13. 光の進む経路の性質　- フェルマーの原理から -[132]

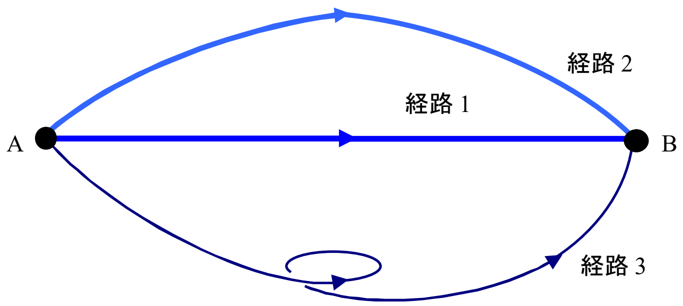
光の進み方に関して，フェルマー[133] は 1650 年ころ，以下のような原理を提唱した．

「光が点 A から点 B へ到達する経路は，可能な全ての経路の中で，最小の時間で到達できる経路をとる．」

上の原理を，**「最小時間の原理」**または**「フェルマーの原理」**と呼んでいる．
この章では，フェルマーの原理に基づいて，光の進み方を調べる．特に **「反射・屈折・レンズの公式」**を導出する．

13-1.　一様な媒質中での光の進路

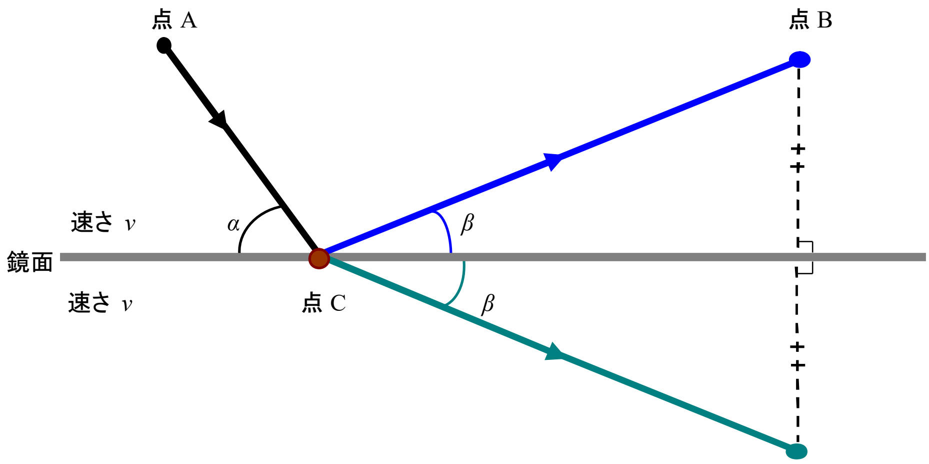
点 A から点 B への経路は無限に多く存在する．例えば，下の図のような 3 つの経路もそのうちのひとつである．



点 A→点 B へ多くの経路がある中で，一様な媒質の場合，**最短時間で点 A→点 B へ到達する経路**は直線となる．したがって，一様な媒質では(フェルマーの原理に従うと)**光は直進する**．

13-2.　反射における光の進路

点 A から点 B へ向かう経路の中で一度，鏡面と衝突するという条件を付加する．鏡面で点 B と対称となる点 B’をとる．点 A→点 B’への経路は一度，鏡面を通過するので，点 A→点 B への最短時間となる経路は点 A→点 B’への最短時間となる経路と同じである．



132 この章は省略してもよい．この章の内容は「ファインマン物理学 II　光･熱･波動」と同じである．
133 17 世紀のフランスの数学者．フェルマーの定理($x^n + y^n = z^n$　の整数解に関する定理)で有名．

点 B'

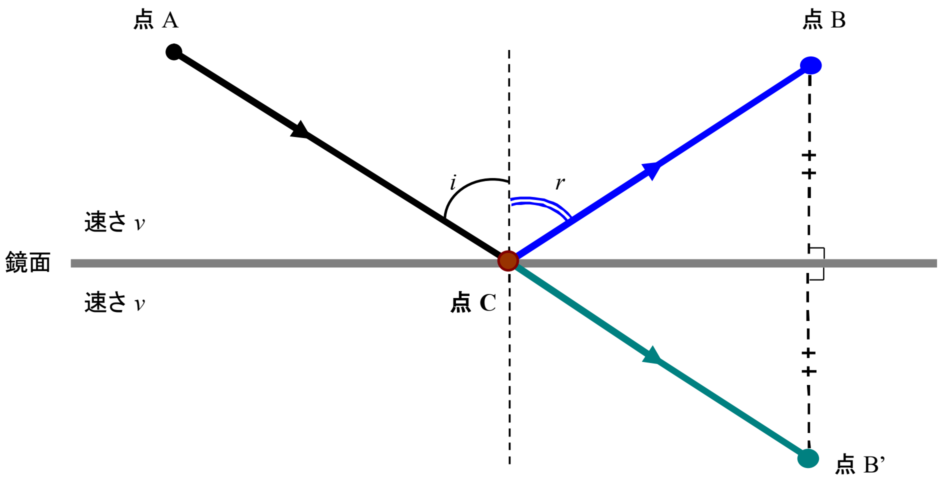
点 A から鏡面を経由して点 B への経路を通過するのに要する時間 t と点 A から点 C を経由して点 B'への経路を通過するのに要する時間 t' と等しい.「要する時間＝動いた距離/速さ」なので，点 A→点 B'へ要した時間 t' は鏡面の前後で速さ v で共通なので，

$$t = t' = \frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CB'}}{v} \tag{13-2-1}$$

となる. 上式で表れた時間 t を最小にするには，点 A，点 C，点 B'を直線で結べば良い(A→C→B'は一直線). 従って，対角と対称性から，3 つの角度の関係は

$$\alpha = \beta = \beta' \tag{13-2-2}$$

となる. 上の関係より，入射角 i と反射角 r は等しくなることが自然に導かれる.



$i = r$ ← **反射の法則** (13-2-3)

13-3. 屈折における光の進路($v_1 > v_2$ の場合)

点 A から境界面を越え，屈折後に，点 B へ向かう経路を考える. この場合，境界面より点 A 側(媒質 1)での光の速さを v_1，境界面より点 B 側(媒質 2)での光の速さを v_2 とする. 最短の時間で点 A から点 B へ至る経路を下の図のように点 A→点 C→点 B とする. 点 A→点 C→点 B へ至る経路で要する時間を t，(媒質 1 で)点 A→点 C へ要する時間を t_1，(媒質 2 で)点 C→点 B への要する時間要する時間を t_2 とする.

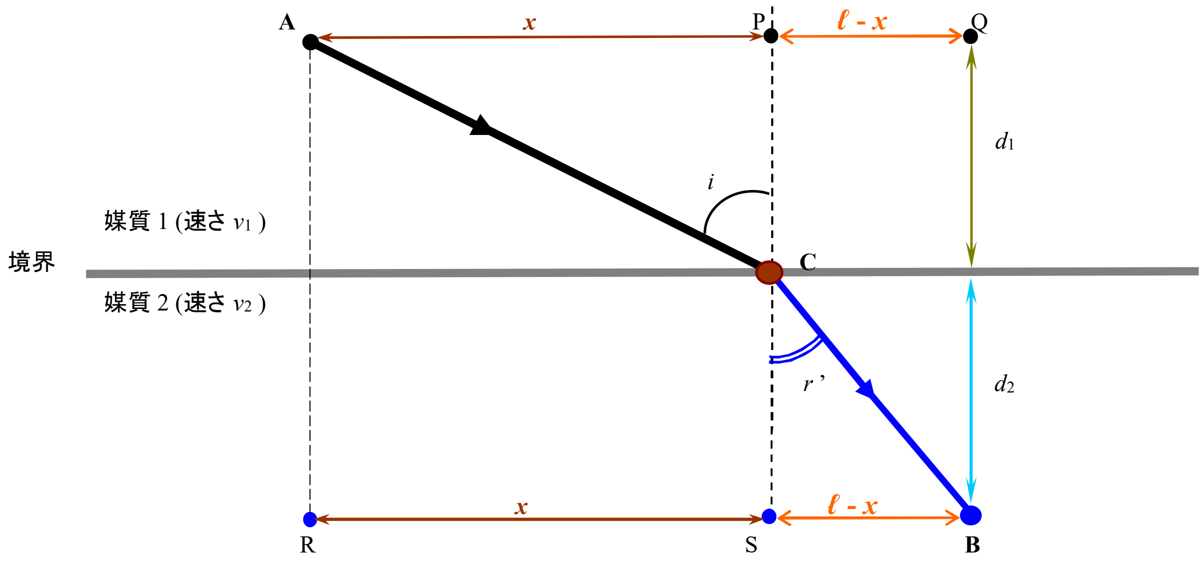
また，この図において，$\mathrm{AP} = \mathrm{RS} = x$， $\mathrm{AQ} = \mathrm{RB} = \ell$， $\mathrm{PC} = d_1$，$\mathrm{CS} = d_2$ とし，∠ACP = 入射角 $= i$，∠SCB = 屈折角$= r'$ とする. 時間 t は下の式のように表すことができる.

t = (点 A→点 C→点 B)に要する時間

$= t_1 + t_2 =$ (点 A→点 C)に要する時間 + (点 C→点 B)に要する時間

$$= \frac{\mathrm{AC}}{v_1} + \frac{\mathrm{CB}}{v_2} \tag{13-3-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d_2^2}}{v_2} \qquad (13\text{-}3\text{-}2)$$



上式で経過時間 t は距離 x の関数なので，時間 t を最小にするための条件として，

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad (13\text{-}3\text{-}3)$$

を満たせばよい．上の式を計算すると，

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{\ell - x}{\sqrt{(\ell - x)^2 + d_2^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{1}{v_1}\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{v_1}\sin i = \frac{1}{v_2}\frac{\ell - x}{\sqrt{(\ell - x)^2 + d_2^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{\mathrm{SB}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{v_2}\sin r'$$

となる．したがって，**「最小時間の原理」**から下の式で表される**「屈折の法則」**を導出できることが確認された．

$$n_{1\to 2} = v_1 / v_2 = \sin i / \sin r' \qquad (13\text{-}3\text{-}4)$$

上の式は，直進するよりも，速さが遅い媒質 2 の中の経路をより短くする方が少ない時間で点 A→点 B へ到達するように屈折することを示している(上の図では直進するよりも BC を短くして，時間を短縮している)．

13-4.　ガラス曲面(単一境界)でのレンズの公式

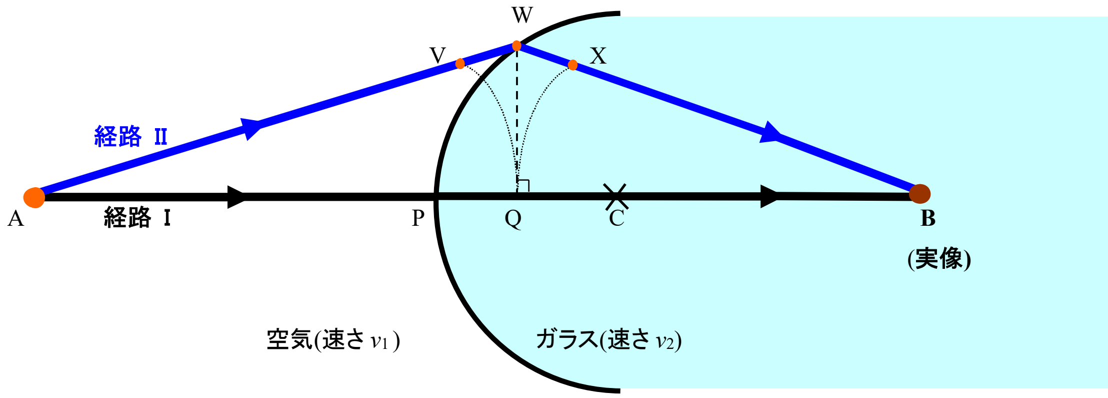
凸レンズや凹レンズにおけるレンズの公式を導出する前に，境界が 1 だけある曲面でのレンズの公式を導出する．

・曲率半径

単純のために曲面として半径 R の単純な球を考える．この半径を曲率半径と呼ぶ．

・実像とレンズの公式

図のように，空気中にある点 A から発した光をガラス内にある点 B へ集光するための**条件式**(点 A に物体を置くと，そこから出た光は異なる経路を通って，点 B へ集光する．集光することによってできる像は**実像**と呼ばれる．この条件式は前章で扱った**「レンズの公式」**に相当する)を**「最小時間の原理」**を用いて導出する．AP=物体とガラス曲面間の距離=a，PB=実像とガラス曲面の距離=b，WQ=h，空気中の光の速さ=v_1，ガラス中の光の速さ=v_2 ($v_1 > v_2$)，屈折率= $n_{1\to 2} = v_1 / v_2$，ガラス球面の曲率半径=CP=CW=R (ガラス曲面の曲率半径の中心は点 C)とする．



集光するためには，経路 A→P→Q→B(経路 I)という直進する経路を通って点 A から点 B に至るのに要する時間 t_{I} と経路 A→V→W→X→B(経路 II)という経路を通って点 A から点 B に至るのに要する時間 t_{II} が等しくならなければならない．それぞれの所要時間 t_{I} と t_{II} は下の式のように表すことができる．

$$t_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{AP}}{v_1} + \frac{\mathrm{PB}}{v_2} \tag{13-4-1}$$

$$t_{\mathrm{II}} = \frac{\mathrm{AW}}{v_1} + \frac{\mathrm{WB}}{v_2} = \frac{\mathrm{AV}+\mathrm{VW}}{v_1} + \frac{\mathrm{WX}+\mathrm{XB}}{v_2} \tag{13-4-2}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{PQ} = \mathrm{CP} - \mathrm{CQ} = \mathrm{CP} - \sqrt{(\mathrm{CW})^2 - (\mathrm{WQ})^2} = R - R\sqrt{1-(\mathrm{WQ/CW})^2} \fallingdotseq \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} && (13\text{-}4\text{-}3)\\
&\mathrm{AV=AQ=AP+PQ} \fallingdotseq a + \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} \quad \rightarrow && \\
&\mathrm{AW} = \mathrm{AQ}\sqrt{1+(\mathrm{WQ/AQ})^2} \fallingdotseq \mathrm{AQ} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{\mathrm{AQ}} \fallingdotseq \mathrm{AQ} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{a} = a + \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{a} && (13\text{-}4\text{-}4)\\
&\mathrm{XB = QB = BP - PQ} \fallingdotseq b - \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} \quad \rightarrow && \\
&\mathrm{WB} = \mathrm{BQ}\sqrt{1+(\mathrm{WQ/BQ})^2} \fallingdotseq \mathrm{BQ} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{\mathrm{BQ}} \fallingdotseq \mathrm{BQ} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{b} = b - \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{b} && (13\text{-}4\text{-}5)
\end{aligned}\right.$$

$1/v_2 = n_{1\to2}/v_1$ を用いると(13-4-1)式は

$$t_{\mathrm{I}} = \frac{1}{v_1}\,(\,a + n_{1\to2}\,b\,) \tag{13-4-6}$$

また，(13-4-2)式は近似を用いて

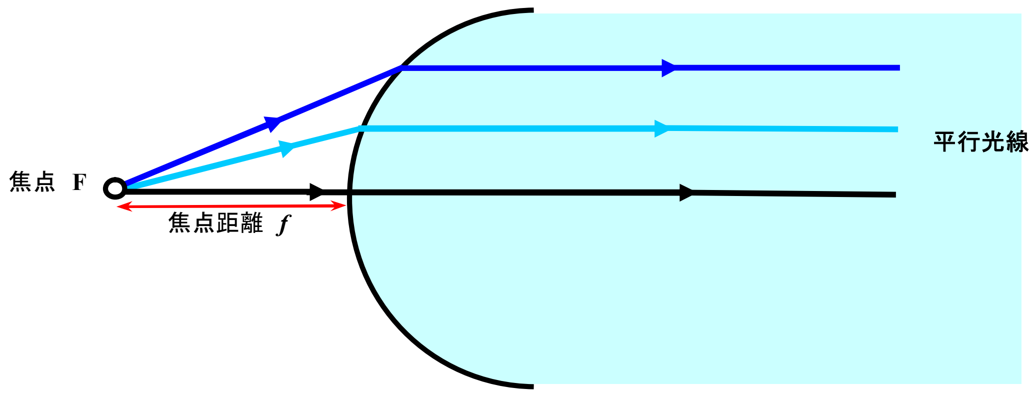
$$t_{\mathrm{II}} \fallingdotseq \frac{1}{v_1}\,[\,a + \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{a} + n_{1\to2}\,(\,b - \frac{1}{2}\frac{h^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{b}\,)\,] \tag{13-4-7}$$

となる．(13-4-6)式と(13-4-7)式を等号で結び，両辺を $2/h^2$ をかけると下のレンズの公式を得る．

$$0 = \frac{1}{R} + \frac{1}{a} + n_{1\to2}\,(\,-\frac{1}{R} + \frac{1}{b}\,)$$

$$\to \quad \boldsymbol{\frac{1}{a} + n_{1\to2}\frac{1}{b} = (n_{1\to2} - 1)\,\frac{1}{R}} \tag{13-4-8}$$

上の式を満たすような曲率半径をもったガラスを設計すれば点 A から出た光を点 B に集めることができる．さらに，ある点 F から出た光は境界で屈折し，ガラス内で全て光線が平行光線になる時，この点 F を**焦点**と呼ぶ．



(13-4-8)式で，距離 $b \to \infty$ とすると，点 A が焦点 F となり，距離 $a \to$ 焦点距離 f となる．従って，(13-4-8)式より，

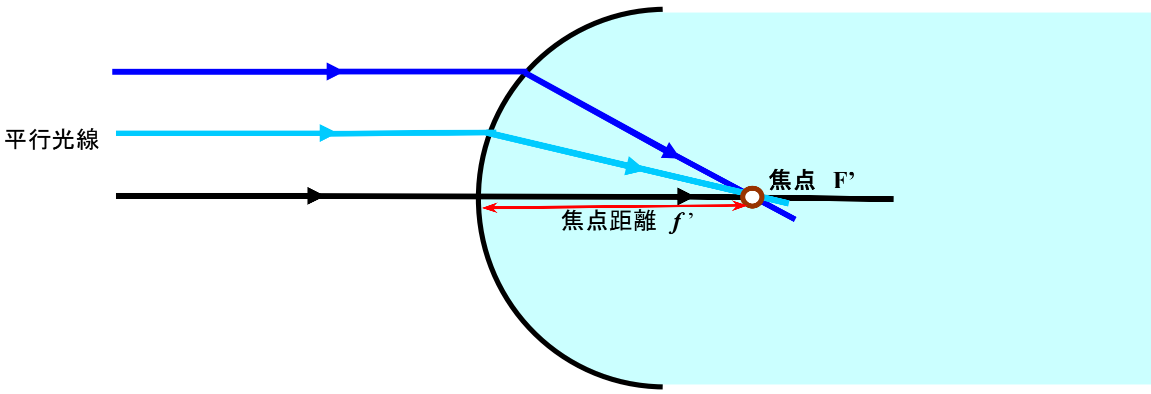
$$\frac{1}{f} = (n_{1\to2} - 1)\,\frac{1}{R} \tag{13-4-9}$$

が成立する．この関係式を使うと (13-4-8)式は

$$\boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{n_{1\to2}}{b} = \frac{1}{f}} \tag{13-4-10}$$

となる．曲率半径を測定するよりも焦点距離を測定する方が一般的には容易なので，(13-4-10)式の形が用いられることが多い．

　また，逆に平行光線を入射させて 1 点に集まる焦点 F'があるとしよう．



今度は(13-4-8)式で距離 $a \to \infty$ とすると，点 B が焦点 F となり，距離 $b \to$ 焦点距離 f' となる．したがって，(13-4-8)式より，下の式が成り立つ．

$$\frac{n_{1\to2}}{f'} = (n_{1\to2} - 1)\,\frac{1}{R} \tag{13-4-11}$$

上の関係式を使うと　(13-4-8)式は下の式のように表すことができる．

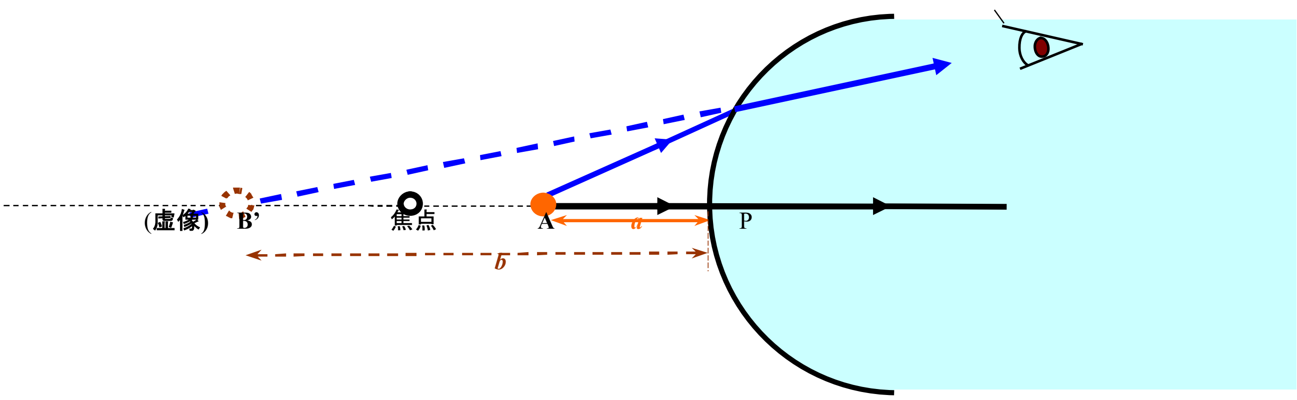
$$\frac{1}{n_{1\to2}\,a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f'} \tag{13-4-12}$$

・虚像

実像は物体から出た光が違う経路を通過するが 1 点に集まることによりできる．ガラス表面での屈折の様子から $a > f$ の場合に実像ができる．一方，$a < f$　($1/a > 1/f$　→　($1/a - 1/f$) は正になる)の場合は物体から出た光は 1 点に集光されることはない．実像の場合のレンズの式(13-4-10)式を用いると

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{f} = -\frac{n_{1\to2}}{b} \tag{13-4-10)'$$

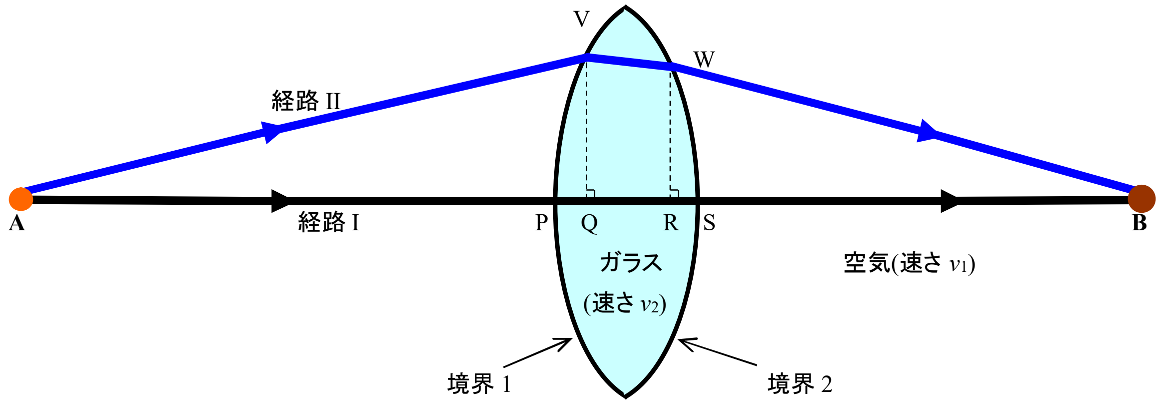
となり，右辺の b を負の値を採用すると，上式を満たす b の値が存在する．この場合，右のガラス内にいる人から物体を見ようとした時，(物体の像を表す)光があたかも，ある点から出ているように見える．このように，実際の光が集まらないで，仮想上の点から光が出ているように見える像を**虚像**と呼ぶ．虚像ができる場合[134] は(13-4-10)'式において，b を負の値として扱うこととする．



[134] 虚像ができる場合は，実際に光がその経路を通過しないので，「最小時間の原理」を用いてレンズの公式を導出できない．

13-5. ガラス曲面(2つの境界)でのレンズの公式

ここでは，凸レンズのようなガラスと空気の間の境界が 2 つある場合について，最小時間の原理を用いてレンズの公式を導出する．なお，2 つの境界は対称でなくともよいので，ここでは，境界 1，境界 2 の曲率半径をそれぞれ，R_1，R_2 とする． また，AP 間の距離$=a$，BS 間の距離$=b$ とし，VW≒QR と仮定するので，VQ≒WR$=h$ とする．さらに，(13-4-3)式と同様に考えて，PQ $=h^2/(2R_1)$，RS $=h^2/(2R_2)$ と近似できる．



「最小時間の原理」より，点 A にある物体の像として点 B に実像を作るためには，経路 A→P→Q→R→S→B(経路 I)という直進する経路で点 A から点 B へかかる時間 t_{I} と経路 A→V→W→→B(経路 II)という経路で点 A から点 B に至るのに要する時間 t_{II} が等しくならなければならない．それぞれの所要時間 t_{I} と t_{II} は下の式のように表すことができる．

$$t_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{AP}}{v_1} + \frac{\mathrm{PS}}{v_2} + \frac{\mathrm{SB}}{v_1} = \frac{\mathrm{AP}}{v_1} + \frac{\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RS}}{v_2} + \frac{\mathrm{SB}}{v_1} \tag{13-5-1}$$

$$t_{\mathrm{II}} = \frac{\mathrm{AV}}{v_1} + \frac{\mathrm{VW}}{v_2} + \frac{\mathrm{WB}}{v_1} \tag{13-5-2}$$

AV と WB の長さは (13-4-4) 式と同様に見積もると上の式は

$$t_{\mathrm{I}} \fallingdotseq \frac{1}{v_1}\left[a + b + n_{1\to 2}\left(\frac{h^2}{2R_1} + \mathrm{QR} + \frac{h^2}{2R_2} \right) \right] \tag{13-5-3}$$

$$t_{\mathrm{II}} \fallingdotseq \frac{1}{v_1}\left[a + \frac{h^2}{2R_1} + \frac{h^2}{2a} + b + \frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2b} + n_{1\to 2}\ (\mathrm{VW}) \right] \tag{13-5-4}$$

となり， $t_{\mathrm{I}} = t_{\mathrm{II}}$ より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n_{1\to 2} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{13-5-5}$$

と凸レンズに対する「レンズの公式」が導出できる．入射光として平行光線($a \to\infty$)を用いると，点 B は焦点となる．一方，点 A から出た光がレンズを通過後に平行光線($b\to\infty$)となる場合も点 A は焦点となる．どちらの場合も焦点距離 f は下のように同じ値となる．

$$\frac{1}{f} = (n_{1\to 2} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{13-5-6}$$

この焦点距離を用いると, (13-5-5)式は以下のように変形できる. この式はよく見慣れた「レンズの公式」である.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{13-5-7}$$

・まとめ

以上, 見たように光の進み方は, 「**点 A から点 B へ向かう経路が多数ある中で, 最短時間で到達する経路を選ぶ**」という「**最小時間の原理(フェルマーの原理)**」を用いて説明できる.