問題解答

8. 章

問 8-1-1.

1) $\theta = \dfrac{2\pi}{360°}\,\Theta = \dfrac{2\pi}{360°}\times 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

2) $\theta = \dfrac{2\pi}{360°}\times 150° = \dfrac{10\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad.

3) $\theta = \dfrac{2\pi}{360°}\times 225° = \dfrac{10\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad.

4) $\Theta = \dfrac{360°}{2\pi}\,\theta = \dfrac{360°}{2\pi}\times\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{360°}{12} = 30°$.

5) $\Theta = \dfrac{360°}{2\pi}\times 1.5\pi = (180+90)° = 270°$

6) $\Theta = \dfrac{360°}{2\pi}\times 2.75\pi = (720+135)° = 855°$.

問 8-1-2.

1) $\ell = r\,\theta = 4\times\dfrac{\pi}{4} = \pi = 3.1415 \sim 3.1$ m.

2) $\ell = r\,\theta = 4\times\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{10\pi}{3} = 10.381 \sim 10$ m.

3) $\ell = r\,\theta = 4\times(\dfrac{2\pi}{360°}\times 225°) = 4\times\dfrac{5\pi}{4} = 5\pi = 15.708 \sim 16$ m.

4) $\ell = r\,\theta = 4\times(\dfrac{2\pi}{360°}\times 330°) = 4\times\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{22\pi}{3} = 23.038 = 23$ m.

問 8-1-3.

1) 周期 $T = \dfrac{\text{回転に要した時間}}{\text{回転した数}} = \dfrac{20\text{ s}}{50\text{ 回}} = 0.4$ s.

2) 回転数 $f = \dfrac{\text{回転した数}}{\text{回転に要した時間}} = \dfrac{50\text{ 回}}{20\text{ s}} = 2.5$ [1/s=Hz].

3) 回転数 $f = \dfrac{1}{T}$ より，右辺を計算すると， 右辺 $= \dfrac{1}{0.4\text{ s}} = 2.5$ 1/s = 左辺，したがって，(8-1-5)式は成立．

または， 上の 1)と 2)の導出した式で，分子と分母が逆になっているので，(8-1-5)式のように逆数で表すことができる．

4) 一周の長さ $L = 2\pi\,r = 10\pi = 31.745 \sim 32$ m.

5) 1 秒間当たり 2.5 回転， すなわち， $2.5\times2\pi = 5\pi$ だけ回転するので，10 秒間の回転角は 50π [rad].

問 8-1-4.

1) 弧の長さ $\ell = r\,\theta = 5\times(\dfrac{2\pi}{360°}\times 60°) = 5\times\dfrac{\pi}{3} = 5.236 \sim 5.2$ m

2) 2.5 秒で 60 °回転したのだから，360 °回転するためにはその 6 倍の時間が必要となる．周期 $T = 6\times2.5 = 15$ s,
回転数 $f = 1/T = 1/15 = 0.066667 \sim 0.067$ Hz, 角速度 $\omega = 2\pi/T = 2\pi/15 = 0.41887 \sim 0.42$ rad/s,
速さ $v = r\,\omega = 5\times(2\pi/15) = 2\pi/3 = 2.09433 \sim 2.1$ m/s.

3) 周期，回転数，角速度は回転半径によらないので変わらない．動いた距離と速さは半径に比例するので 2 倍になる．

問 8-1-5.

周期 $T = \dfrac{\text{回転に要した時間}}{\text{回転した数}} = \dfrac{4\times 60\ \text{s}}{120\ \text{回}} = 2.0$ s,　回転数 $f = \dfrac{120\text{回}}{4\times 60\ \text{s}} = 0.5$ Hz,

角速度(大きさ)$\omega = 2\pi f = \pi = 3.1415 \sim 3.1$ rad/s,　速さ $v = r\,\omega = 0.2\times\pi = 0.6283 \sim 0.63$ m/s.

問 8-2-1.

1) 60 °回転するのに，2.5 秒要したので，360 °回転するのにはその 6 倍，すなわち 6×2.5=15 秒要する. → 周期 $T = 15$ s,
角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 2\pi/15 = 0.418867 \sim 0.42$ rad/s となるので，速さ $v = r\omega = 10\pi/15 = 2.0943 \sim 2.1$ m/s,
加速度の大きさ $a = r\omega^2 = 20\pi^2/15^2 = 0.87725 \sim 0.88$ m/s^2.
2) 速さ $v = r\omega$, 加速度の大きさ $a = r\omega^2$ と半径 r に比例するので，それぞれ 2 倍になる.
3) 2.5 秒間に 90 °回転する場合，周期 $T = (360\ °/90\ °)\times 2.5 = 10$ s で 2/3 倍になり，角速度 $\omega = 2\pi/T = 2\pi/10$ と 3/2 倍となる.
この場合，速さ v は角速度 ω に比例するので，3/2=1.5 倍となり，加速度の大きさ a は$(3/2)^2$=2.25 倍となる.
一方，2.5 秒間に 120 の°回転する場合，周期 $T = (360\ °/120\ °)\times 2.5 = 7.5$ s で 1/2 倍になり，角速度 $\omega = 2\pi/7.5$ と 2 倍となるり，速さ v は 2 倍となり，加速度の大きさ a は $2^2 = 4$ 倍となる.

問 8-2-2.　4 分間で 180 回転するので，周期 $T = (4\times 60\ \text{s})/180$ 回 $= 1.33333$ s, 回転数 f=1/T = 0.75 Hz, 速さ $v = r\omega$
$= 0.2\times(2\pi\times 0.75) = 0.3\pi = 0.9425 \sim 0.94$ m/s, 加速度の大きさ $a = r\omega^2 = 0.2\times(2\pi\times 0.75)^2 = 0.45\pi^2 = 4.4413 \sim 4.4$ m/s^2.

問 8-3-1.

1) 2.5 秒で 45 °回転するので，周期 $T = (360\ °/45\ °)\times 2.5 = 20$ s, 向心力の大きさ $F = m\,r\,\omega^2 = m\,r\,(2\pi/T)^2 = 4\times 5\times(2\pi/20)^2$
$= \pi^2/5 = 1.9738 \sim 2.0$ N,　向心力の向きは中心方向.
2) 2.5 秒で 90 °回転するとき，周期 $T = 10$ s, 向心力の大きさ $F = m\,r\,(2\pi/T)^2 = 4\times 5\times(2\pi/10)^2 = 7.8952 \sim 7.9$ N,
2.5 秒で 120 °回転するとき，周期 $T = 7.5$ s, 向心力の大きさ $F = m\,r\,(2\pi/T)^2 = 4\times 5\times(2\pi/7.5)^2 = 14.0359 \sim 14$ N.

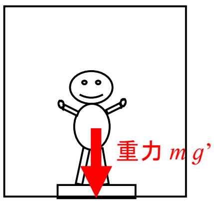
問 8-3-2.　3 分間で 90 回転するので，周期 $T = (3\times 60)/90 = 2.0$ s, 向心力の大きさ $F = m\,r\,\omega^2 = m\,r\,(2\pi/T)^2 = 0.2\times 0.8\times(2\pi/2)^2$
$= 1.5790 \sim 1.6$ N.

問 8-3-3.

1) 太陽と地球の間の万有引力　2) 自転車のタイヤと地面の間の摩擦力　3) ブランコのワイヤーの張力
4) 陽子と電子の間の静電気力(クーロン力)　5) ルーレット上にいるボールに働く垂直抗力

問 8-4-1.

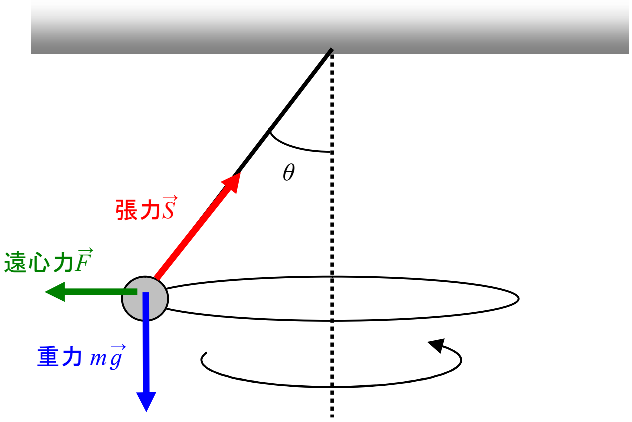
1) 慣性力の大きさ $F = m\,a = 50\times 1.2 = 60$ N, 下向き，人に働く合力の大きさ $= F + m\,g$
$= m\,(a + g) = m\,(1.2 + 9.8) = m\,g' = 50\times 11 = 550$ N.
このエレベータと同期している座標系(エレベータとともに移動している座標系)
で見ると，エレベータ内にいる人には重力加速度 g'による重力 $m\,g' = m\times 11$ [N]
が作用していることと同じである(エレベータの外の景色が見えないと，中の人は
加速度運動しているかどうかも判断できない).



2) 慣性力の大きさ $F = m\,a = 50\times2.3 = 115$ N，上向き，人に働く合力の大きさ $= F + m\,g = m\,(-a + g\,) = 50\times7.5 = 375$ N.

3) 慣性力の大きさ $F = m\,a = 50\times9.8 = 490$ N，上向き，人に働く合力の大きさ $= F + m\,g = m\,(-a + g\,) = 50\times0 = 0.0$ N.
自由落下しているエレベータ内にいる人には，力が働かず，無重量状態(実質的に重力が働かない状態)になる.

問 8-4-2.



1) 鉛直方向の力のつり合いより，「$S\cos\theta = m\,g$」より，張力の大きさ $S = m\,g/\cos\theta$.

2) 回転半径 $R = \ell\sin\theta$.

3) 円運動している物体とともに円運動する座標系から見ると物体には，張力，重力，遠心力が働いていて 3 つの力がつりあっているので，物体は移動していないことになる．水平方向の力のつり合いより，遠心力の大きさ $F = S\sin\theta = m\,g\tan\theta$.

4) 回転半径を R として，遠心力の大きさ $F = m\,R\,\omega^2$

より，角速度の大きさ $\omega = \sqrt{\dfrac{F}{m\,R}} = \sqrt{\dfrac{m\,g\tan\theta}{m\,\ell\sin\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\theta}}$.

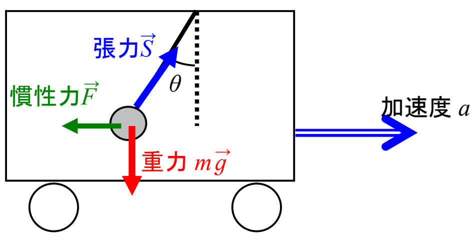
問 8-4-3.

1) 角速度 $\omega = 2\pi/T = 2\pi/4.0 = \pi/2 = 1.5708 \sim 1.6$ rad/s.

2) このとき，遠心力と最大静止摩擦力はつりあっている．最大静止摩擦力 $F_0 = m\,r\,\omega^2 = 0.5\times0.4\times(\pi/2)^2 = 0.05\pi^2$
$= 0.49348 \sim 0.49$ N.

3) 垂直抗力の大きさ N とすると，最大静止摩擦力 $F_0 = \mu\,N$ より，静止摩擦係数 $\mu = F_0/N = 0.05\pi^2/(0.5\times9.8)$
$= 0.1007 \sim 0.10$.

問 8-4-4. バス内にいる人がひもにつるされたおもりをみると，おもりには，重力 $m\vec{g}$，張力$\vec{S}$，慣性力$\vec{F}$が働いて，3 つの力がつりあっている．水平方向のつり合いより，「$F = S\sin\theta$」，鉛直方向のつり合いより，「$m\,g = S\cos\theta$ 」が成り立つ.



1) 鉛直方向のつり合いより，張力の大きさ $S = m\,g/\cos\theta$ で，慣性力の大きさ $F = m\,a$ から，加速度の大きさ a
$= F/m = S\sin\theta/m = (m\,g/\cos\theta)\sin\theta/m = g\sin\theta/\cos\theta = g\tan\theta$.

2) 張力の大きさ $S = m\,g/\cos\theta$.

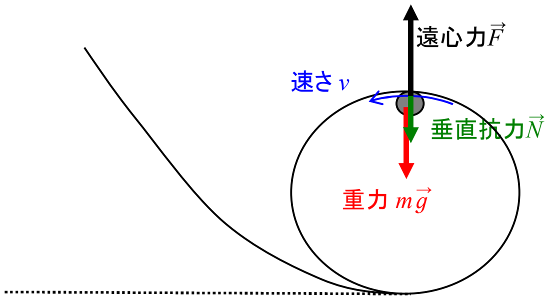
3) 慣性力の大きさ $F = m\,a = m\,g\tan\theta$.

問 8-4-5.

半径 r の円周上の最高点に到達したときの速さを v とする．力学的エネルギー保存則より，高さ h の状態と半径 r の円周上の最高点に到達したときの状態で次の式が成り立つ．「$m\,g\,h = m\,v^2/2 + m\,g\,2r$,　　① 」

また，頂点では図のように，物体には重力 $m\vec{g}$，面が垂直に押す力(垂直抗力)$\vec{N}$，遠心力$\vec{F}$(遠心力の大きさ $F = m\,v^2/r$)が働き，つりあっている(ここで，曲面を滑らかに回るためには垂直抗力の大きさ N が正となる → $N > 0$)

「$-m\,g - N + F = -m\,g - N + m\,v^2/r = 0$,　　② 」



②式より，　$m\,v^2 = (m\,g + N)r$　となり，これを①式に代入し，高さ h の最小値を求める(垂直抗力の大きさ $N > 0$).

$h = r/2 + N\,r/(2m\,g) + 2r > r/2 + 2r = 5r/2$.

問 8-4-6.

1) ばねの伸びを ℓ とすると，重力とばねの弾性力がつりあうので，「$m\,g = k\,\ell$」より，ばねの伸び $\ell = m\,g/k$.

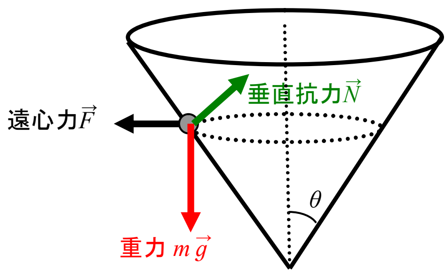
2) このときのばねの伸びを ℓ'とする．エレベータとともに動く系で考えると，慣性力は下向きに働き，重力(下向き)，慣性力(下向き)，弾性力(上向き)がつりあっている．「$m\,g + m\,a = k\,\ell'$」 より，ばねの伸び $\ell' = m\,(g + a)/k$.

3) このときのばねの伸びを ℓ''とする．エレベータとともに動く系で考えると，慣性力は上向きに働き，重力(下向き)，慣性力(上向き)，弾性力(上向き)がつりあっている．「$m\,g = k\,\ell'' + m\,a$」 より，ばねの伸び $\ell'' = m\,(g - a)/k$.

問 8-4-7.

1) 図より，$\tan\theta = R/h$ より，回転半径 $R = h\tan\theta$.

2) 円運動している座標系から見ると，図のように重力，垂直抗力，遠心力が働き，つりあっている．
水平方向の力のつり合いより，「$F = N\cos\theta$,　① 」
鉛直方向の力のつり合いより，「$m\,g = N\sin\theta$,　② 」
②式を①式に代入すると，遠心力の大きさ $F = m\,g\cos\theta/\sin\theta$.



3) 遠心力の大きさ $F = m\,R\,\omega^2 = m\,R\,(2\pi/T)^2$ より，周期 T は下の式のように求めることができる．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,R}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,h\tan\theta\sin\theta}{m\,g\cos\theta}} = \frac{2\pi}{\cos\theta}\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

(角度 $\theta = 0$ なら，回転半径が無限大になり，周期も無限大となる)

問 8-5-1.

地球の自転の周期 T_1 は 24 時間なので，回転数 f_1 と角速度 ω_1 は下の値となる．

$T_1 = 24\,\mathrm{h} = 24\times3600\,\mathrm{s} = 8.64\times10^4 \sim 8.6\times10^4\,\mathrm{s}$, $f_1 = 1/T_1 = 1.1574\times10^{-5} \sim 1.2\times10^{-5}\,\mathrm{Hz}$, $\omega_1 = 2\pi f_1 = 3.6361\times10^{-5} \sim 3.6\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$.

地球の公転の周期 T_2 はおよそ 365.25 日なので，回転数 f_2 と角速度 ω_2 は下の値となる．

$T_2 = 365.25\times24\times3600 = 3.15576\times10^7 \sim 3.2\times10^7\,\mathrm{s}$, $f_2 = 1/T_2 = 3.16881\times10^{-8} \sim 3.2\times10^{-8}\,\mathrm{Hz}$, $\omega_2 = 1.9910\times10^{-7} \sim 2.0\times10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$.

問 8-5-2.

1) 周期 $T = 3.16\times10^{7}$ s, 回転半径 $R = 1.50\times10^{11}$ m を(8-5-1)式に代入する．定数 $C = T^2/R^3 = 2.96587\times10^{-19}$ $\sim 2.96\times10^{-19}$ s^2/m^3.

2) (8-5-4)式と(8-5-6)式から太陽の質量 $M = 4\pi^2/(CG) = 4\pi^2/(1.9788\times10^{-29}) = 1.979\times10^{30} \sim 2.0\times10^{30}$ kg.

3) ケプラーの第 3 法則より，「$T^2/R^3 =$ 一定」より，$T^2/R^3 = T'^2/R'^3 = T'^2/(2R)^3$, $\rightarrow$ $(T'/T)^2 = 8$, $\rightarrow$ $T' = \sqrt{8}\ T = 2.828T \sim 2.8T$.

問 8-5-3. (8-5-5)式で表された万有引力の式が地表における重力に等しいとして，地球の半径 R を用いると，下の式が成り立つ．

$$m\,g = G\frac{M\,m}{R^2} \qquad \rightarrow \qquad g = G\frac{M}{R^2}.$$

問 8-5-4.

1) 問 8-5-3 の結果より，地球の質量 $M_{\text{地球}} = g\,R^2/G = 9.807\times(6.380\times10^{6})^2/(6.674\times10^{-11}) = 5.981\times10^{1+12+11} = 5.98\times10^{24}$ kg.

2) 月における重力が万有引力によるものだとする．月の質量 $M_{\text{月}} = (g/6)\,R_{\text{月}}^{\,2}/G = (9.807/6)\times(1.740\times10^{6})^2/(6.674\times10^{-11})$ $= 7.414\times10^{-1+12+11} = 7.41\times10^{22}$ kg.

3) 月は地球の周りを 27 日 7 時間 43 分で一周する．周期 $T = 27\times24\times3600+7\times3600+43\times60 = 2332800+25200+2580$ $= 2360580 \sim 2.36\times10^{6}$ s.　角速度 $\omega = 2\pi/T = 2.662\times10^{-6} \sim 2.66\times10^{-6}$ rad/s.

4) 「地球と月の万有引力=月の向心力」より求める．　地球と月の間の距離を r とし，地球の質量 M，月の質量 m とする．

$$\rightarrow \quad G\frac{M\,m}{r^2} = m\,r\,\omega^2 \qquad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{G\,M}{\omega^2}} = (6.674\times10^{-11}\times5.981\times10^{24}/(2.662\times10^{-6})^2)^{1/3}$$

$= (5.633\times10^{25})^{1/3} = 3.833\times10^{8} \sim 3.83\times10^{8}$ m $= 3.83\times10^{5}$ km.

9. 章

問 9-0-1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ より計算する.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times\sqrt{3}\times 1/2=2\sqrt{3}$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}/2=6$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times 2\sqrt{2}\times 0=0$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=4\times 2\sqrt{2}\times 1=8\sqrt{2}$.

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 3\sqrt{2}\times(-\sqrt{2}/2)=-6$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=2\times 3\sqrt{2}\times(\sqrt{2}/2)=6$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times 2\times(-\sqrt{3}/2)=-3$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{3}\times 2\times 1/2=\sqrt{3}$.

問 9-0-2.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=3\times(-2)+1\times 1+0\times 2=-6+1+0=-5$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 3 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(2-0)\,\vec{e}_x+(0-6)\,\vec{e}_y+(3+5)\,\vec{e}_z=(2,-6,8).$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+1\times(-1)+2\times 0=-2+(-1)+0=-3$, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(0+2)\,\vec{e}_x+(-4-0)\,\vec{e}_y+(-1+2)\,\vec{e}_z=(2,-4,1)$.

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+(-2)+(-8)=-12$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -4\end{vmatrix}=(4-4)\,\vec{e}_x+(-4-(-4))\,\vec{e}_y+(2-2)\,\vec{e}_z=(0,0,0).$$ ($\vec{a}/\!/\vec{b}$なので, $\vec{a}\times\vec{b}=0$)

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3+(-2)+(-3)=-8$, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ -3 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(-6+2)\,\vec{e}_x+(-1+9)\,\vec{e}_y+(-6+2)\,\vec{e}_z=(-4,8,-4)$.

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+1+0=-1$, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{e}_z=(1+2)\,\vec{e}_z=(0,0,3)$.

6) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2-1+0=-3$, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{e}_z=(1-2)\,\vec{e}_z=(0,0,-1)$.

問 9-0-3. (9-0-15)式と(9-0-16)式より, $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=(b_y c_z-b_z c_y)\,\vec{e}_x+(b_z c_x-b_x c_z)\,\vec{e}_y+(b_x c_y-b_y c_x)\,\vec{e}_z$

なので, 上のベクトルと$\vec{a}$との内積「 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 」は次の式のように表すことができる.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z)\cdot((b_y c_z-b_z c_y)\,\vec{e}_x+(b_z c_x-b_x c_z)\,\vec{e}_y+(b_x c_y-b_y c_x)\,\vec{e}_z)$$

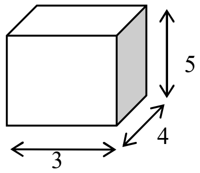
$$=(b_y c_z-b_z c_y)\,a_x+(b_z c_x-b_x c_z)\,a_y+(b_x c_y-b_y c_x)\,a_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

問 9-0-4.　　　行列の基本変形より, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ が成立する.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

問 9-0-5.

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3\times4\times5 = 60,$$

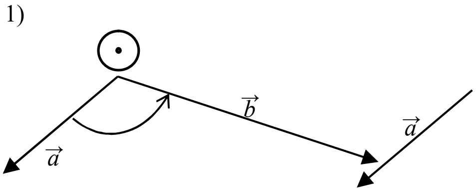


1 辺の長さが, 3×4×5 の立方体の体積

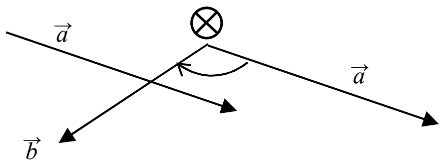
問 9-0-6.　$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$　(1 行目と 3 行目が同じなので, 行列の基本変形より, 行列式は「0」となる).

問 9-0-7.　下の平面上のベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$について外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の向きを記号「$\odot$」または「$\otimes$」で表せ.

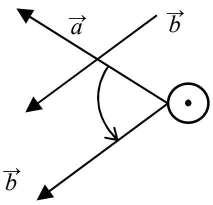
1)



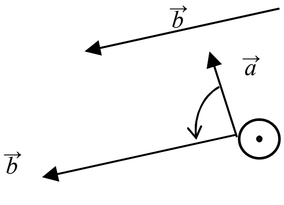
2)



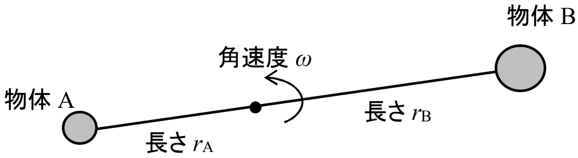
3)



4)



問 9-1-1.



1)　回転数 $f = 4/2 = 2.0$ Hz,

　角速度 $\omega = 2\pi f = 4\pi = 12.566 \sim 13$ rad/s.

2)　物体 A の速さ $v_A = r_A\,\omega = 0.8\pi = 2.5137 \sim 2.5$ m/s,

　物体 B の速さ $v_B = r_B\,\omega = 1.2\pi = 3.7699 \sim 3.8$ m/s.

3)　物体 A の運動量の大きさ $p_A = m_A\,v_A = 1.6\pi = 5.0265 \sim 5.0$ kg m/s,

　物体 B の運動量の大きさ $p_B = m_B\,v_B = 4.8\pi = 15.0796 \sim 15$ kg m/s.

4)　物体 A の角運動量の大きさ $L_A = r_A\,p_A = 0.32\pi = 1.00531 \sim 1.0$ kg m^2/s,

　物体 B の角運動量の大きさ $L_B = r_B\,p_A = 1.44\pi = 4.5239 \sim 4.5$ kg m^2/s.

問 9-1-2.

時刻 $t = 0$ s での物体 A の位置 $\vec{r}_A = (4.0, 0, 0)$ m, 物体 B の位置 $\vec{r}_B = (0, 4.0, 0)$ m,

$$\text{物体 A の角運動量}\ \vec{L}_A = m_A(\vec{r}_A \times \vec{v}_A) = 2\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\ \vec{e}_z = 16\ \vec{e}_z = (0, 0, 16)\ \mathrm{kg\ m^2/s},$$

$$\text{物体 B の角運動量}\ \vec{L}_B = m_B(\vec{r}_B \times \vec{v}_B) = 3\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-16)\ \vec{e}_z = -48\ \vec{e}_z = (0, 0, -48)\ \mathrm{kg\ m^2/s},$$

時刻 $t = 1$ s での物体 A の位置 $\vec{r}_A = (4.0, 0, 0) + \vec{v}_A \times 1\ \mathrm{s} = (4.0, 2.0, 0)$ m,

物体 B の位置 $\vec{r}_B = (0, 4.0, 0) + \vec{v}_B \times 1\ \mathrm{s} = (4.0, 4.0, 0)$ m,

$$\text{物体 A の角運動量}\ \vec{L}_A = m_A(\vec{r}_A \times \vec{v}_A) = 2\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\ \vec{e}_z = 16\ \vec{e}_z = (0, 0, 16)\ \mathrm{kg\ m^2/s},$$

$$\text{物体 B の角運動量}\ \vec{L}_B = m_B(\vec{r}_B \times \vec{v}_B) = 3\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-16)\ \vec{e}_z = -48\ \vec{e}_z = (0, 0, -48)\ \mathrm{kg\ m^2/s},$$

時刻 $t = 2$ s での物体 A の位置 $\vec{r}_A = (4.0, 2.0, 0) + \vec{v}_A \times 1\ \mathrm{s} = (4.0, 4.0, 0)$ m,

物体 B の位置 $\vec{r}_B = (4.0, 4.0, 0) + \vec{v}_B \times 1\ \mathrm{s} = (8.0, 4.0, 0)$ m,

$$\text{物体 A の角運動量}\ \vec{L}_A = m_A(\vec{r}_A \times \vec{v}_A) = 2\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\ \vec{e}_z = 16\ \vec{e}_z = (0, 0, 16)\ \mathrm{kg\ m^2/s},$$

$$\text{物体 B の角運動量}\ \vec{L}_B = m_B(\vec{r}_B \times \vec{v}_B) = 3\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-16)\ \vec{e}_z = -48\ \vec{e}_z = (0, 0, -48)\ \mathrm{kg\ m^2/s}.$$

角運動量は一定となる.

問 9-2-1.

$$\text{力のモーメント}\ \vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\ \vec{e}_z = (0, 0, 2)\ \mathrm{N\ m},$$

$$\text{力のモーメント}\ \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\ \vec{e}_z = (0, 0, 1)\ \mathrm{N\ m},$$

$$\text{力のモーメント}\ \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -9\ \vec{e}_z = (0, 0, -9)\ \mathrm{N\ m},$$

力のモーメントの合計 $\vec{M}_{\mathrm{tot}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = (0, 0, -6)$ N m, $\rightarrow$ xy 平面上で時計回り.

問 9-2-2.

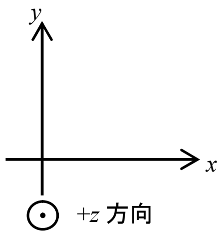
1) 平面上で反時計回りの回転を正とすると，力のモーメントの総和 $= r_1 F_1 + (-r_2 F_2) = 2\times4 - 3\,F_2 = 0$ より，

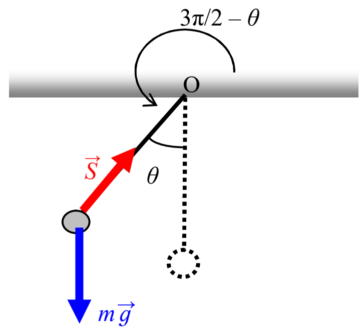
力の大きさ $F_2 = 8/3 = 2.66666 \sim 2.7$ N.

2) 力のモーメントの総和 $= r_1 F_1 + (-\,r_2 F_2 \sin 150^\circ) = 2\times4 - (3\,F_2/2) = 0$ より，力の大きさ $F_2 = 16/3 = 5.3333 \sim 5.3$ N.

問 9-2-3.

右の図のように力が働いている．





1) x 軸から物体が配置している位置までの角度は $3\pi/2 - \theta$

となるので，物体の位置$\vec{r}$は下の式で表すことができる．

$$\vec{r} = (\ell\cos(3\pi/2-\theta),\ \ell\sin(3\pi/2-\theta),\ 0)$$
$$= (-\ell\sin\theta,\ -\ell\cos\theta,\ 0).$$

2) 重力 $m\vec{g} = (0, -mg, 0)$ となるので， 重力による力のモーメント$\vec{M}_{重力} = \vec{r}\times m\vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\ell\sin\theta & -\ell\cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix}$

$= \vec{e}_z \begin{vmatrix} -\ell\sin\theta & -\ell\cos\theta \\ 0 & -mg \end{vmatrix} = \ell mg\sin\theta\ \vec{e}_z = (0, 0, \ell mg\sin\theta).$

(あるいは，位置$\vec{r}$と重力 $m\vec{g}$の間の角度は θ なので， $M_{重力} = |\vec{r}\times m\vec{g}| = |\vec{r}|\times|m\vec{g}|\sin\theta = \ell mg\sin\theta$.)

3) 張力$\vec{S} = (S\cos(\pi/2-\theta),\ S\sin(\pi/2-\theta),\ 0) = (S\sin\theta,\ S\cos\theta,\ 0)$ となるので，張力$\vec{S}$よる力のモーメント$\vec{M}_{張力}$

$= \vec{r}\times\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\ell\sin\theta & -\ell\cos\theta & 0 \\ S\sin\theta & S\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \begin{vmatrix} -\ell\sin\theta & -\ell\cos\theta \\ S\sin\theta & S\cos\theta \end{vmatrix} = 0 = (0, 0, 0).$

(あるいは，位置$\vec{r}$と張力$\vec{S}$は逆向きなので，その間の角度は π なので， $M_{張力} = |\vec{r}\times\vec{S}| = |\vec{r}|\times|\vec{S}|\sin\pi = 0$.)