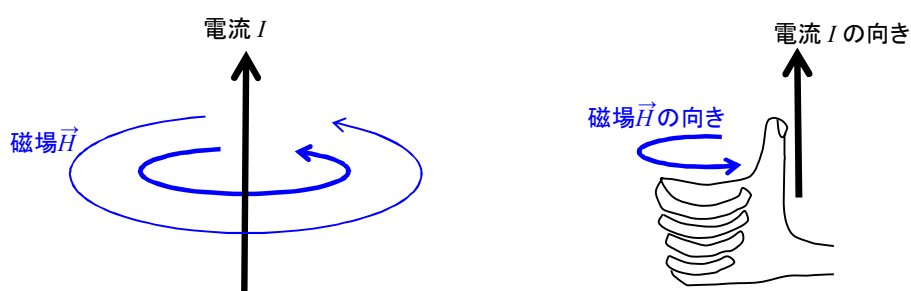


## 6. 電流と磁場

1章の「1-3. 電流」において、電流について定義した。また、自然科学・物理学・電磁気学における基本単位は電荷の単位 C(クーロン)ではなく電流の単位 A(アンペア)であると述べた。この章では、電流が作る磁場(アンペール)の法則を紹介し、運動している荷電粒子(電流)が磁場から受ける力(ローレンツ力)について学ぶ。さらに、電流間に働く力を学ぶ。

### 6-1. 電流が作る磁場とアンペールの法則

とても長い直線である導線に定常電流  $I$  を流そう。この導線のまわりに磁針(方位磁石)を置くと電流を取り囲むように磁針が向くことが観測される。つまり、下の図のように、電流にまわりに、**渦を巻くように磁場  $\vec{H}$**  が発生することを示唆している。電流が作る磁場の向きを直感的にとらえるために、親指を伸ばした右手を用いて説明すると、「右手の親指が電流の向き、指を丸めて手のひらから指先への向きが磁場の向き」となる。下の図では、電流が下から上方向に流れ、その電流によって磁場が紙面の奥から反時計回りに紙面の手前方向に渦を巻くように発生する。電流から発生する磁場の向きを表すのに「右手」を使うので、この方法を「**右手の法則**」<sup>1</sup>と呼ぶ。

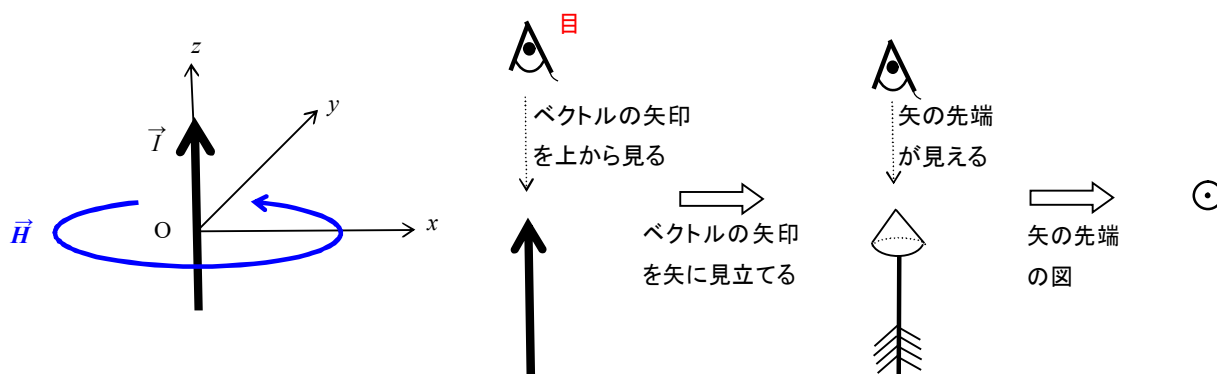


19 世紀フランスの物理学者のアンペール<sup>2</sup>は電流  $I$ 、磁場の強さ  $H$ 、導線からの距離  $r$ 、の間に下の式で表されることを発見した。この関係式を「**アンペールの法則**」と呼ぶ。**渦巻く磁場  $\vec{H}$  が生じる原因は渦の中心を流れる電流  $I$  である。**

$$H \times (\text{1 周の長さ}) = H \cdot (2\pi r) = I \quad (\text{アンペールの法則})$$

(6-1-1)

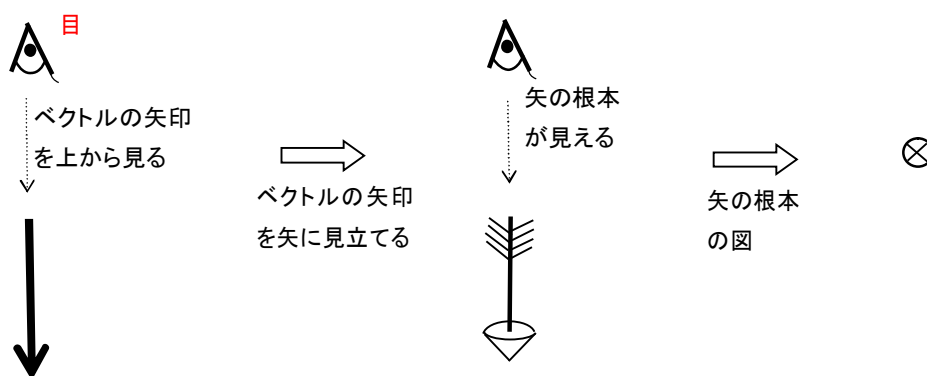
磁場  $\vec{H}$  の向きをベクトル的に表すために、電流をベクトルとして扱おう。ここでは、電流は、 $xy$  平面上の原点  $O$  で  $+z$  方向を向いているとする。「 $\vec{I} = I \vec{e}_z$ 」。磁場  $\vec{H}$  は、 $xy$  平面上を反時計回りに回転する向きとなる。下の図に描いたように、電流のベクトルを  $+z$  方向(上方向)から見たときは、矢の先端しか見えないので、これを記号「 $\odot$ 」で表すことにする。記号「 $\otimes$ 」は紙面の奥(裏)から手前(表)に向かうベクトルの向きを指す。



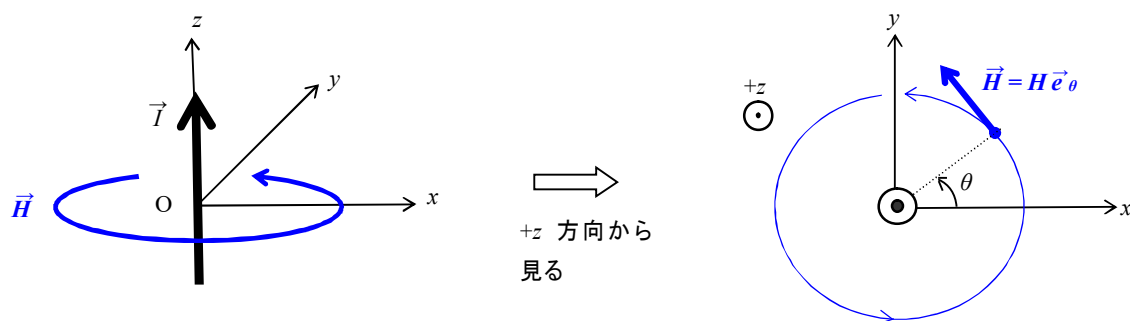
<sup>1</sup> 「右ネジの法則」と呼ぶ場合もある。一般的なネジを回す向きが磁場で、その際にネジが進む向きが電流の向きに相当する。

<sup>2</sup> アンペール(Andre-M. Ampere)は 18 世紀末から 19 世紀のフランスの物理学者・数学者で、電流の単位 A(アンペア)も彼の名にちなんでいる。

逆に、紙面の手前(表)から奥(裏)に向かうベクトルを記号「 $\otimes$ 」で表す。これは、矢の根本にある羽しか見えないことを示している。



したがって、 $+z$  方向に進む電流 $\vec{I}$ が流れている場合は、 $+z$  方向から見た  $xy$  平面上で、磁場 $\vec{H}$ は反時計回りにの向きとなる。 $x$  軸からの角度を  $\theta$  とすると磁場 $\vec{H}$ は単位ベクトル $\vec{e}_\theta$  の向き<sup>3</sup>となる。一方、電流 $\vec{I}$ が $-z$  方向に流れている場合は、磁場は時計回りに渦巻く向きをとる。

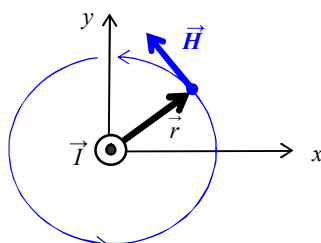


この場合は、(6-1-1)式より、磁場 $\vec{H}$ は下の式で表され、磁場の向きは電流のまわりを1周する向きとなる。

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (6-1-2)$$

上の図のように、電流が  $z$  軸方向に流れて、電流ベクトル $\vec{I} = I \vec{e}_z$  として、原点からの位置 $\vec{r}$ とすると、位置 $\vec{r}$ と同じ向きを持つ単位ベクトル $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ を用いると、 $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$  となるので、(6-1-2)式の磁場 $\vec{H}$ はベクトルの外積「 $\times$ 」<sup>4</sup>を用いて、下の式で表すことができる。

$$\vec{H} = \frac{\vec{I} \times \vec{e}_r}{2\pi r} = \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (6-1-3)$$



<sup>3</sup> 単位ベクトル $\vec{e}_\theta$  は角度  $\theta$  と  $x$  方向の単位ベクトル $\vec{e}_x$  と  $y$  方向の単位ベクトル $\vec{e}_y$  を用いると、「 $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$ 」と表すことができる(動径方向の単位ベクトル  $\vec{e}_r = \vec{r}/r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$  である)。

<sup>4</sup> ベクトルの外積については、次の節「6-2. ローレンツ力」で扱う。

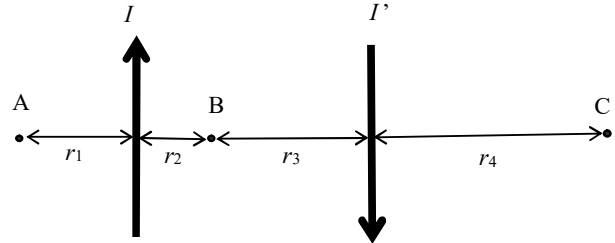
## ・磁場の単位

磁場の単位は「5-2. 磁力線と磁場(磁界)」で既に述べたが、単位「A/m」は上の(6-1-2)式から導くことができる。

$$\text{磁場の単位} = \text{A/m} = \text{N/Wb}$$

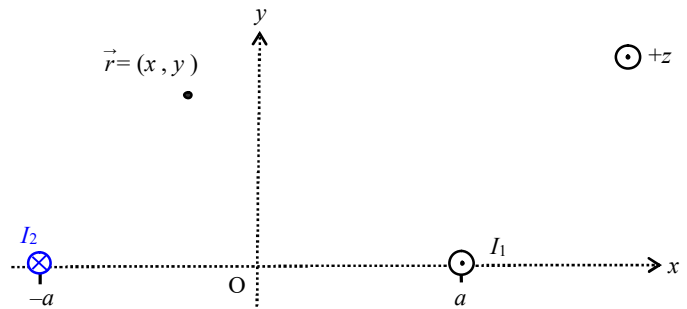
(6-1-4)

問題 6-1 2本の長い平行な導線上を電流  $I=2.0 \text{ A}$ ,  $I'=4.0 \text{ A}$  で図のように流れている。点 A, B, C が一直線上にあるとき、点 A, B, C における磁場の大きさ  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $H_C$  とその向き ( $\otimes$  か  $\odot$ ) を求めよ。ただし、距離  $r_1=0.2 \text{ m}$ ,  $r_2=0.1 \text{ m}$ ,  $r_3=0.3 \text{ m}$ ,  $r_4=0.4 \text{ m}$  とする。



答  $H_A = 0.53 \text{ A/m}$ , 向き;  $\odot$ ,  $H_B = 5.3 \text{ A/m}$ , 向き;  $\otimes$ ,  $H_C = 1.27 \text{ A/m}$ , 向き;  $\odot$

例題 6-1 図のように  $xy$  平面に対し垂直に2つの電流  $I_1$ ,  $I_2$  が流れている。電流  $I_1$  は位置  $\vec{r}_1 = (a, 0)$  で  $+z$  方向に、電流  $I_2$  は位置  $\vec{r}_2 = (-a, 0)$  で  $-z$  方向に流れている。 $xy$  平面上にある位置  $\vec{r} = (x, y)$  での磁場  $\vec{H}$  を求めよ。さらに、位置  $\vec{r}$  が  $y$  軸上にある場合 ( $\vec{r} = (0, y)$ ) となる)の磁場  $\vec{H}$  を求めよ。



答; 電流  $I_1$  によって位置  $\vec{r}$  にできる磁場  $\vec{H}_1$  と電流  $I_2$  によって位置  $\vec{r}$  にできる磁場  $\vec{H}_2$  は、変位  $\vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1$ ,  $\vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{r}_2$  とし、(6-1-3)式を用いると下の式のように求めることができる。

$$\vec{H}_1 = \frac{I_1 \vec{e}_z \times \vec{R}_1}{2\pi R_1^2} = I_1 \frac{(-y, x-a)}{2\pi((x-a)^2+y^2)}, \quad \vec{H}_2 = \frac{-I_2 \vec{e}_z \times \vec{R}_2}{2\pi R_2^2} = I_2 \frac{(y, -x-a)}{2\pi((x+a)^2+y^2)}.$$

したがって、合成した磁場  $\vec{H}$  は下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = & y \left( -\frac{I_1}{2\pi((x-a)^2+y^2)} + \frac{I_2}{2\pi((x+a)^2+y^2)} \right) \vec{e}_x + x \left( \frac{I_1}{2\pi((x-a)^2+y^2)} - \frac{I_2}{2\pi((x+a)^2+y^2)} \right) \vec{e}_y \\ & - a \left( \frac{I_1}{2\pi((x-a)^2+y^2)} + \frac{I_2}{2\pi((x+a)^2+y^2)} \right) \vec{e}_y. \end{aligned}$$

位置  $\vec{r} = (0, y)$  となる場合は、磁場  $\vec{H}$  は下の式で表すことができる。

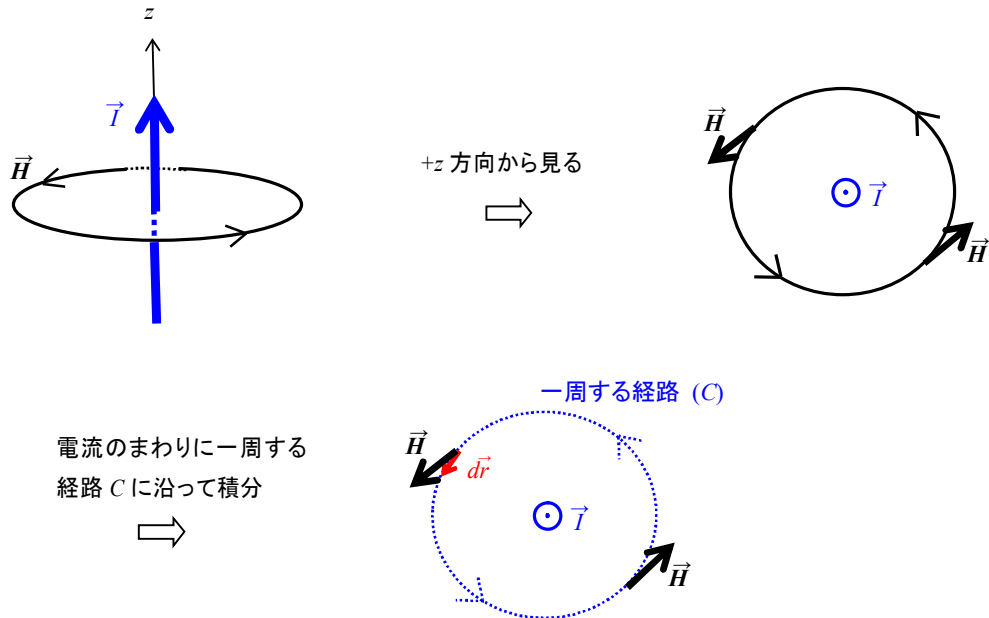
$$\vec{H} = y \frac{-I_1 + I_2}{2\pi(a^2+y^2)} \vec{e}_x - a \frac{I_1 + I_2}{2\pi(a^2+y^2)} \vec{e}_y$$

さらに、2つの電流の大きさが等しい場合 ( $I_1 = I_2 = I$ )、磁場  $\vec{H}$  は下の式で表すことができ、 $-y$  方向を向く。

$$\vec{H} = -a \frac{2I}{2\pi(a^2+y^2)} \vec{e}_y$$

## ・アンペールの法則の積分形

アンペールの法則について、最も単純な形式で表したのが(6-1-1)式である。アンペールの法則について、「ガウスの法則」について、積分を用いて表したように積分を用いて表そう。磁場 $\vec{H}$ は電流ベクトル $\vec{I}$ のまわりを一周するが、一周する経路 $C$ として、その経路上で微小変位 $d\vec{r}$ をとり、磁場 $\vec{H}$ と微小変位 $d\vec{r}$ の内積 $\vec{H} \cdot d\vec{r}$ で一周積分する。



アンペールの法則を表す(6-1-1)式は、経路 $C$ での一周積分を用いると、下の式で表すことができる。

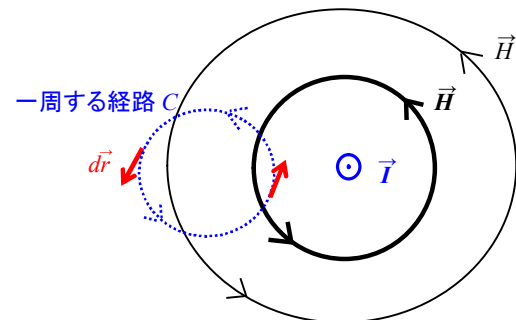
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \quad (\text{アンペールの法則の積分形})$$

(6-1-5)

ここで、「 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{一周する経路 } C} \vec{H} \cdot d\vec{r}$ 」は「経路 $C$ に沿っての内積 $\vec{H} \cdot d\vec{r}$ の一周積分」を表す。  
これを、経路 $C$ での「**線積分**」と呼ぶ。

## ・経路の内に電流がない場合のアンペールの法則

右の図のように一周する経路 $C$ 内には電流を含まないようにする。磁場 $\vec{H}$ は、電流を周回するような向きとなり、経路 $C$ の右側では、磁場 $\vec{H}$ と微小変位 $d\vec{r}$ は逆方向、左側では同じ方向となり、負と正と打ち消され、積分すると「0」になる。

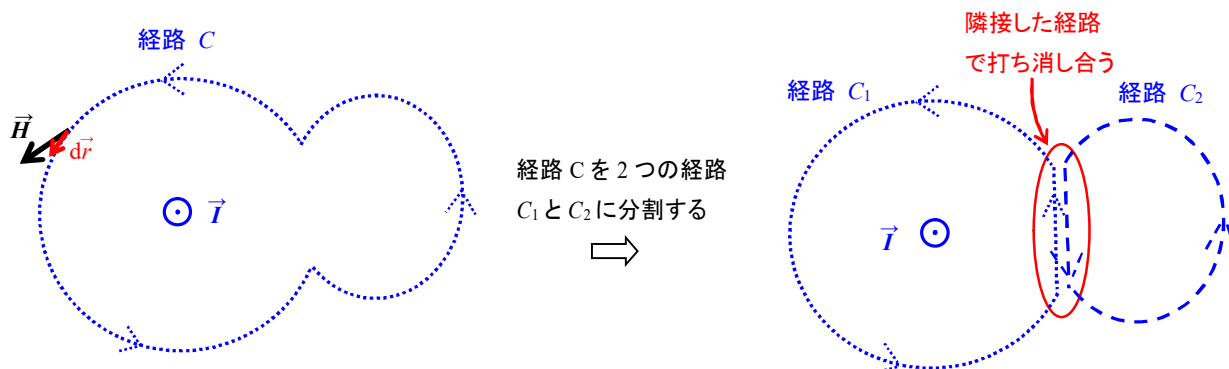


$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$$

(6-1-6)

### ・一般化された経路におけるアンペールの法則

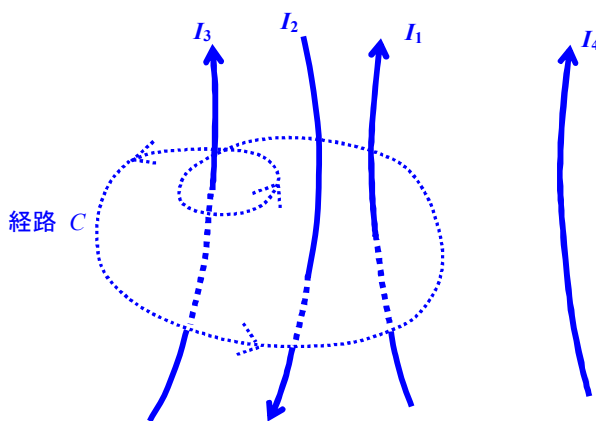
これまででは、周回する経路として、円軌道をとったが、円軌道でない一般的な経路を考えてみよう。ここでは、経路  $C$  として、下の図のような経路を考える。経路  $C$  は2つの円軌道である経路  $C_1$  と経路  $C_2$  をくっつけた経路とする(経路  $C =$  経路  $C_1 +$  経路  $C_2$ )。経路  $C_1$  と経路  $C_2$  が隣接しており、隣接している部分では逆向きの経路になり、この部分では線積分は打ち消されて、線積分に寄与しない。



アンペールの法則を表す(6-1-5)式は下の式のように表すことができ、同様に複数の円軌道を重ね合わせて一般的な経路  $C$  においても、アンペールの法則は成立する。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$

さらに、経路内に複数の電流  $I_i$  が存在するときは、経路  $C$  で囲まれた内部に存在する全電流  $I = \sum I_i$  が、アンペールの法則である(6-1-5)式の右辺となる。例えば、下のような経路  $C$  をとる場合、アンペールの法則は(6-1-6)式で表される。

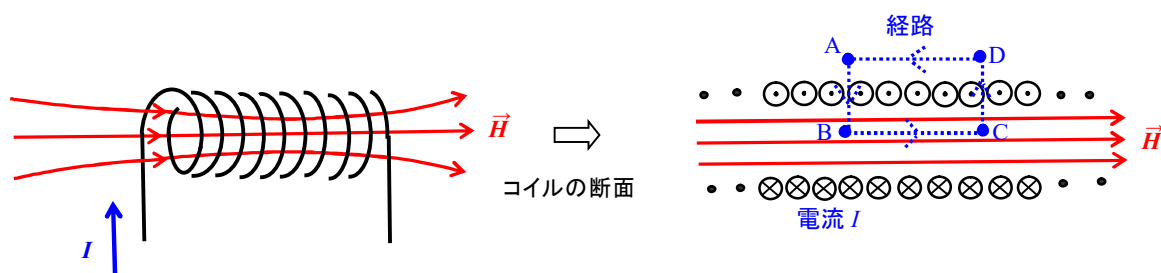


$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_1 - I_2 + 2 I_3 \quad (6-1-7)$$

### ・アンペールの法則の応用

針金や導線を円形状に巻いたものを「コイル」と呼ぶ。導線を隙間なく円形(らせん)状に巻いたコイルを「ソレノイドコイル」と呼び、ソレノイドコイルになった導線に電流を流すとソレノイドコイルの内部には電流によって、いわゆる「右ネジの法則」に従って磁場

ができる。また、コイルの両端では、磁場の漏れ(ゆがみ)ができるが、コイルの中央部では、近似的に磁場はコイルに対し垂直方向を向くとする。このとき、ソレノイドコイルを貫く磁場 $\vec{H}$ について、アンペールの法則である(6-1-4)式を用いて求めてみよう。



上の右の図のように、コイルの上側を包む閉経路 $C$ (経路 $C$ ; 点 $A \rightarrow$ 点 $B \rightarrow$ 点 $C \rightarrow$ 点 $D \rightarrow$ 点 $A$ )の内部には電流 $I$ が流れる導線が $N$ 個あり、 $AD$ 間の距離 $=BC$ 間の距離 $=L$ とする。コイルの外側には磁場がない。また、経路 $A \rightarrow B$ と経路 $C \rightarrow D$ の間では、磁場と微小変位は直交するので、線積分への寄与はない。経路 $B \rightarrow C$ では磁場と微小変位は同じ向きとなるので、下の式のように求めることができる。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \left( \int_{A \rightarrow B} + \int_{B \rightarrow C} + \int_{C \rightarrow D} + \int_{D \rightarrow A} \right) \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0 + HL + 0 + 0 = NI$$

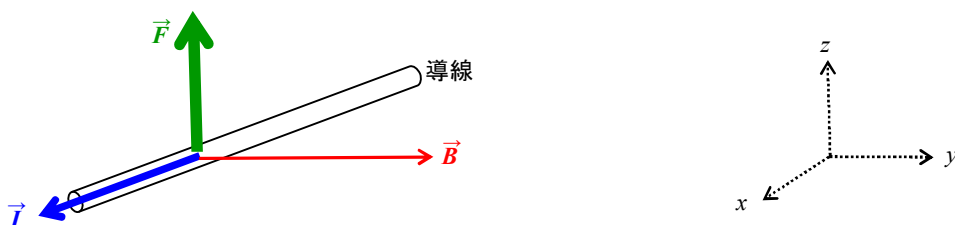
上の式より、ソレノイドコイルの単位長さ当たりの巻き数 $n = N/L$ を用いて、ソレノイドコイル内の磁場の大きさ(あるいは、磁場の漏れ(ゆがみ)が無視できる場合の磁場の大きさ) $H$ は下の式で表される。

$$H = \frac{NI}{L} = nI \quad (6-1-8)$$

## 6-2. ローレンツ力

### ・電流が磁場から受ける力

導線に電流を流し、それに磁場を印加すると、電流が流れている導線に力 $\vec{F}$ が働くことが実験で観測される。実験によると、電流 $I$ が流れている長さ $l$ の導線に、外から磁束密度 $\vec{B}$ を加えると、導線は電流、および磁束密度<sup>5</sup>と図のように垂直方向に力 $\vec{F}$ を受けることが確認されている。



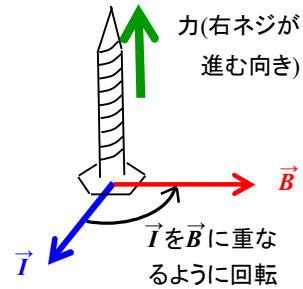
電流が流れている導線が磁束密度から受ける力 $\vec{F}$ は、電流の大きさ $I$ 、磁束密度の大きさ $B$ に比例し、向きはそれらと垂直方向である。ベクトルの外積「 $\times$ 」を用いると、下の式で表すことができる。

<sup>5</sup> 電流が磁場から受ける力に関係するのは、磁場 $\vec{H}$ でなく磁束密度 $\vec{B}$ であることが、実験的に確認されている。

$$\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B}) \ell$$

(6-2-1)

上の式で表された力は、「 $I$ - $B$  右ネジの法則」<sup>6</sup>と呼ばれる。  
力の向きは、外積の計算方法から、電流ベクトルを磁束密度に重なるように回転させたとき、「右ネジ」が進む向きと一致する。また、力の大きさ  $F$  は電流ベクトルと磁束密度との間の角度を  $\theta$  として、下の式で表すことができる。



$$F = I B \ell \sin \theta$$

(6-2-2)

## ・2つのベクトルの外積

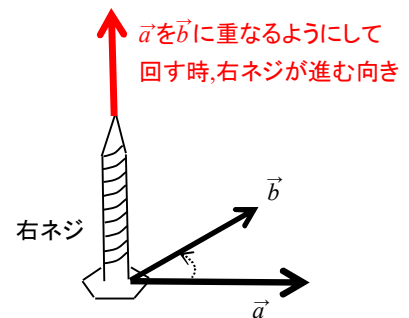
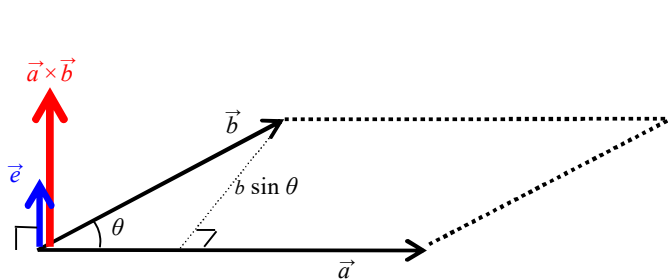
ベクトルの外積は3次元のベクトルに対して定義される。ここで、ベクトルの外積について整理する。

3次元の2つのベクトル  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  と  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  の外積について考えてみよう。

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の外積「 $\vec{a} \times \vec{b}$ 」は、2つのベクトルの間の角度を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) として、下の式で定義される。

$$\vec{a} \times \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \vec{e} = \begin{cases} \text{大きさ} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \\ \text{向き} = \vec{a} \text{ を } \vec{b} \text{ に重なるように回転させたときに} \\ \text{右ネジが進む向き(単位ベクトル } \vec{e} \text{ の向き)} \end{cases} \quad (6-2-3)$$

大きさ  $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$  は  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を2つの辺とした平行四辺形の面積に等しい。



また、積の順番を交換すると、逆向きになる。

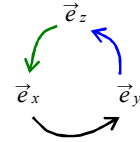
$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (6-2-4)$$

直交座標における単位ベクトル  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  の間の外積は互いに直交しているので、下の式で表される。

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \quad (6-2-5)$$

<sup>6</sup> 別名として、「フレミング左手の法則」とも呼ばれる。

外積の順番として、右の図のように「 $x \rightarrow y \rightarrow z$  ( $x$  成分  $\times y$  成分  $\rightarrow z$  成分)」,  
 「 $y \rightarrow z \rightarrow x$  ( $y$  成分  $\times z$  成分  $\rightarrow x$  成分)」, 「 $z \rightarrow x \rightarrow y$  ( $z$  成分  $\times x$  成分  $\rightarrow y$  成分)」,  
 と周期的な順番をとる。逆まわり(時計まわり)なら、右辺に「 $-1$ 」がつく。  
 これを数式として表したのが下の式である( $i, j, k$  は  $x, y, z$  に相当し,  
 $i=1$  なら  $x$ ,  $i=2$  なら  $y$ ,  $i=3$  なら  $z$  に相当する)。



(6-2-6)

ここで、レビ・チビタの記号  $\epsilon_{ijk}$  は下の式で定義される。

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & (\text{添え字の } ijk \text{ が, 「 } x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots \text{ 」の順番で並ぶ場合}) \\ -1 & (\text{添え字の } ijk \text{ が, 「 } x \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow \dots \text{ 」の順番で並ぶ場合}) \\ 0 & (\text{その他; } i=j, j=k, i=k, \text{ and/or } i=j=k \text{ となる場合}) \end{cases} \quad (6-2-7)$$

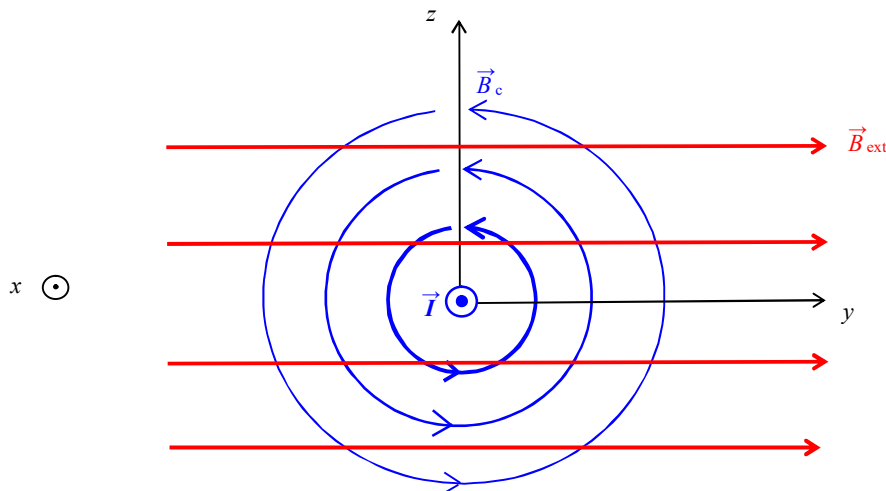
ベクトル  $\vec{a}$  を成分で表し、 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$  とし、(6-2-4)式と(6-2-5)式を用いてまとめると、

2つのベクトルの外積「 $\vec{a} \times \vec{b}$ 」は成分表示すると下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6-2-8)$$

### ・電流が磁場から受ける力の物理的意味

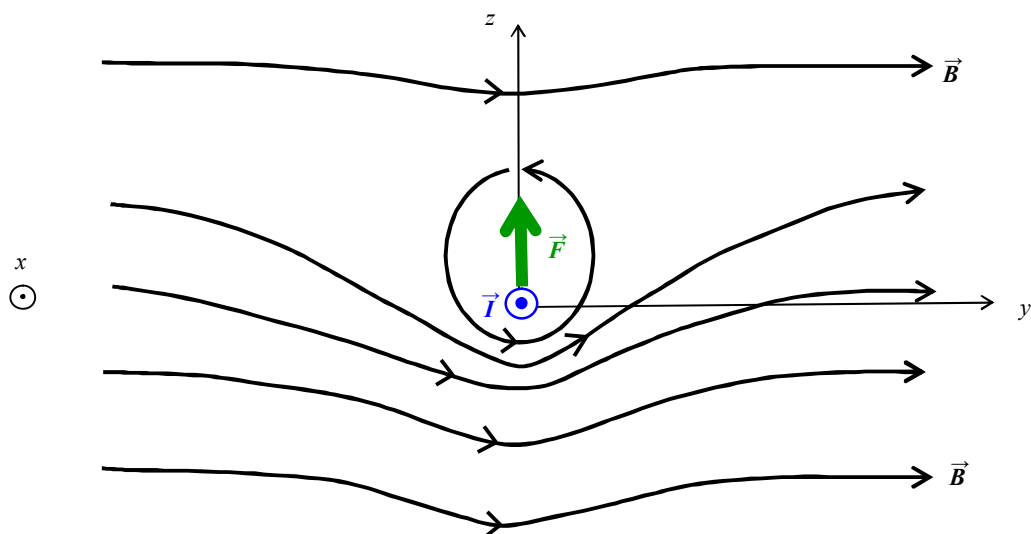
外から磁束密度  $\vec{B}_{\text{ext}}$  が印加されている中に、電流  $\vec{I}$  が流れているとき、電流が流れている長さ  $\ell$  の導線に働く力  $\vec{F}$  は(6-1-2)式で表される。



電流を  $+x$  方向に流し、外からの磁束密度を  $+y$  方向に印加した場合を上図に示す。  $+x$  方向は紙面に垂直に紙面の奥から手前の向きとする。また、真空中に導線を置く。電流  $\vec{I}$  によってできる磁場を  $\vec{H}_c$  とし(添え字の 'c' は current の意味)、それによってできる磁束密度を  $\vec{B}_c$  ( $\vec{B}_c = \mu_0 \vec{H}_c$ ) とし、これらの2つの磁束密度を図示した。



次に、2つの磁束密度を合成した磁束密度 $\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_{\text{ext}}$ を図示する。+zの領域では2つの磁束密度が逆向きとなるので、磁束密度は弱まり、-zの領域では2つの磁束密度が同じ向きとなるので、磁束密度は強まる。結果として、-zの領域では磁束密度(あるいは磁力線)がより密につまる。そして、この状態を緩和し安定化するために、導線には+z方向に力 $\vec{F}$ が働く。「ベクトルの外積」を用いることで、磁場が印加された空間に電流が流れている場合の、電流が流れている導線が受ける力 $\vec{F}$ が表現できる。



#### ・ローレンツ力

長さ $\ell$ の電流が流れている導線に外から磁場を印加したときに、導線に働く力は(6-2-1)式で表された。長さ $\ell$ で断面積 $S$ の導線内には、電荷 $q$ の荷電粒子が $N$ 個ある。(6-2-1)式から、1個の荷電粒子に働く力を導出しよう。(4-1-8)式から、電流 $\vec{I}$ は、「 $\vec{I} = n q S \vec{v}$ 」で、粒子密度 $n$ は、「 $n = N/(S \ell)$ 」と表されるので、これを(6-2-1)式に代入し、1個の荷電粒子に働く力 $\vec{F}$ を導出すると下の式で表すことができる。下のよう、動いている荷電粒子が磁束密度から受ける力を「ローレンツ力<sup>7)</sup>」と呼ぶ。

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (6-2-9)$$

さらに、同時に電場 $\vec{E}$ が印加されている場合に荷電粒子が受ける電気力「 $q \vec{E}$ 」も加えて、ローレンツ力と呼ぶ場合もある。

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6-2-10)$$

#### ・アンペールの法則とローレンツ力

ここで、アンペールの法則とローレンツ力の関係についてまとめる。

ガウスの法則と同様にアンペールの法則は電磁気学において、特に重要な法則である。閉曲線の内部に電流が流れているときは、(6-1-5)式の左辺に相当する「磁場の線積分が有限な値」を持ち、電流がないときは「0」となる。

電流があるとき、磁力線は、電流のまわりを1周し、渦巻いている状態となる。磁力線が出現し渦巻くことは、その渦の中心が、空間的な性質からみて、特殊な構造をしている、「特異点」となるからである。実際、電流 $I$ のまわりの磁場の大きさ $H$ は、電流からの距離 $r$ として、「 $H = I/(2\pi r)$ 」となり、「 $r = 0$ 」で、数学的には発散してしまう。

電流は線状に流れており、電流が流れていて渦の中心を「線状の特異点」と言うことができる。特異点をその内部に含まない

<sup>7)</sup> ローレンツ(Hendrik A. Lorentz)は19世紀後半-20世紀前半のオランダの物理学者で、特殊相対性理論に表れる「ローレンツ変換」も考案した。

空間で線積分を実行すると、その値は「0」となる。

「アンペールの法則にしたがって、電流が発生源となり、空間に磁場 $\vec{B}$ ができる」

- 磁場(磁束密度)が存在する空間に速度 $\vec{v}$ で動いている電荷  $q$  の荷電粒子があると、粒子はローレンツ力 $\vec{F}$ を受ける。ローレンツ力 $\vec{F}$ は、  
「 $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ 」の関係満たす。この関係式は、磁場(電磁気学)と力(力学)を結びつける重要な関係式である。
- 動いている電荷  $q$  があることで磁場ができ、外からの磁場(磁束密度)と相互に影響を及ぼし合う(力をやりとりする)。

## ・サイクロトロン運動

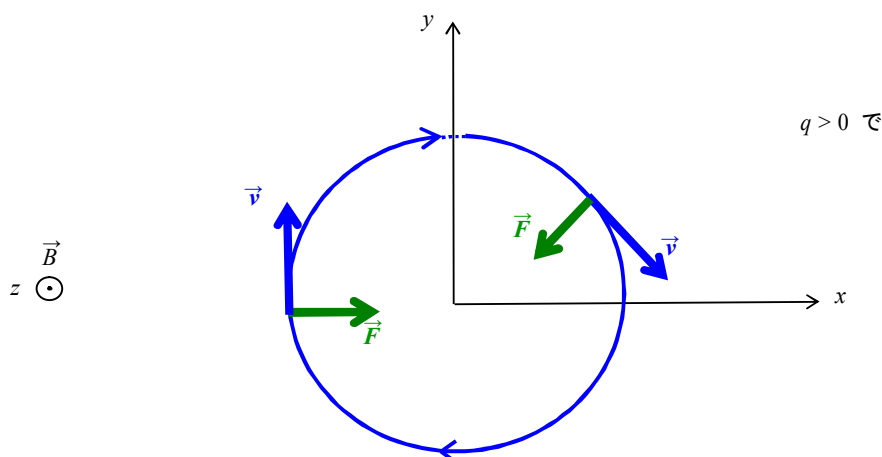
動いている荷電粒子が、外から電場が印加されておらず、外から磁場のみが印加されている空間を進むとき、どのような運動をするか考えてみよう。簡単のために、質量  $m$ 、電荷  $q (> 0)$  の荷電粒子が  $xy$  平面上を運動し、外から一様な磁束密度 $\vec{B}$ が $+z$ 方向に印加されているとする( $\vec{B} = (0, 0, B)$ )。荷電粒子の進む向きと磁束密度の向きが垂直となるので、荷電粒子の速さを  $v$  とし、ローレンツ力の大きさ  $F$  は「 $F = qvB$ 」と表される。

### ① 荷電粒子が描く軌道

下の図のように、荷電粒子は進む向きと垂直方向の力(ローレンツ力)を受け、軌道が曲げられる。例えば、正の電荷を持った粒子が $+y$ 方向に進んでいるとき、ローレンツ力は $+x$ 方向に働き、進む向きが曲げられる。さらに、軌道を曲げられたこの粒子が $+x$ 方向に進むと、ローレンツ力は $-y$ 方向に働く。このように、ローレンツ力は恒に進行方向と垂直に働き、軌道が曲げられ、円軌道を描く。このようなローレンツ力を受けての円運動を「サイクロトロン運動」と呼ぶ。進行方向と垂直に働く力は、物体に対し仕事<sup>8</sup>をしないので、物体が持つ運動エネルギーは変わらない。そのため、物体は速さが一定となる円運動(等速円運動)を行う。

粒子が円運動するためには、粒子に向心力が働く必要がある。ローレンツ力がこの向心力に相当する。等速円運動の回転半径  $R$ 、角速度  $\omega$ 、速さ  $v$  とすると、「 $v = R \omega$ 」の関係が成り立ち、向心力の大きさ  $F$  は、「 $F = m R \omega^2 = m v^2 / R$ 」と表すことができる。この力  $F$  がローレンツ力となるので、下の関係式(運動方程式)が成立する。

$$m \frac{v^2}{R} = q v B \quad (6-2-11)$$



上の式より、回転半径  $R$  と回転の角速度(サイクロトロン角振動数)  $\omega_c$  は、下の式で与えられる。

<sup>8</sup> 物体に働く力 $\vec{F}$ 、物体の速度 $\vec{v} = (d\vec{r}/dt)$ とすると、この力が物体に与える微小仕事  $dW$  は、 $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \theta$  と表される。ここで角度  $\theta$  は力と変位(進む向き)の間の角度である。力の向きと進行方向が垂直となるとき、力は物体には仕事はしないので、運動エネルギーは一定となる。

$$R = \frac{m v}{q B}, \quad \omega_c = \frac{q B}{m} \quad (6-2-12)$$

上の図のように、電荷  $q$  が正で、外部からの磁束密度  $\vec{B}$  が  $+z$  方向に印加されている場合は、荷電粒子は  $xy$  平面上で時計回りに回転するサイクロトロン運動する。

② 微分方程式を用いて運動方程式を表現した場合の解(高専3年以上を対象; 数学が苦手な学生は省略してよい)

荷電粒子が  $xy$  平面上を運動するので、時刻  $t$  での速度  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$  とすると、ここでは、磁束密度  $\vec{B} = (0, 0, B)$  なので、ローレンツ力  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$  は下の式で表される。

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q (B v_y, -B v_x, 0) \quad (6-2-13)$$

さらに、運動方程式を下の式のように、 $x$  成分と  $y$  成分に対する微分方程式で表す。

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = q B v_y & (x \text{ 成分}) \quad \rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{q B}{m} v_y = \omega_c v_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -q B v_x & (y \text{ 成分}) \quad \rightarrow \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q B}{m} v_x = -\omega_c v_x \end{cases} \quad (6-2-14)$$

(6-2-14)式の上の式について、さらに時刻  $t$  で微分し、その右辺に下の式を代入すると、下のような速度の  $x$  成分  $v_x$  に関する2階の微分方程式が得られる( $y$  成分も同様な微分方程式となる)。

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x \quad (6-2-15)$$

上の2階の微分方程式の解は、定数  $C_1$  と  $C_2$  を用いて、下の式で表すことができる。

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega_c t) + C_2 \sin(\omega_c t) \quad (6-2-16)$$

定数  $C_1$  と  $C_2$  は初期条件から決定される。例えば、時刻  $t=0$  での初速度  $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = (v_x(t=0), v_y(t=0), 0) = (0, v_0, 0)$  で、初期位置  $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0) = (-R, 0, 0)$  とすると( $v_0 = R\omega_c$  が成立)、定数  $C_1 = 0, C_2 = v_0$  と与えられる。その解は下の式で与えられる。

$$v_x(t) = v_0 \sin(\omega_c t), \quad v_y(t) = v_0 \cos(\omega_c t) \quad (6-2-17)$$

さらに、時刻  $t$  で積分し、初期位置から、時刻  $t$  での位置  $\vec{r} = (x, y, 0)$  は下の式で与えられる。

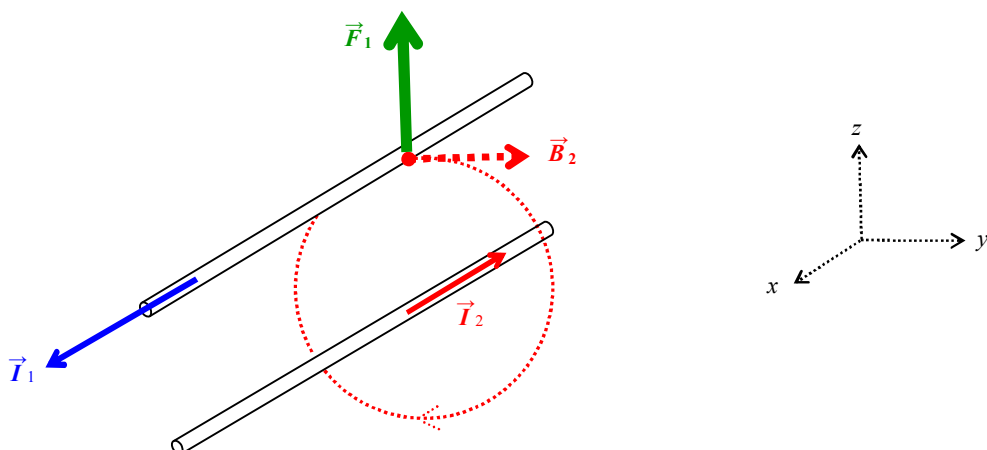
$$x(t) = -R \cos(\omega_c t), \quad y(t) = R \sin(\omega_c t) \quad (6-2-18)$$

上の式から時刻  $t$  を消去すると、粒子の軌道は半径  $R (= v_0/\omega_c)$  で、原点のまわりを周回する円軌道となる。その周期  $T$  は、 $T = 2\pi/\omega_c = 2\pi m/(qB)$  となり、外から加える磁束密度が大きくなると、周期が短くなる。

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (6-2-19)$$

### 6-3. 電流間に働く力

真空中に平行となる 2 本の導線を置く。2 本の導線は距離  $r$  だけ離れており、2 本の導線にはそれぞれ、 $I_1$  と  $I_2$  の電流が流れているものとする。導線 1 では  $+x$  方向に電流  $\vec{I}_1$  が、導線 2 は導線 1 から見て  $-z$  方向に距離  $r$  だけ離れた地点で  $-x$  方向に電流  $\vec{I}_2$  が流れているものとする。



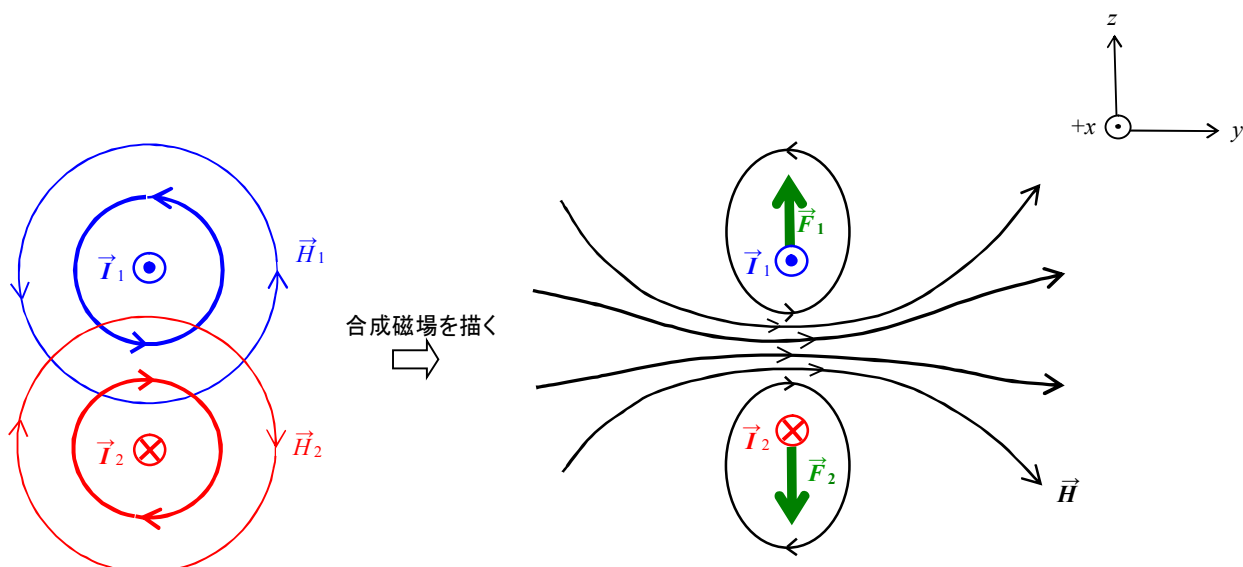
電流  $\vec{I}_1$  が流れている導線 1 に働く力  $\vec{F}_1$  は、導線 2 に電流が流れていることで発生する磁束密度  $\vec{B}_2$  から(5-2-1)式で表された力である。従って、長さ  $\ell_1$  の導線 1 に働く力  $\vec{F}_1$  は下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_1 = \ell_1 (\vec{I}_1 \times \vec{B}_2) \quad (6-3-1)$$

上の図の配置では、導線 2 に流れる電流によってできる磁場  $\vec{H}_2$  は導線 1 においては  $+y$  方向を向くので、アンペールの法則を用いて磁束密度  $\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2 = \mu_0 H_2 \vec{e}_y = \mu_0 I_2 / (2\pi r) \vec{e}_y$  と表すことができ、また、導線 1 に流れる電流  $\vec{I}_1 = I_1 \vec{e}_x$  と表すことができるので、 $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$  より、長さ  $\ell_1$  の導線 1 に働く力  $\vec{F}_1$  は 2 つの導線を流れる電流の大きさを用いて下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_1 = \ell_1 \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \vec{e}_z \quad (6-3-2)$$

逆向きに進む電流間に働く力は斥力(反発力)となる。斥力となる原因を磁力線から考えてみよう。  $+x$  方向から 2 本の導線に流れる電流が作る磁場を下の図のように描くことができる。



上の図のように逆向きに流れる電流の間の空間は、合成磁場によってできる磁力線がより密に詰まる状態になる。磁力線が密に詰まっている状態は、空間が磁場による磁気エネルギーがより高い状態にある。空間が持つ磁気エネルギーを下げ、磁力線の分布を均一化するために、**逆向きに流れる電流の間には斥力が働く**。また、**同じ向きに流れる電流の間には引力が働く**。

真空中に、長さ  $r$  だけ離れて平行に流れる電流  $I_1$  と  $I_2$  の導線の間には斥力または引力が働き、長さ  $\ell$  の各々の導線に働く力の大きさ  $F$  は下の式で表される。

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \ell \quad (6-3-3)$$

#### ・ベクトルを用いた表現

真空中を 2 つの電流が  $x$  軸方向に流れている。導線 1 を流れる電流  $\vec{I}_1 = I_1 \vec{e}_x$  で、導線 1 の位置  $\vec{r}_1$  は  $\vec{r}_1 = (x, y_1, z_1)$  である。また、導線 2 を流れる電流  $\vec{I}_2 = -I_2 \vec{e}_x$  で、導線 2 の位置  $\vec{r}_2$  は  $\vec{r}_2 = (x, y_2, z_2)$  とする。(6-1-3)式より、電流  $\vec{I}_2$  によって導線 1 の位置にできる磁束密度  $\vec{B}_2$  は、下の式で表すことができる。ここで、 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  とした ( $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ )。

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{\vec{I}_2 \times \vec{r}_{12}}{2\pi r_{12}^2} \quad (6-3-4)$$

(5-2-20)式に上の式を代入して、下の式を得ることができる。

$$\vec{F}_1 = \ell_1 \mu_0 \frac{\vec{I}_1 \times (\vec{I}_2 \times \vec{r}_{12})}{2\pi r_{12}^2} \quad (6-3-5)$$

ここで、ベクトル公式「 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ 」<sup>9</sup>を用い、電流  $\vec{I}_1$  と  $\vec{r}_{12}$  は直交し、電流  $\vec{I}_1$  と  $\vec{I}_2$  は逆向きになるので下の式を得ることができる。また、単位ベクトル  $\vec{e} = \vec{r}_{12}/r_{12}$  は導線 2 から導線 1 を向いた単位ベクトルである(この節の始めに示した図のような場合は、導線 1 の位置  $\vec{r}_1 = (x, 0, 0)$ 、導線 2 の位置  $\vec{r}_2 = (x, 0, -r)$  としたので、 $\vec{e} = \vec{e}_z$  に相当する)。

$$\vec{F}_1 = \ell_1 \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r_{12}^2} \vec{r}_{12} = \ell_1 \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r_{12}} \vec{e} \quad (6-3-6)$$

#### ・電流の単位

国際標準単位系では、(6-3-3)式の電流間に働く力から、電流の単位である 1 A(アンペア)を定義している。すなわち、距離  $r = 1$  m 離れた 2 本の導線に同じ電流  $I$  を流し、導線の長さ  $\ell = 1$  m に作用する力の大きさ  $F$  が、 $F = 2 \times 10^{-7}$  N となったとき、その電流  $I$  を、 **$I = 1$  A(アンペア)と定義した**。国際標準単位系では、4 つの基本単位を与え、その単位から物理学・工学の体系を構築している。その 4 つの基本単位は、「長さの単位 m(メートル)」、「質量の単位 kg(キログラム)」、「時間の単位 s(秒)」、「電流の単位 A(アンペア)」である。これらの単位からなる体系をその頭文字をとって「MKSA 単位系」と呼ぶ。

逆に、電流の定義から、真空の透磁率  $\mu_0$  を決めることができる。

$$2 \times 10^{-7} = 1 \times \mu_0 \times \frac{1 \times 1}{2\pi \times 1} \rightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (6-3-7)$$

この関係と、磁場  $\vec{H}$  と磁束密度  $\vec{B}$  の関係式「 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 」から、磁束密度  $\vec{B}$  の単位 T(テスラ)は下の式で換算できる。

$$T = \text{N}/(\text{A m}) = \text{Wb}/\text{m}^2 \quad (6-3-8)$$

<sup>9</sup> (6-2-8)式を用いると、「左辺 = 右辺」を確認することができる。また、詳しい導出は 8 章の(8-2-17)式以降に示す。

(6-2-1)式から、電流  $I = 1 \text{ A}$  が流れている長さ  $\ell = 1 \text{ m}$  の導線に、電流が流れている向きと垂直に磁束密度の大きさ  $B = 1 \text{ T}$  の磁束密度となる磁場を印加したときに、導線には、力の大きさ  $F = 1 \text{ N}$  の力が作用することになる。地球の地磁気による地表の磁束密度の大きさは  $10^{-4} \text{ T}$  程度、実験室で作られる強力な電磁石が作る磁束密度の大きさは  $10 \text{ T}$  程度である<sup>10</sup>。

## 6-4. ビオ・サバールの法則

アンペールの法則から、電流がそのまわりに磁場を生成することがわかったが、アンペールの法則を直接、適用させたのでは、磁場を計算することが困難な場合もある。そこで、アンペールの法則と本質的には同等だが、異なる表現形式で表した「**ビオ・サバールの公式**」<sup>11</sup>について紹介する。

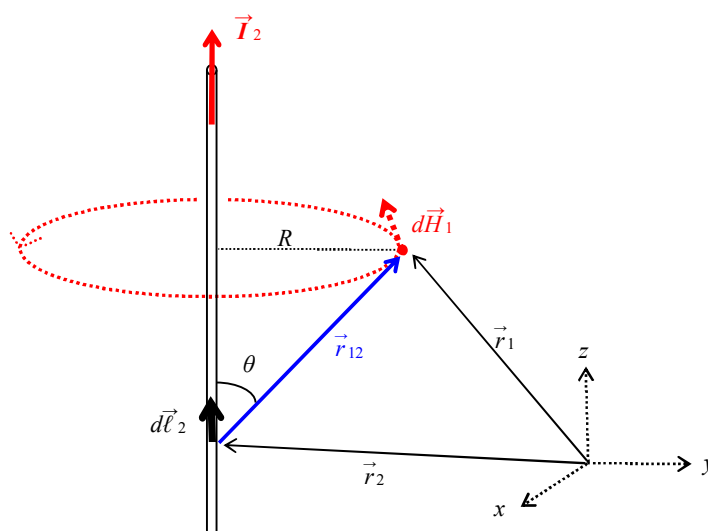
アンペールの法則では、無限に長い直線電流とそのまわりの磁場に関する関係を表した法則であった。ビオ・サバールの法則は、微小長さ  $d\ell$  を流れる電流とその電流によって生成される磁場の関係を表した法則で、原理的にはアンペールの法則と同等である。

「6-1. アンペールの法則」で示した最初の図と同じ配置をとる。+z 方向に流れている電流  $I_2$  があり、この導線の微小部分を取り、電流が流れている向きの微小変位を  $d\vec{\ell}_2$  とし、この微小部分の位置を  $\vec{r}_2$  とする。この導線の微小部分によって位置  $\vec{r}_1$  にできる磁場を  $d\vec{H}_1$  とする。また微小部分からみた、位置  $\vec{r}_1$  の変位ベクトル  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  であり、その大きさ  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  とする。また、微小変位を  $d\vec{\ell}_2$  と変位  $\vec{r}_{12}$  の間の角度を  $\theta$  とする。位置  $\vec{r}_2$  の z 成分が、 $-\infty$  では  $\theta = 0$ 、 $\infty$  では  $\theta = \pi$  に相当する。

この節では、始めに「ビオ・サバールの法則」を表す式を提示し、その式

から出発して、「アンペールの法則」を導出することで、2つの法則が同等であることを示す。

ビオ・サバールの法則は下の式で表される。ビオ・サバールの法則は曲線的に流れている電流にも適用できるの、電流が作る磁場を計算で求める際、アンペールの法則よりも有用な場合がある。



$$d\vec{H}_1 = \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3} = \begin{cases} \text{大きさ } dH_1 = \frac{I_2 d\ell_2 \sin \theta}{4\pi r_{12}^2} \\ \text{向き} = \text{右ネジの法則に従う向き(図のように電流を取り囲む向き)} \end{cases} \quad (6-4-1)$$

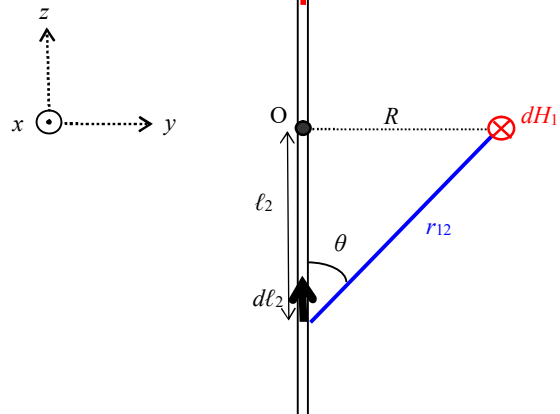
次に、上の「ビオ・サバールの法則」について、微小変位  $d\ell$  で積分することで「アンペールの法則」を導出しよう。上に示した図を見やすくするために、yz 平面での図を下に示す。

<sup>10</sup> 別な単位系において、磁束密度の単位として「G (ガウス)」がある。肩こりに効果があるとされているピップ・エレキバンは 1300 G 程度で、これは、 $0.13 \text{ T}$  に相当する ( $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ )。

<sup>11</sup> ビオ(J. B. Biot)とサバール(F. Savart)は 19 世紀のフランスの物理学者で、エールステッドの研究に触発されて、共同で実験を行い、電流と磁場の関係式(ビオ・サバールの法則)を発見した。

位置 $\vec{r}_1$ での磁場の大きさ $H_1$ は、被積分変数を $\ell_2$ として積分して、求めることができる(ここで、 $z$ 成分の変数 $\ell_2$ で積分するので、 $z$ 方向について対称となるように、図の点 $O$ を $z$ 方向の原点として積分する)。図では、変数 $\ell_2$ は $-z$ 方向にあるので、 $\cot \theta = -\ell_2/R$ である。また、 $r_{12}^2 = \ell_2^2 + R^2$ 、 $\sin \theta = R/r_{12}$ である。

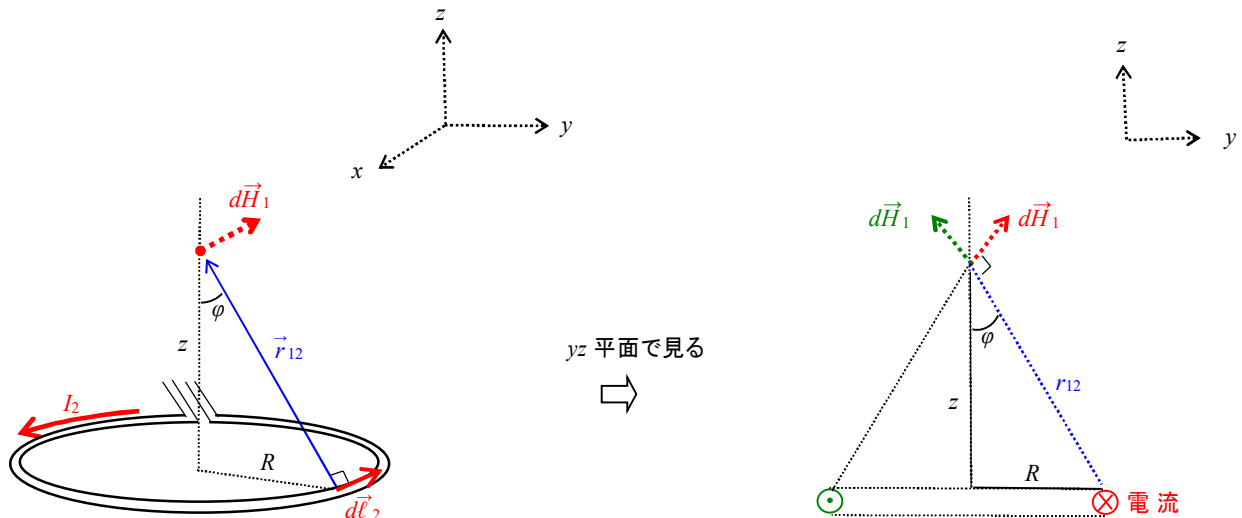
$$\begin{aligned} H_1 &= \int dH_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_2 \sin \theta}{4\pi r_{12}^2} d\ell_2 \\ &\quad (\text{ } d\ell_2 = R d\theta / \sin^2 \theta, \text{ } r_{12}^2 = R^2 / \sin^2 \theta \text{ より}) \\ &= \int_0^\pi \frac{I_2 \sin \theta}{4\pi R} d\theta \\ &= -\frac{I_2}{4\pi R} [\cos \theta]_0^\pi = \frac{I_2}{2\pi R} \rightarrow \text{アンペールの法則} \end{aligned}$$



(6-4-2)

### ・ビオ・サバールの法則の応用

円形コイルを作り、そのコイルに電流 $I_2$ を流したとき、円形コイルの中心軸上の位置でできる磁場の大きさ $H_1$ をビオ・サバールの法則である(6-4-1)式を用いて求めてみよう。ここで、円形コイルの半径を $R$ 、コイルを流れる電流を $I_2$ 、導線の微小変位(電流が流れる向きの微小変位)を $d\vec{\ell}_2$ 、この微小部分から見た位置 $\vec{r}_1$ への変位ベクトルを $\vec{r}_{12}$ 、円形コイルの中心から位置 $\vec{r}_1$ までの距離を $z$ とした。



導線の微小変位 $d\vec{\ell}_2$ と変位ベクトル $\vec{r}_{12}$ は直交しており、2つのベクトルの間の角度 $\theta = 90^\circ$ なので、導線の微小変位 $d\vec{\ell}_2$ が位置 $\vec{r}_1$ に作る微小磁場の大きさ $dH_1$ は(6-4-1)式より、「 $dH_1 = I_2 d\ell_2 / (4\pi r_{12}^2)$ 」となる。微小磁場の向きは右ネジの法則に従い、図のように変位ベクトル $\vec{r}_{12}$ と直交する。また、円形コイルを形成する導線の微小部分 $d\ell_2$ は中心角を $\alpha$ とすると、「 $d\ell_2 = R d\alpha$  ( $\alpha; 0 \sim 2\pi$ )」となる。中心角 $\alpha$ が $\pi$ ずれた微小変位 $d\vec{\ell}_2$ が作る微小磁場 $d\vec{H}_1$ の横方向( $y$ 方向)は逆向きになり、打ち消され、縦方向( $z$ 方向)のみが、積分に寄与する。微小磁場 $d\vec{H}_1$ の縦方向( $z$ )成分は、上の図の角度 $\phi$ を用いて、「 $dH_{1,z} = dH_1 \cos(\pi/2 - \phi) = dH_1 \sin \phi$ 」となる。したがって、位置 $\vec{r}_1$ における磁場の大きさ $H_1$ と磁場 $\vec{H}_1$ は次のように計算で求めることができる。

$$H_1 = \int dH_{1,z} = \oint_C \frac{I_2}{4\pi r_{12}^2} \sin \varphi d\ell_2 = \int_0^{2\pi} \frac{I_2}{4\pi(z^2+R^2)} \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} R d\alpha$$

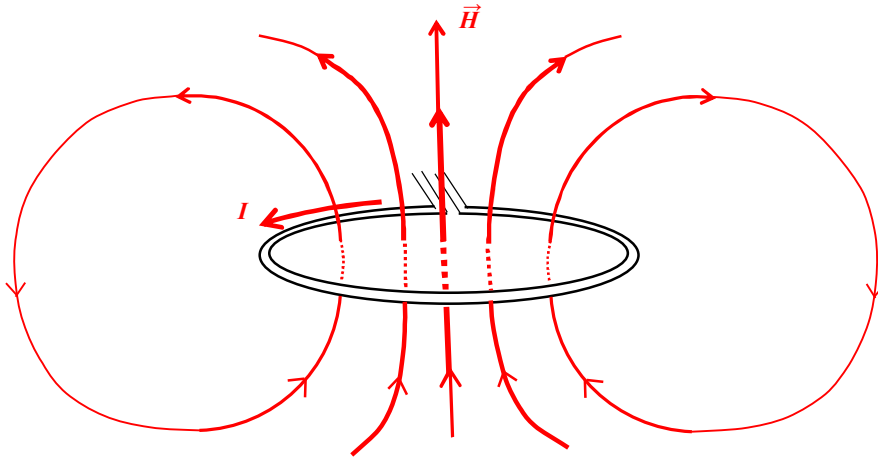
$$= \frac{I_2 R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}} \quad (6-4-3)$$

$$\vec{H}_1 = H_1 \vec{e}_z \quad (6-4-3)'$$

さらに、円形コイルの中心( $z=0$ )での磁場 $\vec{H}_1$ は下の式で表される。

$$\vec{H}_1 = \frac{I_2}{2R} \vec{e}_z \quad (6-4-4)$$

任意の位置 $\vec{r}_1$ において、円形コイルによって作られる磁場 $\vec{H}_1$ を計算することは省略するが、できた磁場(磁力線)の様子を下の図に示す。



この磁力線の様子は、N 極と S 極からなる棒磁石が作る磁場の様子と似ている。実際、(6-4-3)式から、遠方( $z \gg R$ )では、磁場の $H_1$ は下の式で近似される。

$$H_1 \sim \frac{I_2 R^2}{2z^3} \quad (6-4-5)$$

上の式で円形コイルを構成する面積 $S = \pi R^2$ として、次のように対応させる。「 $I_2 S = I_2 \pi R^2 \rightarrow$  (磁気モーメント)/( $2\mu_0$ ) = ( $q_m 2a$ )/( $2\mu_0$ ) =  $m/(2\mu_0)$ 。ここで、 $m$  は磁気モーメントの大きさ」として、上の式の分子について置き換えると、下の式が得られる。

$$H_1 \sim \frac{m}{2\pi\mu_0 z^3} \quad (6-4-6)$$

これは、問題 5-3 で求めた棒磁石によってできる遠方( $x \gg a$ )での磁場の大きさ $H$ に等しい。

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{4x q_m a}{(x^2-a^2)^2} \sim \frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{2q_m a}{x^3} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{m}{x^3} \quad (6-4-7)$$

したがって、円形コイルの中心軸上で、さらに遠方での場合に限るが、円形コイルと棒磁石でできる磁場との間に対応関係が成立し、磁力線の様子が似ていることが確認できた。これは、棒磁石の表面を円電流が流れていて、その電流によって磁場が発生していることと等価である。

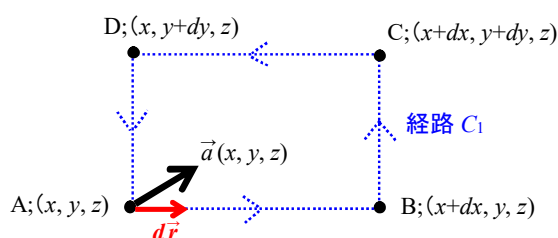


## 6-5. 微分を用いたアンペールの法則(ストークスの定理) (高専 3 年以上を対象; 数学が苦手な学生は省略してよい)

### ・ストークスの定理<sup>12</sup>

位置によって変わる一般的なベクトル $\vec{a}$ があるとする。ベクトル $\vec{a}$ の線積分を面積分の形に変形する法則を「**ストークスの法則**」と呼ぶ。最初にストークスの法則について述べる。

閉じた経路  $C$  が  $xy$  平面上にあるとして、ベクトル $\vec{a}$ について線積分を行う。ここで、経路  $C_1$  は、反時計回りの微少長方形とする。微少長方形の 2 つの辺の長さを  $dx$  と  $dy$  とする。経路  $C_1$  は長方形の 4 つの点、すなわち、「点  $A \rightarrow$  点  $B \rightarrow$  点  $C \rightarrow$  点  $D \rightarrow$  点  $A$ 」で周回する。4 つの点の位置は、点  $A$  の位置  $\vec{r}_A = (x, y, z)$ 、点  $B$  の位置  $\vec{r}_B = (x+dx, y, z)$ 、点  $C$  の位置  $\vec{r}_C = (x+dx, y+dy, z)$ 、点  $D$  の位置  $\vec{r}_D = (x, y+dy, z)$  とする。位置の関数であるベクトル $\vec{a}$ に関して、経路  $C$  での線積分を実行してみよう。



ベクトル $\vec{a}$ に対する  $xy$  平面上での経路  $C_1$  での線積分は(6-1-5)式から下の式のように計算できる。

$$\oint_{C_1(xy\text{平面})} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \left( \int_{A \rightarrow B} + \int_{B \rightarrow C} + \int_{C \rightarrow D} + \int_{D \rightarrow A} \right) \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$(A \rightarrow B \text{ の過程では、微少変位 } d\vec{r} = \vec{e}_x dx \text{ となるので、} \vec{a} \cdot d\vec{r} = a_x dx)$$

$$= \int_{A \rightarrow B} a_x dx + \int_{B \rightarrow C} a_y dy + \int_{C \rightarrow D} a_x (-dx) + \int_{D \rightarrow A} a_y (-dy)$$

(ここで、例えば、経路  $A \rightarrow B$  の線積分では、 $a_x$  の値として、点  $A$  と点  $B$  の平均値をとり、近似する)

$$\sim \frac{a_x(\vec{r}_A) + a_x(\vec{r}_B)}{2} dx + \frac{a_y(\vec{r}_B) + a_y(\vec{r}_C)}{2} dy - \frac{a_x(\vec{r}_C) + a_x(\vec{r}_D)}{2} dx - \frac{a_y(\vec{r}_D) + a_y(\vec{r}_A)}{2} dy$$

$$= \frac{a_x(x, y, z) + a_x(x+dx, y, z)}{2} dx + \frac{a_y(x+dx, y, z) + a_y(x+dx, y+dy, z)}{2} dy$$

$$- \frac{a_x(x+dx, y+dy, z) + a_x(x, y+dy, z)}{2} dx - \frac{a_y(x, y+dy, z) + a_y(x, y, z)}{2} dy$$

(微少量  $dx$  と  $dy$  に対し、Taylor 展開し、1 次までとる)

$$\sim \left\{ a_x(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx \right\} dx + \left\{ a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy \right\} dy$$

$$- \left\{ a_x(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial y} dy \right\} dx - \left\{ a_y(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy \right\} dy$$

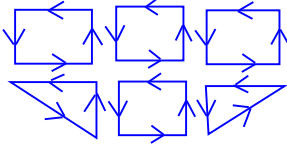
<sup>12</sup> ストークス(Sir George G. Stokes)は 19 世紀のアイランド・イギリスの数学者・物理学者で数学・流体力学・光学に多大な貢献をした。

$$= \left\{ \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial y} \right\} dx dy \quad (6-5-1)$$

上式で、最後の右辺に表れる‘ $dx dy$ ’は  $xy$  平面にある微少長方形の面積  $dS_{xy}$  に相当する。この微少長方形の法線ベクトル  $\vec{n}$  は  $z$  方向を向くので  $\vec{n} = \vec{e}_z$  となり、で、微少面積ベクトル  $d\vec{S}_{xy} = \vec{e}_z dS_{xy} = \vec{e}_z dx dy$  として表す。

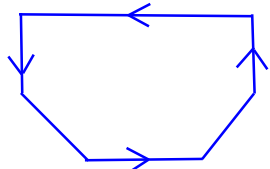
一般的な経路  $C$  は、微少経路  $C_i$  ( $i = 1 \sim$  経路の総数) を足し合わせたものになり、隣接した経路では経路の向きが互いに逆向きになり、打ち消し合うので、(6-1-5)式は下の式で表される。

微少経路  $C_i$  の足し合わせ



隣接した経路では、  
打ち消し合う  
⇒

一般的な経路  $C$



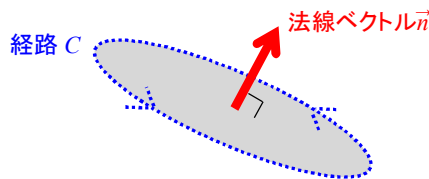
$$\oint_{C(xy \text{ 平面})} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路 } C \text{ 内部の面積}(xy \text{ 平面})} \left\{ \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial y} \right\} dS_{xy} \quad (6-5-2)$$

同様に、 $yz$  平面、 $zx$  平面でも同様に計算することができる。

$$\oint_{C(yz \text{ 平面})} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路 } C \text{ 内部の面積}(yz \text{ 平面})} \left\{ \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial z} \right\} dS_{yz} \quad (6-5-3)$$

$$\oint_{C(zx \text{ 平面})} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路 } C \text{ 内部の面積}(zx \text{ 平面})} \left\{ \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial x} \right\} dS_{zx} \quad (6-5-4)$$

一般化して、経路  $C$  を 3 次元空間における閉曲線にとる。経路  $C$  内の微少面積ベクトル  $d\vec{S} = \vec{n} dS = dS_{yz} \vec{e}_x + dS_{zx} \vec{e}_y + dS_{xy} \vec{e}_z = (dS_{yz}, dS_{zx}, dS_{xy})$  とする。



また、(6-5-2)式~(6-5-4)式の右辺に含まれるで表したベクトル  $\vec{a}$  に対して偏微分して得られたベクトルを  $\vec{b}$  と定義する(例えば、(6-5-2)

式の右辺の微少面積要素  $dS_{yz}$  は、微少面積ベクトル  $d\vec{S}$  の  $x$  成分に該当し、右辺 =  $\int_{yz \text{ 平面}} b_x dS_{yz}$  とする)。ベクトル  $\vec{b}$  はベクトル  $\vec{a}$

を用いて、下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6-5-5)$$

上の式からベクトル  $\vec{b}$  は行列式を用いると、下の式で表すことができ、微分演算子  $\vec{\nabla}$  と  $\vec{a}$  の間の外積で表すことができる。

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \sum_j \vec{e}_j a_j \quad (6-5-6)$$

上の式で, **rot** は「ローテーション(rotation); 回転」と呼ばれ, ベクトル $\vec{a}$ が回転する, あるいは, 渦巻く度合いを表す.

3次元空間で, 任意の曲線となる経路 $C$ においての1周するベクトル $\vec{a}$ の**線積分**は, (6-5-6)式で定義されるベクトル $\vec{b} = \text{rot } \vec{a}$ の**面積分**として表すことができる. この法則を, 「**ストークスの定理**」と呼ぶ.

$$\oint_{\text{経路 } C} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路 } C \text{ 内部の面積 } S} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{ストークスの定理}) \quad (6-5-7)$$

また, レビ・チビタの記号(6-2-7)式を用いて(6-5-6)式を表すと, 下の式のように表すことができる<sup>13</sup>.

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j \vec{e}_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} a_k \quad (6-5-8)$$

#### ・アンペールの法則の微分形

積分を用いた**アンペールの法則**は(6-1-5)式で示した. ここでは, **アンペールの法則について微分形**を用いて表現しよう. アンペールの法則は下の式で表すことができる.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \quad (6-1-5)$$

左辺は経路 $C$ での周回積分である. 左辺にストークスの定理を適用させ, 右辺の電流 $I$ について, (4-1-4)式で定義される電流密度 $\vec{i}$ を用いて表すと, 下の式となる.

$$\int_{\text{経路 } C \text{ 内部の面積 } S} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_{\text{断面積 } S} \vec{i} \cdot d\vec{S} \quad (6-5-9)$$

上の式で被積分関数を比較すると, 下の式のような**アンペールの法則の微分形**を得ることができる.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} \quad (\text{アンペールの法則の微分形}) \quad (6-5-10)$$

<sup>13</sup> 関係式「 $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$ 」を用いた.