

### 3. 物質中の静電場

2章では、真空中における静電気力、電場(電界)、電位などの電気に関する物理量について学び、その性質を学んだ。この章では、物質中の電氣的な性質について考えてみよう。

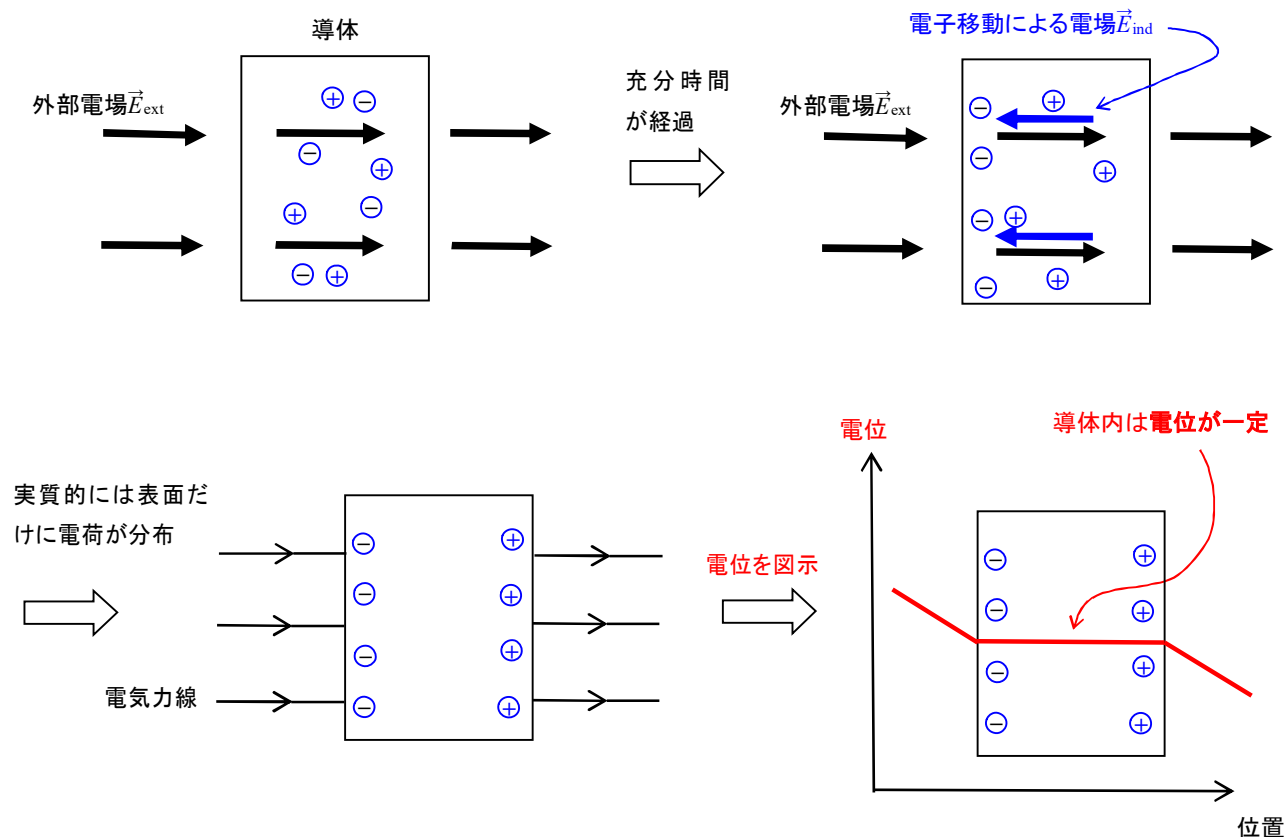
#### 3-1. 導体と不導体

物質が持つ電氣的な性質について分類すると、電気を通す性質(電気伝導性)の観点から、①導体、②不導体(または、絶縁体)、③半導体、④その他<sup>1</sup>に分類できる。その中で①～③について、その性質をまとめる。

- ① 導体; 金属などの電気をよく通す物質のこと。物質内にある電子が、原子、または分子の束縛から離れて自由に動くことができるので、電気伝導性が高い。電気伝導性は物質の種類による。また、電流が伝わる距離が長くなると電気伝導性は低くなる。理想的な導体では、電気抵抗は0となる。このような導体を完全導体と呼ぶ。
- ② 不導体(絶縁体); ガラス、陶磁器、ゴムなどの電気を通さない物質のこと。物質内にある電子は、原子、または分子に束縛され、自由に移動できないので、電気伝導性が低い。理想的な不導体では、電気抵抗は無限大となる。
- ③ 半導体; 外部からエネルギーが加えられると、物質内の原子・分子に束縛されていた電子が束縛を逃れて、自由に動くことができるようになる物質のこと。自由に動くことができるようになった電子が電気伝導に寄与できる。導体とは電気伝導の機構(メカニズム)が違う。電気伝導性は導体より低く、不導体よりも高い。ここでは、半導体については扱わない。

#### ・導体の電氣的性質

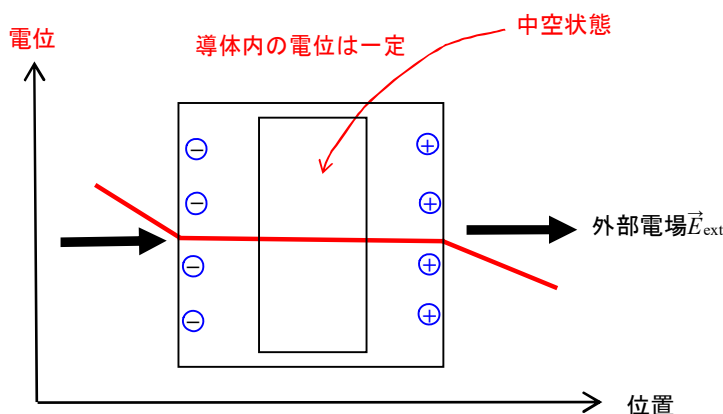
導体に外部から電場  $\vec{E}_{\text{ext}}$  を加えよう。導体内の自由に動くことができる電子(自由電子)は外部電場によって引き寄せられて、導体の表面に移動する。そして、移動した自由電子と正の電荷を持つイオンの配置のバランスが崩れて、(誘導)電場  $\vec{E}_{\text{ind}}$ <sup>2</sup>が発生する(表面に移動した電荷のことを誘導電荷と呼ぶ)。最終的には、外部電場  $\vec{E}_{\text{ext}}$  と誘導電荷によって作られる誘導電場  $\vec{E}_{\text{ind}}$  の合成電場が「0」になるまで移動する。この現象を静電誘導と呼ぶ。導体内では、「合成電場 =  $\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ind}} = 0$ 」で、「電位 = 一定」とみなしてよい。導体の表面以外は、電荷分布の偏りはない(正にも負にも帯電しない)。



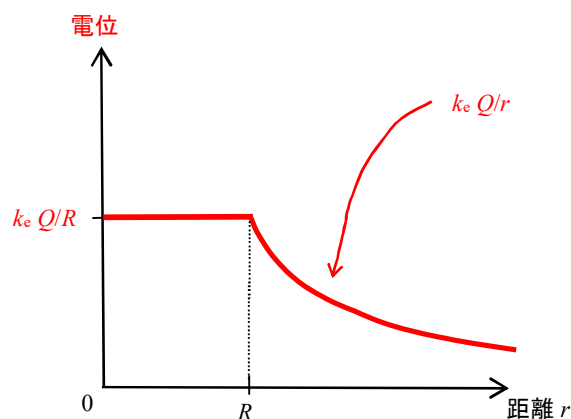
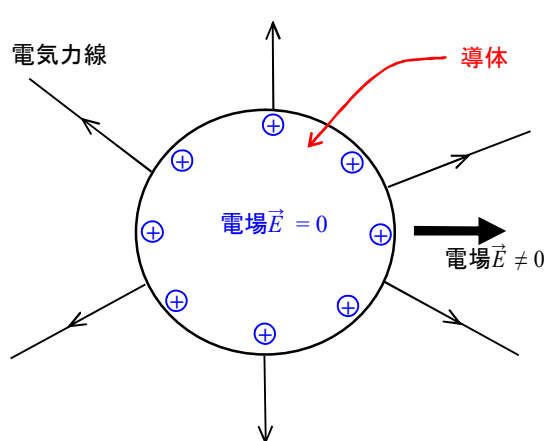
<sup>1</sup> その他としては、「超伝導体」、「超イオン伝導体」などがあるが、ここではその電氣的性質については扱わない。

<sup>2</sup> 外部電場があることで、誘導される(induced)ので、「誘導電場」と呼ぶ。

さらに、導体内に穴を空けて、中空状態にしよう。導体内部の中空に電荷がなければ、中空に接した導体中においても、(導体内の電位は一定なので)誘導電荷は生じない。そのため、導体と中空部分では、「電位 = 一定」である。は誘導電荷が中は電位が一定なので、中空状態にしても、電位が変化せず一定のままである。そのため、中空状態では、「電場 = 0」となる。このように、外部から電場を印加されても、導体で囲まれた内部の中空の電場が「0」となり、外部電場が中空内には入り込めない現象を「静電遮蔽」と呼ぶ。

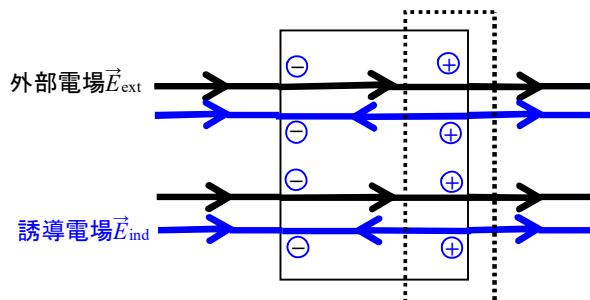


次に、半径  $R$  の導体球がある。この導体球は帯電しており、全体の電荷  $Q$  ( $Q > 0$ ) となっている場合を考えてみよう。導体内部では、「電場  $\vec{E} = 0$ 」になるので(導体内部に電荷があると、導体内部に電場ができる)、電荷は表面近傍に均等に分布する。また、導体外の空間では電場ができる。電位の基準の位置を導体の無限遠方にとると、導体球の半径  $R$  より遠方では、点電荷  $Q$  による電位と等しい。また、半径  $R$  の内側では電位は一定の値をとる。中心からの距離  $r$  と電位の関係を下の図の右に示した。



例題 3-1 真空中にある導体に一定な外部電場  $\vec{E}_{\text{ext}}$  を加えたとき、導体の表面に誘起される電荷による電荷面密度  $\sigma$  を求めよ。

答 右の図のように、外部電場  $\vec{E}_{\text{ext}}$  により、静電誘導が起こり、導体の表面に誘導電荷  $Q$  と  $(-Q)$  が生じる。誘導電荷  $Q$  を囲むように点線で閉曲面を考え、ガウスの法則を適用させる。ガウスの法則には外部電場の寄与はない。ガウスの法則より、正の電荷  $Q$  による電場の大きさ  $E_+ = Q/(2\epsilon_0 S)$  となる。閉曲面を囲んだ導体の一方の表面積  $S$  とした。もう片側の表面の電荷  $(-Q)$  を囲んだ閉曲面においても同様に考え、負の電荷  $(-Q)$  による電場の大きさ  $E_- = Q/(2\epsilon_0 S)$  となる。したがって、誘導電場の大きさ  $E_{\text{ind}} = E_+ + E_- =$



$Q/(\epsilon_0 S) = \sigma/\epsilon_0$  となる。導体内では外部電場  $\vec{E}_{\text{ex}}$  と誘導電場  $\vec{E}_{\text{ind}}$  が打ち消しあって 0 になるので、2 つの電場の大きさは等しい。したがって、 $E_{\text{ext}} = \sigma/\epsilon_0$  が成立する。一方、導体の外側では、外部電場と誘導電場が同じ向きとなるので、電場の大きさは(導体を挿入する前の)2 倍になる。

$$\sigma = \epsilon_0 E_{\text{ext}}$$

### ・不導体の電氣的性質

導体では、原子・分子に束縛されずに自由に動くことができる自由電子が電気伝導に寄与していた。一方、不導体(絶縁体)では、自由電子がないので電気伝導性が悪く、電子は原子や分子に束縛されており、その束縛されている中で、原子・分子の周りを動くことができる。そのため、外部から電場が印加されると、束縛された範囲で、電荷の分布に偏りが生じる。このように、外部電場の影響を受けて、原子・分子内において電荷分布に変化を受ける物質を「誘電体」と呼ぶ。不導体(絶縁体)は誘電体であるが、外部電場からの影響を受けることに着目して「誘電体」との名称が使われる。

## 3-2. コンデンサ

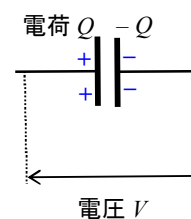
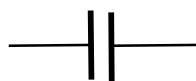
不導体の電氣的性質を扱う前に、真空中にある 2 枚の平行な金属板で構成された平板コンデンサ<sup>3</sup>について考えてみよう。コンデンサは正と負の電荷を貯めたり、放出したりすることができる素子である。コンデンサでは、貯めた電荷  $Q$  と印加する電位差(電圧)  $V$  の間には比例関係が成立する。その比例関係は、コンデンサの静電容量(または、キャパシタ(Capacitor)と呼ぶ)  $C$  として、下の比例式で定義される。

$$Q := C V \quad (3-2-1)$$

### ・素子としての記号

電気回路、電子回路の中でコンデンサを素子として表す記号を下に示す。両側の線は導線を表す。導線で結ばれたところは、同じ電位となる。中央部の板が 2 枚平行に並んだ部分がコンデンサを表す。

素子としての記号



### ・静電容量の単位

コンデンサに電圧  $V = 1 \text{ V}$  を印加したとき、電荷  $Q = 1 \text{ C}$  の電荷が貯まったときの静電容量  $C$  を、 $C = 1 \text{ F(ファラッド)}$ <sup>4</sup> と定義する。(3-2-1)式より、1 F は V(ボルト)と C(クーロン)を用いて表すことができる。

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} \quad (3-2-2)$$

ただし、電気回路の素子としてみたとき、実際の静電容量はもっと小さい。1  $\mu\text{F}$ (マイクロ・ファラッド) =  $10^{-6} \text{ F}$ , 1 nF(ナノ・ファラッド) =

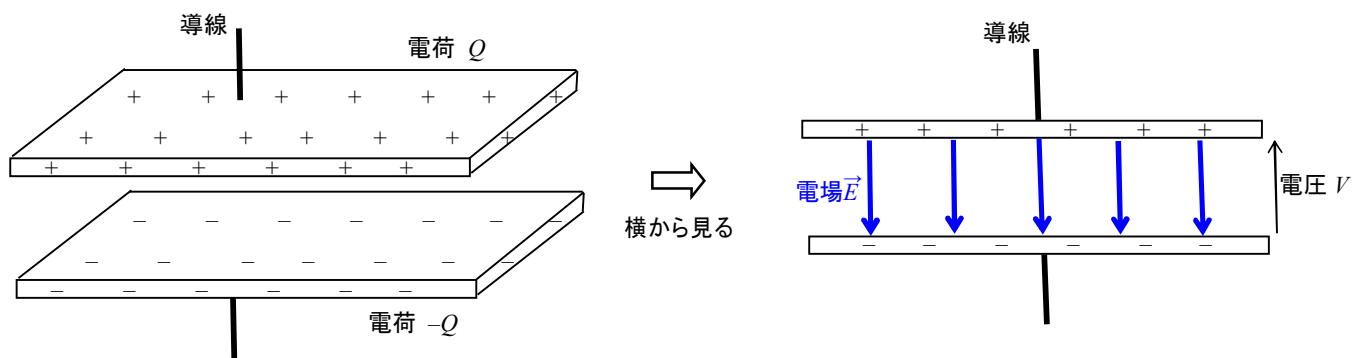
<sup>3</sup> コンデンサはドイツ語で英語では、キャパシタ(Capacitor)と呼ぶ。

<sup>4</sup> 静電容量の単位 F(ファラッド)は電磁気学の発展に大きく寄与したイギリスの物理学者のマイケル・ファラデー(M. Faraday)に由来する。

$10^{-9}$  F, 1 pF(ピコ・ファラッド) =  $10^{-12}$  F などの単位を持つコンデンサが素子として用いられる。

### ・平板コンデンサ

平板コンデンサは、2つの平行に置かれた金属板からできている。一方の金属板の片側の表面積  $S$  として、この金属板には電荷  $Q$  が、もう片方の金属板(片側の表面積は  $S$ )には電荷  $(-Q)$  が帯電しているものとする。平板の電荷面密度  $\sigma = Q/S$  である。また、2枚の平板間の幅  $d$  で、電位差(電圧)  $V$  である。「2-4. 電位と位置エネルギー」の項で述べたように、ガウスの法則を用いて、平板にはさまれた空間での電場  $\vec{E}$  を求めることができる。



(2-4-18)式で示したように、**真空中**に置かれた平板コンデンサでは、平板が広い場合( $\sqrt{S} \gg d$ )は、平板の端からの電場の漏れは無視でき、平板間の電場の大きさ  $E$  は下の式で表される。さらに、平板間の電位差(電圧)  $V$  を用いる。

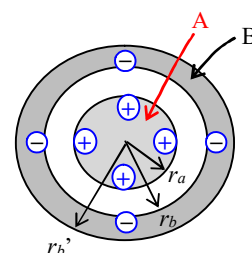
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{V}{d} \quad (3-2-3)$$

この式を変形し、(3-2-1)式と比べることで、平板コンデンサの静電容量  $C$  を表すことができる。

$$Q = \epsilon_0 \frac{S}{d} V = C V \quad \rightarrow \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (3-2-4)$$

平板コンデンサの静電容量  $C$  は、平板の面積  $S$  に比例し、平板間の長さ  $d$  に反比例する。

例題 3-2 図のように半径  $r_a$  の導体球 A に電荷  $Q$  を帯電させ、と内側の半径(内径)  $r_b$  で外側の半径(外径)  $r_b'$  の導体球殻 B に電荷  $(-Q)$  を帯電させた。この2つの導体球と導体球殻でできているコンデンサの静電容量  $C$  を求めよ。ただし、導体球 A と導体球殻 B の間の空間は真空とする。



答 電場は導体球 A と導体球殻 B の間の空間にのみ存在する。さらに、電荷はこの間の空間に接した部分で帯電する。ガウスの法則より、球の中心から半径  $r$  ( $r_a < r < r_b$ ) の位置では電場の大きさ  $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$  となる。したがって、導体球 A と導体球殻 B の間の電位差  $V$  は下のよう求めることができる。

$$V = \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{r} \right]_{r_a}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right)$$

したがって、静電容量  $C$  は「 $Q = CV$ 」より、次の式のように求めることができる。

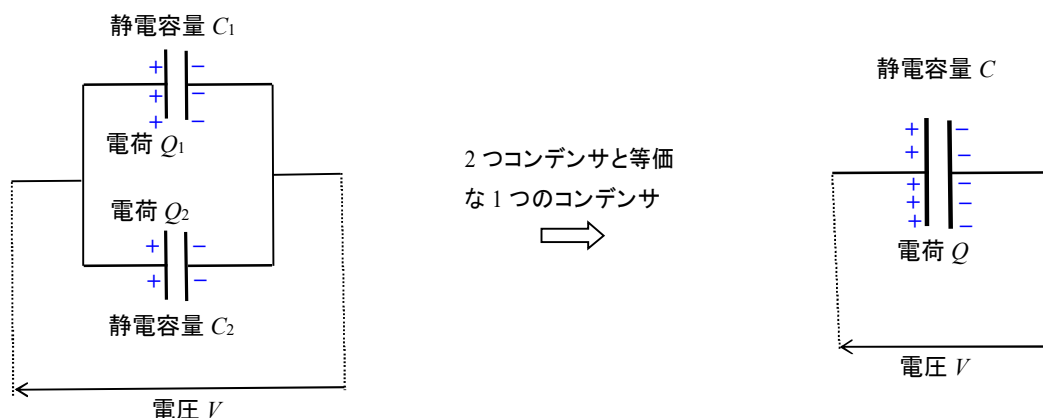
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

### ・複数のコンデンサからなる回路の合成静電容量

導線で結ばれた部分は同じ電位となることに注意して、複数のコンデンサがある回路の全体の静電容量  $C$  を求めよう。簡単のために、静電容量が  $C_1$  と  $C_2$  となるコンデンサ 1 と 2 を並列に接続した場合と直列に接続した場合について、合成の静電容量を求めよう。(3-2-1)式で表したように、2つのコンデンサに貯まる電荷を  $Q_1$  と  $Q_2$ 、コンデンサに印加している電圧を  $V_1$  と  $V_2$  として、「 $Q_1 = C_1 V_1$ 」と「 $Q_2 = C_2 V_2$ 」の関係が成り立つ。

#### ① 並列接続

図のように 2 つのコンデンサを導線で並列に接続する。



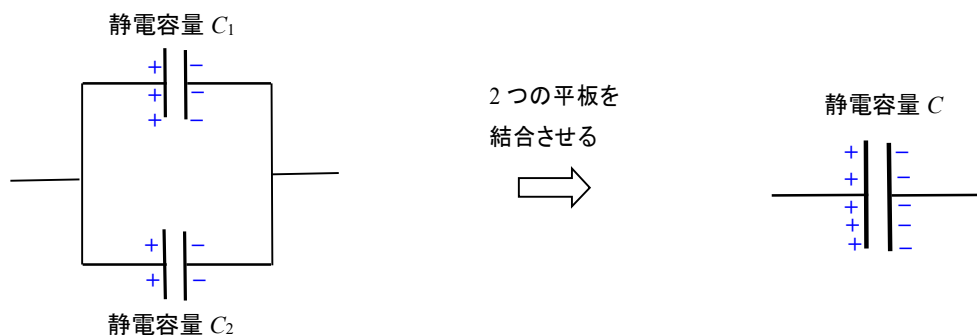
2つのコンデンサは導線で結ばれているので、同じ電位差(電圧)となり、「 $V_1 = V_2 = V$ 」が成り立つ。また、2つのコンデンサの合計の貯まった電荷  $Q$  は「 $Q = Q_1 + Q_2$ 」の関係が成り立つので、「 $Q = C_1 V_1 + C_2 V_2 = (C_1 + C_2) V$ 」から、合成したコンデンサの静電容量  $C$  は下の式で表すことができる。

$$C = C_1 + C_2$$

(3-2-5)

上の(3-2-5)式は、2つのコンデンサとして、平板コンデンサの場合を考えてみよう。2つの平板コンデンサは、平板間の幅  $d$  が同じで、表面積が  $S_1$  と  $S_2$  となる場合、2つのコンデンサを結合させて、表面積  $S$  が「 $S = S_1 + S_2$ 」と増えた場合に相当する。この関係を(3-2-4)式に代入すると、上の(3-2-5)式を得ることができる。

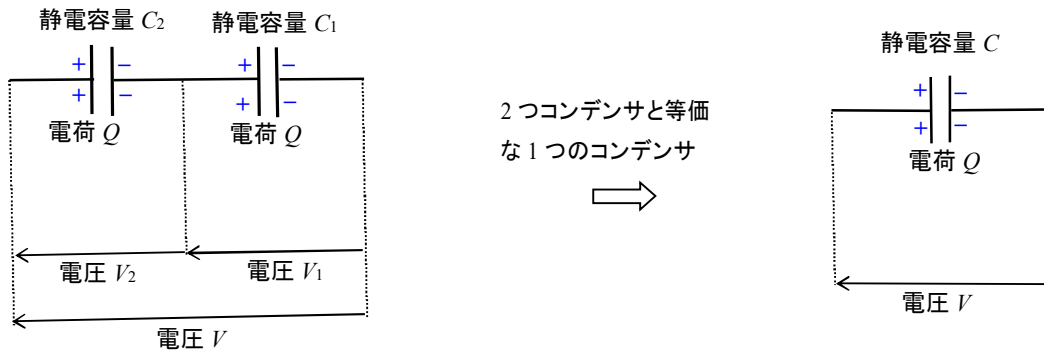
$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_0 \frac{S_1 + S_2}{d} = \epsilon_0 \frac{S_1}{d} + \epsilon_0 \frac{S_2}{d} = C_1 + C_2$$



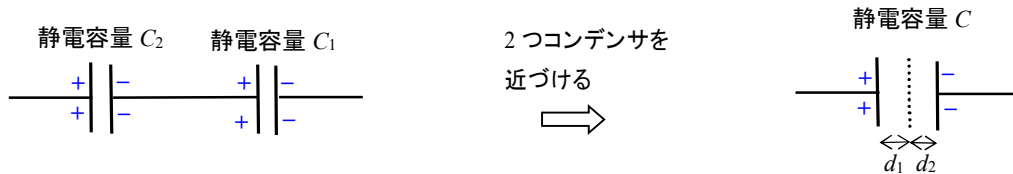
## ②直列接続

次に、図のように 2 つのコンデンサを導線で直列に接続する。2 つのコンデンサにかかる電圧はそれぞれ、 $V_1$  と  $V_2$  で、全体の電圧  $V$  は 2 つのコンデンサにかかる電圧の和「 $V = V_1 + V_2$ 」と表される。2 つのコンデンサは導線で結ばれており、導線で結ばれている極板では、全体では電氣的に中性になるので、「 $Q = Q_1 = Q_2$ 」の関係が成り立つ。この 2 つの関係式を使うと、全体の電圧「 $V = V_1 + V_2 = Q/C_1 + Q/C_2 = Q(1/C_1 + 1/C_2) = Q/C$ 」なので、合成したコンデンサの電気容量  $C$  は下の式で表すことができる。

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (3-2-6)$$



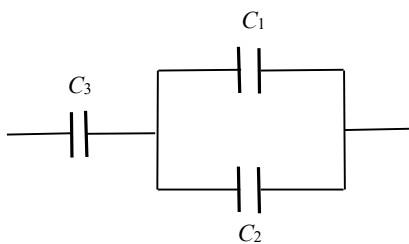
上の(3-2-6)式でも、2 つのコンデンサを平板コンデンサとして考えてみよう。2 つのコンデンサは表面積  $S$  が同じで平板間の幅が  $d_1$  と  $d_2$  となる場合、2 つのコンデンサを結んでいる導線の長さを短くして、2 つのコンデンサを結合させよう。その際、コンデンサ 1 の左の電極に貯まった正の電荷とコンデンサ 2 の右の電極に貯まった負の電荷が打ち消される。そして、下の図のように、電極間の幅  $d$  が「 $d = d_1 + d_2$ 」と増えた場合に相当する。この関係を(3-2-4)式に代入すると、上の(3-2-6)式を得ることができる。



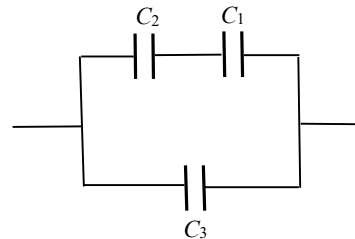
$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 S} = \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{d_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

問題 3-1 下の図で表された回路の合成の静電容量を求めよ。  $C_1 = 2.0 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3.0 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 5.0 \mu\text{F}$  とする。

1)



2)



答

1)  $C = 2.5 \mu\text{F}$     2)  $C = 6.2 \mu\text{F}$

・コンデンサに貯まる静電エネルギー

電荷  $Q$  が貯まったコンデンサにある電気回路をつなぎ、スイッチをオンにすると、コンデンサから電流が流れ、電気回路で電気エネルギーが消費される(例えば、電気回路として豆電球をつけると、コンデンサから流れた電流で、豆電球は発光し、エネルギーが使われる)。したがって、「電荷  $Q$  が貯められたコンデンサにはエネルギーが蓄えられていた」ことがいえる。このような、コンデンサに蓄えられていたエネルギーは位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)の一種で、「静電エネルギー」と呼ばれる。

電圧  $V$  が印加されたコンデンサに貯まった電荷を  $q$  から  $q + \Delta q$  まで増やしたときに増加した位置(ポテンシャル)エネルギー  $\Delta U$  は、「 $\Delta U = \Delta q V$ 」<sup>5</sup>と表されるので、電荷について、「 $q = C V$ 」の関係式を代入し、0 から  $Q$  まで積分すると、下の式のように静電エネルギー  $U$  を求めることができる(最後の等式は「 $Q = C V$ 」を使う)。ここで、因子「 $1/2$ 」は貯まった電荷  $Q$  によって、電位差  $V$  が生じるためである。もし、電荷  $Q$  の存在が、電位  $V$  に影響を与えない(電位  $V$  の中に電荷  $Q$  を置いた)なら、「 $U = Q V$ 」となる、

$$U = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V \quad (3-2-7)$$

さらに、平板コンデンサで、平板間は真空の場合は、(3-2-4)式の静電容量  $C$  を上の式に代入し、電圧  $V = Ed$  (= 電場の大きさ  $\times$  平板間の距離)を代入すると、下の式が得られる。この式の右辺に含まれる「 $S d$ 」はコンデンサ内の電場がある空間の体積なので、(2-5-44)式と同じ式となる。つまり、下の式はコンデンサが持っている静電場エネルギーと等価である。

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (S d) \quad (3-2-8)$$

問題 3-2 問題 3-1 の回路で全体に電圧  $V = 4.0 \text{ V}$  加えたとき、回路全体の静電エネルギー  $U$ 、コンデンサ 1 の静電エネルギー  $U_1$ 、コンデンサ 2 の静電エネルギー  $U_2$ 、コンデンサ 3 の静電エネルギー  $U_3$  を求め、 $U = U_1 + U_2 + U_3$  となっていることを確認せよ。

- 答 1)  $U = 2.0 \times 10^{-5} \text{ J}$ ,  $U_1 = 4.0 \times 10^{-6} \text{ J}$ ,  $U_2 = 6.0 \times 10^{-6} \text{ J}$ ,  $U_3 = 1.0 \times 10^{-5} \text{ J}$ .  
 2)  $U = 4.96 \times 10^{-5} \text{ J}$ ,  $U_1 = 5.76 \times 10^{-6} \text{ J}$ ,  $U_2 = 3.84 \times 10^{-6} \text{ J}$ ,  $U_3 = 4.0 \times 10^{-5} \text{ J}$ .

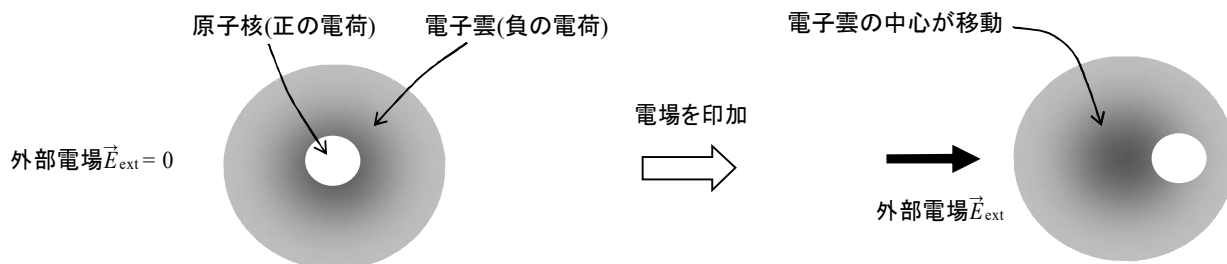
### 3-3. 誘電体における分極

誘電体は、不導体、絶縁体でもあるが、下で述べる誘電分極が起こるので「誘電体(Dielectrics)」とも呼ばれる。

#### ・誘電分極

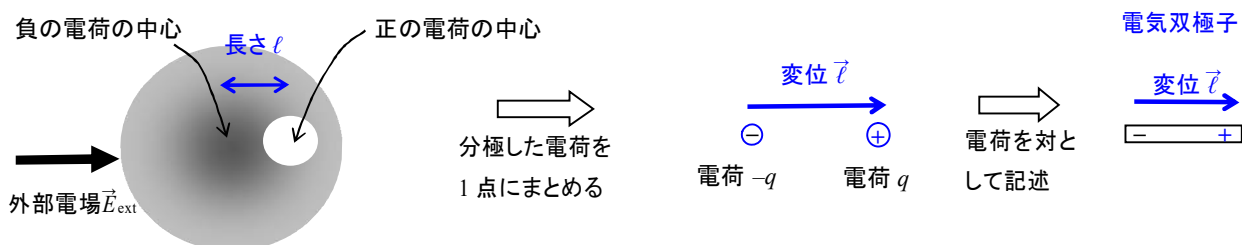
誘電体を構成している原子・分子の周りを回る電子は全て、原子(の原子核)・分子(のイオン)に束縛され自由電子はない。しかし、外部から電場が印加されると、原子・分子の周りを回る電子は電場により引き寄せられて、原子・分子内において電荷分布に変化が生じる。

例えば、下の図に示すように、ある原子があり、外部から印加された電場  $\vec{E}_{\text{ext}} = 0$  の場合は、原子核にある正の電荷とその周りを囲む電子の電子雲(原子核の周りを動く電子はその軌道が確定しておらず、雲のような状態になっている)からなる負の電荷は、電荷分布のバランスがとれており、全体では電気的中性になっている。



<sup>5</sup> 電荷  $q$ 、電位  $V$  の状態が持っている電気エネルギー(位置エネルギー)  $U$  は、「 $U = q V$ 」と表される。

一方、外部から電場を印加すると、電子雲は全体的に移動し、正の電荷の中心位置と負の電荷の中心位置がずれる。この原子・分子の中で正と負の電荷が分離している状態を「分極(polarization)」<sup>6</sup>と呼ぶ。特に、外部電場に誘起されて分極が起こる現象を「誘電分極」と呼ぶ。本来、電気的に中性だったのが、正と負の電荷に分極するが、分極した正の電荷を  $q$ 、負の電荷を  $(-q)$  とし、分極した2つ電荷の間の長さを  $\ell$  とし、負の電荷から正の電荷までの変位  $\vec{\ell}$  すると、上の図の右のような分極した状態を模式的に簡潔に図で表すと、下の図のようになる。



電荷が正と負の2つに分極した状態を電気双極子(Electric dipole)と呼ぶ。1つの原子・分子における電気双極子モーメント<sup>7</sup>  $\vec{p}$  を下の式で定義する。

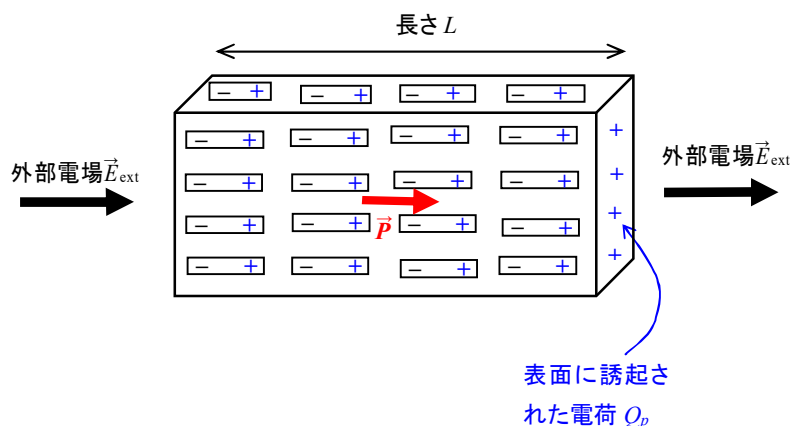
$$\vec{p} = q \vec{\ell} \quad (3-3-1)$$

上の定義式より、電気双極子モーメント  $\vec{p}$  の単位は[C・m]である。

物質全体に分布している双極子モーメントが誘電体の電氣的性質に影響を与える。物質内には複数の原子・分子があり、一般には、個々の電気双極子モーメントは異なる値をとる。そこで、物質内の  $i$  番目の原子・分子の電気双極子モーメント  $\vec{p}_i$  とし、物質の誘電的な性質を表す物理量として、単位体積当たりの双極子モーメント、すなわち、分極(または、分極ベクトル)  $\vec{P}$  を下の式で導入しよう(ここで、物質の体積を  $V$  とする)。

$$\vec{P} := \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V} \quad (3-3-2)$$

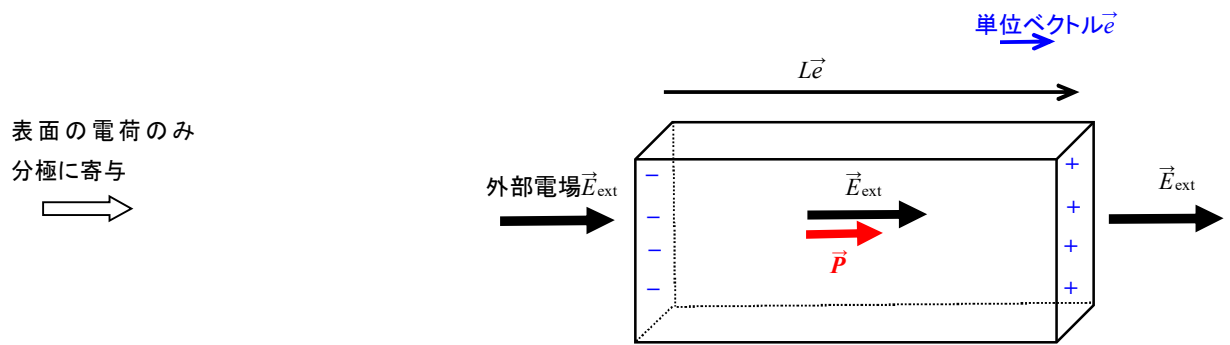
下の図のように、複数の双極子モーメントが、(長さ  $L$ 、断面積  $S$  の直方体の)体積  $V$  の物質内に配置されているとする。表面以外は、隣りの双極子モーメントどうして、正と負の電荷が打ち消され、表面のみに電荷が現れるのと等価である。表面に誘起された電荷を  $Q_p$  と  $(-Q_p)$  とする。



<sup>6</sup> ある分子では、その結合状態から、自発的に分極している場合もある。例えば、水分子( $\text{H}_2\text{O}$ )はその構造が対称になっていないので、「分極」している。

<sup>7</sup> 「モーメント」とは、「変位(長さ)×ある物理量」を指す。





負の電荷から正の電荷へ向かう単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると、(3-3-2)式の右辺の分子である双極子モーメントの総和は、表面電荷  $Q_p$ 、物質の長さ  $L$ 、単位ベクトル $\vec{e}$ を用いて下の式で表される。

$$\sum_i \vec{p}_i = Q_p (L\vec{e})$$

この場合、分極 $\vec{P}$ は(3-3-2)式より、下の式で表される。ここで、 $\sigma_p$ は表面に誘起された電荷の面積電荷密度( $\sigma_p = Q_p/S$ )である。

$$\vec{P} = \frac{Q_p L \vec{e}}{V} = \frac{Q_p}{S} \vec{e} = \sigma_p \vec{e} \quad (3-3-3)$$

分極 $\vec{P}$ の単位は[C/m<sup>2</sup>]となる。誘電体内の有効電場 $\vec{E}$ は、外部電場 $\vec{E}_{\text{ext}}$ と分極によってできた電場 $\vec{E}_p$ の合成となる。

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_p \quad (3-3-4)$$

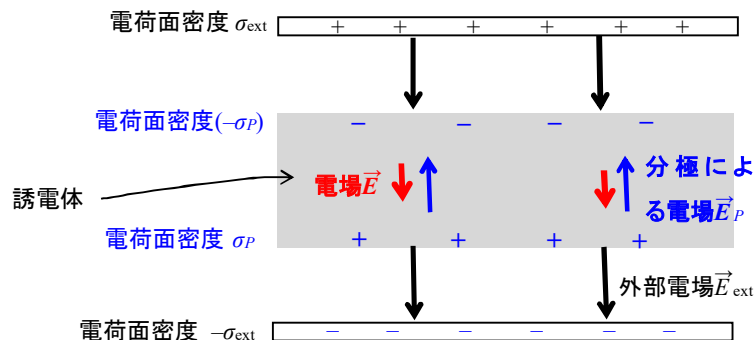
次節では、誘電体内の有効電場について考える。

#### ・自発分極と強誘電体

物質の中には外部から電場を印加しなくとも自発的に分極している物質がある。このような物質を「**強誘電体**」と呼ぶ。

### 3-4. 電束密度とガウスの法則

誘電体内の有効電場 $\vec{E}$ を調べるために、外部電場 $\vec{E}_{\text{ext}}$ として、図のように、電荷  $Q$  と  $(-Q)$  に帯電した 2 枚の平板にはさまれた空間に誘電体を置いてみよう。2 枚の平板は面積  $S$  で、平板は電荷面密度  $\sigma_{\text{ext}} = Q/S$  と  $(-\sigma_{\text{ext}}) = (-Q)/S$  である。分極によってできる電場 $\vec{E}_p$ の向きは 2 枚の平板で発生した外部電場 $\vec{E}_{\text{ext}}$ と逆向きとなる。



ガウスの法則より、外部電場の大きさ  $E_{\text{ext}}$  は(2-4-18)式より、「 $E_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}}/\epsilon_0$ 」となる。誘電体内では、誘電体表面に電荷が誘起され、有効な電荷面密度  $\sigma = (\sigma_{\text{ext}} - \sigma_P)$  となる。したがって、誘電体内の**有効電場の大きさ  $E$**  は下の式で表すことができる。

$$E = \frac{\sigma_{\text{ext}} - \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3-4-1)$$

\* 誘電体の代わりに導体を挿入すると、誘起された面積電荷密度  $\sigma_P = \sigma_{\text{ext}}$  となり、(3-4-1)式より導体内部の有効電場「 $\vec{E} = 0$ 」となる。誘電体では、「 $\sigma_P < \sigma_{\text{ext}}$ 」の関係が成立し、誘電体内部の有効電場の大きさ「 $E < E_{\text{ext}}$ 」が成り立ち、外部電場の大きさ  $E_{\text{ext}}$  よりも小さな値をとる。

上の式を変形して、「 $\epsilon_0 E = \sigma_{\text{ext}} - \sigma_P = \sigma_{\text{ext}} - P$ 」が成り立つ<sup>8</sup>。ここで、最後の等式は(3-3-3)式を用いた。この式から、右辺の「 $-P$ 」を移項すると、「 **$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$** 」と定義すると下の式が成立する。この「 **$\vec{D}$** 」は**電束密度の大きさ**と呼ばれ、平板の電荷面密度に等しい。

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \sigma_{\text{ext}} \quad (3-4-2)$$

さらに、ベクトル量としての**電束密度(Electric flux density)  $\vec{D}$** を下の式で再び定義する。

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3-4-3)$$

有効電場  $\vec{E}$  が小さい場合は、分極  $\vec{P}$  は電場に比例すると考えられるので、下の比例関係が成り立つ。ここで、 $\chi_e$  は電気感受率と呼ばれる比例定数で、単位はない。

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3-4-4)$$

この関係を用いると、電束密度は電場  $\vec{E}$  に比例し、下の関係式が成り立つ。ここで、**定数  $\epsilon$  を物質中の誘電率**と呼ぶ。

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} := \epsilon \vec{E} \quad (3-4-5)$$

上の式で、物質中の誘電率  $\epsilon$  は真空の誘電率数  $\epsilon_0$  と電気感受率  $\chi_e$  を用いて下の式で定義される。

$$\epsilon := \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (3-4-6)$$

上の関係式より、一般には、「 $\epsilon > \epsilon_0$  ( $\chi_e > 0$ )」となる関係が成り立つ。また、「 $\epsilon/\epsilon_0 = (1 + \chi_e)$ 」を**比誘電率**と呼ぶ。

## ・電場と電束密度

電場と電束密度の関係を確認するために、再度、電荷  $Q$  と  $(-Q)$  に帯電した 2 枚の平板にはさまれた空間に誘電体を置いて考えてみよう。

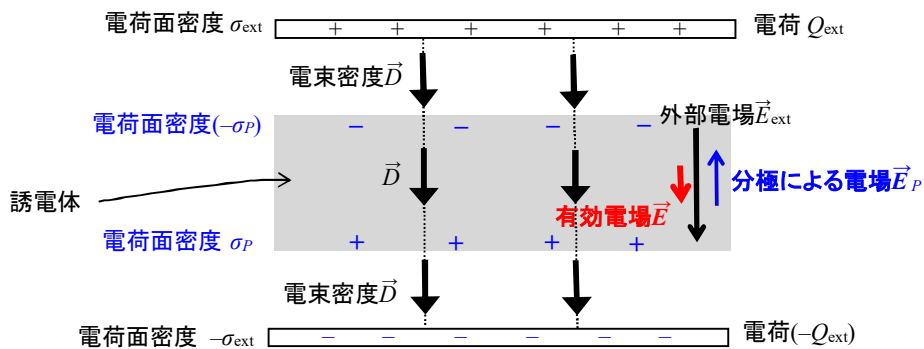
<sup>8</sup> 誘電体の代わりに「導体を挿入すると」、面密度  $\sigma = \sigma_P$  が成立し、導体内部では「静電誘導」のため、有効電場  $\vec{E} = 0$  となる。誘電体では有効電場が「0」にはならないが、外部電場の大きさ  $E_{\text{ext}}$  よりも小さな値となる ( $E < E_{\text{ext}}$ )。これが、誘電分極による効果のためである。

平板と誘電体にはさまれた空間(真空中)では、電束密度  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}}$  が成り立つ。一方、誘電体内では、電束密度  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$  が成立し、電場  $\vec{E} = (\vec{D} - \vec{P})/\varepsilon_0$  となる。この式と(3-3-4)式を比べると下の関係式を導出できる。

$$\vec{E} = (\vec{D} - \vec{P})/\varepsilon_0 = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_p \quad (3-4-7)$$

電束密度  $\vec{D}$  は真空中でも、物質中でも変わらず、「 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}}$ 」とすることができ、分極によってできる電場  $\vec{E}_p$  は分極  $\vec{P}$  を用いて、下の式で表すことができ、分極  $\vec{P}$  と逆向きになる。

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (3-4-8)$$



#### ・電束密度の単位

電束密度の大きさ  $D$  は、(3-4-2)式より、平板の電荷面密度  $\sigma$  に等しいので、その単位は「 $C/m^2$ 」となる。

#### ・電束密度に対するガウスの法則

電場に関するガウスの法則は(2-3-4)式で表した。電束密度  $\vec{D}$  を用いて表そう。誘電体(物質内)では、(2-3-4)式の右辺の電荷  $q$  は閉曲面内に含まれる有効電荷で、左辺の電場  $\vec{E}$  はその閉曲面内の有効電場である。電束密度  $\vec{D}$  は真空中でも誘電体内でも「 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}}$ 」となるので、電束密度  $\vec{D}$  を閉曲面で面積積分を実施すると、下の式で表すことができる。この式が「**電束密度に関するガウスの法則**」を表す式である。電場に関するガウスの法則と等価であるが、電場を用いて表すか、電束密度を用いて表すかの違いである。ここで、右辺の電荷  $Q_{\text{ext}}$  は分極に関係しない電荷<sup>9</sup>である。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{ext}} \quad (\text{電束密度に関するガウスの法則}) \quad (3-4-9)$$

#### ・誘電率 $\varepsilon$ の空間内での静電気力(クーロン力)

既に述べたように、電束密度  $\vec{D}$  は物質中でも真空中でも「 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}}$ 」の関係が成り立ち、さらに、物質中では「 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 」が成り立つ。この関係式より、物質中の電場  $\vec{E}$  は真空中の電場  $\vec{E}_{\text{ext}}$  と下の式で関係づけることができる。

$$\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{E}_{\text{ext}} \quad (3-4-10)$$

一方、真空中で、原点に電荷  $Q$ 、位置  $\vec{r}$  に電荷  $q$  を置いたとき、電荷  $q$  に働く静電気力(クーロン力)  $\vec{f}_0$  は(2-1-4)式で表されてが、こ

<sup>9</sup> この電荷は、「真の電荷(True charge)」または、「自由電荷(Free charge)」とも呼ばれる。

ここで、電荷  $q$  が感じる真空中での電場  $\vec{E}_0$  も使って再度、表す。

$$\vec{f}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r = q \vec{E}_0 \quad (3-4-11)$$

次に、2つの電荷を誘電率  $\epsilon$  の誘電物質中に置くとする。誘電物質中の電場  $\vec{E}$  は、(3-4-10)式にしたがって、真空中での電場  $\vec{E}_0$  より小さくなる。しかし、静電気力(クーロン力)と電場の関係は変わらないので、静電気力(クーロン力)  $\vec{f}$  は下の式のように変更される。すなわち、真空の誘電率  $\epsilon_0$  から物質中の誘電率  $\epsilon$  に変更され、式の形は不変となる。「真空の誘電率  $\epsilon_0 <$  物質中の誘電率  $\epsilon$ 」なので、物質中では静電気力(クーロン力)は、真空中での静電気力(クーロン力)より小さくなる。

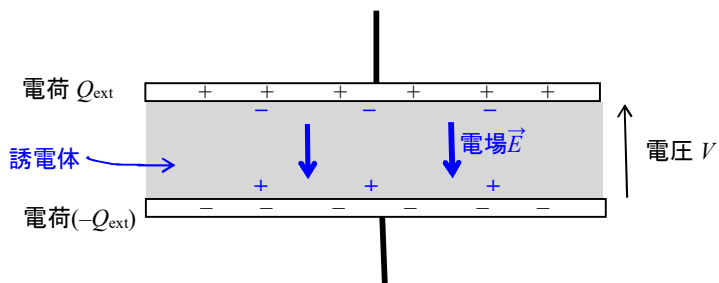
$$\vec{f} = q \vec{E} = q \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{E}_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r \quad (3-4-12)$$

#### ・平板コンデンサ内に誘電率 $\epsilon$ となる物質を入れた場合の静電容量

コンデンサの静電容量は(3-2-1)式で定義され、真空中に置かれた平板コンデンサの静電容量  $C$  は既に導出され、(3-2-4)式で記述した。

図のように、2枚の平板の間に誘電率  $\epsilon$  の誘電物質を挿入し、この平板コンデンサの静電容量  $C$  を求めてみよう。

電圧(電位差)  $V$  は「 $V = E d$ 」と表され、電場の大きさが変更される。誘電物質内の電場の大きさ  $E$  は、下の式に表すように、「 $E = (\epsilon_0/\epsilon) E_0$ 」となる。ここで、 $E_0$  は平板間が真空の場合の電場の大きさを、「 $E_0 = Q_{\text{ext}}/(\epsilon_0 S)$ 」となる。



$$E = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0 = \frac{Q_{\text{ext}}}{\epsilon S} \quad (3-4-13)$$

コンデンサの静電容量の定義式(3-2-1)式より、誘電率  $\epsilon$  の誘電物質を挿入し、この平板コンデンサの静電容量  $C$  は下のよう

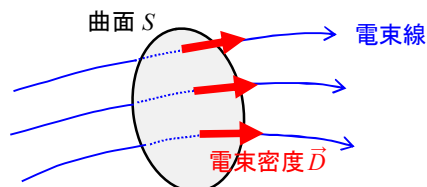
に求めることができる。

$$C = \frac{Q_{\text{ext}}}{V} = \frac{Q_{\text{ext}}}{E d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ext}}}{E_0 d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ext}} (\epsilon_0 S)}{Q_{\text{ext}} d} = \epsilon \frac{S}{d} \quad (3-4-14)$$

この式も、上の静電気力(クーロン力)での変更方法と同様に真空の誘電率  $\epsilon_0$  から物質中の誘電率  $\epsilon$  に変更された式となっている。

#### ・電束密度と電束

面積  $S$  の曲面を考え、この曲面を貫く電束密度  $\vec{D}$  について、面積積分した量を電束  $\phi_e$  とし、下の式で定義する。



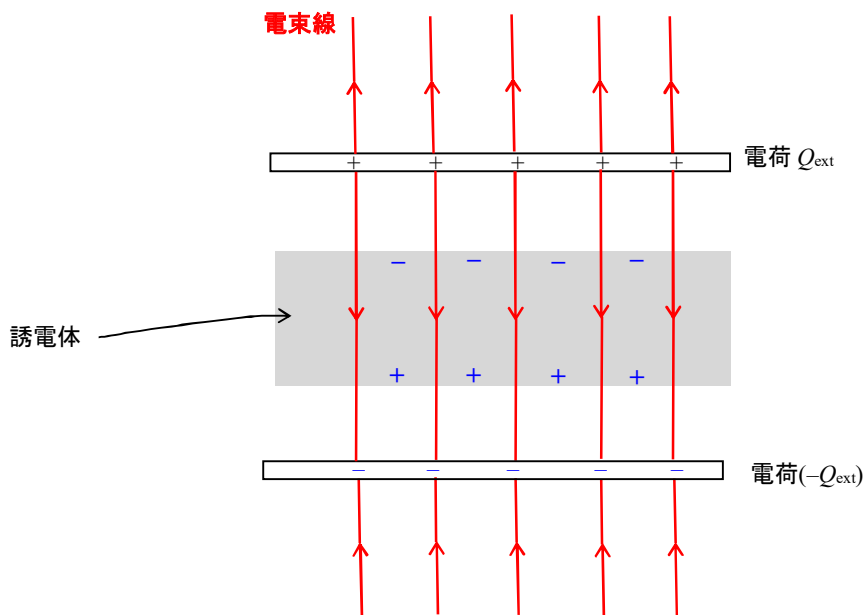
$$\phi_e := \int_{\text{曲面 } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3-4-15)$$

#### ・電束線

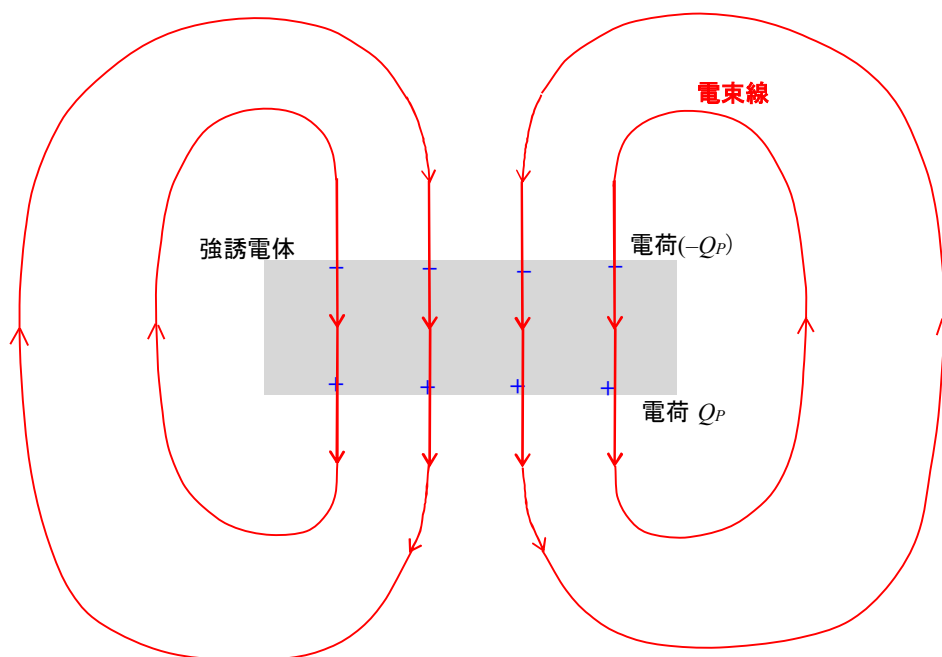
電場がある空間には電気力線があり、電気力線で力のやりとりをしていると考えた。同様に、電束密度がある空間にも電束線があり、電束線が向かう向きが電束密度の向きとなり、電束線の面密度が電束密度に対応していると考え。

電場に対する「ガウスの法則」では、電荷  $\varepsilon_0$  当たり1個の電気力線が1個出ていると考え、電荷  $q$  (ここでは、 $q > 0$ ) では、電気力線が  $(q/\varepsilon_0)$  個出ていると考え、電気力線の面密度が電場の強さに相当した。同様に、「電束密度に対するガウスの法則」においては、電荷 1 C 当たり1個の電束線が出ていると考え、電荷  $Q_{\text{ext}}$  (ここでは、 $Q_{\text{ext}} > 0$ ) では、電束線が  $(Q_{\text{ext}})$  個出ていると考え、電束線の面密度が電束密度になる。

誘電体をはさんだ平板コンデンサの電束線を下に図で示す。電束線は正の電荷  $Q_{\text{ext}}$  を持つ平板から出て、負の電荷  $(-Q_{\text{ext}})$  を持つ平板に入る。間にある誘電体の部分は変更を受けない(誘電体が挿入されていなくとも同じ図である)。



次に、自発分極した強誘電体における電束線を図示する。



このとき、電束密度に関するガウスの法則は分極に関係しない電荷  $Q_{\text{ext}}$  がないので下の式が成り立つ。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3-4-16)$$

\* 注意

空間の電氣的性質を表す量として「電場」と「電束密度」を導入した。このうち、より基本的な空間の電氣的性質を表す量は「電場」である。荷電粒子は(電束密度からではなく)、「電場」から力を受ける。

#### ・誘電体中の静電気力(クーロン力)

電荷  $q$  が受ける静電気力  $\vec{F}$  は、真空中であろうと、誘電体の気体中であろうと、電場  $\vec{E}$  に対し、「 $\vec{F} = q \vec{E}$ 」の関係式が成り立つ。電束密度  $\vec{D}$  と電場  $\vec{E}$  の関係は、真空中では「 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ 」で、誘電体中では「 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 」が成立する。一方、電束密度を用いたガウスの法則(3-4-9)式は、真空中でも誘電体中でも同じ関係が成立する。したがって、原点  $O$  に電荷  $Q$  が置かれて、それから位置  $\vec{r}$  における電場  $\vec{E}$  は(3-4-9)式を用いて、下の式で表すことができる。

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} & (\text{真空中}) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} & (\text{誘電体気体中}) \end{cases} \quad (3-4-17)$$

また、その際、電荷  $q$  が受ける静電気力  $\vec{F}$  は下の式で表され、係数の分母が真空の誘電率  $\epsilon_0$  から物質中の誘電率  $\epsilon$  に変更されたものとなっている。

$$\vec{F} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} & (\text{真空中}) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} & (\text{誘電体気体中}) \end{cases} \quad (3-4-18)$$