物理

-　低学年（高専２年）用　-

(３単位)

2020 年 04 月 05 日(日)　-　文書の修正(コロナウィルス蔓延)開始
2021 年 04 月 06 日(火)　-　12 章までの再修正と問題解答
2021 年 07 月 16 日(金)　-　11 章の修正

函館高専

長澤　修一

・目次

「9 章 #角運動量と力のモーメント」はベクトルの外積を用いるため，2 年生では省略する．

6. 運動量保存の法則

5 章では，ニュートンが提出した「運動に関するの 3 つの法則」について学んだ．3 つの運動の法則の中で，特に，「第 2 法則(運動の法則)」を用いることによって，物体の運動を調べること(物体に対する運動方程式を立て，それを解き，物体の加速度から，時刻 t での速度と位置を求めること)ができた．

一方，物体の運動を調べる方法として，運動方程式を解いて調べる方法とは別な方法がいくつかある．別な方法の一つとして，「**運動量保存の法則**」を用いる方法がある．この章では，「**運動量保存の法則**」について学ぶために，「物体の運動量」を定義し，「**運動量保存の法則**」を導出する．さらに，次の章では，物体の運動を調べるための別な方法である「力学的エネルギー保存則」を学ぶ．

6-1. 運動量（momentum） $\vec{p}$

同じ速度を持つ物体でも，その質量が大きいほど，その物体を受け止める時の衝撃は大きくなる．そこで，運動の勢いを表す量として，下の式に示すように物体の質量 m と速度 $\vec{v}$ の積で運動量 $\vec{p}$ を定義する．

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{6-1-1}$$

運動量はスカラー量(質量)とベクトル量(速度)の積なのでベクトル量である．また，上の定義式より，その単位は

$$\text{運動量の単位} = \text{質量の単位} \times \text{速度の単位} = \mathrm{kg \cdot m/s} \tag{6-1-2}$$

となる．質量 m を持った物体が始めの時刻 t_0 において速度 $\vec{v}_0$ で動いていたが，その後，時刻 t ($= t_0 + \Delta t$)において速度 $\vec{v}$ になったとしよう．

このときの，物体の加速度 $\vec{a}$ は下の式で表すことができる．

$$\vec{a} = \frac{\text{速度の変化分}}{\text{かかった時間}} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{6-1-3}$$

この物体に外から力 $\vec{F}$ が加わって，加速度 $\vec{a}$ が発生する．運動方程式は下の式のように表すことができる．

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta t} \tag{6-1-4}$$

上の式の両辺に Δt をかけて，右辺と左辺を交換すると，下の式を得ることができる．

$$\boxed{m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F} \cdot \Delta t} \tag{6-1-5}$$

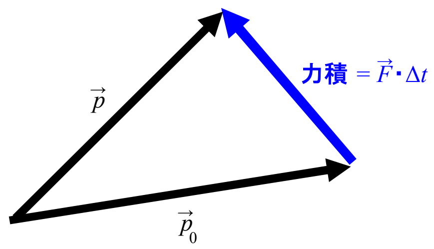
上の式に対し，言葉を用いて表すと($\vec{p} = m\vec{v}$ = 終わりの運動量，$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ = 始めの運動量)，下の式のように表すことができる．

終わりの運動量 − 始めの運動量 ＝ 運動量の変化 ＝ 力積 (6-1-6)

ここで，上の式の右辺における「**力積は，外からの力$\vec{F}$とその力が作用している時間 Δt との積**」である．「運動量の変化 $=\vec{p}-\vec{p}_0$ $=\Delta\vec{p}$ 」と表してもよい．(6-1-5)式を変形すると，下の式のようにベクトルの足し算で表すことができる．

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F}\cdot\Delta t \tag{6-1-7}$$

終わりの運動量 ＝ 始めの運動量 ＋ 力積



・力積の単位

(6-1-5)式または(6-1-6)式より，力積の単位は下のように求めることができる．

$$\text{力積の単位} = \text{力の単位}\times\text{時間の単位} = \mathrm{N}(\text{ニュートン})\times\mathrm{s}(\text{秒}) = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times\mathrm{s} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s} \tag{6-1-8}$$

→ 当然だが，運動量の単位と等しい[47]

問 6-1-1. 質量 m = 50 kg の人が速さ v = 8.0 m/s で走っているとき，この人の持っている運動量の大きさ p を求めよ．

問 6-1-2. 質量 m = 1.0 t(トン)の自動車が時速 39.6 km で動いている．

1) この自動車の持っている運動量の大きさ p を計算せよ．
2) この自動車を 5.0 秒で止めるために必要なブレーキ力(ブレーキによって自動車を止めるための力)の大きさ F を求めよ．

問 6-1-3. 平面上の運動をしている質量 m = 2.0 kg の物体がある．始めのこの物体は東向きに速さ v_0 = 3.0 m/s で動いていたが，4.0 秒後に南向きに速さ v = 4.0 m/s となった．東向きを$+x$ 方向，北向きを$+y$ 方向として下の問に答えよ．

1) この物体が始めに持っていた運動量$\vec{p}_0$を成分表示で表せ．
2) この物体の 4.0 秒後の運動量$\vec{p}$を成分表示で表せ．
3) この物体の 4.0 秒間の運動量の変化 $\Delta\vec{p}$を求めよ．
4) 上の問 3)の答えより，運動量の変化分の大きさ Δp を求めよ．
5) この運動をしている間，物体にかかる平均の力$\vec{F}$を成分表示で表せ．

・力が一定でない場合の運動量と力積の関係[48]

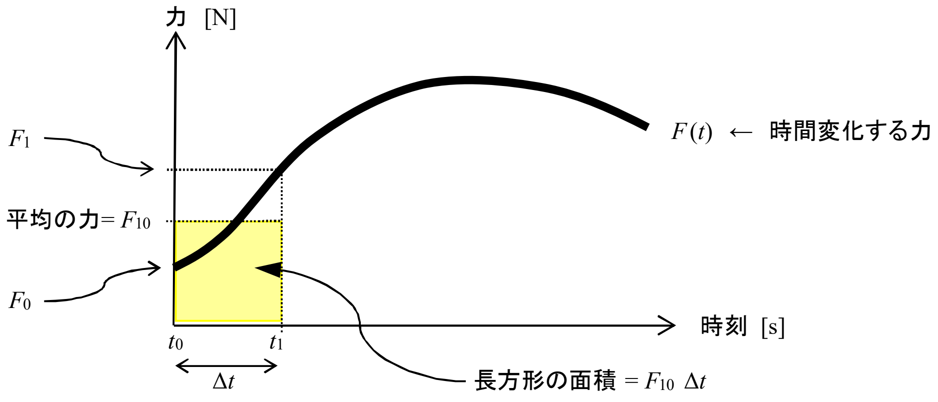
(6-1-5)式は微少時間 Δt の間は力が一定であると仮定して導出した．しかし，一般的には，外から加えられた力が一定でない場合もある(以下では，簡単のため 1 次元の運動を考える)．このような場合，微少時間 Δt 内においても，力は変化するので，この間に物体に加わる力は時刻 t_0 での力 F_0 と時刻 t_1 での力 F_1 の平均値($F_{10} = (F_1 + F_0)/2$)であると近似して扱う．(6-1-5)式は

[47] 物理式で等号が成り立つ場合，単位でも等号が成り立たなければならない．また，左辺がベクトル量なら，右辺もベクトル量となる(← 当たり前のことだが，一応，注意しておく)．
[48] この部分は難しいと思ったら省略してよい．

下の式のように表すこととする．ここで，時刻 t_0 での運動量を p_0，時刻 t_1 での運動量を p_1 とした．

$$p_1 - p_0 = F_{10}\,\Delta t \qquad (6\text{-}1\text{-}9)$$

上の式の左辺の力積 $F_{10}\,\Delta t$ について，横軸を時刻 t，縦軸を力 F とする F-t グラフで見ると，下の図のように長方形の面積が力積 $F_{10}\,\Delta t$ に相当する．



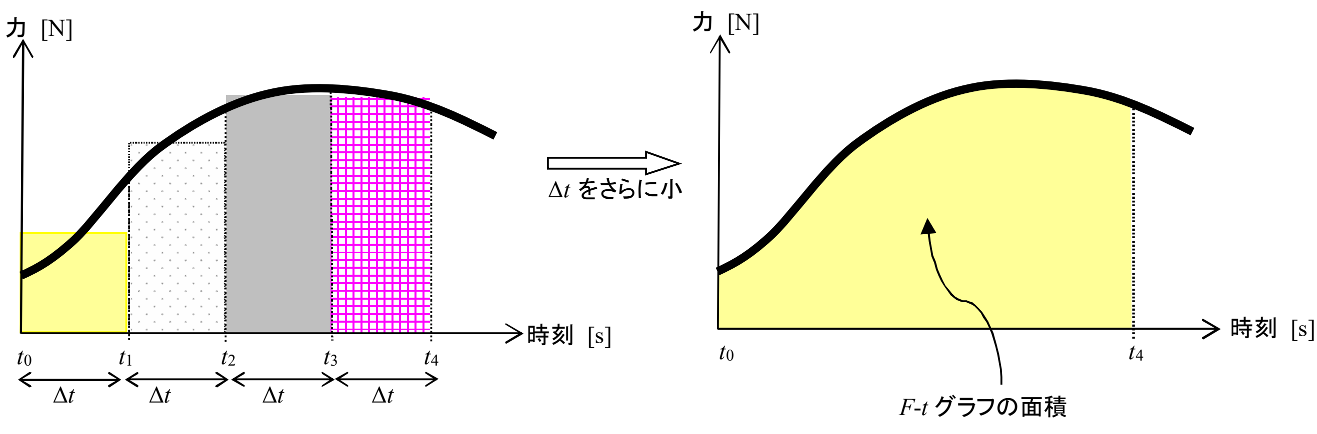
さらに，時刻 t_1 から Δt 秒経過した $t_2\,(= t_1 + \Delta t\,)$での運動量を p_2 とすると(6-1-9)式と同様に下の式が成立する．

$$p_2 - p_1 = F_{21}\,\Delta t \qquad (6\text{-}1\text{-}10)$$

以下，同様にして，時刻 t_4（$= t_3 + \Delta t = t_2 + 2\Delta t = \cdots = t_0 + 4\Delta t$ ）まで考える．(6-1-9)式や(6-1-10)式‥より，右辺と左辺をそれぞれ足し合わせと，下の式のようにキャンセルできる部分があり，簡単にまとめることができる。

$$\begin{array}{rrcl}
 & \cancel{p_1} - p_0 & = & F_{10}\ \Delta t \\
 & \cancel{p_2} - \cancel{p_1} & = & F_{21}\ \Delta t \\
 & \cancel{p_3} - \cancel{p_2} & = & F_{32}\ \Delta t \\
+ & p_4 - \cancel{p_3} & = & F_{43}\ \Delta t \\
\hline
 & p_4 - p_0 & = & (F_{10} + F_{21} + F_{32} + F_{43})\ \Delta t
\end{array} \qquad (6\text{-}1\text{-}11)$$

上の式の右辺において，$F_{10}\,\Delta t$ や $F_{21}\,\Delta t$ は各々，下のグラフにおいて小さな長方形の面積に相当する．それらの長方形の面積の総和が右辺となる．さらに，時間幅 Δt を小さくとると，最終的には下の右の図に示したように F-t グラフの面積になる．



つまり，時刻 t での運動量 $p\,(t\,)$は初期運動量 $p\,(t=0)$と F-t グラフの面積の和で表される.

$$p\,(t\,) = p\,(t=0) + F\text{-}t\ \text{グラフの面積} \ = p\,(0) + (\text{平均の力})\times t \qquad (6\text{-}1\text{-}12)$$

問 6-1-4. 1 方向に運動している質量 $m = 2.0$ kg の物体がある．時刻 $t = 0$ で速度 $v_0 = 1.0$ m/s で動いていた物体に時間変化する力 F が加わった(力 F は時刻 t の関数で，$F = 2t$ [N] と表せるものとする).

1) 時刻 $t = 0.0 \sim 4.0$ s までの F-t グラフを書け.
2) 時刻 $t = 4.0$ s での運動量を求めよ.
3) 時刻 $t = 4.0$ s での物体の速度を求めよ.

問 6-1-5. 速さ $v = 30$ m/s で飛んできた質量 m =200 g のボールをバッターが同じ速さで打ち返した．ボールがバットに当たってから Δt = 0.2 s 後にボールはバットから離れた．下の場合について，バットがボールに与えた力積とその時の平均の力の大きさ F をそれぞれ求めよ.

1) 逆向きに打ち返して，ピッチャーライナーになった場合
2) 90 °の向きで跳ね返り，キャッチャーフライになった場合
3) 45 °の向きに跳ね返って，ボールが最も遠くに飛んだ場合

6-2. 運動量保存の法則

成立する前提条件 ； 2 つの物体には外から力が働いていない.

⬇

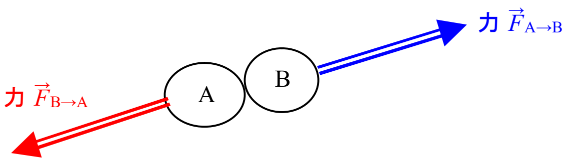
物体どうしは互いに力を及ぼしあっても，2 つの物体の運動量の合計は一定であり，保存される.

質量 m_A の物体 A と質量 m_B の物体 B がある．始め，物体 A は速度 $\vec{v}_A$ で物体 B は速度 $\vec{v}_B$ で動いていた(運動量はそれぞれ，$\vec{p}_A = m_A\,\vec{v}_A$ ，$\vec{p}_B = m_B\,\vec{v}_B$)．その後，2 つの物体は衝突し，$\Delta t$ 秒間，互いに力を及ぼしあった．衝突後，2 つの物体は速度$\vec{v}_A$’と $\vec{v}_B$’で動くようになった(運動量はそれぞれ，$\vec{p}_A$’ $= m_A\,\vec{v}_A$’ ，$\vec{p}_B$’ $= m_B\,\vec{v}_B$’).

＊ 始め

Δt 秒間，互いに影響を及ぼしあっている(力が働いている)

＊ 衝突中



$$\text{作用・反作用の関係にある力} \begin{cases} \vec{F}_{\mathrm{B\to A}} = \text{(B から)A へ及ぼす力} = \text{A に働く力} \\ \vec{F}_{\mathrm{A\to B}} = \text{(A から)B へ及ぼす力} = \text{B に働く力} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\vec{F}_{\mathrm{B\to A}} + \vec{F}_{\mathrm{A\to B}} = 0} \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

(**物体 A には物体 B からの力のみ働く.** **物体 B には物体 A からの力のみ働く.**)

衝突後は 2 つの物体間で力を及ぼし合わない(他の力も作用しない)

＊ 終わり

上のような状況で, 物体 A と物体 B に対して, (6-1-5)式を適用させると, 下の式が導かれる.

$$\begin{cases} \vec{p}_{\mathrm{A}}' - \vec{p}_{\mathrm{A}} = \vec{F}_{\mathrm{B\to A}}\,\Delta t & (6\text{-}2\text{-}2) \\ \vec{p}_{\mathrm{B}}' - \vec{p}_{\mathrm{B}} = \vec{F}_{\mathrm{A\to B}}\,\Delta t & (6\text{-}2\text{-}3) \end{cases}$$

上の 2 つの式の和をとり, (6-2-1)式(作用・反作用の法則)を適用すると下の式を得ることができる.

$$\vec{p}_{\mathrm{A}}' - \vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}}' - \vec{p}_{\mathrm{B}} = (\vec{F}_{\mathrm{B\to A}} + \vec{F}_{\mathrm{A\to B}})\,\Delta t = 0$$

上の式について移項すると下の式のように,「運動量の合計は衝突の前と後で変わらない」という**「運動量保存の法則」**を表す式が導かれる.

ここで, 微小時間 Δt は 2 つの物体が力のやりとりを行っている時間に相当する. 2 つの物体は衝突して反発する力が作用する. ここで, (B によって)A に働く力 $\vec{F}_{\mathrm{B\to A}}$ の向きは「物体 B から物体 A へ引いた矢印の向き」に等しい.

$$\boxed{\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}} \ \text{(=始めの運動量の合計)} = \vec{p}_{\mathrm{A}}' + \vec{p}_{\mathrm{B}}' \ \text{(=終わりの運動量の合計)}} \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

上の式で表された運動量保存則を導いたポイントは 2 つある.

① ニュートンの運動の第 2 法則(運動の法則) → 運動方程式を書き換え, 運動量表示にした.

② ニュートンの運動の第 3 法則(作用・反作用の法則) → 2 つの物体間に働く力の関係を表した.

特に 2 番目のポイントは, 2 つの物体の運動量の合計について議論するときに重要となる. つまり,**「運動量保存の法則は作**

用・反作用の法則を別な見方で表現した」ものである.

＊ 注意
① 爆発などで 1 つの物体がいくつかの物体に分裂する場合でも爆発前後で運動量保存則が成立する.
② 外から力が加わると, 全運動量が一定とはならない.
③ 平面以上(2 次元, 3 次元)上での運動の場合は, ベクトルとして,「衝突前の全運動量 ＝ 衝突後の全運動量」が成立するので成分ごとに分けて考える.

問 6-2-1. 止まっている質量 $m_A = 5.0$ kg の物体 A に質量 $m_B = 2.0$ kg の物体 B が速度 $v_B = +4.0$ m/s で正面衝突した.

1) 衝突後の物体 A と物体 B の速度を v_A' と v_B' とすると, 速度 v_A' と v_B' の大小関係を不等式で表せ.
2) もし, 物体 B の速度 $v_B' = -1.0$ m/s であるとすると, 速度 v_A' を求めよ.
3) もし, 物体 B の速度 $v_B' = 1.0$ m/s であるとすると, 速度 v_A' を求めよ.
4) もし, 物体 A の速度 $v_A' = 1.0$ m/s であるとすると, 速度 v_B' を求めよ.
5) もし, 衝突後, 物体 A と物体 B がくっついたとすると, 速度 v_A' と v_B' を求めよ.

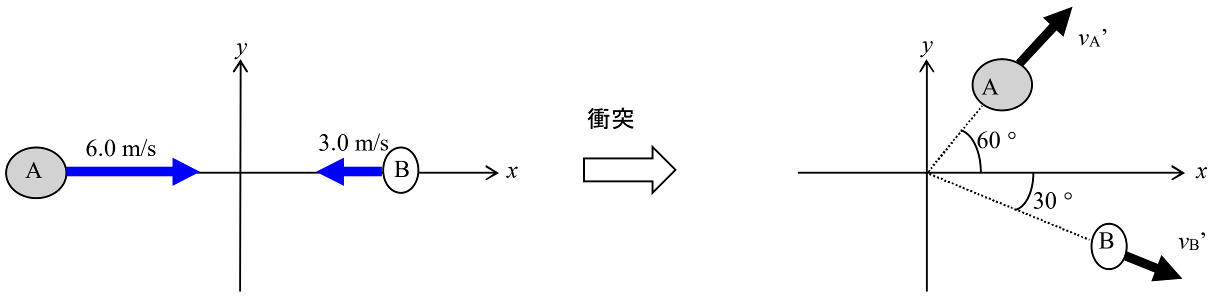
問 6-2-2. 滑らかな平面で質量 $m_A = 2.0$ kg の物体 A が速度 $\vec{v}_A = (3.0\ ,\ 0.0)$ m/s で, 止まっている質量 $m_B = 4.0$ kg の物体 B に衝突した. 衝突後, 物体 A は速度 $\vec{v}_A' = (1.0\ ,\ 2.0)$ m/s で運動した.

1) この問題を表す図を, 衝突前と衝突後で描け.
2) 衝突後の物体 B の速度 $\vec{v}_B'$ を求めよ.
3) 衝突の際, 物体 A によって物体 B の受けた力積とその大きさを求めよ.

問 6-2-3. 滑らかな平面上で質量 $m_A = 2.0$ kg の物体 A が速度 $\vec{v}_A = (2.0\ ,\ 0.0)$ m/s, 質量 $m_B = 3.0$ kg の物体 B が $\vec{v}_B = (0.0\ ,\ 1.0)$ m/s で動いていて, 原点 O で衝突した. 衝突後, 2 つの物体はくっついて移動した.

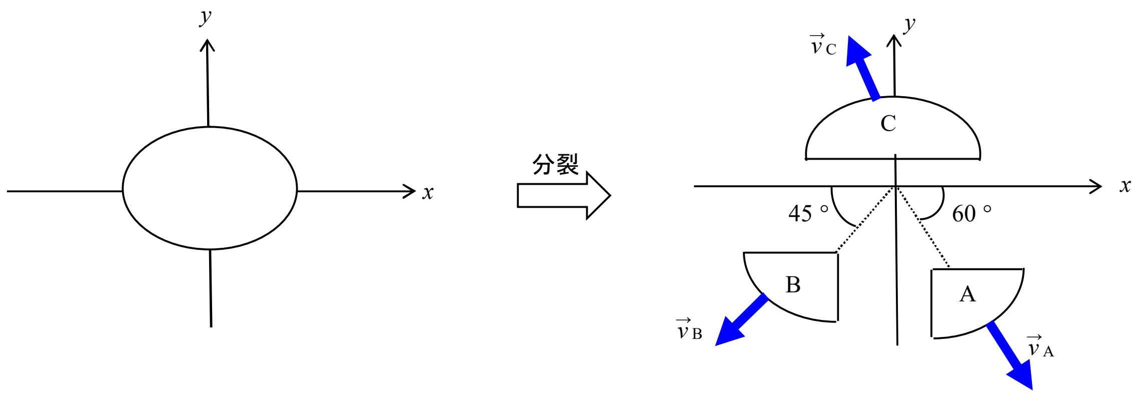
1) この問題を表す図を, 衝突前と衝突後で描け.
2) 衝突後の一体化した物体 A と物体 B の速度 $\vec{v}'$ を求めよ.
3) 衝突の際, 物体 A によって物体 B の受けた力積とその大きさを求めよ.

問 6-2-4. 滑らかな平面で質量 $m_A = 4.0$ kg の物体 A と質量 $m_B = 2.0$ kg の物体 B が下の図のように原点 O で衝突して, 跳ね返った. 衝突後の物体 A の速さ v_A' と物体 B の速さ v_B' を求めよ.



問 6-2-5. 質量 M の物体が速さ V で動いていた. ある時, この物体が 2 個に分裂した. その内の 1 個の質量が m で分裂する前と同じ向きで速さが $V + v$ となった. もう一方の物体の速さを求めよ.

問 6-2-6. 質量 $M = 4.0$ kg の物体が始め, 静止していた. その後, 図のように物体 A, 物体 B, 物体 C(物体 A の質量 ＝ 物体 B の質量 ＝ 物体 C の質量/2)が平面上で 3 つに分裂した. 分裂後, 物体 A の速さ $v_A' = 2\sqrt{3}\ = 3.46$ m/s, 物体 B の速さ $v_B' = 2\sqrt{2}\ = 2.82$ m/s であった. 物体 C の速度 $\vec{v}_C$ を成分表示で求めよ.



6-3.　はねかえり係数(反発係数)

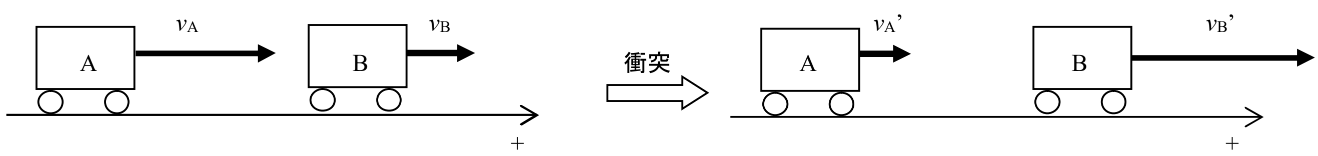
衝突の特性を表す係数として，はねかえり係数(反発係数)を導入しよう．はねかえり係数 e を，衝突前後の 2 つの物体の相対速度の比で定義する．衝突前の物体 A の速度を $\vec{v}_A$，物体 B の速度を $\vec{v}_B$ とし，衝突後の物体 A の速度を $\vec{v}_A'$，物体 B の速度を $\vec{v}_B'$ とすると，はねかえり係数 e は下の式のように表すことができる．

$$e = \frac{\text{衝突後の2物体間の相対速さ}}{\text{衝突前の2物体間の相対速さ}} = \frac{|\vec{v}_A' - \vec{v}_B'|}{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

上の式で分子・分母はともに正であり，衝突後の相対速さは衝突前の相対速さを超えることはないので，はねかえり係数の範囲は $0 \leqq e \leqq 1$ となる．このうち，「$e = 1$」となる衝突を「弾性衝突」，「$e < 1$」となる衝突を「非弾性衝突」と呼ぶ．「非弾性衝突」の中で，特に，「$e = 0$」となる場合を「完全非弾性衝突[49]」と呼ぶ．

・1 方向の運動の場合のはねかえり係数

2 つの物体が図のように直線上で衝突する場合は(図のように衝突するためには，$v_A > v_B$ なので，$|v_A - v_B| = v_A - v_B$)，そして，衝突後 2 つの物体が再び衝突しないためには $v_A' < v_B'$ となるので，$|v_A' - v_B'| = -(v_A' - v_B')$となる．



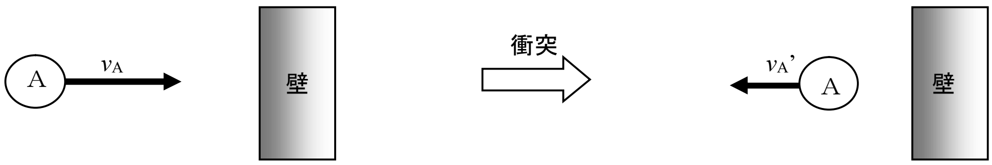
したがって，この時(6-3-1)式で示された跳ね返り係数 e は下の式のように表すことができる．

$$e = \frac{|v_A' - v_B'|}{|v_A - v_B|} = -\frac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B} \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

さらに，物体 B が壁のような質量が物体 A に比べて非常に大きな物体の場合は，ぶつかっても動かないので[50]，$v_B = v_B' = 0$ となり，(6-3-2)式は下の式のようになる．

49 完全非弾性衝突($e = 0$)の場合は，衝突後 2 つの物体はくっついて移動する．　→　$\vec{v}_A' = \vec{v}_B'$　→　速度が一致．
50 この場合でも厳密には運動量保存則が成立する．

$$e = \frac{|v_A'|}{|v_A|} = -\frac{v_A'}{v_A} \qquad (6\text{-}3\text{-}3)$$



問 6-3-1. 質量 m_A=20 kg の台車 A が右向きに速さ v_A = 2.0 m/s で，質量 m_B = 10 kg の台車 B が左向きに速さ v_B = 1.0 m/s で動いていて正面衝突した．下の条件の下での衝突後の台車 A と台車 B の速度 v_A'と v_B'を求めよ．

1) はねかえり係数が 1.0 のとき
2) はねかえり係数が 0.5 のとき
3) 完全非弾性衝突のとき

問 6-3-2. 速度 v_A で動いている質量 m_A の物体 A と速度 v_B で動いている質量 m_B の物体 B がある($v_A > v_B$)．物体 A と物体 B は弾性衝突して，衝突後，速度は v_A'と v_B'になった．

1) 衝突後の速度 v_A'と v_B'を衝突前の速度 v_A と v_B を用いて表せ．
2) 質量が $m_A = m_B$ となるとき，衝突後の速度 v_A'と v_B'はどうなるか?
3) 質量が $m_A = 99\ m_B$ となるとき，衝突後の速度 v_A'と v_B'はどうなるか?
4) 質量が $m_A >> m_B$ となるとき，衝突後の速度 v_A'と v_B'は近似的にどうなるか?
5) 速度が $v_A = 99\ v_B$ となるとき，衝突後の速度 v_A'と v_B'はどうなるか?

問 6-3-3. 高さ h = 19.6 m から質量 m = 0.5 kg のボールを落下させた．床で 2 回はずんだ後，ボールは高さ h'' = 4.9 m まではねた．

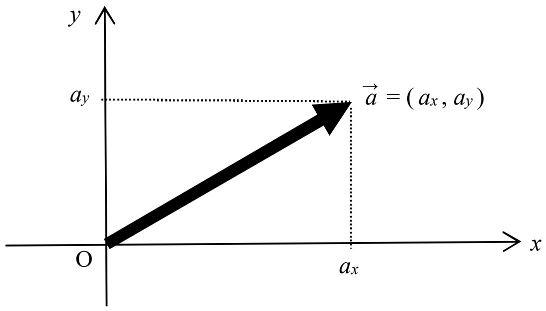
1) 床とボールの間のはねかえり係数 e を求めよ．
2) 始めと 2 回目の衝突でボールの受けた力積の大きさを各々，求めよ．

7. 力学的エネルギー保存の法則

前の章では運動の性質を調べるための一つの方法であった「運動量保存の法則」を学んだ．7 章では，運動の性質を調べるための，さらに別の方法である**「力学的エネルギー保存の法則」**について学ぶ．力学的エネルギー保存則を調べる前に，仕事[51]とエネルギーについて，その定義と性質を学ぶ．一方，仕事を計算する際には，ベクトルの内積を使うのでまずベクトルの内積について学習する．

7-0.　数学的準備(ベクトルの内積)

ベクトルの性質について，1 章で学習した．それによると，ベクトルは大きさと向きを持ち，成分表示で表すことができた．例えば，$\vec{a} = (a_x, a_y)$ は下の図のように表すことができる．



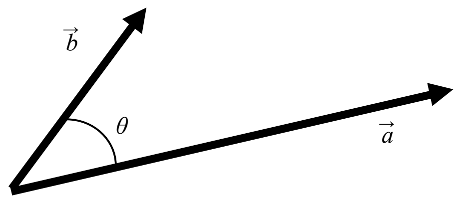
その大きさ$|\vec{a}|$は，三平方の定理を用いて下の式のように計算できる．

$$\vec{a}\text{の大きさ} = |\vec{a}| = a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} \tag{7-0-1}$$

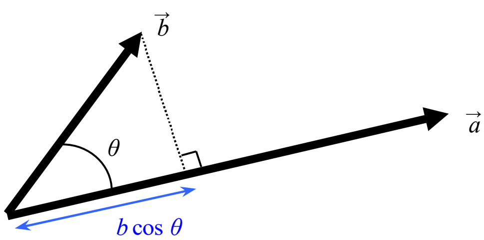
・ベクトルの内積の定義

2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積[52]は，$\vec{a}$と$\vec{b}$の間の角度 θ [53]とすると，下の式のように 2 つのベクトルの大きさとその間の角の余弦との積として定義する．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\theta = a\,b\cos\theta \tag{7-0-2}$$



＊ 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の意味



[51] 物理では，日常生活で使う「仕事」とは異なる意味でこの言葉を使う．日常生活での「仕事」は労働や筋肉を使った作業を指す場合が多い．

[52] 内積を表す記号として，2 つのベクトルを「·(ドット)」ではさむが，この**「・(ドット)」をしっかり書くこと**．

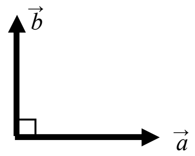
[53] 2 つのベクトルの間の角とは 2 つのベクトルの始点を一致させて，その 2 つのベクトルではさんだ角度を指す．間の角 θ の範囲は $0°\leqq\theta\leqq 180°$である(θ が $180°$を越えそうに見える場合は，逆側の角度($180°$を越えそうに見える反対側)を採用すること)．

① $\vec{b}$を$\vec{a}$に対し垂線を下ろして，重ねる.
② その重なった長さが $b\cos\theta$ となる.
③ $\vec{a}$ の長さと上の操作での重なった長さ $b\cos\theta$ との積をとる.　→ ベクトルの内積

→　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = ($\vec{a}$の長さ)×($\vec{b}$の長さ)×(重なっている部分の割合(逆向きなら負の値))

(→　2 つのベクトルが重ねっている割合 $=\cos\theta$)

＊ $\vec{a}$と$\vec{b}$が直角に交わる(直交)場合



$\vec{a}$と$\vec{b}$が直交 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (7-0-3)

(7-0-2)式から，2 つのベクトルの間の角 θ の範囲で内積の正負が決まる.

$0°\leqq\theta<90°$ → $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は正の値

$\theta=90°$ → $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$90°<\theta\leqq180°$ → $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は負の値

・内積の性質

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a\,b\cos\theta$ (交換則 (内積はかけ算の順序によらない)) (7-0-4)

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配則) (7-0-5)

$\vec{a}\cdot(m\,\vec{b}) = (m\,\vec{a})\cdot\vec{b} = m\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (m はスカラー量) (7-0-6)

$\vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$ (同じベクトルの内積[54]) (7-0-7)

・単位ベクトル (← 単位ベクトル ＝ 大きさが 1 となるベクトル)

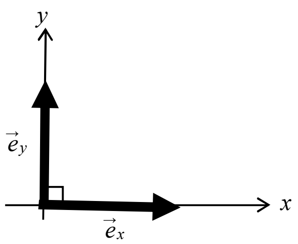
2 次元のベクトルの場合，2 つの単位ベクトルを導入することによって，一般のベクトルを表現することができる[55]. 通常は，x 方向を向いた単位ベクトル$\vec{e}_x$ と y 方向を向いた単位ベクトル$\vec{e}_y$ を導入し(2 つの単位ベクトルの間の角は 90 °にとると便利である)[56]，この単位ベクトルを用いて，一般のベクトル$\vec{a}$を(7-0-10)式のように表すことができる.

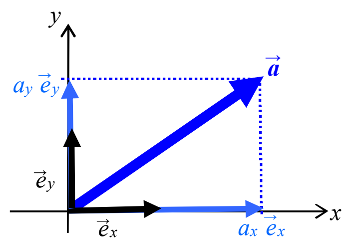
x 方向を向いた単位ベクトル $=\vec{e}_x=(1\ ,0)$ (7-0-8)

y 方向を向いた単位ベクトル $=\vec{e}_y=(0\ ,1)$ (7-0-9)

---

[54] 「ベクトルを 2 乗する」という書き方は良くないが，物理の教科書では時々，出てくる. 同じベクトルの内積という意味である.
[55] 3 次元の場合は，3 つの単位ベクトルを導入して表す.
[56] 単位ベクトルは大きさ 1 なら，どの方向にとってもよいが，単位ベクトルとして，直交する x 方向と y 方向にとるのが便利である.





$$\left\{\begin{array}{l} 2\text{ つのベクトルの大きさが }1\text{ となることを確認} \ \rightarrow\ \vec{e}_x\text{ の大きさ} = |\vec{e}_x| = \sqrt{1^2+0^2} = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vec{e}_y\text{ の大きさ} = |\vec{e}_y| = \sqrt{0^2+1^2} = 1 \end{array}\right.$$

$$\vec{a} = (\,a_x, a_y\,) = (\,a_x, 0) + (\,0\,, a_y\,) = a_x\ (1\,,0) + a_y\ (0\,,1) = \boldsymbol{a_x\ \vec{e}_x + a_y\ \vec{e}_y} \qquad (7\text{-}0\text{-}10)$$

また，単位ベクトルどうしの内積を計算すると，下のような関係式(直交性の関係式)が成り立つ．

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = |\vec{e}_x|^2 = |\vec{e}_x|\times|\vec{e}_x|\times\cos 0^\circ = 1\times1\times1 = 1 & (7\text{-}0\text{-}11) \\ \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = |\vec{e}_y|^2 = |\vec{e}_y|\times|\vec{e}_y|\times\cos 0^\circ = 1\times1\times1 = 1 & (7\text{-}0\text{-}12) \\ \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = |\vec{e}_x|\times|\vec{e}_y|\times\cos 90^\circ = 1\times1\times0 = 0 & (7\text{-}0\text{-}13) \end{array}\right.$$

上の関係式を使い，$\vec{a} = a_x\ \vec{e}_x + a_y\ \vec{e}_y$ と $\vec{b} = b_x\ \vec{e}_x + b_y\ \vec{e}_y$ の内積をとると，下の式のように x 成分どうしの積と y 成分どうしの積との和として計算される．

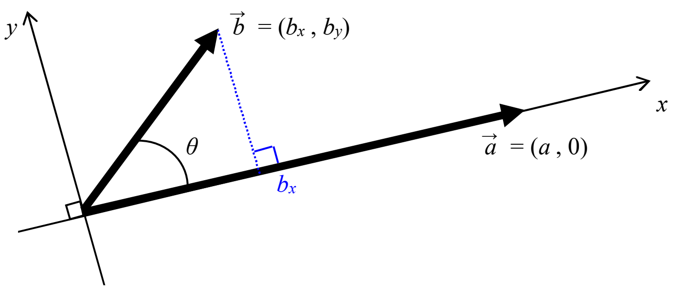
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\ \vec{e}_x + a_y\ \vec{e}_y)\cdot(b_x\ \vec{e}_x + b_y\ \vec{e}_y) = a_x\ \vec{e}_x\cdot(b_x\ \vec{e}_x + b_y\ \vec{e}_y) + a_y\ \vec{e}_y\cdot(b_x\ \vec{e}_x + b_y\ \vec{e}_y)$$

$$= a_x b_x \underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x)}_{1} + a_x b_y \underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y)}_{0} + a_y b_x \underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x)}_{0} + a_y b_y \underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y)}_{1}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y = x\text{ 成分どうしの積 } + y\text{ 成分どうしの積} \qquad (7\text{-}0\text{-}14)$$

* **(7-0-2)式と(7-0-14)式が一致することの確認**

(7-0-2)式の図において $\vec{a}$ の向きに x 軸をとる[57]．



(7-0-2)式 $\rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\theta = a\,b\,\dfrac{b_x}{b} = a\,b_x$

(7-0-14)式 $\rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a\,,0)\cdot(b_x\,,b_y) = a\,b_x + 0 = a\,b_x$ $\rightarrow$ 2 つの式は一致する

---

[57] x 方向の取り方は自由である．なぜなら，物理現象は軸の取り方によらないからである．ただし，y 軸は x 軸と直交するように選ぶと便利である．

問 7-0-1.　2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を求めよ($\vec{a}$と$\vec{b}$の間の角を θ とする).

1)　$|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \theta = 30°$　　2)　$|\vec{a}| = 2^{1/2},\quad |\vec{b}| = 4,\quad \theta = 135°$

3)　$|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 4,\quad \theta = 150°$　　4)　$|\vec{a}| = 1,\quad |\vec{b}| = 4,\quad \theta = 120°$

問 7-0-2.　次のベクトルの内積と 2 つのベクトルの間の角 $\theta\,(0° \leqq \theta \leqq 180°)$を求めよ.

1)　$\vec{a} = (1\,,3)$　$\vec{b} = (4\,,2)$　　2)　$\vec{a} = (1\,,2)$　$\vec{b} = (1\,,-3)$

3)　$\vec{a} = (2\,,3)$　$\vec{b} = (-2\,,-3)$　　4) [58]*　$\vec{a} = (1\,,1)$　$\vec{b} = (1\,,\sqrt{3})$

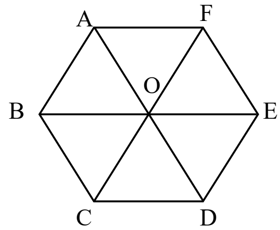
問 7-0-3.　次のベクトルと直交する単位ベクトルを求めよ.

1)　$(-4\,,3)$　　2)　$(1\,,-2)$　　3)　$(\sqrt{3}\,,\,1)$

問 7-0-4.　1 辺の長さが 2 の正六角形(中心は点 O)がある. 下のベクトルの内積の値をそれぞれ求めよ.

1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　2)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$　　3)　$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{OC}$　　4)　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OF}$

5)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$　　6)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CF}$　　7)　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD}$　　8)　$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}$



問 7-0-5.　$\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}$, $\vec{b} = 4\vec{x} + \vec{y}$で, $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 2$, $\vec{x}\cdot\vec{y} = -1/2$ のとき, 次の値を求めよ.

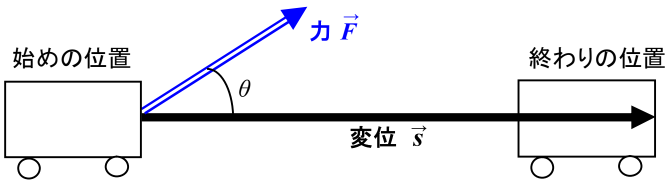
1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　　2)　$|\vec{a}|$　　3)　$|\vec{a} - \vec{b}|$　　4)　$|\vec{a} + \vec{b}|^2$　　5)　$(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b})$

7-1.　仕事(Work)　*W*

　物体に外から力を加えると, 一般には物体は移動する. このように, 力を加えて物体を移動させたとき, 物理学では**「物体に対して外からの力が仕事 [59] をした」**と言う. 物体に力$\vec{F}$を加えて, 物体が変位$\vec{s}$(変位 = 位置の変化 = 終わりの位置 − 始めの位置)だけ移動したとき, **力が物体にした仕事** W を下の式のようにベクトルの内積を用いて定義する[60].

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = F\,s\cos\theta \qquad (7\text{-}1\text{-}1)$$

ここで, 角度 θ は変位$\vec{s}$と力$\vec{F}$の間の角度である(「 $F\cos\theta$ 」が変位方向に沿った力の割合である).



上の式より, 物体の移動の方向が加えた力と直角の時($\theta = 90°$)は物体にした仕事は「 **0** 」となる. また, 力の向きと変位が逆向

---

[58] ＊ 少し難しいので省略してもよい(三角関数の加法定理を用いる).
[59] 7 章の始めの脚注で注意したように,「仕事」という言葉の使い方は日常生活で用いられるのとは異なる.
[60] この式は力が物体の位置によらずに一定の場合の仕事を求める式である. 力が一定でない場合については後で扱う.

きになると，仕事は負の値となる．なお，仕事はスカラー量である．

・ **仕事の単位**

1 N(ニュートン)の力で力と同じ向きに 1 m(メートル)だけ動かしときにした仕事 W を 1 J(ジュール[61])と定義する．したがって，(7-1-1)式より仕事の単位 J は下のように，kg(キログラム)，m(メートル)，s(秒)を使って表すことができる[62]．

$$\text{仕事の単位} = \text{力の単位} \times \text{変位の単位} = \mathrm{N}(\text{ニュートン}) \times \mathrm{m}(\text{メートル}) = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times \mathrm{m} = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{J = N\,m = kg\,\frac{m^2}{s^2}} \qquad (7\text{-}1\text{-}2)$$

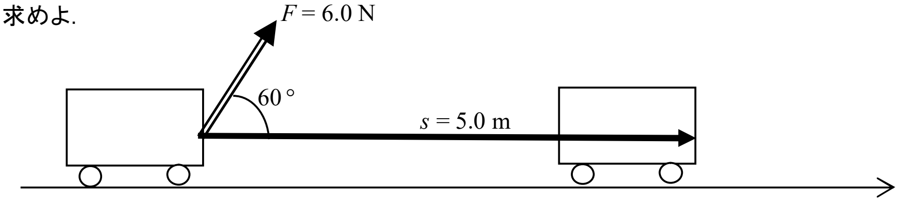
・ **(7-1-1)式の別な表しかた**

力 $\vec{F} = (F_x\,, F_y)$ と変位 $\vec{s} = (x\,, y)$ とすると，2 つのベクトルの内積としての仕事 W は(7-0-14)式より下の式のように表すこともできる．

$$\boldsymbol{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{F_x\,x + F_y\,y} \qquad (7\text{-}1\text{-}3)$$

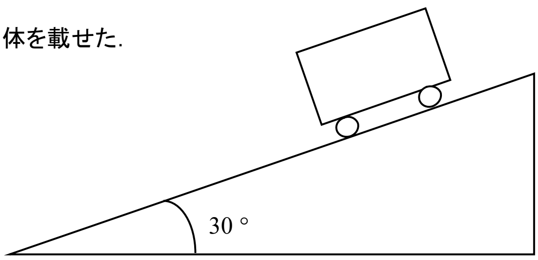
問 7-1-1. 摩擦のない水平面に質量 $m = 2.0$ kg の物体を置き，図のように力の大きさ $F = 6.0$ N で，距離 $s = 5.0$ m 引いた．

1) 引く力 F のした仕事 W_1 を求めよ．
2) 重力のした仕事 W_2 を求めよ．



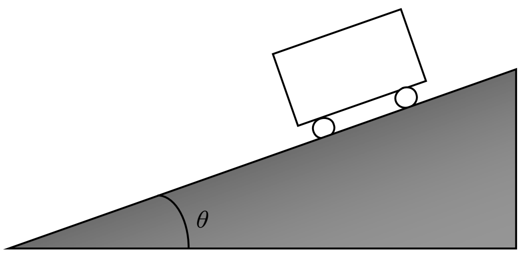
問 7-1-2. 摩擦のない角度 $\theta = 30$ °の斜面上に質量 $m = 2.0$ kg の物体を載せた．この物体は斜面に沿って，長さ $s = 20$ cm だけ下った．

1) 重力のした仕事 W_1 を求めよ
2) 垂直抗力のした仕事 W_2 を求めよ



問 7-1-3. 摩擦(動摩擦係数 $= \mu'$)の影響のある角度 θ の斜面上に質量 m の物体を載せた．この物体が斜面に沿って x だけ下った時，下に示した各々の力がした仕事 W を求めよ．

1) 重力
2) 垂直抗力
3) 動摩擦力
4) 重力，垂直抗力，動摩擦力の 3 つの力の合力



[61] 19 世紀，イギリスの物理学者であるジュール(Joule)の名にちなんで仕事の単位をジュールとした．
[62] 三角関数で出た値には単位はつかない．

問 7-1-4. 質量 $m = 2.0$ kg の物体に対して，下の要領で運んだ．このときに重力のした仕事 W をそれぞれ求めよ．

1) 鉛直上向きに 5.0 m 持ち上げたとき
2) 水平からの角度が 30 °の斜面を斜面に沿って 10 m 持ち上げたとき
3) 鉛直下向きに 2.0 m だけ下ろしたとき
4) 水平方向に 10 m 動かしたとき

問 7-1-5. 質量 $m = 2.0$ kg の物体に対して，下の要領で運んだ．このときに物体を支える力がした仕事 W をそれぞれ求めよ．

1) 鉛直上向きに一定の速さでゆっくりと距離 $s = 5.0$ m 持ち上げたとき
2) 水平からの角度が 30 °の斜面を斜面に沿って一定の速さで距離 $s = 10$ m 持ち上げたとき
3) 鉛直上向きに加速度 $a = 2.0$ m/s^2 の大きさで，距離 $s = 5.0$ m 持ち上げたとき
4) 鉛直下向きに加速度 $a = 2.0$ m/s^2 の大きさで，距離 $s = 5.0$ m だけ下ろしたとき
5) 水平方向にゆっくりと，距離 $s = 10$ m 動かしたとき

問 7-1-6. 下のような力 $\vec{F} = (F_x , F_y)$ と変位 $\vec{s} = (x , y)$ で物体を移動させたとき，力がした仕事 W をそれぞれ求めよ．

1) $\vec{F} = (3.0 , 2.0)$ N , $\vec{s} = (2.0 , 0.0)$ m
2) $\vec{F} = (4.0 , 2.0)$ N , $\vec{s} = (2.0 , -3.0)$ m
3) $\vec{F} = (-3.0 , 1.0)$ N , $\vec{s} = (-300 , -200)$ cm
4) $\vec{F} = (2.0 , 1.0)$ kgw , $\vec{s} = (2.0 , -3.0)$ m

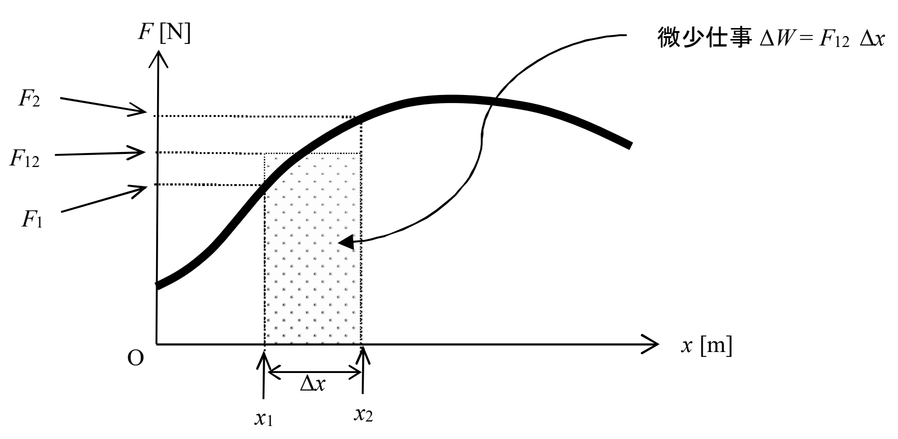
・[63] **力が物体の位置に依存する場合**

ここでは，単純化するために直線の運動を扱う．物体に加える力 $\vec{F}$ と変位 $\vec{s}$ は，運動する向きを x 方向として，力 $\vec{F} = (F , 0)$，変位 $\vec{s} = (x , 0)$ と表すことができ，以下ではその x 成分のみを対象として考える．

力 F が一定の場合は，(7-1-3)式より，仕事「$W = F\ x$ 」と表されるが，力が位置によって変化する場合を考えよう．力 F は位置 x に依存して変化する関数なので，「 $F = F(x)$ 」と表す．物体に力を加え，物体の位置を，位置 x_1 から微少変位 Δx だけ動かして位置 x_2 $(=x_1 + \Delta x)$ へ動かした時にした微少な仕事 ΔW は近似的に下の式のように表すことができる[64]．

$$\Delta W = F_{12}\, \Delta x \qquad (7\text{-}1\text{-}4)$$

ここで，力 F_{12} は位置 x_1 での力 F_1 と位置 x_2 での力 F_2 との平均の力である($F_{12} = (F_1+F_2)/2$)．微少仕事 ΔW は縦軸を力 F，横軸を位置 x とした F-x グラフで囲まれた微少面積に等しい．

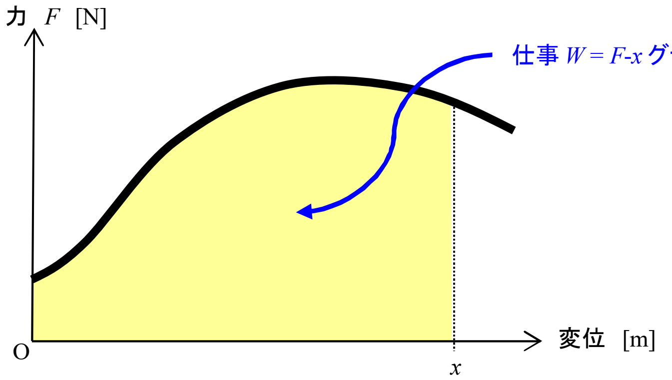


[63] 「力が一定でない場合の運動量と力積の関係」で扱った方法と同じ，横軸を時刻 t から位置 x に変更するだけでよい．
← 難しいと思った場合は省略してよい

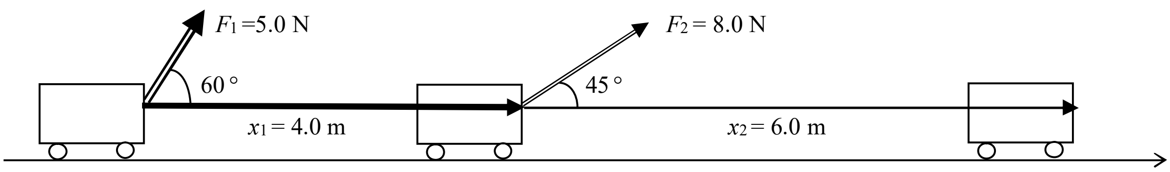
[64] 変位が微少なので，なされた仕事も微少量である．

全体の仕事 W は微少な仕事 ΔW を足し合わせたものとなる．つまり，下の式のようにグラフの面積を計算することで得られる．

仕事 $W =$ 微少仕事 ΔW の総和 $=$ F-x グラフで囲まれた面積 (7-1-5)

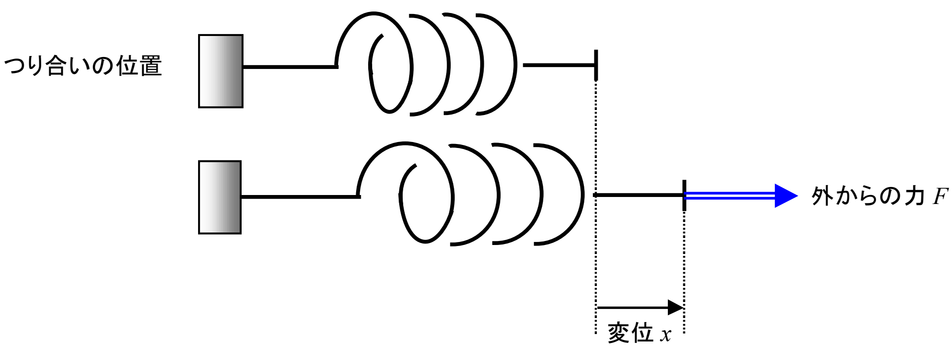


問 7-1-7. 図のように，質量 $m = 2.0$ kg の物体に対し，始めに力 F_1 で距離 $x_1 = 4.0$ m 引っ張り，次に，力 F_2 で距離 $x_2 = 6.0$ m 引っ張った．この 2 つの力でした仕事の総量 W を求めよ．



問 7-1-8. 図のようにばねがある．このばねに対して，外からの力 F でつり合いの位置から長さ x となるまで引っ張った．

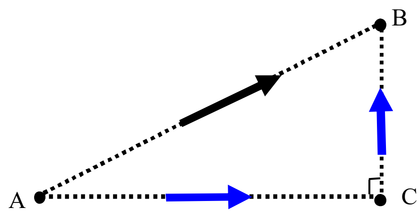
1) 引く力 F と変位量 x の関係式を書き，F-x グラフを書け．
2) この力 F がつり合いの位置から長さ x となるまでにした仕事 W を求めよ．



・ **保存力と仕事**

物体に力 $\vec{F}$ を加え，位置 A から位置 B へ移動させることを考えよう．このとき，力 $\vec{F}$ がした仕事 $W_{A \to B}$ の値が，その移動経路によらず，**始点 A と終点 B の位置のみ**による場合，その力を**「保存力」**と呼び，移動経路に依存する場合は**「非保存力」**と呼ぶ．重力，弾性力などは「保存力」で，摩擦力，空気などによる抵抗力は非保存力となる．

例えば，平面上に物体を置き，物体と平面の間の動摩擦力の大きさを F' として，図のように位置 A から位置 B に物体を移動させることを考えよう．ここで，直角三角形 ABC において，AC の長さ $= a$， BC の長さ $= b$ とする．



位置 A から位置 B へ直接，一直線に向かう経路で摩擦力がした仕事 $W_{A\to B}{}^{(1)}$ は，摩擦力はその進行方向と逆向きに働き，移動距離は$\sqrt{a^2+b^2}$ となるので，仕事 $W_{A\to B}{}^{(1)} = -F' \sqrt{a^2+b^2}$ ． 位置 A から位置 C を経由して，位置 B に達する経路をとって摩擦力がした仕事 $W_{A\to B}{}^{(2)} = -F' a - F' b = -F' (a+b)$ ． 両者の値は異なる．このため，摩擦力は「非保存力」となる．

一方，一定の力$\vec{F}=(F_x, F_y)$で位置 A から位置 B へ移動するとき，一定の力$\vec{F}$がした仕事 $W_{A\to B}$ は上の 2 つの経路で同じ結果で仕事 $W_{A\to B} = F_x a + F_y b$ となり，一定の力$\vec{F}$は「保存力」となる．

・ **仕事率（Power） *P***

1 秒当たり仕事を仕事率(仕事の能率)と呼ぶ．仕事 W を行うのに要した時間 t とすると，仕事率 P は下の式で定義される．

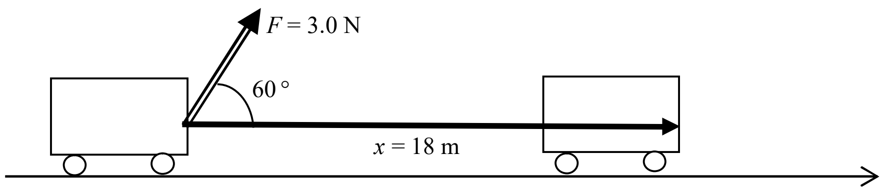
$$P = \frac{W}{t} \tag{7-1-6}$$

・仕事率の単位

1 J(ジュール)の仕事を 1 s で行った場合の仕事率を 1 W(ワット)[65]と定める．

$$\mathrm{W(ワット)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} \tag{7-1-7}$$

問 7-1-9. 図のように摩擦のない水平面に質量 $m = 2.0$ kg の物体を置き，図のように力 F で引いた．引くのに要した時間が 2 秒，4 秒，10 秒，1 分であった場合，引く力の仕事率 P をそれぞれ求めよ．



問 7-1-10. 摩擦のある水平面上にある物体に水平に $F = 40$ N の力を加え続け，力と同じ向きに一定の速さ 2.0 m/s で動かしたとき，加えた力がした仕事率 P を求めよ．

7-2. エネルギー(Energy) *E*

物理学において[66]，**「物体がエネルギーE を持つ」**ということは，**「この物体が他の物体に対し，エネルギーE だけの仕事**

[65] 18~19 世紀のイギリスの技術者のワット(Watt)にちなんで，仕事率の単位をワットとした．

[66] 日常生活では「エネルギー」と言う言葉は物理学で用いられるのと意味が違う場合もある．例えば，「エネルギーにあふれた人」という使い方は「元気のある積極的な人」という意味で使われる．

をする能力を持っている」として定義する．エネルギーはその形態から様々な種類に分類できる．例えば，① 運動エネルギー，② 位置エネルギー，③ 熱エネルギー，④ 電気エネルギー，⑤ 光エネルギー，⑥ 化学エネルギー，･･･などがある．特に，運動エネルギーと位置エネルギーの和を「力学的エネルギー」と呼ぶ．いくつかのエネルギーの間では，互いに異なる種類へのエネルギーへ変換することができる。ここでは，これらのエネルギーの中で，運動エネルギーと位置エネルギーについて学ぶ．

① 運動エネルギー(Kinetic Energy) K

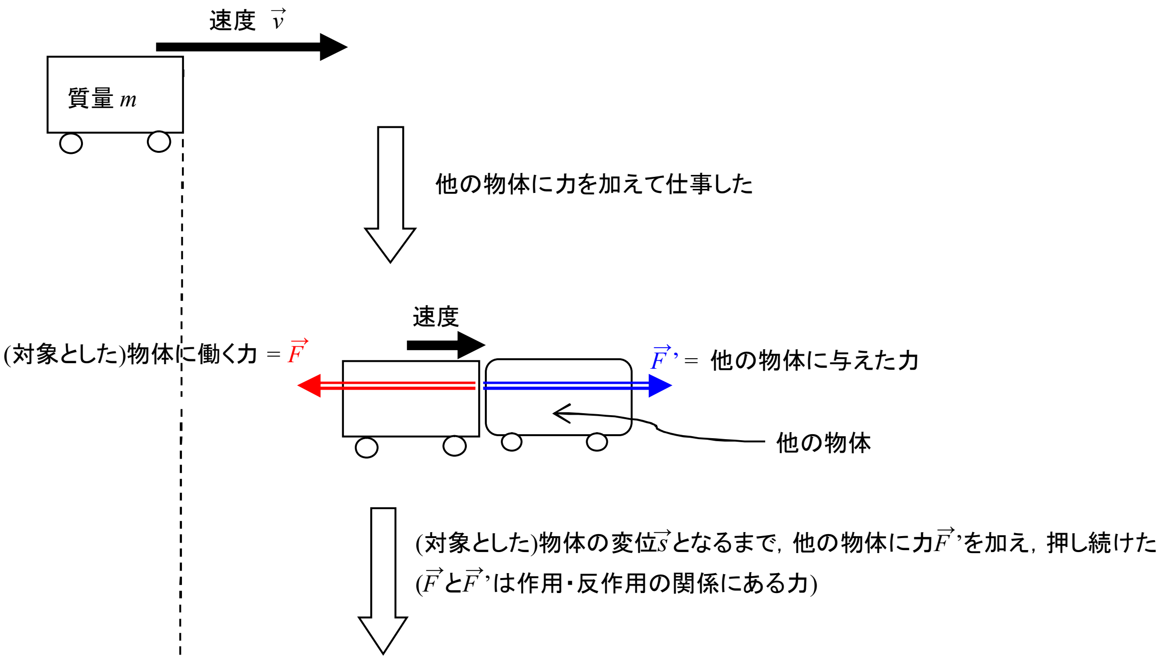
運動している物体が止まる(速度 = 0)までに他の物体に仕事をすることができる．このとき，始めに速さ v で運動していた物体は**運動エネルギーK** を持っていたことになる．

質量 m の物体が他の物体に対して仕事を行って，速さ v から 0 になったとしよう．この物体が速さ v)で運動していた時に持っていた運動エネルギーK は

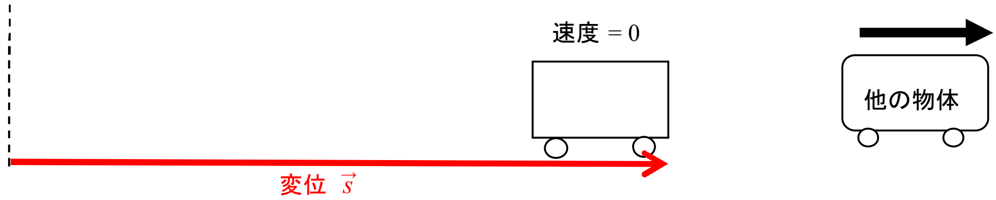
$$K = \frac{1}{2} m v^2 \tag{7-2-1}$$

と表される．上の式は下のようにして導出できる[67]．

＊ **始めの状態**



＊ **終わりの状態**



---

[67] 運動エネルギーの式の導出が難しいと思ったら，一旦，この導出は省略してもよい．

・**(7-2-1)式の導出**

(対象とした物体が)始めに持っていた運動エネルギー K

= (止まるまでに)他の物体にした仕事

$= \vec{F}' \cdot \vec{s}$ (← 力$\vec{F}'$は (対象とした物体から)他の物体に与えた力)

$= -\ \vec{F} \cdot \vec{s}$ (← 力$\vec{F}$は (他の物体から)対象とした物体に働く力)

・ 上の式の力$\vec{F}$(対象とした物体に働く力)を求める

対象とした物体は初速度$\vec{v}$，加速度$\vec{a}$で運動し，t 秒間動いて止まった．その間の変位は$\vec{s}$であった．

(2-3-10)式より，ここでは，t 秒後の速度が 0 なので，物体の初速度と加速度は逆向きとなる．

→ 1 方向の運動として扱う(ベクトルの矢印記号を省略する)．

上の図から向きを考えて，$\vec{a} \rightarrow -a$，$\vec{v} \rightarrow v$，$\vec{s} \rightarrow s$，$\vec{F} \rightarrow -F = -m\,a$ とする．

したがって，(2-3-19)式，(2-3-20)式に代入して，下の式が得られる．

$0 = v - a\,t \quad \rightarrow \quad t = v/a$ これを下の左式に代入

$$s = v\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 \quad \rightarrow \quad s = \frac{v^2}{a} - \frac{1}{2}\,a\,\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

$$F = m\,a = m\,\frac{v^2}{2s} \tag{7-2-2}$$

$= K = F\,s$ ← $\vec{F}$と$\vec{s}$の向きは逆向き．さらに，上の(7-2-2)式より，

$$= \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

となる．上の式が，速さ v で運動している物体が持っている**運動エネルギー**である．この運動エネルギーも運動の激しさ(勢い)を表す量[68]であり，スカラー量となる．

・運動エネルギーK の単位

(7-2-1)式より運動エネルギーの単位を調べる．1/2 は単なる数なので単位には関係ない．当然だが，仕事の単位 J(ジュール)と同じである．

運動エネルギーK の単位 = 質量 m の単位×(速さ v の単位)^2 = kg×(m/s)^2 = kg $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ = J. → (7-1-2)式と同じ

問 7-2-1. 物体の速さが 3 倍になったとき，この物体が持つ運動エネルギーは何倍になるか?

問 7-2-2. 質量 m = 200 g の物体が時速 72 km で動いているとき，この物体の持っている運動エネルギーK を求めよ．

[68] 運動量も運動の激しさを表す量であったが，運動量はベクトル量で向きが関係する，一方，運動エネルギーはスカラー量であり，運動の向きは関係しない．

問 7-2-3. 質量 $m = 2.0$ kg の物体が速さ $v_0 = 8.0$ m/s で東に進んでいたのが，4.0 秒後に北へ速さ $v = 6.0$ m/s で進むようになった．このときの，運動エネルギーの変化 ΔK と運動量の変化(大きさと向き) $\Delta\vec{p}$を求めよ．

問 7-2-4. 質量 $m = 2.0$ kg の物体が速度$\vec{v} = (3.0, -4.0)$ m/s で動いている．この物体の運動量$\vec{p}$と運動エネルギーK を求めよ．

② 位置エネルギー(Potential Energy)[69] U

物体がとる配置(位置)を変えることで，他の物体に対して仕事を行うことができる場合がある．この時，物体はエネルギーを蓄えていることになる．このように，物体がある位置をとることによって持つエネルギーを**位置エネルギーU** と呼ぶ．位置エネルギーは物体のとる配置(位置)によってその値が与えられる．ある位置を適当に位置エネルギーの基準点(基準点に物体がある時，位置エネルギーを' 0 ' と定義する)とし，基準点からの位置(配置) $\vec{s}$ にある位置エネルギーの値を決める．位置エネルギーU は，エネルギーの定義より，

位置エネルギーU

$=$ ある位置から基準点まで移動する際に，(対象とする)力が物体に行う仕事 $= \vec{F}\cdot\vec{s}'$ (7-2-3)

$= -$ 基準点からある位置へ移動する際に，(対象とする)力が物体に行う仕事 $= -\vec{F}\cdot\vec{s}$ (7-2-3)'

と与えられる．基準点からの位置が$\vec{s}$と表されるので，(7-2-3)式では変位$\vec{s}'$は位置$\vec{s}$から基準点に向かうので，$\vec{s}' = -\vec{s}$と表すことができ，(7-2-3)'式は負の符号がつく．ただし，位置エネルギーU は位置の関数となり，(7-2-3)'式を用いて仕事を計算する際，移動の経路によらないことがその条件となる．従って，位置エネルギーに関係する力$\vec{F}$は**「保存力」**である必要がある．位置$\vec{s}$における位置エネルギー$U(\vec{s})$は下の(7-2-4)式で与えられる．

$$\boldsymbol{U(\vec{s}) = -\vec{F}\cdot\vec{s}} \qquad (7\text{-}2\text{-}4)$$

位置エネルギーも(対象とする)力の違いによって，いくつかの種類がある．ここでは，保存力の例として，重力とばねの力(弾性力)をとりあげ，重力による位置エネルギーと弾性力による位置エネルギーを求める．

(i) 重力による位置エネルギー $U_{\text{重力}}$

質量 m の物体が基準となる高さ(位置)から高さ h の位置にあるとする．この物体が高さ h から，基準点(高さ $h = 0$)までに動いた時，**重力によって物体にする仕事，すなわち，重力による位置エネルギー$U_{\text{重力}}$** は下の式で表すことができる．

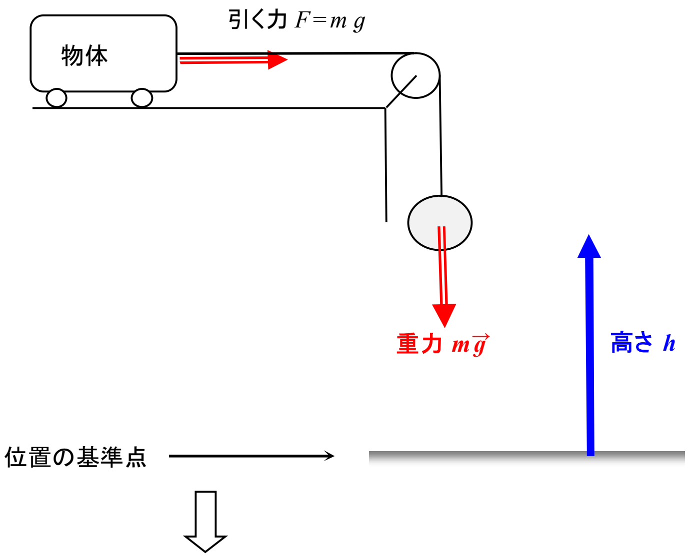
$$\boldsymbol{U_{\text{重力}} = m\,g\,h} \qquad (7\text{-}2\text{-}5)$$

上の式から，基準点より物体が下方にある場合の重力による位置エネルギーは負となる．以下では，(7-2-5)式の導出を行う．まず，始めの状態と終わりの図示し，始めの状態から終わりの状態になることで，重力がした仕事を求める．

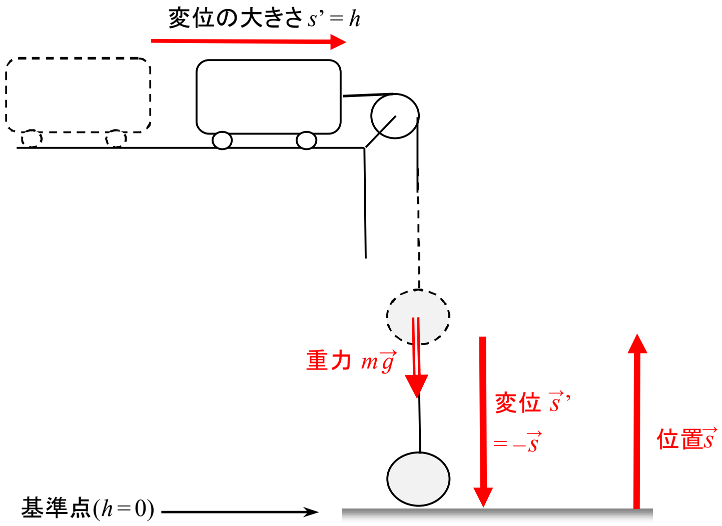
＊ 始めの状態

基準点から高さ h にある質量 m の物体に糸をつけ，滑車を通して他の物体と結びつけ，仕事をさせる．

[69]「Potential」とは「潜在性の」という意味を持ち，ポテンシャル・エネルギーは「(潜れている) 蓄えられたエネルギー」となる．



＊　**終わりの状態**



・(7-2-5)式の導出

始めに持っていた重力の位置エネルギー　$\boldsymbol{U}_{\text{重力}}$

＝ 基準点まで移動するとき，重力が物体にする仕事 ＝ $\vec{F}\cdot\vec{s}' = F\,s'$

＝ 質量 m の物体に働く重力(高さ h から 0 になるまで)がした仕事

$= -m\,\vec{g}\cdot\vec{s}$　　　　　($m\vec{g}$の大きさ $= m\,g$，$\vec{s}$の大きさ $= s = h$，重力 $m\vec{g}$と位置$\vec{s}$は逆向き)

$= -\,m\,g\,s\cos 180° = m\,g\,s = \boldsymbol{m\,g\,h}$

(ii)　ばねの力(弾性力)による位置エネルギー　$U_{\text{弾性力}}$

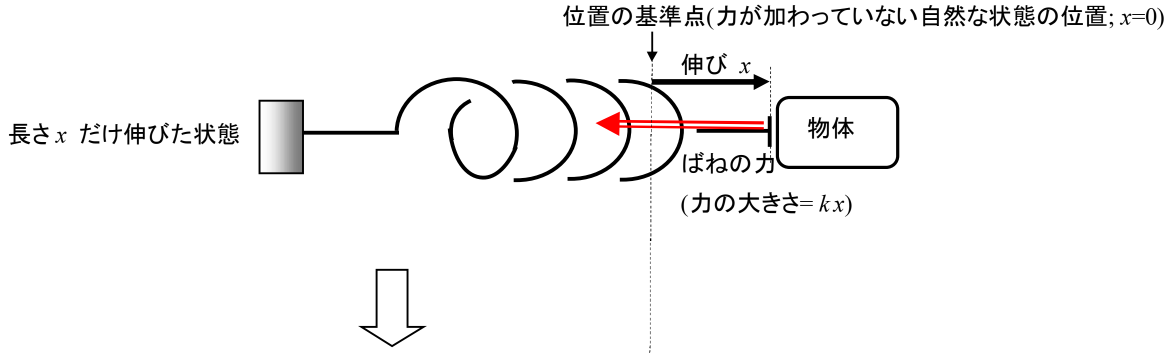
ばね定数 k のばねが自然な長さ(位置の基準点にとる)から長さ x だけ伸びているとする．このばねが伸び x から基準点($x = 0$)までに達する時に**ばねの力が物体にした仕事，すなわち，ばねの力(弾性力)よる位置エネルギー$U_{\text{弾性力}}$** は，

$$\boldsymbol{U_{\text{弾性力}} = \frac{1}{2}k\,x^2} \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$

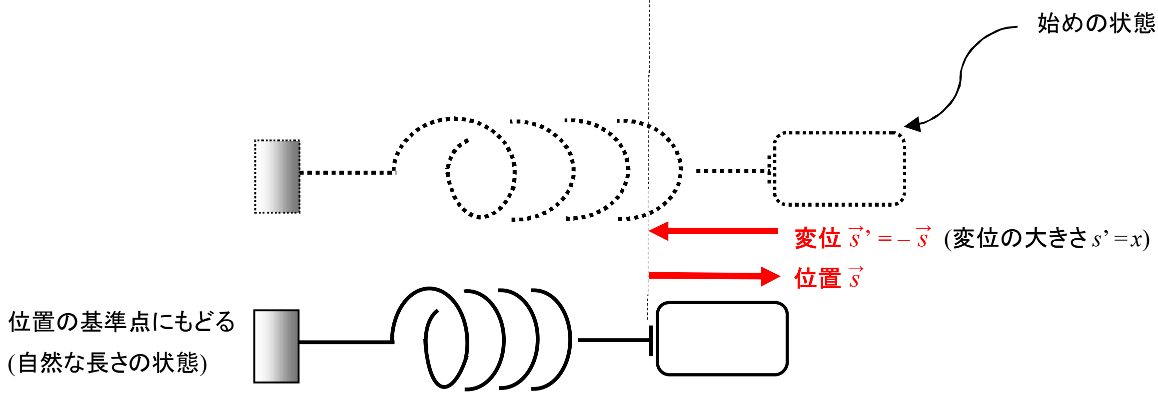
と表される. (7-2-6)式の導出を下のようにして行う.

＊ 始めの状態

基準点(自然な長さの状態)から長さx だけ伸びた状態を考える. これが, 伸び$x=0$になるまでに物体にした仕事を求める.



＊ 終わりの状態



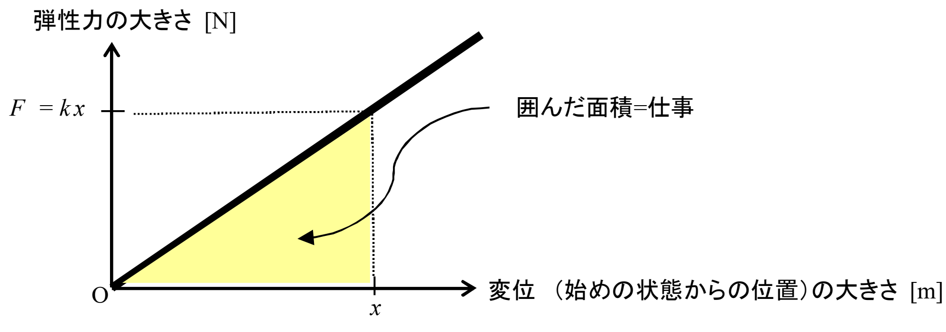
・(7-2-6)式の導出

ばねが始めに持っていた位置エネルギー $U_{弾性力}$

= ばねの伸び x から 0 になるまで弾性力がした仕事 $= -$(ばねが物体に及ぼす弾性力$\vec{F}$と位置$\vec{s}$の内積)

$= -\vec{F}\cdot\vec{s}$ (弾性力$\vec{F}$の大きさ $= kx$, 位置$\vec{s}$の大きさ $= s = x$, 弾性力$\vec{F}$と位置$\vec{s}$は逆向き)

↓ 弾性力は伸び x の関数なので, 仕事は F-x グラフの面積から求める.



$= $ 囲んだ面積 $=$ 底辺 $\times$ 高さ/2

$$= \frac{1}{2} k x^2$$

問 7-2-5. 地面から高さ $h = 10$ m にある質量 $m = 2.0$ kg の物体がある．この物体に対し，下の地点を位置の基準点としたときの重力による位置エネルギー U についてそれぞれ求めよ．

1) 地面
2) 地面からの高さが 18 m のビルの屋上
3) 地面からの高さが 5.0 m にある 2 階
4) 地面から 2.0 m の地下

問 7-2-6. ばね定数 $k = 2.0$ N/m のばねを 5.0 cm だけ引っ張ったとき，このばねの弾性力による位置エネルギー U を求めよ．

問 7-2-7. 質量 $m = 20$ g のおもりを垂直につるすと 4.0 cm 伸びるばねがある．

1) 自然の長さを位置の基準にすると，ばねの弾性力による位置エネルギーと重力による位置エネルギーを求めよ．
2) 重力と弾性力がつりあった地点を位置の基準とすると，つりあった地点からさらに，2.0 cm 引っ張ったときの弾性力による位置エネルギーを求めよ(注意；つりあう位置を基準点とすると，重力と弾性力が相殺されて，これ以降，重力の位置エネルギーは考慮する必要がない)．

7-3. 力学的エネルギー保存の法則

成立する前提条件 ； 物体に働く力が保存力である場合

⬇

力学的エネルギー $E = K + U$ (運動エネルギー K，位置エネルギー U)は一定であり，保存される．

(運動エネルギーが減少(増加)すると，その分，位置エネルギーが増加(減少)する．その変化は可逆的[70]に行われる)

・力学的エネルギー保存則の導出

物体に保存力が働いている場合，「力学的エネルギー保存則」が成立することを導出する．

質量 m の物体に保存力 $\vec{F}$ が働いているとすると物体には加速度 $\vec{a}$ が発生する．その際，成立する**運動方程式**は下の式で表される．

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

上の式の両辺に物体の変位ベクトル $\vec{s}$ (=終わりの位置−位置の基準点 $= \vec{s}_1 - \vec{s}_0$)との内積をとる．

$$m\vec{a}\cdot\vec{s} = \vec{F}\cdot\vec{s} \tag{7-3-1}$$

この式の左辺と右辺について計算し，別な形で表現してみよう．

＊ (7-3-1)式の左辺

(7-3-1)式の右辺の式を計算するため，再度，(2-3-11)式と(2-3-12)式を用いて計算(終わりの速度を $\vec{v}_1$ とする)する．

[70] 「可逆的」というのは「逆戻りが可能な」ことを意味する．例えば，始めに「高い運動エネルギー」を持っていた物体が，一旦，「低い運動エネルギー」を持つ状態になるが，再度，元の「高い運動エネルギー」を持つ状態に戻ることができることをいう．あるいは，運動の様子をビデオにとり，それを逆回転させても(これは，時刻 t を反転($t \to -t$)させることに相当する)，物体の運動の様子が不自然と写らないような状態をいう．

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}\ t & (2\text{-}3\text{-}11) \\ \vec{s} = \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}\ t^2 & (2\text{-}3\text{-}12) \end{cases}$$

→ (2-3-11)式より，　$\vec{a} = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{t}$ と加速度が求められる．これと(2-3-12)式の変位$\vec{s}$ との内積をとって

$$\vec{a}\cdot\vec{s} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{t}\cdot\left\{\vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{t}\,t^2\right\} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\cdot\vec{v}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\cdot(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\cdot(2\vec{v}_0 + \vec{v}_1 - \vec{v}_0) = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_0) = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

従って，(7-3-1)式の左辺は下のように運動エネルギーの差として表すことができる．

$$m\,\vec{a}\cdot\vec{s} = \frac{1}{2}m v_1^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 \qquad (7\text{-}3\text{-}2)$$

＊ (7-3-1)式の右辺

一方，(7-3-1)式の右辺は，物体を力$\vec{F}$で始めの位置$\vec{s}_0$から終わりの位置$\vec{s}_1$(変位$\vec{s} = \vec{s}_1 - \vec{s}_0$)へ移動させた時の力$\vec{F}$がした仕事 $W_{0\to1}$となっている．

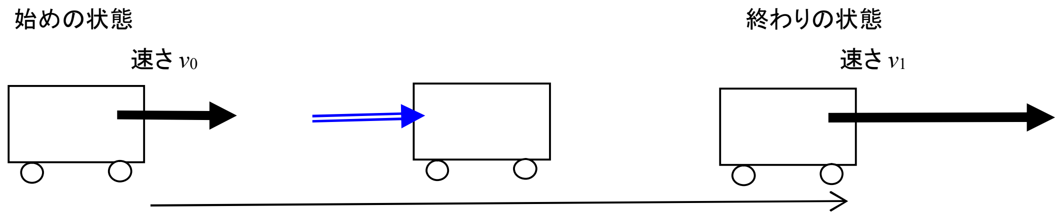
$$\vec{F}\cdot\vec{s} = W_{0\to1} \qquad (7\text{-}3\text{-}3)$$

＊ 運動エネルギーと仕事の関係

(7-3-2)式と(7-3-3)式を等号で結ぶと，(7-3-4)式で表されるように「**運動エネルギーの変化　＝　物体にした仕事**」または，(7-3-5)式で表されるように「終わりの運動エネルギー　＝　始めの運動エネルギー　＋　物体に働く力がした仕事」となる．

$$\frac{1}{2}m v_1^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = W_{0\to1} \qquad (7\text{-}3\text{-}4)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m v_1^2 = \frac{1}{2}m v_0^2 + W_{0\to1} \qquad (7\text{-}3\text{-}5)}$$



＊力学的エネルギー保存則

(7-3-5)式で仕事 $W_{0\to1}$はカが**保存力である場合**は，(7-2-4)式より，その経路によらずに，始めの位置$\vec{s}_0$における位置エネルギー$U(\vec{s}_0)$と終わりの位置$\vec{s}_1$における位置エネルギー$U(\vec{s}_1)$の差として下のように表すことができる．

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = \vec{F}\cdot(\vec{s}_1 - \vec{s}_0) = \vec{F}\cdot\vec{s}_1 - \vec{F}\cdot\vec{s}_0 = -U(\vec{s}_1) + U(\vec{s}_0) \tag{7-3-6}$$

ここで，$U(\vec{s}_1) = U_1$，$U(\vec{s}_0) = U_0$と表すと，(7-3-2)式と(7-3-4)式から，

$$\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m v_0{}^2 = -U_1 + U_0 \tag{7-3-7}$$

となる．上の式を移項することで，下の**「力学的エネルギー保存の法則」**を表す式を導出できる．

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{2}m v_1{}^2 + U_1 = E_0 = \frac{1}{2}m v_0{}^2 + U_0 = \text{一定}} \tag{7-3-8}$$

ここで，終わりの状態や始めの状態は任意に選ぶことができるので，力学的エネルギーは摩擦力のような「非保存力」が関係する場合を除いて，常に一定となる．重力が関係する場合は位置エネルギーU として $U = m g h$ をとり，ばねの弾性力が関係する場合は $U = k x^2/2$ とする．

上の式で表された力学的エネルギー保存則を導いたポイントは 2 つある．

① 物体に働く力は「保存力」である． → 物体に働く力がした仕事が位置エネルギーの差となる．

② ニュートンの運動の第 2 法則(運動の法則) → 運動方程式を書き換え(変位との内積をとって)，エネルギー表示にした．

上の 2 つから，**「力学的エネルギー保存則は，運動方程式(運動の法則)を別な見方で表現した」ただし，物体に働く力として，「保存力」が働いている場合**[71]に対する法則である．

―――――――――― 以下， 省略してよい ――――――――――

・力学的エネルギー保存則と保存力・非保存力について

物体に「保存力」が働いている場合，保存力による仕事は，移動の経路によらず，始点と終点の位置の関数となる．この場合，**「位置エネルギー U = −(保存力による基準点からの仕事 W)」**より，位置エネルギーを決めることができる．物体に働く力(保存力)も同様に，位置の関数となる．すなわち，位置が決まれば，保存力(力の大きさと向き)が決まる．物体はこの保存力を受けて，運動方程式に従って運動し，ある時刻における位置と**速度(速さと向き)**が与えられる．一方，力学的エネルギー保存則を用いて物体の運動を調べる場合は，ある位置での位置エネルギーを求めることで，運動エネルギー(または，速さ)が決まるが，速度の向きは，初期条件や問題設定によって異なり，別な手段で求める必要がある．

物体に「非保存力」の 1 つである摩擦力が働いている場合を考えよう．摩擦力は，物体が運動しようする逆向きに働くので．「摩擦力がする仕事は，常に負」となる．したがって，物体の速度を増すような寄与を与えることはできない．摩擦があると，接触面において熱[72]が発生する．これは，運動エネルギーが熱に変換されたことを意味する．熱となったエネルギーは，もはや物体の速さを増すような寄与をすることができない．つまり，摩擦が発生する前のより高い運動エネルギーを持つ状態に戻ることができない．

・保存力と可逆性

物体に働く力が，重力や弾性力のような「保存力」である場合は，物体の運動は可逆的に変化する．このとき，「力学的エネ

[71] 「運動方程式(ベクトル式) → エネルギー保存則の式(スカラー式)」と導出できるが，逆に，「エネルギー保存則の式 → 運動方程式」 は導出できない．

[72] 熱もエネルギーの一種で熱エネルギーとも呼ばれるが，熱は他のエネルギーと性質が違い，一度，熱が発生したら，熱が発生する前の状態に戻すためには，外から仕事を加えることが必要である．

ルギー保存則」が成立する．物体の運動が「可逆である」ということは，時刻 t に対し，$t \to -t$ と変換(時間反転する変換)を行っても，物体の運動が自然界で成立する可能性があることを示している．この時間反転の変換を速度に対して行うと，時間が逆向きに流れるので，$\vec{v} \to -\vec{v}$ と逆向きに動くように運動になる．しかし，位置はこの変換に関係しないので，この変換に対して不変である．力学的エネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーの和で表されるが，運動エネルギーは速さの 2 乗に比例するので，この変換に対して不変であり，さらに，位置エネルギーは位置のみの関数なので，この変換に対して不変である．したがって，力学的エネルギーは時間反転に対し対称的で可逆性を持つ．

一方，物体に働く力が，「非保存力」となる場合も，(7-3-5)式で成立する運動エネルギーと仕事の関係は成立する．非保存力のする仕事は，その移動の経路，または，移動する向きに依存し，非保存力がする仕事は時間反転の変換に対して不変ではない．したがって，この場合は可逆性を持たない．

＊ 注意

2 つの物体が衝突する場合も，衝突する際の摩擦で熱が発生する場合がある．

熱が発生 → 非弾性衝突 → 2 つの物体の運動エネルギーの和は衝突後，減少する

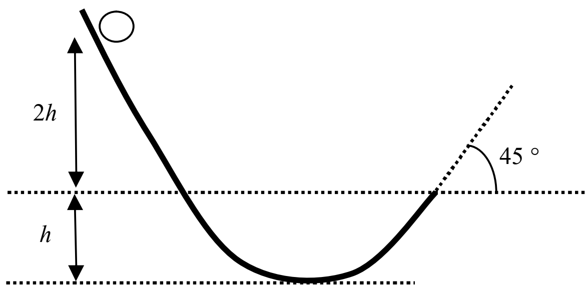
熱が発生しない → 弾性衝突 → 2 つの物体の運動エネルギーの和は衝突前後で変化しない

問 7-3-1. 高さ h = 19.6 m から質量 m = 2.0 kg の物体を落としたとき，地面に衝突する寸前の速さ v'について，力学的エネルギー保存則を用いて求めよ．

問 7-3-2. 地上から質量 m = 2.0 kg の物体を速さ v_0 = 14 m/s で真上に投げ上げた．

1) 投げ上げたとき，この物体の持っている運動エネルギー K_0 を求めよ．
2) この物体は地上から何 m の高さまで上昇できるか?
3) 高さ h_1 = 2.0 m になるときの物体の速さ v_1 を求めよ．
4) 速さ v_2 = 10 m/s になるときの物体の高さ h_2 を求めよ．

問 7-3-3. 図のような摩擦のない斜面上で底から $3h$ の高さから速さ 0 で質量 m の物体を置いた．その後，物体は斜面上を動いて高さ h にある地点から(水平面からの)角度 45 °で飛び出した．



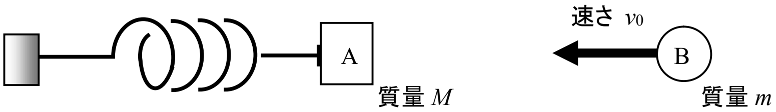
1) この物体が底に達するときの速さ v_1 を求めよ．
2) 底から高さ h にある飛び出す地点での速さ v_2 を求めよ．
3) 飛び出してからこの物体が空中の最高点に達するときの運動エネルギー K_3 を求めよ．
4) 空中の最高点は底からどの位の高さまで到達するか?
5) 飛び出す角度を 45 °から 60 °に変えた場合の最高点の高さは底からどの位の高さに到達するか?

問 7-3-4. 水平に置かれたばね定数 k = 20 N/m のばねに質量 m = 0.05 kg の物体を水平に速さ v_0 = 1.6 m/s でぶつけた．

1) このばねは最大いくら縮むか?
2) ばねが最大に縮んだ時の半分まで縮んだ時，この物体の速さ v'を求めよ．

問 7-3-5. 水平に置かれたばね定数 k のばねの先端に質量 M の物体 A をつけ，それに質量 m の物体 B を水平に速さ v_0 でぶつけた．ぶつかった後，2 つの物体は一体となって動いた．

1) 衝突前の物体 B の運動エネルギー$K_{0,\mathrm{B}}$を求めよ．
2) 衝突直後の，物体 A と物体 B の速さ v_A と v_B を求めよ．
3) 衝突直後の物体 A と物体 B の運動エネルギーの和 K を求めよ．
4) このばねは最大いくら縮むか?
5) ばねが最大に縮んだ時の半分まで縮んだとき，運動エネルギーK'(物体 A と物体 B についてそれぞれ求め，最後に和をとる)とばねの位置エネルギーU'を求めよ．
6) ばねが最大に縮んだ時の半分まで縮んだとき，この物体 A と物体 B の速さ v_1 はいくらか?



問 7-3-6. 摩擦のない直線上に置かれた質量 $m_\mathrm{A} = 1.0$ kg の物体 A と質量 $m_\mathrm{B} = 2.0$ kg の物体 B がある．止まっていた物体 A の左から右向きに物体 B を速さ $v_\mathrm{B} = 3.0$ m/s でぶつけた．

1) 衝突前の全運動エネルギーを求めよ．
2) はねかえり係数 $e = 1$ の時，衝突後の物体 A と物体 B の速度を求め，その時の全運動エネルギーを求めよ．
3) はねかえり係数 $e = 0$ の時，衝突後の物体 A と物体 B の速度を求め，その時の全運動エネルギーを求めよ．
4) はねかえり係数を e とした時，衝突後の物体 A と物体 B の速度を求め，その時の全運動エネルギーをはねかえり係数 e を用いて表せ．