5. 質点系と剛体の運動

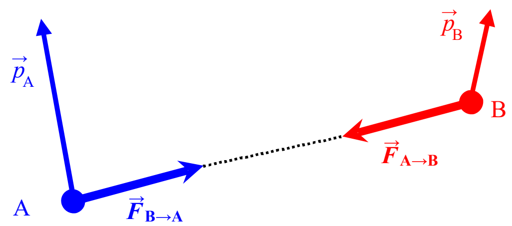
ここまでは，物体を質点とみなして，1個の質点に対し，その力学について学んだ．この章では，始めに質点が2個あるときの力学について学ぶ．次に，**質点系(＝ 質点が多数個存在する体系)**の力学，さらには，大きさを持った物体のうち，**剛体(＝ 外から力を加えても変形しない物体)**の力学について学ぶ．

5-1.　2体系の運動と運動量保存の法則

質量 m_A と質量 m_B をもった 2 つの質点 A と B がある．この 2 つの質点は，離れていてもお互いに力を及ぼしあっているとする．さらに，2 つの物体の間に働く力以外の**力は働いていない**ものとする(外から 2 つの物体に働く力を「外力」と呼ぶ．また，対象とした物体の間に働く力を「内力」と呼ぶ．2 つの物体間に働く内力どうしは，「作用反作用の法則」が成立する．

質点 B が質点 A に与える力(質点 A に作用する力)を$\vec{F}_{B\to A}$と表し，質点 A が質点 B に与える力(質点 B に作用する力)を$\vec{F}_{A\to B}$と表す．速度$\vec{v}_A$で運動している質点 A の運動量$\vec{p}_A$は「$\vec{p}_A = m_A\vec{v}_A$」，速度が$\vec{v}_B$で運動している質点 B の運動量$\vec{p}_B$は「$\vec{p}_B = m_B\vec{v}_B$」と表され，運動量を用いた運動方程式は下の式のように表すことができる．

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{p}_A}{dt} = \vec{F}_{B\to A} & \text{(5-1-1)} \\[2ex]
\dfrac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{F}_{A\to B} & \text{(5-1-2)}
\end{cases}
$$



2 つの質点の全体の運動量$\vec{P}_{tot}$は下の式のように 2 つの質点の運動量の総和とする．

$$\vec{P}_{tot} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \qquad \text{(5-1-3)}$$

上の式の両辺を時間微分し，右辺について，(5-1-2)式と(5-1-2)式を用いて，作用反作用の法則「$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$」を用いると，下の式のように，全運動量は時間変化しない．すなわち，全運動量$\vec{P}_{tot}$が一定となる**「運動量保存の法則」**を導出できる．

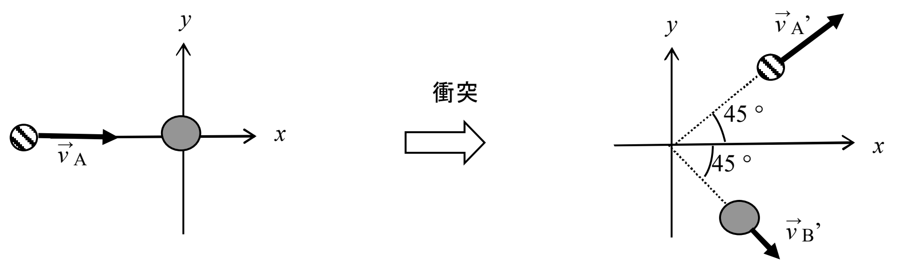
$$\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = 0 \qquad \text{(5-1-4)}$$

$$\vec{P}_{tot} = 一定 \qquad \text{(5-1-5)}$$

問題 5-1　滑らかな平面上において，質量$m_A = 4.0$ kgの物体Aが速度 $\vec{v}_A = (-3.0\ ,\ 0.0)$ m/sで運動し，原点上にあり，静止している質量$m_B = 2.0$ kgの物体Bに衝突した．衝突後，物体Aは速度 $\vec{v}_A' = (-1.0\ ,\ -2.0)$ m/s で運動した．

1) 衝突後の物体 B の速度 $\vec{v}_B'$ を求めよ．
2) 衝突により物体 A が受ける力積 $\vec{F}_{B\to A}\Delta t$ を求めよ．

問題 5-2　滑らかな平面で質量 $m_A = 2.0$ kg の物体 A が速度 $\vec{v}_A = (4.0\ ,\ 0.0)$ m/s で動き，原点上で止まっている質量 $m_B = 4.0$ kg の物体 B に衝突した．衝突後，物体 A と B は図のように進んだ．



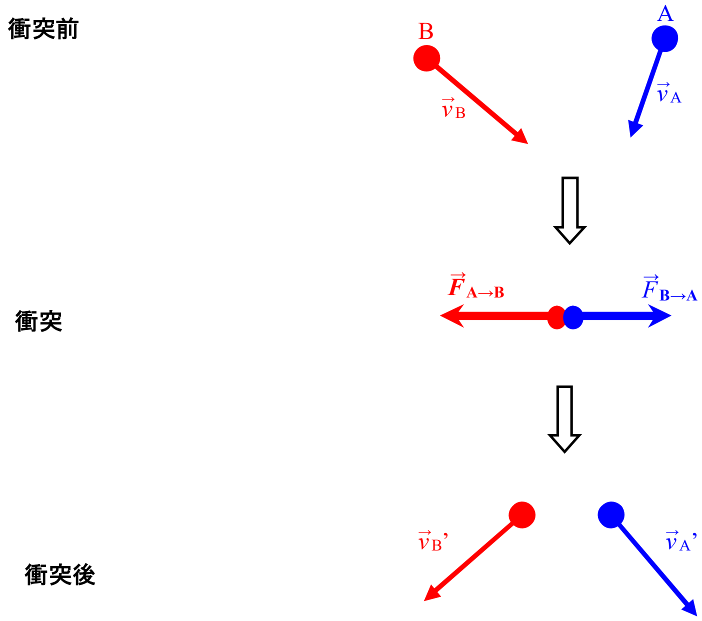
1) 衝突後の物体 A と物体 B の速さを v_A' と v_B' とする．衝突後の速度 $\vec{v}_A'$ と $\vec{v}_B'$ に対して，速さ v_A'と v_B' を用いて表せ．
2) 衝突前の全運動量$\vec{P}_{tot}$ を求めよ．
3) 運動量保存則を用いて，衝突前の物体 A の速さ v_Aを用いて，衝突後の速さ v_A' と v_B' を求めよ．

問題 5-3　滑らかな平面で質量 m_A の物体 A が速度 $\vec{v}_A$で，質量 m_B の物体 B が速度 $\vec{v}_B$で運動していた．2 つの物体は衝突後，くっついて合体した．衝突後の合体した物体の速度$\vec{v}'$と衝突によるって物体 A に働いた力積$\vec{F}_{B\to A}\ \Delta t$ を求めよ．次に，衝突前の全運動エネルギーKと衝突後の全運動エネルギーK'を求め，衝突による運動エネルギーの変化 $\Delta K = K' - K$を求め，運動エネルギーが衝突によって減少していることを確認せよ．

問題 5-4　始め，全質量 M の宇宙船が速さ V_0 で直線上を運動していた．この宇宙船はある時刻から，時間 δt の間，単位時間当たりの質量 ρ の燃料を燃やし，宇宙船に対する相対速度$-v$ で燃料を噴射した．燃料の噴射が終わった時の宇宙船の速さ V を求めよ(宇宙船は燃料を噴射の反作用として，その速さを増大させる)．

*** 衝突と反発係数**

2 つの物体が力を及ぼし合う現象として，2 つの物体が「衝突」する現象について考えてみよう．質量 m_A と m_B の 2 つの質点 A と B が衝突前，速度$\vec{v}_A = (v_{Ax}\ ,\ v_{Ay})$と$\vec{v}_B = (v_{Bx}\ ,\ v_{By})$で運動していた．その後，2 つの物体は衝突して(衝突して力を及ぼし合っていた時間 δt とし，A から B へ及ぼす力$\vec{F}_{A\to B}$，B から A へ及ぼす力$\vec{F}_{B\to A}$)，衝突後，速度$\vec{v}_A' = (v_A'_x\ ,\ v_A'_y)$と$\vec{v}_B' = (v_B'_x\ ,\ v_B'_y)$となったとする．また，ここでは，衝突による作用反作用の関係にある 2 つの力は，x 方向か$-x$ 方向に作用していると仮定する．



この系には外力が働いていないので,**「運動量保存則」**,すなわち,下の(5-1-6)式が成立する.

$$\text{衝突前の全運動量} = \boldsymbol{\vec{P}_{tot} = m_A\,\vec{v}_A + m_B\,\vec{v}_B = m_A\,\vec{v}_A{}' + m_B\,\vec{v}_B{}' = \vec{P}_{tot}{}'} = \text{衝突後の全運動量} \qquad (5\text{-}1\text{-}6)$$

質点 A の運動量の変化と質点 A に働く力(ここでは,$+x$ 方向に働く力と仮定) $\vec{F}_{B\to A}$ の関係は下の式で表すことができる.

$$m_A\,\vec{v}_A{}' - m_A\,\vec{v}_A = \vec{F}_{B\to A}\,\delta t = |\,\vec{F}_{B\to A}\,|\,\vec{e}_x\,\delta t \qquad (5\text{-}1\text{-}7)$$

上の運動量保存則を表す式はベクトルとしての等式なので,x 成分と y 成分とで成立するが,y 成分は力が働いていないので,速度の y 成分の変化はない. .

$$\begin{cases} x\ \text{成分(運動量保存則)};\quad m_A\,v_{Ax} + m_B\,v_{Bx} = m_A\,v_A{}'_x + m_B\,v_B{}'_x & (5\text{-}1\text{-}8) \\ y\ \text{成分(変化なし)};\quad v_{Ay} = v_A{}'_y,\quad v_{By} = v_B{}'_y & (5\text{-}1\text{-}9) \end{cases}$$

さらに,衝突による力は x 方向に作用するとして,反発係数(跳ね返り係数)e を下の式のように定義する.反発係数 e は衝突する 2 つの物体の衝突の際の様子(衝突する面の形状や衝突する角度)や 2 物体の材質による.

$$e = \frac{|\text{衝突後の2物体間の速度の}x\text{成分の差}|}{|\text{衝突前の2物体間の速度の}x\text{成分の差}|} = \frac{|\,v_A{}'_x - v_B{}'_x\,|}{|\,v_{A\,x} - v_{B\,x}\,|} \qquad (5\text{-}1\text{-}10)$$

したがって,この場合,反発係数 e には速度の y 成分の変化は寄与しない.衝突は 1 回だけ発生するので,衝突前後の速度の x 成

分は下の式のように 2 つに分類でき，この関係を用いると，反発係数 e は下の(5-1-12)式のように表すことができる．

$$\begin{cases} v_{\mathrm{A}x} \geq v_{\mathrm{B}x} \quad \text{なら，衝突後} \quad v_{\mathrm{A}}'_x \leq v_{\mathrm{B}}'_x \\ v_{\mathrm{A}x} \leq v_{\mathrm{B}x} \quad \text{なら，衝突後} \quad v_{\mathrm{A}}'_x \geq v_{\mathrm{B}}'_x \end{cases} \tag{5-1-11}$$

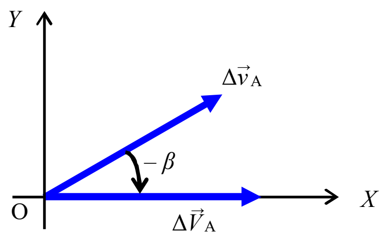
$$e = -\frac{v_{\mathrm{A}}'_x - v_{\mathrm{B}}'_x}{v_{\mathrm{A}x} - v_{\mathrm{B}x}} \tag{5-1-12}$$

* 座標変換(省略してよい)　→　速度変化の向きを x 方向にする回転変換

2 つの物体間に働く力が x 方向でない場合は，(5-1-7)式の左辺の速度変化 $\Delta\vec{v}_{\mathrm{A}}\,(= \vec{v}_{\mathrm{A}}' - \vec{v}_{\mathrm{A}}) = (\Delta v_{\mathrm{A}x}\,,\ \Delta v_{\mathrm{A}y})$について回転変換して，$X$ 方向に力が作用するような座標系で扱うとよい(その座標系では速度変化は X 成分のみ)．

その回転角度を$(-\beta)$とすると，次のような回転変換を行う．ここで，変換後の速度変化 $\Delta\vec{V}_{\mathrm{A}} = (\Delta V_{\mathrm{A}}\,,\ 0)$である．

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{\mathrm{A}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) \\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_{\mathrm{A}x} \\ \Delta v_{\mathrm{A}y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_{\mathrm{A}x} \\ \Delta v_{\mathrm{A}y} \end{bmatrix}$$

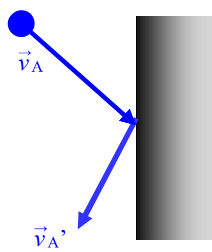


変換後の速度変化 ΔV_{A} と角度 β は下の式で表すことができる．

$$\Delta V_{\mathrm{A}} = \sqrt{(\Delta v_{\mathrm{A}x})^2 + (\Delta v_{\mathrm{A}y})^2}\,, \quad \tan\beta = \Delta v_{\mathrm{A}y}/\Delta v_{\mathrm{A}x}$$

* 壁との衝突

2 物体間の衝突で，一方が壁(ここでは，物体 B を壁とする)とすると，壁の質量は物体 A の質量と比べて，非常に大きいので，壁は衝突後も実際は動かない．(5-1-6)式や(5-1-8)式で表されている「運動量保存則」は成立しているが，現実的には使えない．右の図に示されているような壁との衝突では(5-1-12)式で表されている反発係数 e の式は下のように表すことができる(図の衝突では，$v_{\mathrm{A}x} > 0$, $v_{\mathrm{A}}'_x < 0$, $v_{\mathrm{A}}'_y = v_{\mathrm{A}y}$ となる)



$$e = \frac{|v_{\mathrm{A}}'_x|}{|v_{\mathrm{A}x}|} = -\frac{v_{\mathrm{A}}'_x}{v_{\mathrm{A}x}} \tag{5-1-13}$$

* 衝突後の速度(省略してよい)

衝突後の速度の x 成分である $v_A{}'_x$ と $v_B{}'_x$ は，(5-1-8)式と(5-1-12)式より，衝突前の速度の x 成分である v_{Ax} と v_{Bx} および，反発係数 e を用いて下の式のように表すことができる．

$$\begin{cases} v_A{}'_x = \dfrac{1}{m_A + m_B} \left\{ (m_A - m_B\, e)\, v_{Ax} + m_B\, (1 + e)\, v_{Bx} \right\} \\[2ex] v_B{}'_x = \dfrac{1}{m_A + m_B} \left\{ m_A\, (1 + e)\, v_{Ax} + (m_B - m_A\, e)\, v_{Bx} \right\} \end{cases} \tag{5-1-14}$$

特に，同じ質量の物体($m_A = m_B = m$)が衝突する場合は下の式のように表すことができる．

$$\begin{cases} v_A{}'_x = \dfrac{1-e}{2}\, v_{Ax} + \dfrac{1+e}{2}\, v_{Bx} \\[2ex] v_B{}'_x = \dfrac{1+e}{2}\, v_{Ax} + \dfrac{1-e}{2}\, v_{Bx} \end{cases} \tag{5-1-15}$$

* **衝突の分類**

反発係数 e はその定義式である(5-1-10)式より正(「0(ゼロ)以上」)の値になるが，その値の違いで衝突は下のように 2 種類に分類できる．衝突では，外力が働いていない場合，「運動量保存則」が成立するが，必ずしも「力学的エネルギー保存則」が成立するとは限らない．その観点から，衝突前後で全運動エネルギーが変わらない衝突を「弾性衝突」と呼び，衝突で全運動エネルギーが減少する衝突を「非弾性衝突」と呼ぶ．

$$\begin{cases} e = 1 \quad \rightarrow \quad \textbf{弾性衝突} \\[2ex] 0 \le e < 1 \quad \rightarrow \quad \textbf{非弾性衝突} \quad (\text{特に，} e = 0 \text{ のとき，完全非弾性衝突}) \end{cases} \tag{5-1-16}$$

① 弾性衝突

弾性衝突では，衝突前と後で物体が持つ合計の運動エネルギーが一定で変わらない衝突である．例えば，壁との衝突では，(5-1-13)式より，衝突後の速度 $v_A{}'_x$ は反発係数 e を用いて，「$v_A{}'_x = -\, e\, v_{Ax}$ 」と表すことができるが，衝突前と後の運動エネルギー K_A と K'_A は下の式で表すことができる(質量 m とした)．

$$K_A = \frac{1}{2}\, m\, v_{Ax}{}^2, \quad K_A{}' = \frac{1}{2}\, m\, v_A{}'_x{}^2 = \frac{1}{2}\, m\, (e\, v_{Ax})^2 = e^2\, K_A \tag{5-1-17}$$

上の式から反発係数 $e = 1$ のときは運動エネルギーが減少しないことがわかる．さらに，質量が等しい物体が衝突する場合は，

(5-1-15)式を用いて，衝突前と後の全運動エネルギーK_{tot}とK_{tot}'は下の式で表すことができる.

$$\begin{cases} K_{tot} = \dfrac{1}{2}m(v_{Ax}{}^2 + v_{Ay}{}^2) + \dfrac{1}{2}m(v_{Bx}{}^2 + v_{By}{}^2) = \dfrac{1}{2}m(v_{Ax}{}^2 + v_{Bx}{}^2 + v_{Ay}{}^2 + v_{By}{}^2) & (5\text{-}1\text{-}18) \\ K_{tot}' = \dfrac{1}{2}m(v_A'{}_x{}^2 + v_A'{}_y{}^2) + \dfrac{1}{2}m(v_B'{}_x{}^2 + v_B'{}_y{}^2) = \dfrac{1}{2}m\left(\left\{\dfrac{1-e}{2}v_{Ax} + \dfrac{1+e}{2}v_B\right\}^2 + v_{Ay}{}^2 + \left\{\dfrac{1+e}{2}v_{Ax} + \dfrac{1-e}{2}v_B\right\}^2 + v_{By}{}^2\right) & \\ \quad = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{1+e^2}{2}v_{Ax}{}^2 + (1-e^2)v_{Ax}v_{Bx} + \dfrac{1+e^2}{2}v_{Bx}{}^2 + v_{Ay}{}^2 + v_{By}{}^2\right) & (5\text{-}1\text{-}19) \end{cases}$$

この例でも，反発係数 $e = 1$ では，運動エネルギーは減少しない.

② 非弾性衝突

非弾性衝突では，衝突前に比べて，衝突後に物体が持つ合計の運動エネルギーが減少する. 減少した運動エネルギーは衝突の際，摩擦によって熱エネルギーに変換される.

例えば，壁との衝突の場合は(5-1-17)式より，質量が等しい物体が衝突する場合は(5-1-18)式より，反発係数 $e < 1$ なら，運動エネルギーは減少する.

特に，反発係数 $e = 0$ (完全非弾性衝突)となる場合は，(5-1-10)式より衝突後 2 つの物体はくっつく. 壁との衝突の場合はくっついて動かなくなるので，衝突後の運動エネルギー$K_A' = 0$となる. 質量が等しい物体が衝突する場合も2つの物体はくっついて移動し，衝突後の全運動エネルギー$K_{tot}' = m((v_{Ax}+v_{Bx})^2/2 + v_{Ay}{}^2 + v_{By}{}^2)/2$ と計算でき，全運動エネルギーの変化$\Delta K_{tot} = K_{tot}' - K_{tot} = -m(v_{Ax} - v_{Bx})^2/4$ と負の値となる. もし，始め物体 B が静止していたとすると，衝突後の運動エネルギーは衝突前の半分になる.

問題 5-5　右向きを+方向とする. 質量 $m_A = 2.0$ kg の物体 A が速度 $v_A = 1.0$ m/s で動いているところに後ろから質量 $m_B = 3.0$ kg の物体 B が速度 $v_B = 5.0$ m/s でぶつかった. 衝突後も 2 つの物体は一直線上を運動した. この衝突の反発係数 $e = 0.25$ であった. 衝突後の物体 A と B の速度 v_A'と v_B'を求めよ.

問題 5-6(省略してよい)　(5-1-14)式から，質量が異なる2つの物体が弾性衝突したとき，全運動エネルギーが保存(衝突前後で全運動エネルギーが一致 $K_{tot} = K_{tot}'$)することを確認せよ.

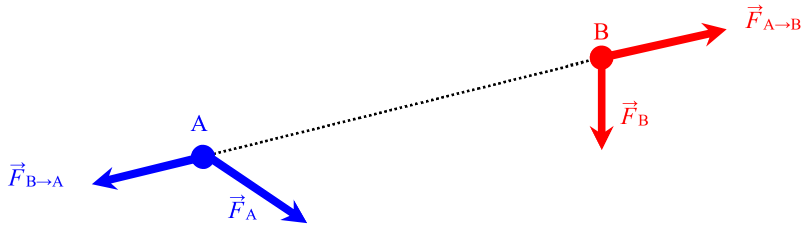
問題 5-7　直線上を質量m_A の物体Aが速度vで動いている. その後，物体Aは静止している質量m_B の物体Bに衝突した. 衝突後も直線状を運動するものとして，反発係数eを用いて衝突後の物体AとBの速度v_A' とv_B' を求め，次に衝突後の全運動エネルギーK_{tot}'を求め，弾性衝突の場合，全運動エネルギーが保存されることを確認せよ.

5-2.　2体系の重心運動と相対運動

質量 m_A と質量 m_B となる 2 つの質点 A と B がある. この 2 つの質点 A と B の位置を $\vec{r}_A$ と $\vec{r}_B$ とする. 下の図のように, 質点 A には質点 B からの力 $\vec{F}_{B\to A}$ と外力 $\vec{F}_A$ が作用している. 質点 B には質点 A からの力 $\vec{F}_{A\to B}$ と外力 $\vec{F}_B$ が作用している(下の図では作用反作用の力は斥力として示した. また, 作用反作用の関係の力は, 2 つの物体間の相互作用を及ぼす力でもある).

2 つの質点に対する運動方程式は下の式のように表すことができる.

$$
\begin{cases}
m_A \dfrac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_A & \text{(5-2-1)} \\[2ex]
m_B \dfrac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2} = \vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_B & \text{(5-2-2)}
\end{cases}
$$



2 つの質点の質量の中心となる位置を重心と呼び, 重心の位置 $\vec{R}_G$ は下の式で定義される.

$$(m_A + m_B)\vec{R}_G = m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B \quad \rightarrow \quad \vec{R}_G = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B} \qquad \text{(5-2-3)}$$

さらに, 質点 B からみた質点 A の相対位置(B を基準とした A の位置) $\vec{r}_{B\to A}$ を下の式で定義する.

$$\vec{r}_{B\to A} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \qquad \text{(5-2-4)}$$

(5-2-1)式と(5-2-2)式を加えると, 下の式のように左辺は重心の位置 $\vec{R}_G$ に関する時間の 2 階微分となり, 右辺は作用反作用の関係の力が打ち消される.

$$(m_A + m_B)\frac{d^2 \vec{R}_G}{dt^2} = \vec{F}_A + \vec{F}_B \qquad \text{(5-2-5)}$$

さらに, 下の式のように系の全質量 M と外力の合力 $\vec{F}$ を表すと, 重心に関する運動方程式は(5-2-8)式で表すことができ, 重心の運動は外力の総和 $\vec{F}_{tot}$ が関与し, 作用反作用の関係の力は関与しない.

$$\begin{cases} M = m_A + m_B & (5\text{-}2\text{-}6) \\ \vec{F}_{tot} = \vec{F}_A + \vec{F}_B & (5\text{-}2\text{-}7) \end{cases}$$

$$M \frac{d^2 \vec{R}_G}{dt^2} = \vec{F}_{tot} \qquad (5\text{-}2\text{-}8)$$

一方,「(5-2-1)式/m_A – (5-2-2)式/m_B」の計算をすると,左辺は相対位置 $\vec{r}_{B\to A}$に関する時間の2階微分となる.右辺は作用反作用の関係を用いて下の式で表すことができる.

$$\frac{d^2 \vec{r}_{B\to A}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right) \vec{F}_{B\to A} + \frac{\vec{F}_A}{m_A} - \frac{\vec{F}_B}{m_B} \qquad (5\text{-}2\text{-}9)$$

ここで,下の式で表される換算質量 μ を用いると,上の式は下の式のように換算質量を持った質点の運動方程式のようになる,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \qquad \to \qquad \mu = \frac{m_A\, m_B}{m_A + m_B} \qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_{B\to A}}{dt^2} = \vec{F}_{B\to A} + \frac{m_B}{M} \vec{F}_A - \frac{m_A}{M} \vec{F}_B \qquad (5\text{-}2\text{-}11)$$

特に,外力が働いていない場合($\vec{F}_A = \vec{F}_B = 0$)では下の式で相対位置に関する運動方程式を表すことができる.この運動は作用反作用の関係の力が関与する.

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_{B\to A}}{dt^2} = \vec{F}_{B\to A} \qquad (5\text{-}2\text{-}11)$$

例えば,質点(物体)A として惑星,質点(物体)B として太陽を考えた場合($m_A << m_B$),その相対位置$\vec{r}_{B\to A}$は太陽を原点としたときの惑星の位置に相当し,力$\vec{F}_{B\to A}$は惑星と太陽の間の万有引力となる.換算質量μは,$\mu \sim m_A$ (ほぼ,惑星の質量, $1/\mu = 1/m_A + 1/m_B \sim 1/m_A$ と近似できる.さらに,1 次の微小量までとると,$\mu \sim m_A - m_A^2/m_B$)となる.このとき,(5-2-11)式は,ほぼ「惑星に対する運動方程式」となる.

*** 力学的エネルギー**

2 つの質点 A と B の位置$\vec{r}_A$と$\vec{r}_B$を用いて,(5-2-3)式で重心の位置$\vec{R}_G$ と(5-2-4)式で相対位置$\vec{r}_{B\to A}$を与えた.逆に位置$\vec{r}_A$ と$\vec{r}_B$に対し,重心の位置$\vec{R}_G$ からの変位 $\delta\vec{r}_A$ と $\delta\vec{r}_B$ に対し,相対位置$\vec{r}_{B\to A}$を用いると,下の式のように表すことができる.

$$\begin{cases} \vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{R}_{\mathrm{G}} + \delta\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{R}_{\mathrm{G}} + \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{M}\vec{r}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \\ \\ \vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{R}_{\mathrm{G}} + \delta\vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{R}_{\mathrm{G}} - \dfrac{m_{\mathrm{A}}}{M}\vec{r}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \end{cases} \tag{5-2-12}$$

上の式で時間微分をとって，質点 A と B の速度$\vec{v}_{\mathrm{A}}$と$\vec{v}_{\mathrm{B}}$について，重心の速度$\vec{V}_{\mathrm{G}}$と相対位置の速度$\vec{v}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$を用いて表すことができる．さらに，2 体の全運動エネルギーK_{tot}を計算すると下の式のように重心運動の運動エネルギーと相対運動の運動エネルギーの和で表すことができる．

$$K_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}{}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}{}^2 = \frac{1}{2}MV_{\mathrm{G}}{}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}{}^2 \tag{5-2-13}$$

さらに，外力が働いていない場合($\vec{F}_{\mathrm{A}} = \vec{F}_{\mathrm{B}} = 0$)は，(5-2-8)式より，重心の速度$\vec{V}_{\mathrm{G}}$は一定となり，重心運動の運動エネルギーも一定となる．作用反作用の関係の力となる$\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$に対し，「$\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -\vec{\nabla}U$」を満たす位置エネルギー$U(\vec{r}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}})$が存在する場合は，相対運動に関して，下の式で表すことができるような，力学的エネルギー保存則が成立する．

$$\frac{1}{2}\mu v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}{}^2 + U(\vec{r}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}) = \text{一定} \tag{5-2-14}$$

*** 運動量**

2 つの質点 A と B の運動量を$\vec{p}_{\mathrm{A}}$と$\vec{p}_{\mathrm{B}}$として，全運動量$\vec{p}_{\mathrm{tot}}$は(5-2-12)式を用いると下の式のように重心の運動による運動量$\vec{p}_{\mathrm{G}}$と等しい．

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = \vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + m_{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = \vec{p}_{\mathrm{G}} \tag{5-2-15}$$

*** 角運動量**

2 つの質点 A と B の角運動量を$\vec{L}_{\mathrm{A}}$と$\vec{L}_{\mathrm{B}}$とすると，全角運動量$\vec{L}_{\mathrm{tot}}$は(5-2-12)式を用いると下の式のように重心の運動による角運動量$\vec{L}_{\mathrm{G}}$と相対位置の運動による角運動量$\vec{L}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$の総和$\vec{L}_{\mathrm{tot}}$として表すことができる．

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\mathrm{tot}} &= \vec{r}_{\mathrm{A}}\times m_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + \vec{r}_{\mathrm{B}}\times m_{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \vec{R}_{\mathrm{G}}\times M\frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} + \delta\vec{r}_{\mathrm{A}}\times m_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + \delta\vec{r}_{\mathrm{B}}\times m_{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{R}_{\mathrm{G}}\times M\frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} + \vec{r}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}\times\mu\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \vec{L}_{\mathrm{G}} + \vec{L}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \end{aligned} \tag{5-2-16}$$

*** 力のモーメント**

同様に力のモーメントの合計も計算すると下の式で表すことができる.

$$\vec{M}_{\rm tot} = \vec{r}_{\rm A} \times (\vec{F}_{\rm B\to A} + \vec{F}_{\rm A}) + \vec{r}_{\rm B} \times (\vec{F}_{\rm A\to B} + \vec{F}_{\rm B})$$

$$= \vec{R}_{\rm G} \times \vec{F}_{\rm tot} + \vec{r}_{\rm B\to A} \times \vec{F}_{\rm B\to A} + \vec{r}_{\rm B\to A} \times \left(\frac{m_{\rm B}}{M}\vec{F}_{\rm A} - \frac{m_{\rm A}}{M}\vec{F}_{\rm B}\right) \qquad (5\text{-}2\text{-}17)$$

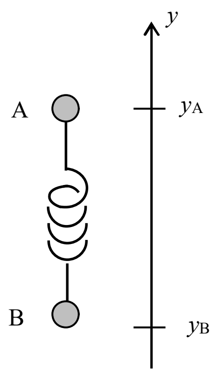
上の式から, 力のモーメントにおいて, 外力が作用しない場合($\vec{F}_{\rm A} = \vec{F}_{\rm B} = 0$)は, 力のモーメントは, 「$\vec{M}_{\rm tot} = \vec{r}_{\rm B\to A} \times \vec{F}_{\rm B\to A}$」となり, 相対位置と作用反作用の力の外積で表すことができる.

*** 角運動量に関する運動方程式**

角運動量の総和として表された(5-2-16)式に対して, 時間微分し, 角運動量に対する運動方程式を求めると, (5-2-17)式より, 下の式で表すことができる.

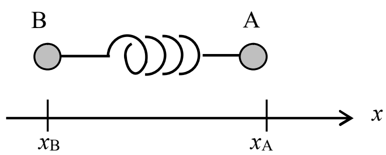
$$\frac{d\vec{L}_{\rm tot}}{dt} = (\vec{R}_{\rm G} \times \vec{F}_{\rm tot}) + \vec{r}_{\rm B\to A} \times \left(\vec{F}_{\rm B\to A} + \frac{m_{\rm B}}{M}\vec{F}_{\rm A} - \frac{m_{\rm A}}{M}\vec{F}_{\rm B}\right) \qquad (5\text{-}2\text{-}18)$$

問題 5-8　同じ質量mとなる2つの物体AとBが, 図のようにばね定数k, 自然の長さℓのばねによって, 鉛直につながれている. 時刻t=0で2つの物体(物体Bの初期位置$y_{\rm B}(0) = 0$とする)が自由落下したとすると, 時刻tでの重心の位置$Y_{\rm G}$と相対位置$y_{\rm B\to A}$の運動を調べよ(運動方程式をたてて解く).



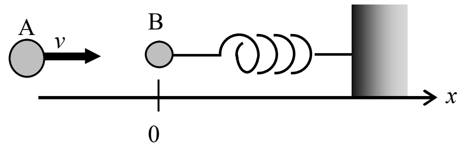
問題 5-9(省略してよい)　質量mと$3m$となる2つの物体AとBが, 上の図のようにばね定数k, 自然の長さℓのばねによって, 鉛直につながれている. 時刻t=0で2つの物体(物体Bの初期位置$y_{\rm B}(0) = 0$とする)が自由落下したとすると, 時刻tでの重心の位置$Y_{\rm G}$と相対位置$y_{\rm B\to A}$の運動を調べよ.

問題 5-10(省略してよい)　質量$m_{\rm A}$と$m_{\rm B}$となる2つの物体AとBが, 右の図のようにばね定数k, 自然の長さℓのばねによって, 摩擦の影響がない水平面に置かれている. 時刻t=0で2つの物体(物体Bの初期位置$x_{\rm B}(0) = 0$とする)の, 時刻tでの重心の位置$X_{\rm G}$と相対位置$x_{\rm B\to A}$の運動を調べよ.



また，物体AとBの運動エネルギーをそれぞれ求め，その和が，相対位置に関する運動エネルギーと等しくなっていることを確認せよ．

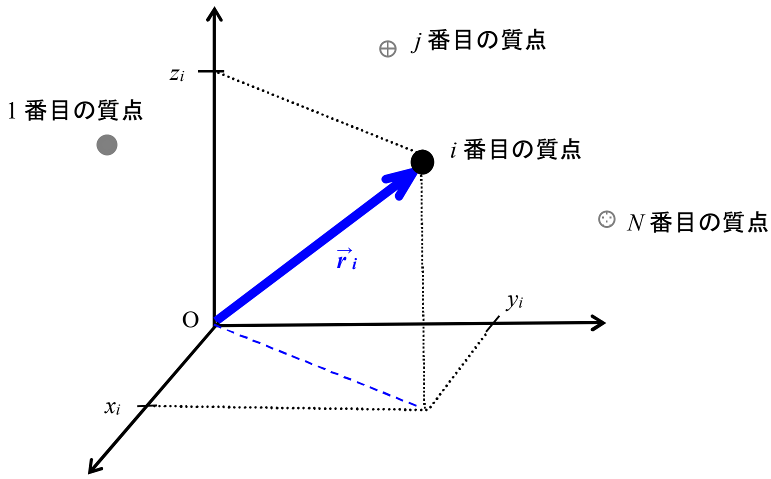
問題　5-11(省略してよい)　速さvで水平に動いていた質量m_Aとの物体Aがばね定数kのばねにつながっていたm_Bの物体Bに弾性衝突し，跳ね返えされた．衝突後に跳ね返された物体Aの速さv'，物体Aの失った運動エネルギーΔK，ばねの最大の縮みx_{max}を求めよ．



5-3.　質点系と剛体の運動

* 質点系

N 個の質点がある系を考えよう．1 番目の質点は質量 m_1 で位置$\vec{r}_1$とする．2 番目以降も同様にして，i 番目の質点は質量 m_i で位置$\vec{r}_i\,(i = 1 \sim N)$とする．このような多数の質点からなる系を「質点系」と呼ぶ．



質点系における全体の質量 M と重心(質量中心)の位置$\vec{R}_G$は下の式で表すことができる．

$$M = (m_1 + m_2 + \dots \quad + m_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$

$$M\,\vec{R}_G = (m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 + \dots \quad + m_N\,\vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i \qquad (5\text{-}3\text{-}2)$$

また，位置$\vec{r}_i$ を重心の位置$\vec{R}_G$と重心の位置からの変位 $\delta\vec{r}_i$とする．

$$\vec{r}_i = \vec{R}_G + \delta\vec{r}_i \tag{5-3-3}$$

(5-3-2)式より，下の式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \delta\vec{r}_i = 0 \tag{5-3-4}$$

① 重心の並進運動に関する運動方程式

i 番目の質点には，(i 番目(自分自身)を除いた)j 番目の質点からの力$\vec{F}_{j\to i}$と外力$\vec{F}_i$が作用している．質点系内部の他の質点からの力は内力であり，力$\vec{F}_{j\to i}$と$\vec{F}_{i\to j}$とは作用反作用の関係の力である($\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$)．$i$ 番目の質点に対する運動方程式は下の式のように表すことができる．

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \vec{F}_{j\to i} + \vec{F}_i \tag{5-3-5}$$

(5-3-2)の式で両辺に対し，時間の 2 階微分をとり，(5-3-5)式と作用反作用の関係式を用いると，重心の並進運動に関する運動方程式を得ることができる．

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \vec{F}_{j\to i} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \underbrace{(\vec{F}_{j\to i} + \vec{F}_{i\to j})}_{\mathbf{0}\ (\text{作用反作用の法則より})} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

$$\to \quad M\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_G}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \vec{F}_{\mathrm{tot}} \tag{5-3-6}$$

上の式より，重心の運動は外力の合力の総和$\vec{F}_{\mathrm{tot}}$に関係し，内力(作用反作用の力)は寄与しない．また，運動量の総和$\vec{p}_{\mathrm{tot}}$は下の式のように重心の運動量$\vec{p}_G$に等しい．

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{R}_G + \delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{R}_G}{\mathrm{d}t} + \overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} m_i\delta\vec{r}_i}^{0} = M\frac{\mathrm{d}\vec{R}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{p}_G \tag{5-3-7}$$

② 重心の回転運動に関する運動方程式

i 番目の質点に対する角運動量$\vec{L}_i$は下の式で表すことができる．

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \tag{5-3-7}$$

したがって，角運動量の総和$\vec{L}_{\mathrm{tot}}$に関する(回転運動に関する)運動方程式(角運動量$\vec{L}_{\mathrm{tot}}$に対する 1 階の時間微分)は下の式のように，外力による力のモーメントの総和$\vec{M}_{\mathrm{tot}}$となる.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \left\{ \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} \underbrace{(\vec{F}_{j\to i} + \vec{F}_{i\to j})}_{0} + \vec{F}_i \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_{\mathrm{tot}} \tag{5-3-8}$$

また，角運動量$\vec{L}_{\mathrm{tot}}$について，重心の位置$\vec{R}_{\mathrm{G}}$と重心の位置からの変位 $\delta\vec{r}_i$を用いて表すと下の式で表すことができる. ここで，原点 O からみた重心の角運動量$\vec{L}_{\mathrm{G}}$と重心の位置からみた質点 i の角運動量を $\delta\vec{L}_i$とする.

$$\vec{L}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_{\mathrm{G}} + \delta\vec{r}_i) \times m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{R}_{\mathrm{G}} + \delta\vec{r}_i) = \vec{R}_{\mathrm{G}} \times M \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} + \vec{R}_{\mathrm{G}} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\delta\vec{r}_i}_{0} \times \vec{R}_{\mathrm{G}} + \sum_{i=1}^{N}\delta\vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$= \vec{R}_{\mathrm{G}} \times M \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{N}\delta\vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{L}_{\mathrm{G}} + \sum_{i=1}^{N}\delta\vec{L}_i \tag{5-3-9}$$

さらに，(5-3-8)式の右辺にある力のモーメントの総和$\vec{M}_{\mathrm{tot}}$について，重心に働く力のモーメント$\vec{M}_{\mathrm{G}}$と重心の位置からみた質点 i に働く力のモーメント $\delta\vec{M}_{\mathrm{i}}$とする.

$$\vec{M}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_{\mathrm{G}} + \delta\vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \vec{R}_{\mathrm{G}} \times \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\delta\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{R}_{\mathrm{G}} \times \vec{F}_{\mathrm{tot}} + \sum_{i=1}^{N}\delta\vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \vec{M}_{\mathrm{G}} + \sum_{i=1}^{N}\delta\vec{M}_i \tag{5-3-10}$$

したがって，重心の角運動量と重心の位置からみた質点 i の角運動量 $\delta\vec{L}_i$に対し，下の運動方程式が成り立つ. (5-3-11)式は重心の回転運動に関する運動方程式で，(5-3-12)式は重心の位置からの変位の総和の回転運動に関する運動方程式である.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{R}_G \times \vec{F}_{tot} = \vec{M}_G \tag{5-3-11}$$

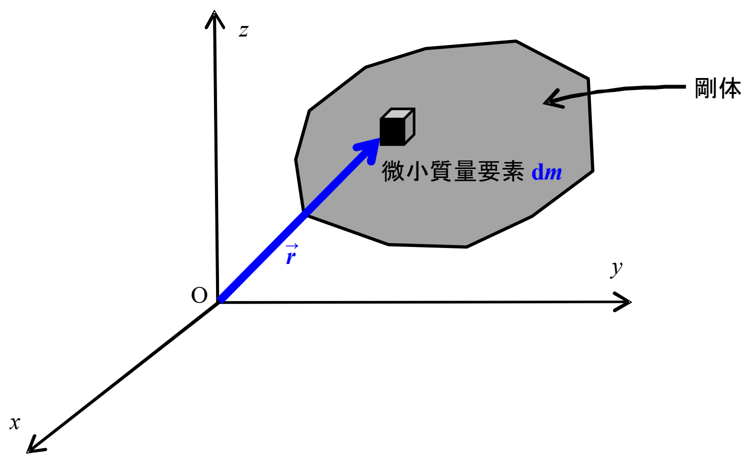
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\delta\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{M}_i \tag{5-3-12}$$

重心の位置を原点($\vec{R}_G = 0$)に選ぶと，重心の角運動量$\vec{L}_G$は一定となる(重心の回転運動の運動方程式は下の式).

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5-3-13}$$

＊ **剛体**

「剛体とは大きさをもった物体で，力を加えても変形しない物体」を指す.「剛体」は微小な質点が連続的につながっており，微小質量間の距離は変わらない.



剛体全体の質量 M は，剛体の微小質量要素を $\mathrm{d}m$ とすると，剛体全体に積分したものとなる. 剛体が立体的な大きさを持つ場合は，密度 σ と微小体積 $\mathrm{d}V$ を用いて，「$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}V$」と表すことができるので下の積分で表すことができる.

$$M = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m = \int_{(\text{剛体内})} \sigma\,\mathrm{d}V \tag{5-3-14}$$

質点系と同様に剛体の重心(質量中心)の位置$\vec{R}_G$は下の式で表すことができる.

$$M\,\vec{R}_G = \int_{(\text{剛体内})} \vec{r}\,\mathrm{d}m = \int_{(\text{剛体内})} \vec{r}\,\sigma\,\mathrm{d}V \tag{5-3-15}$$

さらに，質点系と同様に，重心の位置$\vec{R}_G$と重心の位置からの変位 $\delta\vec{r}$とすると，「$\vec{r} = \vec{R}_G + \delta\vec{r}$」と表され，下の式が成り立つ．

$$\int_{(剛体内)} \delta\vec{r}\ \mathrm{d}m = 0 \tag{5-3-16}$$

③ **重心の並進運動に関する運動方程式**

剛体は連続体で変形しないので，微小質量要素の間には作用反作用の法則となる力を考慮しなくともよい．そこで，微小質量要素 dm に対して微小外力 d$\vec{F}$が作用するものとすると，運動方程式は下の式で表すことができる．

$$\mathrm{d}m\ \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{d}\vec{F}$$

これを剛体全体で積分すると，剛体の重心の並進運動に関する運動方程式をえることができる．下の式で$\vec{F}_{tot}$ は剛体全体に働く外力の総和$\vec{F}_{tot}$となる(外力が剛体の各部分$\vec{r}_i$で作用し，外力の数が J 個あるときは，「$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{J} \vec{F}_i$ 」)．

$$\int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\ \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}\int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\ \vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}(M\ \vec{R}_G) = M\ \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_G}{\mathrm{d}t^2} = \int_{(剛体内)} \mathrm{d}\vec{F} = \vec{F}_{tot} \tag{5-3-17}$$

④ **重心の回転運動に関する運動方程式**

質点系と同様に微小質量要素 dm での微小角運動量 d$\vec{L}$は下の式で与えられ，全角運動量$\vec{L}_{tot}$は剛体全体で積分する．

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{r} \times \mathrm{d}m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (\vec{R}_G + \delta\vec{r}) \times \mathrm{d}m\ (\frac{\mathrm{d}\vec{R}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}}{\mathrm{d}t})$$

全角運動量$\vec{L}_{tot}$は下の式のように計算される．

$$\vec{L}_{tot} = \int_{(剛体内)} \mathrm{d}\vec{L} = \int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\ (\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}) = \int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\ (\vec{R}_G + \delta\vec{r}) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{R}_G + \delta\vec{r})$$

$$= \vec{R}_G \times M\frac{\mathrm{d}\vec{R}_G}{\mathrm{d}t} + \int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\ (\delta\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}}{\mathrm{d}t}) = \vec{L}_G + \delta\vec{L} \tag{5-3-18}$$

したがって，剛体全体の回転運動の関する運動方程式は下の式で与えられる(右辺は外力による力のモーメントの総和$\vec{M}_{tot}$ である．

外力が剛体のある位置$\vec{r}_i$で力$\vec{F}_i$が旗あいており，外力の総数が J 個あるときは，「$\vec{M}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{J} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \int_{(\text{剛体内})} \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$ 」となる．力$\vec{F}$が重力の場合は $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}m\,\vec{g} = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{g}$ と剛体の体積積分となる)．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}_{\text{G}} + \delta\vec{L}) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{G}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \int_{(\text{剛体内})} (\vec{r} \times \mathrm{d}m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2})$$

$$= \int_{(\text{剛体内})} \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = \int_{(\text{剛体内})} (\vec{R}_{\text{G}} + \delta\vec{r}) \times \mathrm{d}\vec{F} = \vec{R}_{\text{G}} \times \vec{F}_{\text{tot}} + \int_{(\text{剛体内})} \delta\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = \vec{M}_{\text{tot}} \tag{5-3-19}$$

質点系と同様に重心と重心からの変位についての回転運動に関する運動方程式を下に示す．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{G}}}{\mathrm{d}t} = \vec{R}_{\text{G}} \times \vec{F}_{\text{tot}} \tag{5-3-20}$$

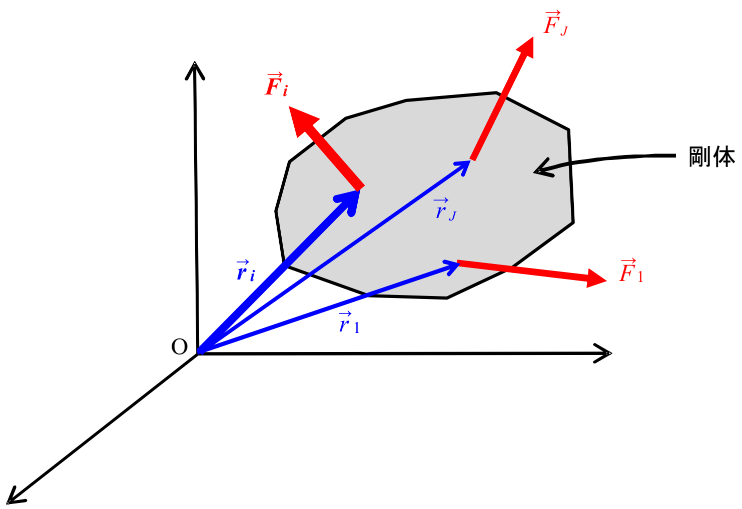
$$\frac{\mathrm{d}\delta\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \int_{(\text{剛体内})} \delta\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} \tag{5-3-21}$$

ここでも，重心の位置を原点に選ぶと，重心の角運動量$\vec{L}_{\text{G}}$は一定となる．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{G}}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5-3-22}$$

*** 質点系と剛体におけるつりあい**

質点系，または，剛体において複数の場所(位置) $\vec{r}_i$ ($i = 1 \sim J$)に外から力$\vec{F}_i$ が作用していて，質点系全体，または，剛体全体について，つりあいがとれていて，動き始めたり，回転し始めたりしない条件を考えてみよう．



質点系全体，または，剛体全体が並進運動しないためには，「外からの力がつりあっていること」，すなわち，下の式のように「合力 = 0 」となっていることが必要である．さらに，それらが回転運動しないためには，「力のモーメントがつりあっていること」，すなわち，下の式のように「力のモーメントの総和 = 0」が必要である．

$$\text{合力} = \vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{J} \vec{F}_i = 0 \tag{5-3-23}$$

$$\text{力のモーメントの総和} = \vec{M}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{J} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \tag{5-3-24}$$

* 位置の基準点(原点 O)をずらしたときの「つりあい」

(5-3-24)式は，剛体がある位置を原点 O にとったときに回転し始めないための条件式であった．別な位置を原点にとっても回転し始めないはずである．これを確認する．

あらたな原点 O'として，元の原点と位置$\vec{r}_{\mathrm{o}}$だけずれているとしよう．原点 O'からみた位置を$\vec{r}_i{}'$ とすると下の関係式が成り立つ．

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_{\mathrm{o}} + \vec{r}_i \tag{5-3-25}$$

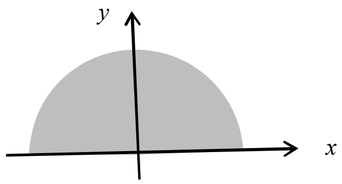
「つりあっている」場合は，原点 O'からの力のモーメントの総和$\vec{M}_{\mathrm{tot}}{}'$ は，下の式のように，1 項目は「合力 = 0」より，2 項目は元の原点 O における「力のモーメントの総和$\vec{M}_{\mathrm{tot}} = 0$」より，「0」となる．そのため，新たな原点 O'のまわりでも回転し始めない．

$$\vec{M}_{\mathrm{tot}}{}' = \sum_{i=1}^{J} \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{J} (\vec{r}_{\mathrm{o}} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{\mathrm{o}} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{J} \vec{F}_i}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{J} \vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{0} = 0 \tag{5-3-26}$$

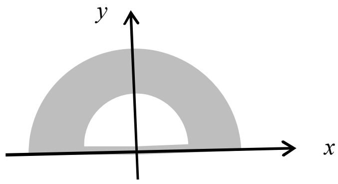
問題 5-12 質量m_1 = 2.0 kgの質点1が位置$\vec{r}_1$ = (1.0 , 2.0 , –2.0) mに，質量m_2 = 3.0 kgの質点2が位置$\vec{r}_2$ = (–3.0 , 1.0 , 4.0) mに，質量m_3 = 5.0 kgの質点3が位置$\vec{r}_3$ = (1.0 , –3.0 , 2.0) mにある．系全体の質量Mと重心の位置$\vec{R}_{\mathrm{G}}$を求めよ．

問題 5-13 線密度σ_1 = 2.0 kg/mの長さℓ_1 = 4.0 mの棒1に，線密度σ_2 = 4.0 kg/mの長さℓ_2 = 3.0 mの棒2が棒1の横にくっついている．系全体の質量Mと重心の位置X_{G}(棒1の端からの位置)を求めよ．

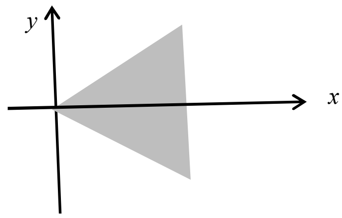
問題 5-14　面密度σで半径aの半円がある．半円の直径部分をx軸に選ぶと，この半円の重心の位置$\vec{R}_G = (0, Y_G)$を求めよ．



問題 5-15　面密度σで半径$2a$の半円の中で半径aとなっている部分が中空となっている．この中空がある半円の重心の位置$\vec{R}_G = (0, Y_G)$を求めよ．

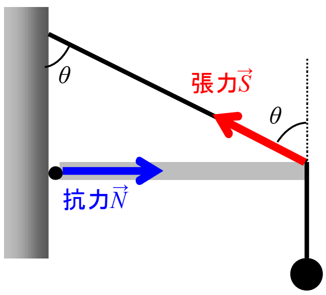


問題 5-16　図のように，面密度σで1辺の長さ$2a$の正三角形がある．この正三角形の重心の位置$\vec{R}_G = (X_G, 0)$を求めよ．

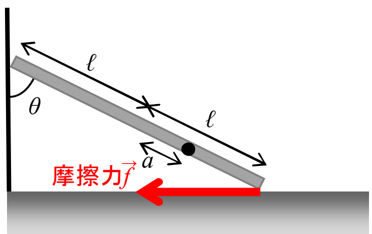


問題 5-17　密度σで半径aの半球がある．半球の底面をxy平面に選ぶと，この半球の重心の位置$\vec{R}_G = (0, 0, Z_G)$を求めよ．

問題 5-18　図のように，質量Mの一様な長さ2ℓの剛体棒の1端が自由に回転するちょうつがいで壁に取りつけられ，もう一つの端には質量mのおもりと糸がつけられていて，剛体棒はひもで水平に支えられている．図にかいてある糸の張力の大きさSとちょうつがいのところで剛体棒に働く抗力の大きさNを求めよ．



問題 5-19　図のように質量M，長さ2ℓの剛体棒が摩擦の影響がある床面と摩擦の影響がない壁に立てかけられている．剛体棒の中央から長さaとなる場所には質量mのおもり(質点)が埋め込まれている．剛体棒が滑り降りないときの静止摩擦力の大きさfを求めよ．



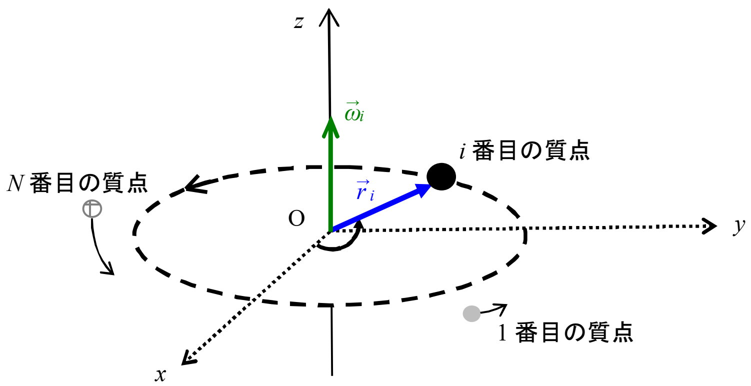
5-4.　質点系と剛体の角運動量と慣性モーメント

ここでは，回転運動している質点系と剛体に対し，角運動量と慣性モーメントについて調べよう(並進運動はないとする)．

*** 質点系**

① 質点が xy 平面上に分布

N 個の質点が，xy 平面上に分布し，原点 O を中心として z 軸のまわりに回転しているとしよう．質量 m_i の i 番目の質点の位置 $\vec{r}_i = (x_i, y_i, 0)$ で，回転の角速度ベクトル $\vec{\omega}_i = (0, 0, \omega_i)$ とする($i = 1 \sim N$)．



回転半径 ρ_i は原点からの距離で，i 番目の質点の角運動量の z 成分 $L_{z\,i}$ は，i 番目の質点の慣性モーメント I_i を用いて，下の式で表すことができる．

$$L_{z\,i} = m_i \rho_i^{\,2}\, \omega_i = m_i\,(x_i^{\,2} + y_i^{\,2})\,\omega_i = I_i\,\omega_i \qquad (5\text{-}4\text{-}1)$$

したがって，各質点の回転半径 ρ_i が時間変化しない場合，質点系における回転の運動方程式は下の式で表すことができる．

$$\sum_{i=1}^{N} I_i \frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t} = M_{\mathrm{tot}\,z} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i\Big)_z \qquad (5\text{-}4\text{-}2)$$

全ての質点が同じ角速度 ω で回転している場合($\omega_i = \omega$)，質点系の慣性モーメント I と回転に関する運動方程式は下の式で表される(角運動量は z 成分しかないので，時間微分しても回転の効果は出ない．→ $\mathrm{d}\vec{e}_z/\mathrm{d}t = 0$ [1])．

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\rho_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} I_i \qquad (5\text{-}4\text{-}3)$$

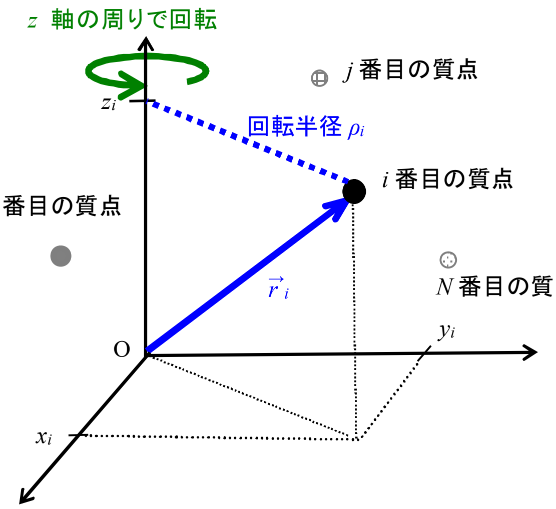
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_{\mathrm{tot}\,z} \qquad (5\text{-}4\text{-}4)$$

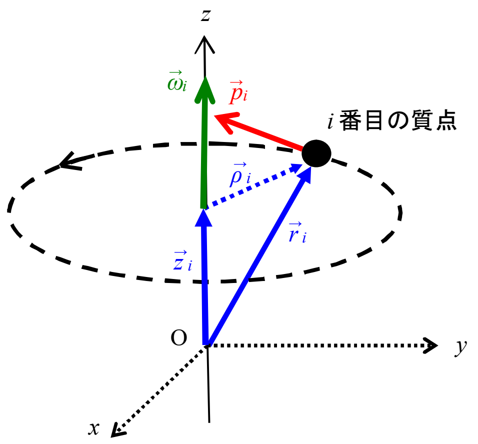
[1] 回転の効果が表れる場合としては，動径方向の時間微分などがある．→ $\mathrm{d}\vec{e}_\rho/\mathrm{d}t = \vec{e}_\theta(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t) = \vec{e}_\theta\,\omega$ のように計算する．

② N 個の質点が 3 次元空間に分布 (* 計算が複雑となるので，初学者は省略すべき)

次に，N 個の質点が 3 次元空間に分布し，z 軸が回転軸となる回転運動の場合を考えよう．i 番目の質点の位置$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = \vec{\rho}_i + \vec{z}_i$ (ここで，$\vec{\rho}_i = (x_i, y_i, 0)$, $\vec{z}_i = (0, 0, z_i)$)とする．回転半径 ρ_i は z 軸からの距離となり，下の式で表すことができる．

$$\rho_i = \sqrt{x_i^{\,2} + y_i^{\,2}} \tag{5-4-5}$$





i 番目の質点の角運動量$\vec{L}_i$は(4-2-10)式を拡張して下の式で表される($\vec{\omega}_i\times\vec{\rho}_i = \omega_i\,\vec{e}_z\times\rho_i\,\vec{e}_\rho = \omega_i\,\rho_i\,\vec{e}_\theta$ を使う)．

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i\times\vec{p}_i = (\rho_i\,\vec{e}_\rho + z_i\,\vec{e}_z)\times m_i\Bigl(\frac{d\rho_i}{dt}\,\vec{e}_\rho + \overbrace{\vec{\omega}_i\times\vec{\rho}_i}^{\text{回転の効果(角速度ベクトル}\vec{\omega}_i\text{と直交)}} + \frac{dz_i}{dt}\,\vec{e}_z\Bigr) \tag{5-4-6}$$

$$= 0 + m_i\,\rho_i^{\,2}\,\omega_i\,\vec{e}_z - m_i\,\rho_i\,\frac{dz_i}{dt}\,\vec{e}_\theta + m_i\,z_i\,\frac{d\rho_i}{dt}\,\vec{e}_\theta - m_i\,z_i\,\omega_i\,\rho_i\,\vec{e}_\rho + 0$$

$$= m_i\,\rho_i^{\,2}\,\omega_i\,\vec{e}_z + m_i\Bigl(z_i\frac{d\rho_i}{dt} - \rho_i\frac{dz_i}{dt}\Bigr)\vec{e}_\theta - m_i\,\rho_i\,z_i\,\omega_i\,\vec{e}_\rho \tag{5-4-6'}$$

(4-2-15)式で示したのと同様に，回転半径 ρ と位置の z 成分が一定($d\rho_i/dt = dz_i/dt = 0$)で，回転の角速度も同じ値($\omega_i = \omega$)をとる場合 [2] は，角運動量$\vec{L}$は下の式で表される．

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N}(m_i\,\rho_i^{\,2}\,\omega\,\vec{e}_z - m_i\,\rho_i\,z_i\,\omega\,\vec{e}_\rho) = \sum_{i=1}^{N} m_i\bigl(-x_i\,z_i\,\vec{e}_x - y_i\,z_i\,\vec{e}_y + (x_i^{\,2} + y_i^{\,2})\,\vec{e}_z\bigr)\,\omega \tag{5-4-7}$$

[2] 「剛体」では，複数の微小質量要素において，「$d\rho/dt = 0$，同じ角速度 ω で回転」という条件は，恒に成立する．並進運動しない場合は，「$dz/dt = 0$」も成立する．

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (-x_i z_i, -y_i z_i, x_i^2 + y_i^2)\, \omega \qquad \text{(5-4-7)'}$$

質点系の空間分布として，z 方向と動径方向の対称性が良い場合， $\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i = 0$ を満たし，角運動量$\vec{L}$は z 成分のみ有する($\vec{L} = (0, 0, L_z)$)ことになる．

ここで扱った回転運動では，角速度ベクトル$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, \omega)$と z 成分のみを持っていた($\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$)が，慣性モーメントに対して成分を持つとして，下の式のように 3 つの成分を導入しよう．

$$\begin{cases} I_{xz} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i & \text{(5-4-8a)} \\ I_{yz} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i & \text{(5-4-8b)} \\ I_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) & \text{(5-4-8c)} \end{cases}$$

この表示を用いると，(5-4-7)’式で示した角運動量$\vec{L}$は次の式で表すことができる．

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xz}\,\omega_z, I_{yz}\,\omega_z, I_{zz}\,\omega_z) = \sum_{i=x}^{z} I_{iz}\,\omega_z\, \vec{e}_i \qquad \text{(5-4-9)}$$

* 回転軸の一般化

上では，z 軸を回転軸とした場合の 3 次元に分布する質点系に対する「回転運動に関する運動方程式」であった．これを回転軸が任意の向きとなるような場合(角速度ベクトル$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$)に一般化しよう．

(1)　x 軸が回転軸となる場合(yz 平面が回転面)

この場合，角速度ベクトル$\vec{\omega} = (\omega_x, 0, 0)$ で，z 軸を回転軸とした場合に対して，循環的にその向きを変えることで表現する．すなわち，z 成分 → x 成分，x 成分 → y 成分，y 成分 → z 成分へと循環的にその成分を変えるとよい．(5-4-7)式が下の式に変更される．

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (-y_i x_i\, \vec{e}_y - z_i x_i\, \vec{e}_z + (y_i^2 + z_i^2)\, \vec{e}_x)\, \omega_x$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i ((y_i^2 + z_i^2)\, \vec{e}_x - y_i x_i\, \vec{e}_y - z_i x_i\, \vec{e}_z)\, \omega_x = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2, -y_i x_i, -z_i x_i)\, \omega_x \qquad \text{(5-4-10)}$$

x 軸を回転軸とした場合の慣性モーメントの成分と角運動量$\vec{L}$について，下の式で表す．

$$\begin{cases} I_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i{}^2 + z_i{}^2) & \text{(5-4-11a)} \\ I_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i x_i & \text{(5-4-11b)} \\ I_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i & \text{(5-4-11c)} \end{cases}$$

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx}\,\omega_x, I_{yx}\,\omega_x, I_{zx}\,\omega_x) = \sum_{i=x}^{z} I_{ix}\,\omega_x\,\vec{e}_i \qquad \text{(5-4-12)}$$

(2) y 軸が回転軸となる場合(zx 平面が回転面)

y 軸を回転軸とする場合は，(5-4-11)式から循環的に，x 成分 $\rightarrow y$ 成分，y 成分 $\rightarrow z$ 成分，z 成分 $\rightarrow x$ 成分へと変更することで角運動量$\vec{L}$を表す．

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (-z_i y_i\,\vec{e}_z - x_i y_i\,\vec{e}_x + (z_i{}^2 + x_i{}^2)\,\vec{e}_y)\,\omega_y$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (-x_i y_i, z_i{}^2 + x_i{}^2, -z_i y_i)\,\omega_y \qquad \text{(5-4-13)}$$

y 軸を回転軸とした場合の慣性モーメントの成分と角運動量$\vec{L}$は下の式で表す．

$$\begin{cases} I_{xy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & \text{(5-4-14a)} \\ I_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m\,(z_i{}^2 + x_i{}^2) & \text{(5-4-14b)} \\ I_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i z_i y_i & \text{(5-4-14c)} \end{cases}$$

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xy}\,\omega_y, I_{yy}\,\omega_y, I_{zy}\,\omega_y) = \sum_{i=x}^{z} I_{iy}\,\omega_y\,\vec{e}_i \qquad \text{(5-4-15)}$$

(3) 回転軸の一般化

回転軸が任意の向きとなるときの表現についてまとめる．角速度ベクトル$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$で，3 成分がある場合を扱おう．慣性モーメント$\overleftrightarrow{I}$を下の式のように行列の形で表す．これを「慣性モーメントテンソル」と呼ぶ．

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{bmatrix} y_i^{\,2}+z_i^{\,2} & -y_i\,x_i & -z_i\,x_i \\ -x_i\,y_i & z_i^{\,2}+x_i^{\,2} & -z_i\,y_i \\ -x_i\,z_i & -y_i\,z_i & x_i^{\,2}+y_i^{\,2} \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}4\text{-}16)$$

角運動量$\vec{L}$は上の行列と(3 行 1 列の列ベクトルで表した)角速度ベクトル$\vec{\omega}$を用いると，下の関係式で表すことができる．質点の分布について，対称性がよい場合は非対角項が 0 になり，対角成分のみが残る．対称性がよいようにとった座標系における回転軸(非対角項 = 0 となるような軸)を「慣性主軸」と呼ぶ．

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\ \vec{\omega} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}4\text{-}17)$$

＊ ベクトル公式を用いた計算 (さらに，省略すべき)

(5-4-6)式では，角速度ベクトル$\vec{\omega}$で回転している質点系に対する角運動量が提示された．角速度ベクトル$\vec{\omega}$と動径ベクトル$\vec{\rho}_i$の外積は，角速度ベクトル$\vec{\omega}$と位置$\vec{r}_i$の外積と等しいので，「$d\rho_i/dt = dz/dt = 0$」の条件のもと，質点系が回転している場合，(5-4-6)式は下の式で表すことができる(回転している質点の速度$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$)．

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i\,(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \qquad (5\text{-}4\text{-}18)$$

上の式に式にベクトル公式「$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\ \vec{c}$」を適用させる[3]と下の式が導出できる．

$$\vec{L}_i = m_i\,\{\,(\vec{r}_i \bullet \vec{r}_i)\ \vec{\omega}\ -(\vec{r}_i \bullet\ \vec{\omega}_i)\ \vec{r}_i)\} \qquad (5\text{-}4\text{-}19)$$

$$= m_i\,\{\ (x_i^{\,2}+y_i^{\,2}+z_i^{\,2})\ \vec{\omega}\ -(x_i\ \omega_x + y_i\ \omega_y + z_i\ \omega_z)\ \vec{r}_i\,\}$$

$$\begin{aligned} = m_i\,[\ &\{\,(x_i^{\,2}+y_i^{\,2}+z_i^{\,2})\ \omega_x - (x_i\ \omega_x + y_i\ \omega_y + z_i\ \omega_z)\ x_i\}\ \vec{e}_x \\ &+ \{\,(x_i^{\,2}+y_i^{\,2}+z_i^{\,2})\ \omega_y - (x_i\ \omega_x + y_i\ \omega_y + z_i\ \omega_z)\ y_i\}\ \vec{e}_y \\ &+ \{\,(x_i^{\,2}+y_i^{\,2}+z_i^{\,2})\ \omega_z - (x_i\ \omega_x + y_i\ \omega_y + z_i\ \omega_z)\ z_i\}\ \vec{e}_z\ \ ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = m_i\,[\ &\{\,(\,y_i^{\,2}+z_i^{\,2})\ \omega_x - (\,y_i\ \omega_y + z_i\ \omega_z)\ x_i\}\ \vec{e}_x \\ &+ \{\,(x_i^{\,2}+z_i^{\,2})\ \omega_y - (x_i\ \omega_x + z_i\ \omega_z)\ y_i\}\ \vec{e}_y \\ &+ \{\,(x_i^{\,2}+y_i^{\,2}\,)\ \omega_z - (x_i\ \omega_x + y_i\ \omega_y\,)\ z_i\}\ \vec{e}_z\ \ ] \end{aligned} \qquad (5\text{-}4\text{-}19)'$$

上の式は，(5-4-17)式や(5-4-18)式と一致する．

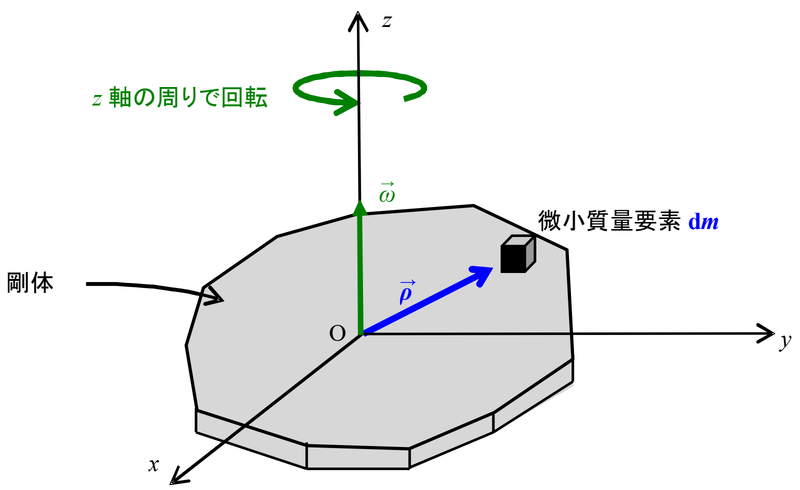
[3] このベクトル公式について，ここでは導出しないが，拙著のテキスト「電磁気学」の(8-3-12)式で導出している．← ベクトルの計算に慣れていない場合は，このベクトル公式の結果のみを参照すること．ベクトル公式を用いなくとも，結果的に同じ式となる．

* **剛体**

脚注 2 において指摘したように，並進運動しない剛体は微小質点間の距離が変わらず($d\rho/dt = dz/dt = 0$)，剛体全体で同じ角速度で回転する($\omega_i = \omega$；微小質量要素間に角速度の違いがない).

③ 剛体(微小質量要素)が回転面(xy 平面)上に配置

質点系と同様に扱うことができる. 質点系は全質点に関して総和を行ったが，剛体では微小質量要素 dm を剛体に対して積分して求める.



剛体全体の角運動量$\vec{L}$ は z 成分のみ有し，その値 L_z は，剛体全体の慣性モーメント I を用いて下の式で表すことができる. ここで，回転半径 $\rho = |\vec{\rho}\,|$で，(体積)密度 σ で，微小質量要素における微小体積 dV である.

$$L_z = \left(\int_{(剛体内)} dm\,\rho^2\right)\omega = I\,\omega \tag{5-4-20}$$

$$I = \int_{(剛体内)} dm\,\rho^2 = \int_{(剛体内)} \rho^2\,\sigma\,dV \tag{5-4-21}$$

また，剛体の回転運動に関する運動方程式は質点系の回転の運動方程式((5-4-4)式)と同じ式で表現される.

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = M_{\mathrm{tot}\,z} \tag{5-4-22}$$

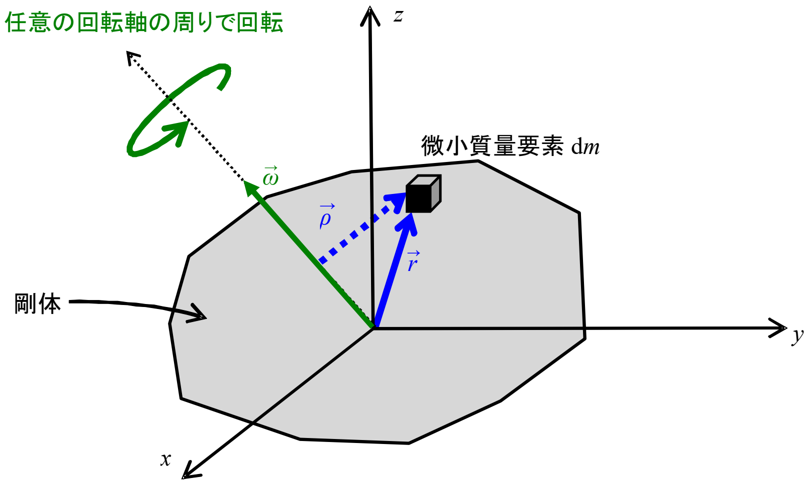
④ 剛体(微小質量要素)が立体(3 次元)的に配置 (* **初学者は省略すべき**)

微小質量要素 dm の位置$\vec{r}$として，回転の角速度ベクトル$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$でこの角速度ベクトルと直交するような平面で回転する

場合は，微小質量要素が持つ微小角運動量 $\mathrm{d}\vec{L}$ は(5-4-18)式と(5-4-19)式より，下の式で表すことができる．

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} = \vec{r} \times \mathrm{d}m\,(\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{5-4-23}$$

$$= \{\,(\vec{r} \bullet \vec{r})\ \vec{\omega} - (\vec{r} \bullet \vec{\omega})\,\vec{r}\,)\}\ \mathrm{d}m \tag{5-4-23'}$$



したがって，剛体全体の角運動量$\vec{L}$は上の式を剛体全体にわたって積分し，慣性モーメントテンソル$\vec{I}$を用いて表す．

$$\vec{L} = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}\vec{L} = \int_{(\text{剛体内})} \{\,(\vec{r} \bullet \vec{r})\ \vec{\omega} - (\vec{r} \bullet \vec{\omega})\,\vec{r}\,)\,\}\ \mathrm{d}m \tag{5-4-24}$$

$$= \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -y\,x & -z\,x \\ -x\,y & z^2+x^2 & -z\,y \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{5-4-24'}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \vec{I}\ \vec{\omega} \tag{5-4-24''}$$

問題　5-20　質量M で長さ2ℓ の棒があり，棒の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントI_1 と端を回転軸とした慣性モーメントI_2 を求めよ．

問題　5-21　質量M で1辺の長さ$2a$ のと$2b$の長方形の板がある．板の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントI_1 と板の端(4角のうちの一つ)を回転軸とした慣性モーメントI_2 を求めよ．

問題 5-22　質量M で半径R の円板がある．円板の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントIを求めよ．

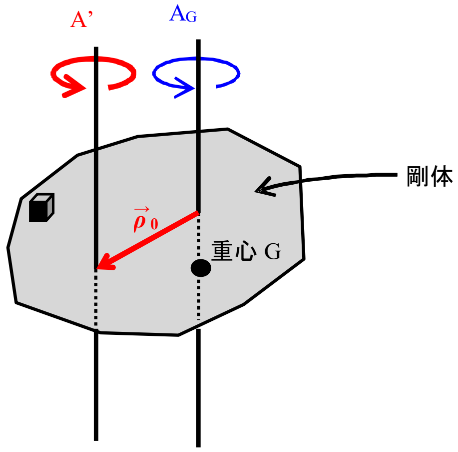
問題 5-23　質量M で外半径aのでで内半径bの円環がある．円環の中心を回転軸とした場合の慣性モーメントIを求めよ．

問題 5-24　質量M で半径Rの球がある．球の直径を回転軸とした場合の慣性モーメントIを求めよ．

問題 5-25　質量M で半径Rで高さaとなる円柱がある．円柱となる円の中心を回転軸とした場合の慣性モーメントIを求めよ．

＊ **平行軸の定理**

平面上に配置された剛体において，重心 G を通過する回転軸 A_G とし，その回転軸 A_G と平行で長さ h だけ離れた新しい回転軸 A’を考えよう．回転軸を A_G としたときの慣性モーメントを I_G とする．回転軸 A_G から見た微小質量要素 dm までの位置$\vec{\rho} = (x , y , 0)$として，回転軸 A’から見た微小質量要素 dm までの位置$\vec{\rho}\,' = (x' , y' , 0)$とする．そして，回転軸 A_G から見た回転軸 A’までの位置$\vec{\rho}_0 = (x_0 , y_0, 0)$とする．3 つの位置ベクトルの関係は下の式で表され，2 つの回転軸の間の距離 h も下の式で表すことができる．



$$\vec{\rho} = \vec{\rho}\,' + \vec{\rho}_0 \qquad (5\text{-}4\text{-}25)$$

$$h = |\vec{\rho}_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \qquad (5\text{-}4\text{-}26)$$

これらの関係から新しい回転軸 A’のまわりの慣性モーメント I'は回転軸 A_G のまわりの慣性モーメント I_G と下の式のような関係が成り立つ．

$$I' = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\, \rho'^{\,2} = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\, |\vec{\rho} - \vec{\rho}_0|^2$$

$$= \underbrace{\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\, \rho^2}_{I_G\text{（重心を通る回転軸の慣性モーメント）}} - 2\,\vec{\rho}_0 \underbrace{\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\, \vec{\rho}}_{0} + \left(\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\right) |\vec{\rho}_0|^2$$

0 (この積分式は重心の位置$\vec{R}_G$とすると，$M\vec{R}_G$ となるが，重心を原点にとると$\vec{R}_G = 0$)から，「0」になる

$$= I_G - 0 + M\,(x_0{}^2 + y_0{}^2) = I_G + M\,h^2 \qquad (5\text{-}4\text{-}27)$$

慣性モーメントに関するこの関係を「平行軸の定理」と呼ぶ.

問題　5-26　問題5-20と5-21で求めた慣性モーメントI_1 とI_2 の結果より,「平行軸の定理」が成立していることを確認せよ.

* 剛体における回転の運動エネルギー(* 初学者は省略すべき)

角速度ベクトル$\vec{\omega}$で回転している剛体の微小質量要素の回転の速度$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ より, 回転による運動エネルギーKを計算してみよう.

$$K = \frac{1}{2}\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\, v^2 = \frac{1}{2}\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\, (\vec{v} \bullet \vec{v}) \qquad (5\text{-}4\text{-}28)$$

上の式にベクトル公式「$\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\bullet(\vec{c}\times\vec{a})$」を適用させよう. ここで, $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{\omega}$, $\vec{c} = \vec{r}$とすると,「$\vec{v}\bullet\vec{v} = \vec{a}\bullet(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\bullet(\vec{r}\times\vec{a})$」が成立する. 次に, (5-4-26)式より,「$\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \{(\vec{r}\bullet\vec{r})\,\vec{\omega} - (\vec{r}\bullet\vec{\omega})\,\vec{r}\}$ 」を用いる. すると, 下の式を得ることができる.

$$\vec{v}\bullet\vec{v} = \vec{\omega}\bullet(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})) = \vec{\omega}\bullet\{(\vec{r}\bullet\vec{r})\,\vec{\omega} - (\vec{r}\bullet\vec{\omega})\,\vec{r}\} = r^2\omega^2 - (\vec{r}\bullet\vec{\omega})^2$$

$$= (x^2+y^2+z^2)(\omega_x{}^2+\omega_y{}^2+\omega_z{}^2) - (x\,\omega_x + y\,\omega_y + z\,\omega_z)^2$$

$$= (y^2+z^2)\,\omega_x{}^2 + (z^2+x^2)\,\omega_y{}^2 + (x^2+y^2)\,\omega_z{}^2 - 2\,(x\,y\,\omega_x\omega_y + y\,z\,\omega_y\omega_z + z\,x\,\omega_z\omega_x) \qquad (5\text{-}4\text{-}29)$$

上の式を(5-4-28)式に代入し, 慣性モーメントテンソル$\vec{I}$を用いて剛体の回転エネルギーKを表す.

$$K = \frac{1}{2}\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\,\{(y^2+z^2)\,\omega_x{}^2 + (z^2+x^2)\,\omega_y{}^2 + (x^2+y^2)\,\omega_z{}^2 - 2\,(x\,y\,\omega_x\omega_y + y\,z\,\omega_y\omega_z + z\,x\,\omega_z\omega_x)\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\,\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -y\,x & -z\,x \\ -x\,y & z^2+x^2 & -z\,y \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{\omega})^{\mathrm{t}}\,\vec{I}\,\vec{\omega} \qquad (5\text{-}4\text{-}30)$$

ここで，$(\vec{\omega})^{\mathrm{t}} = [\ \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\ ]$ は角速度ベクトル$\vec{\omega}$ (3行1列の列ベクトル)の転置行列で，1行3列となる行ベクトルである．あるいは，(5-4-24)’式で示された角運動量$\vec{L}$や慣性モーメントテンソル$\vec{I}$の成分I_{ij}を用いて表すこともできる．

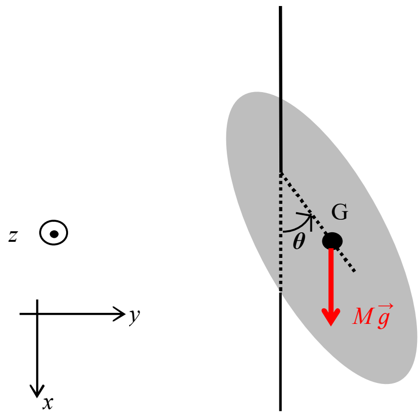
$$K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\bullet\vec{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j \qquad (5\text{-}4\text{-}31)$$

5-5.　剛体の回転運動

並進運動と回転運を含んだ剛体の運動について，いくつかの例を上げて，その運動を調べてみよう．

①　物理振り子

全体の質量Mの剛体がある．剛体の一部を通っている回転軸のまわりに回転し，振り子として運動している．重心の通る軸を回転軸としたときの慣性モーメントI_{G}とし，回転軸と重心Gの間の長さをhとする．図のように，x方向，y方向，z方向を選び，x軸からの回転角をθ とする．この振り子の運動を調べ，振り子の周期Tを求めよう．



重心に剛体全体の重力$M\vec{g}$が作用しているものとして，重力による力のモーメントのz成分M_zは，「$M_z = -M\,g\,h\sin\theta$」となる．また，回転軸のまわりの慣性モーメントIは，平行軸の定理より，「$I = I_{\mathrm{G}} + M\,h^2$ 」となるので，回転の運動方程式は下の式で表すことができる．

$$I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -M\,g\,h\sin\theta \qquad (5\text{-}5\text{-}1)$$

ふり幅が小さい場合(角度$\theta << 1$)は，三角関数のサイン関数は「$\sin\theta \sim \theta$」と近似できるので，下の微分方程式として近似的に表現できる．

$$I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -M\,g\,h\,\theta \tag{5-5-2}$$

ばね振り子でしらべたように，回転の角速度ωは，「 $I\,\omega^2 = M\,g\,h$」の関係が成り立つので，振動の周期Tは下の式で表すことができる．

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M\,g\,h}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + M\,h^2}{M\,g\,h}} \tag{5-5-3}$$

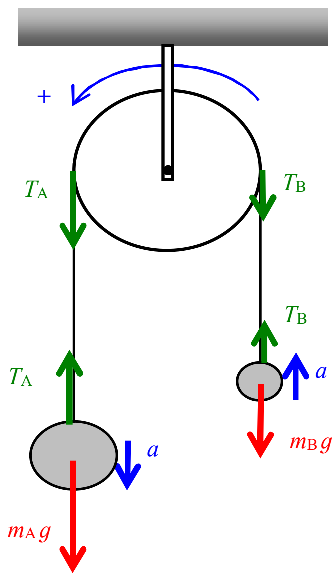
* 単振り子との関係

剛体でなく，問題2-10で示したように長さℓの軽い糸の先に質量Mのおもりをつけ，小さな振幅で揺らす単振り子の周期と比べてみよう．単振り子の慣性モーメントIは$I = M\,\ell^2$ なので，上の式にこの式を代入しよう．そのとき，周期Tは下の式で表され，単振り子の周期Tの式と等しくなる(上式で長さhをℓとする)．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M\,g\,h}} = 2\pi\sqrt{\frac{M\,\ell^2}{M\,g\,\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

② 滑車の運動

図のように，質量が無視できる糸の両端に質量m_Aとm_B $(m_A > m_B)$となる2つの物体AとBをつけて，全体の質量Mとなる半径Rとなる円板の滑車をつけた．円板の中心を回転軸とした慣性モーメント$I = MR^2/2$である．2つの物体に発生する加速度の大きさaと滑車と2つの物体間に働く糸の張力の大きさT_AとT_Bを求めよう．



図のように反時計まわりに動く向きを「+」方向にとり，滑車の回転する角速度をωとする．物体Aには重力$m_A\,g$と張力(物体Aと滑車の間に働く力)T_Aが働いている．物体Bには重力$m_B\,g$と張力(物体Bと滑車の間に働く力)T_Bが働いている．物体Aと物体Bにおける運動方程式は正負の向きに注意して，下の式で表すことができる．

物体A;　$m_A\,a = m_A\,g - T_A$　(5-5-4)

物体B;　$m_B\,a = T_B - m_B\,g$　(5-5-5)

また，滑車の回転運動に対する運動方程式は，2つの張力による力のモーメントを考慮して，下の式で表すことができる.

$$回転運動;\quad I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\,T_A - R\,T_B \tag{5-5-6}$$

滑車の円周上を糸が動く速さvは，「$v = R\,\omega$」の関係があるので，2つの物体での加速度aと，「$a = R\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$」が成り立つので，上の式は加速度$a$を用いて，さらに，慣性モーメント$I$ $(= M R^2/2)$より，下の式のように表すこともできる.

$$I\,a = R^2\,(T_A - T_B) \quad \longrightarrow \quad M\,a/2 = T_A - T_B \tag{5-5-7}$$

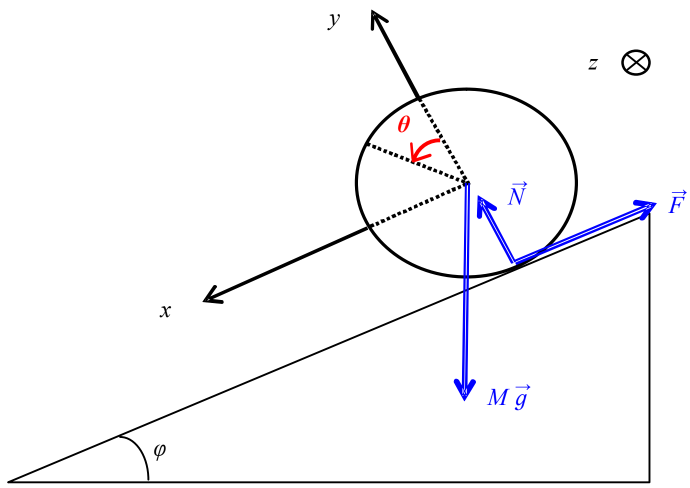
上の3つの式より加速度の大きさaと2つ張力の大きさT_AとT_B求めると，下の式で表すことができる.

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + M/2}\,g \tag{5-5-8}$$

$$T_A = \frac{2m_B + M/2}{m_A + m_B + M/2}\,m_A\,g, \qquad T_B = \frac{2m_A + M/2}{m_A + m_B + M/2}\,m_B\,g \tag{5-5-9}$$

③ **斜面上を転がる物体**

質量M，半径Rの球が摩擦のある斜面上を滑らずに回転しながら，落下する場合，球の重心Gの加速度の大きさaを求めよう. ここで，球の重心のまわりの慣性モーメント$I = 2\,M\,R^2/5$ とする.



上の図のようにx方向とy方向を選ぶ. 物体には鉛直下方向に重力$M\,\vec{g}$(大きさ $M\,g$)，斜面と垂直上方向に垂直抗力$\vec{N}$(大きさ N)，斜面に沿って上方向に摩擦力$\vec{F}$(大きさ F)が働いている. 重心が移動する速度$\vec{v}_G = (v_{Gx}\,,\,v_{Gy})$として，重心Gの並進運動に関する運動方程式は下の式で表すことができる(y成分は力がつりあい，移動しない).

$$x成分;\quad M\,\frac{\mathrm{d}v_{Gx}}{\mathrm{d}t} = M\,g\,\sin\varphi - F \tag{5-5-10}$$

y成分； $M\dfrac{\mathrm{d}\,v_{\mathrm{G}y}}{\mathrm{d}t} = N - M\,g\cos\varphi = 0$ (5-5-11)

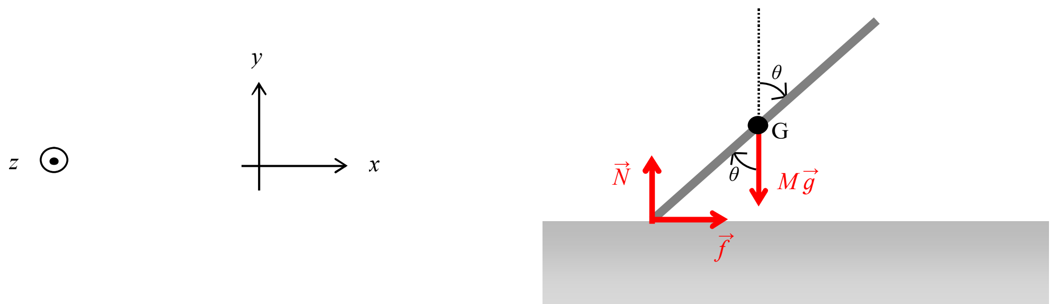
回転運動に関する運動方程式は，角速度ω ($=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$)として，力のモーメントに寄与するのは，摩擦力のみなので下の式で表すことができる.

$$I\,\frac{\mathrm{d}(-\omega)}{\mathrm{d}t} = -R\,F \qquad (5\text{-}5\text{-}12)$$

速度の x 成分が球の外周の速さと等しいので，「$v_{\mathrm{G}x} = R\omega$」が成立し，慣性モーメント $I = 2\,M\,R^2/5$ を代入すると，上の式は「$F = (2/5)\ \mathrm{d}\,v_{\mathrm{G}x}/\mathrm{d}t$ 」と変形できる. これを(5-5-10)式に代入して，加速度の大きさ $a = \mathrm{d}\,v_{\mathrm{G}x}/\mathrm{d}t$ は下の式のように求めることができる.

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v_{\mathrm{G}x}}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{7}\,g\sin\varphi \qquad (5\text{-}5\text{-}13)$$

問題 5-27 質量M，長さ2ℓの棒(棒の重心を回転軸としたときの慣性モーメント$I = M\,\ell^2/3$)が摩擦の影響のある床面に斜めに置かれている. 棒には図のように重力 $M\vec{g}$(大きさ $M\,g$)と床からの垂直抗力$\vec{N}$(大きさ N)と摩擦力$\vec{f}$(大きさ f)が作用して，棒は滑り落ちている. 垂直抗力の大きさ N と摩擦力の大きさfを求めよ.



5-6. (3 次元)剛体の回転運動に関する運動方程式(* 初学者は省略すべき)

微小質量要素が立体(3次元)的に配置された剛体について，回転運動を表す運動方程式について調べよう. z軸を回転軸に選んだ場合，剛体の角運動量$\vec{L}$は(5-4-6)’式より，下の式で表すことができる.

$$\vec{L} = \int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\,\{\,\rho^2\,\omega_z\,\vec{e}_z - \rho\,z\,\omega_z\,\vec{e}_\rho\,\} \qquad (5\text{-}6\text{-}1)$$

回転運動を表す運動方程式は，「角運動量$\vec{L}$を時間微分したものが，力のモーメント$\vec{M}$ に等しい」ことであった．上の式では角速度ω_zが時間の関数として扱うとともに，右辺の2項目にある単位ベクトル$\vec{e}_\rho$の時間微分も考慮する必要がある(1項目の単位ベクトル$\vec{e}_z$の時間微分は0．$\mathrm{d}\vec{e}_z/\mathrm{d}t = 0$)．すなわち，$\mathrm{d}\vec{e}_\rho/\mathrm{d}t = \vec{e}_\theta\,(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t) = \vec{e}_\theta\,\omega_z$ の項が現れることに注意する．回転軸の向きが任意となる場合の角運動量$\vec{L}$は(5-4-24)式に示した下の式となる．

$$\vec{L} = \int_{(\text{剛体内})} \{ (\vec{r}\cdot\vec{r})\,\vec{\omega} - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\,\vec{r} \}\,\mathrm{d}m \qquad (5\text{-}6\text{-}2)$$

上の式では，角速度ベクトル$\vec{\omega}$と位置$\vec{r}$が時間の関数となり，位置の時間微分$\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ は，回転に係る速度$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$として計算する．ただし，$(\vec{r}\cdot\vec{r})$や$(\vec{r}\cdot\vec{\omega})$は向きを持たないので，時間微分には寄与しない．上の式を時間微分すると下の式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \int_{(\text{剛体内})} \{ (\vec{r}\cdot\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t})\,\vec{r} \}\,\mathrm{d}m - \int_{(\text{剛体内})} (\vec{r}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\times\vec{r})\,\mathrm{d}m$$

$$= \int_{(\text{剛体内})} \{ (\vec{r}\cdot\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t})\,\vec{r} \}\,\mathrm{d}m - \vec{\omega}\times\int_{(\text{剛体内})} (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\,\vec{r}\,\mathrm{d}m$$

さらに，$\vec{\omega}\times\vec{\omega} = 0$ を用いて，右辺に角速度ベクトル$\vec{\omega}$ に比例する項を加える．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \int_{(\text{剛体内})} \{ (\vec{r}\cdot\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t})\,\vec{r} \}\,\mathrm{d}m + \vec{\omega}\times\int_{(\text{剛体内})} \{ (\vec{r}\cdot\vec{r})\,\vec{\omega} - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\,\vec{r} \}\,\mathrm{d}m$$

$$= \int_{(\text{剛体内})} \{ (\vec{r}\cdot\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t})\,\vec{r} \}\,\mathrm{d}m + \vec{\omega}\times\vec{L} \qquad (5\text{-}6\text{-}3)$$

$$= \overleftrightarrow{I}\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{L} \qquad (5\text{-}6\text{-}3)'$$

上の式は多くの成分があり，複雑なので，慣性主軸をとるような座標系を選ぼう．そのとき，慣性モーメントテンソル$\overleftrightarrow{I}$の対角成分で主慣性モーメントについて，$I_{xx} = I_x$，$I_{yy} = I_y$，$I_{zz} = I_z$ とすると，角運動量$\vec{L}$は下の式で表される．

$$\vec{L} = (I_x\,\omega_x\,,\,I_y\,\omega_y\,,\,I_z\,\omega_z) = \sum_{i=x}^{z} I_i\,\omega_i\,\vec{e}_i \qquad (5\text{-}6\text{-}4)$$

また, $\vec{\omega}\times\vec{L}$ は下の式で表される.

$$\vec{\omega}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = (\,\omega_y L_z - \omega_z L_y\,,\,\omega_z L_x - \omega_x L_z\,,\,\omega_x L_y - \omega_y L_x\,) \qquad (5\text{-}6\text{-}5)$$

$$= (\,I_z\,\omega_y\,\omega_z - I_y\,\omega_z\,\omega_y\,,\,I_x\,\omega_z\,\omega_x - I_z\,\omega_x\,\omega_z\,,\,I_y\,\omega_x\,\omega_y - I_x\,\omega_y\,\omega_x\,) \qquad (5\text{-}6\text{-}5)'$$

まとめると, 下の運動方程式が得られる. この(3次元)剛体の回転運動に関する運動方程式を「オイラーの運動方程式」と呼ぶ.

$$\begin{cases} I_x\dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (I_z - I_y)\,\omega_y\,\omega_z = M_x & (5\text{-}6\text{-}6a) \\[2ex] I_y\dfrac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (I_x - I_z)\,\omega_z\,\omega_x = M_y & (5\text{-}6\text{-}6b) \\[2ex] I_z\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (I_y - I_x)\,\omega_x\,\omega_y = M_z & (5\text{-}6\text{-}6c) \end{cases}$$

剛体に力のモーメントが働いていない場合は, (5-6-6)式の右辺 $= 0$ となる. 回転体の運動は上の式を解析してその運動のふるまいを調べる. 回転体が球や球殻の場合は, その対称性より主慣性モーメントは同じ値($I_x = I_y = I_z$)をとるので, (5-6-6式の左辺第2項の効果は生じない.

地球の自転運動やコマの回転運動などに対して, オイラーの運動方程式を適用させ, 3次元剛体の回転運動の性質を調べることも可能だが, ここでは省略する.

問題の答

問題 5-1　1)　運動量保存則を用いて, 衝突後の物体Bの速度 $\vec{v}_B'$ は下のようにして求める.

「衝突前の全運動量 ＝ 衝突後の全運動量」 → $m_A\,\vec{v}_A + m_B\,\vec{v}_B = m_A\,\vec{v}_A' + m_B\,\vec{v}_B'$

→ $4\,(-3.0,\,0.0) + 2\,(\,0\,,\,0) = 4\,(-1.0\,,\,-2.0) + 2\,\vec{v}_B'$ → $2\,\vec{v}_B' = (-12+4\,,\,8) = (-8\,,\,8)$ kg m/s

→ $\vec{v}_B' = (-4.0\,,\,4.0)$ m/s

2)　衝突により物体Aが受ける力積 $\vec{F}_{B\to A}\,\Delta t =$ 物体Aの運動量変化 $= m_A\,\vec{v}_A' - m_A\,\vec{v}_A = (-4,\,-8) - (-12,\,0)$

$= (8.0\,,\,-8.0)$ N s

問題 5-2　1)　図より，速度 $\vec{v}_A' = (v_A' \cos 45°, v_A' \sin 45°) = (\sqrt{2}\, v_A'/2, \sqrt{2}\, v_A'/2)$，速度 $\vec{v}_B' = (v_B' \cos 45°, -v_B' \sin 45°)$
$= (\sqrt{2}\, v_B'/2, -\sqrt{2}\, v_B'/2)$

2)　衝突前の全運動量 $\vec{p}_{tot} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = 2\,(4, 0) + 4\,(0, 0) = (8.0, 0)$ kg m/s

3)　運動量保存則より，「 衝突前の全運動量 = 衝突後の全運動量 」 → $m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$

→ $(8, 0) = (\sqrt{2}\, v_A', \sqrt{2}\, v_A') + (2\sqrt{2}\, v_B', -2\sqrt{2}\, v_B') = (\sqrt{2}\, v_A' + 2\sqrt{2}\, v_B', \sqrt{2}\, v_A' - 2\sqrt{2}\, v_B')$

→ x 成分； $8 = \sqrt{2}\, v_A' + 2\sqrt{2}\, v_B'$ ①，y 成分； $0 = \sqrt{2}\, v_A' - 2\sqrt{2}\, v_B'$ ②

①式+②式 より， $8 = 2\sqrt{2}\, v_A'$ → $v_A' = 2\sqrt{2} = 2.82 \sim 2.8$ m/s，②式より，$v_B' = v_A'/2 = \sqrt{2} = 1.41 \sim 1.4$ m/s

問題 5-3　運動量保存則より，「 $m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B)\, \vec{v}'$ 」が成立する． → $\vec{v}' = (m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B)/(m_A + m_B)$

物体 A に働いた力積 $\vec{F}_{B\to A}\, \Delta t$ = 物体 A の運動量変化 $= m_A \vec{v}' - m_A \vec{v}_A = \dfrac{m_B}{m_A + m_B} (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$

衝突前の全運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \dfrac{1}{2} m_B v_B^2$

衝突後の全運動エネルギー $K' = \dfrac{1}{2} (m_A + m_B)\, v'^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{m_A^2 v_A^2 + 2\, m_A m_B\, \vec{v}_A \cdot \vec{v}_B + m_B^2 v_B^2}{m_A + m_B}$

運動エネルギーの変化 $\Delta K = K' - K = -\dfrac{1}{2} \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_A^2 + \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_A \cdot \vec{v}_B - \dfrac{1}{2} \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_B^2$

$= -\dfrac{1}{2} \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} (\vec{v}_A - \vec{v}_B)^2 < 0$ → (運動エネルギーが衝突によって減少する)

問題 5-4　運動量保存則より，「始めの運動量 = 時間 δt だけ経過した後の運動量」から求める．宇宙船は噴射した燃料の分だけその質量が減少している．

→ $M V_0 = (M - \rho\, \delta t)\, V + \rho\, \delta t\, (V - v)$ → $V = \dfrac{M V_0 + \rho\, \delta t\, v}{M} = V_0 + \dfrac{\rho\, \delta t}{M} v$

問題 5-5　運動量保存則と反発係数の関係式を連立方程式にして求める．

運動量保存則より， $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$ → $2 \times 1 + 3 \times 5 = 2\, v_A' + 3\, v_B'$ → $17 = 2\, v_A' + 3\, v_B'$ ①

反発係数の関係式より， $e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$ → $0.25 = -\dfrac{v_A' - v_B'}{1 - 5}$ → $1 = v_A' - v_B'$ ②

①式+3×②式 → $20 = 5\, v_A'$ → $v_A' = 4.0$ m/s → ①式に代入， $3\, v_B' = 9$ → $v_B' = 3.0$ m/s

問題 5-6　(5-1-14)式から，弾性衝突($e = 1$)では，衝突後の速度の x 成分はそれぞれ下の式で表すことができる．

$$v_A'{}_x = \frac{1}{m_A + m_B} \left\{ (m_A - m_B)\, v_{Ax} + 2\, m_B\, v_{Bx} \right\}, \quad v_B'{}_x = \frac{1}{m_A + m_B} \left\{ 2\, m_A\, v_{Ax} + (m_B - m_A)\, v_{Bx} \right\}$$

衝突前の全運動エネルギー K_{tot} は次の式で表される． $K_{tot} = \dfrac{1}{2} m_A (v_{Ax}{}^2 + v_{Ay}{}^2) + \dfrac{1}{2} m_B (v_{Bx}{}^2 + v_{By}{}^2)$

衝突後の全運動エネルギー K_{tot}' は次の式で表される． $K_{tot}' = \dfrac{1}{2} m_A (v_A'{}_x{}^2 + v_{Ay}{}^2) + \dfrac{1}{2} m_B (v_B'{}_x{}^2 + v_{By}{}^2)$

全運動エネルギーが保存されていることを確認するために，下の計算を行う．

$$m_A v_A'{}_x{}^2 + m_B v_B'{}_x{}^2 = \left(\frac{1}{m_A+m_B}\right)^2 \Big\{ m_A (m_A - m_B)^2 v_{Ax}{}^2 + 4\, m_A\, m_B{}^2\, v_{Bx}{}^2 + 4\, m_A\, m_B\, (m_A - m_B)\, v_{Ax}\, v_{Bx}$$

$$+ 4\, m_A{}^2\, m_B\, v_{Ax}{}^2 + (m_B - m_A)^2\, m_B\, v_{Bx}{}^2 - 4\, m_A\, m_B\, (m_A - m_B)\, v_{Ax}\, v_{Bx} \Big\}$$

$$= \left(\frac{1}{m_A+m_B}\right)^2 \Big\{ m_A (m_A + m_B)^2 v_{Ax}{}^2 + (m_B + m_A)^2\, m_B\, v_{Bx}{}^2 \Big\} = m_A\, v_{Ax}{}^2 + m_B\, v_{Bx}{}^2$$

→ $K_{tot}' = K_{tot}$ → この場合，全運動エネルギーは保存される．

問題 5-7 運動量保存則より， $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$ → $m_A v = m_A v_A' + m_B v_B'$ ①

反発係数の関係式より， $e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B} = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v}$ → $e\, v = -v_A' + v_B'$ ②

①式 $+ m_A \times$ ②式 より， $v_B' = \dfrac{m_A(1+e)}{m_A + m_B} v$， ①式 $- m_B \times$ ②式 より， $v_A' = \dfrac{m_A - e\, m_B}{m_A + m_B} v$.

衝突後の全運動エネルギー K_{tot}' は， $K_{tot}' = \dfrac{1}{2} m_A v_A'{}^2 + \dfrac{1}{2} m_B v_B'{}^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_A+m_B}\right)^2 \Big\{ m_A (m_A - e\, m_B)^2 + m_B\, m_A{}^2 (1+e)^2 \Big\}\, v^2$$

→ 弾性衝突(e=1)では， $K_{tot}' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m_A+m_B}\right)^2 \Big\{ m_A (m_A - m_B)^2 + 4\, m_B\, m_A{}^2 \Big\}\, v^2$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m_A+m_B}\right)^2 m_A (m_A + m_B)^2 v^2 = \dfrac{1}{2} m_A v^2$ → 衝突前の全運動エネルギー K_{tot} に等しい

問題 5-8 物体AとBの運動方程式は下のように，ばねの弾性力が2つの物体間の作用反作用の力になっている．

$$m \frac{d^2 y_A}{dt^2} = -m\, g - k\, (y_A - y_B - \ell) \quad ①, \qquad m \frac{d^2 y_B}{dt^2} = -m\, g + k\, (y_A - y_B - \ell) \quad ②$$

また，2つの物体の重心の位置 Y_G と相対位置 $y_{B\to A}$ は下の式で表される．

重心の位置 $Y_G = (y_A + y_B)/2$　相対位置 $y_{B\to A} = y_A - y_B$

①式+②式 より， $2m \dfrac{d^2 Y_G}{dt^2} = -2m\, g$ ③， ①式−②式 より， $m \dfrac{d^2 y_{B\to A}}{dt^2} = -2k\, (y_{B\to A} - \ell)$ ④

③式より，重心の位置 Y_G は重力加速度 g で落下運動，④式より，相対位置 $y_{B\to A}$ は(相対質量 $m/2$)，ばね定数 k で

で単振動する．

問題 5-9 同様に，2つの物体に対し，運動方程式を立てる．

$$m \frac{d^2 y_A}{dt^2} = -m\, g - k\, (y_A - y_B - \ell) \quad ①, \qquad 3m \frac{d^2 y_B}{dt^2} = -3m\, g + k\, (y_A - y_B - \ell) \quad ②$$

2つの物体の重心の位置 Y_G と相対位置 $y_{B\to A}$ は下の式で表される．

重心の位置 $Y_G = (y_A + 3\, y_B)/4$　相対位置 $y_{B\to A} = y_A - y_B$

①式+②式 より， $4m \dfrac{d^2 Y_G}{dt^2} = -4m\, g$ ③， ①式−②式/3 より， $m \dfrac{d^2 y_{B\to A}}{dt^2} = -\dfrac{3}{4} k\, (y_{B\to A} - \ell)$ ④

③式より，重心の位置 Y_G は重力加速度 g で落下運動，④式より，相対位置 $y_{B\to A}$ は角速度 $\omega=\sqrt{\dfrac{3k}{4m}}$ で単振動する.

問題 5-10　2つの物体に対し，運動方程式を立てる.

$$m_A \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -k\,(x_A - x_B - \ell) \quad ①, \qquad m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} = k\,(x_A - x_B - \ell) \quad ②$$

2つの物体の重心の位置X_Gと相対位置$x_{B\to A}$は下の式で表される.

重心の位置 $X_G = (m_A\, x_A + m_B\, y_B)/(m_A+m_B) = (m_A\, x_A + m_B\, y_B)/M$　相対位置 $x_{B\to A} = x_A - x_B$

①式+②式 より，$\dfrac{d^2 X_G}{dt^2} = 0$　③，①式$/m_A$ − ②式$/m_B$ より，$\dfrac{d^2 x_{B\to A}}{dt^2} = -k\,(x_{B\to A} - \ell)(\dfrac{1}{m_A}+\dfrac{1}{m_B})$　④

重心は移動しない. 相対位置 $x_{B\to A}$ は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k\,(m_A+m_B)}{m_A m_B}}$ で単振動する(換算質量 $\mu = m_A\, m_B/(m_A+m_B)$).

2つの物体の位置を重心の位置と相対位置を用いて，$x_A = X_G + m_B\, x_{B\to A}/(m_A+m_B)$, $x_B = X_G - m_A\, x_{B\to A}/(m_A+m_B)$と表すことがで，2つの物体の運動エネルギー$K_A = m_A\{ m_B\, v_{B\to A}/(m_A+m_B)\}^2/2$, $K_B = m_B\{ m_A\, v_{B\to A}/(m_A+m_B)\}^2/2$ となり，全運動エネルギー$K = K_A + K_B = \dfrac{m_A\, m_B}{2(m_A+m_B)}\, v_{B\to A}{}^2 = \dfrac{\mu}{2}\, v_{B\to A}{}^2$ となる. 一方，相対位置$x_{B\to A}$に関する運動エネルギー$K_{B\to A}$は換算質量μを用いて，$K_{B\to A} = \dfrac{\mu}{2}\, v_{B\to A}{}^2$ なので，「$K = K_{B\to A}$ 」となることが確認できる.

問題 5-11　衝突後の物体 B の速度を v_B' とすると，衝突で，運動量保存則が成立するので，「 $m_A v = m_A v' + m_B v_B'$　① 」また，弾性衝突なので，「 $e\ v = v = -\ v' + v_B'$　② 」が成立する. 2つの式より，2つの物体の衝突後の速度は，「 $v' = (m_A - m_B)\, v/(m_A+m_B)$,　$v_B' = 2\, m_A\, v/(m_A+m_B)$ 」と求めることができる. 物体Aの失った運動エネルギーΔK = $K_A' - K_A = m_A(v'^2 - v^2)/2 = -\dfrac{4\, m_A\, m_B}{(m_A+m_B)^2}\, v^2$.

衝突後，物体 B において，エネルギー保存則を用いる. 「 $m_B\, v_B'^2/2 = k\, x_{max}{}^2/2$ 」より，ばねの最大の縮み x_{max} = $\sqrt{m_B/k}\ v_B' = 2\sqrt{m_B/k}\ \times m_A\, v/(m_A+m_B)$.

問題 5-12　系全体の質量 $M = m_1 + m_2 + m_3 = 10$ kg，重心の位置$\vec{R}_G$ は，$M\,\vec{R}_G = (m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 + m_3\,\vec{r}_3) = (2\times1+3\times(-3)+5\times1$, $2\times2+3\times1+5\times(-3)$, $2\times(-2)+3\times4+5\times2) = (-2, -8, 18)$ kg m，より，$\vec{R}_G = (-0.2, -0.8, 1.8)$ m.

問題 5-13　系全体の質量$M = m_1 + m_2 = \sigma_1\, \ell_1 + \sigma_2\, \ell_2 = 2\times4 + 4\times3 = 20$ kg. 重心の位置X_Gは，　$M\, X_G$ =

$$= \sigma_1 \int_0^4 x\,dx + \sigma_2 \int_4^7 x\ dx = \left[x^2\right]_0^4 + 2\left[x^2\right]_4^7 = 16 - 0 + 2\times(49-16) = 82 \text{ kg m}$$

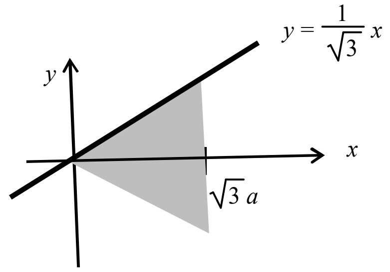
より，重心の位置$X_G = 4.1$ m.

問題 5-14　系全体の質量M = 面密度×面積 $= \sigma\,\pi\, a^2/2$. x軸からの角度をθ，中心からの距離をrとすると，y座標は，「 $y = r\sin\theta$」と表すことができる. また，微小面積要素 $dS = dx\, dy = r\, dr\, d\theta$ なので，重心の位置のy座標Y_Gは，下の式のように計算できる.

$$M\,Y_G = \sigma\int_{(剛体内)} y\,dS = \sigma\int_{(剛体内)} dx\int y\,dy = \sigma\int_0^a r\,dr\int_0^\pi d\theta\ r\sin\theta = \sigma\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\sigma a^3.$$ したがって，重心の位置のy座標Y_Gは，「 $Y_G = \dfrac{4}{3\pi}a$ 」と求めることができる.

問題 5-15　この形状の面積Sは，「$S = \pi(4a^2 - a^2)/2 = 3\pi a^2/2$ 」となるので，全質量Mは，「 $M = 3\pi\sigma a^2/2$ 」である．重心の位置のy座標Y_Gも，上の問題と同様に計算して求める． $M\,Y_G = \sigma\int_{(剛体内)} y\,dS = \sigma\int_a^{2a} r\,dr\int_0^\pi d\theta\ r\sin\theta$

$$= \sigma\left[\frac{r^3}{3}\right]_a^{2a}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\sigma\times 7a^3$$ → 重心の位置のy座標$Y_G = \dfrac{28}{9\pi}a$.



問題 5-16　1辺の長さ$2a$で，図のように置かれた正三角形の上端における位置のy座標は位置のx座標を用いて，「$y = x/\sqrt{3}$」と表すことができる.

したがって，正三角形の面積Sは，重積分を用いて下のように計算することができる.

$$S = \int_{(剛体内)} dS = \int_0^{\sqrt{3}a} dx\int_{(-x/\sqrt{3} < y < x/\sqrt{3})} dy = \int_0^{\sqrt{3}a}\frac{2x}{\sqrt{3}}dx$$

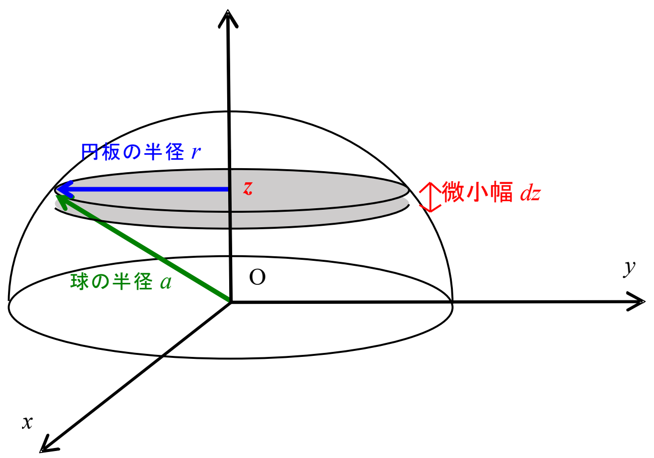
$$= \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}a} = \sqrt{3}\,a^2.$$

正三角形の質量Mは，「$M = \sigma S = \sqrt{3}\,\sigma a^2$」となる．さらに，この正三角形の重心の位置$\vec{R}_G$ のx座標X_Gは下のようにして求めることができる.

$$M\,X_G = \sigma\int_{(剛体内)} x\,dS = \sigma\int_0^{\sqrt{3}a} x\,dx\int_{(-x/\sqrt{3} < y < x/\sqrt{3})} dy = \sigma\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{2x^2}{\sqrt{3}}dx$$

$$= \sigma\left[\frac{2x^3}{3\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}a} = \sigma\,2a^3.$$ → 重心の位置のx座標$X_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a.$

問題 5-17　密度σ で半径a の半球がある．半球の体積$V = 2\pi a^3/3$ であるので，半球の質量Mは，「$M = 2\sigma\pi a^3/3$ 」となる.
球の中心からz方向に微小幅dzの円板を考える．この円板の半径rは，「$a^2 = r^2 + z^2$」の関係が成り立ち，その面積$S = \pi r^2$ である．この半球の重心の位置$\vec{R}_G$ のz座標Z_Gは下のように求めることができる.



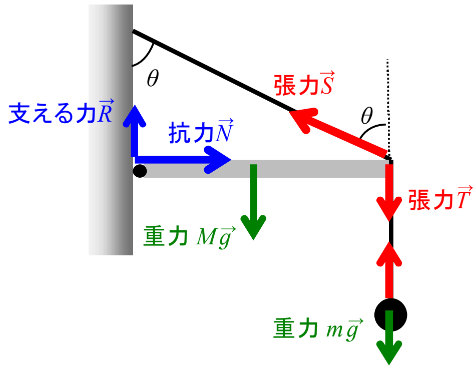
$$M Z_{\mathrm{G}} = \sigma \int_{(\text{剛体内})} z\, \mathrm{d}V = \sigma \int_0^a z\, \mathrm{d}z \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}S = \sigma \int_0^a z\, \mathrm{d}z\ \pi r^2 = \sigma \pi \int_0^a z(a^2 - z^2)\, \mathrm{d}z$$

$$= \sigma \pi \left\{ a^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^a - \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^a \right\} = \sigma \pi \frac{a^4}{4} \ \rightarrow\ \text{重心の位置の } z \text{ 座標 } Z_{\mathrm{G}} = \frac{3a}{8}.$$

なお，半球の体積Vは，積分を用いて下のように求めることができる．

$$V = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}V = \int_0^a \mathrm{d}z \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}S = \int_0^a \mathrm{d}z\ \pi r^2 = \pi \int_0^a (a^2 - z^2)\, \mathrm{d}z = \pi \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^a = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

問題 5-18　剛体棒に作用する全ての力を右に図示する．剛体棒の中心(重心)には，重力$M\vec{g}$，左端には棒を支える力$\vec{R}$と抗力$\vec{N}$，右端には糸の張力$\vec{S}$と質量mのおもりによって引かれる張力$\vec{T}$(張力$\vec{T}$の大きさTは，作用反作用の法則(糸を介しておもりと剛体棒の間に働く力が張力$\vec{T}$)より，おもりに働く重力の大きさ$m\,g$と同じである)が作用している．



力のつり合いを考える．x方向(水平方向)とy方向(鉛直方向)における力のつり合いは，下の式で与えられる．

x方向；　$N - S \sin\theta = 0$　　①

y方向；　$R + S\cos\theta - M\,g - T = 0$　　②

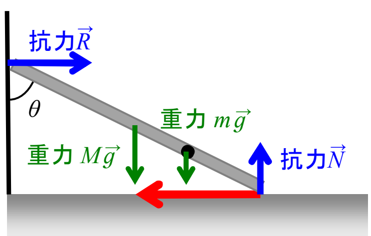
さらに，長さ2ℓの剛体棒は回転しないので力のモーメントがつりあっている．ちょうつがいを原点Oとして，力のモーメントの総和(反時計まわりの回転する向きを正とする)は，下の式が成り立っている．

力のモーメントの総和 $= -M\,g\,\ell + S\,2\ell \sin(\pi/2+\theta) - T\,2\ell = -M\,g\,\ell + S\,2\ell\cos\theta - T\,2\ell = 0$

$\rightarrow$　$S\cos\theta - T = M\,g/2$　$\rightarrow$　$S\cos\theta = m\,g - M\,g/2$　(②式に代入すると，$R = M\,g/2$)

$S = (m\,g - M\,g/2)/\cos\theta$,　①式より　$N = S\sin\theta = (m\,g - M\,g/2)\tan\theta$

問題 5-19　剛体棒に作用する全ての力を右に図示する．剛体棒の中心(重心)に重力$M\vec{g}$，中心から右に長さaの場所に重力$m\vec{g}$，剛体棒の右端に抗力$\vec{N}$と摩擦力$\vec{f}$，棒の左端に抗力$\vec{R}$が作用している．



x方向(水平方向)とy方向(鉛直方向)における力のつり合いは，下の式で与えられる．

x方向；　$R - f = 0$　　①　　y方向；　$N - M\,g - m\,g = 0$　　②

剛体棒は回転しないので力のモーメントがつりあっている．棒の右端を原点Oとして，力のモーメントの総和(反時計まわりの回転を正の向きとする)について，下の式が成り立っている．

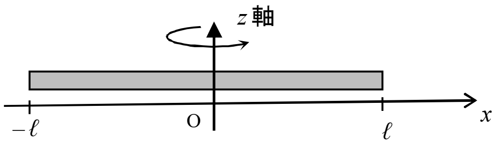
$$\text{力のモーメントの総和} = -R\,2\ell\sin(\pi/2-\theta) + M g\,\ell\sin\theta + m\,g\,(\ell-a)\sin\theta$$

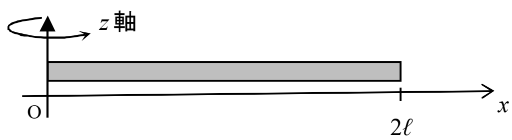
$$= -R\,2\ell\cos\theta + M g\,\ell\sin\theta + m\,g\,(\ell-a)\sin\theta = 0 \qquad ③$$

①式と③式より，摩擦力の大きさ$f = R = (M g + m\,g\,(1-a/\ell))\sin\theta/(2\cos\theta) = \dfrac{1}{2}(M + m\,(1-a/\ell))\,g\tan\theta.$

(注意；剛体が壁や床に接触している場合，剛体は壁や床からその垂直方向に(垂直)抗力を受ける．さらに，壁や床に摩擦があるとすると，摩擦力は壁や床と平行な向きに，剛体が動かないように作用する)

問題 5-20　棒の質量Mで長さが2ℓなので，線密度σは「$\sigma = M/(2\ell)$」である．棒の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントI_1 と端を回転軸とした慣性モーメントI_2 は回転半径ρを用いて下のように求めることができる．



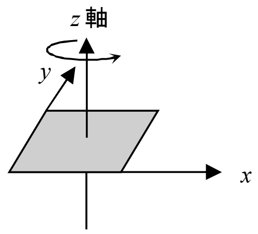


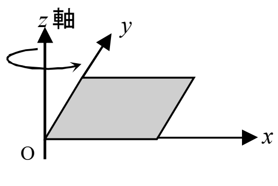
$$I_1 = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\,\rho^2 = \int_{(\text{剛体内})} x^2\,\sigma\,\mathrm{d}x$$

$$= \sigma\int_{-\ell}^{\ell} x^2\,\mathrm{d}x = \sigma\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell}^{\ell} = \sigma\,\frac{2}{3}\,\ell^3 = \frac{1}{3}\,M\ell^2,$$

$$I_2 = \sigma\int_0^{2\ell} x^2\,\mathrm{d}x = \sigma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\ell} = \sigma\,\frac{8}{3}\,\ell^3 = \frac{4}{3}\,M\ell^2.$$

問題 5-21　面密度σは「$\sigma = M/(4ab)$」となる．板の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントI_1 と板の端(4角のうちの一つ)を回転軸とした慣性モーメントI_2 は下のように求めることができる。





$$I_1 = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\,\rho^2 = \int_{(\text{剛体内})} \rho^2\,\sigma\,\mathrm{d}S$$

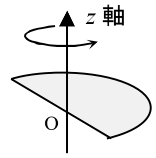
$$= \sigma\int_{(\text{剛体内})} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = \sigma\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b}^{b}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \sigma\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{b} = \sigma\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\,(2x^2b + \frac{2}{3}b^3)$$

$$= \sigma\left[\frac{2x^3}{3}b + \frac{2}{3}b^3x\right]_{-a}^{a} = \sigma\,(\frac{4}{3}a^3b + \frac{4}{3}ab^3) = \frac{1}{3}\,M\,(a^2+b^2),$$

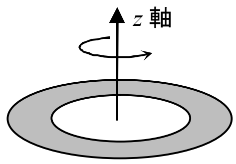
$$I_2 = \sigma\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{2b}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y = \sigma\int_0^{2a}\mathrm{d}x\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2b} = \sigma\int_0^{2a}\mathrm{d}x\,(2x^2b + \frac{8}{3}b^3)$$

$$= \sigma \left[\frac{2x^3}{3} b + \frac{8}{3} b^3 x \right]_0^{2a} = \sigma \left(\frac{16}{3} a^3 b + \frac{16}{3} a b^3 \right) = \frac{4}{3} M (a^2 + b^2).$$



問題 5-22　面密度σは「$\sigma = M/(\pi R^2/2) = 2M/(\pi R^2)$」となる．半円板の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントIは，極座標系の微小面積要素$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$ なので，下のように求めることができる．

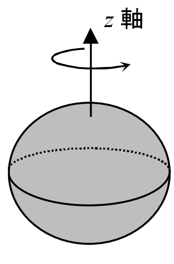
$$I = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\,\rho^2 = \int_{(\text{剛体内})} \rho^2 \sigma\,\mathrm{d}S = \sigma \int_0^R \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \sigma \frac{R^4}{4} \pi = \frac{1}{2} M R^2.$$



問題 5-23　面密度σは「$\sigma = M/(\pi(b^2 - a^2))$」となる．円環の中央を回転軸とした場合の慣性モーメントIは下のように求めることができる．

$$I = \int_{(\text{剛体内})} \rho^2 \sigma\,\mathrm{d}S = \sigma \int_a^b \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \sigma \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_a^b 2\pi = \sigma \frac{b^4 - a^4}{2} \pi = \frac{1}{2} M (b^2 + a^2).$$



問題 5-24　密度σは「$\sigma = M/V = 3M/(4\pi R^3)$」となる．球の直径を回転軸とした場合の慣性モーメントIは下のように求めることができる(問題5-17の解法を参照)．

$$I = \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}m\,\rho^2 = \int_{(\text{剛体内})} \rho^2 \sigma\,\mathrm{d}V$$

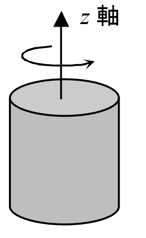
$$= \sigma \int_{-R}^{R} \rho^2\,\mathrm{d}z \int_{(\text{剛体内})} \mathrm{d}S = \sigma \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_{(\text{剛体内})} \rho^2\,\mathrm{d}S$$

(微小面積 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$，剛体内の領域； $0 < \rho < r$ (円板の半径 $r = \sqrt{R^2 - z^2}$), $0 < \theta < 2\pi$)

$$= \sigma \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \sigma \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} 2\pi$$

$$= \sigma \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z\, \frac{\pi}{2} (R^2 - z^2)^2 = \frac{\sigma\pi}{2} \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\sigma\pi}{2} \left[R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_{-R}^{R} = \frac{\sigma\pi}{2} \left(2R^5 - \frac{4}{3} R^5 + \frac{2}{5} R^5 \right) = \sigma\pi \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{5} M R^2.$$



問題 5-25　密度σは「$\sigma = M/V = M/(a\pi R^2)$」となる．円柱の円の中心を回転軸とした場合の慣性モーメントIは下のように求めることができる．

$$I = \int_{(剛体内)} \mathrm{d}m\,\rho^2 = \int_{(剛体内)} \rho^2\,\sigma\,\mathrm{d}V$$

$$= \sigma \int_0^a \mathrm{d}z \int_0^R \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \sigma\,a\,\frac{R^4}{4}\,2\pi = \sigma\,\pi\,a\,\frac{R^4}{2} = \frac{1}{2}M\,R^2.$$

問題 5-26　問題5-20に平行軸の定理($I' = I_G + M\,h^2$；重心の慣性モーメントI_G，重心からの距離h)を適用する．

ここでは，重心の慣性モーメント$I_G = I_1$で，重心からの距離$h = \ell$ である．したがって，$I_G + M\,h^2 = I_1 + M\,\ell^2$ $= M\,\ell^2/3 + M\,\ell^2 = 4M\,\ell^2/3 = I_2$ となり，平行軸の定理が成り立つことを確認できた．

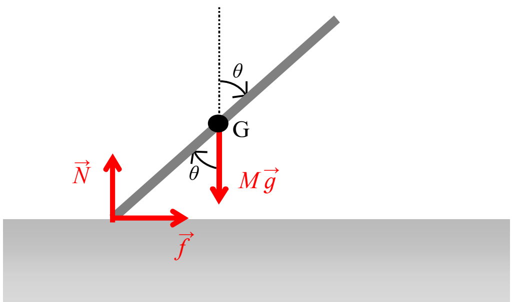
さらに，問題5-21に平行軸の定理を適用する．重心の慣性モーメント$I_G = I_1$で，重心からの距離hの2乗$=h^2 = a^2+b^2$ である．したがって，$I_G + M\,h^2 = I_1 + M\,(a^2+b^2) = \frac{1}{3}M\,(a^2+b^2) + M\,(a^2+b^2) = \frac{4}{3}M\,(a^2+b^2) = I_2$ となり，平行軸の定理が成り立つことを確認できた，

問題 5-27　図より，棒の左端を原点とすると重心の位置$\vec{R}_G = (X_G, Y_G) = (\ell\cos(\pi/2-\theta), \ell\sin(\pi/2-\theta)) = (\ell\sin\theta, \ell\cos\theta)$　①

となる．これより，重心の速度$\vec{v}_G = \left(\frac{\mathrm{d}X_G}{dt}, \frac{\mathrm{d}Y_G}{\mathrm{d}t}\right) = \ell\left(\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$　となる．

加速度$\vec{a}_G = \left(\frac{\mathrm{d}^2X_G}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2Y_G}{\mathrm{d}t^2}\right) = \ell\left(-\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cos\theta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}, -\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \sin\theta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)$

と表すことができる．



さらに，重心の運動方程式は下のように表すことができる．

$$M\,\frac{\mathrm{d}^2X_G}{\mathrm{d}t^2} = f \qquad ②,$$

$$M\,\frac{\mathrm{d}^2Y_G}{\mathrm{d}t^2} = N - M\,g \qquad ③,$$

図のように時間経過とともに，角度 θ は<u>時計回りに回転</u>し，

回転角が増加するので，回転軸(重心)のまわりの回転の運動方程式は下の式で表すことができる．

$$-I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -N\,\ell\sin\theta + f\,\ell\cos\theta \qquad ④$$

②式より，　$M\,\ell\left(-\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cos\theta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right) = f$　②'

③式より，　$M\,\ell\left(\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \sin\theta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right) = M\,g - N$　③'

$\cos\theta\times$ ②'式 $+ \sin\theta\times$ ③'式　→　$M\,\ell\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = f\cos\theta + M\,g\sin\theta - N\sin\theta$

上式に④式から変形した($f\cos\theta = -(I/\ell)\,\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2 + N\sin\theta$)を代入　→　$M\,\ell\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{I}{\ell}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + M\,g\sin\theta$

→　$\left(M\,\ell + \frac{I}{\ell}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = M\,g\sin\theta$　→　(慣性モーメント $I = \frac{M\,\ell^2}{3}$ を代入)　→　$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3g}{4\ell}\sin\theta$　⑤

→　両辺に$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$をかけて時刻 t で積分する(このとき，時刻 t=0 で角度 $\theta = \theta_0$とする)．

$\rightarrow \quad \left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{3g}{2\ell}\,(-\cos\theta + \cos\theta_0)$ → ②'式に代入 $f = \dfrac{9Mg}{4}\sin\theta\,(\cos\theta - \dfrac{2}{3}\cos\theta_0),$

→ ③' 式に代入 $N = \dfrac{Mg}{4}(1 + 9\cos^2\theta - 6\cos\theta\cos\theta_0).$

＊ 別解

時刻 t=0 で動き始めたとすると，エネルギー保存則より，下の式のように角速度 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ を求めることができる.

$$0 + M g \ell \cos\theta_0 = (\frac{1}{2}M v_G^{\,2} + \frac{1}{2} I \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2) + M g \ell \cos\theta = \frac{2M\ell^2}{3}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + M g \ell \cos\theta$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{3g}{2\ell}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$