2. 運動の法則

1章では運動する質点の運動の性質を表す物理量として，位置，速度，加速度について学んだ．ニュートンは物体の運動と物体に作用する力の関係に関して，3つの法則にまとめた．これを**「3つの運動の法則」**と呼ぶ．その3つの運動の法則の中の第2法則では，物体の運動の様子が変化して，「加速度が発生する原因は，物体に作用する力である」とした．このため，1章では加速度について学んだ．ニュートンが提案したこの3つの法則が，物理学の出発点であり，最も重要な法則である．この章では，3つの運動の法則について学び，物体に作用する(= 働く)力が運動に与える影響について調べる．

2-1. 運動の第1法則 -慣性の法則-

ニュートンが提案した**「運動の第 1 法則」**は別名**「慣性の法則」**とも呼ばれる．その成立する条件とその内容について述べる．

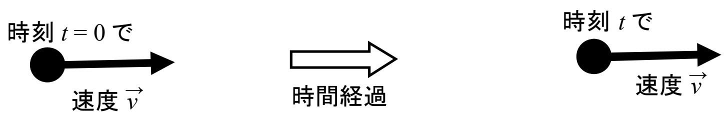
＊ 成立条件

物体に力が働いていないか，または，物体に働いている力がつりあっている(物体に働く合力 $= 0$)場合

＊ 結果

物体は運動の様子を変えない．これは，「物体は止まったままか，または，等速度運動(等速直線運動)を続ける」ことを意味する．また，運動の状態を保ち続けようという性質を，**「慣性」**と呼ぶ．

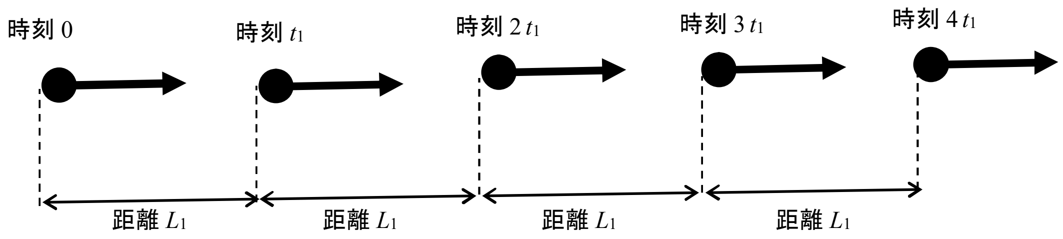
これは，「物体に力が作用していなければ，運動状態は変化せず，等速度運動のままである」とのことである．ある質点が時刻 $t = 0$ において，速度$\vec{v}$で運動していて，力が働いていない(合力 $= 0$)なら，時間が経過しても，速度$\vec{v}$で運動し続ける．



＊ 第 1 法則の別な意味 (→ 一定の時間間隔を決定できる → 等速度運動から「時計」を作成できる)

等速度運動している質点を考えよう．そこで，ある「ものさし」を使って，等距離 L_1 となる位置に印をつけよう．下の図のように，質点が距離 L_1 を通過する時間を t_1 とすると，等速度運動する質点が一定距離 L_1 の間を通過する時間間隔は全て等しく t_1 となる．つまり，等距離となる「ものさし」と等速度運動を使えば，等時間間隔を測定できる「時計」を作成することができる [1]．

[1] ある物理量を測定するということは，その物理量に対応した「基準量 (単位)」を定め，測定したい物理量はその何倍にあたるかを確定することと等しい．その基準量は，測定する位置や時刻によって変化しない量であることを(素朴に)前提としている．



このようにしてできた時計を用いて時間を測定し，質点の運動の様子(位置と通過時刻の関係，速度，加速度)を調べることができる.

＊ 慣性系

運動の第 1 法則が成立している系を「慣性系」と呼ぶ. ある慣性系を採用するということで「等距離と等時間間隔を規定(空間と時間の関係を規定)できる. そして，この体系(時空関係)の下で，次の運動の第 2 法則と第 3 法則について，言及することができるようになる.

問題 2-1 ある質点に力$\vec{F}_1 = (5.0\,, 4.0)$ N，力$\vec{F}_2 = (F_{2x}\,, -3.0)$ N，力$\vec{F}_3 = (1.0\,, F_{3y})$ N が作用している. この質点が止まったままの状態にあるとき，力$\vec{F}_2$ の x 成分 F_{2x} と力$\vec{F}_3$ の y 成分 F_{3y} を求めよ.

2-2. 運動の第2法則 -運動の法則-

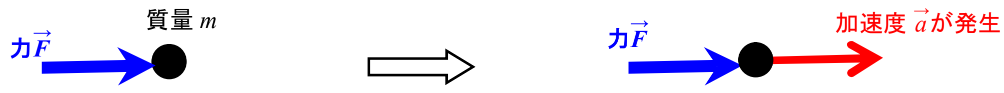
ニュートンが提案した「運動の第 2 法則」は別名，「運動の法則」とも呼ばれ，3 つの法則の中でも最も重要な法則である. その成立する条件と内容について述べる.

＊ 成立条件

質量 m の物体に外から力$\vec{F}$が働いている(力が作用している)場合.

＊ 結果

物体には加速度$\vec{a}$が発生し，運動の様子が変化する. さらに，物体の質量 m，外から物体に作用する力$\vec{F}$，発生する加速度$\vec{a}$の間には下の**運動方程式**が成立する. 複数の力が作用している場合は，力は合力として全ての力を足し合わせたものを用いる.



$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

* 力の単位

質量 m = 1 kg の物体に，大きさ F の力を加えたところ，加速度の大きさ a = 1 m/s^2 の加速度が発生した．このときに加えた力の大きさ F を **1 N(ニュートン)**と定義する．上の運動方程式でベクトルの大きさをとり，それに 値を代入すると，力の単位 N(ニュートン)は下の式のように，別の単位を用いて表すことができる．

$$\rightarrow \quad F = m\,a \quad \rightarrow \quad 1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \times 1\ \mathrm{m/s^2} = 1\ \mathrm{kg\ m/s^2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{N = kg\ m/s^2} \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

上の式で示したように，力の単位 N は質量の単位 kg，長さの単位 m，時間の単位 s(秒)からできている．このような，複合してできている単位を複合単位と呼ぶ．

* 単位系

質量の単位 kg，長さの単位 m，時間の単位 s は物理学における最も基本的な単位で，これらの単位からなる系(System)を国際標準単位系，または，**SI 単位系**(Système International d'unités (フランス語)) [2]と呼ぶ．あるいは，長さの単位を m，質量の単位を kg，時間の単位を s に選んだ単位系を **MKS 単位系**と呼ぶ [3]．一方，長さの単位を cm，質量の単位を g，時間の単位を s に選んだ単位系を cgs 単位系と呼ぶ．

* 第 2 法則の別な意味 (→ 加速度を測定し，力の大小を決定できる → 力を測定できる)

(2-2-1)式の運動方程式によると，同じ質量を持つ質点に対し，作用する力が 2 倍になれば，発生する加速度も 2 倍になる．それゆえ，この第 2 法則は力を測定するための法則と言うこともできる．

問題 2-2　質量 m = 0.5 kg の質点に力$\vec{F}_1$ = (2.0, – 3.0) N と力$\vec{F}_2$ = (4.0, 0.5) N が作用している．この質点に発生する加速度$\vec{a}$とその大きさ a を求めよ．

---

[2] 電磁気学における基本単位としては，電流の単位となる A(アンペア)が採用されている．SI 単位系はその他に，温度の単位 K(ケルビン)，物質量の単位 mol(モル)，光度の単位 cd(カンデラ)がある．

[3] さらに，電流の単位 A(アンペア)を採用した単位系を MKSA 単位系と呼ぶ．

*　微分方程式としての運動方程式

運動方程式である(2-2-1)式の右辺には加速度$\vec{a}$が含まれているが，加速度$\vec{a}$は速度$\vec{v}$の時間微分であり，速度は位置$\vec{r}$の時間微分なので，運動方程式は下の式のように微分を含む微分方程式として表すこともできる.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

質点の運動は上の微分方程式を解くことで求めることができる. その際，速度$\vec{v}(t)$を求めるときは，初速度$\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0$の情報が，さらに位置$\vec{r}(t)$を求めるときには初速度に加えて初期位置$\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0$の情報が必要になる. これらの情報は「初期条件」と呼ばれる.

問題　2-3　質量 $m = 0.5$ kg の質点が直線運動をしている. この質点の時刻 t にける速度 $v = v(t)$とする. また，この物体に働く力 $F = -t + 3$ [N]として作用している. この質点の時刻 $t = 0$ での速度(初速度)$v(0) = 2.0$ m/s として，時刻 t での速度 $v = v(t)$を求めよ.

問題　2-4　質量 m の質点が直線運動をしている. この質点の時刻 t にける位置 $x = x(t)$，速度 $v = v(t)$とする. また，この物体に働く力 F は，比例定数を b, γ として，力 $F = -m\,b\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ で物体に作用している. この質点の時刻 $t = 0$ での速度(初速度)$v(0) = v_0$として，時刻 t での速度 $v = v(t)$を求めよ.

2-3.　運動の第3法則　-作用・反作用の法則-

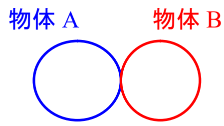
ニュートンが提案した「運動の第 3 法則」は別名，「作用・反作用の法則」とも呼ばれる. 第 1 法則と第 2 法則は 1 つの物体に対する法則であったが，第 3 法則は 2 つの物体の間の力のやり取りの関係を示したものである. 第 3 法則が成立する条件とその内容について述べる.

*　成立条件

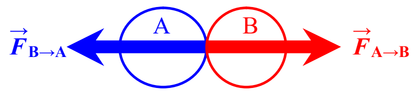
物体 A と物体 B の 2 つの物体の間に力のやりとりがあるとする. すなわち，物体 A が物体 B に加える力$\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$(この力は物体 B に働く力)と，逆に，物体 B が物体 A に加える力$\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$(この力は物体 A に働く力)が存在する.

*　結果

上の 2 つの力は互いに逆向きで，大きさが等しい. この関係は下の式で表すことができる.



2 つの物体は力のやり取りをしている(接していなくともよい)



$$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B} \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

上の 2 つの力のうち，一方を作用と呼ぶとき，もう一方の力を反作用と呼ぶので，この法則は**「作用・反作用の法則」**と呼ばれる.

2 つの力は大きさが等しいので「 $|\vec{F}_{B\to A}| = |\vec{F}_{A\to B}|$ 」が成立する.

* 作用・反作用の 2 つの力とつりあう 2 つの力について

作用・反作用の 2 つの力は，逆向きで同じ大きさであるが，「2 つの物体の間に働く力の関係」である.

つりあう 2 つの力は，逆向きで同じ大きさであるが，「1 つの物体に働く力」である.

* 第 3 法則の別な意味 (→ 2 つの物体の質量の比を測定できる → 物体の質量を測定できる)

質量 m_A と m_B となる 2 つの物体 A と B があり，2 つの物体間で力のやり取りをしている場合を考えてみよう.

物体 A から物体 B に加える力 $\vec{F}_{A\to B}$，物体 B から物体 A に加える力 $\vec{F}_{B\to A}$ とする．そして，物体 A に生じる加速度 $\vec{a}_A$，物体 B に生じる加速度 $\vec{a}_B$ とすると，2 つの物体に成立する運動方程式は下の式で表すことができる(ここでは，ほかの力は働いていないと仮定する).

$$m_A\,\vec{a}_A = \vec{F}_{B\to A} \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

$$m_B\,\vec{a}_B = \vec{F}_{A\to B} \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

上の 2 つの方程式の右辺で，その大きさをとると作用・反作用の法則より，2 つの式は等号で結ぶことができる.

$$|m_A\,\vec{a}_A| = |\vec{F}_{B\to A}| = |\vec{F}_{A\to B}| = |m_B\,\vec{a}_B|$$

したがって，下の式のように，2 つの物体の質量の比は生じる加速度の大きさの比となり，加速度の大きさの比を測定すれば，2 つの物体の質量の比がわかり，基準となる物体の質量を定義しておけば，全ての物体の質量を測定することができる.

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{|\vec{a}_B|}{|\vec{a}_A|} \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

問題 2-5　質量 $2m$ の物体 A が直線上を速度 $3v$ ($v > 0$ とする)で，質量 m の物体 B が直線上を速度$-v$ で運動していたが，その後，2 つの物体は衝突した．衝突時間 δt の間に物体 A と B は力のやり取りし，衝突後，物体 A は跳ね返り，速度 $-v$ で運動した．

1) 衝突によって，物体 B が受けた平均の力 F_B を求めよ．

2) 衝突による物体 B の加速度 a_B を求めよ．

3) 衝突後の物体 B の速度 v_B' を求めよ．

2-4.　運動方程式と様々な力

運動の第 2 法則により，運動方程式が成立する．運動方程式は(2-2-3)式で示したように，微分方程式として表すことができた．この節では，最初に運動の性質を表す量として，運動量を導入し，運動量を用いた運動方程式を示す．次に，運動方程式の解き方をまとめる．さらに，運動方程式には物体に作用する力が含まれているが，いくつかの力を具体的に取り上げ，運動方程式を解く手順を説明する．

* 運動量(momentum)

運動の状態を表す量として**運動量**がある．**運動量**$\vec{p}$は下の式のように，質量 m と物体の速度$\vec{v}$の積として定義する．

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2-4-1}$$

* 運動量の単位

上の定義式より，運動量の単位は下の式で表すことができる．

$$\text{運動量の単位} = \mathrm{kg\ m/s} \tag{2-4-2}$$

運動量を用いて，運動方程式を表してみよう．運動方程式である(2-2-3)式に代入することで，下の式を得ることができる．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{2-4-3}$$

元々は，ニュートンが示した運動方程式は(2-2-1)式や(2-2-3)式ではなく，(2-4-3)式であった．ニュートンは，運動方程式として，「運動量の時間変化 ＝ 物体に作用する力」であるとした．物体の質量 m が時間変化しない場合は，(2-4-3)式は(2-2-1)式や

(2-2-3)式と同等になる．何らかの原因で物体の質量が変化する場合は，運動方程式として(2-4-3)式を採用するのが正しい．

運動量は物体が持っているある種の「運動の勢い」のことで，(2-4-3)式によれば，物体に力が作用することで「運動の勢い」が変化する．(2-4-3)式を変形すると「 $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$」が得られ，両辺を積分すると，下の式のように，時刻 t での運動量$\vec{p}(t)$は，時刻 t_0 での運動量$\vec{p}(t_0)$ に力の時間積分(力積)を加えたものとなる．この式は運動方程式の積分形とも言える．

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{2-4-4}$$

* 力積の単位

上の式から，下の式で表すように，力積の単位は運動量の単位と等しい．

$$\text{運動量の単位} = \mathrm{kg\ m/s} = \text{力積の単位} = \mathrm{N\ s} \tag{2-4-5}$$

* 第 3 法則の別な意味に対する補足 (運動量を用いての質量比の測定)

1 ページ前で，「第 3 法則の別な意味」について説明したが，一定となる力をお及ぼし合うのは現実的には難しい．そこで，2 つの物体を衝突させて，運動量の変化を測定することで，質量比を決める方法を述べよう．

(2-4-4)式の右辺の力$\vec{F}$を物体 B から A に及ぼす力$\vec{F}_{\mathrm{B \to A}}$とすると，この力による力積は物体 A の運動量の変化に等しい．また，作用・反作用の法則より，「$\vec{F}_{\mathrm{B\to A}} = -\vec{F}_{\mathrm{A\to B}}$ 」 が成立するが，物体 A から B に及ぼす力$\vec{F}_{\mathrm{B\to A}}$による力積は物体 B の運動量変化に等しい．これを式で表すと下の式のように表すことができる．

$$\vec{p}_{\mathrm{A}}(t) - \vec{p}_{\mathrm{A}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{\mathrm{B\to A}}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t} \vec{F}_{\mathrm{A\to B}}\,\mathrm{d}t = -(\vec{p}_{\mathrm{B}}(t) - \vec{p}_{\mathrm{B}}(t_0)) \tag{2-4-6}$$

以下では，簡単のために物体 A と B が直線上で衝突し，力のやり取りをしているとする．運動量を(2-4-1)式を用いて表すと上の式は下の式のように表すことができる．

$$m_{\mathrm{A}}\, v_{\mathrm{A}}(t) - m_{\mathrm{A}}\, v_{\mathrm{A}}(t_0) = -(m_{\mathrm{B}}\, v_{\mathrm{B}}(t) - m_{\mathrm{B}}\, v_{\mathrm{B}}(t_0))$$

上の式より，衝突前後の物体の速度変化の比が質量比と等しくなる．衝突前後で速さを測定する容易であるので，(2-3-4)式より下の式で質量比を決めることができる．

$$\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}} = \frac{|\,v_{\mathrm{B}}(t) - v_{\mathrm{B}}(t_0)\,|}{|\,v_{\mathrm{A}}(t) - v_{\mathrm{A}}(t_0)\,|} \tag{2-4-7}$$

問題 2-6 始め，直線上を運動量 p_0 [kg m/s]で運動していた物体があり，時刻 $t = 0$ から力 F を受けた．時刻 t で受けた力 $F = \mathrm{e}^{-t}$ [N]となるとき，時刻 t における運動量 $p(t)$と時刻 $t \to \infty$ (無限大) における運動量 p_∞ を求めよ．

＊ 運動方程式の解き方

物体の運動の状態を調べるために，「運動方程式」をたてて，それを解くことが必要である．以下に，「運動方程式」の立て方と解き方いついて，フローチャートとしてまとめる．

① 問題を表す図を作成する

物体に作用する力を図示する(運動に関係ない力は省略することもある)

複数の物体があるときは作用・反作用の関係の力に注意する

⇩

② 問題を解決しやすい座標系を決める

(x 方向や y 方向は問題に応じて任意に決める)

⇩

③ 対象とする物体に対し，運動方程式を立てる

対象とする物体に作用する力に注意する

⇩

④ 運動方程式を解き，速度や位置を求める

初期条件(初速度と初期位置)に注意する

＊ 運動方程式の具体的解法

① 一定の力が作用している場合

質量 m の物体に一定の力$\vec{F}$が作用している場合，時刻 t での速度$\vec{v}(t)$と位置$\vec{r}(t)$を求めてみよう．このとき，時刻 $t = 0$ での初速度$\vec{v}_0$と初期位置$\vec{r}_0$とする．運動方程式は下の式で与えられる．

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = \text{一定} \qquad (2\text{-}4\text{-}8)$$

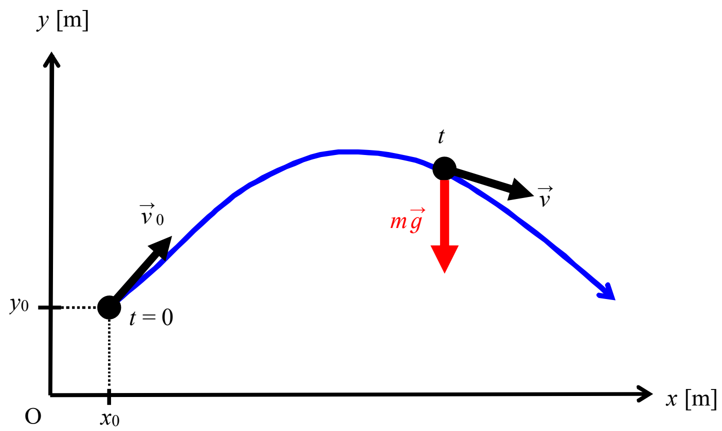
上式の両辺に dt をかけて，時刻 $t = 0$ から時刻 t まで積分することで，速度$\vec{v}(t)$は下の式として求めることができる．

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \frac{\vec{F}}{m}\,\mathrm{d}t = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}t = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad (2\text{-}4\text{-}9)$$

ここで，物体に生じる加速度$\vec{a} = \vec{F}/m =$ 一定，とした．さらに，時刻 t での位置$\vec{r}(t)$は下の式で与えられる．

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\ \mathrm{d}t = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m} t)\ \mathrm{d}t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{F}}{2m} t^2 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\ t^2 \qquad (2\text{-}4\text{-}10)$$

② 重力が作用している場合



質量 m の物体に重力 $m\vec{g}$ が作用している場合(観測から，物体の落下の加速度$\vec{a}$は一定であった．この落下の加速度を重力加速度$\vec{g}$と呼び，運動方程式より，落下の際に物体に働く重力は「$m\vec{g}$」と表すことができる)，時刻 t での速度$\vec{v}(t)$と位置$\vec{r}(t)$を求めてみよう．

時刻 $t = 0$ での初速度$\vec{v}_0$と初期位置$\vec{r}_0$とすると，運動方程式は下の式で与えられる．

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} = \text{一定} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} \qquad (2\text{-}4\text{-}11)$$

解は(2-4-9)式，または(2-4-10)式において，加速度を$\vec{a}$の代わりに重力加速度$\vec{g}$としたものとなる．

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\ t \qquad (2\text{-}4\text{-}12)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\ t^2 \qquad (2\text{-}4\text{-}13)$$

ここで，初速度$\vec{v}_0$ の違いで，「自由落下運動」，「鉛直投射運動」，「水平投射運動」，「斜方投射運動」に分類される．また，水平方向を x 方向，鉛直上方向を$+y$ 方向にとると，重力加速度$\vec{g} = (0\ ,\ -g)$となり，初期位置$\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$，初速度$\vec{v}_0 = (v_{0x}\ ,\ v_{0y})$ とすると，速度$\vec{v} = (v_x\ ,\ v_y)$と位置$\vec{r} = (x\ ,\ y)$の x 成分と y 成分は下の式で表すことができる．

$$\begin{cases} v_x = v_{0x}\ , \qquad v_y = v_{0y} - g\,t & (2\text{-}4\text{-}14) \\ x = x_0 + v_{0x}\,t\ , \quad y = y_0 + v_{0y}\,t - \dfrac{1}{2}g\,t^2 & (2\text{-}4\text{-}15) \end{cases}$$

問題 2-7　上の(2-4-15)式から，物体の位置の y 座標について，x 座標を用いて表せ．次に，それをグラフにして，グラフが放物線になることを確かめ，y 座標(高さ)が最高となる位置 $\vec{r}_{\max}$ を求めよ．

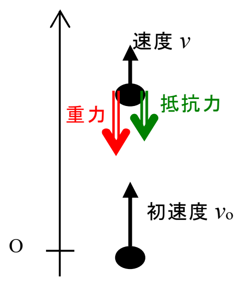
③　重力と空気抵抗力が作用している場合

質量 m の物体に重力 $m\vec{g}$ と速度 $\vec{v}$ と逆向きに働く空気抵抗力 $\vec{F}_{抵抗}$ が作用しているとする．ここで，空気抵抗力 $\vec{F}_{抵抗}$ の大きさは物体の速さ v に比例し(比例定数 $\alpha = m\gamma$)，向きは速度と逆向きに働くと仮定すると，下の式で表すことができる．

$$\vec{F}_{抵抗} = -\alpha\vec{v} = -m\gamma\vec{v} \qquad (2\text{-}4\text{-}16)$$

そして，運動方程式は下の式で与えられる．

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{F}_{抵抗} = m\vec{g} - m\gamma\vec{v} \qquad (2\text{-}4\text{-}17)$$



ここで，物体の運動する向きは鉛直方向(y 方向)に限定し，速度 $\vec{v} = (0\ ,\ v)$の場合を扱おう．重力加速度 $\vec{g} = (0, -g)$であるので，y 成分における運動方程式は下の式で表すことができる．

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - m\gamma v \qquad (2\text{-}4\text{-}18)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g - \gamma v \qquad (2\text{-}4\text{-}19)$$

上の方程式は速度 v が時刻 t の関数 $v(t)$となっていて，この微分方程式を解いて，速度 $v(t)$を求めることができる．この微分方程式を解くために，速度 $v(t)$の解を，一般解 v_1 と(時間依存しない)特殊解 V_1 の和として表現できるとしよう

$$v(t) = v_1(t) + V_1 = v_1(t) - \frac{g}{\gamma} \qquad (2\text{-}4\text{-}20)$$

ここで，特殊解 V_1 は，「$\mathrm{d}V_1/\mathrm{d}t = 0$」を満たし，(2-4-19)式から，「$0 = -g - \gamma V_1$ 」が成立するので，特殊解 V_1 は「$V_1 = -g/\gamma$」と求めることができる．解 $v(t)$を(2-4-207)式のように表し，(2-4-19)式に代入すると，一般解 $v_1(t)$に対し，次の微分方程式を得ることができる．

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -\gamma v_1 \qquad (2\text{-}4\text{-}21)$$

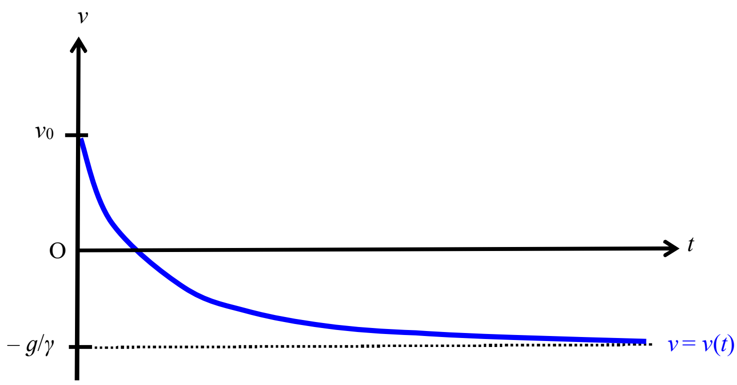
上の式を移項すると，「$\mathrm{d}v_1/v_1 = -\gamma\,\mathrm{d}t$ 」となり，時刻 0〜t まで定積分する．

$$\int_{(t=0)}^{(t)} \frac{\mathrm{d}v_1}{v_1} = -\int_0^t \gamma\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \ln\left|\frac{v_1(t)}{v_1(0)}\right| = -\gamma\,(t-0) \quad \rightarrow \quad v_1(t) = v_1(0)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{2-4-22}$$

特殊解と合わせると，初速度 $v_0 = v(0) = v_1(0) + V_1 = v_1(0) - g/\gamma$ より，$v_1(0) = v_0 + g/\gamma$ となり，これを(2-4-20)式に代入すると，下の式で表すことができる．

$$v(t) = (v_0 + \frac{g}{\gamma})\,\mathrm{e}^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{2-4-23}$$

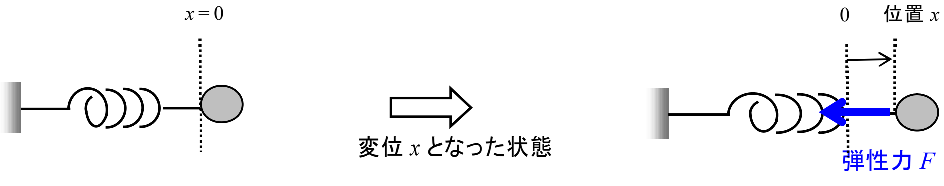
横軸に時刻 t，縦軸に速度 $v(t)$のグラフを描くと下のように表すことができる．時刻 $t \rightarrow \infty$ になると，重力と空気抵抗力が釣り合い，一定の速度(特殊解の速度)$v(t = \infty) = V_1 = -g/\gamma$ となる．また，速度 $v = 0$ となる時刻で最高点に達する．



問題 2-8　上の(2-4-23)式から，物体の速度 $v = 0$となる時刻 t_1を求めよ．次に，時刻 t_1 は抵抗力が小さいとき(抵抗力の比例定数 γ が小さいとき)，抵抗力が小さいとき，時刻 t が 0 の近傍で，速度 $v(t) \sim v_0 - g\,t$ と鉛直投射運動の式に近似できることを確かめよ(ヒント；微小量 δ に対し，$\mathrm{e}^{\delta} \sim 1 + \delta + \delta^2/2$ が成り立つ)．

④　ばねの弾性力が作用している場合

ばね定数 k のばねが水平に置かれており，ばねの一端に質量 m の物体がつながれている．ばねの伸びがない状態を位置の基準に選び，そこからの物体の変位(位置) x とすると，物体に働くばねの弾性力 F は，変位と逆向きに働き，フックの法則より，「$F = -k\,x$」と表すことができる(変位 x が小さいとき)．



ここで，運動方程式は物体の位置(変位)x を用いて，下の式で表すことができる．左辺は時間に対し 2 階の微分を含んでいる．右辺は物体に作用する弾性力である．

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{2-4-24}$$

上の式で両辺を質量 m で割り，「$k/m = \omega^2$」と新たな量 ω を定義すると，次の微分方程式を得ることができる．

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2-4-25}$$

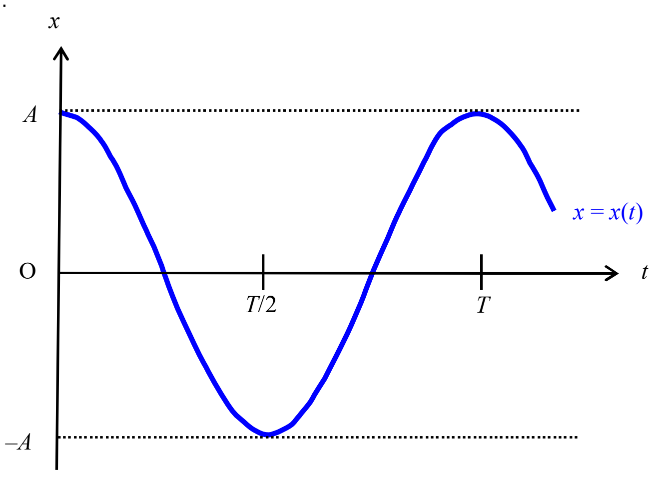
ここでは，上の 2 階の微分方程式の解法については省略する．一般解を提示し，それが，上の微分方程式を満たすことを確認することのとどめる．一般解 $x(t)$として，定数を C_1 と C_2 を用いて，下の式のように提案する．

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \tag{2-4-26}$$

上の式に対し，1 階の時間微分すると，「$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = (-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))\,\omega$ 」が得られ，さらに，時間微分すると，「$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = (-C_1 \cos(\omega t) - C_2 \sin(\omega t))\,\omega^2$」が得られる．この式の右辺は，「右辺 $= -\omega^2(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) = -\omega^2 x$ 」で，(2-4-25)式を満たすことが確認できる．さらに，初期条件として，初期位置 $x_0 = x(t=0) =$ 振幅 A，初速度 $v_0 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t|_{t=0} = 0$ とすると，定数 $C_1 = A$, $C_2 = 0$ となり，解 $x(t)$は下の式のようになる．

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{2-4-27}$$

上の式で表された位置 $x = x(t)$について，横軸を時刻 t，縦軸を位置 x にとったグラフを下に示す．ここで，周期 T は，「$\omega T = 2\pi$」の関係が成立し，変数 ω は角振動数(角速度)となる．したがって，周期 T (T=2π/ω)は，ばね定数 k とばねにつながれた物体の質量 m の関数となっている．



問題 2-9　質量 m の物体にばね定数 $k = m\,\omega^2$ のばねと抵抗力を発生させる機器を直線状でつないだ(抵抗力は物体の速度 v と逆向きに働き，比例定数 α と γ を用いて次の式で表される.「抵抗力$= -\alpha v = -m\gamma v$」). 次の問に答えよ.

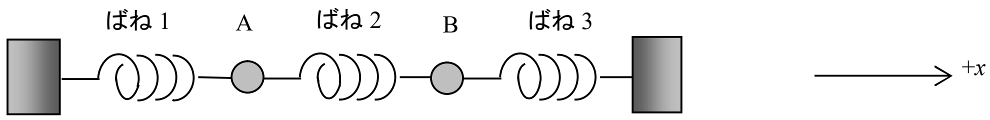
1)　この物体の運動に関して成り立つ運動方程式を物体の変位(位置)x を用いて表せ.

2)　上の運動方程式の解として，時刻 t における変位(位置)$x(t)$が，「$x(t) = A\ e^{-\gamma t/2} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\ \ t\right)$」と表すことができることを確かめよ.

3)　上の 2)で示した変位 x に対し，弾性力による位置エネルギーU，運動エネルギーK を求め，力学的エネルギー E が時刻 t とともに減少することを確かめよ.

問題 2-10　長さ ℓ の軽い質量の無視できる糸の先に質量 m のおもりをつけて，振り子を作った. 振り子の運動に関して，運動方程式を示し，振り子の振れ幅が小さい場合の振り子の周期 T を近似的に求めよ. ただし，重力加速度の大きさを g とする.

問題 2-11　図のように同じ質量 m の物体 A，B をばね定数 k のばね 1，2，3 をつけて，自然長となる状態にした. この状態から，物体 A，B の変位を x_A，x_B とするとき，次の問に答えよ.



1)　ばね 1 とばね 2 によって，物体 A に働く力 $F_{1\to A}$ と $F_{2\to A}$ を求めよ.

2)　ばね 2 とばね 3 によって，物体 B に働く力 $F_{2\to B}$ と $F_{3\to B}$ を求めよ.

3)　物体 A と B に対して，それぞれ運動方程式を書け.

4)　新たな変数として，$X = x_A + x_B$，$X' = x_A - x_B$ と置き換えたとき，新たな変数 X と X' についての運動方程式を書け.

5)　変数 X と X' についての運動方程式を解き，時刻 t の関数 $X(t)$ と $X'(t)$ を求めよ.

問題の答

問題 2-1　質点が止まったままの状態にある → 質点に作用している力がつりあっている

→ 質点に作用する「合力 $= 0$」，→ 合力 $= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

→ $(5.0 + F_{2x} + 1.0\ ,\ 4.0 + (-3.0) + F_{3y}) = (0\ ,\ 0)$ N，→ $F_{2x} = -6.0$ N，$F_{3y} = -1.0$ N.

問題 2-2　運動方程式「$m\vec{a}$ = 合力 = $\vec{F}_1+\vec{F}_2$」より，$0.5\ \vec{a} = (2.0+4.0\ ,\ -3.0+0.5) = (6.0\ ,\ -2.5)$

→　加速度 $\vec{a} = (6.0\ ,\ -2.5)/0.5 = (12\ ,\ -5.0)\ \mathrm{m/s^2}$,　加速度の大きさ $a = |\vec{a}| = \sqrt{12^2+(-5)^2} = \sqrt{169} = 13\ \mathrm{m/s^2}$

問題 2-3　運動方程式「$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$」より，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-t+3)/0.5 = -2t+6$,　と微分方程式を導出できる．この式を積分することで下の式のように速度 $v(t)$を求めることができる．

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = 2 + \int_0^t (-2t+6)\,\mathrm{d}t = 2 + \left[-t^2+6t\right]_0^t = -t^2+6t+2\quad [\mathrm{m/s}]$$

問題 2-4　運動方程式「$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = -m\,b\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$」より，$\mathrm{d}v = -b\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{d}t$　が得られ，両辺を積分する．

$$\int_{(t=0)}^{(t)} \mathrm{d}v = -\int_0^t b\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{d}t,\ \rightarrow\ v(t)-v(0) = \left[-\frac{b}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}\right]_0^t\ \rightarrow\ v(t) = v(0) + \frac{b}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})$$

問題 2-5　1)　衝突によって，物体 A の速度変化 δv_A は，「$\delta v_\mathrm{A} = v_\mathrm{A}' - v_\mathrm{A} = -v - 3v = -4v$」と表される．衝突により，物体 A に作用する力を F_A とすると，物体 A における運動方程式は，「$m_\mathrm{A}\,\delta v_\mathrm{A}/(\delta t) = F_\mathrm{A}$」で,「力 $F_\mathrm{A} = m_\mathrm{A}\,\delta v_\mathrm{A}/(\delta t) = 2m\,(-4v)/(\delta t) = -8mv/(\delta t)$」と表すことができる．物体 A と物体 B の間に働く力は作用反作用の関係が成立するので，物体 B に作用する力 F_B は，「$F_\mathrm{B} = -F_\mathrm{A} = 8mv/(\delta t)$」となる．

2)　物体 B における運動方程式は，「$m_\mathrm{B}\,\delta v_\mathrm{B}/(\delta t) = F_\mathrm{B}$」で，衝突による物体 B の加速度 a_B は，「$a_\mathrm{B} = \delta v_\mathrm{B}/(\delta t) = F_\mathrm{B}/m_\mathrm{B} = (8mv/(\delta t))/m = 8v/(\delta t)$」となる．

3)　物体 B の速度変化 δv_B は，「$\delta v_\mathrm{B} = v_\mathrm{B}' - v_\mathrm{B} = v_\mathrm{B}' - (-v) = v_\mathrm{B}' + v$」で，これが，上の問 2)より，$a_\mathrm{B}(\delta t)$　と等しいので，物体 B の衝突後の速度 $v_\mathrm{B}' = a_\mathrm{B}(\delta t) - v = 8v - v = 7v$」と求めることができる．

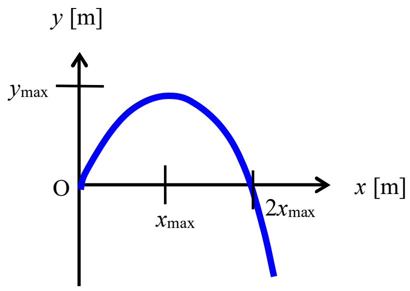
問題 2-6　運動量 p を用いた運動方程式は「$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$」と表すことができるので，両辺を積分することで，運動量 $p(t)$は下の式のように計算することができる．

$$p(t) = p(t{=}0) + \int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t = p_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = p_0 - \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^t = p_0 - (\mathrm{e}^{-t}-1) = -\mathrm{e}^{-t} + 1 + p_0\quad [\mathrm{kg\ m/s}],$$

$$p(\infty) = 1 + p_0\quad [\mathrm{kg\ m/s}]$$

問題 2-7　$x' = x - x_0$ とすると，$y = -\dfrac{g}{2\,v_{0x}{}^2}\left\{\left(x' - \dfrac{v_{0x}\,v_{0y}}{g}\right)^2 - \dfrac{v_{0x}{}^2\,v_{0y}{}^2}{g^2}\right\} + y_0$,

$\vec{r}_\mathrm{max} = \left(x_0 + \dfrac{v_{0x}\,v_{0y}}{g}\ ,\ y_0 + \dfrac{v_{0y}{}^2}{2g}\right) = (x_\mathrm{max}\ ,\ y_\mathrm{max})$ とおく．



問題 2-8　(2-4-23)式では，$v(t) = (v_0 + \frac{g}{\gamma})\, e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}$，　なので，速度 $v = 0$ となる時刻を t_1 とすると，$\gamma\, t_1 = \ln\left|\frac{v_0 + g/\gamma}{g/\gamma}\right| = \ln\left|\frac{v_0\,\gamma + g}{g}\right| = \ln\left|1 + \frac{v_0\,\gamma}{g}\right| \sim \frac{v_0\,\gamma}{g} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0\,\gamma}{g}\right)^2$（近似，$\ln(1+\delta) \sim \delta - \delta^2/2$ を用いた）．さらに，速度 v は次のように近似できる．$v(t) \sim (v_0 + \frac{g}{\gamma})(1 - \gamma\, t + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2) - \frac{g}{\gamma} = v_0\,(1 - \gamma\, t + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2) - g\, t + \frac{g}{2}\gamma\, t^2$

$\sim v_0 - (g + v_0\,\gamma)\, t \sim v_0 - g\, t$

問題 2-9　1)　運動方程式は，「$m\frac{d^2x}{dt^2}$ = 物体に働く力(合力) = 弾性力+抵抗力」と表されるので，下の式のようになる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - m\,\gamma\frac{dx}{dt} \quad\rightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0\,,$$

2)　速度 $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\, e^{-\gamma t/2}\,[\, -\gamma/2 \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) - \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)]$

加速度 $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = A\, e^{-\gamma t/2}\,[(\gamma/2)^2 \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + \gamma\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)$

$$- (\omega^2 - (\gamma/2)^2) \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)\,]$$

$$= A\, e^{-\gamma t/2}\,[\, -(\omega^2 - \gamma^2/2) \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + \gamma\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)\,] \qquad ①$$

$$-\gamma\frac{dx}{dt} - \omega^2 x = A\, e^{-\gamma t/2}\,[\, \gamma^2/2 \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + \gamma\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)]$$

$$- A\, e^{-\gamma t/2}\, \omega^2 \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)$$

$$= A\, e^{-\gamma t/2}\,[\, (\gamma^2/2 - \omega^2) \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + \gamma\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)] \qquad ②$$

「 ①式 = ②式 」が成立する．

3)　$K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} A^2 e^{-\gamma t}\, \{\, \frac{\gamma}{2} \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)\,\}^2$

$U = \frac{k}{2} x^2 = \frac{m\,\omega^2}{2} x^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)$

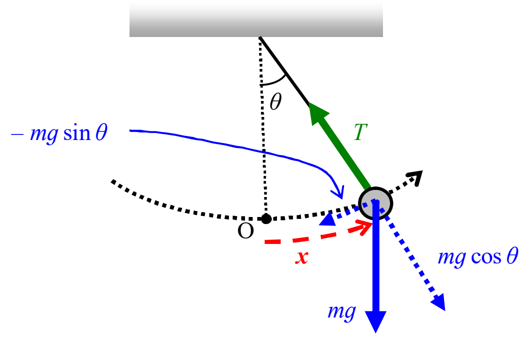
$E = K + U = \frac{m}{2} A^2 e^{-\gamma t}\,[\,(\omega^2 + \gamma^2/4) \cos^2(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + (\omega^2 - \gamma^2/4) \sin^2(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)$

$$+ \gamma\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \cos(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) \sin(\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)\,]$$

$$= \frac{m}{2} A^2 e^{-\gamma t}\,[\, \omega^2 + \gamma^2/4 \cos(2\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t) + \gamma\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; \sin(2\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}\; t)/2],$$

$$E(t=0) = \frac{m}{2} A^2 (\omega^2 + \gamma^2/4), \qquad E(t=\infty) = 0$$

問題　2-10　振り子が半径 ℓ の円弧上を往復運動し，鉛直方向からの角度が θ となったときの図を右に示す．往復運動の中心の位置 O から円弧上の位置 x とする．おもりには大きさ $m\,g$ の重力が鉛直下方に，大きさ T の張力が糸の向きに働いている．糸が張った向きでは「$T = m\,g\cos\theta$」の関係で力がつりあっている．重力の円弧成分「$-m\,g\sin\theta$」がおもりを中心 O の方向に向かわせるような力で，この力で振り子運動し，運動方程式は下のように表すことができる．



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta \qquad ①$$

位置 x は円弧上の位置なので，「$x = \ell\,\theta$」が成り立ち，上式について，角度 θ を用いて表すと下の式となる．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \qquad ②$$

振れ角 θ が小さいときは，「$\sin\theta \sim \theta$」と近似できるので，上式は「$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$」と近似でき，単振動の運動方程式(2-4-22)式との対応から，角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ と表されるので，振り子の周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ となり，糸の長さ ℓ が長くなると振り子運動はゆっくりとなる．運動方程式としての②式を厳密に解く(あるいは，数値計算を行う)と，最大の振れ角 θ_{max} が大きくなると，周期 T は $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ より長くなる．

問題　2-11　1)　$F_{1\to A} = -k\,x_A$,　$F_{2\to A} = -k\,(x_A - x_B)$　2)　$F_{2\to B} = -k\,(x_B - x_A)$,　$F_{3\to B} = -k\,x_B$

3)　$m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k\,(2x_A - x_B)$,　$m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k\,(2x_B - x_A)$

4)　$m\frac{d^2X}{dt^2} = -k\,X$,　$m\frac{d^2X'}{dt^2} = -3k\,X'$

5)　$X(t) = C_1\cos(\sqrt{k/m}\ t) + C_2\sin(\sqrt{k/m}\ t)$,　$X'(t) = C_1'\cos(\sqrt{3k/m}\ t) + C_2'\sin(\sqrt{3k/m}\ t)$