

8. 変位電流とマックスウェル方程式

(高専3年以上を対象;数学が苦手な学生は省略してよい)

電気と磁気に関する重要な法則は4つある。これを方程式としてまとめたのがイギリスの物理学者のマックスウェル¹である。その4つの方程式をマックスウェル方程式と呼ぶ。これまでに、ほぼ4つの方程式については言及してきた。これまでに学んだ4つの方程式の内容を下記に示す。

- 1 番目：電場に関するガウスの法則(電荷によって生成する静電場(時間変化しない電場))
- 2 番目：磁場に関するガウスの法則(静磁場)
- 3 番目：電磁誘導の法則(時間変化する磁場によって生成する電場)の空間的性質を記述したもの
- 4 番目：電流と磁場の関係を示したアンペールの法則(定常電流によって生成する静磁場)

電磁気学では、電場と磁場を同等に扱うことができ、上の3番目の法則は、「**時間変化する磁場によって電場が生成する**」のものであるが、これと対応している「**時間変化する電場によって磁場が生成する**」については、それを記述する方程式がまだない。

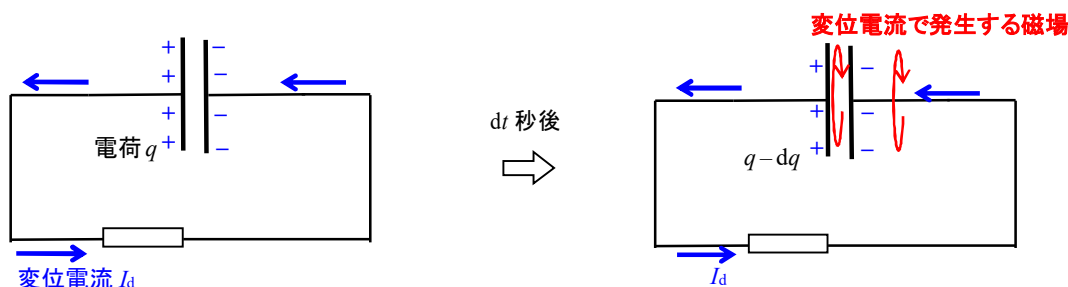
そこで、マックスウェルは、上の4番目の法則に、**変位電流**という考え方を導入し、「時間変化する電場で生成する磁場」について考察し、それを方程式にまとめ、改めて、4つの方程式を「**マックスウェル方程式**」として発表した。

マックスウェルの方程式から、電場と磁場が時間的・空間的に変化して伝わる波(**電磁波**)が存在することが予言できる。実際、ヘルツは**電磁波**を発生させ、マックスウェルの理論が正しいことを確認した。

8-1. 変位電流

7章では、「電磁誘導の法則」として、時間変化する磁場が電場を誘起し、起電力を発生することを学んだ。これとは逆に、マックスウェルは時間変化する電場が磁場を誘起する現象電流を発生させることの可能性について、思考実験を基にして考えた。

下の図のように充電したコンデンサを用意し、2つの極板を回路で結び、放電させる。



コンデンサの電極にたまった電荷 q 、極板の面積 S 、2つの極板にはさまれた物質の誘電率 ε とすると、極板間の電場の大きさ E は(2-4-18)式、(3-2-3)式、または(3-4-13)式と同じ下の式で表すことができる。

$$E = q/(\varepsilon S) \quad (8-1-1)$$

上の式について、コンデンサにたまった電荷 q に対して時間微分しよう。電荷が時間変化すると電流が流れる。コンデンサにたまった電荷の移動による電流 I_d を**変位電流**(Displacement current)と呼ぶ。上の式の時間微分した式を変形すると下の式のように、変位電流 I_d は2枚の極板間の電場の時間変化に比例する(ここで、電場 E の代わりに電束密度 D を用いた)。

$$I_d = \frac{dq}{dt} = S \varepsilon \frac{dE}{dt} = S \frac{dD}{dt} \quad (8-1-2).$$

電荷が時間変化すると、アンペールの法則より磁場が発生する。アンペールの法則を積分形で表した(6-1-5)式の右辺にこの変位電流を加えると下の式で表すことができる。

¹ マックスウェル(James Clerk Maxwell)は19世紀のイギリスの物理学者で電磁気学と熱力学・統計力学に多大な貢献をした。電磁気学における「マックスウェル方程式」は特に有名で電磁気学の発展に大きな足跡を残した。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + I_d = I + S \frac{dD}{dt} \quad (8-1-3)$$

上の式の右辺において、一般化するため、第1項目については電流密度 \vec{i} を用い、第2項目については面積分を用いると下の式で表すことができる。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{断面積} S} \vec{i} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_{\text{断面積} S} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

さらに、閉曲線 C で囲んだ断面積 S の時間変化がない場合は下の式で表すことができる。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (\text{変位電流を加えたアンペールの法則}) \quad (8-1-4)$$

上の式は電場と磁場の関係を積分で表したもののだが、左辺に(6-5-7)式で表されるストークスの定理を適用すると、被積分関数を等号で結ぶと、変位電流を加えたアンペールの法則の微分形を得ることができる。

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{変位電流を加えたアンペールの法則の微分形}) \quad (8-1-5)$$

上の2つの式は、マクスウェルが「電磁誘導の法則」を基に方程式の対称性を考慮したことによる「仮説となる方程式」である。この方程式が正しいかどうかは実験で確認される必要がある。

8-2. マクスウェル方程式

マクスウェルは、電場と磁場が発生する際の時間的・空間的性質を表す重要な法則として4つにまとめた。それらの4つの方程式はすでに紹介したが、再度、まとめる。第1法則は(時間変化しない)静電場が発生する法則、第2法則は(時間変化しない)静磁場が発生する法則、第3法則は(変位電流を含めた)電流が磁場を発生する法則、第4法則は時間変化する磁場が電場を発生させる法則である。下に、これらの4つの法則を示す。

・第1法則(電場は電荷から湧き出す) → **個別に存在する(点)電荷から、電場は湧き出す**

2-3. 「(電場に関する)ガウスの法則」で示したように、正の電荷によって、電気力線が生み出され²、それに伴って、電場が湧き出す。湧き出した電場の大きさは、電気力線の面密度に比例する³。(2-3-4)式で示したように(時間変化しない)電場 \vec{E} は閉曲面内にある電荷 q から湧き出して生じる((8-2-1)式は(2-3-4)式と同じ)。

$$\int_{\text{閉曲面} S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{閉曲面から湧き出す電気力線の総数} \quad (8-2-1)$$

上の式は「(電場に関する)ガウスの法則の積分形」である。また、電荷 q の(体積)密度を ρ とすると、電荷 q は密度の体積分「 $q =$

² 負の電荷の場合は、電気力線が入り、そこで消滅する。

³ 電気力線の接線方向が電場の向きと一致する。

$\int_{\text{曲面内の体積}} \rho \, dV$ と面積積分から体積積分に変更するガウスの定理(2-5-31)式を用いると、「(電場に関する)ガウスの法則の微分形」として、下の式が成り立つ。div(divergence)は「発散」という意味で、電場がある空間から湧き出して発散している状態を表している((8-2-2)式は(2-5-34)式と同じ)。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8-2-2)$$

* 電束密度を用いた「ガウスの法則」

電束密度 $\vec{D} (= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E})$ を用いると、「(電場に関する)ガウスの法則」は下の(3-4-9)式のようにも表現できる。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{ext}} = \text{閉曲面から湧き出す電束線の総数} \quad (3-4-9)$$

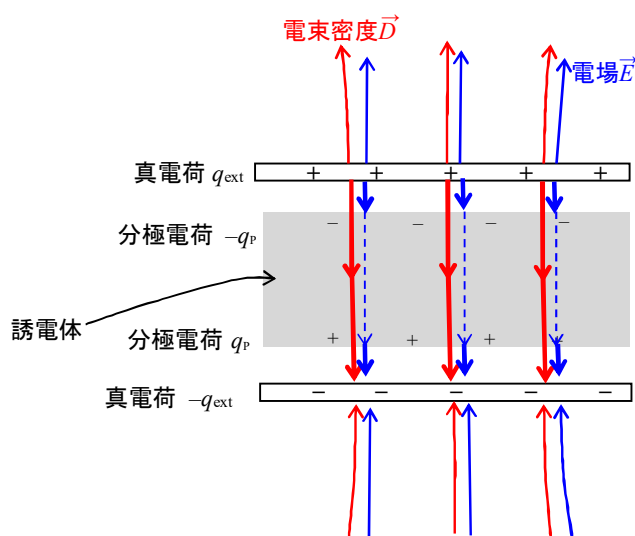
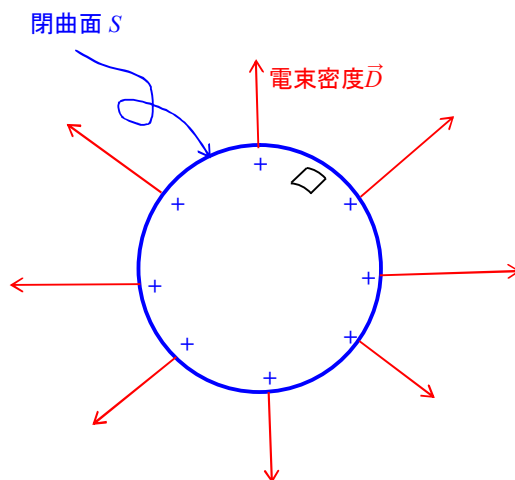
ここで、電荷 q_{ext} は分極によって生じた電荷を含まない(真の)電荷で、閉曲面 S の内部にある本来の電荷のみを表す。一方、(2-3-4)式の右辺の電荷 q は分極によって生じる電荷を含む。物質がない真空の場合は、電束密度 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ が成り立ち、電荷 $q = q_{\text{ext}}$ となり、(2-3-4)式と(3-4-9)式は一致する。

さらに、上の式に対して、微分形で表すと(2-5-34)式と似た下の式で表される。電荷密度 ρ_{ext} は電荷 q_{ext} に対応する(体積)電荷密度である。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{ext}} \quad (8-2-3)$$

例えば、導体球に(真の)電荷 q_{ext} が帯電しているとすると、電荷は右の図のように、表面に様に分布し、電束密度が表面から湧き出す。

また、(真の)正電荷 q_{ext} と(真の)負電荷 $-q_{\text{ext}}$ で帯電した2枚の極板の間に物質(誘電体)を挟んだ場合は下の図のように、誘電体のある空間で電場 \vec{E} は電束密度 \vec{D} を用いて、 $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$ となり、真空中では、 $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0$ と表され、電束密度は誘電体中でも真空中でも同じだが、電場は異なる。



・第2法則(磁場は湧き出しがない) → (真の)磁荷はないので、磁束密度の湧き出しはない

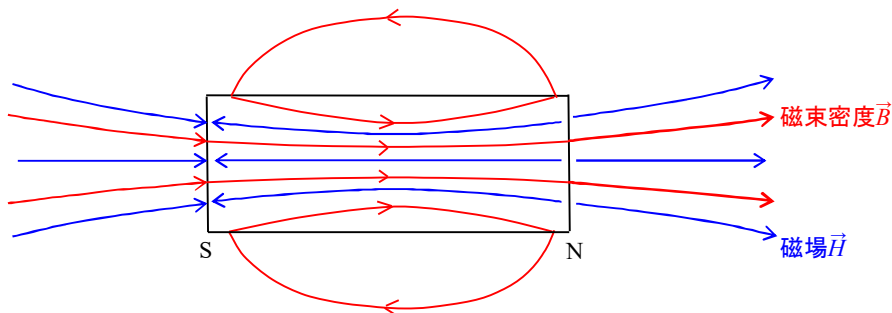
磁荷は「N 極と S 極」が対をなしており、単独の N 極、または S 極は発見されていない。このことから、「5-4. 磁束密度に関するガウスの法則」で示したように、**真の磁荷がないので、磁束線は空間を一周し、連続に接続しており、「磁気に関するガウスの法則」**について、磁束密度 \vec{B} を用いて表すと、(5-4-1)式のように表すことができる。この式は、「**磁束線(磁束密度)の湧き出し(発散)はない**」ことを意味している((8-2-4)式は(5-4-1)式と同じ)。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8-2-4)$$

また、「(磁束密度に関する)ガウスの法則の微分形」として、下の式が成り立つ((8-2-5)式は(5-4-2)式と同じ)。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0 \quad (8-2-5)$$

N 極と S 極からなる棒磁石での、磁場 \vec{H} (磁力線)と磁束密度 \vec{B} (磁束線)を下の図に示した。磁束線は(無限遠方空間を含めて)空間にわたってつながっており、磁束線(磁束密度)の湧き出しはない。一方、磁場は N 極から湧き出し、S 極に入る。磁化 \vec{M} は棒磁石内では、S 極から N 極へ向かう。N 極と S 極の両極を内部に持つ閉曲面では、全磁荷が 0 になる。



* 磁場を用いた「ガウスの法則」

磁荷 q_m となる N 極と磁荷 $-q_m$ となる S 極を含んだ閉曲面 S では、閉曲面内の磁荷の総和が 0 (内部に磁荷が存在しない閉曲面も同様) になる。この場合、磁場 \vec{H} を用いた磁気に関するガウスの法則は下の式で表すことができる。このとき、磁力線も空間内で連続につながっている(空間内を 1 周する)。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8-2-6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \text{div } \vec{H} = 0 \quad (8-2-7)$$

あるいは、N 極のみを含む閉曲面 S では下の式で表すことができる。ここで、磁荷の空間密度 ρ_m とした。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{q_m}{\mu_0} \quad (8-2-8)$$

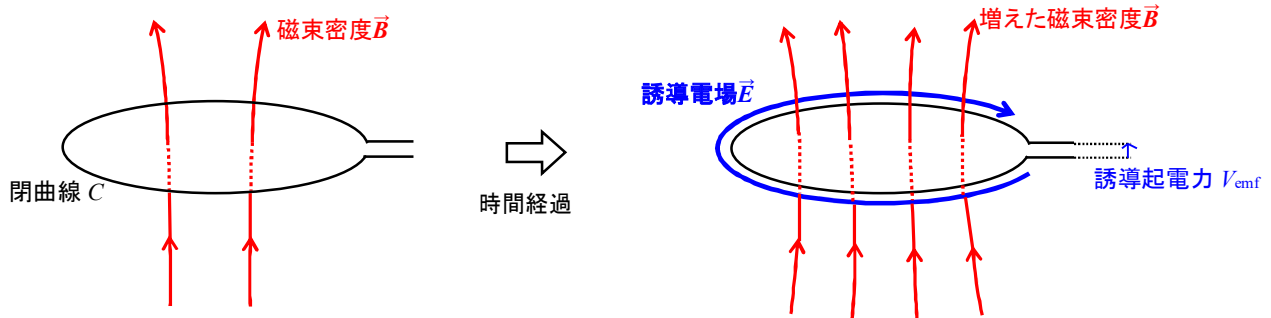
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \text{div } \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (8-2-9)$$

・第3法則(ファラデーの電磁誘導の法則) → 磁束密度(磁場)が時間変化すると、その周りに渦巻いた電場が発生する

ある閉曲線 C があり、その内部を貫く磁束 Φ が時間変化すると、閉曲線を1周するとその間に誘導起電力 V_{emf} が発生することをファラデーは発見した。この現象は「電磁誘導の法則」と呼ばれ、(起電力の向きを考えて)下の式で与えられる。

$$V_{\text{emf}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (8-2-10)$$

ここで、閉曲線 C の内部の磁束 Φ は内部を貫く磁束密度 \vec{B} の面積積分であり、起電力 V_{emf} は、誘導電場 \vec{E} を閉曲線 C に沿った線積分で表すことができる。すなわち、閉曲線 C に沿って発生した誘導電場 \vec{E} は1周し渦を巻くことになる。これを下の図に示す。



閉曲線 C が時間によらないで固定されている場合、磁束密度 \vec{B} が時間変化することで、閉曲線内部を貫く磁束 Φ が時間変化する。(8-2-10)式に対し、(7-1-1)式と同じように、誘導電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} を用いると「ファラデーの電磁誘導の法則(積分形)」は下の式で表すことができる(誘導電場 \vec{E} の向きは磁束密度 \vec{B} が増える向き(右ネジの法則)と逆向きになるので「-」を乗じている)。

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{C \text{ 内の面積 } S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8-2-11)$$

上の式の左辺について、(6-5-7)式、または(7-1-5)式で示したストークスの定理を適用すると、下の式のように「電磁誘導の法則の微分形」を得ることができる((8-2-12)式は(7-1-7)式と同じ)。

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8-2-12)$$

・第4法則(一般化されたアンペールの法則)⁴ → 電流の周りには渦巻いた磁場が発生する

(8-1-2)式で示した変位電流 I_d を含めた一般化されたアンペールの法則は下の式のように(8-1-3)式で表される。閉曲線 C の内部には右ネジの法則に従うように電流 I が流れている。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + I_d = I + \frac{d}{dt} \int_{C \text{ 内の面積 } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (8-2-13)$$

下の図のように上の式は電流の周りにはその周りに(閉曲線 C に沿って)渦を巻く磁場 \vec{H} が発生することを意味する。

⁴ 「アンペール・マクスウェルの法則」とも呼ぶ。



電流密度 \vec{I} を用いると、(8-1-4)式で示したように、「**一般化されたアンペールの法則(積分形)**」(あるいは「**アンペール-マックスウェルの法則**」とも呼ぶ)を表すことができる。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (8-2-14)$$

時間変化する電束密度 \vec{D} と電流は**渦巻く磁場 \vec{H}** を発生させる。さらに、ストークスの定理を用いて、微分形として表したのが下の式である((8-1-5)式と同じ)。

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8-2-15)$$

・まとめ

ここで、マックスウェルが電場と磁場が発生する際の時間的・空間的性質を表す重要な **4 つのマックスウェル方程式(微分形)**を再度まとめる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{第 1 法則(電場は電荷から湧き出す)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{ext}} \quad (8-2-3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{第 2 法則(磁場の湧き出しはない)} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0 \quad (8-2-5) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{第 3 法則(時間変化する磁場から渦巻く電場が発生)} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8-2-12) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{第 4 法則(電流と時間変化する電場から渦巻く磁場が発生)} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8-2-15) \end{array} \right.$$

以上の 4 つの方程式に加えて、電磁場と力学(運動)を結びつける法則として、**ローレンツ力**がある。ローレンツ力と 4 つのマックスウェル方程式で全ての電磁現象が原理的に説明できる。電荷 q を持つ荷電粒子が速度 \vec{v} で運動しているとき、荷電粒子が電場と磁場から受ける力(ローレンツ力) \vec{F} は下の式で与えられる。

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6-2-10)$$

電磁気学では、4つのマクスウェル方程式とローレンツ力が重要な法則である。ある系があり、この系に入力する情報として「電荷密度 ρ と電流密度 \vec{j} 」がある。その結果、系が4つのマクスウェル方程式に従うように応答して、出力として「電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} 」が決まる。さらに、決まった電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} の下で荷電粒子がローレンツ力 \vec{F} に従うように運動する。



8-3. スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル(省略してよい)

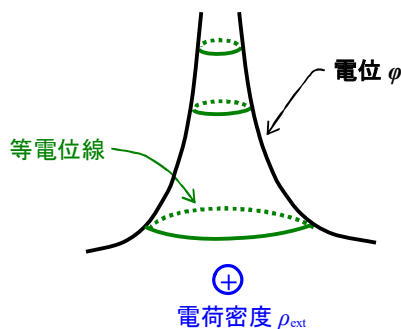
「2-4. 電位と位置エネルギー」において、電位(静電ポテンシャルとも呼ぶ) ϕ を定義し、(時間によらない)静電場 \vec{E} との関係式を(2-5-3)式で与えた。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\text{grad } \phi \quad (2-5-3)$$

電位 ϕ を求めることで、(2-5-3)式から静電場 \vec{E} が決まる。また、(2-5-43)式から(2-5-44)式を導出したのと同じように、電場が持つポテンシャルエネルギー U_e は電位を用いて下の式のように表すことができる⁵。

$$U_e = \frac{1}{2} \int (\rho_{\text{ext}} \phi) dV = \frac{1}{2} \int (\vec{D} \cdot \vec{E}) dV \quad (8-3-1)$$

上の式は、「電荷密度 ρ_{ext} の存在により、その周辺の電気的な空間をゆがめ、電場 \vec{E} が生じ(同時に電位 ϕ が生じる)、空間に電気エネルギー U_e が貯まる」ことを意味する。例えば、右の図のように、ある場所に正の電荷を置くと、そのまわりの電位が場所によって異なる値になり、空間に電気エネルギー U_e が貯蓄される。



同様に、磁場が持つポテンシャルエネルギーに関するポテンシャル(これを、ベクトルポテンシャル \vec{A} と呼び、すでに(5-4-3)式で与えられた)を導入しよう。

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A} \quad (5-4-3)$$

上の式のように定義すると、磁束密度 \vec{B} は、下に示すように、マクスウェル方程式の第2法則(8-2-5)式を自然に満たすことがわかる((6-5-8)式と ' $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ ' を用いた)。磁束密度 \vec{B} が存在する空間にはベクトルポテンシャル \vec{A} が存在する。

⁵ ここでは物質中の電場も考慮しているため、(2-5-44)式に表れない電束密度 \vec{D} を用いた。

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} B_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overbrace{\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k}^{(\text{rot } \vec{A})_i = B_i} \right) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A_k = 0
\end{aligned} \tag{8-3-2}$$

次に、(8-3-1)式と似た下の式⁶を導入しよう。これが⁸、磁場が空間に持つエネルギー U_m となることを次に示す

$$\begin{aligned}
U_m &= \frac{1}{2} \int (\vec{B} \cdot \vec{A}) dV \\
&= \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{A} dV = \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} dV
\end{aligned}$$

ここでは、電磁場が時間変化しない場合を扱うので、「 $\partial \vec{D} / \partial t = 0$ 」とした。また、下のベクトル公式から、上の式は(8-3-4)式のように変形できる。

$$\left[\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} H_j A_k \right) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial H_j}{\partial x_i} A_k + H_j \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) \quad (\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik}) \\
&= \sum_k \left(\sum_{i,j} \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} H_j \right) A_k + \sum_j H_j \left(\sum_{k,i} \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} A_k \right) = \sum_k (\vec{\nabla} \times \vec{H})_k A_k - \sum_j H_j \left(\sum_{k,i} \varepsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_i} A_k \right) \\
&= (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} - \sum_j H_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})
\end{aligned} \right. \tag{8-3-3}$$

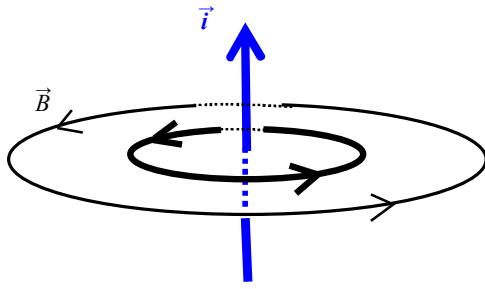
$$U_m = \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})) dV = \frac{1}{2} \int_{\text{表面}} (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV \tag{8-3-4}$$

第1項は表面積分となるが、(2-5-44)式を導出したのと同様に、境界を無限遠方にとると、「磁場とベクトルポテンシャルは0になる」と考えてよいので1項目の寄与は消え、2項目だけが残る。これは、磁場が持つエネルギーに相当する。

$$U_m = \frac{1}{2} \int (\vec{B} \cdot \vec{A}) dV = \frac{1}{2} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \tag{8-3-5}$$

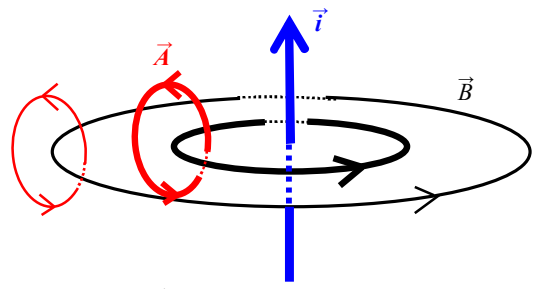
この式は、「電流密度 \vec{j} の存在により、その周辺の磁気的な空間をゆがめ、磁場、および磁束密度 \vec{B} が生じ(同時にベクトルポテンシャル \vec{A} が生じる)、空間に磁気エネルギー U_m が貯まる」ことを意味する。下の図のように、ある場所に電流密度 \vec{j} があると、その周りに渦となる磁束密度 \vec{B} が生じ、さらにその周りに(磁束密度を起源とする)渦となるベクトルポテンシャル \vec{A} が場所によって異なる値になり、空間に磁気エネルギー U_m が貯蓄される。また、下の図のように、電流によって生じたベクトルポテンシャルは電流密度と同じ向きで、電流に近いほど大きな値を持つ。

⁶ (8-3-1)式では、被積分関数が「電荷と(電荷によって生成する)電位の積」になっていたのに、(8-3-3)式では被積分関数が「電流と(電流によって生成する)ベクトルポテンシャルの内積」になっている。

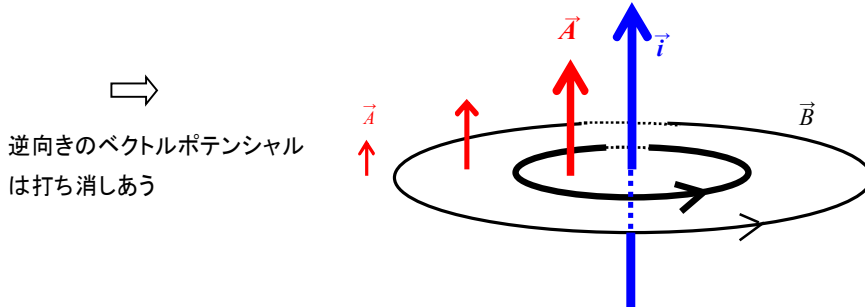


電流密度 \vec{J} の周りに渦巻くように生じた磁束密度 \vec{B}
(電流に近いほど磁束密度が大きい)

ベクトルポテン
シャルも図示



磁束密度 \vec{B} の周りに渦巻くように生じたベクトルポ
テンシャル \vec{A}
(電流に近いほどベクトルポテンシャルが大きい)



逆向きのベクトルポテンシャル
は打ち消しあう

・電場について、渦がある場合と渦がない場合の扱い

電場 \vec{E} について、渦がない場合と渦を巻く場合について、電場と2つのポテンシャルの関係について考えてみよう。

① 渦なし場 → (電磁場が時間変化しない場合)

(2-5-3)式のように電場 \vec{E} が電位(または、静電ポテンシャル) φ を用いて与えられる場合は、下の式で示すように、電場 \vec{E} が自然に渦なし場の条件式「 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ 」を満たしていることがわかる。

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \varphi) = - \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) \vec{e}_k = - \frac{1}{2} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varphi \vec{e}_k = 0 \quad (8-3-6)$$

このとき、ファラデーの電磁誘導の法則(8-2-12)式から、電場 \vec{E} が渦なし場となるのは、磁束密度 \vec{B} が時間変化せず一定となる場合である。

② 渦あり場も加える → (電磁場が時間変化する場合)

一方、磁束密度 \vec{B} が時間変化し、電場 \vec{E} が渦あり場となる場合は、下の式のように、位置 \vec{r} と時刻 t の関数となる電場 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ は、(静電ポテンシャルを一般化した)スカラーポテンシャル $\varphi(\vec{r}, t)$ ⁸とベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r}, t)$ を使って表すことができる⁹。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8-3-7)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A} \quad (5-4-3)$$

(8-3-7)式の右辺の 1 項目が静電場による渦なし場で、2 項目が電磁誘導に関する渦あり場に相当する。(5-4-3)式で示したように、磁束密度 \vec{B} はマクスウェル方程式の第 2 法則(8-2-5)式を満たすように、ベクトルポテンシャル \vec{A} を用いて表すことができる。(5-4-3)

⁷ 静電ポテンシャル φ は、空間の位置 \vec{r} だけの関数で、時刻 t の関数ではない。「 $\varphi = \varphi(\vec{r})$ 」

⁸ スカラーポテンシャル φ は、空間の位置 \vec{r} と時刻 t の関数となり、静電ポテンシャルを一般化したものとなる。「 $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ 」

⁹ スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルをまとめて、「電磁ポテンシャル」とも呼ぶ。

式と(8-3-7)式を用いると、自然にマクスウェル方程式の第3法則である(8-2-12)式を満たしていることがわかる(ここで、 $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$ の恒等式((8-3-6)式)と時間微分と空間微分の順番は交換可能という性質を用いた)。

$$(8-2-12) \text{ 式の左辺} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$(8-2-12) \text{ 式の右辺} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

次に、マクスウェル方程式の第1法則である(8-2-3)式と第4法則である(8-2-15)式の電磁場に対し、2つの電磁ポテンシャルを用いて表してみよう。電束密度 \vec{D} は、「 $\vec{D} = -\epsilon (\vec{\nabla} \varphi + \partial \vec{A} / \partial t)$ 」で、磁場 \vec{H} は、「 $\vec{H} = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) / \mu$ 」と表すことができる。これを、(8-2-3)式と(8-2-15)式に代入すると、次の式が得られる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\epsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\epsilon (\vec{\nabla}^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \rho_{\text{ext}} \quad (8-3-8)$$

* ベクトル公式 ① 「 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ 」

すでに、(6-3-5)式から(6-3-6)式を導出する際に使用したが、ここでは、再度、(6-2-8)式を用いて確認する。

上式の左辺のかっこ内の外積によるベクトルを \vec{d} と置くと下の式のように表すことができる。

$$\vec{d} = \sum_k d_k \vec{e}_k = \vec{b} \times \vec{c} = \sum_{k \ell m} \epsilon_{k \ell m} \vec{e}_k b_\ell c_m \quad (8-3-9)$$

\vec{a} とこの \vec{d} との間で外積をとると下の式のように表すことができる。

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{d} = \sum_{i j k} \epsilon_{i j k} \vec{e}_i a_j d_k = \sum_{i j k} \epsilon_{i j k} \vec{e}_i a_j \sum_{\ell m} \epsilon_{k \ell m} b_\ell c_m$$

次に、レビ・チビタの記号 ϵ_{ijk} に関する計算を行うと下の式のようにクロネッカーの記号 δ_{ij} を用いて下の式のように計算できる。

$$\sum_k \epsilon_{i j k} \epsilon_{k \ell m} = \sum_k \epsilon_{i j k} \epsilon_{\ell m k} = \delta_{i \ell} \delta_{j m} - \delta_{i m} \delta_{j \ell} \quad (8-3-10)$$

ここで、クロネッカーの記号 δ_{ij} は下の式で定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{添え字の } ij \text{ が, 「 } i=j \text{ 」となる場合}) \\ 0 & (\text{添え字の } ij \text{ が, 「 } i \neq j \text{ 」となる場合}) \end{cases} \quad (8-3-11)$$

(8-2-19)式を(8-2-18)式に代入すると下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{i j k} \epsilon_{i j k} \vec{e}_i a_j \sum_{\ell m} \epsilon_{k \ell m} b_\ell c_m &= \sum_{i j \ell m} (\delta_{i \ell} \delta_{j m} - \delta_{i m} \delta_{j \ell}) \vec{e}_i a_j b_\ell c_m = \sum_{i j} \vec{e}_i (a_j b_i c_j - a_j b_j c_i) \\ &= \sum_j a_j c_j \sum_i \vec{e}_i b_i - \sum_j a_j b_j \sum_i \vec{e}_i c_i = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{aligned}$$

したがって、下のベクトル公式が成立することが確認された。

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (8-3-12)$$

* ベクトル公式 ② 「 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ 」

上式の左辺を(6-5-6)式と(8-2-26)式を用いて表すと、下の式のように計算することができる。

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \left(\sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \times \sum_k \vec{e}_k A_k \right) \\
 &= \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} ((\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) \vec{e}_j - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_k) A_k = \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ik} \vec{e}_j - \delta_{ij} \vec{e}_k) A_k \\
 &= \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i - \sum_i \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} \sum_k \vec{e}_k A_k = \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \sum_i \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} \vec{A} \\
 &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \text{右辺}
 \end{aligned} \tag{8-3-13}$$

一方、(8-2-15)式からは、下のベクトル公式を用いると、ベクトルポテンシャル \vec{A} に関する時間発展方程式(8-3-12)式を得ることができる。

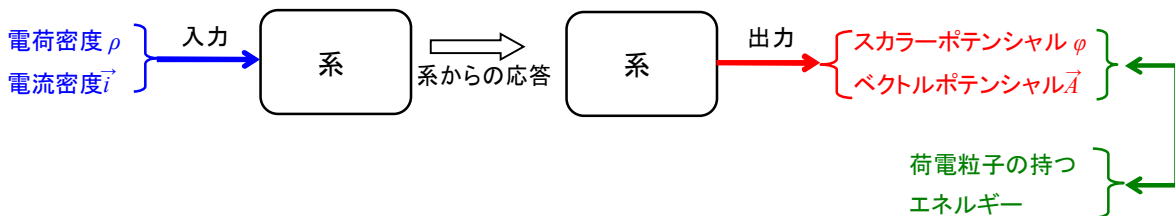
$$(8-2-15)\text{式の左辺} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) / \mu = (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}) / \mu \tag{8-3-14}$$

$$(8-2-15)\text{式の右辺} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{i} - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right)$$

「左辺=右辺」と置き、変形すると下の式を得ることができる。

$$-(\nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = \mu \vec{i} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \tag{8-3-15}$$

(8-3-8)式と(8-3-15)式がスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル \vec{A} が満たす方程式で、この方程式を解き、2つの電磁ポテンシャルを求めることができる。2つの電磁ポテンシャルがわかれば電磁場(電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B})がわかる。この関係を図示すると下ののように表すことができ、入力する情報として「電荷密度 ρ と電流密度 \vec{i} 」で、応答して、出力は「スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル \vec{A} 」となる。また、(8-3-1)式と(8-3-5)式で示したように2つの電磁ポテンシャルは電磁場が持つエネルギーに関係しており、荷電粒子と電磁場の持つエネルギーを扱うことで系の状態を調べることができる。



マクスウェル方程式を解く代わりに、(8-3-8)式と(8-3-15)式を解き、その2つの電磁ポテンシャルを用いて系の状態(運動やエネルギーなど)を調べることになる。ただし、(8-3-8)式と(8-3-15)式は、それぞれ2つの電磁ポテンシャルを含んでいて、その解を求めることは容易ではない。そこで、2つの電磁ポテンシャルはある任意性(ある変換を行っても電磁場については変換を受けない)を持って

いるので、この性質を用いることで、方程式をより単純な形で示すことができる。この方法(ゲージ変換)について下で議論しよう。

・ゲージ変換

スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル \vec{A} は、その基準点を変えるような変換を行っても物理法則は変わらない。そのような変換を電磁気学ではゲージ変換と呼ばれる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \rightarrow (\text{変換}) \rightarrow \varphi' = \varphi + \varphi_0 \\ \vec{A} \rightarrow (\text{変換}) \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{A}_0 \end{array} \right. \quad (8-3-16)$$

逆に、この不定性を利用して、2つの電磁ポテンシャルが、ある特別な場合には、(8-3-8)式と(8-3-15)式が単純な形になり、方程式を解くことが簡単になる場合がある。ここでは、電磁場が時間に依存しない場合と依存する場合に分けて、そのような条件式(ゲージ変換を与える関数形を定めるので「…ゲージ」と呼ぶ)について考えよう。

① 電磁場が時間に依存しない場合

このとき、静電ポテンシャル φ は、その基準点を任意にとることができた(静電場 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ より、定数 c を用いて、新しい静電ポテンシャル「 $\varphi' = \varphi + c$ 」と変換しても、静電場 \vec{E} は変わらない。

静電ポテンシャル φ とベクトルポテンシャル \vec{A} が時間変化しない場合、(8-3-2)式からポアソン方程式(2-5-38)式が導出される。あるいは、電磁ポテンシャルが時間変化しない場合のほかに、下の条件式を満たす場合も同じポアソン方程式が導出できる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = 0 \quad (\text{クーロンゲージ}) \quad (8-3-17)$$

上の条件式が成立する場合(ベクトルポテンシャルが湧き出すような場所はない)を「クーロンゲージ」と呼ぶ。

さらに、このクーロンゲージを採用し、かつ電磁ポテンシャルが時間変化しないとすると、(8-3-8)式はポアソン方程式(2-5-38)式となる。さらに、(8-3-15)式に(8-3-17)式を代入すると、(8-3-18)式が導出される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{ext}}}{\epsilon} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{ポアソン方程式}) \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{i} \end{array} \right. \quad (8-3-18)$$

このように、電荷密度 ρ が与えられれば、上のポアソン方程式を解いて、静電ポテンシャル(= 時間変化しないスカラーポテンシャル) φ を求めることができる。また、(8-3-18)式は、(2-5-38)式で示されたポアソン方程式と同じ形式である。この式より、左辺に微分を含んでいるものの、ベクトルの向きを考えると、ベクトルポテンシャル \vec{A} の向きと電流密度 \vec{i} の向きは平行となる。

② 電磁場が時間に依存する場合

マクスウェル方程式の第 3 法則となる(8-2-12)式が不変となるような変換(ゲージ変換)として、下の変換を考えてみよう。ここで、関数 χ は、位置 \vec{r} と時間 t の関数で、「 $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ 」と表すことができる。ここで、恒等式「 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) = 0$ 」を用いた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \rightarrow (\text{変換}) \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \chi \\ \vec{A} \rightarrow (\text{変換}) \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \end{array} \right. \quad (8-3-19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (8-2-12) \text{式の左辺} = \vec{\nabla} \times \vec{E}' = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ (8-2-12) \text{式の右辺} = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi)) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

したがって、(8-3-19)式で示されたゲージ変換では電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} は不変となることが示された。さらに、下の条件式を満たすように2つの電磁ポテンシャルに拘束条件をつけると、(8-3-8)式と(8-3-15)式が単純な形に表すことができる。

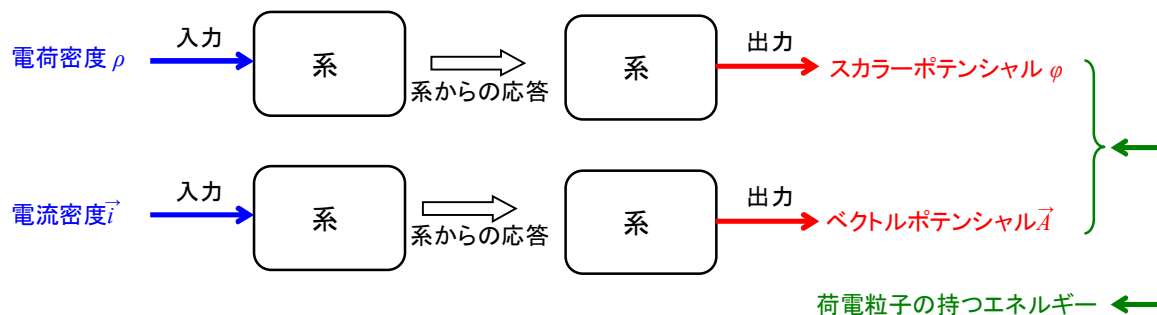
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{ローレンツ}^{10}\text{ゲージ}) \quad (8-3-20)$$

ローレンツゲージを採用すると、(8-3-8)式と(8-3-15)式は下のような似た偏微分方程式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{\rho_{\text{ext}}}{\epsilon} \end{array} \right. \quad (8-3-21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -\mu \vec{i} \end{array} \right. \quad (8-3-22)$$

ある初期条件と境界条件の下で、上の独立な2つの偏微分方程式を解き、スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \vec{A} を求めることで電磁場の空間・時間依存性を議論することができ、電磁場と荷電粒子の間の相互作用について扱うことができる。



8-4. 電磁波(Electromagnetic wave)の基礎 (時間的な余裕がない場合は省略してよい)

マクスウェルは4つのマクスウェル方程式を提案したが、さらに、マクスウェルは電場と磁場が絡まりあって進む**電磁波**の存在を予言した。ここでは、電荷と電流ともに存在しない真空中で伝搬する電磁波について考えてみよう。電荷と電流がないことを(8-4-1)式で示し、真空中の電磁場を扱うことを(8-4-2)式で示す。

$$\rho = 0, \quad \vec{i} = 0 \quad (8-4-1)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (8-4-2)$$

上の2つの条件を4つのマクスウェル方程式に代入すると、下の4つの式を得ることができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad (8-4-3)$$

¹⁰ ローレンツゲージ(Lorenz Gauge)に出てくるローレンツはローレンツ力(Lorentz Force)などのローレンツとは別人なので注意すること(スペルも異なる)。ローレンツゲージのローレンツはデンマークの19世紀の物理学者で Ludvig V. Lorenz である。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8-4-4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8-4-5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8-4-6)$$

上の式を変形して波の時間発展を表す偏微分方程式を導出する。その前に波(特に正弦波)の性質について簡単に復習する。

* 波(特に正弦波)の復習

三角関数(サイン関数, コサイン関数)を用いて, 波の変位 f を位置 x , 時刻 t の関数として表すことができる波を一般に正弦波と呼ぶ。波の波長 λ , 周期 T , 波の振幅 A とすると $+x$ 方向に進む正弦波における波の変位 f は, 下のいずれかの式で表すことができる(ここでは, 初期位相 θ_0 を無視した)。

$$f = A \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}, \quad A \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}, \quad A \exp \left\{ i 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\} \quad (8-4-7)$$

上の3つの式の中で3番目の式はオイラーの公式「 $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ 」を用いると, コサイン関数とサイン関数で表すことができる。3番目の式は指数(exponential)関数を用いているが, その実部(Real Part)か虚部(Imaginary Part)をとって, コサイン関数かサイン関数(ともに正弦波を表す関数)で正弦波を表すことができる。以下では, 有用なことが多いので, 3番目の指数(exponential)関数の式を用いて正弦波を表すこととする¹¹。

波の進む速さを v とすると, 波は1回振動する間(周期 T)に1波長 λ だけ進むので, 下の関係式が成り立つ。

$$v = \frac{1 \text{ 回振動する際に進む距離}}{1 \text{ 回の振動に要する時間}} = \frac{\lambda}{T} \quad (8-4-8)$$

次に, 先験的に, 下の偏微分方程式を与え, その解を考えてみよう。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \quad (8-4-9)$$

上の偏微分方程式の解の1つとして(8-4-7)式, すなわち「 $f = A \exp \left\{ i 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}$ 」になっていることを示そう。この式を上のに代入すると, 下の式が得られ, 計算すると最終的に(8-4-8)式を満たしていることがわかる。つまり, (8-4-7)式は(8-4-9)式の(1つの)解となっている。(8-4-9)式で表される偏微分方程式は**波動方程式**と呼ばれる。

$$\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 f = \frac{1}{v^2} \left(i \frac{2\pi}{T} \right)^2 f \rightarrow \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{T} \right)^2 \rightarrow v^2 = \left(\frac{\lambda}{T} \right)^2 \rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

波数 $k = 2\pi/\lambda$, 角周波数(角速度) $\omega = 2\pi/T$ として定義すると, (ある1つの)解 f は下の式で表すことができる。

$$f = A \exp \{ i (\omega t - kx) \} \quad (8-4-10)$$

また, 角周波数(角速度) ω と波数 k の間の関係(分散関係)は下の式で表される。

¹¹ 実際に扱うときは, その実部か虚部の一方を採用する。

$$\omega = v k \quad (8-4-11)$$

(8-4-6)式に対し、両辺でさらに1階の時間微分をとり、その左辺に(8-4-5)式を代入する。

$$\text{左辺} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (8-4-12)$$

$$\text{右辺} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8-4-12)'$$

(8-4-12)式について、(8-3-13)式を用いて整理し、(8-4-3)式を用いると、電場 \vec{E} に関する波動方程式を得ることができる。

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8-4-13)$$

同様に、(8-4-5)式に対し、両辺でさらに1階の時間微分をとり、その左辺に(8-4-6)式を代入し、(8-4-4)式を用いると、磁束密度 \vec{B} に関する波動方程式を得ることができる。

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (8-4-14)$$

電磁波は電場と磁束密度(磁場)が空間変化、および時間変化しながら(別に表現すると、電場と磁束密度(磁場)が絡まりあいながら)、進む波である。ここでは、電磁波として、簡単のために $+x$ 方向に進む三角関数を用いて表現できる平面波について、その基本的性質について調べよう。この場合、電場も磁束密度も $+x$ 方向に進むので、平面波は、下の式のように、位置 x と時間 t に関する関数¹²として指数関数を用いて表すことができる(実際は、三角関数として、下の式の実部、または虚部をとる)。

$$\vec{E}(x, t) \sim e^{i(\omega t - kx)}$$

さらに、上の式において、電場 $\vec{E}(x, t) = (E_x, E_y, E_z)$ について、位置 x と時間 t によらない(三角関数以外の)電場の部分を $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ とすると、下の式のように表すことができる。

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (8-4-15)$$

空間に真電荷がない場合は「ガウスの法則」である(8-4-3)式の条件がなりたつので、下の式のように電場 \vec{E} の x 成分(電磁波の進行方向と同じ向きの成分)はない。

¹² $+x$ 方向に電磁波が進むので、電磁波の変位の位置(場所)の依存性は、3次元空間の位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ の3成分でなく、その中の x 成分(1成分)のみの関数となる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \rightarrow -ik E_{0x} + 0 + 0 = 0 \rightarrow E_{0x} = 0 \quad (8-4-16)$$

したがって、電場の波はその進行方向と垂直成分のみが存在するので、**横波**となる(磁場の波も横波である)。

$$\vec{E}(x, t) = (0, E_{0y}, E_{0z}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (8-4-17)$$

さらに、 yz 平面上で電場が z 方向のみの振幅を有するような回転変換を施すとなると、電場 \vec{E} は下の式のように z 成分のみ用いて表すことができる。

$$\vec{E}(x, t) = (0, 0, E_0) e^{i(\omega t - kx)} = E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t - kx)} \quad (8-4-18)$$

このとき、波動方程式(8-4-13)式は、下の偏微分方程式(8-4-13)'式となり、(8-4-9)式と比較することで、真空中で電場の進む速さ v が真空の誘電率 ϵ_0 と帯磁率 μ_0 を用いて、(8-4-19)式のように表すことができる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (8-4-13)'$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8-4-19)$$

電磁波の進む速さは実験によると、光の速さと同じであり、光も電磁波の1種であることが分かった。電磁波はその波長 λ 、または周波数 f (周期 $T=1/f$) の違いで分類される。波長が長い順から、電波、赤外線、光(赤色、橙色、黄色、黄緑色、緑色、青色、紫色)、紫外線、X線、 γ 線などと呼ばれる。これらの電磁波は真空中ではすべて同じ速さで、一般に光が真空中を進む速さを c で表す。(8-4-8)式は「 $c = \lambda/T$ 」で、(8-4-11)式「 $\omega = ck$ 」と表すことができる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85419 \times 10^{-12} \text{ F/m} \times 1.25664 \times 10^{-6} \text{ H/m}}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (8-4-20)$$

* 単位について

コンデンサの静電容量 C の単位は F(ファラッド)で、「 $Q = CV$ 」より、 $F = C/V = \text{A s/V}$ となる。

コイルのインダクタンス L の単位 H(ヘンリー)で、「 $V = -L dI/dt$ 」より、 $H = \text{V s/A}$ となる。したがって、

$F(\text{ファラッド}) \times H(\text{ヘンリー}) = \text{s}^2$ となる。

電場 \vec{E} が(8-4-18)式で表されるとすると、(8-4-5)式より、磁束密度の時間変化は下のように計算できる。

$$(8-4-5) \text{ 式の左辺} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times E \vec{e}_z = \vec{e}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\vec{e}_y i k E_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (8-4-21)$$

$$(8-4-5) \text{ 式の右辺} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8-4-22)$$

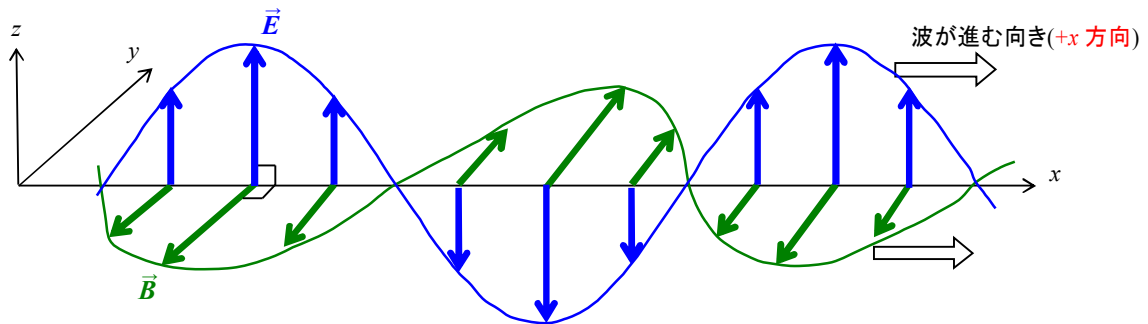
上の2つの式が矛盾のないようにすると、磁束密度 \vec{B} は y 成分のみを持つ。

$$\vec{B} = (0, B_0, 0) e^{i(\omega t - kx)} = B_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - kx)} \quad (8-4-23)$$

(8-4-23)式を(8-4-22)式に代入して、(8-4-21)式と比べると、磁束密度の振幅 B_0 は、電場の振幅 E_0 を用いて下の式のように表すことができる。

$$k E_0 = -\omega B_0 \rightarrow E_0 = -c B_0 \rightarrow B_0 = -\frac{E_0}{c} \quad (8-4-24)$$

電場 \vec{E} を(8-4-18)式のようにその向きを $\pm z$ 方向と定めると、磁束密度 \vec{B} の向き(8-4-23)式で表され、電場の向きと直行している。下に電磁波が進む様子を図に示す。電場 \vec{E} は $\pm z$ 方向に向き、磁束密度 \vec{B} は $\pm y$ 方向に向き、 yz 平面で変位が大きくなったり小さくなったりして、(波として) $+x$ 方向に進む。つまり、波の波面としては、 yz 平面(yz 平面を平面波として)で $+x$ 方向に進む。磁束密度 \vec{B} の向きは、電場 \vec{E} を、進行方向(ここでは $+x$ 方向)に対し、右ネジの法則にしたがって 90° 回転させる向きとなる。



* 電磁波の進行方向の一般化

電磁波が進む向きが $+x$ 方向でなく、一般的な向き(ただし、平面波)に進む場合について考えよう。電磁波の進行方向に平行な波数ベクトル $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ を導入する。波数 k は波数ベクトルの大きさを、 $k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\lambda$ とする。波数ベクトル \vec{k} 方向に進む平面波としての電場 \vec{E} は下の式のように表す。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad (8-4-25)$$

このとき、(8-4-13)式から、下の式が成り立つ。

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow \omega = c k \quad (8-4-26)$$

(8-4-3)式からは、「 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} = 0$ 」がその条件式として成り立ち、電磁波の進行方向(波数ベクトル \vec{k} と同じ向き)と電場の向きは直行する。すなわち、**電磁波は横波**となる。

* 波の変位を表す関数(三角関数、指数関数)に関する注意(省略してよい)

(8-4-13)式で表される波動方程式は空間・時間に関する 2 階の微分方程式となる。この方程式の解は指数関数を用いて、(8-4-15)式や(8-4-25)式のように表すことができた。その一方、空間と時間をともに反転させた次の式も解と

なる.

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (8-4-27)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad (8-4-28)$$

波動方程式の解としては、上の 2 つの式でも(8-4-15)式や(8-4-25)式でも構わないが、上の 2 つの式では位相角が時間経過とともに減少する(位置 x が増加すると位相角は増加する). つまり、(8-4-15)式や(8-4-25)式で表した場合と比べて、位相角の増減が逆転する.

一般的に波の変位の位相部分を表す式として、主に、物理系では(8-4-27)式や(8-4-28)式のように表す. 一方、光学、電波光学の分野では(8-4-15)式や(8-4-25)式のように表す. この関数形の違いは次の節で議論する「偏光(偏波)」や電磁場の空間・時間依存性に影響を与える. 量子力学において、有名なシュレディンガー方程式は、波動関数として、(8-4-27)式や(8-4-28)式を基にして作られた. 下に、ポテンシャルエネルギーがない場合、1 次元を運動する量子に対するシュレディンガー方程式を導出しよう.

ある量子の波動関数 ψ として、(8-4-27)式と同じ関数形を持つ下の式を採用しよう.

$$\psi(x, t) \sim e^{i(kx - \omega t)} \quad (8-4-29)$$

アインシュタインの量子仮説によると、1 個の量子が持つエネルギー ε は、波の角周波数 ω と(プランク定数 $h = 6.62607 \times 10^{-34} \text{ J s}$ を基にした)デイラック定数(換算プランク定数とも呼ばれる) $\hbar = h/(2\pi)$ を用いて、「 $\varepsilon = \hbar \omega$ 」と関係づけられるとした. 一方、ド・ブローイは物質波の波数 k を用いて物質波(量子)が持つ運動量 p は、「 $p = \hbar k$ 」と関係づけられるとした. この 2 つの関係式を満たすように上の波動関数 ψ に対して、微分演算子を用いることで下の 2 つの式が成り立つ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \psi = \hbar \omega \psi & \rightarrow (\text{微分演算子 } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ を用いる}) \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hbar \omega \psi \end{array} \right. \quad (8-4-30)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p \psi = \hbar k \psi & \rightarrow (\text{微分演算子 } -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \text{ を用いる}) \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = \hbar k \psi \end{array} \right. \quad (8-4-31)$$

さらに、1 次元の自由粒子(ポテンシャルエネルギーがない)において、(運動)エネルギー ε は、粒子の質量 m と運動量 p を用いて、「 $\varepsilon = p^2/(2m) = (\hbar k)^2/(2m)$ 」と表すことができ、上の 2 つの式と同様に、微分演算子を用いて表すと下の式のようなシュレディンガー方程式が得られる.

$$\varepsilon \psi = \frac{p^2}{2m} \psi \rightarrow (\text{微分演算子を用いる}) \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \quad (8-4-32)$$

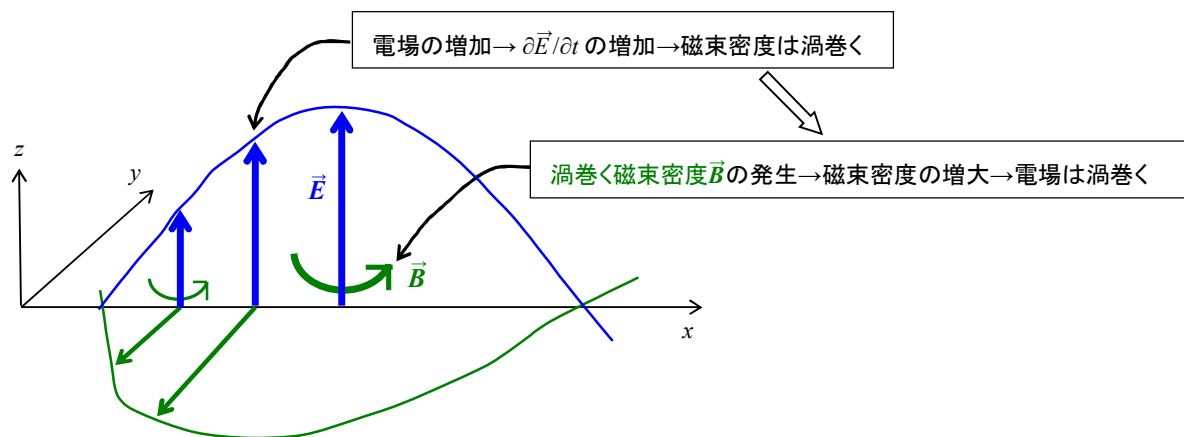
さらに、上の式の右辺のエネルギー項に対し、位置 x の関数となるポテンシャルエネルギー $U(x)$ も加え、微分演算子で表したハミルトニアン $\mathcal{H} (= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x))$ を用いると、有名な**シュレディンガー方程式**が得られる.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H} \psi \quad (8-4-33)$$

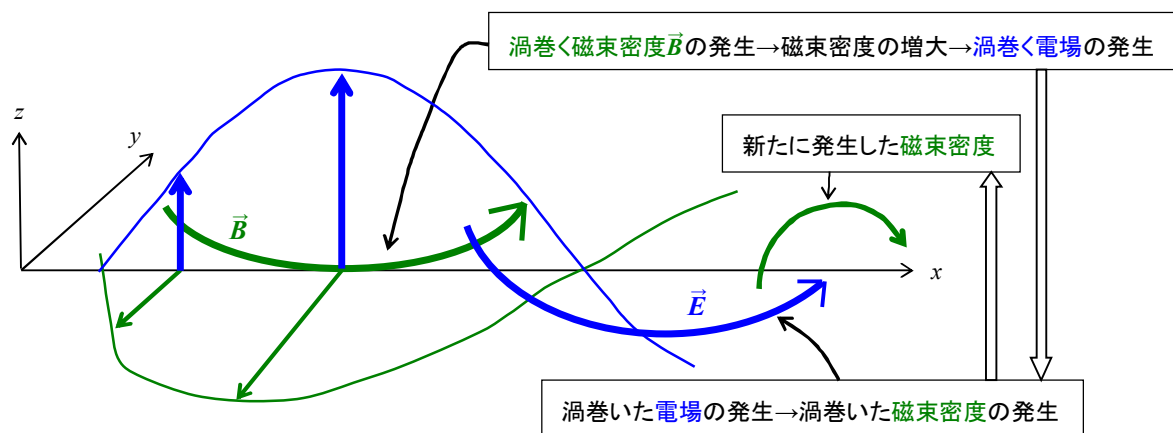
・電磁波の伝搬の仕組

電磁波が伝搬する仕組みを見てみよう.

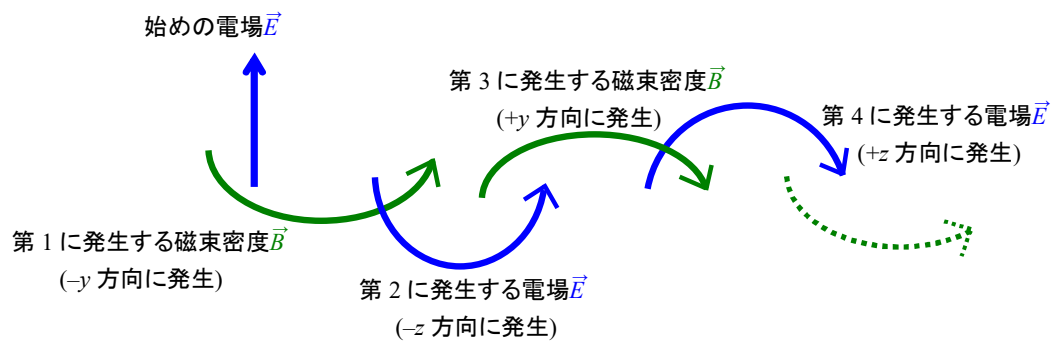
始めに電場 \vec{E} がサイン関数に従って $+z$ 方向に増加するとしよう. そのとき、 $\partial \vec{E} / \partial t$ は正で、第 4 のマックスウェル方程式(8-4-6)式より、磁束密度 \vec{B} が発生し、 xy 平面上で**磁束密度 \vec{B} が渦巻く**. そして、結果として、 $-y$ 方向に磁束密度 \vec{B} が増大する.



次に、渦巻いた磁束密度 \vec{B} の発生により、第4のマックスウェル方程式(8-4-5)式に従って、渦巻く電場 \vec{E} が発生する。このときは結果として、 $-x$ 方向に電場 \vec{E} が増大する。



まとめて表すと下の図のように、電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} が鎖のように互いに絡まりあいながら、 $+x$ 方向に進む。



* スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \vec{A} を用いた波動方程式
真空中における電磁場の伝搬について、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いて考えてみよう。

電磁場は空間的・時間的に変化するの、ローレンツゲージを採用する。ローレンツゲージを採用すると、スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル \vec{A} に対し、(8-3-21)式と(8-3-22)式から、真空中でなおかつ、電荷密度と電流密度がない場合は、下の式を得ることができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (8-4-34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad (8-4-35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{ローレンツゲージ}) \end{array} \right. \quad (8-4-36)$$

さらに、(8-3-19)式で表したゲージ変換「 $\varphi' = \varphi - \partial\chi/\partial t$, $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ 」を用いると、(8-4-34)式と(8-4-35)式の右辺が「0」になっているので、新しいスカラーポテンシャル $\varphi'(\vec{r}, t)$ を「0」とする変換を行うことにする¹³。

$$\varphi'(\vec{r}, t) = 0 = \varphi - \partial\chi/\partial t \quad (8-4-37)$$

このとき、新しいスカラーポテンシャル $\varphi' = 0$ 、なので、電場 \vec{E} は下の式で表すことができる。

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (8-4-38)$$

そして、この場合、(8-4-36)式(ローレンツゲージ)は下の式(クーロンゲージ)に移行する。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0 \quad (8-4-39)$$

ここで、新しいベクトルポテンシャル \vec{A}' が満たす方程式「 $(\nabla^2 - (1/c^2) \partial^2/\partial t^2) \vec{A}' = 0$ 」は変わらない。電磁ポテンシャルが、 $+x$ 方向に伝搬すると仮定し、ベクトルポテンシャル \vec{A} の振幅 $\vec{A}_0 = (A_{0x}, A_{0y}, A_{0z})$ とすると、(8-4-39)式より下の条件式を得ることができる。

$$ik A_{0x} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{0x} = 0 \quad (8-4-40)$$

上の式より、ベクトルポテンシャル \vec{A} も横波で、(8-4-38)式より、電場 \vec{E} はベクトルポテンシャル \vec{A} の向きと平行で、磁束密度 \vec{B} はベクトルポテンシャル \vec{A} と直行する。電磁波はベクトルポテンシャル \vec{A} が波となって進み、時間変化から電場 \vec{E} が、空間変化(渦巻くこと)から磁束密度 \vec{B} が発生する。

・物質中を進む電磁波の進む速さ

物質内における誘電率 ε と透磁率 μ は、真空中における誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 、および、電気感受率 χ_e と電気感受率(磁荷率、または帯磁率とも呼ばれる) χ_m を用いると、(3-4-6)式と(5-3-5)式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon := \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \end{array} \right. \quad (3-4-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu := \mu_0 (1 + \chi_m) \end{array} \right. \quad (5-3-5)$$

¹³ ゲージ変換に関する関数 χ について、「 $(\nabla^2 - (1/c^2) \partial^2/\partial t^2) \chi = 0$ 」を満たす関数 $\chi(\vec{r}, t)$ を選ぶと、新しいスカラーポテンシャル φ' として任意の位置 \vec{r} と時刻 t に関して、 $\varphi'(\vec{r}, t) = 0$ と選ぶことができる。

実験により、物質中では一般に、「 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 」, 「 $\mu > \mu_0$ 」と観測されているので、物質内を光が伝わる速さ v は真空中で光が伝わる速さ c に比べて遅い¹⁴。

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} < c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (8-4-41)$$

また、物質内における誘電率 ε と透磁率 μ は、一般には物質の性質と伝わる電磁波の周波数 f (あるいは、角周波数 ω) に依存する。

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega) \quad (8-4-42)$$

したがって、物質中の電磁波の進む速さ v は、物質の物性と電磁波の角周波数 ω に依存する。

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} \quad (8-4-43)$$

8-5. ポインティングベクトル(Poynting vector)

電磁場のエネルギーの流れを考えてみよう。電磁場が持つポテンシャルエネルギー U は、(8-3-1)式で表された電場が持つポテンシャルエネルギー U_e と(8-3-5)式で表された磁場が持つポテンシャルエネルギー U_m の和となる。

$$U = U_e + U_m = \frac{1}{2} \int (\vec{D} \cdot \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (8-5-1)$$

対象としている系の体積 V が一定となるとき、ポテンシャルエネルギー U の時間微分は下の式で表される、さらに、右辺にマクスウェル方程式の第3法則(8-2-12)式と第4法則(8-2-15)式を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \int \left\{ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV \\ &= \int \left\{ (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{i}) \cdot \vec{E} - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right\} dV \\ &\quad (\text{ベクトル公式(8-3-3)式より次のように変形できる} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})) \\ &= - \int \left\{ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{i} \cdot \vec{E} \right\} dV \end{aligned}$$

ガウスの定理より、上の式の右辺の第1項について、表面積分で表すと下の式のように表すことができる。

$$\frac{dU}{dt} = - \int_{\text{曲面 } S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \int (\vec{i} \cdot \vec{E}) dV \quad (8-5-2)$$

あるいは、右辺の第2項を移項して下の式を得ることができる(領域の境界面と法線ベクトルを \vec{n} 、微小面積要素を dS とした)。

$$\int (\vec{i} \cdot \vec{E}) dV + \frac{dU}{dt} = - \int_{\text{曲面 } S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS \quad (8-5-3)$$

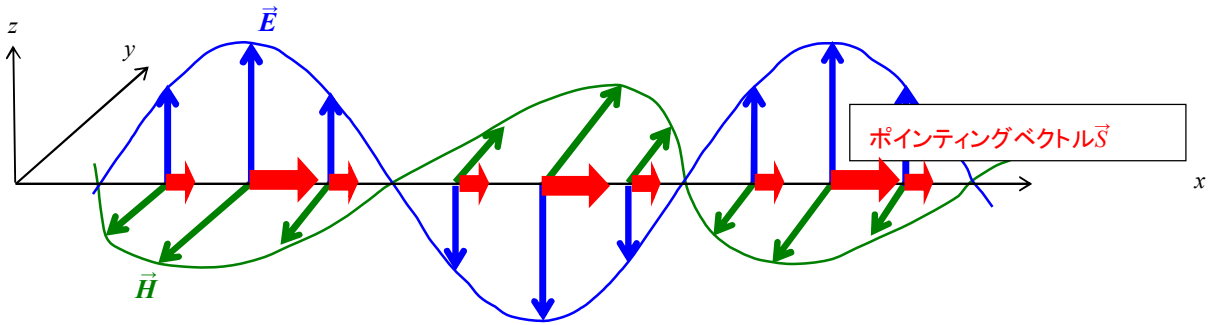
¹⁴ 波の進む速さが異なる境界面において、その進む向きが変化すると、いわゆる「屈折現象」が起きるが、ここでは扱わない。9章で扱う予定である。

(8-5-3)式における被積分関数(電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} の外積)をポインティングベクトル \vec{S} と呼ぶ¹⁵.

$$\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}$$

(8-5-4)

上の式から、ポインティングベクトル \vec{S} の向きは電場の向き、および磁場の向きと直行する。また、ポインティングベクトル \vec{S} の進む向きは電磁波の進む向きと同じ向きになる。また、ポインティングベクトル \vec{S} の単位は「W(ワット)/m²」である。



ここで、(8-5-3)式における左辺の第1項目について考えてみよう。

ある領域内にある j 番目の電荷 q_j を持つ荷電粒子が速度 \vec{v}_j で動いているとすると、電流密度 \vec{i} は領域内の体積 V として、下の式のように表すことができる(荷電粒子が全て同じ電荷 q を持ち、粒子数密度 $n = N/V$ とすると、電流密度 \vec{i} は「 $\vec{i} = nq\vec{v}$ 」と表すことができる。また、電荷密度 ρ は「 $\rho = nq$ 」となる)。

$$\vec{i} = \frac{1}{V} \sum_j q_j \vec{v}_j \quad (8-5-5)^{16}$$

一方、領域内の荷電粒子の全運動エネルギー K の単位時間当たりの増加を計算する(ここで、 j 番目の(質量 m_j の)荷電粒子(質量 m_j の)は電磁場からローレンツ力 $\vec{F}_j = q_j (\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B})$ を受けることに注意する)と下の式のように、(8-5-3)式の第1項となる。

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_j m_j v_j^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j) \right) = \sum_j \vec{v}_j \cdot m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \sum_j \vec{v}_j \cdot \vec{F}_j = \sum_j \vec{v}_j \cdot q_j \vec{E} \\ &= \sum_j q_j \vec{v}_j \cdot \vec{E} = \int (\vec{i} \cdot \vec{E}) dV \end{aligned} \quad (8-5-6)$$

すなわち、(8-5-3)式について、言葉を使って示すと下の式で表すことができる。

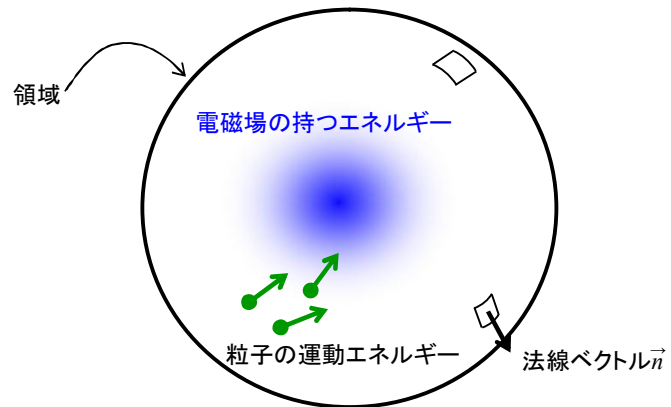
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\text{領域内の荷電粒子がもつ全運動エネルギー} + \text{領域内の電磁場が持つポテンシャルエネルギー}) \\ &= \text{領域内のエネルギーの時間変化} = - \int_{\text{曲面} S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (8-5-7)$$

¹⁵ ポインティング(John H. Poynting)はイギリスの19世紀末-20世紀初頭の物理学者である。

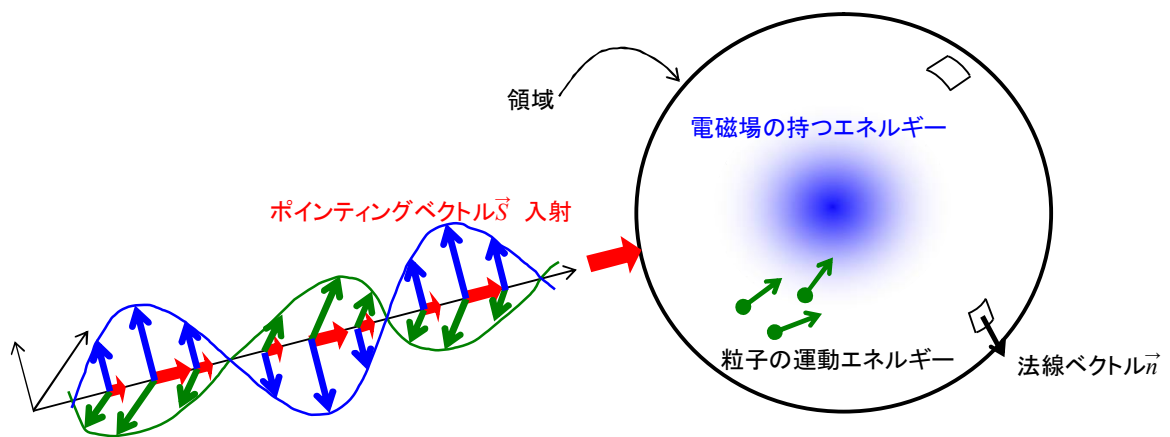
¹⁶ 荷電粒子の電荷 q_j や速度 \vec{v}_j は位置 \vec{r} と時刻 t の関数となるので、「電流密度 $\vec{i} = \vec{i}(\vec{r}, t)$ 、電荷密度 $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ 」である。

上の式は領域内にある荷電粒子の全運動エネルギーと電磁場のエネルギーを増加させるには、領域外から(領域の微小面積要素 $d\vec{S}$ の法線ベクトル \vec{n} と逆向きの)ポインティングベクトル $\vec{S} (= \vec{E} \times \vec{H})$ が領域内に入射する必要がある。その様子を下の図に示そう。

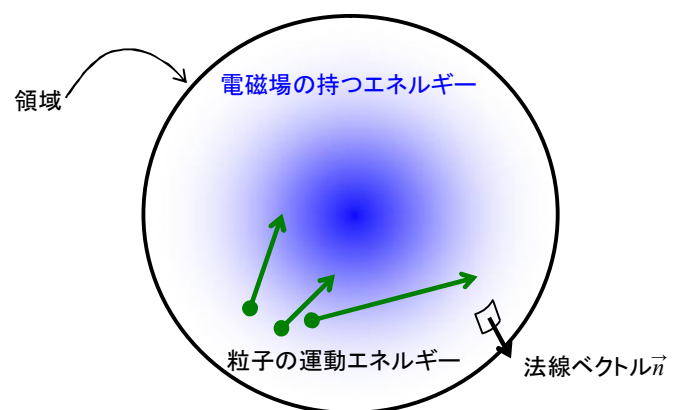
1) 始め



2) 領域内に電磁波(ポインティングベクトル $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$)入射



3) 領域内のエネルギー増加



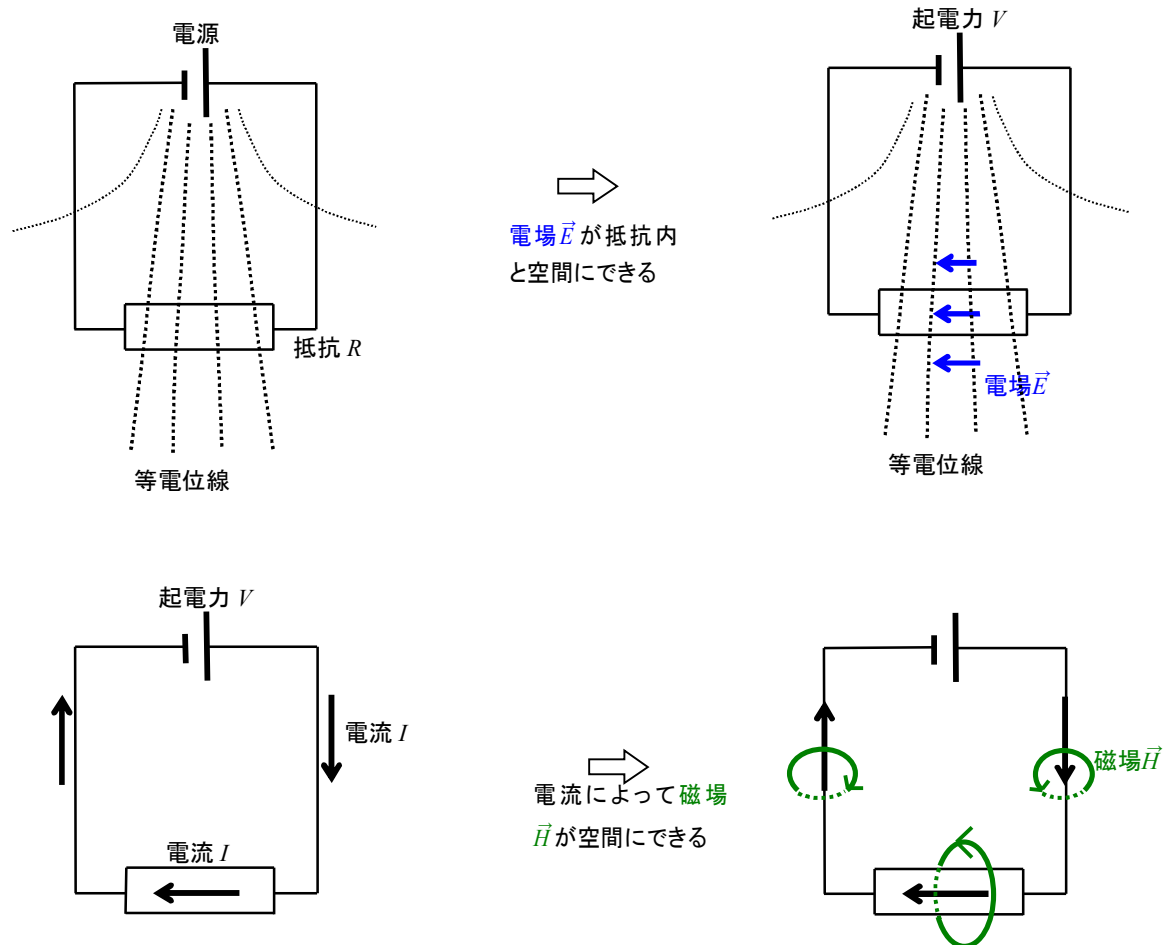
・直流電源に抵抗をつないだときのポインティングベクトル

直流電源(電池)¹⁷に導線と抵抗 R をつないで**定常状態**になったとき、抵抗への電気エネルギーの流れについて、ポインティングベクトルの観点から考えてみよう。

下の図のように、起電力が発生している電池から空間に向けて等電位線(点線で図示した。導線中は伝導率が高いので少ない数の等電位線が導線を横切るとした。電源につながれた2本の導線の間には電位差 V が発生)ができ、等電位線と直交する向きに電

¹⁷ ここでは電池の内部抵抗を無視する。

場 \vec{E} ができる。また、導線と抵抗内に定常電流 I が流れ、そのまわりにアンペールの法則に従う磁場 \vec{H} ができる。

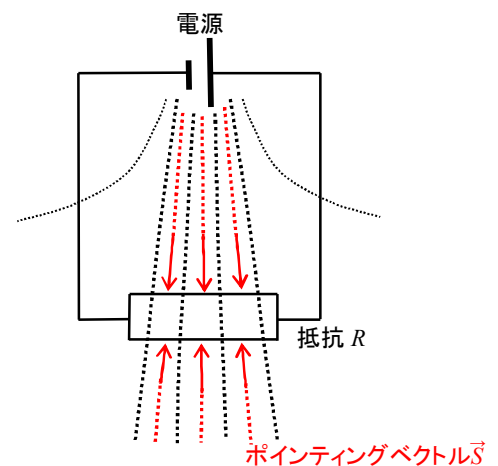


次に、抵抗のまわりの空間にできた電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} によってできるポインティングベクトル $\vec{S}(=\vec{E} \times \vec{H})$ について、下の図に示す。



回路全体でみると、上の右の図に示したように、抵抗の周囲の空間から抵抗に入るようにポインティングベクトル \vec{S} が向かう。これは、電源から出た電気エネルギーが空間を伝わり、抵抗に侵入し、そこで電気エネルギーが消費されることを意味する(電気エネルギーは導線を伝わるのではなく空間を伝わって抵抗に侵入する)。

抵抗で消費される電力 $P = IV$ とポインティングベクトル \vec{S} で運ばれる単位時間当たりの電気エネルギーは等しくなることを確認しよう。ここでは、半径 r 、長さ d の円柱状の抵抗を扱う。抵抗内部やその近傍における電場の大きさ E はほぼ一定で、電位差 V 使うと「 $E = V/d$ 」であり、また、円柱状の抵抗の円の中心から距離 r だけ離れた抵抗表面における磁場の大きさ H は、「 $H = I/(2\pi r)$ 」である。円柱状の抵抗の表面の法線ベクトル \vec{n} とポインティングベクトル \vec{S} は逆向きなので、この抵抗に入射するポイ



ンティングベクトルの面積分となる(8-5-7)式の右辺(抵抗に入射する単位時間当たりの電気エネルギー)は下のように計算できる。

そして、これがは電流の消費電力 P と等しい。ポインティングベクトルで入射した電気エネルギーは、最終的には抵抗内にある不純物原子や原子・分子の熱振動に変換される。

$$-\int_{\text{曲面 } S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS = E H (2\pi r d) = \frac{V}{d} \frac{I}{2\pi r} (2\pi r d) = V I \rightarrow P = I V \quad (8-5-8)$$

* 電池に抵抗をつなぎ、スイッチをオンにした直後の伝わり方

電池を抵抗につなぎ、その間にあるスイッチがオフになった状態から始めよう。このとき、導線と抵抗の内部にある電気は放電していて、電位は 0 になっているものとする。電池の一方の電極には電池内で分離した正の電気が、もう一方の電極には負の電気が存在するため、電池は起電力 V を持っている。また、ここでは、電池と抵抗の間の距離を 3.0 m と仮定する(そう仮定すると、電源(電池)から抵抗まで、電磁波が進むのにおよそ 10 ns(ナノ秒) かかる)。

次にスイッチをオンにしてみよう。

スイッチをオンにすると、電池の正の電極そばの導線の電荷分布 ρ は時間変化(電荷が 0 から正の値になるように時間的なステップ関数)

する。正の電極側につながった導線内で、電位が 0 から正の値に遷移しようとする、この際、電位 ϕ は(8-3-21)式に従うような空間変化と時間変化して伝搬する(つまり、電磁波として空間に広がり、伝搬する)。ただし、導線では電位がほぼ一定という境界条件を満たすように、電位(電場)と磁場の波(電磁波)が空間に広がる(電場が時間変化すると磁場や電流ができる)。

5 ns 経過したときは、導線の中間部まで電位が変化し(電位の変化は空間を伝わり、0 から有限な値に変化する)、電場も 0 から有限な値に変化して、電流が導線内を流れる。その際、電位が伝わった先の導線の間には下の左の図のように変位電流 I_d が流れる(時間変化する電場によって変位電流が発生し、電流連続の法則を満たす)。

10 ns 経過すると、抵抗まで電磁波が届き、ポインティングベクトルで電気エネルギーを電池(電源)から抵抗へ輸送することができるようになる。

