

## 7. 電磁誘導

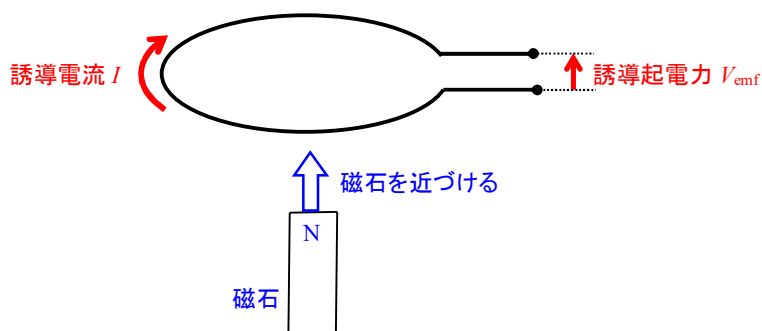
これまで、電荷・磁荷が静止した状態での電場・磁場、および定常電流(時間変化しない電流)が作る磁場に関する物理法則について学んだ。この章では、磁場が時間変化する場合に発生する起電力(電場)との関係を示す法則を紹介する。次に、電流が時間変化する場合、ここでは特に交流の電気回路の特性について学ぶ。

### 7-1. 電磁誘導の法則

6 章では、「アンペールの法則」、すなわち、電流によって磁場が生じることを学んだ。これとは逆に、19 世紀イギリスの物理学者ファラデー<sup>1</sup>は、「磁場から電流を発生させることができないかどうか」予想し、実験を行って、その予想を確認した。

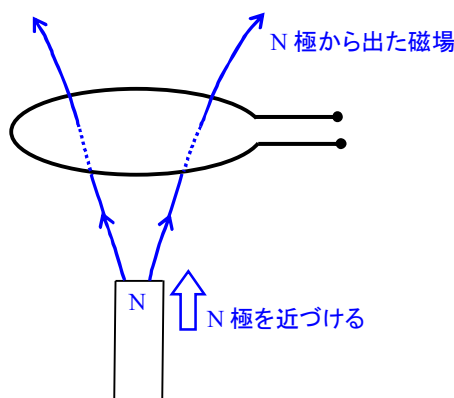
ファラデーは、2 つのコイルを用意し、一方のコイルに電流を流すためのスイッチを入れたり、切ったりしたとき(このとき、コイルで発生する磁場が時間変化する)、瞬間的に他のコイルに電流が流れることを発見した。さらに、その他のいくつかの実験から、ファラデーは「**コイルを貫く磁束が時間によって変化する場合に、電流を流す起電力が発生する**」と結論づけた。この法則をファラデーの「**電磁誘導の法則**」と呼ぶ。

ファラデーの電磁誘導の法則について説明しよう。下の図のように、棒磁石と 1 つのコイルを用意し、棒磁石の N 極をコイルに近づけると、棒磁石が作るコイルを貫く磁束、さらにコイルを貫く磁束が増大(時間変化)する。このとき、コイルには電流(誘導電流) $I$ が発生し、コイルの両端に誘導起電力(Electro-motive force) $V_{\text{emf}}$ が発生することを観測した。



この「電磁誘導の法則」の現象を数式化してみよう。また、誘導電流が発生する向き(時計回りか、反時計回りかを)を与える法則を「**レンツの法則**」と呼ぶ。誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  が発生する過程を下図に示す。

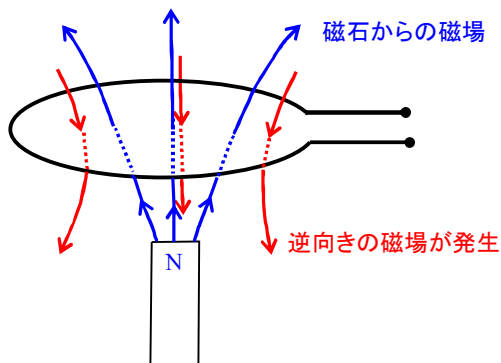
- ① N 極をコイルに近づける(→ コイルを貫く磁束<sup>2</sup>が増加する)



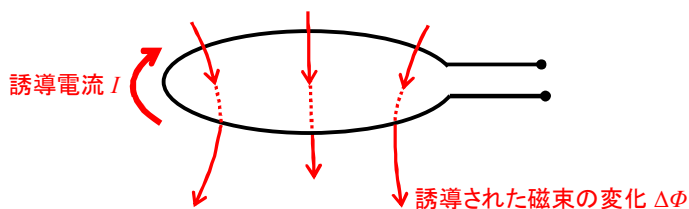
<sup>1</sup> ファラデー(Michel Faraday)は 19 世紀のイギリスの物理学者・化学者で、電磁気学や電気化学に多大な貢献をした。電磁気学では電場の概念を確立し、電気力が電場(電気力線)による近接作用であることを提唱した。電磁誘導の法則は 1831 年に行った複数の実験によって発見された。ファラデーの名はコンデンサの電気容量の単位 F(ファラッド)や電気化学におけるファラデー定数にも使われており、電磁気学の発展・理解に最も貢献した物理学者の 1 人である。

<sup>2</sup> 磁束  $\Phi$  は(5-3-7)式で定義した。

- ② 磁石から出た磁場(磁束)を打ち消しあう(逆向きの)磁束が発生



- ③ 磁石から出た磁束と打ち消しあう(逆向きの)磁束が生じることで、アンペール(右ネジ)の法則に従う電流(誘導電流)が発生



- ④ 誘導電流が発生し、正の電荷が電流の向きに動き電位が高くなり<sup>3</sup>、誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  がコイルの両端に発生(コイルの両端に回路をつなぐと回路には電流が流れる)



5章の(5-3-7)式で磁束  $\Phi$  を定義したが、棒磁石を動かすことで、コイルを貫く磁束が変化し、誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  が発生する。「電磁誘導の法則」は下の式で表すことができる。

$$V_{\text{emf}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - (\text{磁束の時間変化}) = - \frac{d}{dt} \int_{\text{コイル内}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (7-1-1)$$

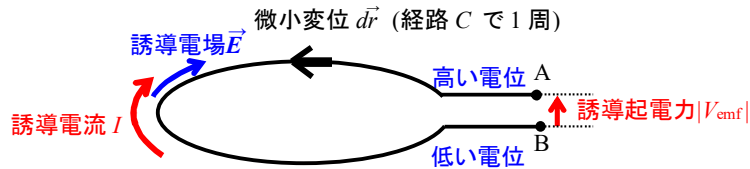
上の式の右辺での「 $-$ (負の符号)」が起電力の発生する向きを示す「レンツの法則」を表している。さらに、コイルの巻き数  $N$  となる場合は、誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  も下の式のように  $N$  倍となる。

$$V_{\text{emf}} = - N \frac{d\Phi}{dt} \quad (7-1-2)$$

<sup>3</sup> 高い電位となる電極は電池(電池は起電力を持っている)に対応させると、正の電極に相当する。

## ・誘導起電力と誘導電場

電磁誘導の法則では、誘導電流が発生し、電流と同じ向きに正の電荷が移動し、移動した電荷によって起電力、すなわち誘導起電力が生じる。ファラデーは、これを**誘導電場** $\vec{E}$ ができるので誘導起電力が発生すると考えた。図のようにコイルの上側を点 A、下側を点 B とすると、コイルに沿って図のように、誘導電場について、経路 C に沿って 1 周する線積分を行うことで、下の式で表されるような**誘導起電力**  $V_{\text{emf}}$  を得ることができる。



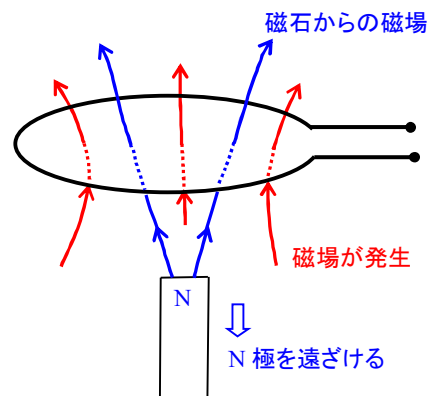
$$V_{\text{emf}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (7-1-3)$$

経路を 1 周する正の向き C は経路上を反時計まわりに回転する向きとなるので、微小変位  $d\vec{r}$  の向きは、上の図で示したように、反時計まわりの向きとなる。ここに示した例(N 極をコイルに近づけた場合)では、経路の 1 周する向き C(微小変位  $d\vec{r}$ )と誘導電場  $\vec{E}$  の向きが逆向きになっているので 1 周積分すると**負の値**となる。1 周積分が負となるので、点 A から出発し、1 周した後の点 B での電位は下がる。「A での電位  $\phi_A >$  点 B での電位  $\phi_B$ 」となるので、「**誘導起電力**  $V_{\text{emf}} = -|V_{\text{emf}}| = \phi_B - \phi_A < 0$ 」となる。

点 A と点 B の 2 点から導線で抵抗を含んだ回路につなぐと、起電力  $V_{\text{emf}}$  があることで「点 A → 回路 → 点 B」に向けて回路内を電流が流れ、回路の抵抗で電気エネルギーが消費される。

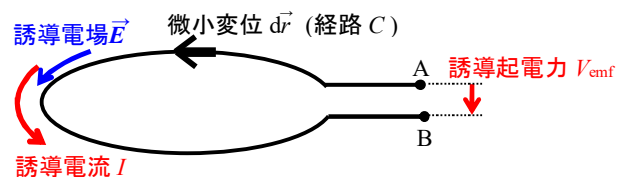
\* N 極をコイルから遠ざける場合(逆向きの起電力が発生)

コイルを貫く磁束が減少(磁束の変化  $\Delta\phi$  が負)するので、それを補うために上向きの磁場が発生



上向きの磁場ができ、反時計回りの誘導電流と誘導電場が発生し、誘導起電力が発生(反時計回りの経路 C で 1 周すると電位が上昇)

「点 A での電位  $\phi_A <$  点 B での電位  $\phi_B$ 」より、「**誘導起電力**  $V_{\text{emf}} = \phi_B - \phi_A > 0$ 」とする。



(7-1-3)式で示した誘導電場 $\vec{E}$ を用いると、ファラデーの「電磁誘導の法則」は下の式で表すことができる(電磁誘導の法則の積分形)。この式はコイル内の磁束の時間変化が電場を生じさせる原因となっていることを表している。さらに、ファラデーは場の考え方を発展させ(考え方を飛躍させ)、電場の発生は空間的な特性を表しており、必ずしも、コイルがなくともよいと考えた。また、経路 $C$ は円である必要はなく、任意の1周する閉曲線であればよい。導線となるコイルがないと誘導電流は発生しないが、誘導電場は発生するので、電磁誘導の法則の本質は誘導電場が発生することである。

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_{\text{経路}C\text{の内部}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (7-1-4)$$

\* 微分を用いた「電磁誘導の法則(ストークスの法則の適用)」(高専3年以上を対象:数学が苦手な学生は省略してよい)

(6-5-7)式で示したように、経路 $C$ に沿った線積分を面積分に変換するストークスの定理を(7-1-4)式に適用すると、下の式を得ることができる。

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路}C\text{内部の面積}S} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (7-1-5)$$

さらに、経路 $C$ とその内部の面積 $S$ が時間変化しない場合、(7-1-4)式の左辺は下の式のように変形できる。

$$- \frac{d}{dt} \int_{\text{経路}C\text{の内部}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_{\text{経路}C\text{内部の面積}S} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \quad (7-1-6)$$

磁束密度 $\vec{B}$ は空間のある位置(場所) $\vec{r}$ と時刻の関数 $t$ となるので、「 $\vec{B}=\vec{B}(\vec{r},t)$ 」と表すことができ、位置 $\vec{r}$ は時刻 $t$ の関数ではないので、磁束密度 $\vec{B}$ の全時間微分 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ は偏微分 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ と一致する( $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ )。したがって、上の2つの式に関して、被積分関数を等号で結ぶと、下の式のように「微分形の電磁誘導の法則」を得ることができる。

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則(微分形)}) \quad (7-1-7)$$

上の式で、磁束密度 $\vec{B}$ が時間変化しない場合は、「 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ 」となり、電場は1周するような渦とはならない。

\* 「誘導電場」に関する注意

「電磁誘導の法則」では、閉曲線 $C$ を貫く磁束が変化すると、閉曲線 $C$ を1周するような(渦となる)誘導電場が発生し、1周する経路 $C$ の両端に電位差が発生する。これが誘導起電力 $V_{\text{emf}}$ となる。ところで、「ガウスの法則で用いた静電場(例えば、(2-3-4)式や(2-5-3)式で表現できる電場)では、(7-1-3)式の右辺のように1周積分しても電位差は発生しない。」

\* 静電場が起電力を発生しない理由(高専3年以上を対象;数学が苦手な学生は省略してよい)

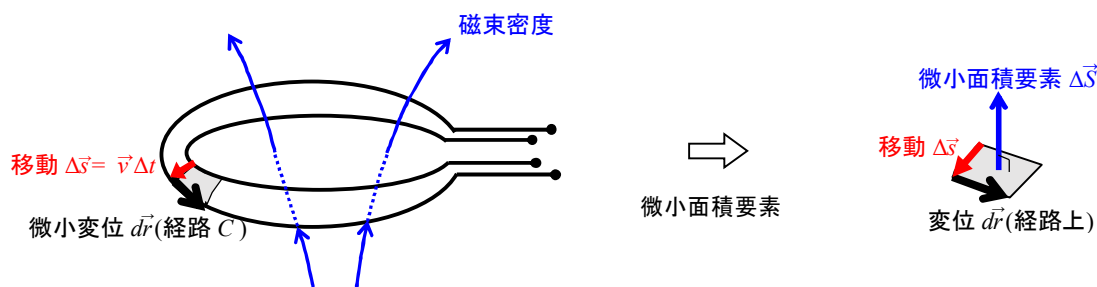
静電場 $\vec{E}$ は電位 $\varphi$ を用いて、(2-5-3)式「 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ 」と表すことができる。この関係式をストークスの定理を用いた(7-1-5)式に適用すると「0」となり、起電力は発生しない。

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路 } C \text{ 内部の面積 } S} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$(\because \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = (\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}) \varphi = 0)$$

### ・経路 $C$ が時間変化する場合の電磁誘導の法則

これまでは、周回する経路  $C$  が時間変化しない場合を扱っていたが、下の図のように経路  $C$  が時間変化し、時間  $\Delta t$  の間に  $\Delta \vec{s}$  ( $= \vec{v} \Delta t$ ) だけ外側に移動し、コイル内部の面積  $S$  が変化し、磁束の変化  $\Delta \Phi$  が発生する場合を考えてみよう。



微小面積要素  $\Delta \vec{S}$  は、(6-2-3)式で示したように、平行四辺形の2つの辺のベクトルの外積として表すことができる。

$$\Delta \vec{S} = \Delta \vec{s} \times d\vec{r} = \vec{v} \Delta t \times d\vec{r} \quad (7-1-8)$$

そのため、時間  $\Delta t$  の間の磁束の変化  $\Delta \Phi$  は下の式で与えられる。

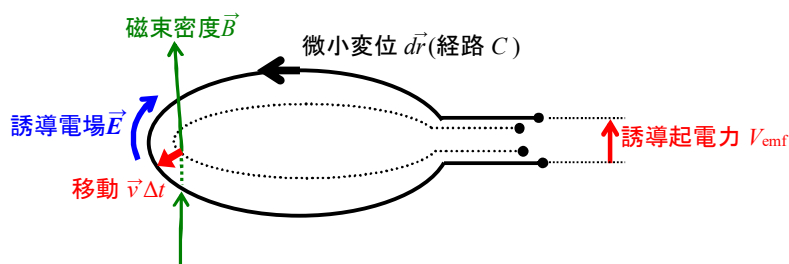
$$\Delta \Phi = \vec{B} \cdot \Delta \vec{S} = \vec{B} \cdot (\vec{v} \Delta t \times d\vec{r}) = d\vec{r} \cdot (\vec{B} \times \vec{v}) \Delta t = d\vec{r} \cdot (-\vec{v} \times \vec{B}) \Delta t = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \Delta t \quad (7-1-9)$$

\* 上式の3項目から4項目への移行についての確認

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \sum_{j,k,\ell} \varepsilon_{jkl} \vec{e}_j b_k c_\ell = \sum_i \sum_{k,\ell} \varepsilon_{ikl} a_i b_k c_\ell \quad (\text{単位ベクトルの直交性 } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \text{ より}) \\ &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} b_i c_j a_k = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} c_i a_j b_k = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 3 \text{ つの辺からなる立体の体積} \end{aligned} \quad (7-1-10)$$

したがって、コイルに発生する誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  と誘導電場  $\vec{E}$  は下の式で表される。

$$V_{\text{emf}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (7-1-11)$$



経路  $C$  が膨らんで、経路  $C$  の内部にある磁束が増加した場合も、誘導電場  $\vec{E}$  が発生する。経路の移動速度  $\vec{v}$  を用いると誘導電場  $\vec{E}$  は上の式より、下の式で表すことができる。これは、磁束密度  $\vec{B}$  がつくるローレンツ電場と同じ形である。

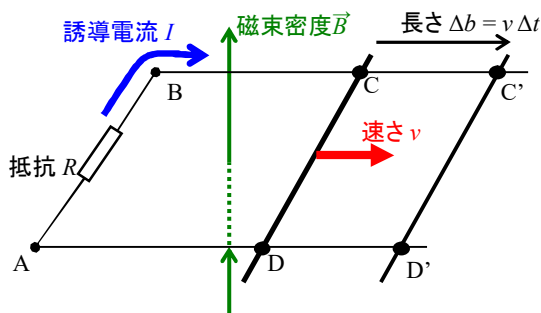
$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (7-1-12)$$

\* ローレンツ力

(6-2-10)式で示されたローレンツ力  $\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  より、2 項目の「 $\vec{v} \times \vec{B}$ 」は電場  $\vec{E}$  と同等に作用する。電磁誘導の法則から求めた上の(7-1-12)式は、ローレンツ力からの有効電場と誘導電場が等しいことを表している。

\* 磁場中を運動する導線の簡単な例

磁束密度  $\vec{B}$  が一様な中、図のように導線で、磁束密度と垂直に 1 辺が可動できる長方形の回路を作った。導線のできた長さ  $a$  の辺  $CD$  となる導線を速さ  $v$  で図のように時間  $\Delta t$  だけ動かした。



時間  $\Delta t$  の間にこの回路を貫く磁束の変化  $\Delta \Phi = B \Delta S = B (a \Delta b) = B (a v \Delta t)$  と表されるので、誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  は下の式で表すことができる。

$$V_{\text{emf}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - v B a$$

回路に抵抗  $R$  をつなぐと、回路で時計回りの向き(→の向き;  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  の向き)に下の式で表される誘導電流  $I$  が発生する。

$$I = \frac{|V_{\text{emf}}|}{R} = \frac{v B a}{R} \quad (7-1-13)$$

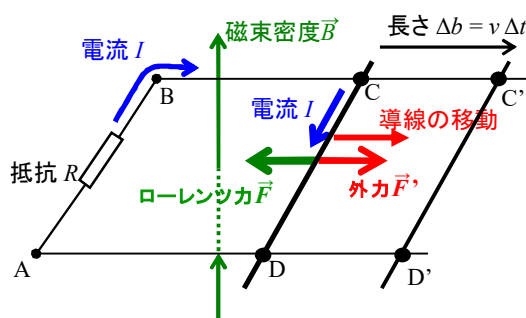
また、この抵抗で消費された電力  $P$  は下の式で表される。

$$P = |I V_{\text{emf}}| = \frac{(v B a)^2}{R} \quad (7-1-14)$$

一方、磁束密度  $\vec{B}$  がある空間に電流  $I$  が流れると、ローレンツ力  $\vec{F}$  (ローレンツ力の大きさ  $F = I B a$ ) が働く。ローレン

ツカは導線が**動く向きと逆向き**に働き、負の仕事をする。導線を移動させるには、ローレンツ力と釣り合うように、ローレンツ力と逆向きの外力で移動させることが必要となる。この外力がした仕事率  $P'$  は下の式で表される。

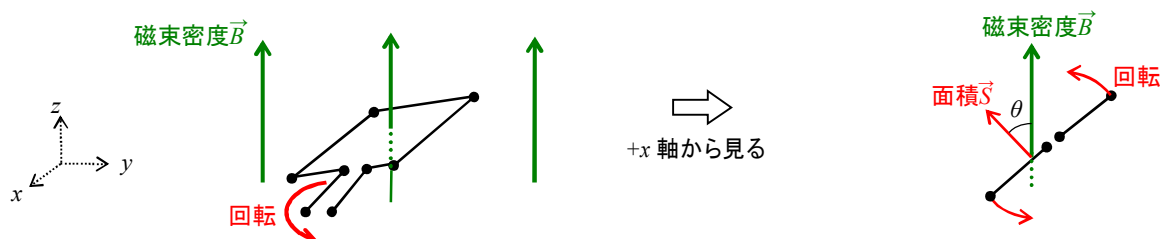
$$P' = F' v = F v = I B a v = \frac{v B a}{R} B a v = \frac{(v B a)^2}{R} \quad (7-1-15)$$



(7-1-14)式と(7-1-15)式は一致する。すなわち、**電磁誘導の法則で起電力(電力)が発生するのは、外力が導線を動かし、仕事をするためで、外力のした仕事が電気エネルギーに変換され、電力として抵抗で消費される。**

## ・交流発電機の原理

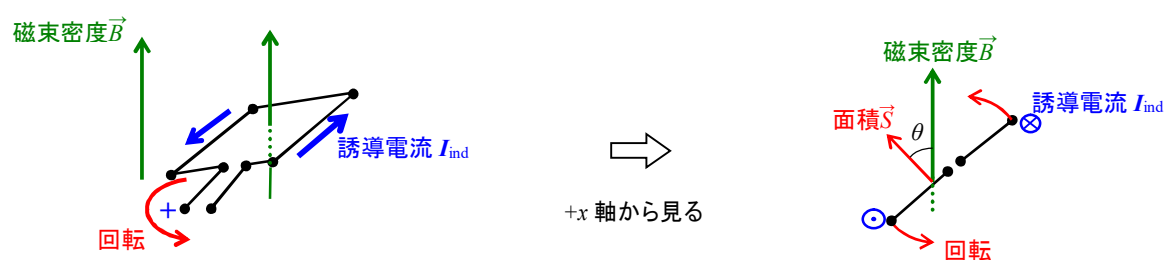
2つの棒磁石を用意し、N極とS極で様な磁束密度  $\vec{B}$  の中に図のような長方形の導線を配置し、導線を一定の角速度  $\omega$  で回転させてみよう。導線でできた長方形の面積  $S$ 、その法線ベクトル  $\vec{n}$  として、面積ベクトル  $\vec{S} = S \vec{n}$  と表される。



長方形のコイルを貫く磁束  $\Phi$  は、「 $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos \theta = B S \cos (\omega t)$ 」と表される。したがって、発生する起電力  $V_{\text{emf}}$  も三角関数(交流<sup>4</sup>)として表現できる。これは、コイルを回転させている回転エネルギー(運動エネルギー)が電力(電気エネルギー)に変換されたことを意味する。

$$V_{\text{emf}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B S \omega \sin (\omega t) \quad (7-1-16)$$

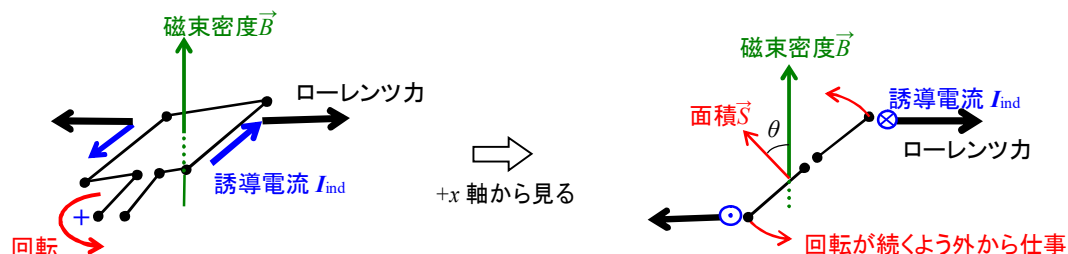
上の図の状態(コイルを貫く磁束が減少する状態)で誘導電流  $I_{\text{ind}}$  と誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  が正となる向きを下の図に「+」で示す。



<sup>4</sup> 「交流」については後で説明する。

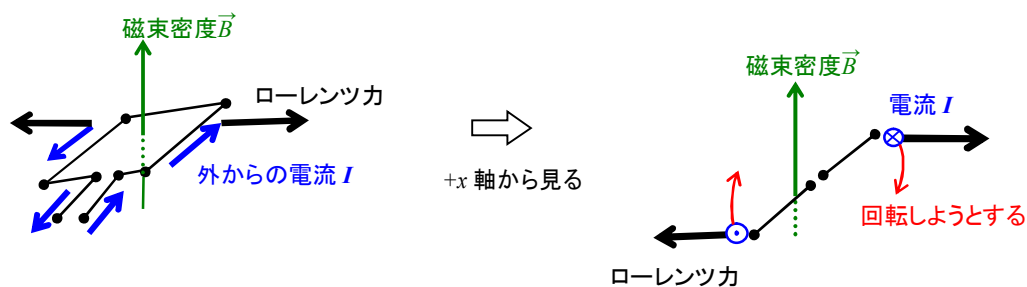
\* 交流発電機とモーター

外部磁場の中でコイルを回転させると、誘導電流  $I_{\text{ind}}$  が流れ、起電力  $V_{\text{emf}}$  が生じる。このとき、外部磁場と誘導電流の間にローレンツ力が生じる。下の図のように、対面する導線には逆向きのローレンツ力が働き、外からコイルを回転させる向きと逆向きのトルク(力のモーメント)がコイルに作用する。



したがって、コイルが同じ回転を続けるためには外から仕事をして、回転の運動エネルギーが落ちないようにする必要があります。つまり、発電機は外からの仕事を変換して、電気エネルギー(起電力)を発生させている。

逆に、磁場が印加されたコイルに外から電流  $I$  を流してみよう。このとき、コイルの対面する導線上に生じる逆向きのローレンツ力によってトルク(力のモーメント)が発生し、回転しようとする。これが、モーターの原理である。



・起電力とは

**起電力  $V_{\text{emf}}$**  を発生させる装置としては、(化学反応を用いた)電池、(電磁誘導の法則を用いた)発電機、(光電効果を用いた)太陽電池などがある。これらの装置では、それぞれ、化学エネルギー、運動エネルギー、光エネルギーを利用して、電荷を正と負に強制的に分離して(電磁誘導では誘導電場で)、電位差が生じるように作られており、別なエネルギー(または外からの仕事)から電気エネルギーに変換している。このような装置で生じた電気エネルギー  $\varepsilon$  について、電位差に換算した量を起電力  $V_{\text{emf}}$  と呼ぶ( $\varepsilon = |e| V_{\text{emf}}$ )。起電力を持った装置に回路をつなぐと、回路に電流・電圧が発生し、回路で**電力(電気エネルギー)**が消費される。

例題 7-1 電磁誘導の法則を表す(7-1-1)式の両辺の単位が、SI 単位系(MKSA 単位系)で等しいことを確認せよ。

答; 左辺の起電力の単位 = V(ボルト) = J(ジュール)/C(クーロン) ← エネルギー保存則より  
 $= \text{J}/(\text{A s})$  ← 電流の単位 A = 1 秒間当たりの電荷移動(= C/s)  
 $= \text{kg m}^2/(\text{s}^2 \cdot (\text{A s})) = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3)$   
 右辺の単位 = Wb/s = T(テスラ) m<sup>2</sup>/s = ((N m s)/C)/s ← ローレンツ力( $F = qvB$ )より, N(ニュートン) = C(m/s) T  
 $= (\text{N m})/\text{C} = \text{J}/(\text{A s}) = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3)$   
 したがって、左辺の単位と右辺の単位は一致する。

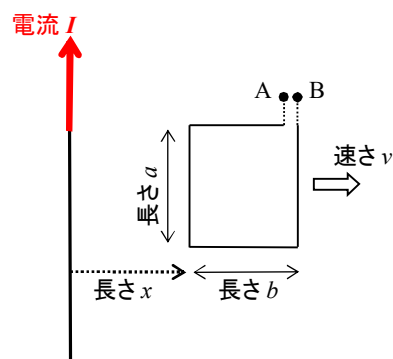
問題 7-1 断面積  $S = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  で、巻き数  $N = 2000$  のコイルが真空中にある。コイルに流す電流を流したところ、コイルには磁束



密度の大きさ(平均値) $B = 5.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ が発生した。そして、充分時間がたってから、スイッチを切ったところ、0.2秒後に磁束密度の大きさが0となった。このとき、コイルに発生する誘導起電力の大きさ  $V_{\text{emf}}$  を求めよ。

答 1.5 V

例題 7-2 右の図のように、真空中に(無限に長い)直線導線に電流  $I$  を流した。さらに、辺の長さ  $a$  と  $b$  の長方形をしたコイル状の導線を図のように、電流と垂直方向に速さ  $v$  で遠ざけた。このとき、長方形をしたコイル状の導線に発生する誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  の大きさを求めよ。また、電位高くなるのは点 A か? または、点 B か?

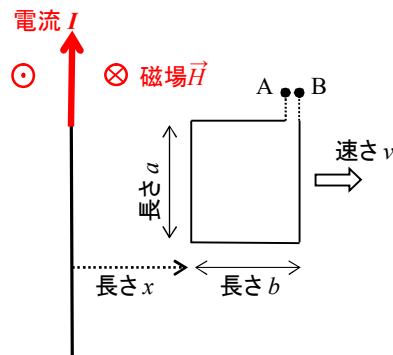


答; 導線に流れる電流  $I$  によってできる磁場  $\vec{H}$  は右ネジの法則より、導線の左側では奥から手前へ、右側では手前から奥への向きにできる。電流が流れる導線からの距離  $r$  とすると、磁束密度の大きさ  $B$  は、「 $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ 」で、コイル内の磁束  $\Phi$  は微小面積  $dS = a dr$  より下の式で表される。

$$\Phi = \int_{\text{コイル内}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = a \int_x^{x+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{x+b}{x}\right)$$

したがって、誘導起電力  $V_{\text{emf}}$  は下の式で表すことができる。(速さ  $v$ )。

$$V_{\text{emf}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{ab}{x(x+b)} \frac{dx}{dt} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{abv}{x(x+b)}$$

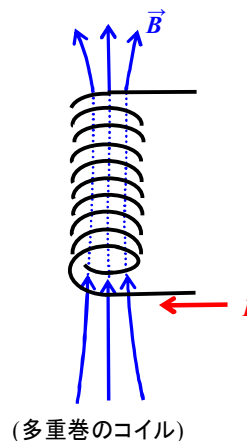
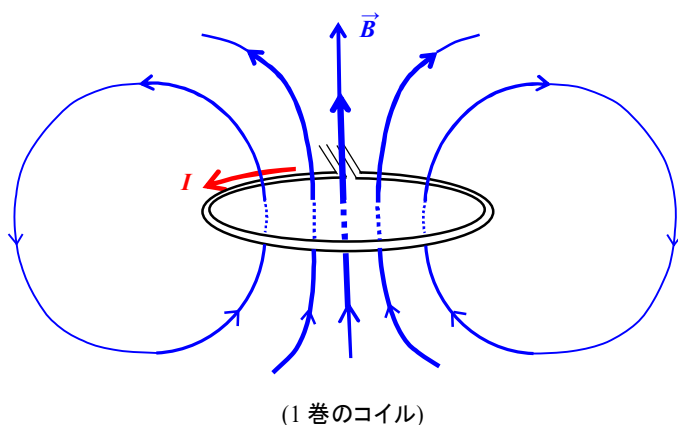


上の式で、コイルが遠ざかる速さ  $v = dx/dt$  を用いた。また、誘導電流は反時計回りに流れるので、誘導起電力は A から B の向きなので点 B の方が点 A よりも電位が高い。

## 7-2. 自己誘導と相互誘導

### ・自己誘導

導線でできているコイルに電流  $I$  を流すと、アンペールの法則に従う磁場(磁束密度  $\vec{B}$ )が発生し、コイル内には磁束  $\Phi$  ができる。流す電流  $I$  を増加させると、コイルに生じる磁束密度  $\vec{B}$  も増加し、その結果、磁束  $\Phi$  も増加する。



流す電流  $I$  とコイル内にできる磁束  $\Phi$  は比例関係が成り立ち、下の式で表すことができる。ここで、比例定数  $L$  をコイルの **自己インダクタンス** と呼ぶ。

$$\Phi := L I \quad (7-2-1)$$

電流  $I$  が時間変化し増大する場合 ( $I \rightarrow I + dI$ ) はコイルにできる磁束も時間変化し、下の式のように **誘導起電力  $V_L$**  が発生する。

$$V_L = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{dI}{dt} \quad (7-2-2)$$



図のように流している電流と逆向きの起電力が発生するので、この起電力を逆起電力とも呼ぶ。このように、コイルに流れる電流が時間変化することで、コイル自身に誘導起電力が発生するので、この現象を **自己誘導** と呼ぶ。また、比例定数  $L$  は自己誘導係数とも呼ばれる。

\* 自己インダクタンス  $L$  の単位

自己インダクタンス  $L$  の単位としては「H(ヘンリー)」である。(7-2-2)式より、「 $V = H \text{ A/s}$ 」なので、下の関係が得られる。

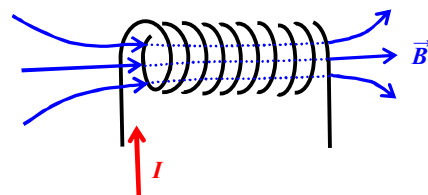
$$H = (V \text{ s})/A = \Omega \text{ s} = \text{Wb}/A \quad (7-2-3)$$

例題 7-3 真空中に単位長さ当たり  $n$  回巻いたソレノイドコイルがある。この断面積  $S$  となるソレノイドコイルの単位長さ当たりの自己インダクタンス  $L$  を求めよ。

答; ソレノイドコイルの電流  $I$  を流したとき、コイルにできる磁束密度の大きさ  $B$  は、「 $B = \mu_0 n I$ 」となる。したがって、 $N$  回巻かれたコイルによってできる磁束  $\Phi$  は、「 $\Phi = NBS = N \mu_0 n I$ 」となる。よって、単位長さ当たりの自己インダクタンス  $L$  は、「 $L = \mu_0 n^2$ 」となる(長さ  $\ell$  で  $N$  回巻いたとき、単位長さ当たりの巻き数  $n = N/\ell$  より)。

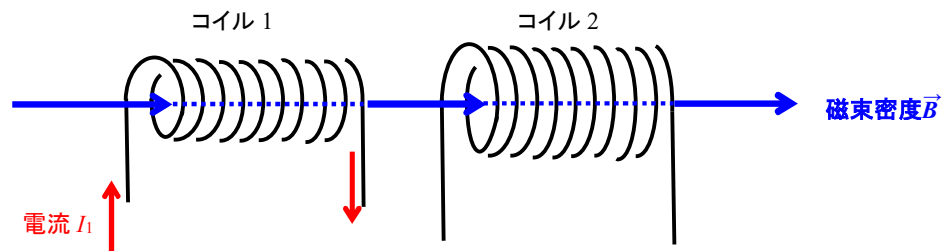
\* 注意

図のような実際のコイルでは、厳密にはコイルの両端での磁束密度は図のように拡がっているので、中央部の磁束密度の大きさより小さな値となるので注意が必要となる。上の例題では、理想的なソレノイドコイルの単位長さ当たりの自己インダクタンスを求めた。



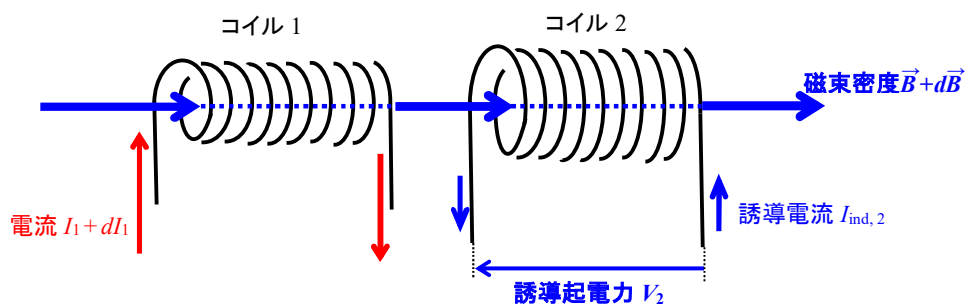
## ・相互誘導

下の図のように 2 つのコイルを配置し、コイル 1 に電流  $I_1$  を流すと、アンペールの法則に従う磁場(磁束密度 $\vec{B}$ )が発生し、コイル 2 において磁束密度が通過しコイル 2 の内部に磁束  $\Phi_2$  ができる。コイル 2 にできた磁束  $\Phi_2$  はコイル 1 に流す電流  $I_1$  に比例するので、(7-2-1)式と同様な比例関係が成り立つ。



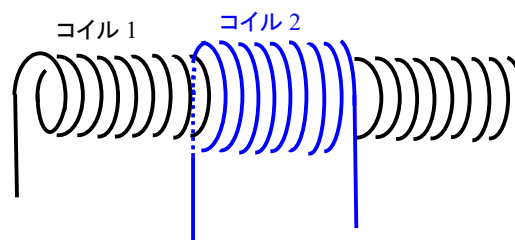
$$\Phi_2 := M_{1 \rightarrow 2} I_1 \quad (7-2-4)$$

上の式で、比例定数  $M_{1 \rightarrow 2}$  をコイル 1 の電流がコイル 2 の磁束を作るので、**相互インダクタンス**、または相互誘導係数と呼ぶ。次に、コイル 1 に流す電流を  $dI_1$  増大させると、コイル 2 を貫く磁束も変化し、磁束も  $d\Phi_2$  だけ増大し、「電磁誘導の法則」により、誘導起電力(逆起電力)  $V_2$  が発生する。



$$V_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} = - M_{1 \rightarrow 2} \frac{dI_1}{dt} \quad (7-2-5)$$

例題 7-4 図のように、断面積  $S$ 、単位長さ当たり  $n_1$  回巻いたコイル 1 のすぐ外側に  $N_2$  回巻いたコイル 2 がある(コイル 1 はコイル 2 に比べて相当長いものとする)。このとき、相互インダクタンス  $M_{1 \rightarrow 2}$  を求めよ。

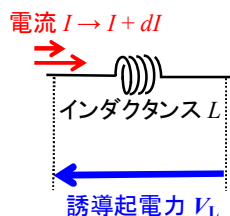


答; コイル 1 に電流  $I_1$  を流すと、コイル 1 がつくる磁束密度の大きさ  $B_1$  は、「 $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$ 」となる。したがって、 $N_2$  回巻かれたコイル 2 によってできる(コイル 1 がつくる磁束密度による)磁束  $\Phi_2$  は、「 $\Phi_2 = N_2 B_1 S = \mu_0 n_1 N_2 I_1$ 」となる。よって、相互インダクタンス  $M_{1 \rightarrow 2}$  は、「 $M_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 n_1 N_2$ 」となる。

### 7-3. 交流回路 (時間的な余裕がない場合や数学が苦手な学生は省略してよい)

#### ・自己インダクタンスの素子としての記号

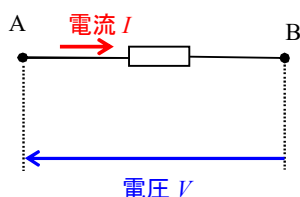
コイルが持つ自己インダクタンスは記号  $L$  (単位は H (ヘンリー<sup>5)</sup>) で表され, 回路では下の図のように表される. 回路に流す電流を  $I$  から  $I + dI$  に増大させると, 電磁誘導の法則により, 誘導起電力(逆起電力)  $V_L$  が, 電流が増える向きと逆向きに発生する.



#### ・コイル, 抵抗, コンデンサに流れる電流と電位差, および起電力の関係

交流回路について調べる前に, コイル, 抵抗, コンデンサの 3 つの素子に流れる(時間変化する)電流  $I(t)$  とその両端で生じる電位差, または起電力についてまとめよう. 点 A と B での電位を  $\varphi_A, \varphi_B$  とすると, 素子を通過するときの電位差(電圧)  $V = \varphi_A - \varphi_B$  とする.

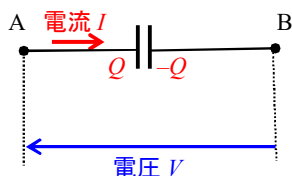
##### 1) 抵抗(電流に対し, 電圧降下)



$$V = \varphi_A - \varphi_B = R I \quad (7-3-1)$$

##### 2) コンデンサ(電流(貯蔵された電荷)に対し, 電圧降下)

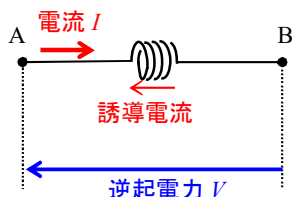
静電容量  $C$  のコンデンサに電流を流すと, コンデンサの 2 枚の電極に,  $+Q$  と  $-Q$  の電荷が貯まり, 「 $Q = C V$ 」の関係が成立する.



$$V = \varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int^t I dt \quad (7-3-2)$$

##### 3) コイル(電流に対し, 誘導起電力(逆起電力))

自己インダクタンス  $L$  のコイルに電流を流すと, 電流が流れる向きと逆向きの誘導起電力(逆起電力)  $V$  が発生する.

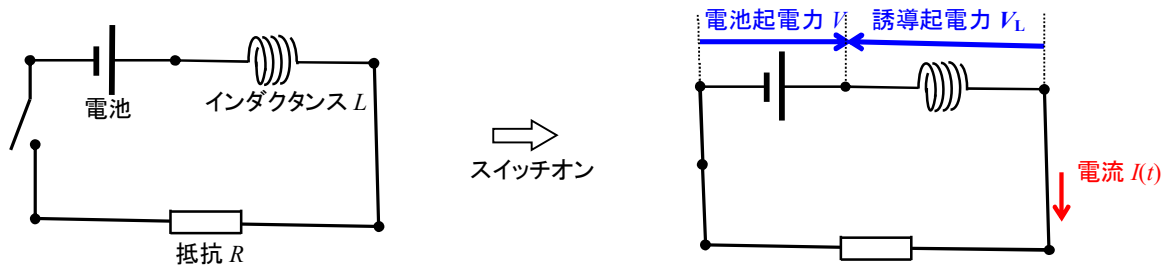


$$V = \varphi_A - \varphi_B = -L \frac{dI}{dt} \quad (7-3-3)$$

<sup>5</sup> ヘンリー(Joseph Henry)は 19 世紀のイギリスの物理学者でファラデーとほぼ同時期に電磁誘導の法則を発見した. 自己誘導の法則も発見し, その係数(インダクタンス)の単位はヘンリーの名にちなんでいる.

### ・自己インダクタンス, 抵抗, 電池を直列につないだ回路

自己インダクタンス  $L$ , 抵抗  $R$ , 起電力  $V$  のなる電池を図のように直列につなぎ, 時刻  $t=0$  でスイッチをオンにした.

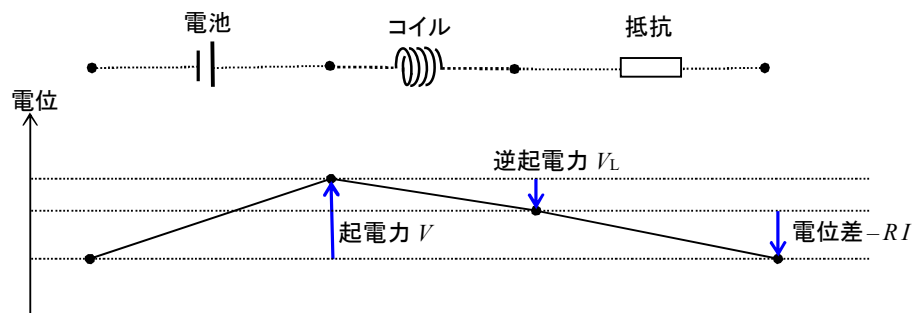


スイッチをオフにして電流が流れていない状態から, 時刻  $t=0$  でスイッチをオンにすると電流が流れる. その電流  $I$  は時刻  $t$  の関数 ( $I = I(t)$ ) となり, コイルで誘導起電力 (逆起電力)  $V_L$  が発生する. 上の図で示された直列回路では, 下の関係式が成り立つ.

回路全体の起電力 = 電池の起電力 + 誘導起電力 = 抵抗での電圧降下

$$\rightarrow V + V_L = V - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (7-3-4)$$

また, この電位に関する関係式をキルヒホッフ第2法則に適用すると, 下の図のように表すことができ, 閉回路で1周すると, 電位は元に戻り, 電位差は0となる.



$$V + V_L - RI = 0$$

上の(7-3-1)式を移項すると, 下の微分方程式を得ることができる. この式のように, 直列回路として見ると, コイルを通過すると電位が「 $L dI/dt$ 」下がり, 抵抗を通過すると電位が「 $RI$ 」だけ下がると解釈することができる.

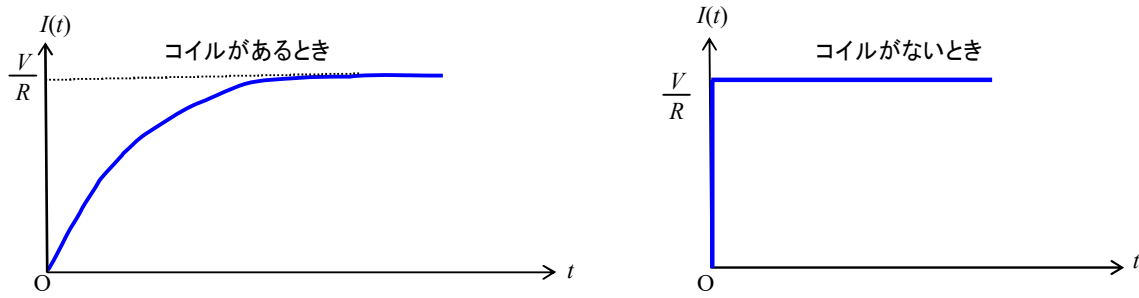
$$V = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (7-3-5)$$

この微分方程式について, 「初期条件として,  $I(t=0)=0$ 」として1階の微分方程式を解くと下の解を得ることができる.

$$I(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad (7-3-6)$$

上の解から電流  $I$  は時刻  $t \rightarrow \infty$  では, 「 $I = V/R = \text{一定}$ 」となる. 横軸に時刻  $t$  を, 縦軸に電流  $I(t)$  をとると, 下のグラフのようになる. コ

イルがないときは階段(ステップ)状に電流が増大し、コイルがあることで電流は滑らかに増大する。このような、時刻  $t \rightarrow \infty$  で電流が一定となるような定常状態への移り変わる過程を **過渡現象** と呼ぶ。さらに、時刻  $t$  が 0 近傍では、 $I(t) \sim Vt/L$  となる。



(7-3-6)式の第 1 項はコイルがないときの電流で、第 2 項はコイルによる誘導電流(逆向きの電流)の効果を表している。コイルで発生する逆起電力  $V_L$  は下の式で与えられ、時間とともに減衰する(誘導電流は  $V_L/R$  と表される)。

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} = -V \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \quad (7-3-7)$$

#### \* 1 階の微分方程式の解法

下の 1 階の微分方程式の解  $f(t)$  を導出しよう。

$$\frac{df(t)}{dt} + a f(t) = p(t) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d}{dt} + a\right) f(t) = p(t) \quad (7-3-8)$$

- ① 係数  $a$  が一定で、関数  $p(t) = 0$  となる場合  
上の式を変形すると下の式が得られる。

$$\frac{df(t)}{dt} = -a f(t) \quad \rightarrow \quad \frac{df}{f} = -a dt \quad (7-3-9)$$

さらに、上の式の両辺を積分することで、積分定数  $C (= \exp(C'))$  を用いて関数  $f(t)$  を求めることができる。

$$\int \frac{1}{f} df = - \int a dt \quad \rightarrow \quad \ln f(t) = -a t + C' \quad \rightarrow \quad f(t) = C e^{-a t} \quad (7-3-10)$$

- ② 係数  $a$  が一定で、関数  $p(t) \neq 0$  となる場合  
関数  $f(t)$  を、「 $f(t) = u(t) e^{-a t}$ 」と置き、元の微分方程式である(7-3-8)式に代入すると次の式が得られる。

$$\frac{du(t)}{dt} = p(t) e^{a t} \quad (7-3-11)$$

上の式を積分することで関数  $u(t)$  を求めることができ、その結果、関数  $f(t)$  は下の式で表すことができる。

$$f(t) = \left[ \int p(t_1) e^{a t_1} dt_1 + C \right] e^{-a t} \quad (7-3-12)$$

積分定数  $C$  は初期条件  $f(t=0)$  の値から決定する。

\* コイルの持つエネルギー

(7-3-2)式の両辺に電流  $I$  をかけると下の式を得ることができる。

$$I V = L I \frac{dI}{dt} + R I^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right) + R I^2 \quad (7-3-13)$$

この式で、左辺は起電力  $V$  を持つ電池が放出した電力(仕事率) $P$  で、右辺第 2 項は抵抗で消費した電力(抵抗で発生したジュール熱)を、第 1 項はコイルに蓄積された単位時間当たり当たりのエネルギーを表している。したがって、コイルに蓄えられた電気エネルギー  $U_L$  は下の式で表すことができる。

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7-3-14)$$

・交流電源

電池の代わりに、正弦(サイン)関数、または余弦(コサイン)関数で表されるような交流<sup>6</sup>を流すような電源につないでみよう。例えば、時刻  $t$  における(余弦関数を用いた)交流の起電力  $V(t)$  は下の式で表すことができる。

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[V_0 e^{i\omega t}] \quad (7-3-15)$$

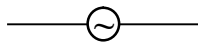
ここで、起電力の最大値(振幅)を  $V_0$ 、交流の角振動数(角速度)<sup>7</sup>を  $\omega$  とした。また、上の式の右辺で「 $\operatorname{Re}[\dots]$ 」は、「 $\dots$ 」の実数部(Real Part)をとるという意味である。

\* オイラーの公式

下の式をオイラーの公式と呼ぶ。右辺と左辺をテーラー展開(べき級数展開)すると等式が成立することが確認できる。ここで、 $i$  は虚数<sup>8</sup>で「 $i = \sqrt{-1}$ 」である。下の式で実数部(Real part)が「 $\cos \theta$ 」で虚数部(Imaginary part)が「 $\sin \theta$ 」となる。上の(7-3-15)式では位相角  $\theta = \omega t$  である。オイラーの公式は有用で便利な公式である。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (7-3-16)$$

電気回路、電子回路の中で交流電源として表す記号を下に示す。



\* 交流電源の起電力の複素数表示

三角関数を用いた交流電源の起電力  $V(t)$  は、(7-3-15)式に示した。(7-3-15)式の最右辺では、実数部(Real part)をとったが、複素数のまま表示して扱う方法もある。起電力  $V$  の複素表示として、記号  $\dot{V}$  で表すことにしよう。

$$V = \operatorname{Re}[V_0 e^{i\omega t}] \quad \rightarrow \quad \dot{V} = V_0 e^{i\omega t} \quad (7-3-17)$$

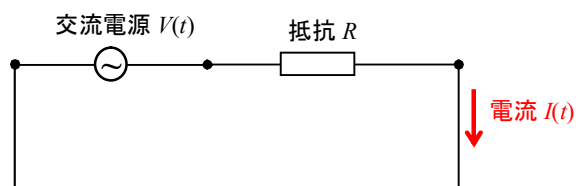
<sup>6</sup> 交流は周期的に正負が逆転する電流を指し、英語では「Alternating Current (AC)」と呼ぶので、交流電源を AC 電源と呼ぶ。化学電池のように、一定となる電流を直流と呼び、英語では「Direct Current(DC)」と呼ぶ。

<sup>7</sup> 振動数  $f$ 、周期  $T$  とすると、角振動数  $\omega$  は、「 $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ 」と表される。

<sup>8</sup> 電気工学の分野では、電流密度  $i$  と混同しないように、虚数を「 $j$ 」で表すことが多い

## ・交流電源に抵抗をつないだ回路

起電力が(7-3-15)式で表される交流電源に抵抗  $R$  をつないだ回路を作ってみよう。



回路を流れる電流  $I(t)$  は、電流の最大値(振幅)を  $I_0$  とすると、下の式で表され、電源の起電力の時間変化と同期して電流が時間変化する。このように、時刻  $t \rightarrow \infty$  でも電源と同じように電流も三角関数で表されるような状態を準定常状態と呼ぶ。時間変化は周期的だが、現象的な変化はない。また、抵抗  $R$  は、起電力の最大値  $V_0$  と電流の最大値  $I_0$  を用いて「 $R = V_0/I_0$ 」と表される。

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (7-3-18)$$

このとき、時刻  $t$  において、抵抗で消費される瞬間の電力(1秒間当たりの消費エネルギー = ジュール熱 = 仕事率)  $P(t)$  は、下の式で表される。

$$P(t) = I(t) V(t) = I_0 V_0 \cos^2(\omega t) \quad (7-3-19)$$

時間平均した消費電力  $\langle P \rangle$  は下の式で計算され、1周期  $T$  に対する時間平均をとる(このとき、 $\omega T = 2\pi$  を使う)。

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = I_0 V_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = I_0 V_0 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= I_0 V_0 \frac{1}{T} \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T = I_0 V_0 \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{I_0 V_0}{2} \end{aligned} \quad (7-3-20)$$

上の式は直流の場合と比べて  $1/2$  倍となっている。下の式で表される  $I_e$  と  $V_e$  が、電流と電圧に対する実効値とする。実効値は電流と電圧の最大値  $I_0$  と  $V_0$  の  $(1/\sqrt{2})$  倍となる。また、電流と電圧の実効値の積が有効電力(=時間平均した電力)となる。

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (7-3-21)$$

$$\langle P \rangle = I_e V_e \quad (7-3-22)$$

## ・インピーダンス

直流電源(起電力  $V$ )で抵抗  $R$  をつないだとき、回路に流れる電流  $I$  と電池の起電力  $V$  の間にはオームの法則「 $V = R I$ 」が成立するが、交流電源を用いた場合にも、オームの法則と同様な形式で、下の式のように電流  $I$  と電源の起電力  $V$  の間の関係式が成立するでしょう。

<sup>9</sup> 物理量  $a$  の平均を表す記号として、「 $\bar{a}$ 」と「 $\langle a \rangle$ 」などが用いられるが、ここでは後者を採用する。



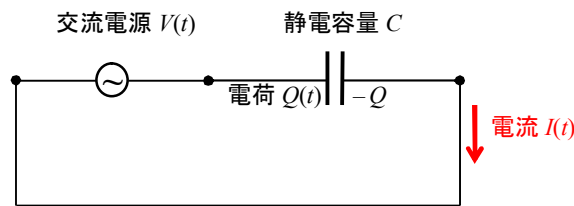
$$V = Z I$$

(7-3-23)

直流回路で抵抗  $R$  に相当するものとして、交流回路ではインピーダンス  $Z$  と呼ぶ。また、コンデンサやコイルのみの場合は、リアクタンスと呼ぶ(コンデンサの場合は容量リアクタンス  $X_C$ 、コイルの場合は誘導リアクタンス  $X_L$  と呼ぶ)。インピーダンス、リアクタンスの単位はともに「 $\Omega = \text{V/A}$ 」である。

#### ・交流電源にコンデンサをつないだ回路

次に、起電力が(7-3-15)式で表される交流電源に静電容量  $C$  のコンデンサをつないだ回路を作ってみよう。



回路を流れる電流  $I(t)$  はコンデンサに貯まる電荷を  $Q(t)$  とすると、「 $I = dQ/dt$ 」と表される。また、コンデンサでは、「 $Q = CV$ 」の関係式が成立するので、回路を流れる電流  $I(t)$  は下の式で表すことができる。

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C \frac{dV}{dt} = C \frac{d}{dt}(V_0 \cos(\omega t)) = -V_0 \omega C \sin(\omega t) = V_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2) \quad (7-3-24)$$

あるいは、起電力  $V(t) = \text{Re}[V_0 e^{i\omega t}]$  を上の式に代入し、時間微分すると下の式が得られる。

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = \text{Re}[i\omega C V_0 e^{i\omega t}] = \text{Re}[\omega C V_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}] = V_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2) \quad (7-3-25)$$

(7-3-24)式と(7-3-25)式において、三角関数の前の係数が電流の最大値(振幅) $I_0$  となるので、係数を比べてることで、容量リアクタンス  $X_C$  は下の式で表すことができる。

$$I_0 = V_0 \omega C = V_0/X_C \quad \rightarrow \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (7-3-26)$$

#### \* 複素リアクタンス(複素インピーダンス)

交流電源の起電力として、(7-3-15)式を示し、起電力  $V$  の複素数表示として、(7-3-17)式のように「 $\dot{V}$ 」を用いたが、同様に電流  $I$  も下の式のように複素数表示で表す。

$$I \rightarrow \dot{I} = I_0 e^{i\omega t} \quad (7-3-27)$$

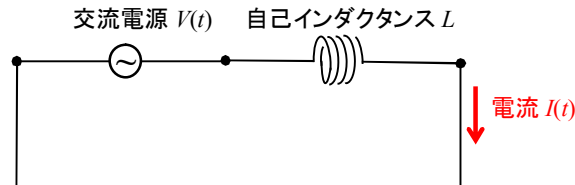
(7-3-25)式の第4項目から、リアクタンスも複素数で表示され、複素リアクタンス  $\dot{X}_C$  は下の式で表すことができる。

$$\dot{I} = i \omega C \dot{V} = \dot{V} / \dot{X}_C \quad \rightarrow \quad \dot{X}_C = \frac{1}{i \omega C} = -i \frac{1}{\omega C} \quad (7-3-28)$$

(7-3-26)式のリアクタンスと複素リアクタンスの関係は、絶対値記号を用いて、「 $X_C = |\dot{X}_C|$ 」と表される。

#### ・交流電源に自己インダクタンスをつないだ回路

次に、起電力が(7-3-15)式で表される交流電源に自己インダクタンス  $L$  のコイルをつないだ回路を作ってみよう。



この回路で、コイルの自己誘導が逆起電力となるので、この回路では下の関係式が成り立つ(電流の初期条件として、 $I(t=0)=0$  とする)。

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} &= V(t) \quad \rightarrow \quad I(t) = I(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt = I(0) + \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t) \\ &= \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) \end{aligned} \quad (7-3-29)$$

るいは、起電力  $V(t) = \text{Re}[V_0 e^{i\omega t}]$  を上の式に代入し、時間積分すると下の式が得られる( $I(0)=V_0/(i\omega L)$ とした)。

$$I(t) = I(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt = \text{Re}[I(0) + \frac{V_0}{i\omega L} (e^{i\omega t} - 1)] = \text{Re}[\frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t}] = \text{Re}[\frac{V_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \pi/2)}] \quad (7-3-30)$$

(7-3-26)式と同様に電流の最大値(振幅) $I_0$ となる係数を比べてることで、誘導リアクタンス  $X_L$  は下の式で表すことができる。

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L} = V_0/X_C \quad \rightarrow \quad X_L = \omega L \quad (7-3-31)$$

#### \* 複素リアクタンス(複素インピーダンス)

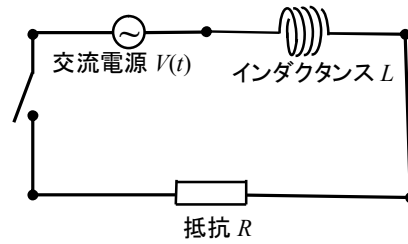
(7-3-28)式と同様に、複素リアクタンス $\dot{X}_L$ は下の式で表すことができる。

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{i\omega L} = \frac{\dot{V}}{\dot{X}_L} \quad \rightarrow \quad \dot{X}_L = i\omega L \quad (7-3-32)$$

#### ・自己インダクタンス, 抵抗, 交流電源を直列につないだ回路

自己インダクタンス  $L$  を持つコイル, 抵抗  $R$ , 起電力  $V(t)$  のとなる交流電源を図のように直列につなぎ、時刻  $t=0$  でスイッチをオ

ンにした。



この回路での微分方程式は(7-3-5)式から下の式を得ることができる。

$$L \frac{dI}{dt} + R I = V_0 \cos(\omega t) \rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V_0}{L} \cos(\omega t) \quad (7-3-33)$$

この 1 階の微分方程式について、(7-3-12)式より解が導出できる。さらに、「初期条件として、 $I(t=0)=0$ 」から積分定数  $C$  を決める。

$$\begin{aligned} I(t) &= \left[ \frac{V_0}{L} \int^t \cos(\omega t_1) e^{(R/L)t_1} dt_1 + C \right] e^{-(R/L)t} = \left[ \frac{V_0}{2L} \int^t (e^{i\omega t_1} + e^{-i\omega t_1}) e^{(R/L)t_1} dt_1 + C \right] e^{-(R/L)t} \\ &= \left[ \frac{V_0}{2L} \left\{ \frac{1}{i\omega + R/L} e^{i\omega t} + \frac{1}{-i\omega + R/L} e^{-i\omega t} \right\} e^{(R/L)t} + C \right] e^{-(R/L)t} \\ &= \frac{V_0}{2L} \left\{ \frac{1}{i\omega + R/L} e^{i\omega t} + \frac{1}{-i\omega + R/L} e^{-i\omega t} \right\} + C e^{-(R/L)t} \\ &= \frac{V_0}{L} \frac{1}{\omega^2 + (R/L)^2} \left\{ \frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right\} + C e^{-(R/L)t} \\ &= \frac{V_0}{L} \frac{1}{\omega^2 + (R/L)^2} \left\{ \frac{R}{L} (\cos(\omega t) - e^{-(R/L)t}) + \omega \sin(\omega t) \right\} \\ &= V_0 \frac{1}{(\omega L)^2 + R^2} \left\{ R (\cos(\omega t) - e^{-(R/L)t}) + \omega L \sin(\omega t) \right\} \end{aligned} \quad (7-3-34)$$

上の式で、時刻  $t \rightarrow \infty$  となるような準定常状態では、電流  $I$  は下の式のように三角関数を用いて表現できる。

$$\begin{aligned} I(t) &= V_0 \frac{V_0}{(\omega L)^2 + R^2} \left\{ R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \left\{ \cos(\omega t) \frac{R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} + \sin(\omega t) \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \right\} \end{aligned} \quad (7-3-35)$$

ここで、位相角  $\varphi$  として、 $\cos \varphi = R/\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$ 、 $\sin \varphi = \omega L/\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$  とおくと、上の式は位相角  $\varphi$  とインピーダンス  $Z = Z(\omega)$  用いて、下の式で表すことができる。

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{V_0}{Z(\omega)} \cos(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (7-3-36)$$

$$Z(\omega) = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} \quad (7-3-37)$$

上の 2 つの式で、抵抗がない場合(抵抗  $R = 0$ )、位相角  $\varphi = \pi/2$  で、インピーダンス  $Z = X_L = \omega L$  となり、(7-3-31)式と一致する。

\* 複素インピーダンスを用いた別解

時刻  $t \rightarrow \infty$  となるような準定常状態では、過渡現象はなく周期的現象となるので、電流、起電力も複素数表示で扱うこととしよう。このとき、電流が位相角  $\varphi$  だけずれているものと仮定し、次の式で表すこととする。

$$\text{起電力 } \dot{V} = V_0 e^{i\omega t}, \quad \text{電流 } \dot{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (7-3-38)$$

解くべき微分方程式は(7-3-33)式を複素数で表示した下の式である。

$$(L \frac{d}{dt} + R) \dot{I} = \dot{V} \quad (7-3-39)$$

上式に(7-3-38)式を代入すると下の式を得ることができる。

$$(i\omega L + R) \dot{I} = \dot{V} \quad (7-3-40)$$

上の式から、複素インピーダンス  $\dot{Z}$  は直流回路における抵抗に対応するので、下の式で表すことができる。

すなわち、複素数表示を導入すると(準定常状態において)、(7-3-39)式の微分方程式を扱う代わりに、(7-3-40)式の代数方程式を扱うことで、複素インピーダンスを計算でき、系の準定常状態における特性を知ることができる。

$$\dot{Z} \dot{I} = \dot{V} \quad \rightarrow \quad \dot{Z} = \dot{Z}(\omega) = i\omega L + R \quad (7-3-41)$$

複素インピーダンス  $\dot{Z}(\omega)$  に対し、その大きさ  $|\dot{Z}(\omega)|$  と位相角  $\varphi$  を下の式のように決めると矛盾がない。

$$\begin{aligned} \dot{Z}(\omega) = i\omega L + R &= \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} \left( \frac{R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} + i \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \right) \\ &= \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} e^{i\varphi} = |\dot{Z}(\omega)| e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (7-3-42)$$

複素インピーダンスの大きさ  $|\dot{Z}(\omega)|$  は、(7-3-37)式よりインピーダンス  $Z(\omega)$  と同じ結果となる。このとき、(7-3-41)式の最初の式は下の式のように表され、矛盾がないことが確認できる。

$$\dot{Z} \dot{I} = \dot{V} \quad \rightarrow \quad |\dot{Z}(\omega)| e^{i\varphi} I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = V_0 e^{i\omega t} \quad \rightarrow \quad |\dot{Z}(\omega)| I_0 = V_0 \quad (7-3-43)$$

$$\left( \text{or } \dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{V_0}{|\dot{Z}|} e^{-i\varphi} = \frac{V_0}{|\dot{Z}|} e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \right) \quad (7-3-43)'$$

この回路全体で消費される瞬間の電力  $P(t)$  は、(7-3-36)式の電流  $I(t)$  より、位相角  $\varphi$  を用いて下の式で表される。

$$P(t) = I(t) V(t) = I_0 V_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \quad (7-3-44)$$

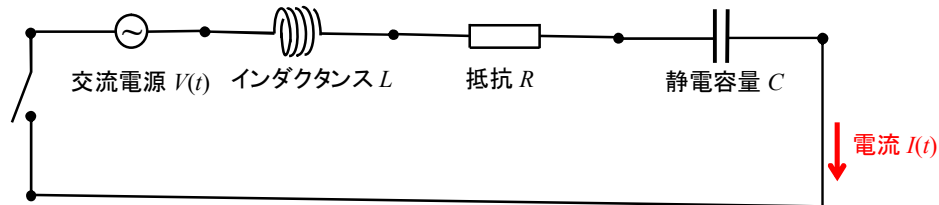
したがって、時間平均した回路全体の消費電力  $\langle P \rangle$  は下の式で計算され、周期  $T$  に対する時間平均をとり、下の式で表される。

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = I_0 V_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt \\ &\quad (\text{三角関数の加法定理より, } \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = (\cos(\omega t - (\omega t - \varphi)) + \cos(\omega t + (\omega t - \varphi))) / 2 \\ &\quad = (\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)) / 2 \text{ を用いて積分する}) \\ &= I_0 V_0 \frac{1}{T} \left[ \frac{\cos \varphi t + \sin(2\omega t - \varphi) / (2\omega)}{2} \right]_0^T = \frac{I_0 V_0}{2} \cos \varphi = I_e V_e \cos \varphi\end{aligned}\quad (7-3-45)$$

上の式で最後の等式は(7-3-21)式で表された実効値  $I_e, V_e$  を用いた。

#### ・自己インダクタンス, 抵抗, コンデンサ, 交流電源を直列につないだ回路

自己インダクタンス  $L$  を持つコイル, 抵抗  $R$ , 静電容量  $C$  を持つコンデンサ, 起電力  $V(t)$  のとなる交流電源を図のように直列につなぎ、時刻  $t = 0$  でスイッチをオンにした。



上の図で示された直列回路では、下の関係式が成り立つ。

電池の起電力 + (コイルでの)誘導起電力 = 抵抗での電圧降下 + コンデンサでの電圧降下

上の関係を微分と積分を使った方程式で表すと下の式のように表すことができる。

$$V(t) + (-L \frac{dI}{dt}) = RI + \frac{1}{C} \int^t I(t') dt' \quad (7-3-46)$$

移項すると下の式を得ることができる。

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int^t I(t') dt = V(t) \quad (7-3-47)$$

上の式をさらに時刻  $t$  で微分すると、時刻  $t$  に対する 2 階の微分方程式を得ることができる。

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt} \quad (7-3-48)$$

\* 2 階の微分方程式の解 (省略してよい)

2 階の微分方程式は下の式のように表すことができる.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + a \frac{df}{dt} + b f = \left( \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) f = p(t) \quad (7-3-49)$$

① 係数  $a$  と  $b$  が一定で, 関数  $p(t) = 0$  となる場合

上の微分方程式が下の式のように因数分解できる ( $a = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $b = \lambda_1 \lambda_2$ )

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) f = 0 \rightarrow \left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right) \left( \frac{d}{dt} + \lambda_2 \right) f = 0 \quad (7-3-50)$$

ここで,  $f \sim e^{\lambda t}$  とおくと, 係数  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は下の 2 次方程式の解として得られる.

$$\lambda^2 + a \lambda + b = 0 \rightarrow \lambda = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2 \quad (7-3-51)$$

(7-3-50)式で  $(d/dt + \lambda_2)f = g(t)$  とおくと, (7-3-50)式は下の式で表すことができる.

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right) g = 0 \quad (7-3-52)$$

1 階の微分方程式の解法である(7-3-10)式より, 関数  $g$  は「 $g(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t}$ 」と表すことができ, 式「 $(d/dt + \lambda_2)f = C_1 e^{-\lambda_1 t}$ 」から, (7-3-12)式に適用することで下の解を得ることができる.

$$f(t) = \left[ \int^t g(t_1) e^{\lambda_2 t_1} dt_1 + C_2 \right] e^{-\lambda_2 t} = \left[ \int^t C_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t_1} dt_1 + C_2 \right] e^{-\lambda_2 t}$$

$$= \begin{cases} C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} & (\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ のとき}) \\ (C_1 t + C_2) e^{-\lambda_1 t} & (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7-3-53)$$

② 係数  $a$  と  $b$  が一定で, 関数  $p(t) \neq 0$  となる場合

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right) \left( \frac{d}{dt} + \lambda_2 \right) f = p(t) \quad (7-3-54)$$

同様に,  $(d/dt + \lambda_2)f = g(t)$  とおくと, (7-3-54)式は下の式で表すことができる.

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right) g = p(t) \quad (7-3-55)$$

関数  $g(t)$  は(7-3-12)式より下の式で表すことができ、この関数を用いて、関数  $f(t)$  も(7-3-12)式を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \left[ \int^t p(t_2) e^{\lambda_1 t_2} dt_2 + C_1 \right] e^{-\lambda_1 t} \\
 f(t) &= \left[ \int^t g(t_1) e^{\lambda_2 t_1} dt_1 + C_2 \right] e^{-\lambda_2 t} \\
 &= \left[ \int^t \left\{ \int^{t_1} p(t_2) e^{\lambda_1 t_2} dt_2 + C_1 \right\} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_1} dt_1 + C_2 \right] e^{-\lambda_2 t} \\
 &= \begin{cases} \int^t \left( \int^{t_1} p(t_2) e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_1} dt_1 e^{-\lambda_2 t} + C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} & (\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ のとき}) \\ \int^t \left( \int^{t_1} p(t_2) e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) dt_1 + (C_1 t + C_2) e^{-\lambda_1 t} & (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7-3-56)
 \end{aligned}$$

\* 2 階の微分方程式の別解 (省略してよい)

微分演算子として、「 $D = \frac{d}{dt}$ 」とおくと、1 階の微分方程式(7-3-8)式は下のよう書くことができる。

$$\left(\frac{d}{dt} + a\right)f(t) = p(t) \rightarrow (D + a)f(t) = p(t) \quad (7-3-57)$$

この式から形式的に、両辺に、演算子  $(D + a)^{-1}$  をかけて演算すると、その解  $f(t)$  は、(7-3-12)式より下の式で表すことができる。このような解法を演算子法と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
 (D + a)^{-1} (D + a)f(t) &= f(t) \\
 &= (D + a)^{-1} p(t) = \frac{1}{D + a} p(t) = \left[ \int^t p(t_1) e^{at_1} dt_1 + C \right] e^{-at} \quad (7-3-58)
 \end{aligned}$$

次に、2 階の微分方程式(7-3-49)式にこの解法を適用する。(7-3-49)式を次のように表す。

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} + \lambda_2\right)f = p(t) \rightarrow (D + \lambda_1)(D + \lambda_2)f(t) = p(t) \quad (7-3-59)$$

定数  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  が等しくない場合( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )は次のように形式上、変形できる。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (D + \lambda_2)^{-1} (D + \lambda_1)^{-1} p(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \frac{1}{D + \lambda_2} - \frac{1}{D + \lambda_1} \right] p(t) \\
 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \left[ \int^t p(t') e^{\lambda_2 t'} dt' + C_2 \right] e^{-\lambda_2 t} - \left[ \int^t p(t') e^{\lambda_1 t'} dt' + C_1 \right] e^{-\lambda_1 t} \right] \quad (7-3-60)
 \end{aligned}$$

過渡現象を含んだ一般的な解を得るためには、2階の微分方程式である(7-3-47)式を解く必要があるが、時刻  $t \rightarrow \infty$  となるような準定常状態では、過渡現象はなく周期的現象となるので、電流、起電力も複素数表示で扱うのが便利である。このときも、電流が位相角  $\varphi$  だけずれているものと仮定し、次の式で表すこととしよう。

$$\text{起電力 } \dot{V} = V_0 e^{i\omega t}, \quad \text{電流 } \dot{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (7-3-38)'$$

上の式を元の回路の方程式(7-3-47)式に代入し、矛盾のないように複素インピーダンス  $\dot{Z}$  と位相角  $\varphi$  を決定する。代入すると下の式を得ることができる。

$$(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}) \dot{I} = (R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})) \dot{I} = \dot{V} \quad (7-3-61)$$

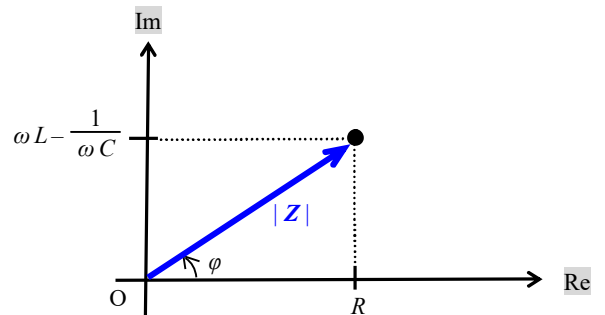
複素インピーダンス  $\dot{Z}$ 、電流  $\dot{I}$ 、交流電源の起電力  $\dot{V}$  との関係は、「 $\dot{Z} \dot{I} = \dot{V}$ 」が成り立つので、この回路における複素インピーダンス  $\dot{Z}(\omega)$  は、その大きさ  $|\dot{Z}(\omega)|$  と位相角  $\varphi$  は下の式のように与えられる。

$$\dot{Z}(\omega) = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |\dot{Z}(\omega)| e^{i\varphi} \quad (7-3-62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\dot{Z}(\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right. \quad (7-3-63)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (7-3-64)$$

(7-3-62)式について、横軸を実数軸(Real part; Re)に、縦軸を虚数軸(Imaginary part; Im)にとると、右の図のように描くことができ、複素インピーダンスの絶対値  $|Z|$  がインピーダンス  $Z$  になり、横軸からの角度  $\varphi$  が位相角に相当する。



したがって、時刻  $t \rightarrow \infty$  となるような準定常状態では、電流  $I(t)$  は、インピーダンス  $Z$  を用いて下の式のように表すことができる。

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{Z} V_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (7-3-65)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (7-3-63)'$$



回路全体で消費される瞬間の電力  $P(t)$  は, (7-3-44) 式と同様に下の式で表され, 時間平均した回路全体の消費電力  $\langle P \rangle$  も (7-3-45) 式と同様に表すことができる.

$$P(t) = I(t) V(t) = I_0 V_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \quad (7-3-44)'$$

$$\langle P \rangle = \frac{I_0 V_0}{2} \cos \varphi = I_e V_e \cos \varphi = \frac{V_0^2}{2Z} \cos \varphi = \frac{V_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (7-3-66)$$

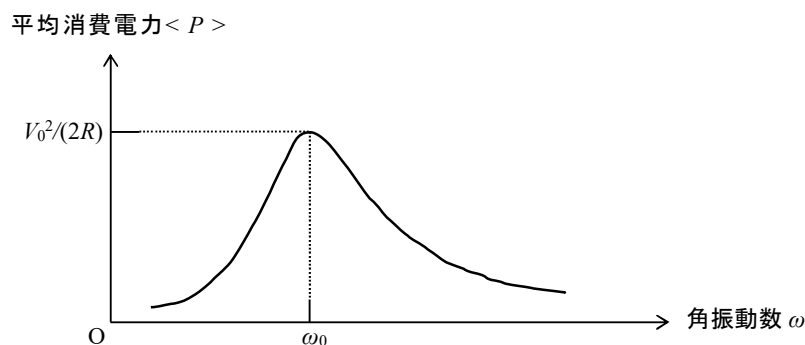
平均の消費電力が最大となる角振動数  $\omega$  は, (7-3-66) 式の分母が最小のときである. 分母が最小となる角振動数  $\omega_0$  は下の関係を満たすときである.

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7-3-67)$$

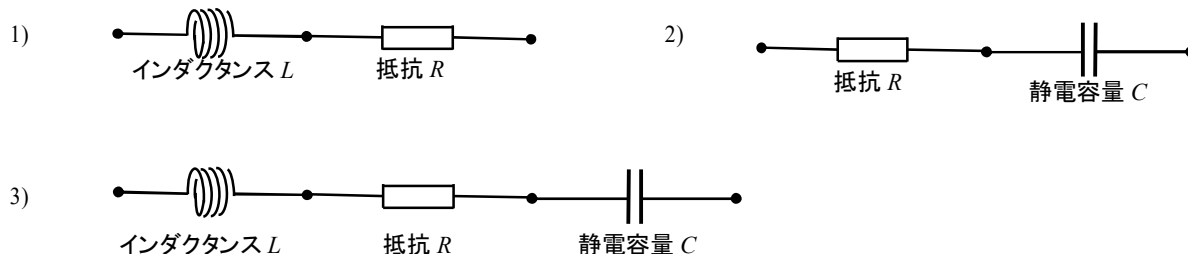
そのとき, 平均の消費電力は  $\langle P \rangle_{\max}$  となり, 下の式が成り立つ.

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{V_0^2}{2R} \quad (7-3-68)$$

横軸を角振動数  $\omega$ , 縦軸を時間平均した回路の消費電力  $\langle P \rangle$  とすると, 下のグラフのように「 $\omega = \omega_0$ 」でピークに達する.

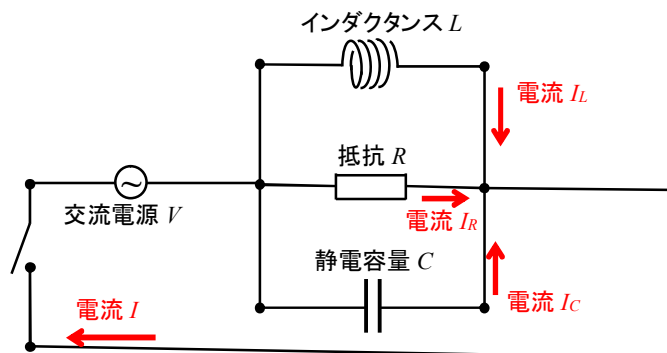


問題 7-2 抵抗  $R = 4.0 \, \Omega$  の抵抗器, 静電容量  $C = 200 \, \mu\text{F}$  のコンデンサ, 自己インダクタンス  $L = 10 \, \text{mH}$  のコイルが下の図のように直列に結ばれている. 周波数  $f = 50 \, \text{Hz}$  の交流につないだときのインピーダンス  $Z$  と位相角  $\varphi$  を求めよ.



答 1)  $Z = 5.1 \, \Omega$ ,  $\varphi = 0.67 \, \text{rad} = 38^\circ$       2)  $Z = 16 \, \Omega$ ,  $\varphi = -1.3 \, \text{rad} = -76^\circ$   
 3)  $Z = 13 \, \Omega$ ,  $\varphi = -1.3 \, \text{rad} = -73^\circ$

例題 7-5 自己インダクタンス  $L$  を持つコイル、抵抗  $R$ 、静電容量  $C$  を持つコンデンサ、起電力  $V(t)$  のとなる交流電源を図のように並列につなぎ、時刻  $t=0$  でスイッチをオンにした。充分な時間が経過したところ、系は過渡状態を過ぎ準安定状態となった。このとき、系全体のインピーダンス  $Z$  と位相角  $\varphi$  を求めよ。



答：複素数表示で扱ってみよう。

$$\text{起電力 } V(t) \rightarrow \dot{V} = V_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{抵抗を流れる電流 } I_R \rightarrow \dot{I}_R = \frac{1}{R} \dot{V} = \frac{1}{R} V_0 e^{i\omega t},$$

$$\text{コイルを流れる電流 } I_L \text{ (全起電力 } = V + V_L = 0 \text{ より, } V = L \frac{dI}{dt} \rightarrow I_L = \frac{1}{L} \int V dt = \frac{1}{i\omega L} V_0 e^{i\omega t}) \rightarrow$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{i\omega L} \dot{V} = -i \frac{1}{\omega L} V_0 e^{i\omega t},$$

$$\text{コンデンサを流れる電流 } I_C \text{ (} I_C = C \frac{dV}{dt} \text{ より)} \rightarrow \dot{I}_C = i\omega C \dot{V} = i\omega C V_0 e^{i\omega t},$$

したがって、全電流  $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \left( \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right) \dot{V} = \frac{1}{\dot{Z}} \dot{V}$  , となるので、複素インピーダンス  $\dot{Z}$  は下の式のように表すことができる。

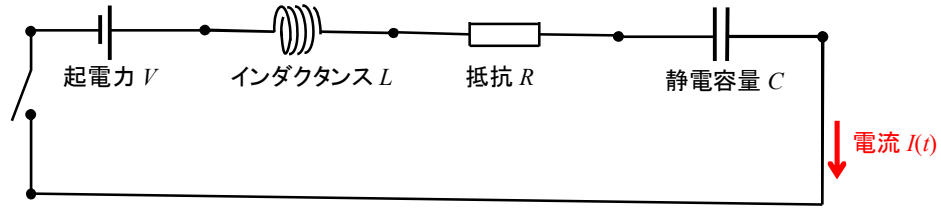
$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\frac{1}{R} - i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \frac{\frac{1}{R} + i\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \\ &= |\dot{Z}| e^{i\varphi} \end{aligned}$$

したがって、インピーダンス  $Z$  と位相角  $\varphi$  は下の式のように表すことができる。

$$Z = |\dot{Z}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}},$$

$$\tan \varphi = \frac{1/(\omega L) - \omega C}{1/R}$$

例題 7-6 自己インダクタンス  $L$  を持つコイル、抵抗  $R$ 、静電容量  $C$  を持つコンデンサ、起電力  $V$  のとなる電池を図のように直列につなぎ、時刻  $t=0$  でスイッチをオンにした。このとき、時刻  $t$  での電流  $I(t)$  を求めよ。ただし、時刻  $t=0$  での電流  $I(0)=0$ 、導線を通過する電荷  $Q(0)=0$  とする。



答; 時刻  $t$  で導線を通過する電荷を  $Q(t)$  とすると, (7-3-47) 式より下の微分方程式が成り立つ.

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V \quad \text{or} \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{V}{L}$$

上の微分方程式を下の式のように変形する. ここで, 定数  $\lambda_1, \lambda_2$  は,  $\lambda_1 (\lambda_2) = R/(2L) \pm \sqrt{(R/(2L))^2 - 1/(LC)} = (R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C})/(2L)$

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right) \left( \frac{d}{dt} + \lambda_2 \right) Q = \frac{V}{L}$$

解は,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なので, (7-3-56) 式より, 下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int^t \left( \int^{t_1} \frac{V}{L} e^{\lambda_1 t_2} dt_2 \right) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_1} dt_1 + C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{V}{L} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} = \frac{V}{L} LC + C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \end{aligned}$$

初期条件  $Q(0)=0$  より, 「 $0 = CV + C_1 + C_2$ 」,  $I(0)=0$  より, 「 $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$ 」が成立する. これより, 定数  $C_1$  と  $C_2$  は下の式のように決まる. さらに, 電流  $I(t)$  も下の式で与えられる.

$$C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} CV, \quad C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} CV$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{dQ}{dt} = -CV \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = -CV \frac{1/(LC)}{2\sqrt{(R/(2L))^2 - 1/(LC)}} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ &= -CV \frac{1}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \end{aligned}$$

(時刻  $t$  が 0 近傍では,  $I(t) \sim CV \lambda_1 \lambda_2 t \sim \frac{V}{L} t$  となる)