\pm 5$  度、スケールでは約  $\pm 0.2$  の範囲で急激に増加することが確認できる。図 7 では、真値における一階微分が 0 を通過しており、最適性条件  $\nabla J = 0$  が満たされていること、この点が極値（この場合は最小値）であることが視覚的に示されている。また、真値から離れるにつれて勾配の絶対値が単調増加している。

### 3 実験項目別検討結果

#### 3.1 実験 1：初期値を変えたときの収束の仕方の違い

##### 3.1.1 実験方法

1. スケール初期値実験：角度初期値を真値（30 度）に固定し、スケール初期値を変化
2. 角度初期値実験：スケール初期値を真値（1.5）に固定し、角度初期値を変化

実験パラメータ：

- スケール初期値：0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 1.8, 2.0
- 角度初期値： $-20^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $40^\circ$

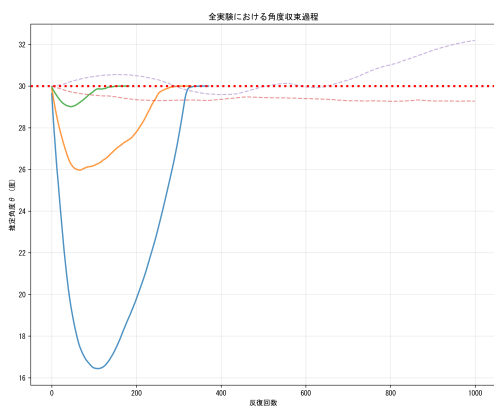
図 1 を本実験の入力画像として用いる。

##### 3.1.2 スケール初期値実験結果

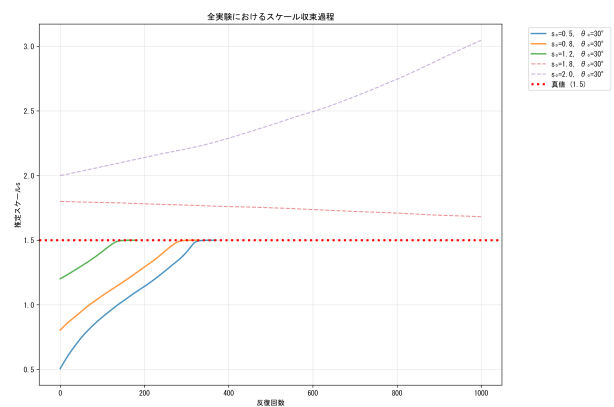
表 2 にスケール初期値を変化させた実験結果を示す。また、図 8 に収束軌跡を示す。角度初期値は真値（30 度）に固定している。

表 2 スケール初期値による収束特性

初期スケール	推定角度 [度]	推定スケール	角度誤差 [度]	スケール誤差	反復回数
0.5	30.001697	1.499722	0.001689	0.000278	371
0.8	30.001696	1.499727	0.001696	0.000272	330
1.0	29.975422	1.505850	0.02457	0.005850	443
1.2	30.001722	1.499721	0.001722	0.000279	183
1.5	30.000000	1.500000	0.000000	0.000000	0
1.8	29.279289	1.681420	0.720711	0.181420	999
2.0	32.191619	3.045344	2.191619	1.545344	999



(a) 回転角度  $\theta$  の収束過程



(b) スケール  $s$  の収束過程

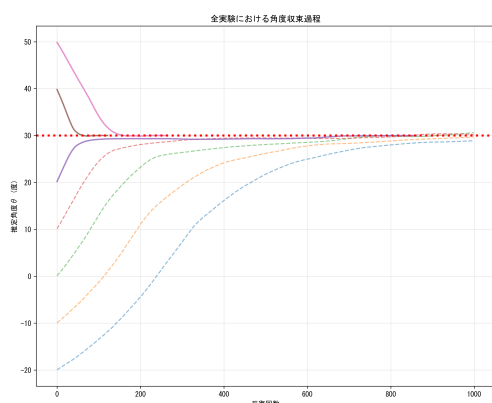
図 8 スケール初期値実験での収束軌跡（角度固定  $\theta_0 = 30^\circ$ ）

### 3.1.3 角度初期値実験結果

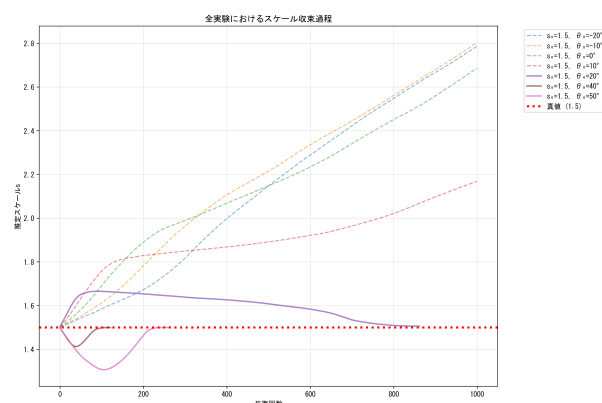
表 3 に角度初期値を変化させた実験結果を示す。また、図 9 に収束軌跡を示す。スケール初期値は真値 (1.5) に固定している。

表 3 角度初期値による収束特性

初期角度 [度]	推定角度 [度]	推定スケール	角度誤差 [度]	スケール誤差	反復回数
-20	28.878300	2.786178	1.121700	1.286178	999
-10	29.678262	2.804249	0.321738	1.304249	999
0	30.616151	2.686380	0.616151	1.186380	999
10	30.204186	2.167826	0.204186	0.667826	999
20	29.975375	1.505847	0.024625	0.005847	862
40	30.002178	1.499580	0.002178	0.000420	122
50	30.001641	1.499730	0.001641	0.000270	263



(a) 回転角度  $\theta$  の収束過程



(b) スケール  $s$  の収束過程

図 9 角度初期値実験での収束軌跡 (スケール固定  $s_0 = 1.5$ )

### 3.1.4 実験結果

ガウス・ニュートン法による相似変換パラメータ (回転角度とスケール) の推定において、図 8、図 9 と表 2、3 から以下の結果が得られた。

#### スケール初期値実験の結果

スケール初期値が 0.5~1.2 の場合、いずれも収束が確認された。角度誤差は 0.002~0.025 度、スケール誤差は 0.0003~0.006、反復回数は 183~443 回の範囲に収まった。初期値が 1.8 および 2.0 では、999 回の反復でも収束せず、スケール推定値はそれぞれ 1.681、3.045 と真値から大きく逸脱した。

#### 角度初期値実験の結果

すべての初期角度設定において、推定角度は 28.88~30.62 度の範囲に収まり、真値 30 度に近い値が得られた。初期値 20 度以上では収束が確認され、反復回数は 122~862 回であった。一方、初期値が -20~10 度の範囲では 999 回の反復後も収束しなかった。これらの非収束ケースでは、スケール推定値が 2.17~2.80 と真値 1.5 から大きく外れていた。

## 収束軌跡

図 8 より、スケール初期値 0.5～1.2 の収束ケースでは、スケールパラメータが単調に真値に向かって変化した。角度パラメータは全てのケースで 30 度付近を維持した。

図 9 より、角度パラメータは初期値に関わらず最終的に 29～31 度の範囲に到達した。スケールパラメータは、初期値-20～10 度では反復とともに上昇し続け 2.2～2.8 に達したが、初期値 20 度以上では真値 1.5 付近で安定した。

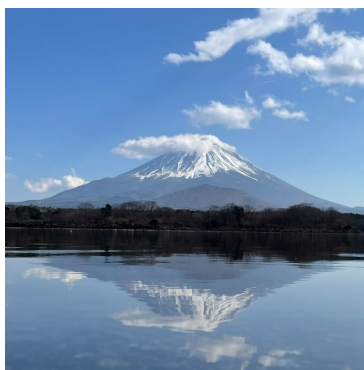
## 3.2 実験 2：入力画像を変えたときの推定精度の違い

### 3.2.1 実験方法

画像の特徴が推定精度に与える影響を評価する。固定パラメータ ( $\theta = 30^\circ$ 、 $s = 1.5$ 、 $\theta_0 = 0^\circ$ 、 $s_0 = 1.0$ ) で以下の画像を比較：



(a) 画像 1(150 × 150)



(b) 画像 2(1038 × 1038)



(c) 画像 3(150 × 150)

図 10 入力画像を変えたときの推定精度比較に用いる画像

図 10 に示す 3 つの画像を用いて比較実験を行った。図 10(a) は基本実験で使った低解像度画像、図 10(b) は同じ画像の高解像度版、図 10(c) は画像特徴が異なる画像である。この比較により、画像の特徴と解像度の影響を分けて評価する。

### 3.2.2 画像別推定結果

表 4 に各画像での推定結果を示す。

表 4 入力画像による推定精度の比較

入力画像	推定角度 [度]	推定スケール	角度誤差 [度]	スケール誤差	反復回数
画像 1	29.975422	1.505850	0.02457	0.005850	443
画像 2	6.301391	1.186368	23.698609	0.313632	999
画像 3	14.106136	2.386887	15.8938640	0.886887	999

### 3.2.3 画像特徴と収束特性の関係

図 11 に各画像での収束過程を示す。

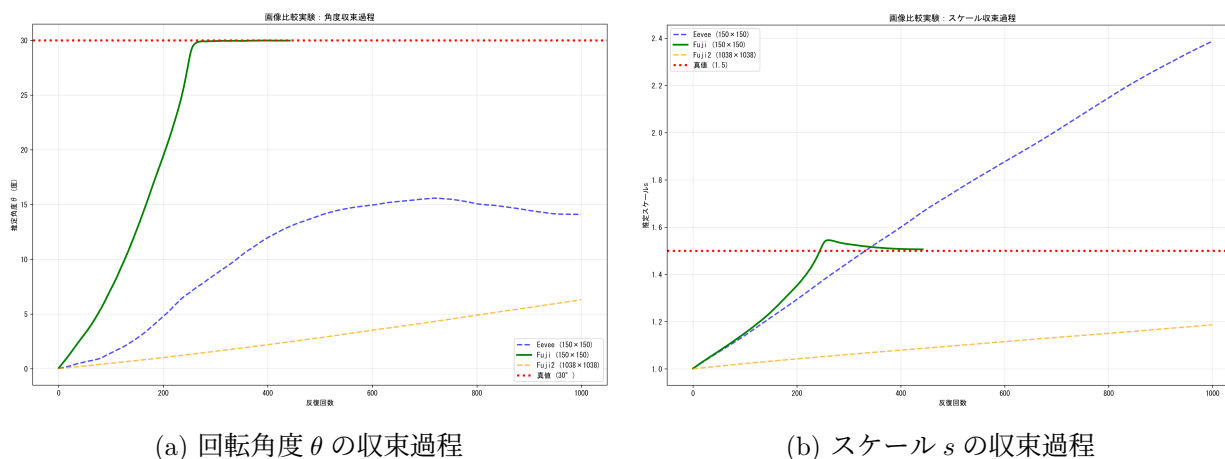


図 11 異なる画像での収束過程の比較

### 3.2.4 実験結果

表 4 および図 11 から、画像ごとに以下の結果が得られた。

#### 画像 1（低解像度画像）の結果

推定角度は 29.98 度、スケールは 1.51 であり、真値（30 度、1.5）に非常に近く、高精度な推定が得られた。反復回数は 443 回で収束した。

#### 画像 2（高解像度画像）の結果

画像 1 と同じ画像でも高解像度版である画像 2 では収束性が悪化した。推定角度は 6.30 度、スケールは 1.19 であり、角度誤差が 23.70 度、スケール誤差が 0.31 となった。999 回の反復でも収束せず、推定値は真値から大きく逸脱した。

#### 画像 3（別の低解像度画像）の結果

画像 3 では推定精度が大幅に悪化した。推定角度は 14.11 度、スケールは 2.39 であり、角度誤差 15.89 度、スケール誤差 0.89 を記録した。こちらも 999 回で非収束となった。

#### 収束過程の比較

図 11(a) より、角度パラメータは画像 1 で真値へ単調に収束したが、画像 2 は 6 度付近で停滞、画像 3 は 15 度付近で収束せずに横ばいとなった。図 11(b) では、画像 1 は 1.5 に収束、画像 2 は 1.2 付近、画像 3 は継続的に増加し 2.4 に達し、発散挙動を見せた。

### 3.3 実験 3：その他の検討項目

#### 3.3.1 実験 3-1：微分フィルタのカーネルサイズの影響

##### 実験方法

Sobel フィルタのカーネルサイズが推定精度に与える影響を評価する。

固定パラメータ ( $\theta = 30^\circ$ 、 $s = 1.5$ 、 $\theta_0 = 0^\circ$ 、 $s_0 = 1.0$ ) で以下のカーネルサイズを比較：

実験パラメータ：

- カーネルサイズ： $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ ,  $9 \times 9$
- 使用画像：図 1
- 収束判定：閾値  $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ 、最大反復回数 1000 回

##### カーネルサイズ別推定結果

表 5 に各カーネルサイズでの推定結果を示す。

表 5 カーネルサイズによる推定精度の比較

カーネルサイズ	推定角度 [度]	推定スケール	角度誤差 [度]	スケール誤差	反復回数
$3 \times 3$	29.975306	1.505840	0.024694	0.005840	444
$5 \times 5$	7.065923	1.138978	22.934077	0.361022	999
$7 \times 7$	0.442818	1.010879	29.557182	0.489121	999
$9 \times 9$	0.000000	1.000000	30.000000	0.500000	0

##### 収束過程の比較

図 12 に各カーネルサイズでの収束過程を示す。

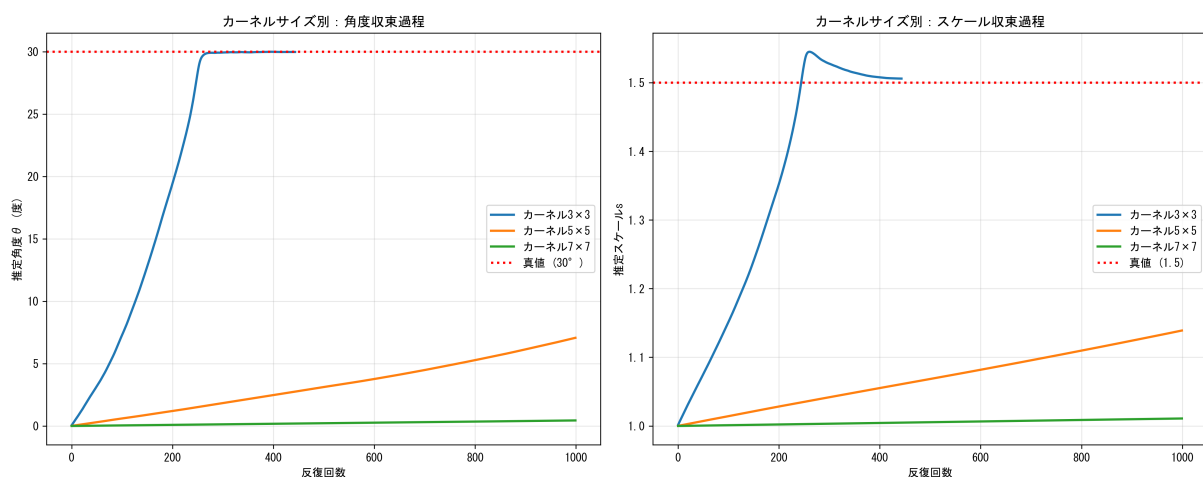


図 12 カーネルサイズ別の収束過程

### 3.3.2 実験 3-2：極端なパラメータでの収束限界

#### 実験方法

ガウス・ニュートン法の収束限界を探るため、極端な真値および初期値での実験を行う。

1. 極端な真値実験：幅広く設定した真値での収束性評価
2. 極端な初期値実験：真値から大幅に離れた初期値からの収束性評価

実験パラメータ：

- 極端な真値：スケール 0.3, 0.5, 2.0, 3.0、角度  $60^\circ$  ,  $90^\circ$  ,  $120^\circ$  ,  $180^\circ$
- 極端な初期値：真値から  $\pm 50^\circ$  、真値の  $\pm 200\%$  の範囲
- 使用画像：図 1

#### 極端パラメータ実験結果

表 6 に極端パラメータでの推定結果を示す。

表 6 極端パラメータによる収束性評価

真値スケール	真値角度 [度]	初期値	推定角度 [度]	推定スケール	角度誤差 [度]	収束判定
0.3	30	$s=1.0, \theta=0^\circ$	29.824	0.300	0.176	収束
0.5	30	$s=1.0, \theta=0^\circ$	29.814	0.500	0.186	収束
2.0	30	$s=1.0, \theta=0^\circ$	27.453	2.189	2.547	非収束
3.0	30	$s=1.0, \theta=0^\circ$	29.278	2.998	0.722	収束
1.5	60	$s=1.0, \theta=0^\circ$	59.843	1.500	0.157	収束
1.5	90	$s=1.0, \theta=0^\circ$	89.190	1.516	0.810	非収束
1.5	120	$s=1.0, \theta=0^\circ$	119.901	1.500	0.099	非収束
1.5	180	$s=1.0, \theta=0^\circ$	179.902	1.500	0.098	非収束
1.5	30	$s=0.1, \theta=30^\circ$	29.999	1.500	0.001	収束
1.5	30	$s=5.0, \theta=30^\circ$	29.717	5.055	0.283	非収束
1.5	30	$s=1.5, \theta=-60^\circ$	29.989	1.500	0.011	非収束
1.5	30	$s=1.5, \theta=90^\circ$	30.000	1.500	0.000	収束
1.5	30	$s=1.5, \theta=120^\circ$	30.000	1.500	0.000	収束

## 収束限界の可視化

図 13 に極端パラメータでの収束特性を示す。

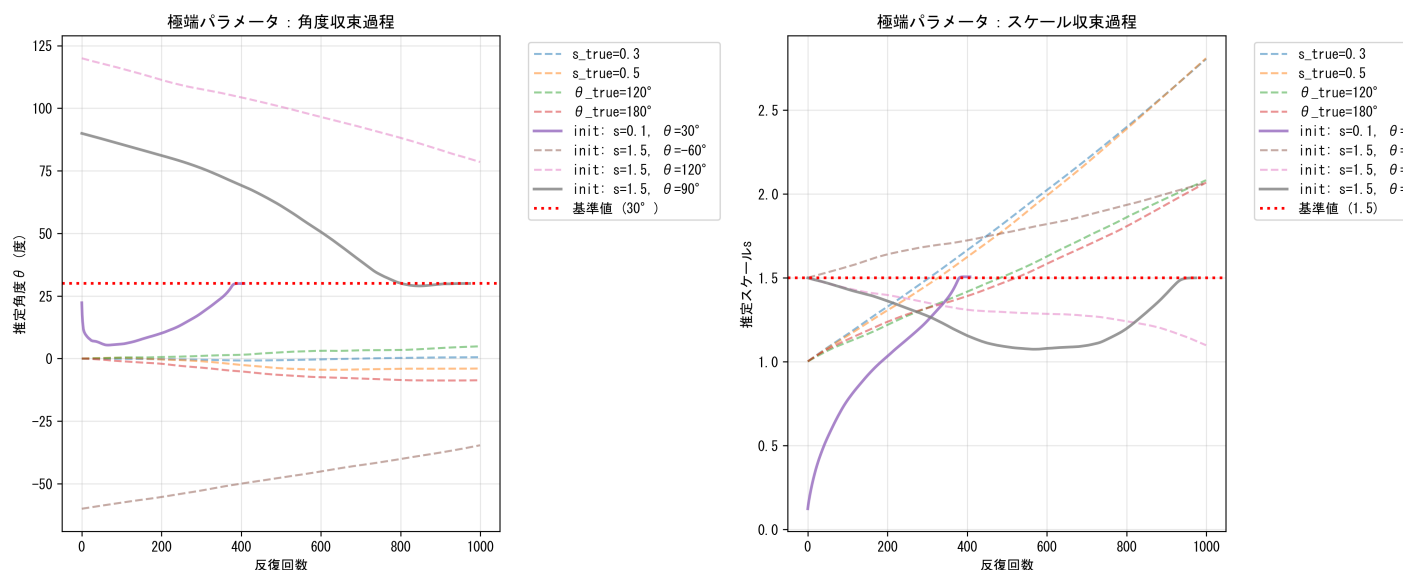


図 13 極端パラメータでの収束過程

### 3.3.3 実験 3 の結果

#### 実験 3-1：カーネルサイズの影響

表 5 と図 12 から以下の結果が得られた。

- カーネルサイズ  $3 \times 3$  では、角度誤差 0.025 度、スケール誤差 0.006 であり、高精度な推定が得られた。反復回数は 444 回で収束した。
- カーネルサイズ  $5 \times 5$ 、 $7 \times 7$  では、それぞれ角度誤差 22.9 度、29.6 度、スケール誤差 0.36、0.49 となり、999 回でも収束しなかった。
- カーネルサイズ  $9 \times 9$  では推定値が初期値と全く変化せず、勾配が 0 となって収束も停止も起こらなかった。

図 12 より、カーネルサイズの増大に伴い角度パラメータの最終到達値は段階的に減少し、 $9 \times 9$  では完全に更新が停止した。

#### 実験 3-2：極端パラメータでの収束性

表 6 および図 13 より、以下の収束傾向が確認された。

- スケール真値が 0.3, 0.5, 3.0 の場合には収束したが、2.0 では非収束となった。
- 角度真値が 60 度では収束したが、90 度以上では非収束となった。
- 初期スケール 0.1 からは収束したが、5.0 では非収束。初期角度が -60 度では非収束、90 度・120 度では収束した。



## 4 考察

### 4.1 ガウス・ニュートン法の収束特性の分析

図 3 から、ガウス・ニュートン法の典型的な収束パターンが観察される。回転角度  $\theta$  は初期の急速な収束（0-200 回）と最終段階での緩やかな収束（200-443 回）の 2 段階構造を示している。これは以下の理由による：

1. 初期段階（0-200 回）：大きな勾配により急速な収束。線形近似が有効な領域
2. 最終段階（200-443 回）：真値近傍での高精度調整。二次収束の特徴が現れる

#### 4.1.1 目的関数の形状と最適化挙動

図 5 の 3 次元可視化から、目的関数が真値付近で単一の明確な極小値を持つ凸関数的性質を示していることが重要である。この形状的特徴により：

- 局所最小に陥る危険性が低い
- 勾配降下の方向が一意に定まる
- 初期値の選択に対してある程度のロバスト性を持つ

しかし、図 6 から、真値から  $\pm 5$  度、 $\pm 0.2$  程度の狭い範囲でのみ凸性が保たれており、この範囲を超えると急激に目的関数値が増大することも確認できる。

#### 4.1.2 勾配情報の信頼性

図 4(a) の勾配推移は、ガウス・ニュートン法における勾配情報の信頼性を示している。両パラメータの勾配が 0 に収束していることから、相似変換の 2 パラメータが適切に最適化されていることがわかる。

#### 4.1.3 収束速度と計算効率

443 回での収束は、この種の非線形最適化問題としては妥当な反復回数である。図 4(b) の目的関数値推移から、実質的な収束は 300 回程度で達成されており、それ以降は高精度化のための微調整段階と解釈できる。

#### 4.1.4 パラメータ感度の非対称性

図 6、図 7 から、角度とスケールパラメータの感度に明確な違いが観察される：

- 角度パラメータ：真値  $\pm 5$  度で急激な目的関数増加
- スケールパラメータ：真値  $\pm 0.2$  で急激な目的関数増加

この非対称性は、相似変換において角度変化が画像全体に与える影響がスケール変化よりも大きいことを反映している。実用的には、角度パラメータの初期値設定により慎重になる必要があると考える。

## 4.2 初期値が推定精度に与える影響

ガウス・ニュートン法による相似変換パラメータ推定における初期値の影響について考える。実験1の結果から、初期値の設定が収束性と推定精度に大きく影響することが明らかとなった。特にスケールと角度で収束領域や収束挙動に顕著な違いが観察された。

### 4.2.1 スケール初期値の影響

スケール初期値が真値より小さい範囲（0.5～1.2）では収束しやすく、推定精度も高かった。一方、初期値が1.8や2.0と真値を上回る場合、スケール推定が大きく発散し、収束が得られなかった。このことから、スケール推定においては「下から上への収束」が安定し、「上から下への収束」が困難であるという非対称性が存在する。これは、目的関数の形状が非線形かつ、真値より大きいスケールに対して勾配が緩やかまたは平坦になるため、勾配情報が適切に機能しないためと考えられる。

### 4.2.2 角度初期値の影響

角度パラメータは、初期値が真値30度に対して20～40度であれば安定して収束したが、初期値が-20～10度と真値未満の範囲では、角度自体は収束してもスケールパラメータが発散し、全体としては非収束となった。角度の収束精度は比較的一様であるが、反復回数には大きな差があり、たとえば初期値40度では122回で収束したのに対し、20度では862回を要し、約7倍の速度差が生じていた。これは収束方向による最適化性能の違いを示している。

### 4.2.3 パラメータ間の収束の相互依存性

実験結果から、回転角度とスケールの推定は独立ではなく、相互に影響し合うことが示された。特に角度初期値が真値より大きい場合には両パラメータとも収束したのに対し、真値より小さい場合にはスケールのみが発散した。このことは、一方のパラメータの推定誤差が他方の収束性を損なう可能性を示しており、初期値設定において両パラメータのバランスが重要であることを示唆している。また、スケール初期値が大きいほど推定値もより大きく発散する傾向があり、これは目的関数の形状や更新則が非線形的かつ偏った収束方向性を持つことを反映していると考えられる。

ガウス・ニュートン法は、適切な初期値が与えられた場合には高速かつ高精度な推定を実現する。一方で、収束性は初期値に強く依存し、特に角度パラメータでは収束可能な領域が狭いことが実験から示された。

## 4.3 画像特徴が推定精度に与える影響

実験2の結果から、入力画像の内容や解像度がガウス・ニュートン法による相似変換パラメータ推定に大きく影響を与えることが示された。

### 4.3.1 画像特徴による影響

画像1と画像3の比較から、画像中のテクスチャや輪郭の明瞭さが推定精度に大きく寄与することが考えられる。画像1では山のエッジや形状が明瞭であるのに対し、画像3は輪郭が曖昧であり、勾配情報の計算に必要なエッジが失われていた可能性がある。これにより、最適化に必要な情報が不足

し、収束が困難となったと推測される。

#### 4.3.2 画像解像度による影響

画像 2 は画像 1 と同一内容であるが、解像度が高いことで非収束となった。これは以下のような要因が考えられる：

- 勾配やヘッセ行列の数値的不安定性が増加した
- 目的関数に局所最小が多数存在し、収束経路が複雑化した
- 高周波成分がノイズとして働き、最適化の方向性を乱した

これらは、「高解像度＝高精度推定」とは限らないことを示しており、実装上はリサイズや平滑化などの前処理が重要である可能性がある。

#### 4.3.3 発散挙動の重要性と対策

画像 3 で観察された発散的挙動は、ガウス・ニュートン法の限界を示している。目的関数の勾配方向が正しくなければ、反復により誤った方向へ進み続ける。

### 4.4 実験 3 に関する考察

#### 4.4.1 カーネルサイズと勾配の関係性

実験 3-1 から、微分フィルタのカーネルサイズが勾配の信頼性と収束性に大きく影響することが明らかとなった。カーネルサイズが大きくなると、画像の平滑化が進み、微小なエッジが除去される。その結果、目的関数の勾配が弱くなり、ガウス・ニュートン法による方向探索が適切に機能しなくなると考えられる。特に  $9 \times 9$  では勾配が消失し、最適化が開始されない状態となった。

したがって、相似変換のような小さなパラメータ差を検出する推定では、小さなカーネル ( $3 \times 3$ ) の方が有利である。

#### 4.4.2 収束可能なパラメータ空間の特定

実験 3-2 により、ガウス・ニュートン法には収束可能なパラメータ範囲が存在することが示された。スケール真値については  $0.3 \sim 0.5$  および  $3.0$  で収束する一方、 $2.0$  では収束困難であり、この結果は目的関数の形状が非線形かつ非対称であることを反映している可能性がある。

角度パラメータについても、 $60$  度までは収束が確認されたが、 $90$  度以上では非収束となった。これは回転の非線形性が高くなることで、ヤコビ行列の条件が悪化し、更新方向の誤りを生むためと考えられる。

#### 4.4.3 初期値の影響とロバスト性

極端な初期スケールや角度では、ガウス・ニュートン法が正しい極小値へ収束できないことがある。初期スケールが  $5.0$  の場合の発散や、初期角度が  $-60$  度での非収束は、初期条件に対するロバスト性の低さを示している。これは、ガウス・ニュートン法の局所探索的な性質に起因し、初期値が適切な領域内にあることが収束の前提条件であることを意味している。