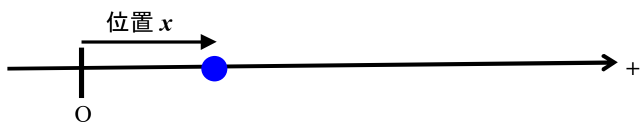
1. 質点の運動

物体は一般に，大きさと質量を持っている。ここでは，物体の運動について理想化して扱うため，大きさを無視し，物体の質量は空間のある1点に集中しているもの，すなわち物体を**質点**として扱う.

「質点が運動する」こととは，「時間が経過するとともに，質点の位置が変化する現象」を指す．ここでは，始めに直線(1次元の)運動，次に曲線(2次元，3次元の)運動に対して，質点の運動の性質を表す物理量について導入する.

1-1.　直線運動する質点の位置(position)

直線上のある地点を原点Oに選び，原点Oの右向きを正の向きと定め，向き(正か負)と原点からの距離によって，質点の位置(position) x を定める．位置の単位は距離の単位と同じで，m(メートル), cm(センチメートル), km(キロメートル)などがある．下の図のように，数直線(1次元)の正となる向きに矢印を引いて，正の向きを表す.



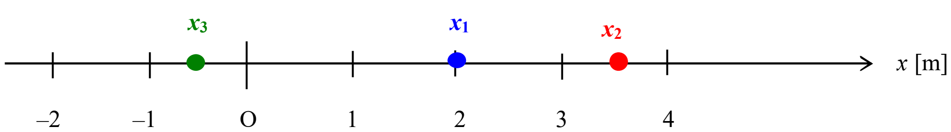
位置 $= x$ [m]　　　　(1-1-1)

* 物理量の表し方

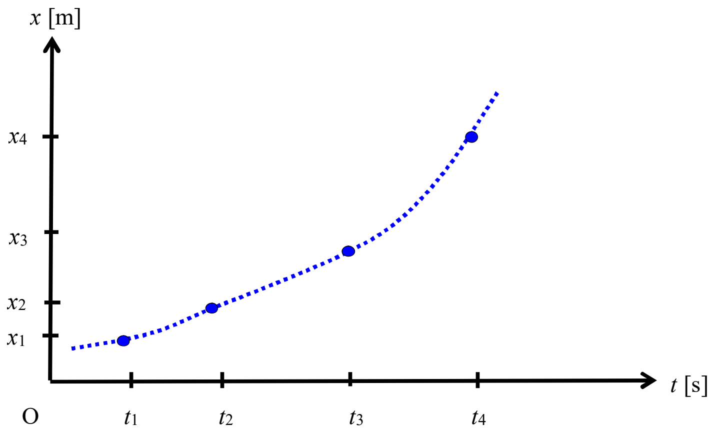
物理量を表す記号は，半角のアルファベットやギリシャ文字の斜体(イタリック体)を用いる(フォントは，「Times New Roman」か「Century」を使う)ことが多い．例えば，位置は「x」，時刻は「t」で表す．同じ物理量が複数個ある場合は，添え字を用いて，「x_1」，「x_2」，… などと表す．物理量を表す際，その物理量に付随した単位を表したい場合はかっこを用いてその単位を表す(単位は斜体でなく立体文字を使う)．例えば，単位として，メートル(m)で測定された位置は「x [m]」，または，「x (m)」とあらわす．ここでは，単位を表すかっことして「 [ ] 」を用いることにする(斜体文字とかっこの間は1文字分あける)．また，測定された物理量を数値で表す場合は，単位はかっこをつけないで表す．例えば，「位置　$x = 2.5$ m 」のように「物理量 = 数値　単位」と表す(数値と単位の間は空白を 1 文字分あける).

また，この Text では，有効数字に対して，厳密な取り扱いは行わないものとして記述する.

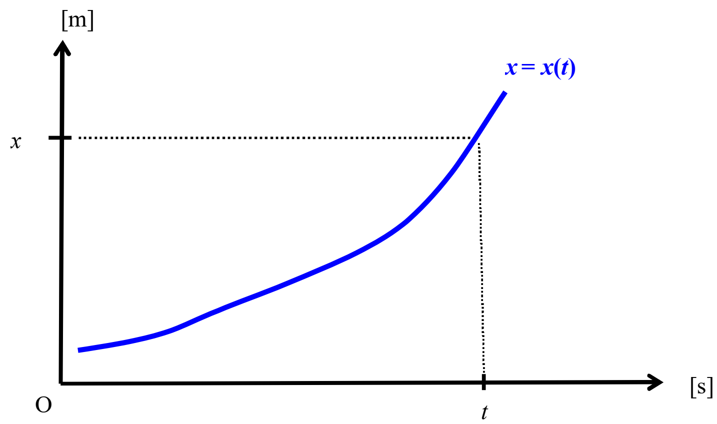
問題　1-1　下の図において，数直線上にある質点の位置 x_1, x_2, x_3 を求めよ.



「質点が運動している」ということは，時刻 t が経過すると，その位置 x が変化する現象をさす．例えば，時刻 t_1 で位置 x_1 にあった質点が時刻 t_2 では位置 x_2 に，さらに，時刻 t_3 では位置 x_3 に，．．．と移動したとしよう．この運動のデータに対して，横軸を時刻 t [s]，縦軸を位置 x [m]としてプロットした x-t グラフを下の図に示す(ここでは，点線はプロット点を滑らかに結んだ曲線とした)．



さらに，質点の位置を観測する時刻をほぼ連続にとり，プロットしたデータ点を滑らかに結ぶと，数学的には質点の位置 x は時刻 t の関数となり，その関係を「$x = x(t)$」と表すことができる．この場合は下の図のように，x-t グラフは連続的な曲線のグラフとなる．



・ 変位

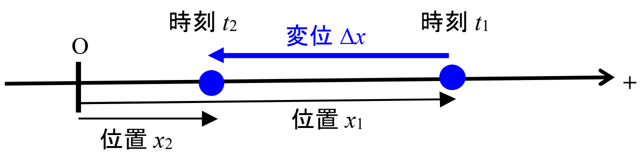
質点が運動しているので，質点の位置は時刻とともに変化する．例えば，時刻 t_1 で位置 x_1 にあった質点が時刻 t_2 では位置 x_2 に移動したとしよう．2 つの時刻の間の経過時刻(時間)Δt は，下の式のように表すことができる．

$$\Delta t = \text{終わりの時刻} - \text{始めの時刻} = t_2 - t_1 \tag{1-1-2}$$

また，移動に際し，変位(位置の変化) Δx は時間と同様に，下の式のように表す[1].

$$\Delta x = \text{終わりの位置} - \text{始めの位置} = x_2 - x_1 \tag{1-1-3}$$

数直線上で位置を表す場合は，下の図のように変位 Δx は，向き(正か負)と変位の大きさ(移動距離)で表すことができる．変位の大きさ$|\Delta x|$は変位 Δx の絶対値をとることで求めることができる[2].



$$|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x)^2} \tag{1-1-4}$$

問題 1-2 ある質点が時刻 $t_1 = 3.0$ s で位置 $x_1 = 6.0$ m にあり，その後，時刻 $t_2 = 3.5$ s では位置 $x_2 = 4.0$ m に達した．この間の移動に要した時間 Δt，変位 Δx，移動距離$|\Delta x|$を求めよ．

1-2. 直線運動する質点の速度(velocity)

質点の運動の性質を表す物理量の1つとして，速度(velocity) v を導入する．速度vを，「単位時間(例えば，1 秒や1時間など･･)当たりの変位」とする．

ある質点が，時刻t_1で位置x_1にあり，その後，時刻t_2では位置x_2に移動したとする．この間の移動に要した時間Δtと変位Δxを用いて，速度vは下の式で与えられる．

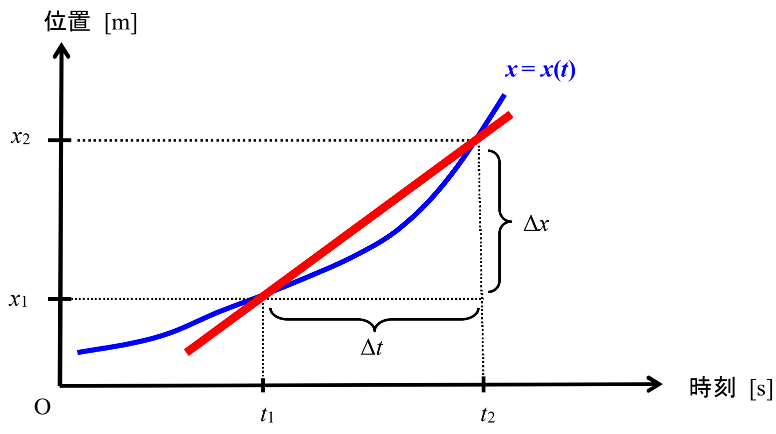
$$v = \frac{\text{移動による変位}}{\text{移動に要した時間}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1-2-1}$$

時刻tを横軸に，位置xを縦軸にとったx-tグラフでは，(1-2-1)式で表した速度vは下のグラフのように，時刻t_1と時刻t_2の間の平均変化

[1] 物理量の変化量を表す記号として，ギリシャ文字の大文字の Δ(デルタ)か小文字の δ(デルタ)を用いることが多い．ここでは，大文字を用いる．「物理量の変化 ＝ 終わりの物理量 － 始めの物理量」として定義する．例えば，位置の変化量は「Δx」と表すが，「Δx」とまとめて表したものが 1 つの物理量で，掛け算「$\Delta \times x$」の意味ではない．

[2] 絶対値の計算は，ここでは，2 次元の運動の場合と整合性をとるため，2 乗してから平方根をとることにより，必ず正の値となるようにした．

率(平均の傾き)に相当し，時刻t_1とt_2の間の平均の速度vとなる．



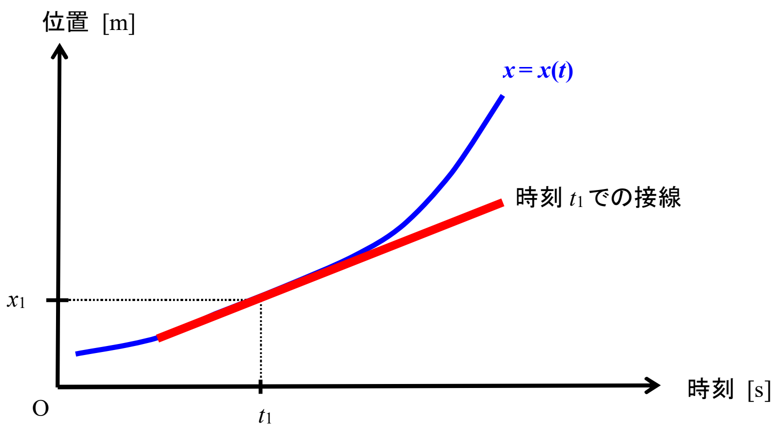
x-tグラフの直線の傾き(時刻t_1とt_2の間の直線の傾き) = 時刻t_1とt_2の間の平均の速度v (1-2-2)

直線の傾きが正(速度が正)なら右向きの，負(速度が負)なら左向きの運動をしている．

次に，時刻t_2を時刻t_1に極限まで近づけていった場合(時間Δtを無限小)を考えてみよう．数学的な記号としては「$\lim_{t_2 \to t_1}$ ‥ 」と表す．呼び方は「リミット…」と呼ぶ．

そのとき，x-tグラフの直線は，時刻t_1での接線となる．この時刻t_1での接線の傾きが，時刻t_1での瞬間の速度$v_1 = v(t_1)$ とみなすことができる．

$$\text{瞬間速度}v_1 = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (t = t_1)}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left. \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right|_{t = t_1} \quad (1\text{-}2\text{-}3)$$



上の式から，瞬間の速度vは，時刻tの関数であり，位置$x = x(t)$の時刻tに対する導関数(時間微分)として与えられる．以降は，瞬間

の速度のことを単に,「速度」と呼ぶ.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

* 速さと速度

物理では,「速さ ＝ 速度の大きさ」としている. したがって, 速さは下の式のように計算する.

$$速さ = |\,v\,| = \sqrt{(v)^2} = \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = \frac{|\,\Delta x\,|}{\Delta t} \qquad (1\text{-}2\text{-}5)$$

* 速さと速度の単位

速さと速度の単位は同じで「m/s」または,「km/h」を用いることが多い.

問題 1-3 ある質点が時刻 $t_1 = 3.0$ s で位置 $x_1 = 6.0$ m にあり, その後, 時刻 $t_2 = 3.5$ s では位置 $x_2 = 4.0$ m に達した. この間の平均の速度 v, 平均の速さ$|\,v\,|$を求めよ. また, この平均速度はどの時刻に対応する値か(平均時刻を求めよ)?

問題 1-4 ある質点が時刻t [s] において, 下の式で時刻tの関数として, 位置x [m]と表されるとして, 時刻tの瞬間の速度v [m/s]を求めよ(単位は省略してよい).

1) $x = 3t - 8$　2) $x = t^2 - 4t + 3$　3) $x = 2\sin(t)$　4) $x = 2\sin(3t)$　5) $x = 4\cos(t/2)$

6) $x = \exp(t) = e^t$　7) $x = \exp(2t) = e^{2t}$　8) $x = \exp(t^2)$　9) $x = \log_e 2t = \ln 2t$　10) $x = \log_e e^{3t}$

問題 1-5 下の関数$f(t)$を変数tで微分せよ.

1) $f(t) = (t+2)^5$　2) $f(t) = (t/2+3)^6$　3) $f(t) = (t-4)^4\,(t+3)^3$　4) $f(t) = \dfrac{(t+2)^4}{(t-2)^3} = (t+2)^4\,(t-2)^{-3}$

5) $f(t) = \cos(2t+2)$　6) $f(t) = \sin(2t^4+2)$　7) $f(t) = \cos((2t+2)^3)$　8) $f(t) = \exp(\cos(t^2+2))$

1-3. 直線運動する質点の加速度(acceleration)

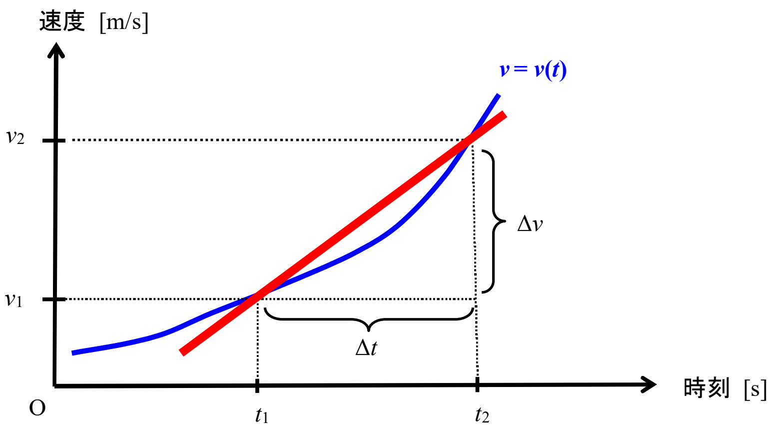
質点の運動の状態を調べるために, 加速度(acceleration) a も重要な物理量となる. 加速度は加速する度合いを表す量であり, 加速度a は,「単位時間(例えば, 1 秒や1時間など‥)当たりの速度の変化」とする.

ある質点が, 時刻t_1で速度v_1で運動していたが, その後, 速度が変化し, 時刻t_2では速度v_2で運動したとする. この間の速度の

変化に要した時間Δtと速度の変化Δvを用いて，加速度aは下の式で与えられる．

$$a = \frac{\text{速度の変化}}{\text{要した時間}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

時刻tを横軸に，速度vを縦軸にとったv-tグラフでは，(1-3-1)式で表された加速度a は下のグラフのように，時刻t_1 と時刻t_2 の間の平均変化率(平均の傾き)に相当し，時刻t_1とt_2の間の平均の加速度となる．



v-tグラフの直線の傾き(時刻t_1とt_2の間の直線の傾き) = 時刻t_1とt_2の間の平均の加速度a (1-3-2)

v-tグラフの傾きが正なら加速しており，負なら減速している．

次に，時刻t_2を時刻t_1に極限まで近づけていった場合(時間Δtを無限小)を考えてみよう．このとき，平均の速度から瞬間の速度に移行したのと同様に，平均の加速度から瞬間の加速度に移行する．

$$\text{瞬間の加速度}a_1 = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (t = t_1)}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left. \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right|_{t = t_1} \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

したがって，時刻tにおける瞬間の加速度$a(t)$は，時刻$t + \Delta t$での速度$v(t+\Delta t)$を，$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v$ と表すと，下の式で表すことができる．

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{t + \Delta t - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

さらに，速度$v(t)$は位置$x(t)$の時刻tに対する1階微分で表すことができたので，上の式で加速度aは位置xに対して，時刻tの2階微分として表すことができる．

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{(\mathrm{d}t)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

＊ 加速度の大きさ

加速度の大きさaは絶対値記号を用いて，下の式のように計算する．

$$\text{加速度の大きさ} = |a| = \sqrt{(a)^2} = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

問題 1-6 ある質点が時刻 $t_1 = 3.0$ s で速度 $v_1 = 4.0$ m/s で動いており，その後，時刻 $t_2 = 5.0$ s では速度 $v_2 = 1.0$ m/s として動いている．この間の平均の加速度 a，その大きさ$|a|$を求めよ．また，この平均速度はどの時刻に対応する値か(平均時刻を求めよ)?

問題 1-7 ある質点が時刻t [s] において，下の式で時刻tの関数として，位置x [m]が表されるとして，時刻tの瞬間の速度v [m/s]と瞬間の加速度a [m/s^2]を求めよ．次に，v-tグラフとa-tグラフを作成せよ．

1) $x = -2t + 4$　2) $x = t^2 - 4t + 4$　3) $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 2$　4) $x = \sin(2\pi t)$

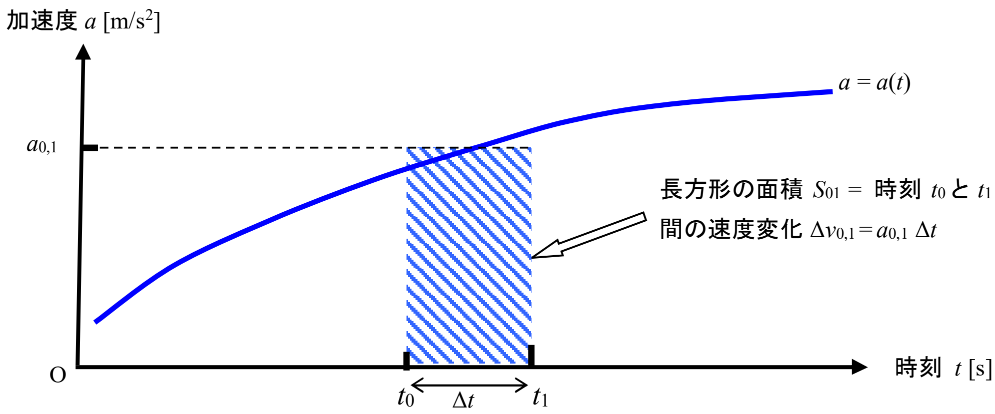
5) $x = 2\exp(t/2) = 2e^{t/2}$　6) $x = t + \exp(-t) = t + e^{-t}$　7) $x = \cos(\pi t)$

＊ 加速度から速度の導出(積分を使う)

時刻tの関数となっている速度$v(t)$を時間微分することで，加速度$a(t)$を導出することができた．逆に，加速度$a(t)$から，速度$v(t)$を導出する計算方法を提示しよう．(1-3-5)式の最初の2項より，微小速度変化dvは，微小時間dtを用いて下の式で表すことができる．

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

ここで，横軸を時刻t，縦軸を加速度aにとったa-tグラフを下に示す．時刻t_0での加速度a_0，時刻$t_1 = t_0 + \Delta t$ での加速度a_1とする．加速度a_0とa_1の間の平均加速度$a_{0,1} = (a_0 + a_1)/2$ とする．



時刻t_0から時刻t_1まで経過したとき，速度の変化$\Delta v_{0,1}$ ($= v_1 - v_0$)は，(1-3-7)式より下の式で表すことができる．これは，上のグラフにおいて，横をΔt，縦を$a_{0,1}$とした青い斜線でひいた長方形の面積に相当する．

$$\Delta v_{0,1} = a_{0,1}\,\Delta t$$

したがって，時刻t_1における速度v_1は，時刻t_0での速度v_0と速度変化Δv_{01}の和として表すことができる．

$$v_1 = v_0 + \Delta v_{0,1} = v_0 + a_{0,1}\,\Delta t$$

同様に，時刻t_2における速度v_2は，「$v_2 = v_1 + \Delta v_{1,2} = v_1 + a_{1,2}\,\Delta t = v_0 + (a_{0,1} + a_{1,2})\,\Delta t$ 」と表され，時刻t_n ($= t_0 + n\,\Delta t$)における速度v_nは下の式で表すことができる．

$$v_n = v_{n-1} + a_{n-1,n}\,\Delta t = ... = v_0 + (a_{0,1} + a_{1,2} + ... + a_{n-1,n})\,\Delta t = v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,i+1}\,\Delta t \qquad (1\text{-}3\text{-}8)$$

時間 Δt を無限小にして総和をとる操作を数学では**積分を行う**と呼ぶ．したがって，n番目の時刻 $t_n = t_0 + n\,\Delta t$ を一般の時刻 t とすると(時刻t_0とtをn等分し，時間$\Delta t = (t - t_0)/n$を無限小にする操作)，下の式のように**定積分**を使って表すことができる．ここで，時刻t_0での速度(初速度)$v_0 = v(t_0)$とした．

$$\boxed{v(t_n) \;\rightarrow\; v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1\text{-}3\text{-}9)}$$

上の式は，「時刻tにおける速度 ＝ 初速度 ＋(加速度による)速度変化 ＝ 初速度 ＋ a-tグラフで囲んだ面積(**積分**) 」を表している．

* (1-3-7)式の積分

(1-3-7)式「$dv = a\ dt$」の両辺に対し，時刻t_0 (下限)からt (上限)まで積分してみよう.

$$\int_{(t=t_0)}^{(t)} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a(t)\ \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \left[\ v(t)\ \right]_{(t=t_0)}^{(t)} = v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\ \mathrm{d}t = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\ \mathrm{d}t \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

* 速度から位置の導出(積分を使う)

積分を用いて，加速度から速度を導出したのと同様に，速度から位置を導出することができる. (1-2-4)式で両辺に微小時間dtをかけると下の式を得ることができる.

$$\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t \qquad (1\text{-}3\text{-}11)$$

上の式に対し，時刻t_0 (下限)からt (上限)まで積分すると，同様な関係式を得ることができる.

$$\int_{(t=t_0)}^{(t)} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

上の式は,「時刻tにおける位置 ＝ 初期位置 ＋(速度による)変位 ＝ 初期位置 ＋v-tグラフで囲んだ面積(積分) 」を表している.

問題 1-8 ある質点が時刻t [s] において，時刻tの関数として，加速度a [m/s^2]が下の式で表されるとして，時刻tにおける瞬間の速度v [m/s]と位置x [m]を求めよ. ただし，時刻t = 0での初速度v_0と初期位置x_0は，以下の値とする.

1) $a = 4$ m/s^2, $v_0 = -2$ m/s, $x_0 = 3$ m　　2) $a = -6t$ [m/s^2], $v_0 = 4$ m/s, $x_0 = 1$ m

2) $a = e^{-t}$ [m/s^2], $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = -2$ m　　4) $a = -2\pi^2 \cos(\pi\ t)$ [m/s^2], $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 3$ m

* 位置・速度・加速度の関係

時刻 t における位置 $x(t)$, 速度 $v(t)$, 加速度 $a(t)$の間の関係をまとめると, これらの量の間には微分と積分を用いて下のように関係づけることができる.

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(x\text{-}t\text{グラフの傾き})\qquad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(v\text{-}t\text{グラフの傾き})$$

$$\text{位置 } x(t)\ \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}\ \text{速度 } v(t)\ \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}\ \text{加速度 } a(t)$$

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t \qquad v=v_0+\int_{t_0}^{t} a(t)\ \mathrm{d}t$$

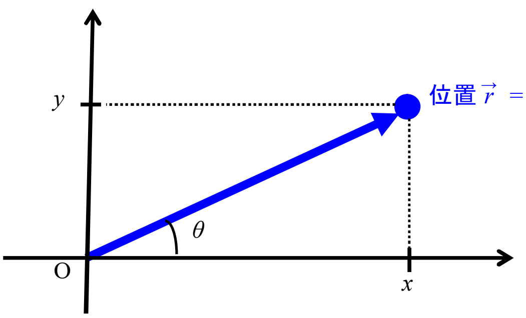
$$=x_0+(v\text{-}t\ \text{グラフの面積}) \qquad =v_0+(a\text{-}t\ \text{グラフの面積})$$

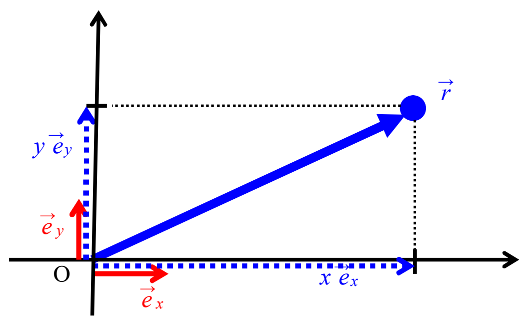
1-4.　曲線運動する質点の位置(position)

質点が曲線運動するためには, 質点は平面(2次元)上か空間(3次元)内で運動することが必要である. 簡単のために, ここでは主に平面(2次元)上の運動について, 運動の性質を表すいくつかの物理量について調べてみよう.

平面運動においても, 直線運動と同様に, 適当なある地点を原点Oに選ぶ. 原点Oで交差し, 互いに直交する2つの座標軸(例えば, x軸とy軸とする)を選び, 質点の位置をその座標で表す. 下の図のように, 質点の位置はベクトル量であり, 原点からの距離と向きで表すことができる. したがって, ベクトルの矢印記号を用いて, 位置$\vec{r}$と表す. 2次元のベクトルは, 2つの成分で表示でき, 下の式のようにx座標とy座標で表すことができる. それを, 下の左の図に示す. 質点が運動している場合は, x座標とy座標は時刻tの関数となり, その位置$\vec{r}$は時刻とともに変化する.

$$\boxed{\vec{r}=(x\,,y) \qquad (1\text{-}4\text{-}1)}$$





ここで，x方向を向いた単位ベクトル$\vec{e}_x = (1, 0)$ とy方向を向いた単位ベクトル$\vec{e}_y = (0, 1)$ を用いると，位置$\vec{r}$は下の式のように2つの単位ベクトルを用いて表すこともできる．この様子を上の右の図に示した．なお，2つの単位ベクトル$\vec{e}_x$と$\vec{e}_y$は時間変化しない．x座標とy座標は時間によって変化(時間の関数)し，質点は移動する．

$$\vec{r} = (x, 0) + (0, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1) = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

*　原点からの距離(長さ)

　原点Oから質点が位置するまでの距離rは，位置ベクトル$\vec{r}$の大きさとなるので，絶対値記号を用いて表すことができ，三平方の定理より，x座標とy座標を用いて下の式で表すことができる．

$$r = |\,\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

*　向き

位置はベクトル量なので，大きさ(ここでは距離)と向きを持つ量である．2次元では，向きはx軸からの角度θで表すことができる．上の右の図より，x座標とy座標は，下の式のように原点からの距離rと角度θを用いた三角関数で表すことができる．

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (1\text{-}4\text{-}4)$$

したがって，位置$\vec{r}$は下の式のように表すことができる．

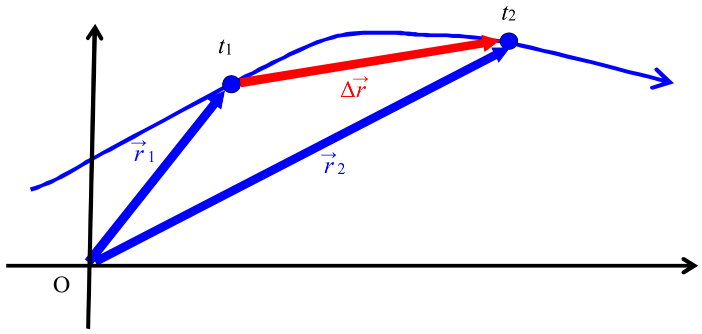
$$\boxed{\vec{r} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y \qquad (1\text{-}4\text{-}5)}$$

*　変位

　質点が運動している場合，時間が経過するとその位置が変化する．時刻t_1での位置$\vec{r}_1$と時刻t_2での位置$\vec{r}_2$とする．

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = (x_1, y_1) = (x(t_1), y(t_1)), \quad \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) = (x_2, y_2) = (x(t_2), y(t_2)) \qquad (1\text{-}4\text{-}6)$$

質点が運動する軌跡を図にすると，質点は下の図のように運動する．



時刻t_1の位置$\vec{r}_1$から時刻t_2の位置$\vec{r}_2$に移動したときに，質点の変位(位置の変化) $\Delta\vec{r}$は下の式で表すことができる.

$$\Delta\vec{r} = \text{終わりの位置} - \text{始めの位置} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (1\text{-}4\text{-}7)$$

上の式を成分で表すと下の式となる. また，変位の大きさΔr も三平方の定理を用いて下の式で表すことができる.

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x\,,\,\Delta y\,) = (\,x_2 - x_1\,,\,y_2 - y_1\,) \qquad (1\text{-}4\text{-}8)$$

$$\Delta r = |\,\Delta\vec{r}\,| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (1\text{-}4\text{-}9)$$

問題　1-9　ある質点が時刻t [s] において，位置$\vec{r} = (x\,,\,y) = (t/2 - 1\,,\,-t^2 + 4t\,)$ [m]で運動している.

1) 時刻$t_1 = 1.0$ sでの位置$\vec{r}_1$と時刻$t_2 = 4.0$ sでの位置$\vec{r}_2$を求めよ.

2) 時刻t_1 と t_2 の間の変位$\Delta\vec{r}$と変位の大きさΔrを求めよ.

3) 時刻t の関数としての位置$\vec{r}$の軌跡をグラフに書け(横軸をx座標，縦軸をy座標としたグラフ).

問題　1-10　ある質点が時刻t [s] において，位置$\vec{r} = (x\,,\,y) = (2\cos(\pi t) + 2\,,\,2\sin(\pi t)\,)$ [m]で運動している.

1) 時刻$t_1 = 0.0$ sでの位置$\vec{r}_1$と時刻$t_2 = 0.5$ sでの位置$\vec{r}_2$を求めよ.

2) 時刻t_1 と t_2 の間の変位$\Delta\vec{r}$と変位の大きさΔrを求めよ.

3) 時刻t の関数としての位置$\vec{r}$の軌跡をグラフに書け(ヒント; 「$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$」の関係式を使う).

1-5.　曲線運動する質点の速度(velocity)

質点が曲線運動する場合も，直線運動と同様に扱うことができる．曲線運動の場合はベクトルとして扱う．

時刻t_1での位置$\vec{r}_1$にあった質点が時刻t_2 $(= t_1 + \Delta t)$で位置$\vec{r}_2$ $(= \vec{r}_1 + \Delta\vec{r})$に到達したとする．このとき，時刻$t_1$と$t_2$の間の平均の速度$\vec{v}$は下の式で表すことができる．

$$\vec{v} = \frac{\text{移動による変位}}{\text{移動に要した時間}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{1-5-1}$$

＊ 成分表示

2次元平面での速度$\vec{v}$はベクトル量の1つなので，2成分での成分表示ができる．変位$\Delta\vec{r}$は(1-4-8)式のように表すことができるので，下の式のようになる．

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{e}_y \tag{1-5-2}$$

＊ 速さ(速度の大きさ)

速さ(速度の大きさ)vは，速度$\vec{v}$の絶対値であり，三平方の定理より，下の式で表すことができる．

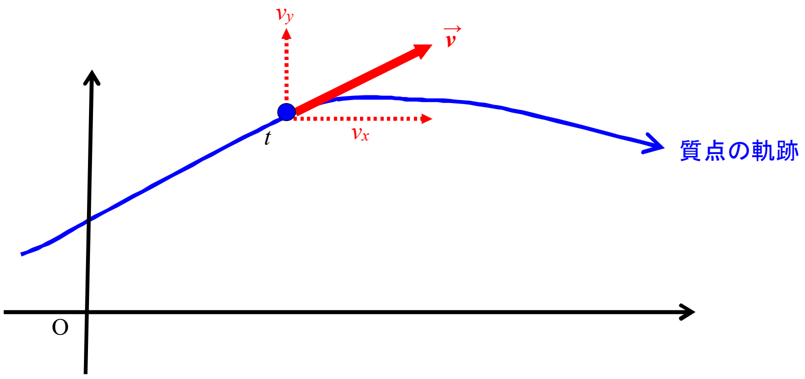
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} \tag{1-5-3}$$

＊ 瞬間の速度

時刻tでの瞬間の速度$\vec{v}$は位置$\vec{r}$を時間微分することで得られる．

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y \tag{1-5-4}$$

下の図に質点の移動の軌跡を描く．速度$\vec{v}$はこの軌跡の接線方向を向く．



問題 1-11 ある質点が時刻t [s] において，位置$\vec{r} = (x , y) = (t/2 - 1 , -t^2 + 4t)$ [m]で運動している.

1) 時刻tでの速度$\vec{v}$を求めよ.

2) 時刻$t = 3.0$ sでの速度$\vec{v}$を求めよ.

問題 1-12 ある質点が時刻t [s] において，位置$\vec{r} = (x , y) = (2 \cos (\pi t) + 2 , 2 \sin(\pi t))$ [m]で運動している.

1) 時刻tでの速度$\vec{v}$を求めよ.

2) 時刻$t = 0.5$ sでの速度$\vec{v}$を求めよ.

3) 速さvを求め，それが時刻t によらず，一定の値になることを確認せよ.

*** 変位の大きさと移動距離(省略してよい)**

軌跡が曲線となる場合は，変位の大きさと移動距離(運動の軌跡となる曲線上の長さ)は異なる結果になる.

移動の微小距離dsは，微小変位$d\vec{r} = (dx , dy)$，速度 より，三平方の定理から，「$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\ dt = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}\ dt = v\,dt$ 」と表すことができる.

したがって，時刻t_0から時刻t_1までの動いた距離s_{01}は積分を使って，下の式から求めることができる.

$$s_{01} = \int_{(t_0)}^{(t_1)} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}\ dt = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt \qquad (1\text{-}5\text{-}5)$$

1-6. 曲線運動する質点の加速度(accelaration)

加速度についても同様に扱う. 時刻t_1で速度$\vec{v}_1$ で動いていた質点が時刻$t_2 (= t_1 + \Delta t)$で速度$\vec{v}_2 (= \vec{v}_1 + \Delta\vec{v})$で動いていたとする.

このとき，時刻t_1とt_2の間の平均の加速度$\vec{a}$は下の式で表すことができる.

$$\vec{a} = \frac{\text{速度の変化}}{\text{要した時間}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad (1\text{-}6\text{-}1)$$

＊ 成分表示

加速度$\vec{a}$もベクトル量の1つなので，2成分での成分表示で表す.

$$\vec{a} = (\, a_x \,,\, a_y \,) = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y = \left(\, \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \,,\, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \,\right) = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\vec{e}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\,\vec{e}_y \qquad (1\text{-}6\text{-}2)$$

＊ 加速度の大きさ

加速度の大きさaは，加速度$\vec{a}$の絶対値であり，三平方の定理より，下の式で表すことができる.

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)^2} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}6\text{-}3)$$

＊ 瞬間の加速度

時刻tでの瞬間の加速度$\vec{a}$は速度$\vec{v}$を時間微分，あるいは位置$\vec{r}$について2階の時間微分することで得られる.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\vec{v} = \frac{d}{dt}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\, \frac{dv_x}{dt} \,,\, \frac{dv_y}{dt} \,\right) = \left(\, \frac{d^2x}{dt^2} \,,\, \frac{d^2y}{dt^2} \,\right) \qquad (1\text{-}6\text{-}4)$$

問題　1-13　ある質点が時刻t [s] において，位置$\vec{r} = (x\,,\,y) = (t/2 - 1\,,\,-t^2 + 4t\,)$ [m]で運動している.

1) 時刻tでの加速度$\vec{a}$を求めよ.

問題　1-14　ある質点が時刻t [s] において，位置$\vec{r} = (x\,,\,y) = (2\cos(\pi t) + 2\,,\,2\sin(\pi t)\,)$ [m]で運動している.

1) 時刻tでの加速度$\vec{a}$を求めよ.

2) 時刻$t = 0.5$ sでの加速度$\vec{a}$の値を求めよ(単位を付けること).

3) 加速度の大きさaを求め，それが時刻t によらず，一定の値になることを確認せよ.

問題　1-15　ある質点が時刻t [s] において，加速度$\vec{a} = (2\,, 6\,t - 2\,)$ [m/s^2]で運動している．時刻$t = 0$ s での初期位置$\vec{r}_0 = (2, 1)$ m，初速度$\vec{v}_0 = (-1, 3)$ m/sとする．

1) 時刻tでの速度$\vec{v}\,(t)$を求めよ．

2) 時刻tでの位置$\vec{r}\,(t)$を求めよ．

問題　1-16　質点の位置$\vec{r}\,(t)$ が時刻t [s]の関数として，$\vec{r}\,(t) = (\,x(t)\,, y(t)\,) = 2\,(\,2\cos(\pi t), \sin(\pi t) - 1\,)$ [m]　と動くする．

1) 質点の軌跡を描け(→ 横軸にx座標，縦軸にy座標をとり，時刻tが経過するとどのような軌跡を描くのか表す．ヒント;楕円になる)．

2) 時刻tでの速度$\vec{v}\,(t)$を求めよ．

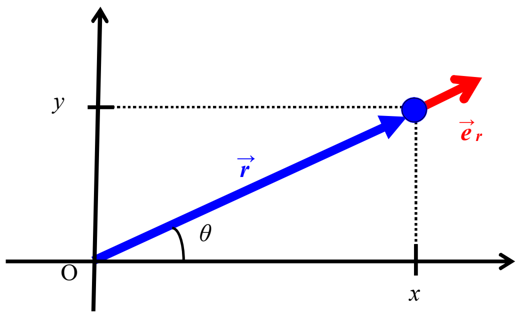
3) 時刻tでの加速度$\vec{a}\,(t)$を求めよ．

1-7.　極座標表示

(1-4-5)式で示したように平面(2次元)運動する質点の位置$\vec{r}$は，原点からの距離rとx軸からの角度θを用いて表すことができた．位置$\vec{r}$を表すのに，x座標，y座標…を用いて表す表示方法(直交座標系)の他に，原点からの距離rとx軸からの角度θを用いて表す表示方法を**極座標表示**と呼ぶ．極座標表示では，位置$\vec{r}$と同じ向きを向いた単位ベクトル$\vec{e}_r$を導入する．位置$\vec{r}$と単位ベクトル$\vec{e}_r$の関係は下の式で定義する．

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r \qquad (1\text{-}7\text{-}1)$$

右の図に2つのベクトルの関係を示す．したがって，単位ベクトル$\vec{e}_r$は(1-4-5)式と上の式から(1-7-2)式のように，直交座標系の単位ベクトル$\vec{e}_x$と$\vec{e}_y$を用いて，(1-7-2)式のように表すことができる．



$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = (\,\cos\theta\,, \sin\theta\,) = \cos\theta\;\vec{e}_x + \sin\theta\;\vec{e}_y \qquad (1\text{-}7\text{-}2)$$

質点は運動しているので，角度θは時刻ととも変化し，単位ベクトル$\vec{e}_r$は時刻とともにその向きを変える．

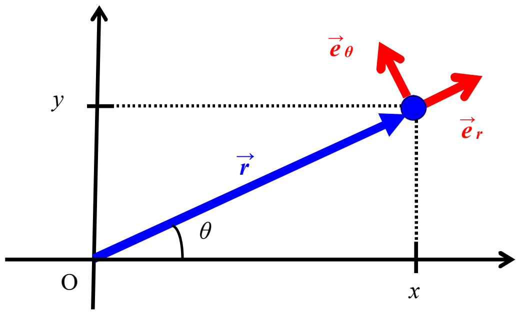
上の式を用いて，ベクトル$\vec{e}_r$ の大きさは「1」であり，単位ベクトルとなっていることを確認することができる．

$$|\vec{e}_r| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = 1 \tag{1-7-3}$$

さらに，単位ベクトル$\vec{e}_r$と直交するもう1つの単位ベクトル$\vec{e}_\theta$を下の式で定義し，導入する．

$$\boxed{\vec{e}_\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = (-\sin\theta,\ \cos\theta) = -\sin\theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y} \tag{1-7-4}$$

次に，上に示したベクトル$\vec{e}_\theta$が「大きさ = 1」の単位ベクトルとなること，次に，ベクトルの$\vec{e}_r$との内積をとって，2つのベクトルが直交していることを確認する．



$$|\vec{e}_\theta| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \tag{1-7-5}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \underbrace{-\cos\theta\sin\theta}_{x\text{成分どうしの積}} + \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{y\text{成分どうしの積}} = 0 \tag{1-7-6}$$

* 速度

極座標表示で平面を運動する質点の速度$\vec{v}$を計算してみよう．原点からの距離r，x軸からの角度θともに，時刻tの関数となることに注意して，(1-7-1)式で表された位置$\vec{r}$を時間微分する(単位ベクトル$\vec{e}_r$は角度θの関数であり，さらに，角度θは時刻tの関数になるので，合成関数の微分の計算方法を使う)．

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\vec{e}_r) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta} \tag{1-7-7}$$

上の式で，角度θの時間微分は角速度(= 1秒間当たりの回転する角度)ωと呼ばれる．

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-7-8}$$

角速度ωを用いると，(1-7-7)式は下の式のように表すこともできる．1項目は原点からの距離の時間変化，2項目はそれと直交する向きでの距離の時間変化に対応する．

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\,\omega\,\vec{e}_\theta \tag{1-7-7'}$$

上の式で，「原点からの距離r = 一定」となる場合，すなわち，質点が半径rの円周上を運動する場合，速度$\vec{v}$は下の式で表すことができる．特に，「角速度ω = 一定」になる場合を等速円運動と呼ぶ．その時，速さvは，「$v = r\,\omega$ = 一定」となり，速度の向きは単位ベクトル$\vec{e}_\theta$と同じとなり，円の接線方向となる．

$$\vec{v} = r\,\omega\,\vec{e}_\theta \tag{1-7-9}$$

* 加速度

さらに，極座標表示で平面を運動する質点の加速度$\vec{a}$を計算してみよう．(1-7-7)式の右辺を時間微分して加速度$\vec{a}$を導出する．このとき，(1-7-7)式の右辺第2項は3つの関数の積となるので，時間微分する際は注意する．

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta\right) = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta,\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\vec{e}_r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\ \text{を使う}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\theta - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{e}_r$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\vec{e}_\theta \tag{1-7-10}$$

上の式は角速度ωを用いると下の式のように表すこともできる．

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\,\omega^2\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega + r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta \tag{1-7-10'}$$

上の式で，等速円運動となる場合，すなわち，「原点からの距離r = 一定，でかつ，角速度ω = 一定」となる場合は，下の式のように加速度$\vec{a}$の大きさaは，「$a = |\vec{a}| = |-r\,\omega^2\,\vec{e}_r| = r\,\omega^2|\,\vec{e}_r\,| = r\,\omega^2$ = 一定」で，その向きは常に原点Oに向かう(位置$\vec{r}$と逆向き，すなわち中心方向を向く).

$$\vec{a} = -r\,\omega^2\,\vec{e}_r = -\,\omega^2\,\vec{r} \qquad (1\text{-}7\text{-}11)$$

問題 1-17 (1-7-2)式と(1-7-4)式から，「$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\,\vec{e}_r$」が成立することを確認せよ.

問題 1-18 (1-7-7)'式から，速さvを距離rと角速度ωを用いて表せ.

問題 1-19 質点の位置$\vec{r}(t)$ が時刻t [s]の関数として，$\vec{r} = 2\,t^2\,(\cos(\pi t/2), \sin(\pi t/2))$ [m] と動くとする.

1) 極座標表示の単位ベクトル$\vec{e}_r$と$\vec{e}_\theta$について，時刻tを用いて，成分表示で表せ.

2) 速度$\vec{v}$と加速度$\vec{a}$について，極座標表示を用いて計算せよ(単位ベクトル$\vec{e}_r$と$\vec{e}_\theta$を用いて表せ).

問題 1-20 2 次元の単位ベクトル$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$に対し，下の行列表示が可能である.

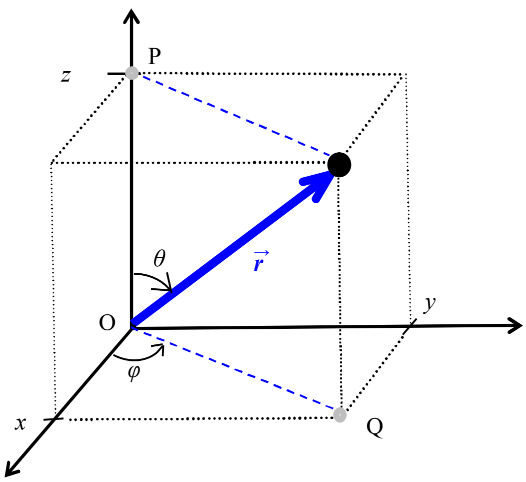
$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix}$$

上の行列から，行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列となる行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ.

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix}$$

* **3次元の極座標表示 (初学者は省略してよい)**

3 次元空間において，極座標系は多くの場合，右の図のように，位置$\vec{r}$について，原点からの距離を r, z 軸からの角度をθ $(0 \le \theta \le \pi)$，位置$\vec{r}$についてxy平面上に射影した点について，x軸からの角度をφ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ととる. これで，3 次元空間全ての位置を網羅する.



図より，位置のz成分 = OP = $r\cos\theta$ で，位置$\vec{r}$をxy平面に投影した長さ OQ = $r\sin\theta$ となるので，位置$\vec{r}$= (x, y, z) は下の式で表すことができる.

(x = OQ $\cos\varphi$, y = OQ $\sin\varphi$)

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$= r\sin\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y + r\cos\theta\ \vec{e}_z \tag{1-7-12}$$

2 次元の場合と同様に，位置$\vec{r}$と同じ向きを向く単位ベクトルを$\vec{e}_r$とし，それに直交するベクトルとして 2 つの単位ベクトル$\vec{e}_\theta$と$\vec{e}_\varphi$について，下の式で表すことができる．なお，3 つの単位ベクトルは角度 θ と φ の関数となっている [3]．

$$\vec{e}_r = \vec{r}/r = \sin\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y + \cos\theta\ \vec{e}_z \tag{1-7-13}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y - \sin\theta\ \vec{e}_z \tag{1-7-14}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\varphi} = -\sin\varphi\ \vec{e}_x + \cos\varphi\ \vec{e}_y \tag{1-7-15}$$

さらに，速度$\vec{v}$は下のように計算される．加速度$\vec{a}$の計算はここでは省略する(問題 1-23 とする).

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\vec{e}_r) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi \tag{1-7-16}$$

問題 1-21　3 次元の極座標表示の 3 つの単位ベクトルに対し，「 $|\vec{e}_r|^2 = |\vec{e}_\theta|^2 = |\vec{e}_\varphi|^2 = 1,\ \ \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_r = 0$ 」という直交条件を満たしていることを確認せよ．(省略してよい)

問題 1-22　3次元の3つの単位ベクトル$\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z$ と $\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\varphi$ の組に対し，次の行列表示となる行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を求めよ．(省略してよい)

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\varphi\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix}\ ,\qquad \begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\varphi\end{bmatrix}$$

問題 1-23　3次元空間を移動する物体の加速度$\vec{a}$を3次元の極座標表示で求めよ．(省略してよい)

問題の答

問題 1-1　$x_1 = 2.0$ m,　$x_2 = 3.5$ m,　$x_3 = -0.5$ m

[3] (1-7-14)式と(1-7-15)式で用いた微分は，変数が 2 つあるので，本来なら偏微分の記号を用いて表すべきだが，ここでは，単純な微分記号を用いて表した．偏微分については，「3-5．位置エネルギーと保存力の関係」でも説明する．

問題 1-2　$\Delta t = t_2 - t_1 = 3.5 - 3.0 = 0.5$ s,　$\Delta x = x_2 - x_1 = 4.0 - 6.0 = -2.0$ m,　$|\Delta x| = \sqrt{(-2.0)^2} = \sqrt{4} = 2.0$ m

問題 1-3　$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{4.0 - 6.0}{3.5 - 3.0} = \dfrac{-2.0}{0.5} = -4.0$ m/s,　$(t = (t_1 + t_2)/2 = 3.25$ s$)$,　$|v| = 4.0$ m/s

問題 1-4　1) 3　2) $2t - 4$　3) $2\cos t$　4) $6\cos(3t)$　5) $-2\sin(t/2)$　7) e^t　8) $2e^{2t}$　9) $1/|t|$　10) 3

問題 1-5　1) $5(t+2)^4$　2) $3(t/2+3)^5$　3) $7t(t-4)^3(t+3)^2$　4) $(t+2)^3(t-2)^{-4}(t-14)$

5) $-\sin(2t+2)$　6) $\cos(2t^4+2)\, 8t^3$　7) $-\sin((2t+2)^3)\, 6(2t+2)^2$　8) $-\exp(\cos(t^2+2))\sin(t^2+2)2t$

問題 1-6　$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{1.0 - 4.0}{5.0 - 3.0} = \dfrac{-3.0}{2.0} = -1.5$ m/s^2,　$(t = (t_1+t_2)/2 = 4.0$s$)$　$|a| = 1.5$ m/s^2

問題 1-7　1) $v = \dfrac{dx}{dt} = -2$ m/s,　$a = \dfrac{dv}{dt} = 0$ m/s^2　2) $v = \dfrac{dx}{dt} = -2t - 4$ [m/s],　$a = \dfrac{dv}{dt} = -2$ m/s^2

3) $v = t^2 - 4t + 4$ [m/s],　$a = 2t - 4$ [m/s^2]　4) $v = 2\pi\cos(2\pi t)$ [m/s],　$a = -2\pi^2\sin(2\pi t)$ [m/s^2]

5) $v = e^{t/2}$ [m/s],　$a = e^{t/2}/2$ [m/s^2]　6) $v = 1 - e^{-t}$ [m/s],　$a = e^{-t}$ [m/s^2]

7) $v = -\pi\sin(\pi t)$ [m/s],　$a = -\pi^2\cos(\pi t)$ [m/s^2]　グラフは略

問題 1-8　1) $v = 4t - 2$ [m/s],　$x = 2t^2 - 2t + 3$ [m]　2) $v = -3t^2 + 4$ [m/s],　$x = -t^3 + 4t + 1$ [m]

3) $v = -e^{-t} + 1$ [m/s], $x = e^{-t} + t - 3$ [m]　4) $v = -2\pi\sin(\pi t)$ [m/s],　$x = 2\cos(\pi t) + 1$ [m]

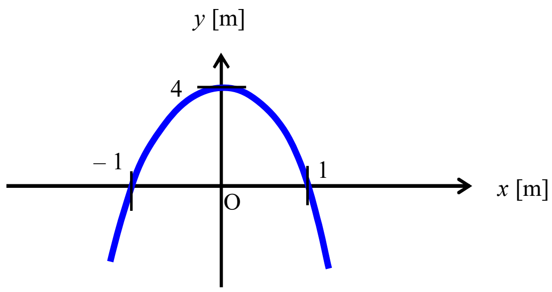
問題 1-9　1) $\vec{r}_1 = (-0.5, 3.0)$ m,　$\vec{r}_2 = (1.0, 0.0)$ m

2) $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (1.5, -3.0)$ m,　$\Delta r = 3.354$ m ≒ 3.4 m

3) $x = t/2 - 1$ より，$t = 2x + 2$ をy座標に代入する．

$y = -t^2 + 4t = -(2x+2)^2 + 4(2x+2) = -4x^2 + 4 = -4(x^2 - 1)$

→ 上に凸の放物線



問題 1-10　1) $\vec{r}_1 = (4.0, 0.0)$ m,　$\vec{r}_2 = (2.0, 2.0)$ m

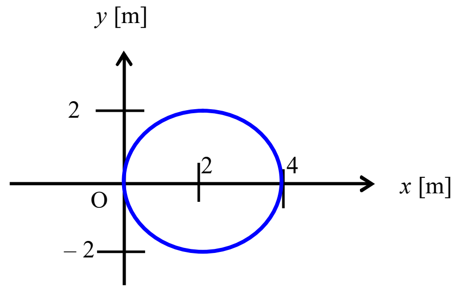
2) $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-2.0, 2.0)$ m,　$\Delta r = 2.828$ m ≒ 2.8 m

3) $x = 2\cos(\pi t) + 2$ より，　$\cos(\pi t) = \dfrac{x-2}{2}$,

$y = 2\sin(\pi t)$ より，　$\sin(\pi t) = \dfrac{y}{2}$．角度$\theta = \pi t$ として，三角関数の恒等式「$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$」より，

$$\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

→　$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$　→ 中心$(2, 0)$ m，半径 2 mの円



問題 1-11　1) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (1/2, -2t+4)$ [m/s]　　2) $\vec{v}(t = 3\text{s}) = (1/2, -2)$ [m/s]

問題 1-12　1) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-2\pi\sin(\pi t), 2\pi\cos(\pi t))$ [m/s]　　2) $\vec{v}(t = 0.5\text{s}) = (-2\pi, 0) = (-6.28, 0)$ [m/s]

3) $v = |\vec{v}| = \sqrt{(-2\pi\sin(\pi t))^2 + (2\pi\cos(\pi t))^2} = 2\pi\sqrt{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)} = 2\pi\sqrt{1} = 2\pi$ [m/s] → 一定

問題 1-13　1) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (1/2, -2t+4)$ [m/s]　→　$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (0, -2)$ [m/s^2]

問題 1-14　1) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-2\pi\sin(\pi t), 2\pi\cos(\pi t))$ [m/s]　→ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (-2\pi^2\cos(\pi t), -2\pi^2\sin(\pi t))$ [m/s^2]

2) $\vec{a}(t = 0.5\text{s}) = (0, -2\pi^2) = (0, -62)$ [m/s^2]

3) $a = |\vec{a}| = \sqrt{(-2\pi^2\cos(\pi t))^2 + (-2\pi^2\sin(\pi t))^2} = 2\pi^2\sqrt{\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t)} = 2\pi^2\sqrt{1} = 2\pi^2$ [m/s^2] → 一定

問題 1-15　1) (1-3-10)式をベクトルとして記述すると，$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$　と表すことができる．

上の式から，x成分では，　$v_x(t) = v_x(0) + \displaystyle\int_0^t a_x(t)\,dt = -1 + \int_0^t 2\,dt = 2t - 1$ [m/s],

y成分では，　$v_y(t) = v_y(0) + \displaystyle\int_0^t a_y(t)\,dt = 3 + \int_0^t (6t-2)\,dt = 3t^2 - 2t + 3$ [m/s],

→　$\vec{v}(t) = (2t-1, 3t^2 - 2t + 3)$ [m/s]

2) (1-3-12)式をベクトルとして記述すると，$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$　と表すことができる．

上の式から，x成分では，　$x(t) = x(0) + \displaystyle\int_0^t v_x(t)\,dt = -1 + \int_0^t (2t-1)\,dt = t^2 - t - 1$ [m],

y成分では, $y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t)\,\mathrm{d}t = 3 + \int_0^t (3t^2 - 2t + 3)\,\mathrm{d}t = t^3 - t^2 + 3t + 3$ [m],

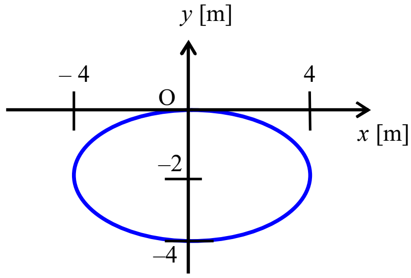
→ $\vec{r}(t) = (t^2 - t - 1\,,\ t^3 - t^2 + 3t + 3)$ [m]

問題 1-16　1)　位置のx座標は, $x = 4\cos(\pi t)$ なので, $\cos(\pi t) = x/4$,

位置のy座標は, $y = 2\sin(\pi t) - 2$ なので, $\sin(\pi t) = (y+2)/2$

三角関数の恒等式「$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$」より, $\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 = 1$

→ 中心 (0 , – 2) m , 長径4 m, 短径2 mの楕円



2)　$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-4\pi\sin(\pi t)\,,\ \pi\cos(\pi t))$ [m/s]

3)　$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = (-4\pi^2\cos(\pi t)\,,\ -\pi^2\sin(\pi t))$ [m/s^2]

問題 1-17　略(微分して, 左辺と右辺を比較して確認する)

問題 1-18　$v = r\,\omega$

問題 1-19　1)　$\vec{e}_r = (\cos(\pi t/2)\,,\ \sin(\pi t/2))$, $\vec{e}_\theta = (-\sin(\pi t/2)\,,\ \cos(\pi t/2))$

2)　$\vec{v} = 4t\,\vec{e}_r + \pi t^2\,\vec{e}_\theta$, $\vec{a} = (4 - t^2\pi^2/2)\,\vec{e}_r + 4t\pi\,\vec{e}_\theta$

問題 1-20　$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

問題 1-21　例えば, $|\vec{e}_r|^2 = |\sin\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y + \cos\theta\ \vec{e}_z|^2$　($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ ($i \neq j$のとき)を使う)

$= \sin^2\theta\cos^2\varphi\,|\vec{e}_x|^2 + \sin^2\theta\sin^2\varphi\,|\vec{e}_y|^2 + \cos^2\theta\,|\vec{e}_z|^2$　($|\vec{e}_i|^2 = 1$ を使う)

$= \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = \sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = (\sin\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y + \cos\theta\ \vec{e}_z) \cdot (\cos\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y - \sin\theta\ \vec{e}_z)$

$= \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\,|\vec{e}_x|^2 + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\,|\vec{e}_y|^2 - \cos\theta\sin\theta\,|\vec{e}_z|^2$

$= \sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \cos\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta = 0$,　他は略

問題　1-22　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$

問題　1-23　(1-7-16)式で示した速度$\vec{v}$をさらに時間微分する.

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta+r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta+\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi\right)+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\vec{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\varphi}\right)$$

$$+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right)\vec{e}_\varphi+r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}=-\vec{e}_r,\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\varphi}=\cos\theta\,\vec{e}_\varphi,\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\theta}=0,\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=-(\cos\varphi\,\vec{e}_x+\sin\varphi\,\vec{e}_y)=-(\sin\theta\,\vec{e}_r+\cos\theta\,\vec{e}_\theta)\ \text{より}\right)$$

$$=\left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-r\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\vec{e}_r+\left\{2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\vec{e}_\theta$$

$$+\left\{2\sin\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+2r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right\}\vec{e}_\varphi$$