4. 定常電流と電気抵抗

4-1.　電流密度

「1-3. 電流　」において，電流は「ある断面を単位時間当たりに通過する電気量」と定義した．すなわち，(1-3-1)式で表したように，電流 I は，時間 Δt の間に(微小面積要素 ΔS)のある断面と垂直な向きに微小電荷 ΔQ が通過するとき，下の式で表すことができる．

$$I := \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{1-3-1}$$

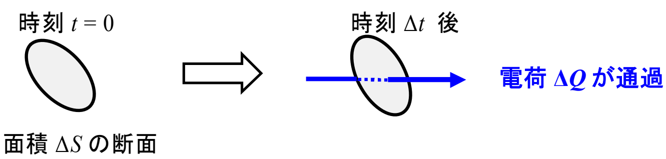
電流 I が時間変化せずに一定となる値をとる場合，その電流を定常電流と呼ぶ．この章では定常電流を扱う．次に，電流密度の大きさ i を，下の(4-1-1)式のように，(面積密度として)単位面積当たりの微小電流として定義する．

$$i := \frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{4-1-1}$$

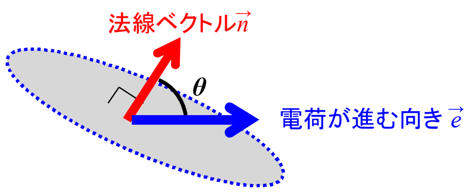
電流密度の単位は，上の式より，「$\mathrm{A/m^2}$」となる．電流が存在するときは，時間 Δt の間に微小電荷 ΔQ が動く(移動する)ので，正の電荷が進む向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，ベクトル量としての電流密度 $\vec{i}$ は下の式で表すことができる．

$$\vec{i} = i\,\vec{e} \tag{4-1-2}$$

一方，断面と垂直な向きではなく，断面から斜めに角度 θ で電荷 ΔQ が通過したとしよう．微小面積要素 ΔS の断面と垂直な向きの単位ベクトル(法線ベクトル)を $\vec{n}$ とすると，2-3.「ガウスの法則」で示したように，断面の法線を向いた微小面積要素ベクトル $\Delta\vec{S}$ は下の式で表すことができる．



$$\Delta\vec{S} = \Delta S\,\vec{n} \tag{4-1-3}$$



電流密度 $\vec{i}$ と微小面積要素ベクトル $d\vec{S}$ を用いると電流 I は下の式のように断面での面積分を用いて表すことができる．

$$I = \int_{\text{断面}\,S} \vec{i} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{断面}\,S} i\, dS \cos\theta \qquad (4\text{-}1\text{-}4)$$

上の式で，電流密度$\vec{i}$と微小面積要素ベクトル $d\vec{S}$ が同じ向き(角度 $\theta = 0$)となるときは，自然に(4-1-1)式が成立する．

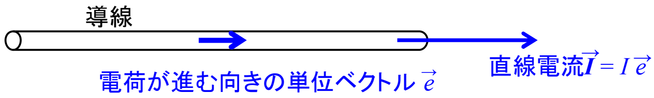
例題 4-1　直径 $d = 0.8$ mm の円形の断面の導線中を電流 $I = 2.0$ A が流れている．このとき，電流密度の大きさ i を求めよ．

答;　円形の導線の断面の半径 $r = 0.4\ \text{mm} = 4.0\times10^{-4}$ m となるので，電流密度の大きさ i は下のように求めることができる．

$$i = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{2.0}{16\pi\times10^{-8}} = 3.9788\times10^{6} \fallingdotseq 4.0\times10^{6}\ \text{A/m}^2$$

* 注意(ベクトルとしての電流)

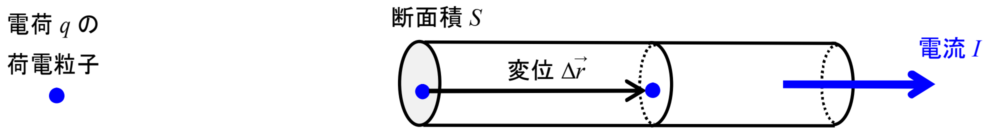
電流 I は，向きを持たないスカラー量であるが，導線が直線となっているとき，電流が流れている向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ として，直線となる導線を流れている電流をベクトルとして表すこともできる．



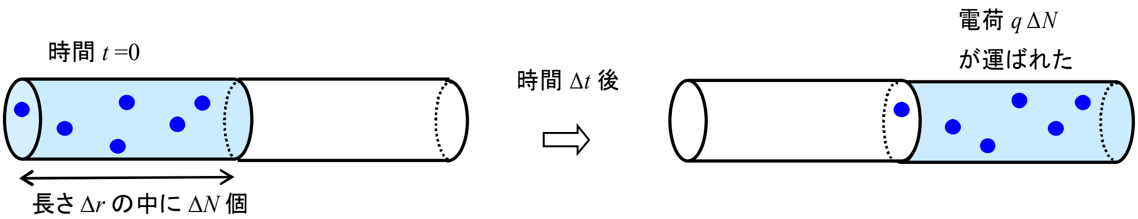
$$\vec{I} = I\,\vec{e} \qquad \text{(直線の定常電流の場合)} \qquad (4\text{-}1\text{-}5)$$

・荷電粒子の移動による電流密度

導線内を流れる電流は，荷電粒子が移動することで発生する．電荷 q をもつ荷電粒子が微少時間 Δt の間に断面積 S の導線内を微少変位 $\Delta\vec{r}$ で移動したとする(簡単のため，電荷 $q > 0$，全ての荷電粒子の速度は等しく，変位 $\Delta\vec{r}$ と導線の断面は直行していると仮定する)と，荷電粒子の速度$\vec{v}$は，$\vec{v} = \Delta\vec{r}/\Delta t$ と表される．



微少時間 Δt の間に導線内を移動した電荷 ΔQ は断面積 S，長さ Δr の導線内に荷電粒子が ΔN 個あるとして，この荷電粒子が移動することで電荷が運ばれるので，導線内を移動した電荷 ΔQ は下の式で表すことができる．



$$\Delta Q = q\,\Delta N \qquad (4\text{-}1\text{-}6)$$

また，導線内の微少体積 $\Delta V = S\cdot\Delta r$ (= 断面積×長さ)中に ΔN 個あるので，荷電粒子の粒子密度 n は下の式で表すことができる．

$$n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{\Delta N}{S\,\Delta r} \qquad (4\text{-}1\text{-}7)$$

電流 I はその定義式(1-3-1)式より，粒子密度 n を用いて下の式で表すことができる．ここで，荷電粒子の速さ $v = \Delta r/\Delta t$ とした．

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q\,n\,S\,\frac{\Delta r}{\Delta t} = n\,q\,S\,v \qquad (4\text{-}1\text{-}8)$$

上の式から，電流密度 $\vec{i}$ は，荷電粒子の粒子密度 n，電荷 q，荷電粒子の速度(平均速度) $\vec{v}$ として，下の式で表すことができる．

$$\boxed{\vec{i} = n\,q\,\vec{v} \qquad (4\text{-}1\text{-}9)}$$

上の式から，荷電粒子が移動することで電流が生じ，電流は荷電粒子の移動の平均速度に比例する．また，電流を運ぶ粒子が電子となる場合は，電荷 q が負となるので，電子が進む向きと電流の向きは逆となる．

例題 4-2　断面積 $S = 1.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$ の導線に電流 $I = 0.5\ \mathrm{A}$ が流れている．この導線の中を流れている自由電子の平均の速さ v を求めよ．ただし，導線内にある自由電子の数密度 $n = 8.5 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$，自由電子の電荷の大きさ $|e| = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ とする．

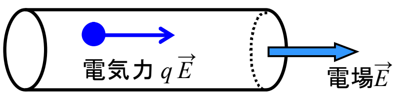
答；　(4-1-8)式より，自由電子の平均の速さ v は下のように求めることができる．

$$v = \frac{I}{n|e|S} = \frac{0.5}{8.5\times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.2 \times 10^{-6}} = 3.06 \times 10^{-5} \fallingdotseq 3.1 \times 10^{-5}\ \mathrm{m/s}$$

4-2.　モデルを用いたオームの法則の導出

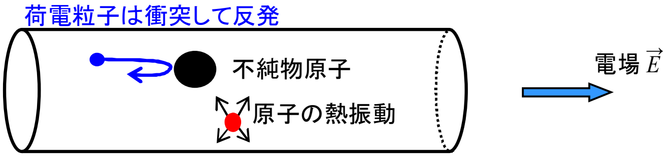
導体(ここでは，不純物を含んだ金属を想定している)の内部に，質量 m，電荷 q を持った荷電粒子があるとする(ここで，簡単のために荷電粒子の電荷 q は正と仮定する)．この導体全体に外から電場 $\vec{E}$ を印加 [1] すると，荷電粒子は電気力 $\vec{F}_{電気力} = q\,\vec{E}$ を受け，加速する．

.



電荷 $q>0$ の場合

次に，加速した荷電粒子は，下の図のように不純物原子や熱振動する(結晶格子を構成している)金属原子に衝突し，反発するので．反発力(抵抗力) $\vec{F}_{抵抗力}$ を受ける．



ここでは，抵抗力の大きさとして，荷電粒子の速さに比例すると仮定する．抵抗力の向きは，粒子の進む向きと逆向きとなり，粒子

[1] 3 章において，「完全導体」は電気抵抗が「 0 」で，「電位 ＝ 一定」で「電場 ＝0」となる物質であった．この章では，荷電粒子が運動できるが，「完全導体」とはならない物質を扱う．「完全導体」にならない原因は，不純物や熱振動している原子(分子)に対し，荷電粒子がそれらと衝突し，(減速されて)抵抗を受けることによる．

が進むことに対して抵抗となるように働く．その比例定数 $k = m/\tau$ とると，抵抗力$\vec{F}_{抵抗力}$は下の式で表される [2].

$$\vec{F}_{抵抗力} = -k\,\vec{v} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

ここで，荷電粒子の質量を m，荷電粒子が 1 回衝突し，次に衝突するまでの衝突時間を τ とする．衝突時間 τ が短い時には衝突がより頻繁に発生し，抵抗力がより大きくなる．電気力と抵抗力が荷電粒子に働くときの運動方程式は下の式で与えられる．

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{電気力} + \vec{F}_{抵抗力} = q\vec{E} + \left(-\frac{m}{\tau}\vec{v}\right) \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

時間が充分に経過すると，電気力と抵抗力が釣り合い，速度が一定となる定常状態に達する.定常状態における速度$\vec{v}$は上の(4-2-2)式から，「左辺 = 0」[3]と置き，下の式で表すことができる．

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 = q\vec{E} + \left(-\frac{m}{\tau}\vec{v}\right) \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

このモデルを採用すると，定常状態では，(4-1-9)式に(4-2-3)式を代入することで，電流密度$\vec{i}$と電場$\vec{E}$は比例することが導出される．この比例定数 σ を電気伝導率(Electric conductivity，または，単に Conductivity)と呼ぶ．

$$\vec{i} = nq\,\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{i} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{i} = \sigma\vec{E} \qquad (4\text{-}2\text{-}4)}$$

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

電気伝導率 σ は，(4-2-6)式で表されるように，導線を構成する物質(電荷密度 n や衝突時間 τ)や温度に依存する．例えば，温度が上昇すると，導線内の原子の熱運動が活発になり，荷電粒子との衝突が頻繁に起こり，衝突時間 τ が減少する．その結果，電気伝導率 σ が減少する．また，電気伝導率 σ の逆数は抵抗率 ρ と呼ばれる．

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

断面積 S の導線を流れる電流 I は電流密度の大きさ i を用いて，(4-1-1)式より，「$I = i\,S$」と表され，導線内の電場の大きさ E が一定で長さ d だけ離れた地点での電圧(電位差)V は(2-4-7)式より，「$V = E\,d$」と表されるので，(4-2-4)式に代入すると，下の式のように，電流 I と電圧 V の間の比例関係，すなわち，オームの法則が導出できる [4].

[2] (4-2-1)式に表れた衝突時間 τ は，系全体の不純物や熱振動する原子との衝突による平均の衝突時間を表している．すなわち，不純物との衝突や熱振動する原子との衝突では，衝突する状況が異なるため，衝突時間は異なる値をとる(もちろん，(4-2-1)式で表された比例定数 k も衝突する状況で異なる値をとるが，(4-2-1)式の定数 k は系全体での平均値である).

[3] 厳密には，衝突する個々の荷電粒子の速度が一定となる定常状態ではなく，(多数ある)荷電粒子の平均速度が一定となる定常状態に達することとなる．つまり，(4-2-2)式で表された運動方程式における速度$\vec{v}$は，系全体に含まれる粒子の平均速度に関する運動方程式である．これは，(4-2-1)式の右辺に表れた衝突時間 τ が導体内全体で平均の衝突時間となっていることに対応する．

[4] オーム(George Ohm)は 19 世紀のドイツの物理学者である．オームの法則は 18 世紀のイギリスの物理学者のキャベンディッシュによって発見されていたが，未公表であったために，それとは独立に発見したオームの名前にちなんだ法則になっている．また，広い意味では，(4-2-4)式もオームの法則と呼ばれる(抵抗率 ρ を用いると(4-2-4)式は「$\vec{E} = \rho\,\vec{i}$」と表すことができる)．オームの法則は，(ある条件の下で成立する)**経験法則**であり，「電磁気学」において重要な法則である「ガウスの法則」に比べると，重要度は落ちる．

$$i = \sigma E \quad \rightarrow \quad \frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{d} \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{S} I$$

$$\boxed{V = R\,I \qquad (4\text{-}2\text{-}7)}$$

電気抵抗 R(または，単に抵抗(Ressistance)とも呼ばれる)は電気伝導率 σ，または，抵抗率 ρ を用いて，下の式で表すことができる．抵抗 R は導線の長さ d に比例し，導線の断面積 S に反比例する．この近似では，温度や材質による違いは電気伝導率 σ，または，抵抗率 ρ の違いに現れる．電気伝導率 σ が高い材料でも，その材料の長さ d が大きいと有限な抵抗値 R を持つ．

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{S} = \rho \frac{d}{S} \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

＊ 抵抗率の温度依存性(省略してよい)

一般に，温度が上昇すると材料となる物質の原子・分子の熱振動が活発になり，荷電粒子がそれらと衝突しやすくなるので，抵抗率 ρ は上昇する．温度 T_0 での抵抗率を $\rho(T_0)$とすると，温度 T_0 から少し上昇した温度 T での抵抗率 $\rho(T)$ は下の式で近似できる．下の式で抵抗温度係数を α とした．

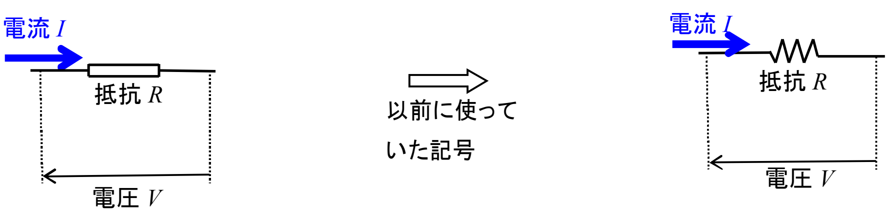
$$\rho(T) \sim \rho(T_0) + \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{T=T_0} (T - T_0) = \rho(T_0)\,(\,1 + \alpha\,(T - T_0)\,) \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

抵抗温度係数 α は下の式で与えられる．

$$\alpha = \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{T=T_0} \Big/ \rho(T_0) \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

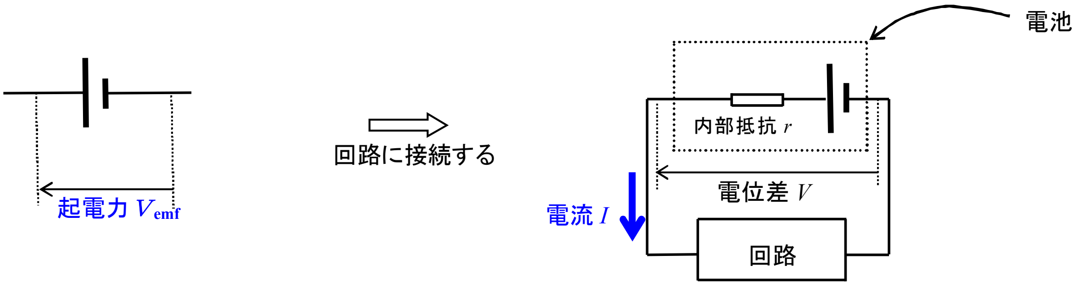
・素子としての記号

電気回路・電子回路の中で抵抗を素子として表す記号を下に示す(右の図は以前，使用されていた抵抗を表す図である)．両側の線は導線を表す．導線で結ばれたところは，電気伝導率が高い金属でできており，距離も短いため，ほぼ同じ電位とみなすことができる．電位が高い側(下の図では左側)から低い側に電流が流れる．



また，回路に電流を流すためには電源が必要である．時間変化しない電流(「直流電流」と呼ばれる)を回路に流すためには，通常，起電力(Electro-motive force) V_{emf} を持つ電池 [5]が使われる．電池を表す記号を下に示す．長い線が正の電極で，短い線は負の電極を表す．電池に回路をつないでいない場合，2 つの電極間にはこの電池の起電力と等しい電位差が発生している．電池では，正の電極の方が高い電位となる．

[5] ここでは，電池の動作原理(起電力の発生する原因等)については扱わないが，電池では，(化学反応による)化学エネルギーにより，+の電極–の電極に比べて，電位が‘ V_{emf} ’だけ上昇させる装置である．化学エネルギーは抵抗で電力が消費されることで使われる．



次に，起電力を持つ電池を回路につなぐ．このとき，回路には電流 I が流れる[6]．電流が流れると電池内部の構造に起因する抵抗(内部抵抗) r のため，電池の両端での実際の電位差(電圧)V は回路につないでいない場合の起電力(電位差)V_{emf} に比べて，下の式で表されるように減少する．

$$V = V_{\mathrm{emf}} - rI \tag{4-2-11}$$

以下では，回路に接続する場合は，特に言及しない限り，内部抵抗を図示することは省略し，また，内部抵抗 r の値は小さいと仮定し，その影響は小さいので，電池の両端に電位差(電圧)V [7]が生じているものとして扱う．

・抵抗の単位

抵抗に電圧 V = 1 V を印加したとき，抵抗に電流 I = 1 A の電流が流れたときの抵抗 R を，R = 1 Ω(オーム) [8]と定義する．(4-2-7)式より，1 Ω は V(ボルト)と A(アンペア)を用いて表すことができる．

$$1\ \Omega = 1\ \mathrm{V/A} \tag{4-2-12}$$

また，抵抗率 ρ の単位は「Ω m」で，電気伝導率 σ の単位は「1/(Ω m) = A/(V m)」である．

・(消費)電力

回路全体の抵抗の値が R となる回路に電圧(電位差)V の電池を接続すると回路に電流 I が流れているとする．電流 I は時間 t の間に N 個の電荷 q を持った荷電粒子が動くことで発生するものとする($I = (Nq)/t$ が成立する)．この回路で消費される電気力による仕事率(これを**電力**と呼ぶ)$\boldsymbol{P}$，すなわち，1 秒当たりの消費された電気エネルギーは(2-4-4)式を用いて，下の式で与えられる．

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \frac{NqV}{t} = \frac{Nq}{t}V = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{V}} \tag{4-2-13}$$

上の式から，回路で消費される電力は回路全体の両端の電圧に回路全体に流れる電流の積となる．荷電粒子が衝突して抵抗が発生する場合は，衝突により不純物や原子の熱振動がさらに活発になり，熱が発生し，高温となる．このように抵抗によって発生する熱を**ジュール熱**と呼ぶ．また，電力は仕事率なので，電力の単位は「W(ワット)」である．さらに，上の式にオームの法則(4-2-7)式を適用すると下の式で表すことができる．

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{4-2-14}$$

---

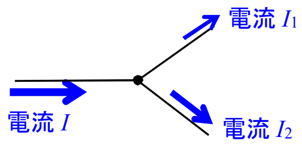
[6] 起電力(Electro-motive force)を持った電池に回路をつなぐと，回路の両端には電圧 V がかかり，回路には電流 I が流れる．電圧がかかった回路に電流が流れると，その回路では電力(電力については後で学ぶが，その回路(機器)では電気エネルギーが他のエネルギーに変換される)が消費される．電池は電力を消費する原因を有し，その能力を電池の起電力(電圧)とする．また，電池は化学エネルギー(化学物質が化学反応することで生じるエネルギー)から電気エネルギーに変化する装置である．

[7] 以下では，特にことわりがなくても，電池で生じる起電力は電圧と同じ記号' V 'を用いることとする．

[8] 抵抗の単位 Ω(オーム)は，オームの頭文字 O は，「0 (ゼロ)」と混乱するので，アルファベットの「O」に対応するギリシャ文字 Ω(オメガ)を用いた．

・直列接続と並列接続

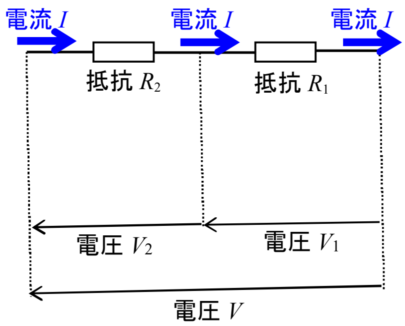
複数の抵抗を持つ回路の全体の抵抗 R を求めよう．簡単のために，抵抗が R_1 と R_2 となる抵抗 1 と 2 を直列に接続した場合と並列に接続した場合について，合成の抵抗を求めてみよう．オームの法則(4-2-7)式で表したように，2 つの抵抗に電圧 V_1 と V_2 を各々に加えたところ，各々の抵抗に流れる電流を I_1 と I_2 とすると，「$V_1 = R_1 I_1$」と「$V_2 = R_2 I_2$」の関係が成り立つ．使用する導線は伝導率が高い材料でその長さも短いので，同一導線上では同じ電位になっていると近似できる．また，導線が枝分かれしている場合，1 秒間あたりに通過する電荷は一定の値なので，枝分かれする前の電流 I は，枝別れした後の電流 I_1 と I_2 の和に等しい [9]．



$I = I_1 + I_2$	(4-2-15)

① 直列接続

図のように 2 つの抵抗を直列に接続し，その両端に電圧 V を印加する．



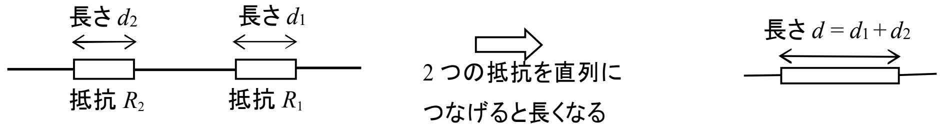
2 つの抵抗は 1 つの導線で直列に結ばれているので，各々の抵抗を通過する電流は同じ値「$I = I_1 = I_2$ 」となる．また，抵抗 R_1 の両端では電圧が V_1，抵抗 R_2 の両端では電圧が V_2 になるので，2 つの電圧を加えたものが全体の電圧 V となる．

$$V = V_1 + V_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}16)$$

上の式にそれぞれの抵抗で成立するオームの法則を代入し，全体の合成抵抗 R を求めることができる．

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2)\, I = R\, I \quad \rightarrow \quad R = R_1 + R_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}17)$$

次に，下の図のように，同じ材質，同じ断面積で，長さが d_1 と d_2 となる 2 つの線材を直列につなぐことを考えてみよう．



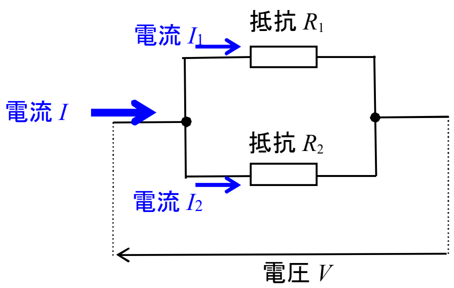
2 つの抵抗を結ぶ導線の長さが 0 になり，2 つの線材は有効的な長さ $d = d_1{+}d_2$ とみなすことができる．つまり，(4-2-8)式を適用すると，抵抗全体の長さ $d = d_1{+}d_2$ となるので，(4-2-17)式と同じ合成抵抗 R を表すことができる．

[9] この電流の保存則はキルヒホッフ第 1 法則(次の節も参考のこと)とも呼ばれる．

$$R = \rho \frac{d}{S} = \rho \frac{d_1+d_2}{S} = \rho \frac{d_1}{S} + \rho \frac{d_2}{S} = R_1 + R_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}17)'$$

② 並列接続

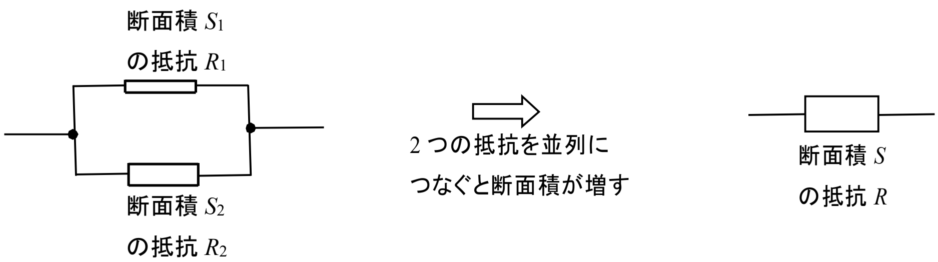
図のように 2 つの抵抗を並列に接続し，その両端に電圧 V を印加する．



2 つの抵抗は導線で並列に結ばれているので同じ電圧「$V = V_1 = V_2$」が印加される．また，抵抗 R_1 を流れる電流は I_1，抵抗 R_2 を流れる電流は I_2 と表されるので，(4-2-15)式が成立し，上の式にそれぞれの抵抗で成立するオームの法則を代入し，全体の合成抵抗 R を下の式のように求めることができる．

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\ V = \frac{V}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (4\text{-}2\text{-}18)$$

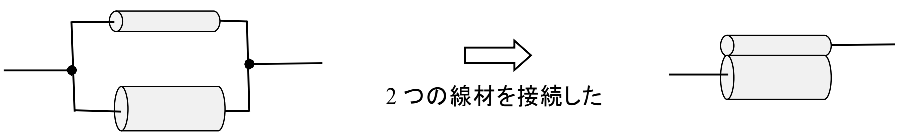
さらに，下の図のように，同じ材質，同じ長さで，断面積が S_1 と S_2 となる 2 つの線材を並列につなぐことを考えてみよう．



2 つの線材を並列につなぐと友好的な断面積 $S = d_1+d_2$ とみなすことができる．つまり，(4-2-8)式の逆数で表した式を適用すると，抵抗全体の断面積 $S = S_1+d_2$ となるので，(4-2-18)式と同じように合成抵抗となる．

$$\frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{d} = \sigma \frac{S_1+S_2}{d} = \sigma \frac{S_1}{d} + \sigma \frac{S_2}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (4\text{-}2\text{-}18)'$$

すなわち，下の図のように，断面積 S_1 と S_2 の線材を接続させて，断面積が S_1+S_2 となる線材を作成したこととなる．

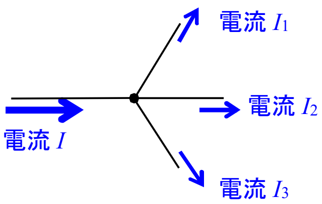


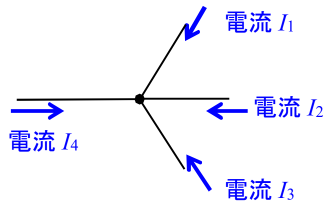
4-3.　直流回路とキルヒホッフの法則(省略可)

複雑な直流「回路において，ある抵抗を流れる電流を求める方法として(電気回路に関する)「キルヒホッフの法則 [10]」がある．キルヒホッフの法則は電流に関する第 1 法則と電圧に関する第 2 法則がある．

①「キルヒホッフの第 1 法則(電流に関する法則)」

(4-2-15)式でも述べたが，導線が枝分かれしている場合，枝分かれしている地点(節点)に入ってくる電流の総和と節点から出ていく電流の総和は等しい．下の左図のような電流の流れでは，(4-2-15)式と同様に‘ $I = I_1 + I_2 + I_3$ ’が成立し，さらに，移項すると，‘$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ’と表すこともできる．また，右の図のような，節点に電流が全て入ってくる場合は，‘ $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ ’が成立する．



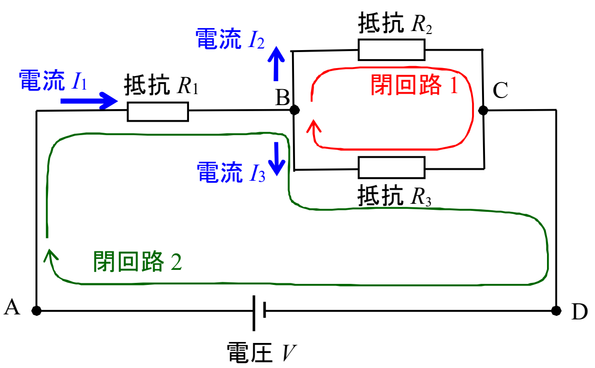


上の関係をまとめて，電流ある節点に入るときは「+」，節点から出るときは「–」として，節点における電流保存の法則を表す式は下のようになる．このようなある任意の節点における電流保存の法則を「**キルヒホッフ第 1 法則**」と呼ぶ．

$$\sum_i (\pm)\, I_i = 0 \quad (+\ \text{は節点に入る電流，}-\ \text{は節点から出る電流を表す}) \tag{4-3-1}$$

②「キルヒホッフの第 2 法則(電圧に関する法則)」

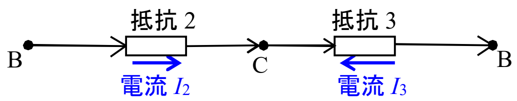
複雑な回路において，その中の 1 部となる任意の閉回路(1 周)を選ぶとき，1 周すると，電源や抵抗による電位の上昇と下降を考え，1 周すると，電位差(電圧)は「0」になる．このようなある閉回路における電圧の変動に関する法則を「**キルヒホッフ第 2 法則**」と呼ぶ．例えば，下のような回路に適用してみよう．

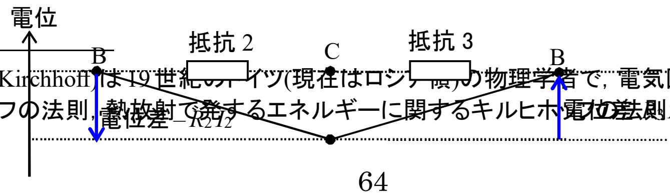


閉回路 1 (節点 B→抵抗 2→節点 C→抵抗 3→節点 B);

節点 B から抵抗 2 を通過すると，電位は「$R_2 I_2$」だけ下がる．さらに，節点 C から抵抗 3 を通過する場合，経路の向きと(仮想の)電流の向きが逆なので，抵抗 3 を通過すると電位は「$R_3 I_3$」だけ上がる．これを図示すると，下のように書くことができる．

経路 1；





[10] キルヒホッフ(Gustav R. Kirchhoff)は 19 世紀のドイツ(現在はロシア領)の物理学者で，電気回路に関するキルヒホッフの法則，熱力学に関するキルヒホッフの法則，熱放射で発するエネルギーに関するキルヒホッフの法則がある．

電位の変化について式で表すと，下の式で表すことができる.

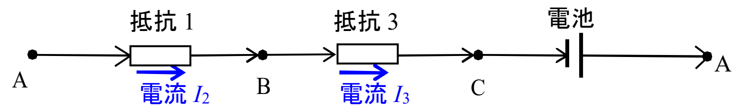
$$-R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

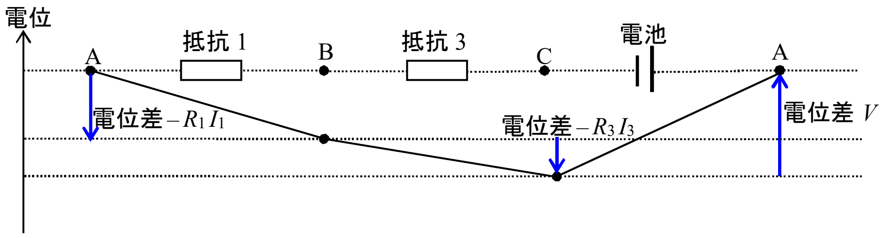
閉回路 2 (節点 A→抵抗 1→節点 B→抵抗 3→節点 C→(節点 D)→電池→節点 A);

(ここでは，節点 C と節点 D は同じ電位)

節点 A から抵抗 1 を通過すると，電位は「$R_1 I_1$」だけ下がり，さらに，節点 B から抵抗 3 を通過すると，電位は「$R_3 I_3$」だけ下がり，節点 D から電池を通過すると，電位は「V」だけ上がる. これを図示すると，下のように書くことができる.

経路 2 ;





この関係を式で表すと，下の式で表すことができる.

$$-R_1 I_1 - R_3 I_3 + V = 0 \qquad (4\text{-}3\text{-}3)$$

上の 2 つの式とキルヒホッフ第 1 法則から，節点 B では，「$I_1 - I_2 - I_3 = 0$」が成立し， 電流 I_2 と I_3 を用いると，上の 2 つの式は下の式として表すことができる.

$$\begin{cases} 0 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \\ V = R_1 I_2 + (R_1 + R_3) I_3 \end{cases} \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

上の(4-3-4)式の第 2 式と第 1 式から，次のように 2 つの電流を求めることができる.

$$V = R_1 I_1 + \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_3} I_2 = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2}{R_3} I_2$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2} V \\ I_3 = \dfrac{R_2}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2} V \end{cases} \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

＊ 行列を使った計算

(4-3-4)式に対し，行列を用いて計算してみよう. (4-3-4)式について，行列 $\boldsymbol{R}$ を用いると下の式のように表すことができる.

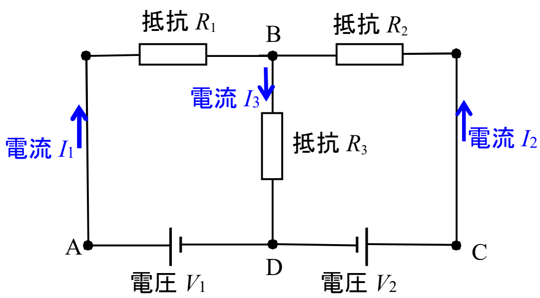
$$\begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & -R_3 \\ R_1 & R_1+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

下の式のように，両辺に逆行列 $\boldsymbol{R}^{-1}$ をかけて，2 つの電流を求めることができる.

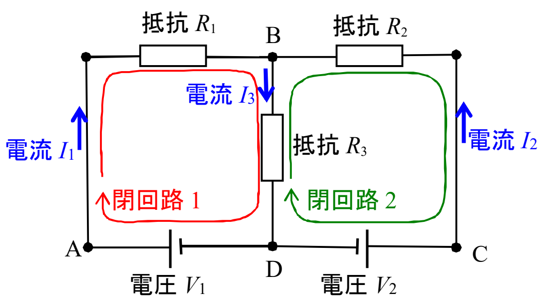
$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|} \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ -R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|} \begin{bmatrix} R_3V \\ R_2V \end{bmatrix}$$

ここで，行列式 $|\boldsymbol{R}|$ は, $|\boldsymbol{R}| = R_2(R_1+R_3)+R_1R_3 = R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1$ である.

例題 4-3　下の図のような回路で，電流 I_1, I_2, I_3 をキルヒホッフの法則を用いて求めよ.



答; 例えば，下の図のように，2 つの閉回路をとって考えよう.



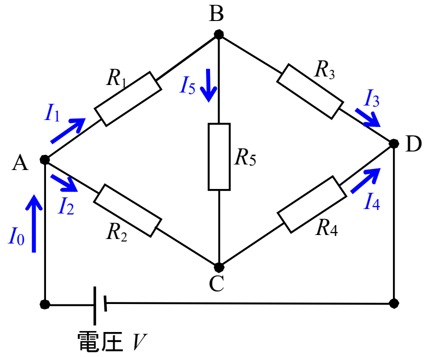
キルヒホッフ第 1 法則より，電流に関して，「$I_1 + I_2 - I_3 = 0$」が成立する. また，キルヒホッフ第 2 法則を適用すると，回路 1 では，「$-R_1 I_1 - R_3 I_3 + V_1 = 0$」が，回路 2 では，「 $R_3 I_3 + R_2 I_2 - V_2 = 0$」が成立する. この 2 つの式に対して，キルヒホッフ第 1 法則を用いて，電流 I_1 と I_2 に関する式を立てると「$-(R_1+R_3) I_1 - R_3 I_2 + V_1 = 0$」と「$R_3 I_1 + (R_2+R_3) I_2 - V_2 = 0$」が成立する. 2 つの方程式を連立方程式として，解くと，下の式で表すことができる.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{(R_2+R_3)V_1 - R_3 V_2}{R_1 R_2+R_2 R_3+R_3R_1} \\[2ex] I_2 = \dfrac{-R_3V_1+(R_1+R_3)V_2}{R_1 R_2+R_2 R_3+R_3R_1} \end{cases}$$

さらに，電流 I_3 は下の式のように表すことができる.

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

問題 4-1　下の図のような回路で，電流 I_5 をキルヒホッフの法則を用いて求めよ.



答;　$$I_5 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4) R_5} V$$