



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет космических исследований

Курсовая работа

**Определение кривизны параболических дуг во
вторичных спектрах радиопульсаров**

Выполнил:

Студент 3 курса
Беспятый Илья Витальевич

Научный руководитель:
к.ф-м.н. Фадеев Евгений Николаевич

Москва, 2025 г.

Содержание

1 Введение	2
1.1 Актуальность темы	2
1.2 Цели и задачи исследования	4
2 Описание идеи	5
2.1 Физическая интерпретация	5
2.2 Источники и формат данных	7
2.3 Существующие методы	7
3 Применение идеи	10
3.1 Предобработка	10
3.2 Алгоритм обработки и измерения кривизны	16
4 Обсуждение	18
4.1 Анализ результатов	18
5 Заключение	31
6 Приложение	31
Список литературы	34

1 Введение

1.1 Актуальность темы

Изучение рассеяния излучения пульсаров на неоднородностях межзвездной плазмы началось вскоре после открытия этих объектов (Scheuer, 1968; Rickett, 1977) и остается актуальным направлением исследований по сей день. Межзвездная среда (МЗС) существенно влияет на сигналы радиоисточников, принимаемые на Земле, вызывая такие эффекты, как дисперсионное запаздывание, временное уширение импульсов, формирование зон рассеяния и мерцаний. Дискретное излучение пульсаров делает эти объекты удобным инструментом для исследования структуры и характеристик МЗС.

Для объяснения эффектов рассеяния обычно предполагается, что рассеивающая среда сосредоточена в компактных областях, называемых экранами, размеры которых значительно меньше расстояния до пульсара. Открытие параболических дуг в спектрах пульсаров стало важным этапом в исследовании явлений в межзвездной среде (Stinebring et al., 2001). Для объяснения этого явления необходимо, чтобы рассеянное изображение пульсара было вытянутым вдоль одного направления и обладало четко выраженным компактным ядром (Walker et al., 2004; Cordes et al., 2006b). Детальные исследования отдельных пульсаров с обратными арками показали, что для интерпретации наблюдаемых арок требуется снижать нижнюю границу спектра турбулентности до 10^6 метров, что вызывает физические трудности, поскольку такие малые плазменные структуры должны быстро распадаться (Pen and Levin, 2014). Современные модели рассеивающей среды, предложенные за последние годы, используют межзвездное магнитное поле для стабилизации газовой среды. Проверка предсказаний таких теорий путем наблюдений представляет интерес для дальнейших исследований.

Диски рассеяния пульсаров слишком малы, чтобы их можно было разрешить с помощью одиночных радиотелескопов. Такой подход не только помогает точнее определить расстояние и скорость рассеивающих облаков, но и проверяет базовые модели рассеяния. Благодаря этому анализу удается восстановить рассеянное изображение с улучшенным разрешением, выявляя мелкомасштабные структуры, которые в противном случае оставались бы скрытыми. Применение радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ) позволяет также приблизиться к решению этой проблемы и оценить размеры рассеянных изображений некоторых источников (Fadeev et al., 2018). Дальнейшее развитие методов РСДБ требует увеличения расстояния между

элементами интерферометра, что возможно только при выносе одной или нескольких антенн в космическое пространство. Одним из примеров такого проекта является наземно-космический интерферометр «Радиоастрон», обеспечивающий высокое угловое разрешение до 1 миллисекунды дуги на длине волны 92 см и до 0.2 миллисекунд дуги на длине волны 18 см (Kardashev et al., 2017).

Комплексный анализ эффектов рассеяния позволяет определить распределение рассеивающего вещества вдоль луча зрения. Кривизна дуг связана с физическими параметрами, например, расстоянием до экрана. «Радиоастрон» уже позволил обнаружить близкие к Солнцу (в пределах десятков парсек) экраны в направлении пульсаров B0950+08, B1919+21 и B0525+21. На наличие близких экранов указывают также результаты наблюдений быстрой изменчивости квазаров. Однако связь рассеивающих экранов, как близких, так и удаленных, с наблюдаемыми космическими объектами до сих пор остается недостаточно изученной и требует дополнительных исследований.

В рамках данной курсовой работы я сосредоточусь на определении кривизны параболических дуг во вторичных спектрах радиопульсаров и последующего сравнения полученных результатов с уже имеющимися данными из существующих статей. Для анализа будут использованы двадцать вторичных спектров пульсаров, выполненные на обсерваториях Аресибо и Грин Бэнк.

Одним из ключевых аспектов работы является сравнение результатов анализа дуг на необработанных вторичных спектрах и на бинаризованных. Параболические дуги во вторичных спектрах образованы рассеянным излучением и слабоизлучающих пульсаров, поэтому они почти всегда незначительно выделяются над фоновым шумом. Анализ проведенный в данной работе позволяет более надежно выделять дуги из шума. Цель работы заключается в углублении понимания процессов формирования параболических дуг и анализа существующих методов их поиска и обработки.

В заключение, данное исследование представляет собой комплексный анализ кривизны параболических дуг во вторичных спектрах радиопульсаров. Используя многочастотные наблюдения и современные аналитические методы, я стремлюсь получить новые представления о природе турбулентности в МЗС и механизмах, определяющих мерцание пульсаров. Результаты этой работы могут быть полезны для дальнейшего изучения межзвездной среды и ее влияния на распространение электромагнитных волн.

1.2 Цели и задачи исследования

Основной целью данной курсовой работы является изучение кривизны параболических дуг во вторичных спектрах радиопульсаров для последующей интерпретации полученных данных в контексте моделей турбулентности межзвездной среды (МЗС).

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Анализ теоретических основ образования параболических дуг

- Изучить механизмы рассеяния сигналов пульсаров на неоднородностях межзвездной плазмы
- Рассмотреть влияние тонких экранов и их параметров (включая спектр неоднородностей) на формирование параболических дуг

2. Анализ существующих методов поиска кривизны параболических дуг

- Составить список используемых в опубликованных научных статьях и работах алгоритмов обработки изображений и поиска оптимальной параболической дуги
- Выделить главные идеи и повторить результаты.
- Выявить возможные направления улучшений и доработок существующих методов и реализовать их

3. Сравнение и анализ результатов

- Сопоставить полученные данные с подтвержденными результатами.
- Оценить точность полученных оценок, сделать выводы о качестве обработки

2 Описание идеи

2.1 Физическая интерпретация

2.1.1 Образование дуг

Образование дуг в модели тонкого экрана подробно описано в статьях (Walker et al., 2004; Cordes et al., 2006a; Brisken et al., 2010). Можно показать, что из диска рассеяния излучение приходит с временной задержкой

$$\tau = \frac{D_{\text{eff}} \theta^2}{2c}, \quad (1)$$

а изменение задержки происходит с частотой

$$\nu = \frac{(\mathbf{v}_{\text{eff}}, \theta)}{s\lambda}, \quad (2)$$

где λ — длина волны, на которой происходят наблюдения, θ — угловое положение в картинной плоскости от центра диска рассеяния до точки-источника излучения (угловой радиус-вектор), $D_{\text{eff}} = \frac{1-s}{s} \cdot D$ — эффективное расстояние до рассеивающего экрана, $s = D_s/D$ — доля расстояния пульсара до экрана к расстоянию до наблюдателя, \mathbf{v}_{eff} — эффективная скорость наблюдаемого изображения, последнее выражается через тангенциальные компоненты скорости экрана $\mathbf{v}_{s\perp}$, наблюдателя $\mathbf{v}_{o\perp}$ и пульсара $\mathbf{v}_{p\perp}$:

$$\mathbf{v}_{\text{eff}} = (1-s)\mathbf{v}_{p\perp} + s\mathbf{v}_{o\perp} - \mathbf{v}_{s\perp}$$

Если диск рассеяния вытянут вдоль одного направления и образует с вектором \mathbf{v}_{eff} угол ψ , то из уравнений (12), (13) получаем квадратичную зависимость между τ и ν :

$$\tau = \frac{Ds(1-s)}{2c} \cdot \left(\frac{\lambda}{v_{\text{eff}} \cos \psi} \right)^2 \cdot \nu^2 = a\nu^2 \quad (3)$$

Величина a — кривизна дуги — есть измеряемая и исследуемая в текущей работе величина. Исследование показало, что кривизна дуг остается постоянной в течение как минимум 25 лет (Trang and Rickett, 2007).

Тангенциальные скорости пульсаров обычно составляют сотни километров в секунду, поэтому скоростью наблюдателя, которая не превосходит орбитальную скорость Земли (около 30 км/с), можно пренебречь. Скорости газовых облаков в окрестности Солнечной системы также составляют десятки

километров в секунду, поэтому движением экрана в большинстве случаев также можно пренебречь. Тогда формула (14) преобразуется к виду:

$$\tau = \frac{Ds}{2c(1-s)} \left(\frac{\lambda}{v_{p\perp} \cos \psi} \right)^2 \nu^2 \quad (4)$$

При известном расстоянии D до пульсара и собственном движении μ , из которого выражается скорость $v_{p\perp} = \mu D$, измерение кривизны наблюдаемой во вторичном спектре параболической дуги позволяет определить положение рассеивающего экрана как $D_s = sD$.

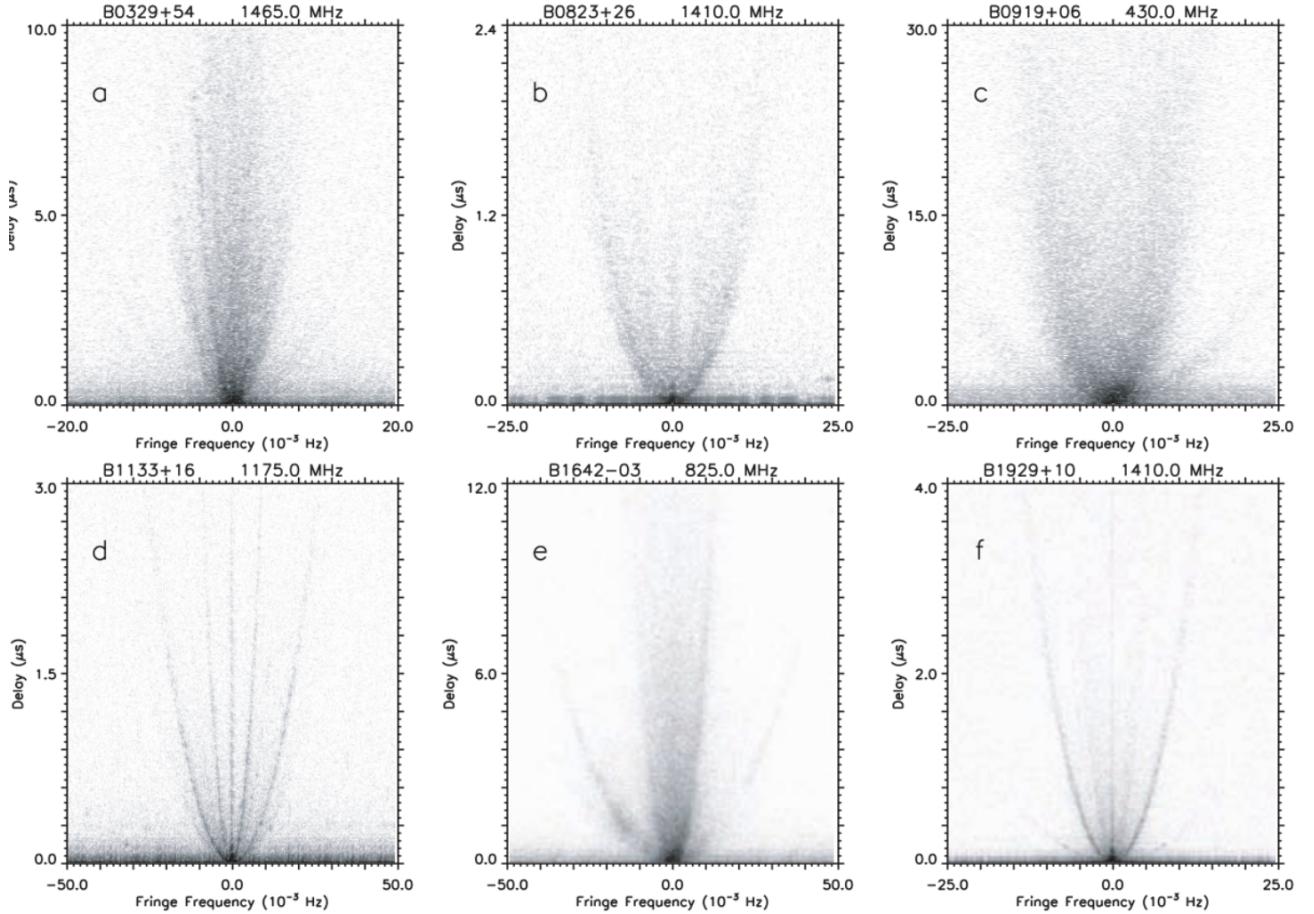


Рис. 1: Вторичные спектры шести пульсаров. Название пульсара и частота наблюдения указаны над каждым спектром. По горизонтальной оси отложена частота интерференции в мГц, по вертикальной — задержка в мкс. Изображение заимствовано из работы (Putney and Stinebring, 2006)

2.2 Источники и формат данных

В качестве источников для обработки в данной курсовой работе используются данные, полученные в рамках наблюдательных сеансов наземно-космического интерферометра Радиоастрон. Поскольку исследование рассеяния требует высокой чувствительности телескопов и приемной аппаратуры, были выбраны данные с наиболее крупных телескопов: Аресибо (National Astronomy and Ionosphere Center (NAIC), Пуэрто-Рико) и Грин-Бэнк (National Radio Astronomy Observatory (NRAO), США). Таблица параметров измерений в приложении (таблица 1).

Динамическим спектром называется зависимость $J(f, t)$ интенсивности излучения от частоты принимаемого сигнала и времени приема.

Вторичный спектр $\hat{J}(\tau, \nu)$ — это результат двумерного преобразования Фурье динамического спектра

Вторичные спектры получены в результате обработки динамических спектров и представляют собой массивы чисел с плавающей запятой в обычной или логарифмической шкале значений интенсивности.

2.3 Существующие методы

К существующим методам эффективного поиска кривизны вторичных спектров пульсаров относятся:

1. Преобразование Хафа для поиска параметров подходящей параболы (Bhat et al., 2016)
2. Максимизация результата суммирования вдоль дуги встраиваемой параболы, поиск оптимума (Rickett et al., 2021)
3. $\theta - \theta$ диаграмма (Sprenger et al., 2020)

В данной курсовой работе я сосредоточил внимание на реализации и оптимизации метода преобразования Хафа и поиска оптимума результата суммирования вдоль криволинейной дуги.

Опишем подробнее каждый из используемых далее методов.

2.3.1 Преобразование Хафа

Классическое преобразование Хафа — алгоритм, используемый в компьютерном зрении для обнаружения простых геометрических фигур, представляемых в параметрической форме (есть уравнение зависимости) (Hough, 1959)

Основная цель метода — найти параметры геометрических объектов, которые соответствуют группам точек на изображении. Для каждого из свободных параметров искомой кривой вручную подбирается диапазон и количество допустимых значений. Затем происходит поиск оптимальной кривой (или множества таковых) по созданной сетке параметров. Для этой цели в данном методе используется идея аккумуляторного массива или просто аккумулятора. Размерность аккумулятора равна количеству свободных параметров кривой, ячейка массива соответствует некоторому набору свободных параметров кривой выбранных из сетки допустимых значений.

Процесс заполнения аккумулятора выглядит следующим образом: для каждой точки на изображении рассчитывается множество значений параметров, при которых кривая проходит через эту точку. За это множество параметров производится «голосование» — в аккумулятор в соответствующие параметрам ячейки прибавляется единица.

Результат преобразования Хафа — аккумуляторный массив — множество точек в пространстве свободных параметров кривой, соответствующее изображению. По заполненному аккумулятору из анализа плотности его значений осуществляется выбор оптимальных параметров — при визуальном анализе результатов более «густые», заполненные области отвечают наиболее подходящим параметрам

Таким образом алгоритм действий работы алгоритма преобразования следующий:

1. Создание и заполнение аккумулятора
2. Анализ пиков в аккумуляторе

Классический пример использования преобразования Хафа — поиск прямых и окружностей на изображении. Разберем для прямой каждый описанный выше этап.

Параметризовать прямую можно используя два числовых параметра — расстояние до начала координат ρ и угол θ между выбранной осью и нормалью к прямой:

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Диапазон по θ : $\Theta = [0, 2\pi]$, по ρ естественно выбрать равным половине диагонали изображения D : $R = [0, D]$. Для каждого параметра подбирается шаг $\Delta\theta$ и $\Delta\rho$ и множества Θ и R дискретизуются с этим шагом — получаются множества $\tilde{\Theta} = \{k\Delta\theta \mid k = 0 \dots K, K = [\frac{2\pi}{\Delta\theta}]\}$, $\tilde{R} = \{m\Delta\rho \mid m = 0 \dots M, M = [\frac{D}{\Delta\rho}]\}$. Таким образом множество параметров есть $P = \tilde{\Theta} \times \tilde{R} = \{(\theta, \rho) \mid \theta \in \tilde{\Theta}, \rho \in \tilde{R}\}$.

$\tilde{\Theta}, \rho \in \tilde{R}\}$ и аккумуляторный массив представляет собой целочисленный массив того же размера $K \times M$ изначально заполненный нулями.

Для каждой точки (x, y) на изображении находятся все параметры θ и ρ , например, путем перебора всех значений θ , тогда $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$. В аккумуляторный массив за эту пару параметров засчитывается один голос.

После перебора всех точек проводится анализ полученного массива. Ниже пример работы с поиском двух прямых на изображении. Градацией серого обозначено количество голосов в аккумуляторе, чем белее область тем больше там голосов. В результате работы получаются две яркие белые области, что соответствует двум парам найденных параметров прямых (см. рис 2):

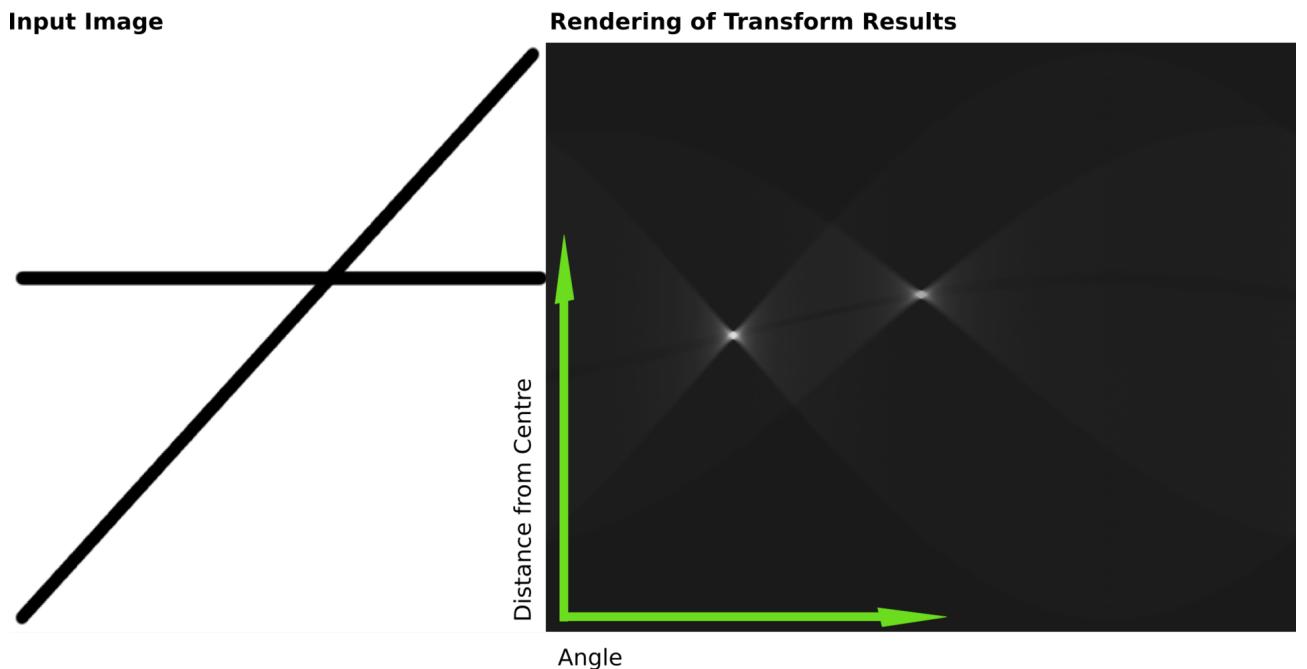


Рис. 2: Двумерное преобразование Хафа для прямой. На левом рисунке — анализируемое изображение, на правом — результат преобразования.

3 Применение идеи

3.1 Предобработка

Некоторые вторичные спектры имели слишком высокое для анализа разрешение по оси доплеровских частот ν , так что дуги парабол не были видны при первичном анализе, визуально они сливались с вертикальной линией вдоль оси задержки сигнала τ . Чтобы разрешить дуги, была проведена обрезка по оси ν (см. рис. 6, 4):

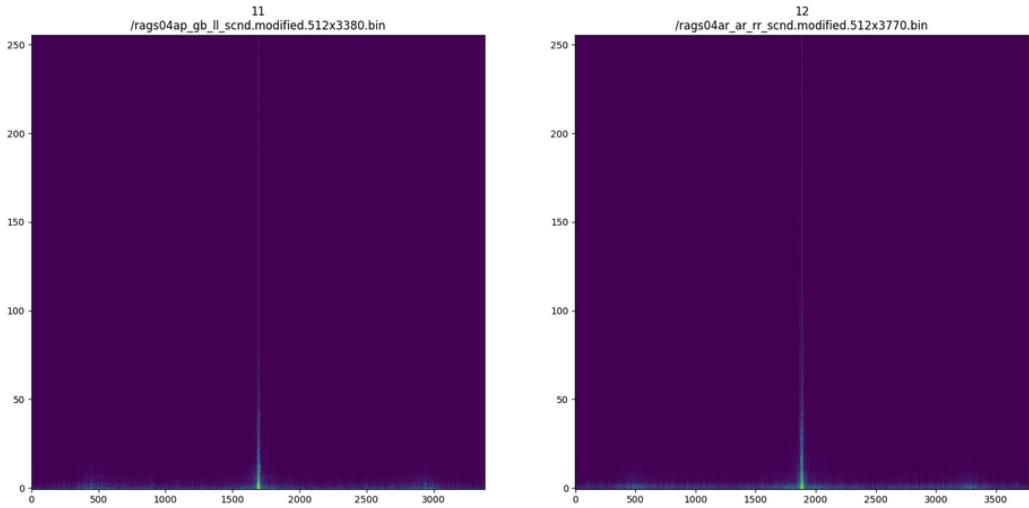


Рис. 3: Вторичные спектры до обрезки.

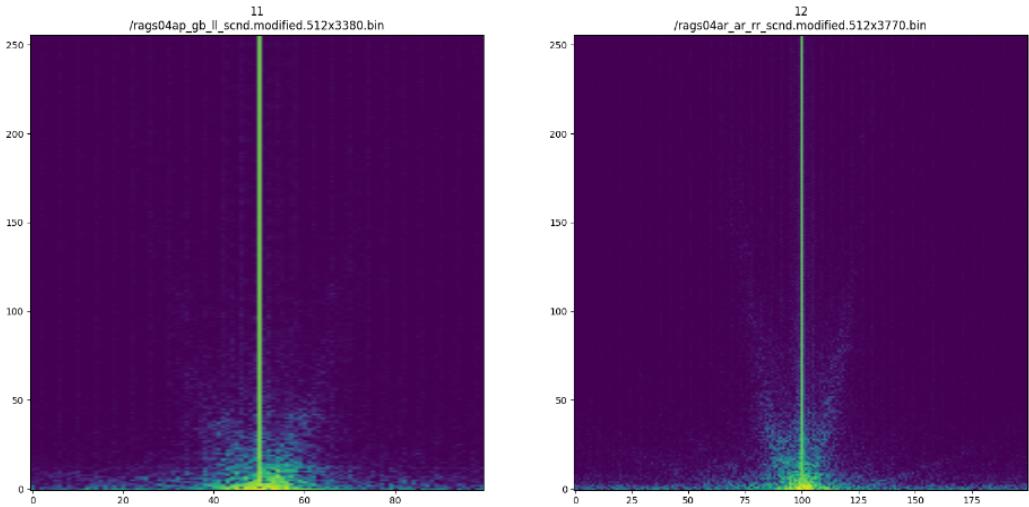


Рис. 4: После обрезки.

Исходные файлы вторичных спектров необходимо привести к единому масштабу интенсивностей, для этого проводилось логарифмирование файлов,

в которых минимальное значение в ячейке массива спектра было неотрицательным. Логарифмирование проводится главным образом потому, что доля рассеянного излучения крайне низка, отчего яркость дуг также крайне низка и слабо выделяется над фоном.

В ходе данной работы было проведено сравнение результатов работы преобразования Хафа и суммирования вдоль дуги на исходных и на бинаризованных изображениях. Процесс бинаризации — перевод цветного (или полуточнового/одноканального) изображения в двухцветное (бинарное) черно-белое. Главным параметром такого преобразования является порог t — значение, с которым сравнивается яркость каждого пикселя. По результатам сравнения, пикслю присваивается значение 0 или 1. Существуют различные методы бинаризации, которые можно условно разделить на две группы — глобальные и локальные. В первом случае величина порога остается неизменной в течение всего процесса бинаризации. Во втором изображение разбивается на области, в каждой из которых вычисляется локальный порог. Главная цель бинаризации — это значительное уменьшение количества обрабатываемой информации. Удачная бинаризация значительно упрощает последующую работу с изображением. Однако неудачная бинаризация может привести к искажениям, таким, как разрывы в линиях, потеря значащих деталей, появление шума, непредсказуемые искажения т. д. Для анализа и сравнения эффективности были выбраны следующие основные методы бинаризации:

1. **Метод Оцу** (Otsu, 1979) — глобальный метод бинаризации, разделяет пиксели на два класса («полезные» и «фоновые»), рассчитывая порог, чтобы внутриклассовая дисперсия была минимальной. Использует для расчета гистограмму изображения. Выражение для внутриклассовой дисперсии имеет вид:

$$\sigma^2 = \nu_1 \sigma_1^2 + \nu_2 \sigma_2^2$$

где i — номер класса, ν_i — доля пикселей класса i , σ_i^2 — дисперсия в данном классе. В своей работе Оцу показывает, что минимизация внутриклассовой дисперсии эквивалента максимизации межклассовой дисперсии, которая равна:

$$\sigma_r^2 = \nu_1 \nu_2 (\mu_1 - \mu_2)^2$$

где μ_i — среднее значение интенсивности для каждого класса.

Метод Оцу может приводить к утрате мелких деталей и слиянию близких деталей. Поскольку анализируемые изображения часто обладают

крайне низкой контрастностью и зашумленностью, то дисперсия сигнала для всего изображения почти всегда мала в сравнении со средним значением, потому и деление на классы может быть затруднено и приводить к полному закрашиванию изображения в один цвет (черный)

2. **Метод Ниблэка** (Niblack, 1986). Идея данного метода состоит в варьировании порога яркости бинаризации от точки к точке на основании локального значения стандартного отклонения. Порог яркости в точке (x, y) рассчитывается как

$$t(x, y) = \mu(x, y) + k \cdot \sigma(x, y),$$

где $\mu(x, y)$ — среднее значение, $\sigma(x, y)$ — среднеквадратичное отклонение выборки для некоторой окрестности точки. Размер окрестности должен быть минимальным, но таким, чтобы сохранить локальные детали изображения. В то же время размер должен быть достаточно большим, чтобы понизить влияние шума на результат. Значение коэффициента k определяет, какую часть границы объекта взять в качестве самого объекта. Например, $k = -0.2$ задает достаточно хорошее разделение объектов, если они представлены черным цветом, а $k = +0.2$, — если объекты представлены белым цветом.

Метод Ниблэка может приводить к появлению ложных объектов в случае неоднородностей фона с низкой контрастностью, что свойственно для анализируемых изображений вторичных спектров, поэтому данный метод не в полной мере подходит для использования

3. **Метод Савола** (Sauvola and Pietikäinen, 2000). Использует схожие с алгоритмом Ниблэка идеи, но выражение для порога бинаризации имеет следующий вид:

$$t = \mu(x, y) \cdot \left[1 + k \cdot \left(\frac{\sigma(x, y)}{R} - 1 \right) \right],$$

где R — динамический диапазон стандартного отклонения $\sigma(x, y)$.

4. **Алгоритм Брэдли — Рота** (Bradley and and, 2007) — метод локальной бинаризации, использующий идею интегральных изображений. На первом шаге алгоритма происходит создание интегрального изображения — массива, с элементами равными кумулятивной сумме всех интенсивностей в ячейках не ниже и не правее данного. Рекуррентная формула

значений $S(x, y)$ интегрального изображения по исходному распределению интенсивности $I(x, y)$:

$$S(x, y) = I(x, y) + S(x - 1, y) + S(x, y - 1) - S(x - 1, y - 1)$$

По интегральному изображению можно быстро рассчитать суммарную интенсивность в любой прямоугольной области $ABCD$ на изображении. Пусть диагональ AD проходит из левого верхнего в правый нижний угол прямоугольника, тогда:

$$I_{ABCD} = S(x_A, y_A) + S(x_D, y_D) - S(x_B, y_B) - S(x_C, y_C)$$

В алгоритме адаптивный порог бинаризации. Опишем вокруг бинаризованного пикселя (x, y) квадрат со стороной d и найдем среднюю суммарную интенсивность $I_d(x, y)$ внутри этого квадрата, используя вычисление заранее интегральное изображение. Если интенсивность $I(x, y)$ пикселя на исходном изображении окажется менее чем на долю t тусклее средней интенсивности внутри описанной квадратной области, то алгоритм примет этот пиксель как фоновый и войдет в бинаризованное изображение B как черный $B(x, y) = 0$, в противном случае — как белый $B(x, y) = 1$:

$$[I(x, y) < I_d(x, y) \cdot (1 - t)] = \begin{cases} \text{True} \Rightarrow B(x, y) = 0 \\ \text{False} \Rightarrow B(x, y) = 1 \end{cases}$$

Параметры d и t выбираются вручную.

В результате проведенного анализа следует вывод, что каждый метод должен быть применен в своей области. Наилучшие результаты контрастности и различаемости дуг показал метод локальной бинаризации Брэдли-Рота с характеристиками ширины окна $d = \min(W, H)/4$ и локального порогового уровня $t = 0.05$, где W, H — ширина и высота бинаризованного изображения соответственно. Результат сравнения можно видеть на рис.5.

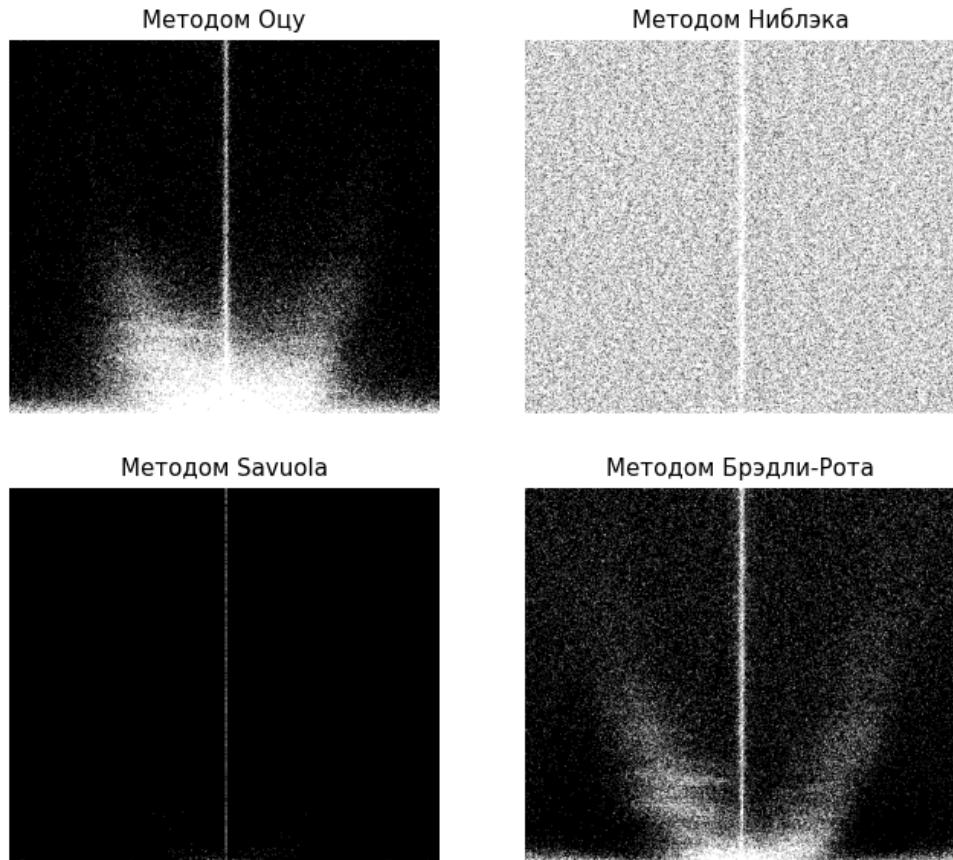


Рис. 5: Сравнение методов на одном из вторичных спектров

Из-за особенностей преобразования Фурье у исходных изображений урезалась правая половина так, чтобы осталась только одна дуга параболы, затем изображение поворачивалось на 90 градусов. Для удобства дальнейшего анализа обработанные изображения обрезались по горизонтальным и вертикальным осям. Обязательно это следует делать после бинаризации изображения, но не до, поскольку это в значительной степени влияет на результат:

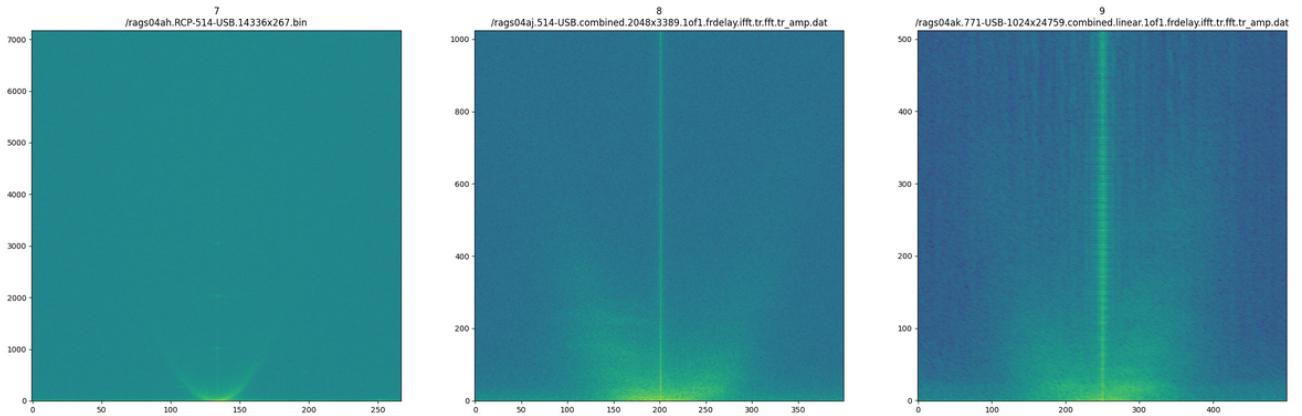


Рис. 6: Пример исходных вторичных спектров (урезанных и повернутых)

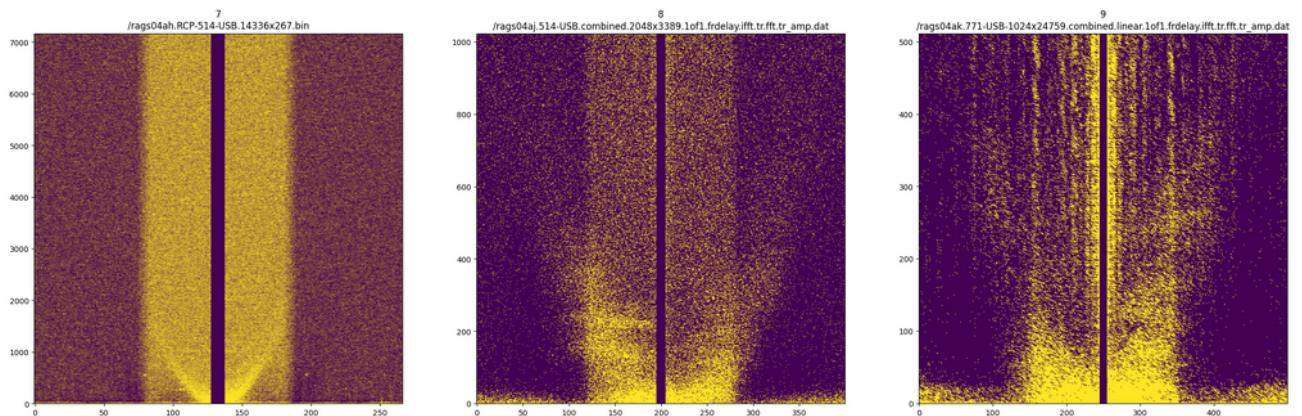


Рис. 7: Результат бинаризации на обрезанных изображениях

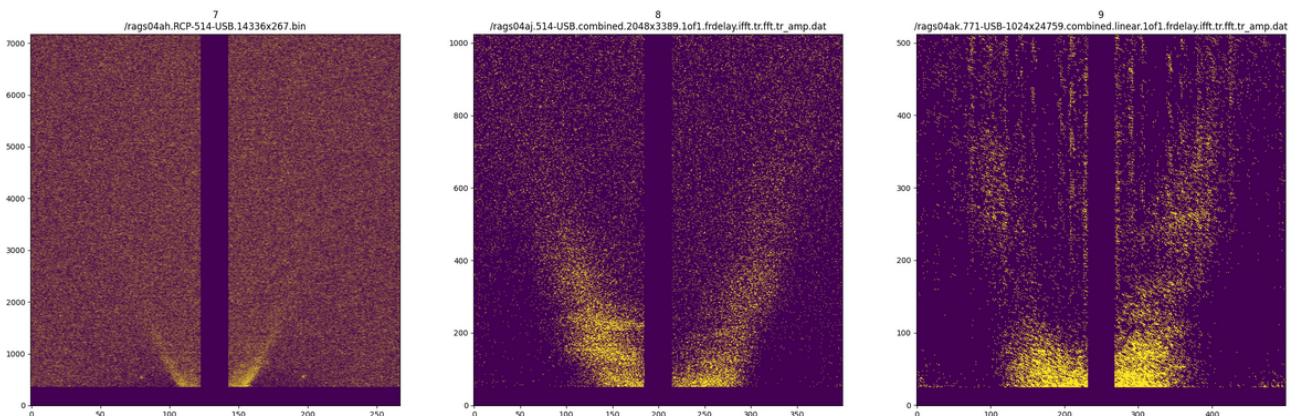


Рис. 8: Результат бинаризации на исходных и впоследствии обрезанных

3.2 Алгоритм обработки и измерения кривизны

После проведенной предобработки дальнейший анализ сводится к цели найти оптимальное для каждого метода оценку кривизны вписываемой в данные точки параболы, а также оценить погрешность проведенной оценки.

По своей сути алгоритм, использующий преобразование Хафа и суммирование вдоль дуги параболы, одно и то же, отличие заключается в условии, по которому алгоритм считает данную точку лежащей на дуге параболы. В данной работе сравниваются варианты этих методов:

1. Классическое преобразование Хафа
2. Улучшенное преобразование Хафа
3. Суммирование вдоль дуги

Приведу подробное описание каждого из этих методов:

1. **Классическое преобразование Хафа.** Вписываемая однопараметрическая кривая имеет вид:

$$y = kx^2$$

Начало координат находится в середине нижней стороне изображения, ось Ox направлена вдоль нижней грани $x \in [-W/2, W/2]$, ось Oy вдоль средней вертикали изображения $y \in [0, H]$, H, W — высота и ширина изображения.

Выбрана логарифмическая сетка значений параметра, для того, чтобы визуально последовательность парабол была близка к равномерному по площади заполнению изображения, аналогичный расчет проводился в (Rickett et al., 2021). Точка (x, y) считается принадлежащей дуге параболы с кривизной k , если доля разницы между предсказанной kx^2 и истинной ординаты от ординаты составляет не более $\alpha = 0.1$.

$$\frac{|y - kx^2|}{y} < \alpha.$$

При выполнении этого условия в аккумулятор за кривизну k добавляется голос величины, равной интенсивности этой точки (на бинаризованном изображении это единица, на исходном — интенсивность самой точки). Процесс выполняется для всех точек изображения, в результате получается заполненный одномерный аккумуляторный массив.

2. **Улучшенное преобразование Хафа.** Поскольку длины дуг умещающиеся в рамки изображения вписываемых парабол зависят от кривизны k , то количество голосов может увеличиваться не только вследствие действительной принадлежности данного набора точек параболе, но и из-за увеличения длины самой дуги. Это может привести к тому, что на сильно зашумленных изображениях наибольшее количество голосов будет у самой длинной параболы.

В качестве решения этой проблемы предлагается нормирование каждой ячейки аккумуляторного массива на длину соответствующей кривизне дуги параболы на которой производится расчет. Таким образом, учитывается и сравнивается не абсолютное значение суммы интенсивности вдоль дуги, а относительная заполненность каждой дуги. Явное выражение для длины дуги:

$$L(k) = F(k, b) - F(k, -b), \quad b = \begin{cases} \sqrt{H/k}, & k > \hat{k} \\ W/2, & k \leq \hat{k} \end{cases}, \quad \hat{k} = \frac{H}{(W/2)^2} = \frac{4H}{W^2},$$

где $F(k, x)$ – первообразная:

$$F(k, x) = \int \sqrt{1 + 4k^2x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 + 4k^2x^2} + \frac{\sinh^{-1}(2kx)}{4k}$$

3. **Суммирование вдоль дуги.** В этом случае для каждого значения k из той же логарифмической сетки значений генерировалась явная маска, по которой производится дальнейшее суммирование интенсивности как на исходном предобработанном, так и на бинаризованном изображении.

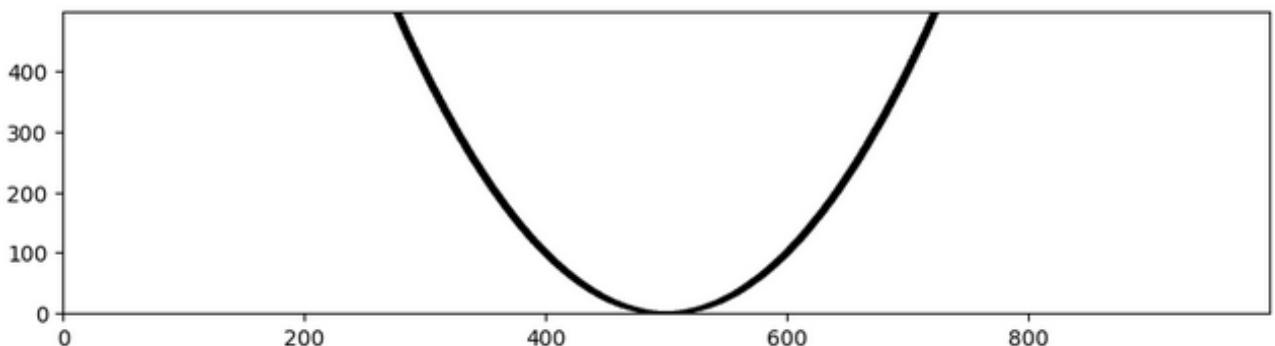


Рис. 9: Пример маски $H = 500$, $W = 1000$, $k = 0.01$, толщина маски 5 пикселей

Будем называть *характеристикой* метода значение голосов, в случае использования преобразования Хафа, или значение суммарное значение интенсивности вдоль дуги соответствующее данной кривизне.

В качестве предсказанного алгоритмом значения предлагается использовать абсциссы наиболее высоких и широких пиков графика характеристики от кривизны. В качестве погрешности предлагается использовать левое и правое отклонение на уровне 90 процентов от высоты пиков. Отбор и поиск параметров пиков производится автоматически при помощи встроенных методов библиотеки scikit-learn языка программирования Python.

4 Обсуждение

4.1 Анализ результатов

После проведения предварительной обработки данных к бинаризованным и исходным изображениям были применены алгоритмы поиска параболы, подробно описанные в предыдущем разделе. В результате работы для каждого изображения был получен аккумуляторный массив со значениями характеристик для каждого метода. На рис. 10, 11 приведены примеры итоговой обработки без и с бинаризацией:

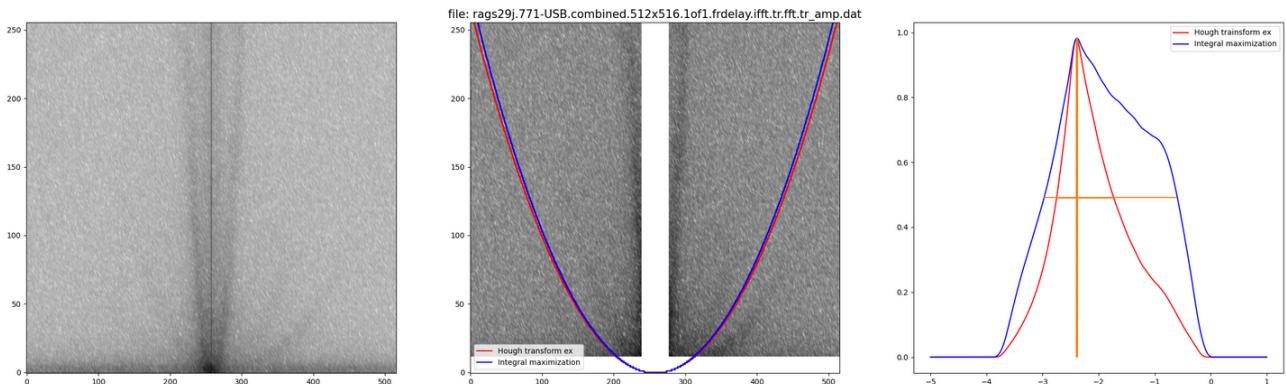


Рис. 10: Эксперимент RAGS29J пульсара B1237+25 без бинаризации

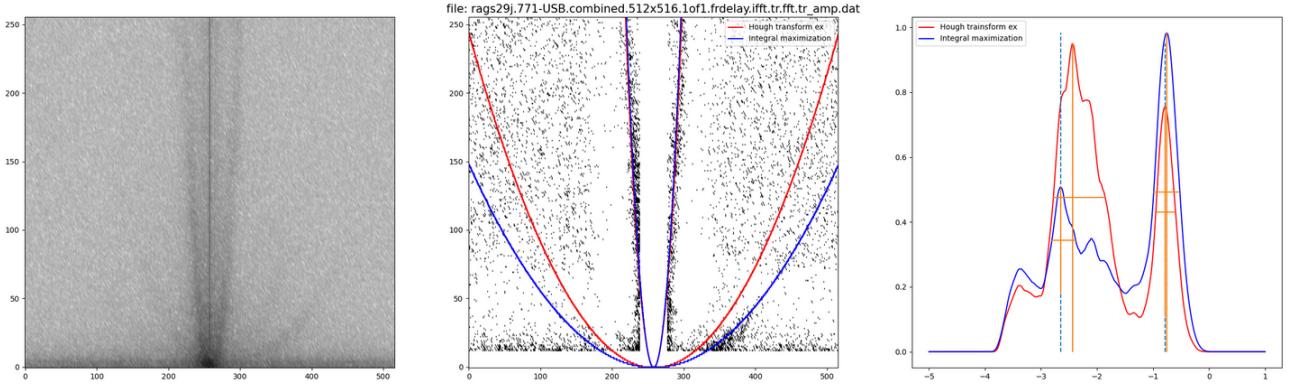


Рис. 11: Эксперимент RAGS29J пульсара B1237+25 с бинаризацией

Для каждого графика характеристики был произведен поиск всех значимых пиков с параметрами: относительная высота пика (prominence) не менее 0.1, также была оценена погрешность как левая и правая ширина пика на 90% от высоты пика. Затем полученные значения кривизн на изображении были пересчитаны в кривизны на вторичном спектре с учетом масштаба по каждой оси по формуле:

$$a = k \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta\nu^2}$$

где k — кривизна на изображении (в безразмерных единицах), a — кривизна на вторичном спектре (в единицах мкс/мГц²); величины $\Delta\tau$ и $\Delta\nu$ — шаг по времени задержки и по доплеровской частоте, связаны с параметрами наблюдений ширины полосы Δf и времени наблюдения Δt по формуле:

$$\Delta\tau[\text{мкс}] = \frac{1}{\Delta f[\text{МГц}]}, \quad \Delta\nu[\text{мГц}] = \frac{1}{\Delta t[\text{мин}]} \cdot \frac{100}{6}$$

Была составлена сводная таблица результатов 2 и произведена проверка на согласие предсказаний методов как между собой для одних и тех же пульсаров¹, так и с опубликованными ранее в статьях и диссертациях (Фадеев, 2022).

В подавляющем большинстве случае результаты на бинаризованных методом Брэдли — Рота изображениях показали правильное определение положения дуг и значительно меньшую погрешность ее определения (см. рис. 12-16 для бинаризованных и 17-21 для исходных). Однако в некоторых случаях

¹Дуги во вторичных спектрах меняются слабо на масштабе различных используемых измерений спектров пульсаров (не более трех лет). Характерный масштаб изменений составляет порядка 20 лет(Hill et al., 2005; Walker et al., 2022)

(см. первую строку на рис. 12, третью на рис. 14 и вторую на рис. 15) алгоритмы находили несуществующие дуги дополнительно к действительным. Также рассчитанные алгоритмами значения (см. таблицу 2) на бинаризованных данных показали хорошую сходимость результатов друг с другом или по крайней мере они находили хотя бы одну действительную дугу на изображении, что в совокупности давало определение всех дуг. Для работы на исходных изображениях сходимость наблюдалась редко.

Результаты работы на бинаризованных изображениях близки с большинством опубликованных результатов анализа дуг на вторичных спектрах. Там, где опубликованных результатов нет, проверялась сходимость результатов методов между собой и визуальным анализом изображения.

Значительные отличия от опубликованных в работах наблюдаются на эксперимента RACS04AK пульсара B0823+26 и одном из дубликатов RAKS02AA пульсара B1933+16. Скорее всего расхождения связаны с ошибками в определении масштаба файла вторичного спектра, поскольку методы сходятся между собой и для каждого метода между дубликатами кривизны отличаются в одно и то же количество раз.

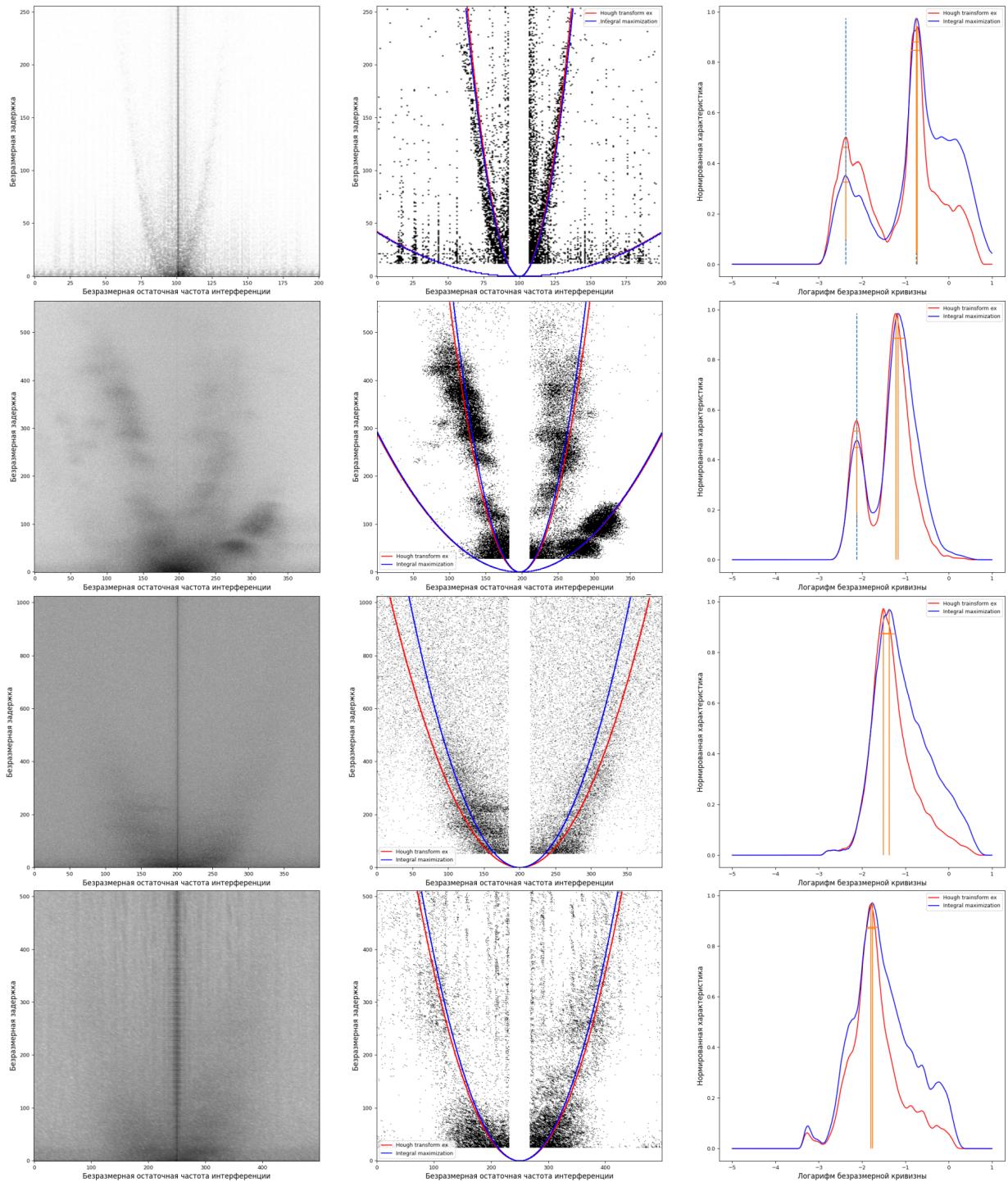


Рис. 12: В левой колонке исходные спектры, в средней бинаризованные методом Брэдли — Рота с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAGS04AO B1929+10, во второй RAKS02AA B1933+16, в третьей RAGS29J B1237+25, в четвертой RAGS04AK B0823+26

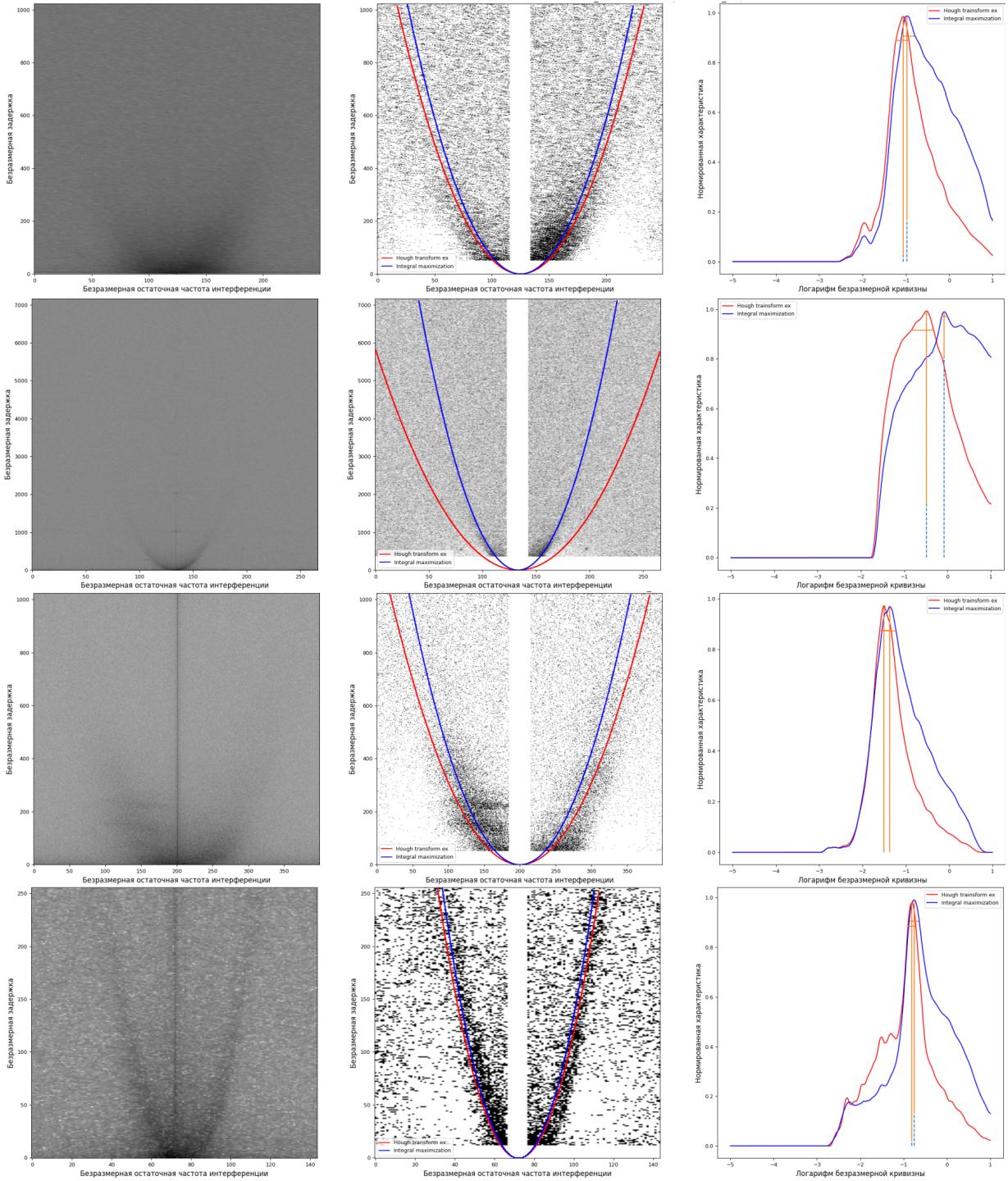


Рис. 13: В левой колонке исходные спектры, в средней бинаризованные методом Брэдли — Рота с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAKS24A B0919+06, во второй RAGS04AH B0834+06, в третьей RAGS04AJ B0823+26, в четвертой RAGS04AO B1929+10 (дубликат)

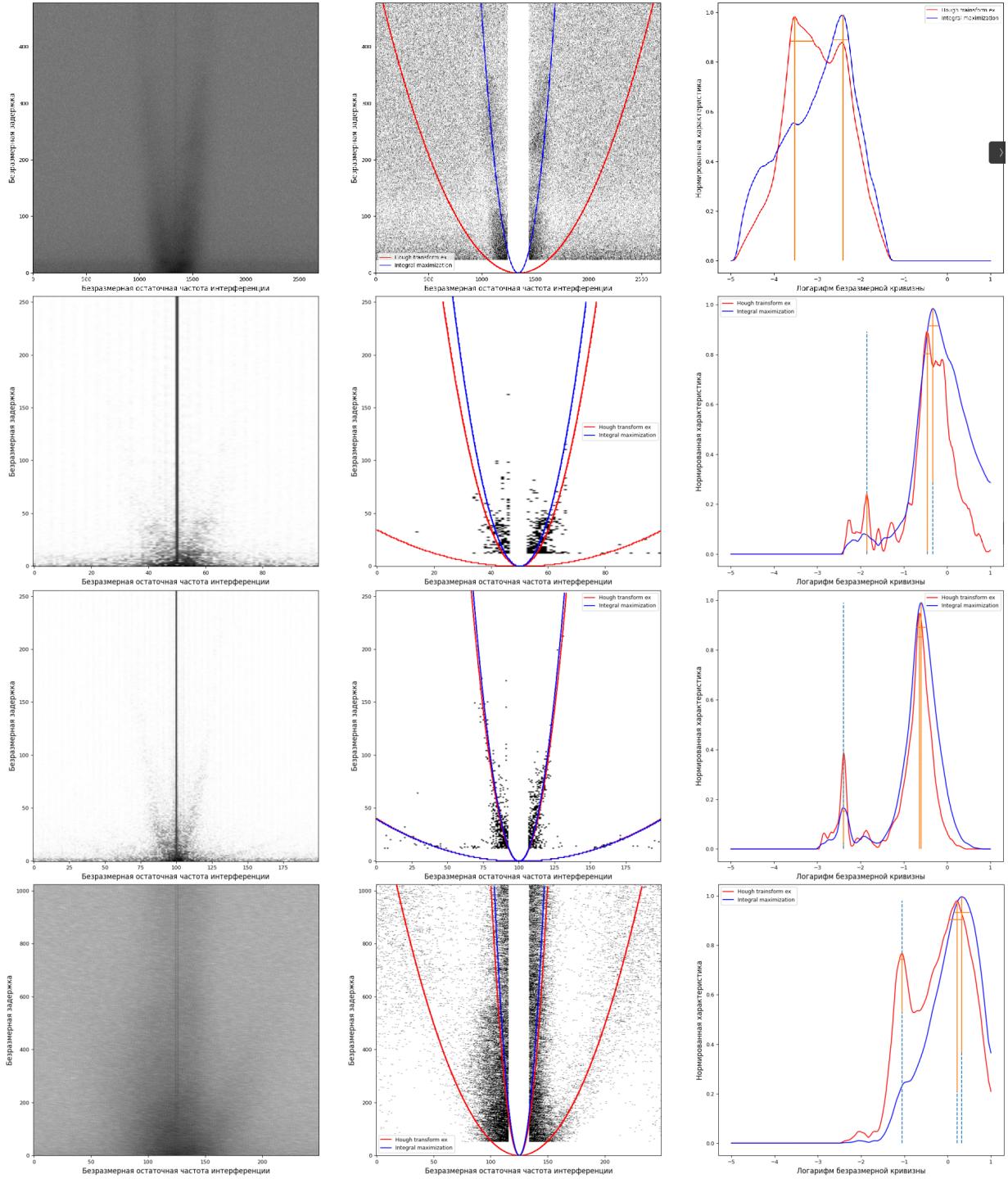


Рис. 14: В левой колонке исходные спектры, в средней бинаризованные методом Брэдли — Рота с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAGS04AK B0823+26 (дубликат), во второй RAGS04AP B1237+25, в третьей RAGS04AR B1237+25, в четвертой RAGS29E B0919+06

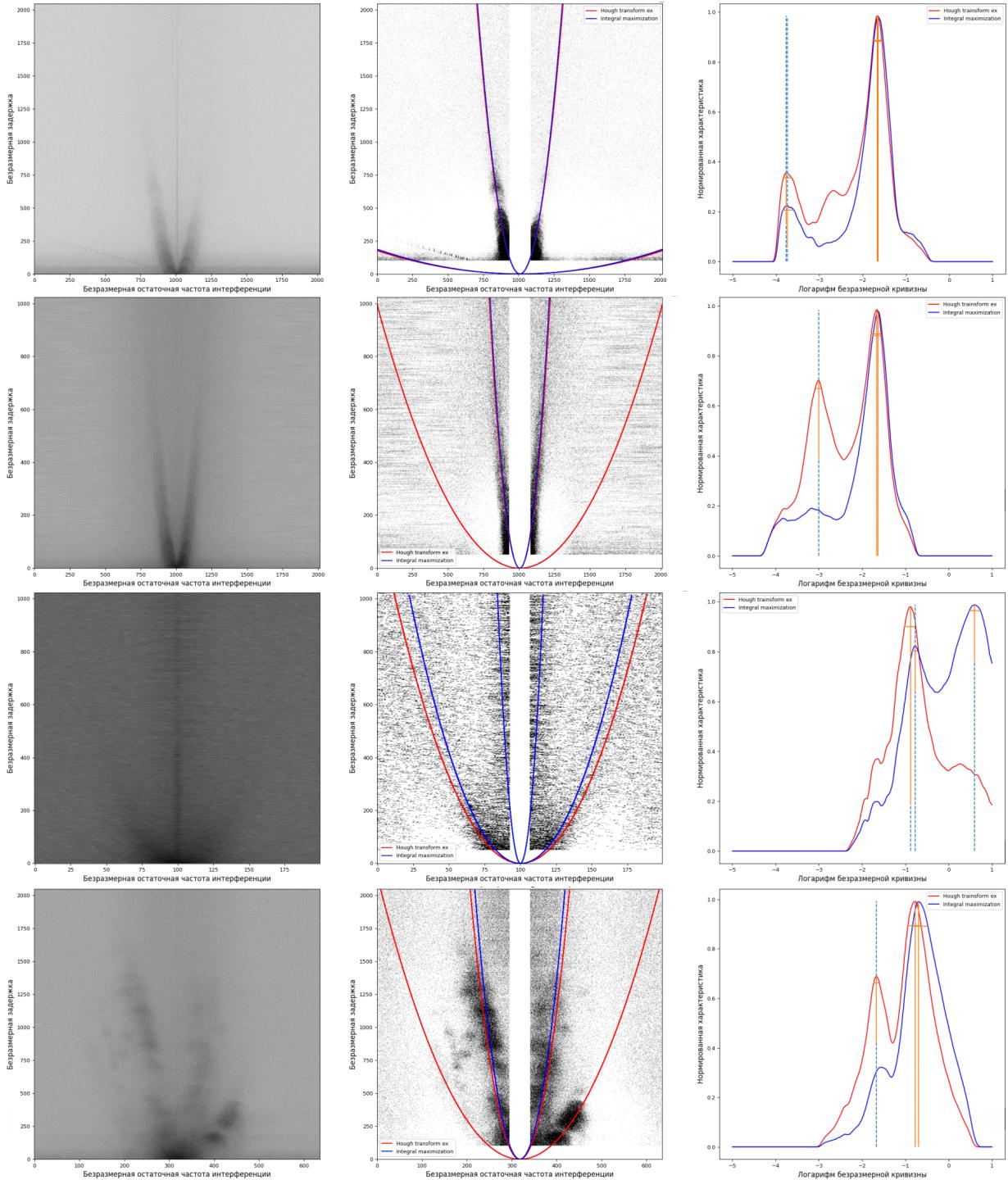


Рис. 15: В левой колонке исходные спектры, в средней бинаризованные методом Брэдли — Рота с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAGS29G B1133+16, во второй RAGS29L B1133+16, в третьей RAGS29P B0919+06, в четвертой RAKS02AA B1933+16

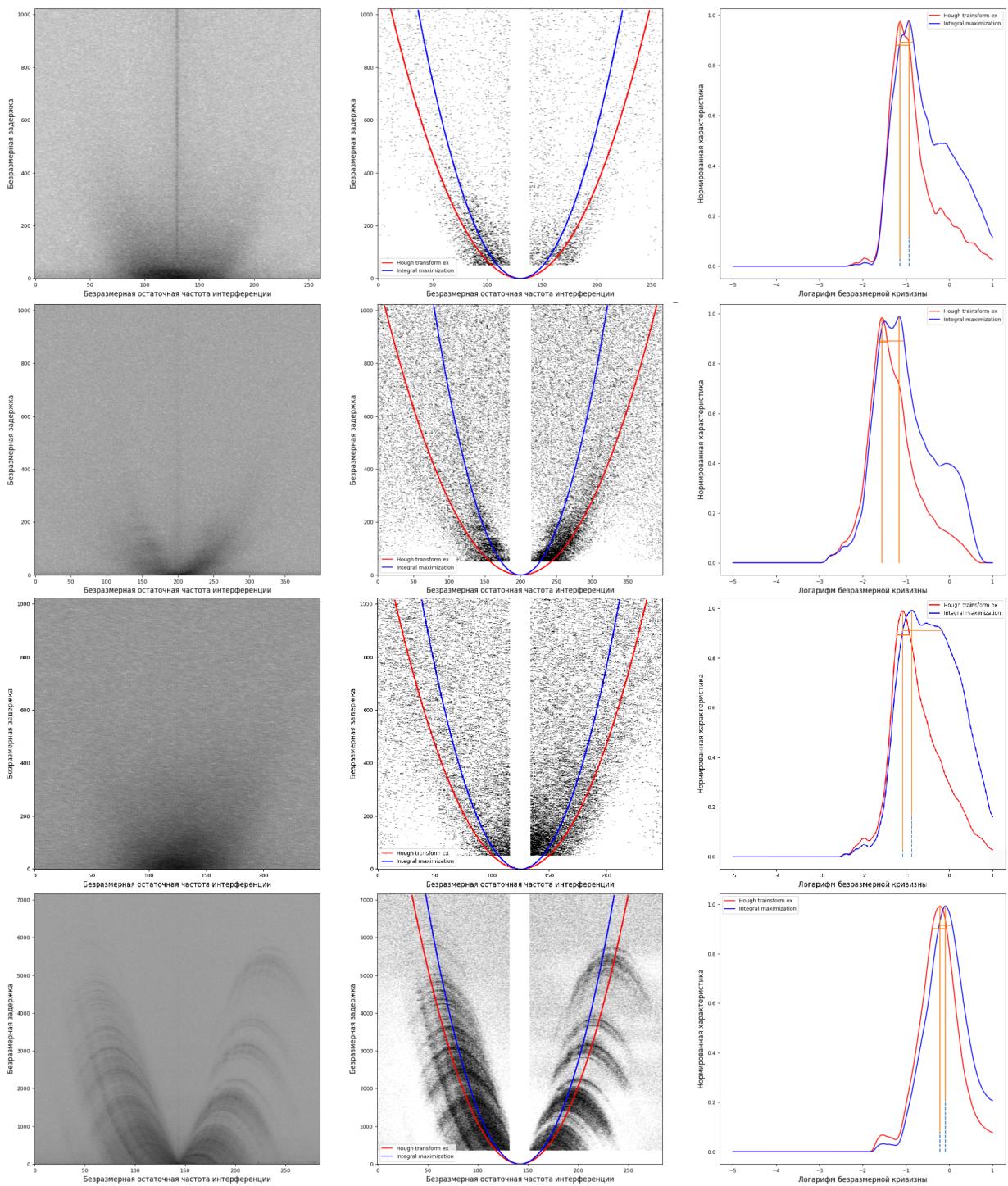


Рис. 16: В левой колонке исходные спектры, в средней бинаризованные методом Брэдли — Рота с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAKS24D B0919+06, во второй RAKS24E B1133+16, в третьей RAGS04AM B0919+06, в четвертой RAES06C B0834+06

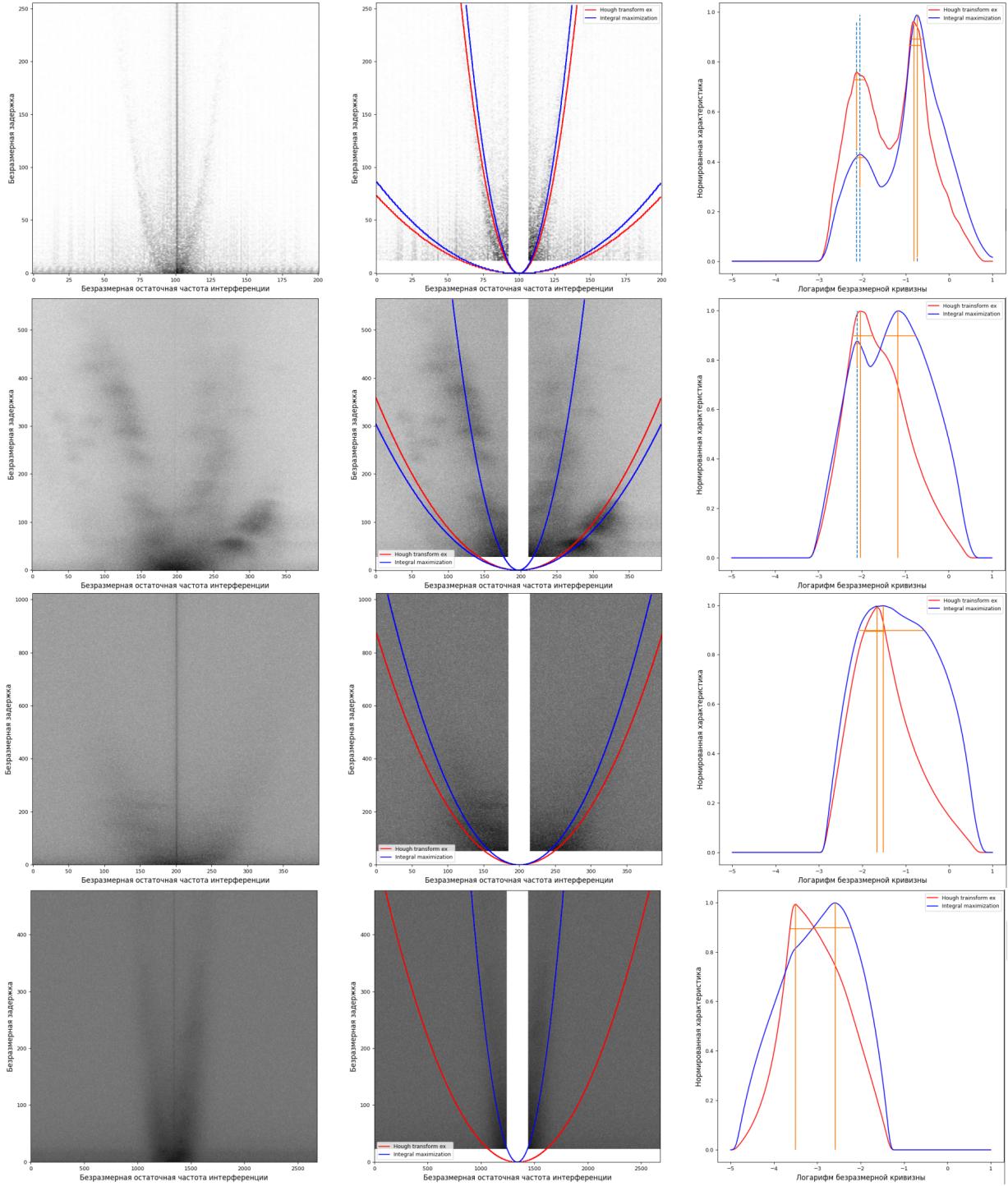


Рис. 17: В левой колонке исходные спектры, в средней исходные с обрезкой по осям с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAGS04AO B1929+10, во второй RAKS02AA B1933+16, в третьей RAGS29J B1237+25, в четвертой RAGS04AK B0823+26

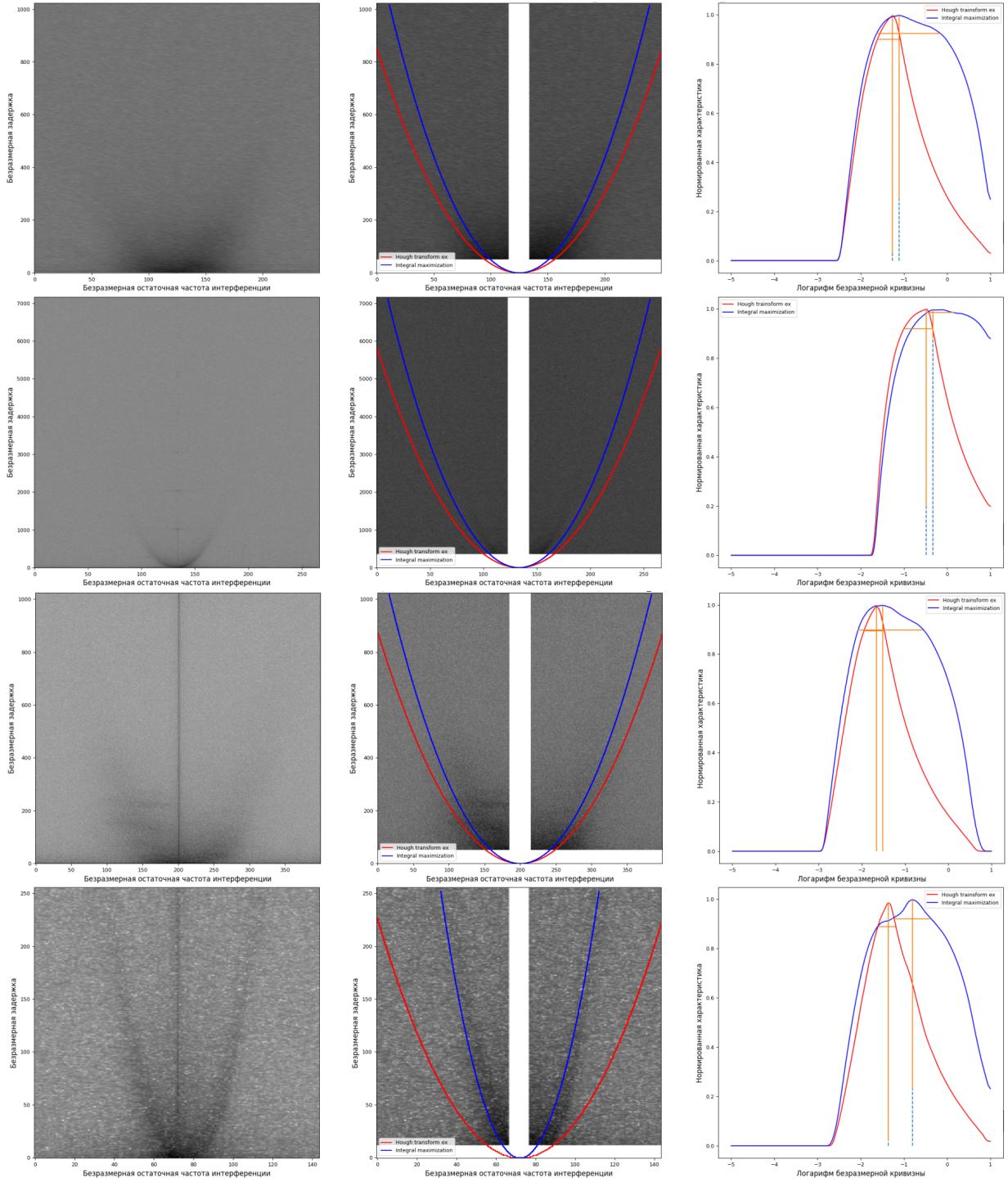


Рис. 18: В левой колонке исходные спектры, в средней исходные с обрезкой по осям с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAKS24A B0919+06, во второй RAGS04AH B0834+06, в третьей RAGS04AJ B0823+26, в четвертой RAGS04AO B1929+10 (дубликат)

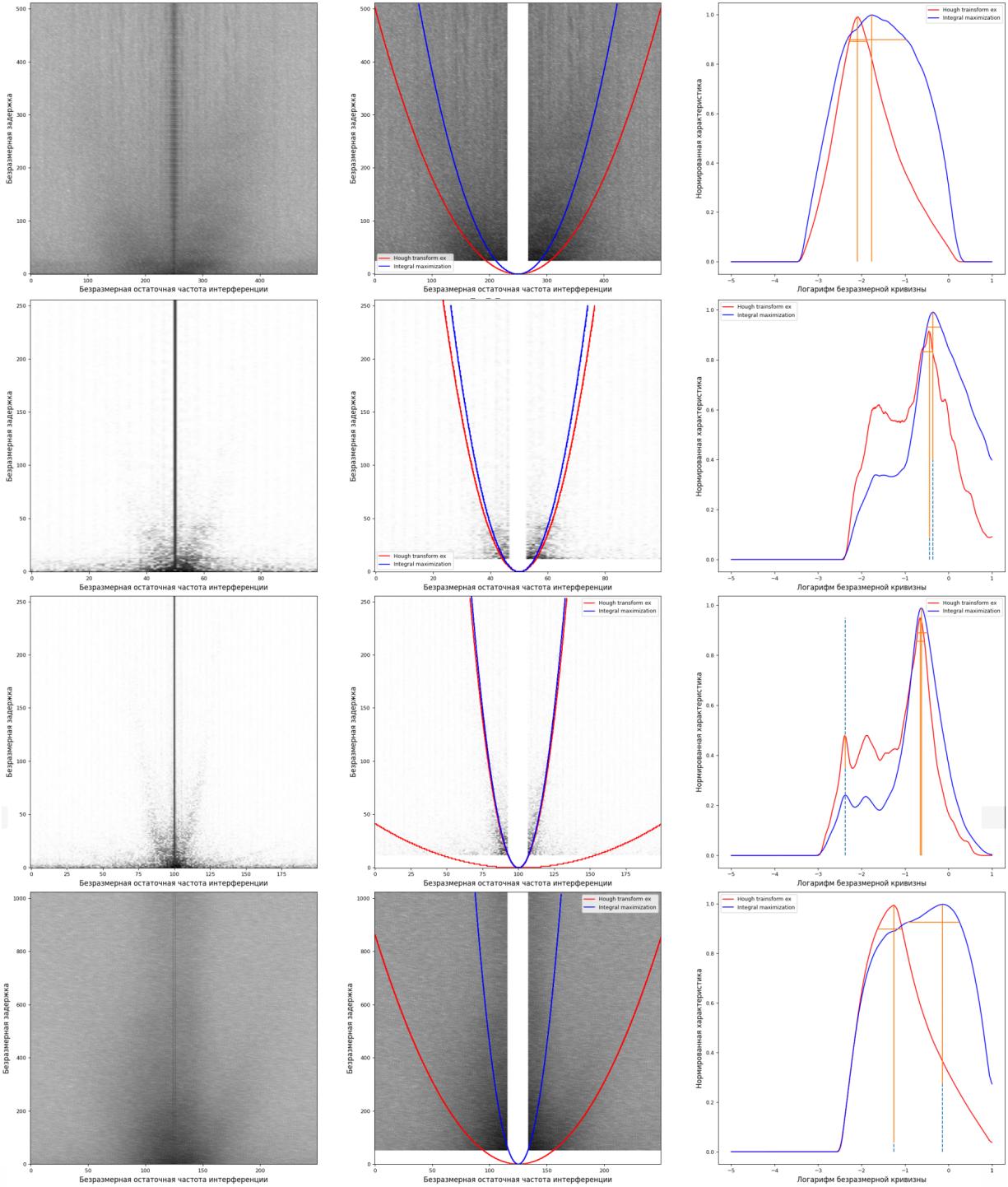


Рис. 19: В левой колонке исходные спектры, в средней исходные с обрезкой по осям с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAGS04AK B0823+26 (дубликат), во второй RAGS04AP B1237+25, в третьей RAGS04AR B1237+25, в четвертой RAGS29E B0919+06

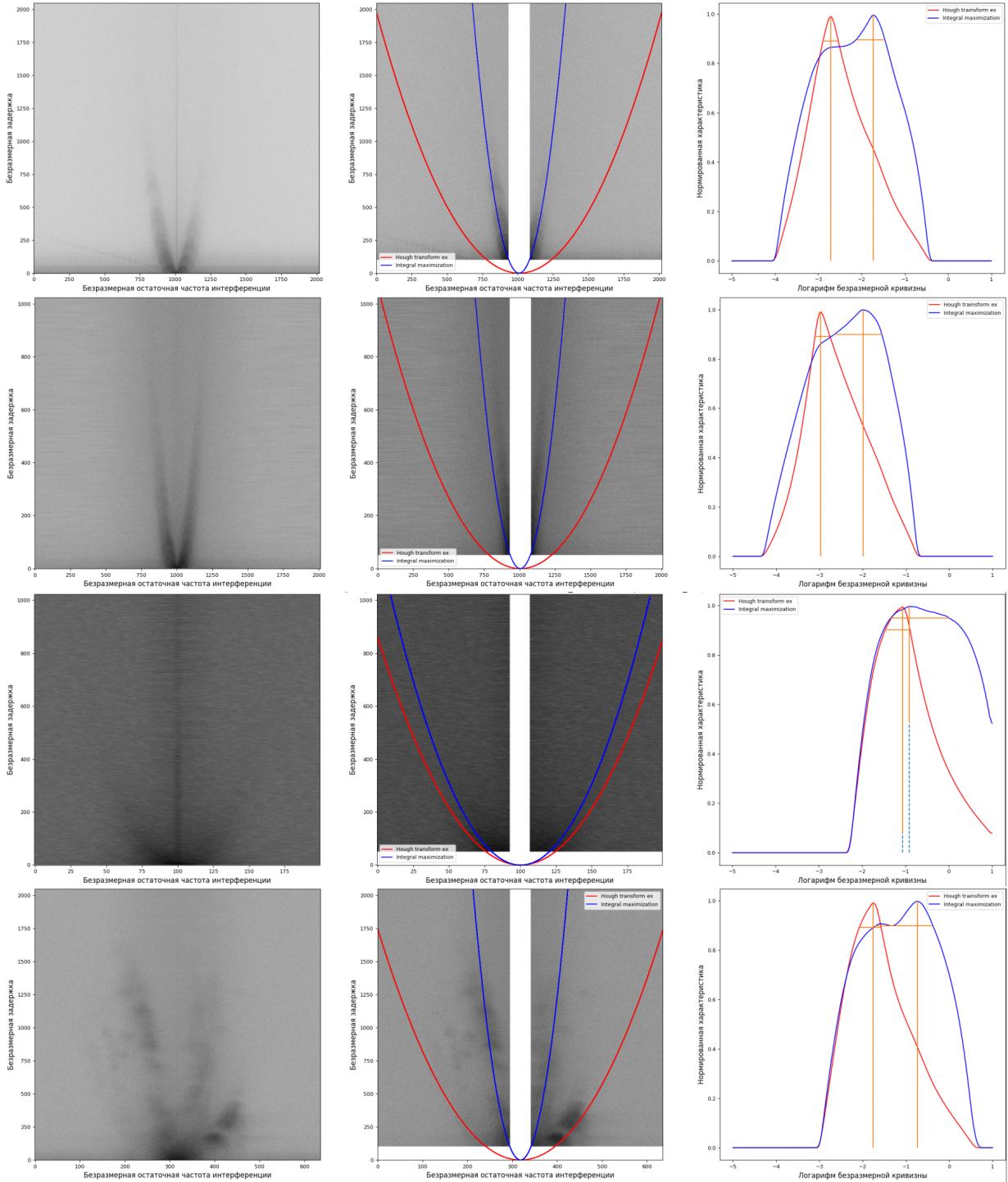


Рис. 20: В левой колонке исходные спектры, в средней исходные с обрезкой по осям с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAGS29G B1133+16, во второй RAGS29L B1133+16, в третьей RAGS29P B0919+06, в четвертой RAKS02AA B1933+16

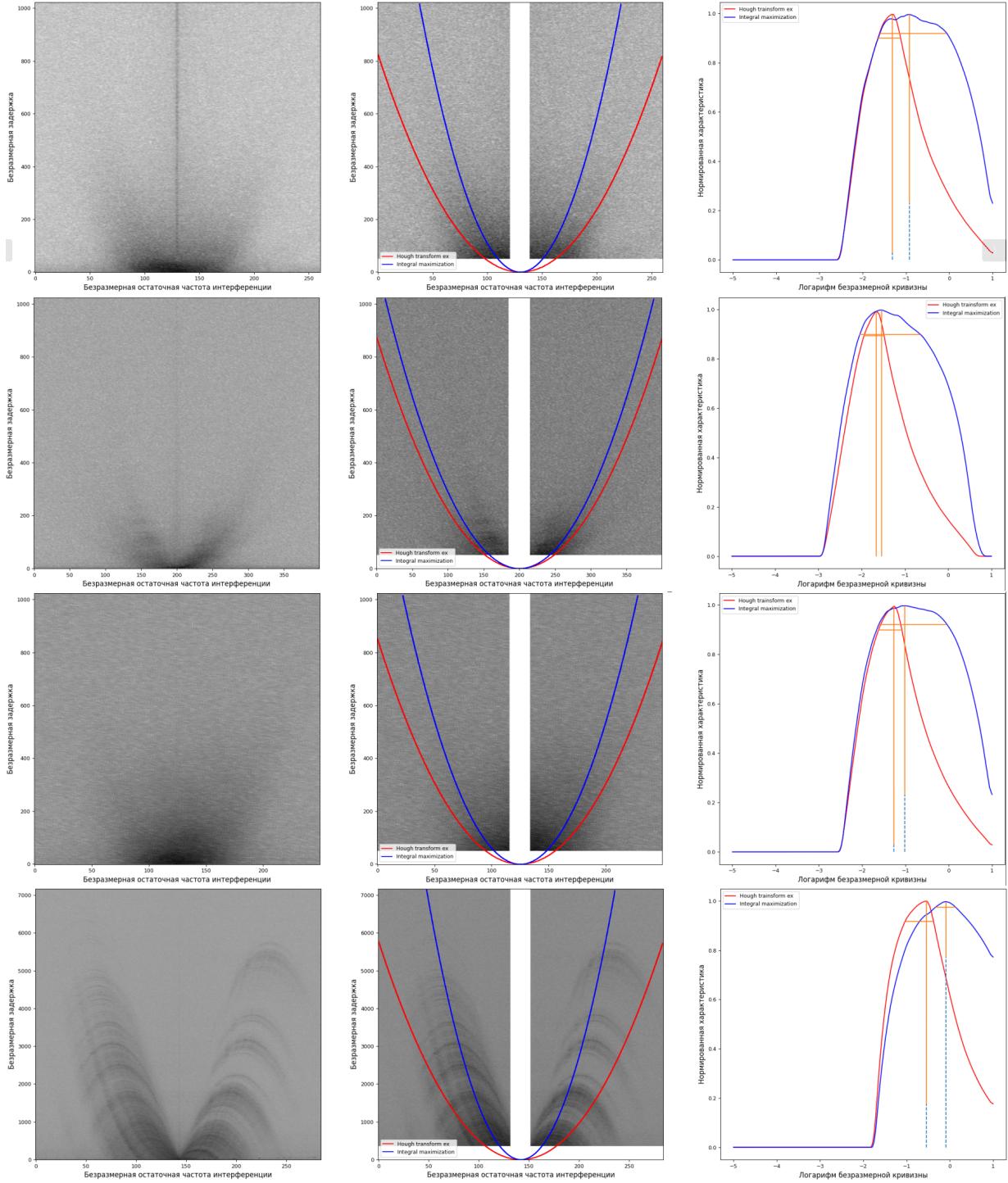


Рис. 21: В левой колонке исходные спектры, в средней исходные с обрезкой по осям с вписанными параболами (красным — по улучшенному преобразованию Хафа, синим — по суммированию вдоль дуги), в правой графики характеристик для двух методов. В первой строке эксперимент RAKS24D B0919+06, во второй RAKS24E B1133+16, в третьей RAGS04AM B0919+06, в четвертой RAES06C B0834+06

5 Заключение

В результате данной работы был проведен анализ теоретических основ образования параболических дуг во вторичных спектрах пульсаров, были исследованы и улучшены существующие методы поиска кривизны параболических дуг, а также по результатам вычислений было проведено их сравнение с опубликованными в научных статьях значениями.

В ходе работы сравнивались несколько методов бинаризации, лучший результат показал алгоритм локальной бинаризации Брэдли — Рота.

Для поиска дуг в спектрах исходные изображения проходили предобработку. Затем бинаризованные и исходные изображения обрабатывались двумя методами для поиска параболы: усовершенствованные преобразование Хафа и суммирования вдоль дуги. Усовершенствование заключается в нормировке характеристики метода на длину дуги вписываемой параболы.

В подавляющем большинстве случае результаты на бинаризованных изображениях показали правильное определение положения дуг и значительно меньшую погрешность ее определения. Однако в некоторых случаях алгоритмы находили несуществующие дуги дополнительно к действительным. Также рассчитанные алгоритмами значения на бинаризованных данных показали хорошую сходимость результатов друг с другом или по крайней мере они находили хотя бы одну действительную дугу на изображении, что в совокупности давало определение всех дуг. Для работы на исходных изображениях сходимость наблюдалась редко.

Результаты работы на бинаризованных изображениях близки с большинством опубликованных результатов анализа дуг на вторичных спектрах. Там, где опубликованных результатов нет, проверялась сходимость результатов методов между собой и визуальным анализом изображения.

Значительные отличия от опубликованных в работах наблюдаются на эксперимента RAGS04AK пульсара B0823+26 и одном из дубликатов RAKS02AA пульсара B1933+16. Скорее всего расхождения связаны с ошибками в определении масштаба файла вторичного спектра, поскольку методы сходятся между собой и для каждого метода между дубликатами кривизны отличаются в одно и то же количество раз.

6 Приложение

Ссылка на исходный код обработки и анализа: [ссылка](#)

Таблица 1: Справочная информация о наблюдениях исследуемых пульсаров

Код	Пульсар	T , с	f , МГц	Полоса Δf , МГц	Каналы	Время наблюдения, мин	Телескоп	Дата	Публикация
raes06c	B0834+06	1.27376833	324	16	65536	78	Аресибо	26/04/12	ссылка
rags04ah	B0834+06	1.273768291	324	16	65536	55.52	Грин-Бэнк	08/12/14	ссылка
rags04aj	B0823+26	0.530660512	324	16	2048	150	Грин-Бэнк	11/03/15	ссылка
rags04ak	B0823+26	0.530660512	324	16	1024	219	Грин-Бэнк	11/03/15	ссылка
rags04ao	B1929+10	0.22651764	324	16	512	100	Аресибо	05/05/15	ссылка
rags04ap	B1237+25	1.38244911	324	16	512	86.7	Грин-Бэнк	13/05/15	ссылка
rags04ar	B1237+25	1.38244911	324	16	512	86.7	Аресибо	07/06/15	ссылка
rags29e	B0919+06	0.4306271	324	16	2048	117	Аресибо	11/01/18	
rags29g	B1133+16	1.18791307	324	16	65536	119.92	Аресибо	03/02/18	
rags29j	B1237+25	1.382449103	324	16	512	119	Аресибо		
rags29l	B1133+16	1.187913066	324	16	2048	119.5	Аресибо	28/03/18	
rags29p	B0919+06	0.4306271	324	16	2048	87	Аресибо	10/05/18	
raks02aa	B1933+16	0.3587384	1668	32	2048	90	Аресибо	01/08/13	ссылка
raks24a	B0919+06	0.4306271	324	16	2048	115.7	Аресибо	16/11/18	
raks24d	B0919+06	0.4306271	324	16	2048	118	Аресибо	15/12/18	
raks24e	B1133+16	1.187913066	324	16	2048	118	Грин-Бэнк	17/12/18	

Таблица 2: Результаты обработки («Пр. Хафа», «Пр. Хафа (исх.)» — улучшенным преобразованием Хафа, «Сумма (исх.)» — суммированием вдоль дуги на бинаризованных и исходных данных соответственно; «Статьи» — результаты опубликованные в соответствующих статьях из столбца «Публикация»)

Код	Пуллсар	Дата	Пр. Хафа	Сумма	Пр. Хафа (исх.)	Сумма (исх.)	Статьи	Публикация
raks02aa	B1933+16	01/08/13	0.007 ^{+0.001} _{-0.001}	0.007 ^{+0.001} _{-0.001}	0.008 ^{+0.003} _{-0.008}	0.0072 ^{+0.0008} _{-0.0010}	0.0225 ^{+0.0009} _{-0.0009}	
raks02aa	B1933+16	01/08/13	0.05 ^{+0.01} _{-0.01}	0.06 ^{+0.01} _{-0.03}		0.06 ^{+0.03} _{-0.10}	0.216 ^{+0.004} _{-0.004}	ссылка
rags04ao	B1929+10	05/05/15	0.15 ^{+0.05} _{-0.06}	0.18 ^{+0.05} _{-0.11}	0.016 ^{+0.008} _{-0.008}	0.17 ^{+0.15} _{-0.21}	0.216 ^{+0.004} _{-0.004}	ссылка
rags04ao	B1929+10	05/05/15	0.43 ^{+0.12} _{-0.06}	0.40 ^{+0.07} _{-0.10}	0.016 ^{+0.002} _{-0.002}	0.019 ^{+0.004} _{-0.006}	0.39 ^{+0.03} _{-0.03}	ссылка
rags04ap	B1237+25	13/05/15	0.023 ^{+0.001} _{-0.001}	0.059 ^{+0.10} _{-0.12}	0.79 ^{+0.17} _{-0.32}	0.61 ^{+0.21} _{-0.12}	0.7 ^{+0.2} _{-0.4}	0.45 ^{+0.05} _{-0.05} ссылка
rags04ar	B1237+25	07/06/15	0.0068 ^{+0.0004} _{-0.0005}	0.0067 ^{+0.0007} _{-0.0010}	0.0070 ^{+0.0005} _{-0.0004}		0.42 ^{+0.02} _{-0.02}	
rags29j	B1237+25	26/02/18	0.011 ^{+0.005} _{-0.002}	0.0069 ^{+0.0009} _{-0.0009}	0.012 ^{+0.003} _{-0.008}	0.03 ^{+0.02} _{-0.41}	-	-
rags29g	B1133+16	03/02/18	0.0006 ^{+0.0001} _{-0.0002}	0.0006 ^{+0.0001} _{-0.0002}	0.006 ^{+0.002} _{-0.003}	0.06 ^{+0.04} _{-0.05}	-	-
rags29l	B1133+16	28/03/18	0.070 ^{+0.019} _{-0.017}	0.075 ^{+0.019} _{-0.017}	0.0034 ^{+0.0001} _{-0.0020}	0.03 ^{+0.03} _{-0.06}	-	-
rags24e	B1133+16	17/12/18	0.09 ^{+0.02} _{-0.03}	0.21 ^{+0.14} _{-0.06}	0.07 ^{+0.03} _{-0.04}	0.09 ^{+0.06} _{-0.63}	-	-
rags04lam	B0919+06	14/04/15	5.1 ^{+1.8} _{-2.1}	6.5 ^{+2.3} _{-3.9}	0.17 ^{+0.10} _{-0.09}	2.2 ^{+1.9} _{-3.3}	-	-
rags29e	B0919+06	11/01/18	0.22 ^{+0.06} _{-0.07}	0.28 ^{+0.04} _{-0.04}	0.14 ^{+0.09} _{-0.07}	0.2 ^{+0.1} _{-1.6}	-	-
rags29p	B0919+06	10/05/18	0.22 ^{+0.04} _{-0.15}	0.36 ^{+0.14} _{-0.10}	0.15 ^{+0.08} _{-0.08}	0.4 ^{+0.3} _{-2.3}	-	-
raks24a	B0919+06	16/11/18	0.29 ^{+0.18} _{-0.13}	0.5 ^{+0.2} _{-1.9}	0.19 ^{+0.11} _{-0.10}	0.3 ^{+0.3} _{-2.9}	-	-
raks24d	B0919+06	15/12/18	0.26 ^{+0.09} _{-0.09}	0.31 ^{+0.08} _{-0.17}	0.16 ^{+0.09} _{-0.08}	0.2 ^{+0.2} _{-1.9}	-	-
raes06c	B0834+06	26/04/12	0.8 ^{+0.3} _{-0.2}	1.1 ^{+0.3} _{-0.5}	0.4 ^{+0.3} _{-0.2}	1.10479 ^{+0.16940} _{-0.73811}	0.56 ^{+0.02} _{-0.02}	ссылка
rags04ah	B0834+06	08/12/14	0.23 ^{+0.13} _{-0.10}	0.58 ^{+0.07} _{-0.11}	0.23 ^{+0.16} _{-0.09}	0.33 ^{+0.09} _{-0.66}	0.57 ^{+0.03} _{-0.03}	ссылка
rags04aj	B0823+26	11/03/15	0.16 ^{+0.03} _{-0.07}	0.21 ^{+0.07} _{-0.08}	0.11 ^{+0.05} _{-0.06}	0.2 ^{+0.1} _{-1.2}	0.22 ^{+0.03} _{-0.03}	ссылка
rags04ak	B0823+26	11/03/15	0.17 ^{+0.04} _{-0.04}	0.18 ^{+0.05} _{-0.07}	0.09 ^{+0.03} _{-0.06}	0.2 ^{+0.1} _{-1.0}	0.28 ^{+0.02} _{-0.02}	ссылка
rags04ak	B0823+26	11/03/15	0.0032 ^{+0.0007} _{-0.0050}	0.04 ^{+0.02} _{-0.01}	0.0030 ^{+0.009} _{-0.0060}	0.03 ^{+0.02} _{-0.04}	0.28 ^{+0.02} _{-0.02}	ссылка

Список литературы

- N. D. R. Bhat, S. M. Ord, S. E. Tremblay, S. J. McSweeney, and S. J. Tingay. Scintillation arcs in low-frequency observations of the timing-array millisecond pulsar psr j0437–4715. *The Astrophysical Journal*, 818(1):86, Feb. 2016. ISSN 1538-4357. doi: 10.3847/0004-637X/818/1/86. URL <http://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/818/1/86>.
- D. Bradley and G. R. and. Adaptive thresholding using the integral image. *Journal of Graphics Tools*, 12(2):13–21, 2007. doi: 10.1080/2151237X.2007.10129236. URL <https://doi.org/10.1080/2151237X.2007.10129236>.
- W. F. Brisken, J. P. Macquart, J. J. Gao, B. J. Rickett, W. A. Coles, A. T. Deller, S. J. Tingay, and C. J. West. 100 μ as Resolution VLBI Imaging of Anisotropic Interstellar Scattering Toward Pulsar B0834+06. , 708(1):232–243, Jan. 2010. doi: 10.1088/0004-637X/708/1/232.
- J. M. Cordes, B. J. Rickett, D. R. Stinebring, and W. A. Coles. Theory of Parabolic Arcs in Interstellar Scintillation Spectra. , 637(1):346–365, jan 2006a. doi: 10.1086/498332.
- J. M. Cordes, B. J. Rickett, D. R. Stinebring, and W. A. Coles. Theory of Parabolic Arcs in Interstellar Scintillation Spectra. , 637(1):346–365, Jan. 2006b. doi: 10.1086/498332.
- E. N. Fadeev, A. S. Andrianov, M. S. Burgin, M. V. Popov, A. G. Rudnitskiy, V. I. Shishov, T. V. Smirnova, and V. A. Zuga. Revealing compact structures of interstellar plasma in the galaxy with radioastron. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 480(3):4199–4210, Aug. 2018. ISSN 1365-2966. doi: 10.1093/mnras/sty2055. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty2055>.
- A. S. Hill, D. R. Stinebring, C. T. Asplund, D. E. Berwick, W. B. Everett, and N. R. Hinkel. Deflection of Pulsar Signal Reveals Compact Structures in the Galaxy. , 619(2):L171–L174, Feb. 2005. doi: 10.1086/428347.
- P. V. C. Hough. Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures. *Conf. Proc. C*, 590914:554–558, 1959.
- N. S. Kardashev, A. V. Alakoz, A. S. Andrianov, M. I. Artyukhov, W. Baan, V. E. Babyshkin, N. Bartel, O. S. Bayandina, I. E. Val'tts, P. A. Voitsik, A. Z. Vorobyov, C. Gwinn, J. L. Gomez, G. Giovannini, D. Jauncey, M. Johnson,

H. Imai, Y. Y. Kovalev, S. E. Kurtz, M. M. Lisakov, A. P. Lobanov, V. A. Molodtsov, B. S. Novikov, A. V. Pogodin, M. V. Popov, A. S. Privesenzev, A. G. Rudnitski, G. M. Rudnitski, T. Savolainen, T. V. Smirnova, A. M. Sobolev, V. A. Soglasnov, K. V. Sokolovsky, E. N. Filippova, V. V. Khartov, M. E. Churikova, A. E. Shirshakov, V. I. Shishov, and P. Edwards. RadioAstron Science Program Five Years after Launch: Main Science Results. *Solar System Research*, 51(7):535–554, Dec. 2017. doi: 10.1134/S0038094617070085.

W. Niblack. An introduction to digital image processing. 1986. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:60929037>.

N. Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 9(1):62–66, January 1979. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/tsmc/tsmc9.html#Otsu79>.

U.-L. Pen and Y. Levin. Pulsar scintillations from corrugated reconnection sheets in the interstellar medium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 442(4):3338–3346, June 2014. ISSN 0035-8711. doi: 10.1093/mnras/stu1020. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stu1020>.

M. L. Putney and D. R. Stinebring. Multiple scintillation arcs in six pulsars. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 6(S2):233, oct 2006. doi: 10.1088/1009-9271/6/S2/43. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1009-9271/6/S2/43>.

B. J. Rickett. Interstellar scattering and scintillation of radio waves. , 15:479–504, Jan. 1977. doi: 10.1146/annurev.aa.15.090177.002403.

B. J. Rickett, D. R. Stinebring, H. Zhu, and A. H. Minter. Scintillation Arcs in Pulsar B0450-18. , 907(1):49, Jan. 2021. doi: 10.3847/1538-4357/abc9bc.

J. Sauvola and M. Pietikäinen. Adaptive document image binarization. *Pattern Recognition*, 33(2):225–236, Jan. 2000. doi: 10.1016/S0031-3203(99)00055-2.

P. A. G. Scheuer. Amplitude Variations in Pulsed Radio Sources. , 218(5145):920–922, June 1968. doi: 10.1038/218920a0.

T. Sprenger, O. Wucknitz, R. Main, D. Baker, and W. Brisken. The θ - θ diagram: transforming pulsar scintillation spectra to coordinates on highly anisotropic interstellar scattering screens. *Monthly Notices of the Royal Astronomical*

Society, 500(1):1114–1124, Oct. 2020. ISSN 1365-2966. doi: 10.1093/mnras/staa3353. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa3353>.

D. R. Stinebring, M. A. McLaughlin, J. M. Cordes, K. M. Becker, J. E. E. Goodman, M. A. Kramer, J. L. Sheckard, and C. T. Smith. Faint scattering around pulsars: Probing the interstellar medium on solar system size scales. *The Astrophysical Journal*, 549(1):L97–L100, Mar. 2001. ISSN 0004-637X. doi: 10.1086/319133. URL <http://dx.doi.org/10.1086/319133>.

F. S. Trang and B. J. Rickett. Modeling of Interstellar Scintillation Arcs from Pulsar B1133+16. , 661(2):1064–1072, June 2007. doi: 10.1086/516706.

K. Walker, D. J. Reardon, E. Thrane, and R. Smith. Orbital dynamics and extreme scattering event properties from long-term scintillation observations of psr j1603-7202. *The Astrophysical Journal*, 933(1):16, jun 2022. doi: 10.3847/1538-4357/ac69c6. URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac69c6>.

M. A. Walker, D. B. Melrose, D. R. Stinebring, and C. M. Zhang. Interpretation of parabolic arcs in pulsar secondary spectra. , 354(1):43–54, oct 2004. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.08159.x.

Фадеев. *Распределение неоднородностей межзвездной плазмы в направлении пульсаров по данным наземно-космического интерферометра «Радиоастрон»*. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ П. Н. ЛЕБЕДЕВА АСТРОКОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР, Москва, 2022.