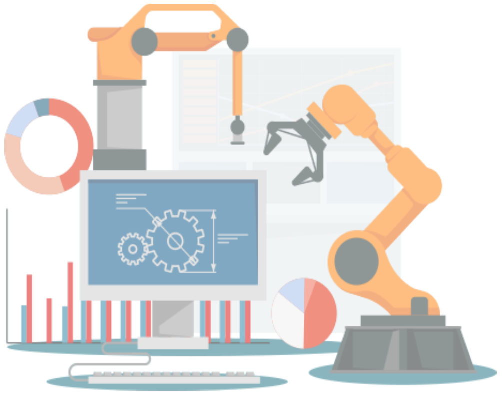
금융공학 전통적인 주요 이론 소개



1. 들어가기에 앞서

◆ 비현실적 가정

자본자산 가격결정 모형은 많은 **비현실적 가정에 기반**한다. 예를 들어 투자자가 단일 기간 동안 포트폴리오 수익의 평균과 분산에만 신경 쓴다는 가정은 극단적이다.

- 유진 파마Eugene Fama와 케네스 프렌치Keneth French (2004)

1. 들어가기에 앞서

◆ 저항

인간을 단순한 분자로 생각하는 과학은 우아한 수학보다 더 저항이 크다는 것이 밝혀졌다.

- 알론 할레바Alon Halevy (2009)

2. 불확실성, 리스크, 거래자산 금융 모델링

◆ 불확실성과 리스크

- ✓ 금융이론의 핵심 : 불확실성과 리스크의 존재
- ✓ 정의
  - ▪ 오늘($t = 0$)과 1년 후($t = 1$) 두 시점에서 관찰된 어떤 경제적 행위가 있다고 가정
    - • $t = 0$: 불확실성 없음
    - • $t = 1$: 경제 상황이 유한개의 가능한 상태
  - ▪ 위 개념에서 다양한 확률 공간probability space가 발생할 수 있음
- ✓ 경제가 완벽하다는 것의 정의
  - ▪ 거래비용이 없고, 모든 자산의 가격은 고정
  - ▪ 자산의 수량이 무한대
  - ▪ 모든 일이 빛의 속도로 발생

2. 불확실성, 리스크, 거래자산 금융 모델링

◆ 거래자산과 차익거래 예제

✓ 두 개의 자산이 있다고 가정 (위험 자산 : 주식, 무위험 자산 : 채권)

- 주식 : 오늘의 주식 가격은 10, 내일의 주가는 불확실성 존재
- 채권 : 오늘의 채권 가격은 10, 내일의 채권 가격은 11

✓ 수학적으로 이 경제에 대한 모델 M^2 이라고 하면 정의는 다음과 같음

$$M^2 = (\{\Omega, F, P\}, A)$$

- Ω : 표본 공간, 모든 가능한 공간
- F : 시그마 대수, 특정 시점까지 알려진 정보 의미
- P : 확률 측도 의미
- A : 거래 가능한 자산을 가격 행렬 형태로 표시 (오늘의 자산, 내일의 자산 등)

2. 불확실성, 리스크, 거래자산 금융 모델링

◆ 기대효용 이론Expected Utility Theory

- ✓ 금융 이론의 초석
- ✓ 불확실성 하에서 선택에 직면했을 때 투자자의 선호에 관한 주요 공리에 근거
- ✓ 투자자의 선호도의 개념
  - ▪ 투자자의 선호도는 현재의 포트폴리오(A)가 아닌 미래의 페이오프(B)에 대해 정의
    - 완전성(completeness)
    - 이행성(transitivity)
    - 연속성(continuity)
    - 독립성(independence)
    - 지배성(dominance)

2. 불확실성, 리스크, 거래자산 금융 모델링

◆ 기대효용 이론Expected Utility Theory

✓ 효용함수 : 투자자의 선호도를 특정 페이오프에 대해 숫자 할당, 수치적으로 표현

$$U: X \rightarrow R_{+}, x \mapsto \mathrm{U(x)}$$

- $A > B \Rightarrow U(A) > U(B)$: 강한 선호
- $A \geq B \Rightarrow U(A) \geq U(B)$: 약한 선호
- $A < B \Rightarrow U(A) < U(B)$: 강한 비선호
- $A \leq B \Rightarrow U(A) \leq U(B)$: 약한 비선호
- $A \sim B \Rightarrow U(A) = U(B)$: 무차별

2. 불확실성, 리스크, 거래자산 금융 모델링

◆ 기대효용 이론Expected Utility Theory

- ✓ 기대효용함수 : 5개 공리를 만족하면 기대효용함수 존재

$$U: X \to R_+, x \mapsto E^p\big(u(x)\big) = \sum_{\omega}^{\Omega} P(\omega)u(x(\omega))$$

  - $U: X \to R, x \mapsto \mathrm{u(x)}$: 단조 증가, 상태 독립인 함수로 베르누이 효용함수라고 불림

2. 불확실성, 리스크, 거래자산 금융 모델링

◆ 절대 리스크 회피Absolute Risk Aversion

✓ 투자자의 상태 독립 베르누이 효용함수 $u(x)$가 있을 때, 프랫 측도는 다음과 같이 정의

- $ARA(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0, x \geq 0$

✓ 세 가지 경우가 가능함

- $ARA(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$
  - 양수인 경우, 리스크 회피
  - 0인 경우, 리스크 중립
  - 음수인 경우, 리스크 선호

✓ 수치 예제

3. 평균-분산 포트폴리오

- (1952) 주식 투자 포트폴리오 구축에 초점을 맞춘 불확실성의 투자 이론 중 하나
  - ✓ 기업의 성장 전망에 중요한 기업의 미래 경쟁력에 대한 가정이나 재고 실적 정보 불필요
  - ✓ 기본적입 입력 데이터는 주가와 그에 따른 통계 같은 시계열 데이터
  - ✓ 핵심 가정
    - 마코위츠 : 투자자들이 기대수익과 수익률의 분산에만 관심을 둠
    - 투자 포트폴리오가 가져올 것으로 예상되는 수익의 1차/2차 모멘트
    - 에이전트의 선호도와 효용함수 정의

3. 평균-분산 포트폴리오

◆ 포트폴리오 통계

✓ 정적인 경제 모델 $M^N = (\{\Omega, F, P\}, A)$

- A는 N개의 거래 가능한 자산 $A^1, A^2, \dots, A^N$의 집합
  - A^N은 자산 A^N의 오늘 가격
  - A_1^n은 n번째 자산 A^N의 1년 후 가격
- 자산 A^N의 수익률 벡터 r^n은 다음과 같이 정의

$$r^n = \frac{A_1^n}{A_0^n} - 1$$

- 모든 미래의 상태가 같은 확률을 가지는 경우 n번째 자산의 기대 수익률

$$\mu^n = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega}^{\Omega} r^n(\omega)$$

3. 평균-분산 포트폴리오

◆ 포트폴리오 통계

- ✓ 포트폴리오의 기대 수익률 (가중치 벡터와 포트폴리오 기대 수익률 벡터의 곱)
  - 포트폴리오 벡터는 각 자산에 대해 가중치를 준 값

$$\mu^{phi} = \varphi \times \mu$$

- ✓ 포트폴리오의 분산

$$\varphi^{phi} = \varphi^{T} \times \Sigma \times \varphi$$

- ✓ 포트폴리보의 변동성

$$\sigma^{phi} = \sqrt{\varphi^{phi}}$$

3. 평균-분산 포트폴리오

◆ 샤프 비율

- ✓ (1966) 펀드나 다른 포트폴리오 혹은 단일자산에 대해 위험 조정 성능 측정
- ✓ 포트폴리오의 수익률을 변동성으로 나눈 값

$$\pi^{phi} = \frac{\mu^{phi}}{\sigma^{phi}}$$

- ✓ 무위험 이자율 r을 고려할 시, 초과 수익률은 μ^{phi}는 수익률에서 무위험 이자율 r을 뺀 값

$$\pi^{phi} = \frac{\mu^{phi} - r}{\sigma^{phi}}$$

4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

✓ 널리 사용되는 시장 포트폴리오간의 선형 관계를 정의

✓ 평균-분산 포트폴리오의 차별점

- 실제로 어떻게 행동하는지에 대한 가설을 세움

✓ 균형 모델equilibrium model

- 개별 주식의 관련 위험을 평가할 수 있고, 리스크와 기대수익률 간의 관계 평가

4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

✓ 정적인 경제 모델 $M^N = (\{\Omega, F, P\}, A)$

✓ 투자자는 위험 자산의 단일 기간 동안 수익률과 리스크에만 관심을 둠

✓ 자본시장이 균형을 이룰 때, 자본시장균형을 이루는 매커니즘 ⇒ 수요와 공급

- 평균-분산 포트폴리오 : 주어진 자산의 가격이 주어져 있다고 가정
- CAPM : 자산의 리스크-수익률 특성 고려, 자산의 평형가격이 얼마가 되어야 하는지에 대한 이론

4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

✓ 위험자산($n = 1, 2, \dots, N$)에 대해 기대수익률과 시장 포트폴리오 기대 수익률에 관한 관계

$$\mu^n = \bar{r} + \beta_n(\mu_M - \bar{r})$$

- β_n은 n 번째 위험 자산과 시장 포트폴리오의 공분산을 시장 포트폴리오의 분산으로 나눈 값

$$\beta_n = \frac{\sigma_{M,n}}{\sigma_M^2}$$

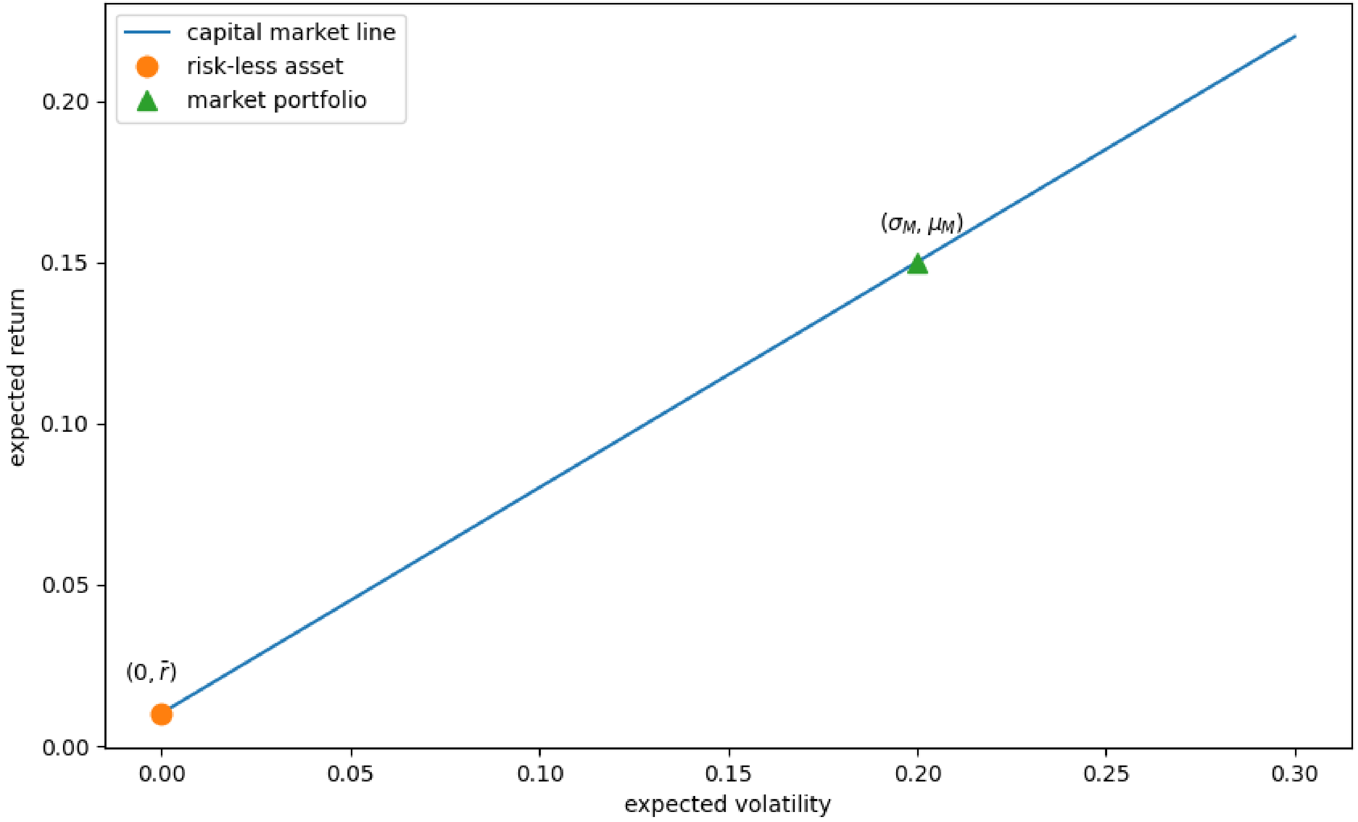
- $\beta_n = 0$ 일 때, 해당 자산의 수익률은 무위험 수익률이 됨

✓ 시장 리스크가 더 높은 기대 수익률을 보상받을 수 있는 유일한 리스크

4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

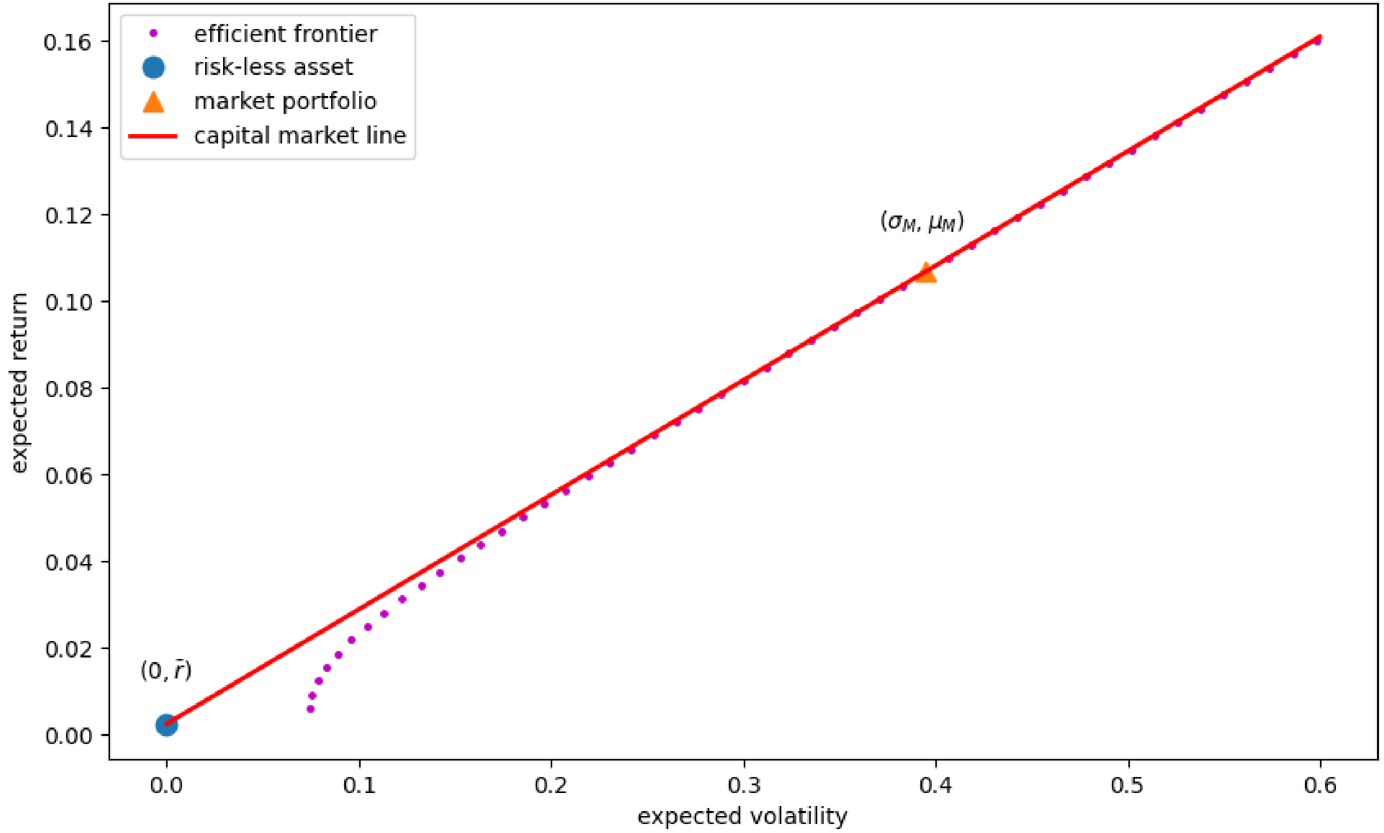
✓ 자본시장선 실습



4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

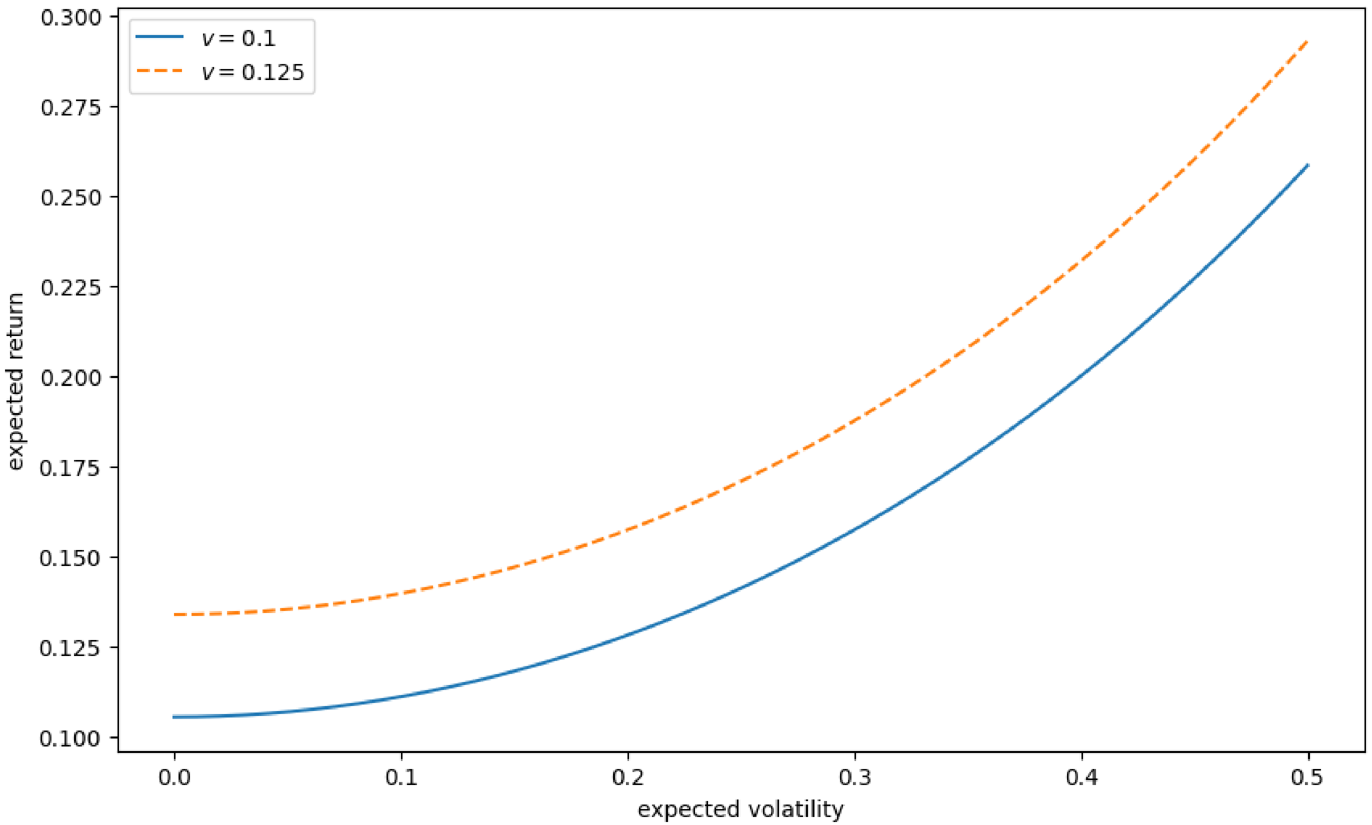
✓ 두개의 위험 자산이 있는 경우의 자본시장선 실습



4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

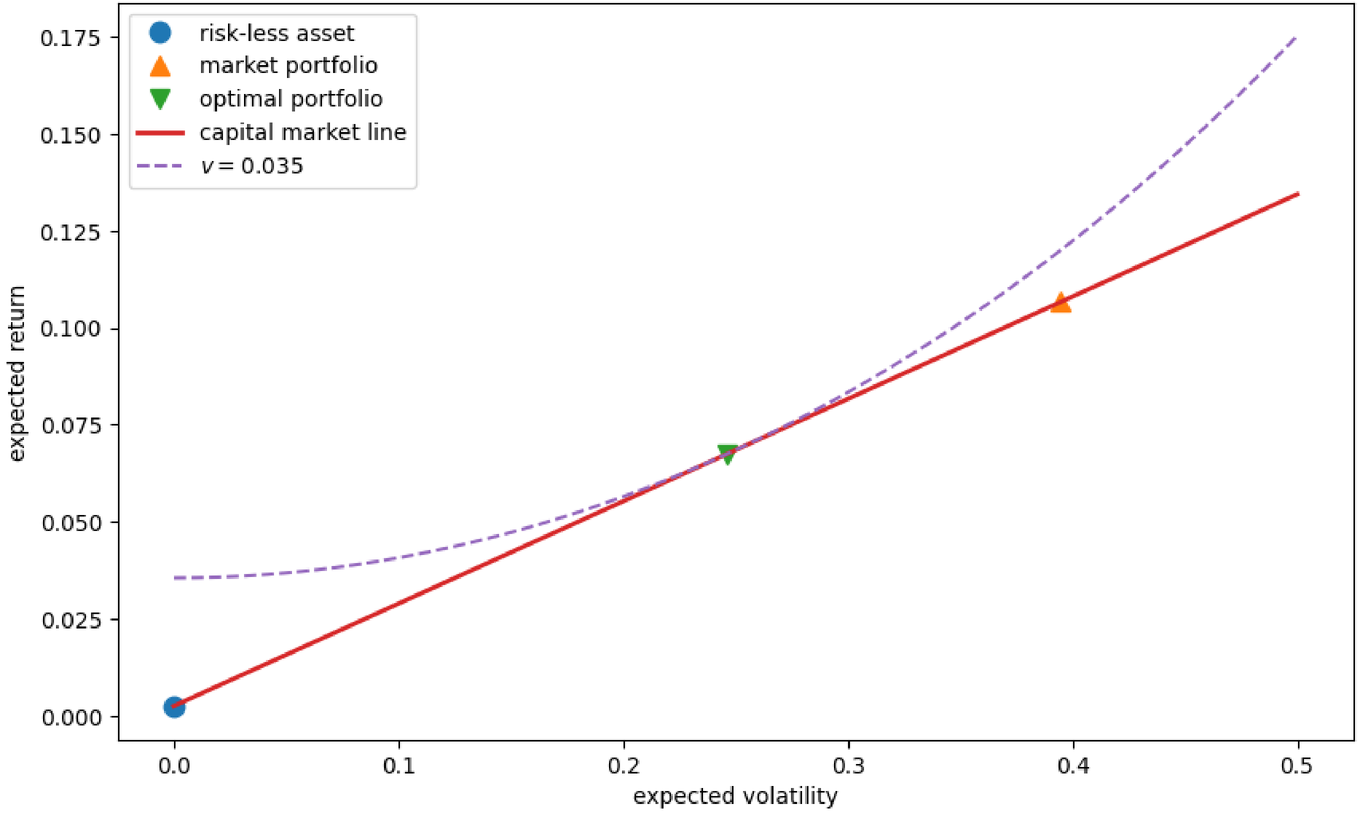
✓ 리스크-수익률 공간에서의 무차별 곡선 실습



4. 자본자산 가격결정 모형

◆ 자본자산 가격결정 모형CAPM: Capital Asset Pricing Model

✓ 자본시장선에 대한 최적 포트폴리오 실습



5. 차익거래 가격결정 이론

◆ 차익거래 가격결정 이론APT: Arbitrage Pricing Theory

✓ 기존 자본자산 가격결정 모형의 단점을 개선

- CAPM은 시장 포트폴리오를 유일한 리스크로 가정

✓ 여러 유형의 리스크가 한데 모여서 주식의 성능(기대 수익률)을 이끌어낸다고 가정

- 사이즈, 변동성, 밸류, 모멘텀 등

✓ 주요 가정 : 시장이 완벽하고, 동일한 고정금리로 (무제한) 대출이 가능함

✓ 모델 수식 (최소자승 회귀와 유사)

$$y_t = a + Bf_t + \varepsilon_t$$

- y_t는 M개의 관측 가능한 변수의 벡터
- f_t는 시각 t에서의 F개 요인의 벡터
- B는 요인적재량
- ε_t는 잔차항 벡터