問題解答

6.　章

問 6-1-1.

$p = m\,v = 50 \times 8.0 = 400$ kg m/s　　or　　4.0×10^{2} kg m/s.

問 6-1-2.

1)　速さ $v = 39.6$ km/h $= 11$ m/s，運動量の大きさ $p = m\,v = 10^{3} \times 11 = 1.1 \times 10^{4}$ kg m/s.

2)　「運動量の変化 ＝ 力積」より，$p' - p = F\,\Delta t$　→　$0 - p = F\,\Delta t$　→　$F = -p/\Delta t = -1.1 \times 10^{4}/5 = -2.2 \times 10^{3}$ N,

ブレーキ力の大きさ $= 2.2 \times 10^{3}$ N.

問 6-1-3.

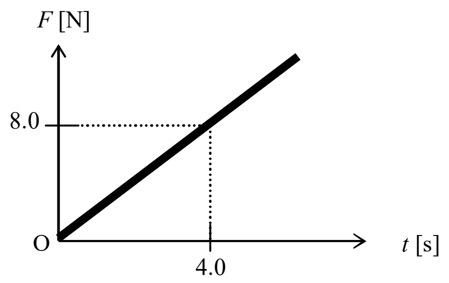
1)　$\vec{p}_0 = m\,\vec{v}_0 = 2\,(3\,,0) = (6.0\,,0.0)$ kg m/s.　　2)　$\vec{p} = m\,\vec{v} = 2\,(0\,,-4) = (0.0\,,-8.0)$ kg m/s.

3)　$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = (0\,,-8.0) - (6.0\,,0) = (-6.0\,,-8.0)$ kg m/s.　　4)　$\Delta p = |\Delta\vec{p}\,| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ kg m/s.

5)　$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}\cdot\Delta t$　→　$\vec{F} = (\vec{p} - \vec{p}_0)/\Delta t = (-6.0\,,-8.0)/4 = (-1.5\,,-2.0)$ N.

問 6-1-4.

1)



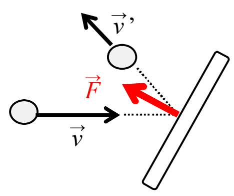
2)　$p(t) = p_0 + (F\text{-}t$ グラフの面積$)$

$= m\,v_0 +$ 三角形の面積

$= 2 \times 1 + (8 \times 4)/2 = 2 + 16 = 18$ kg m/s.

3)　$p = m\,v$ より，$v = p/m = 18/2 = 9.0$ m/s.

問 6-1-5.



ボールがバットにあたる前の速度 $\vec{v} = (v\,,0) = (30\,,0)$ m/s として，

バットにあたって跳ね返った後の速度を $\vec{v}' = (v'_x\,,v'_y)$ とする.

1)　ボールはあたる前と逆向きなので，速度 $\vec{v}' = (-v\,,0) = (-30\,,0)$ m/s

となる．したがって，力積 $\vec{F}\cdot\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v} = 0.2\,(-60\,,0\,) = (-12\,,0)$ kg m/s,

力 $\vec{F} = (\vec{F}\cdot\Delta t\,)/\Delta t = (-60\,,0)$ N，力の大きさ $F = |\vec{F}| = 60$ N.

2)　90°上方に跳ね返ったので，速度 $\vec{v}' = (0\,,v) = (0\,,30)$ m/s となる.

力積 $\vec{F}\cdot\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v} = 0.2\,(-30\,,30\,) = (-6.0\,,6.0)$ kg m/s，力 $\vec{F} = (\vec{F}\cdot\Delta t\,)/\Delta t = (-30\,,30)$ N,

力の大きさ $F = |\vec{F}| = 30\sqrt{2} = 42.42$ N ~ 42 N.

3)　45°上方に跳ね返ったので，速度 $\vec{v}' = (-v\cos 45°\,,v\sin 45°\,) = (-15\sqrt{2}\,,15\sqrt{2}\,)$ m/s となる.

力積 $\vec{F}\cdot\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v} = 0.2\,(-15\sqrt{2} - 30\,,15\sqrt{2}\,) = (-6.0\,,6.0)$ kg m/s,

力 $\vec{F} = (-15\sqrt{2} - 30\,,15\sqrt{2}\,) \sim (-51.2\,,21.2)$ N，力の大きさ $F = |\vec{F}| = 15\sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = 55.43 \sim 55$ N.

問 6-2-1.

1) 衝突後は，再度ぶつからないので，「$v_A' > v_B'$」となる.

2) 運動量保存則「$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$」より，「$0 + 2\times4 = 5\, v_A' + 2\times(-1)$」 → $v_A' = 10/5 = 2.0$ m/s.

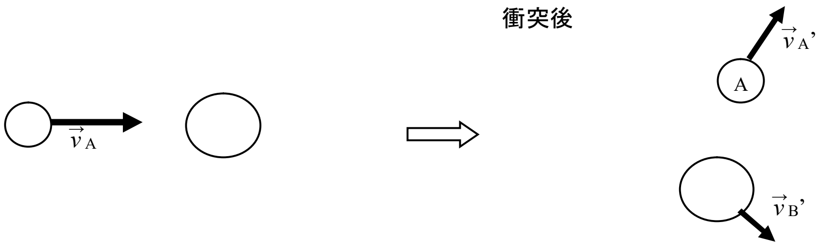
3) 運動量保存則「$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$」より，「$0 + 2\times4 = 5\, v_A' + 2\times1$」 → $v_A' = 6/5 = 1.2$ m/s.

4) 運動量保存則「$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$」より，「$0 + 2\times4 = 5\times1 + 2\, v_B'$」 → $v_B' = 3/2 = 1.5$ m/s.

5) 運動量保存則「$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$」より，「$0 + 2\times4 = (5+2)\, v_A'$」 → $v_A' = v_B' = 8/7 = 1.142 \sim 1.1$ m/s.

問 6-2-2.

1) 衝突前　　　　　　　　　　　　　　　　衝突後



2) 運動量保存則「$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$」より， $2\,(3\,,0) + 4\,(0\,,0) = 2\,(1\,,2) + 4\,(v_x'\,, v_y')$

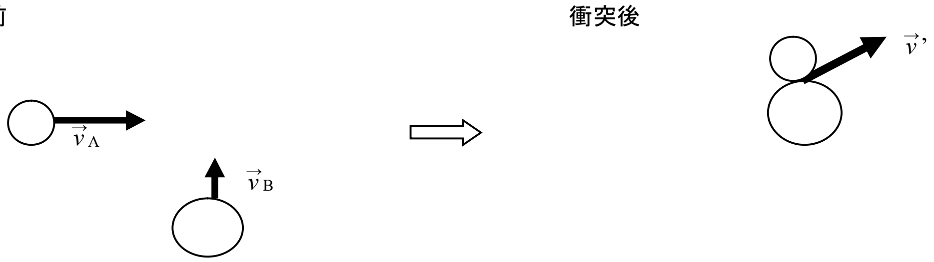
これを計算して， $4\,(v_x'\,, v_y') = (4\,,4)$ → $\vec{v}_B' = (v_x'\,, v_y') = (1.0\,, 1.0)$ m/s.

3) 物体 B の受けた力積$\vec{F}_B\cdot\Delta t =$ 物体 B の運動量変化 $= m_B \vec{v}_B' - m_B \vec{v}_B = m_B \vec{v}_B' = 4\,(1,1) = (4.0\,, 4.0)$ N s,

力積の大きさ $|\vec{F}_B\cdot\Delta t| = 4\sqrt{2} = 5.64 \sim 5.6$ N s.

問 6-2-3.

1) 1) 衝突前　　　　　　　　　　　　　　　　衝突後



2) 運動量保存則「$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B)\, \vec{v}'$」より， $2\,(2\,,0) + 3\,(0\,,1) = 5\,(v_x'\,, v_y')$

これを計算して， $5\,(v_x'\,, v_y') = (4\,,3)$ → $\vec{v}' = (v_x'\,, v_y') = (0.8\,, 0.6)$ m/s.

3) 物体 B の受けた力積$\vec{F}_B\cdot\Delta t =$ 物体 B の運動量変化 $= m_B \vec{v}' - m_B \vec{v}_B = 3(0.8\,,0.6) - 3(0\,,1) = (2.4\,, -1.2)$ N s,

力積の大きさ $|\vec{F}_B\cdot\Delta t| = 1.2\sqrt{5} = 2.683 \sim 2.7$ N s.

問 6-2-4.

問題の図より，各々の速度を成分表示で表し，運動量保存則を適用する.

衝突前の物体 A の速度 $\vec{v}_A = (6.0\,, 0.0)$ m/s,　衝突前の物体 B の速度 $\vec{v}_B = (-3.0\,, 0.0)$ m/s,

衝突後の物体 A の速度 $\vec{v}_A' = (v_A' \cos 60°\,, v_A' \sin 60°) = \left(\dfrac{v_A'}{2}\,, \dfrac{\sqrt{3}\,v_A'}{2}\right)$,

衝突後の物体 B の速度 $\vec{v}_B' = (v_B' \cos 30°\,, -v_B' \sin 30°) = \left(\dfrac{\sqrt{3}\,v_B'}{2}\,, -\dfrac{v_B'}{2}\right)$.

$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$ → 代入する → $4\,(6\,,\,0) + 2\,(-3.0\,,\,0.0) = 4\,(\dfrac{v_A'}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{3}\,v_A'}{2}) + 2\,(\dfrac{\sqrt{3}\,v_B'}{2}\,,\,-\dfrac{v_B'}{2})$

→ $(24 - 6\,,\,0) = (2\,v_A' + \sqrt{3}\,v_B',\ \ 2\sqrt{3}\,v_A' - v_B')$ → y 成分より，$v_B' = 2\sqrt{3}\,v_A'$ を x 成分に代入する

→ $18 = 2\,v_A' + \sqrt{3}\,v_B' = 2\,v_A' + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3}\,v_A' = (2+6)\,v_A'$ → $v_A' = 18/8 = 9/4 = 2.25$ m/s ~ 2.3 m/s ,

$v_B' = 4.5\sqrt{3} = 7.794$ ~ 7.8 m/s.

問 6-2-5.

運動量保存則を適用する　$M\,V = m\,(V + v) + (M - m)\,v'$ → $v' = \dfrac{(M - m)\,V - m\,v}{M - m} = V - \dfrac{m}{M - m}\,v$.

問 6-2-6.

分裂後の物体 A，物体 B，物体 C の速度$\vec{v}_A$，$\vec{v}_B$，$\vec{v}_C$を成分表示し，運動量保存則を適用する.

$\vec{v}_A = v_A\,(\cos 60°, -\sin 60°) = v_A\,(1/2\,, -\sqrt{3}/2) = (\sqrt{3}\,, -3)$ m/s ,

$\vec{v}_B = v_B\,(-\cos 45°, -\sin 45°) = v_B\,(-\sqrt{2}/2\,, -\sqrt{2}/2) = (-2\,, -2)$ m/s , →

$0 = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_B + 2\,\vec{v}_C$ → $\vec{v}_C = -(\vec{v}_A + \vec{v}_B)/2 = (2 - \sqrt{3}\,, 2+3)/2 = (-0.268, 5)/2$ ~ $(-0.13\,,\,2.5)$ m/s.

問 6-3-1.

運動量保存則「$m_A\,v_A + m_B\,v_B = m_A\,v_A' + m_B\,v_B'$」より(右向きを正として) → $3 = 2\,v_A' + v_B'$, ①

はねかえり係数「$e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$」より → $e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{3}$, ②

1) はねかえり係数 $e = 1$ (弾性衝突)なので，②式は③式となる.　$3 = -\,v_A' + v_B'$, ③

①式と③式から連立方程式を解き，解を求める. → $v_A' = 0.0$ m/s,　$v_B' = 3.0$ m/s.

2) はねかえり係数 $e = 0.5$ なので，②式は④式となる.　$3 = -\,2\,v_A' + 2\,v_B'$, ④

①式と④式から連立方程式を解き，解を求める. → $v_A' = 0.5$ m/s,　$v_B' = 2.0$ m/s.

3) はねかえり係数 $e = 0$ (完全非弾性衝突)なので，衝突後，2 つの物体はくっついて移動する.　$v_A' = v_B'$,

①式に代入し，解を求める. → $v_A' = v_B' = 1.0$ m/s.

問 6-3-2.

運動量保存則　$m_A\,v_A + m_B\,v_B = m_A\,v_A' + m_B\,v_B'$, ①

弾性衝突なので，はねかえり係数　$e = 1 = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$, → $v_A - v_B = -\,v_A' + v_B'$, ②

1) ②式より，$v_B' = v_A' + v_A - v_B$ を①式に代入する → $v_A' = \dfrac{(m_A - m_B)\,v_A + 2\,m_B\,v_B}{m_A + m_B}$,

→ $v_B' = \dfrac{2\,m_A\,v_A + (m_B - m_A)\,v_B}{m_A + m_B}$.

2) $m_A = m_B$ を代入する　→　$v_A' = v_B$,　$v_B' = v_A$.

3) $m_A = 99\ m_B$ を代入する　→　$v_A' = \dfrac{98\ v_A + 2\ v_B}{100} = \dfrac{49\ v_A + v_B}{50}$,　$v_B' = \dfrac{198\ v_A - 98\ v_B}{100} = \dfrac{99\ v_A - 49\ v_B}{50}$.

4) $m_A >> m_B$ の条件下で近似する　→　$v_A' \sim v_A$,　$v_B' \sim 2\ v_A - v_B$,　($v_A = 0$ なら，$v_B' \sim - v_B$).

5) $v_A = 99\ v_B$ を代入する →　$v_A' = \dfrac{99\ m_A - 97\ m_B}{m_A + m_B}\ v_B$, $v_B' = \dfrac{197\ m_A + m_B}{m_A + m_B}\ v_B$,　($m_A = m_B$ なら，$v_A' = v_B$, $v_B' = 99\ v_B = v_A$).

問 6-3-3.

高さ h から自由落下し，地面にぶつかるまでの時間 t とし，その速さ v は，「$v = g\ t$」となるので，高さ h と速さ v の関係は，「$h = g\ t^2/2 = g\ (v/g)^2/2 = v^2/(2\ g)$」が成立する．　→　「$v = \sqrt{2\,g\,h}$」

1 回，床に衝突した後の物体の速さを v' とすると，はねかえり係数 e を用いて，「$v' = e\,v$」と表すことができ，さらに，1 回衝突した後，最高点に達するまでの時間を t'，最高点の高さ h' は，「$h' = g\ t'^2/2 = g\ (v'/g)^2/2 = v'^2/(2\ g)$」　→　「$v' = \sqrt{2\,g\,h'}$」

上の 2 つの式より，はねかえり係数 e は，「$e = v'/v = \sqrt{h'/h}$」となる．

1) 2 回跳ね返るので，2 回衝突後の速さを v''，2 回衝突した後の最高点の高さ h'' を用いて，次の式が成り立つ．

→　「$e^2 = (v''/v')\ (v'/v) = \sqrt{h''/h'} \times \sqrt{h'/h} = \sqrt{h''/h} = \sqrt{4.9/19.6} = \sqrt{1/4} = 1/2$」

したがって，はねかえり係数 $e = \sqrt{1/2} = 0.7072 \sim 0.71$.

2) 鉛直上向きを正として，1 回目の衝突による力積$= mv' - (m(-v)) = m\,(e+1)\,v = 0.5\times1.7072\times\sqrt{2\times9.8\times19.6} = 16.73 \sim 16$ N s.

2 回目の衝突による力積$= mv'' - (m(-v')) = m\,(e^2+e)\,v = 0.5\times1.2073\times\sqrt{2\times9.8\times19.6} = 11.83 \sim 12$ N s.

7. 章

問 7-0-1.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ \cos 30° = 2\times3\times\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$. 2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ \cos 135° = \sqrt{2}\times4\times(-\sqrt{2}/2) = -4$.

3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ \cos 150° = 2\times4\times(-\sqrt{3}/2) = -4\sqrt{3}$. 4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ \cos 120° = 1\times4\times(-1/2) = -2$.

問 7-0-2.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 1\times4 + 3\times2 = 4 + 6 = 10$, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\ b} = \dfrac{10}{\sqrt{10}\ \sqrt{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow\ \theta = 45°$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 1\times1 + 2\times(-3) = 1+(-6) = -5$, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\ b} = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\ \sqrt{10}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow\ \theta = 135°$.

3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 2\times(-2) + 3\times(-3) = -13$, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\ b} = \dfrac{-13}{\sqrt{13}\ \sqrt{13}} = -1 \ \rightarrow\ \theta = 180°$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 1\times1 + 1\times\sqrt{3} = 1+\sqrt{3}$, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\ b} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ \times 2} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\times2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° = \cos(45° - 30°) = \cos 15° \ \rightarrow\ \theta = 15°.$$

問 7-0-3.

求める単位ベクトルを$\vec{e} = (x, y)$ とする．単位ベクトルなので，その大きさの 2 乗 $= |\vec{e}|^2 = x^2 + y^2 = 1$, ①　となる．

また，各々のベクトルと直交するので，それらのベクトルとの内積が 0 になる．

1) 2 つのベクトルの内積 $= -4x+3y = 0$, $\rightarrow$ $y = 4x/3$　を①式に代入する．

$$x^2 + y^2 = x^2 + (4x/3)^2 = (1+16/9)x^2 = 25x^2/9 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 9/25 \ \rightarrow\ x = \pm\frac{3}{5},\ y = \frac{4}{3}x = \pm\frac{4}{5} \ \rightarrow\ \vec{e} = \pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

2) 2 つのベクトルの内積 $= x-2y = 0$, $\rightarrow$ $y = x/2$　を①式に代入する．

$$x^2 + y^2 = x^2 + (x/2)^2 = (1+1/4)x^2 = 5x^2/4 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 4/5 \ \rightarrow\ x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ y = \frac{1}{2}x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \ \rightarrow\ \vec{e} = \pm\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

3) 2 つのベクトルの内積 $= \sqrt{3}x + y = 0$, $\rightarrow$ $y = -\sqrt{3}x$　を①式に代入する．

$$x^2 + y^2 = x^2 + (-\sqrt{3}x)^2 = (1+3)x^2 = 4x^2 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 1/4 \ \rightarrow\ x = \pm\frac{1}{2},\ y = -\sqrt{3}x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow\ \vec{e} = \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

問 7-0-4.

6 つの正三角形の内角はそれぞれ 60 °となる．

1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2\times2\times\cos 60° = 2$. 2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 2\times2\times\cos 120° = -2$.

3) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FO} = 2\times2\times\cos 60° = 2$. 4) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OF} = 2\times2\times2\times\cos 120° = -4$.

5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})\cdot 2\overrightarrow{OD} = 2\,(\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}) = 2\,(2\times2 + 2\times2\times\cos 60°) = 2\,(4+2) = 12$.

6) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OA}\cdot 2\overrightarrow{OF} = 2\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF} = 2\,(2\times2\times\cos 60°) = 4$.

7) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DC} = -(2\times2) = -4$.

8) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE})\cdot 2\overrightarrow{OF} = 2\,(-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}) = 2\,(-2\times2\times\cos 60° + 2\times2\times\cos 60°) = 0.$

問 7-0-4.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{x}-\vec{y})\cdot(4\vec{x}+\vec{y}) = 8\,|\vec{x}|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} - |\vec{y}|^2 = 8\times1 - 2\times(-1/2) - 2^2 = 8+1-4 = 5.$

2) $|\vec{a}|^2 = |2\vec{x}-\vec{y}|^2 = 4\,|\vec{x}|^2 - 4\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2 = 4\times1 - 4\times(-1/2) + 2^2 = 4+2+4 = 10 \quad\rightarrow\quad |\vec{a}| = \sqrt{10}.$

3) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |2\vec{x}-\vec{y}-(4\vec{x}+\vec{y})|^2 = |-2\vec{x}-2\vec{y}|^2 = 4|\vec{x}|^2 + 8\,\vec{x}\cdot\vec{y} + 4|\vec{y}|^2 = 4\times1+8\times(-1/2)+4\times2^2 = 4-4+16 = 16 \quad\rightarrow\quad |\vec{a}-\vec{b}| = 4.$

4) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |2\vec{x}-\vec{y}+(4\vec{x}+\vec{y})|^2 = |6\vec{x}|^2 = 36\,|\vec{x}|^2 = 36\times1 = 36$

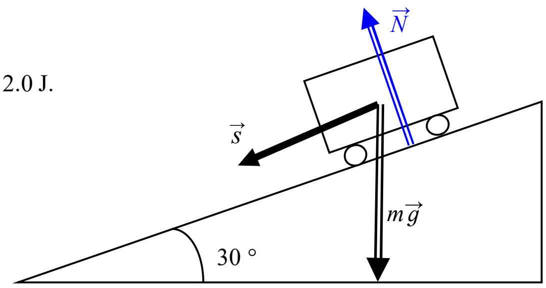
5) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (-2\vec{x}-2\vec{y})\cdot(6\vec{x}) = -12|\vec{x}|^2 - 12\,\vec{x}\cdot\vec{y} = -12\times1 - 12\times(-1/2) = -12+6 = -6.$

問 7-1-1.

1) $W_1 = F\,s\cos 60° = 6\times5\times(1/2) = 15$ J.

2) 重力は鉛直下向きなので，変位と直交する．　$W_2 = m\,g\,s\cos 90° = (2\times9.8)\times5\times0 = 0.0$ J

問 7-1-2.



1) 図より，重力 $m\vec{g}$ と変位 $\vec{s}$ の間の角度は 60 °となる．

$W_1 = m\vec{g}\cdot\vec{s} = m\,g\,s\cos 60° = (2\times9.8)\times0.2\times(1/2) = 1.96 \sim 2.0$ J.

2) 図より，垂直抗力 $\vec{N}$ と変位 $\vec{s}$ の間の角度は 90 °となる．

$W_2 = \vec{N}\cdot\vec{s} = N\,s\cos 90° = 0.0$ J.

問 7-1-3.

重力 $m\vec{g}$ と垂直抗力 $\vec{N}$ のした仕事は上の問と同じように考える．

1) 重力のした仕事 $= m\vec{g}\cdot\vec{s} = m\,g\,x\cos(90°-\theta) = m\,g\,x\,(\cos 90°\cos\theta + \sin 90°\sin\theta) = m\,g\,x\sin\theta.$

2) 垂直抗力がした仕事 $= \vec{N}\cdot\vec{s} = N\,x\cos 90° = 0.$

3) 動摩擦力 $\vec{F}'$ は移動の向き(変位の向き)と逆向きで，その大きさ $F' = \mu' N = \mu' m\,g\cos\theta$ となる．

動摩擦力がした仕事 $= \vec{F}'\cdot\vec{s} = F' x\cos 180° = \mu' m\,g\cos\theta\ x\,(-1) = -\mu' m\,g\cos\theta\,x$.

4) 3 つの合力がした仕事 $= (m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}')\cdot\vec{s} = m\vec{g}\cdot\vec{s} + \vec{N}\cdot\vec{s} + \vec{F}'\cdot\vec{s} = m\,g\,x\,(\sin\theta - \mu'\cos\theta).$

問 7-1-4.

1) 重力と変位は逆向きなので，重力のした仕事 $= m\,g\,s\cos 180° = (2\times9.8)\times5\times(-1) = -98$ J.

2) 重力と変位の間の角度は 120 °なので，重力のした仕事 $= m\,g\,s\cos 120° = (2\times9.8)\times10\times(-1/2) = -98$ J.

3) 重力と変位は同じ向きなので，重力のした仕事 $= m\,g\,s\cos 0° = (2\times9.8)\times2\times1 = 39.2$ J.

4) 重力と変位は直交するので，重力のした仕事 $= m\,g\,s\cos 90° = (2\times9.8)\times10\times0 = 0.0$ J

問 7-1-5.

1) 上向きに一定の速さで持ち上げるとき，物体を支える力は上向きで，その大きさ F は重力の大きさと等しい($F = m\,g$).

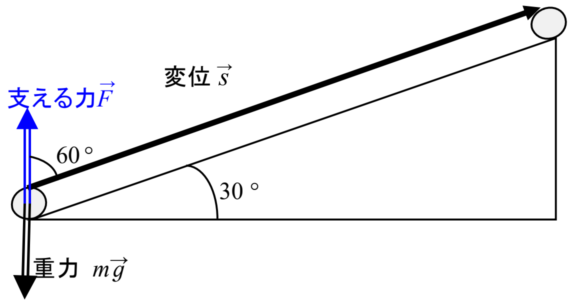
支える力のした仕事 $= F\,s\cos 0° = (2\times9.8)\times5\times1 = 98$ J.

2)　一定の速さで持ち上げるので，重力と支える力はつりあっている．

右の図より，支える力がした仕事 W を計算する．

$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = m\,g\,s\cos 60°$

$= (2×9.8)×10×(1/2) = 98$ J.



3)　物体に対する運動方程式を下に示す．

$m\,\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$

したがって，水平右向きを$+x$ 方向，鉛直上向きを$+y$ 方向とすると，支える力$\vec{F} = m\,\vec{a} - m\vec{g} = 2\,(\,0\,,2+9.8) = (0\,,23.6)$ N,

変位$\vec{s} = (0\,,5)$ m，より，支える力がした仕事 W を計算する．　$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 23.6×5 = 118 \sim 120$ J.

4)　上の 3)と同様に考える．支える力$\vec{F} = m\,\vec{a} - m\vec{g} = 2\,(\,0\,,-2+9.8) = (0\,,15.6)$ N，変位$\vec{s} = (0\,,-5)$ m より，支える力がした仕事 W を計算する．　$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 15.6×(-5) = 78$ J.

5)　支える力$\vec{F}$と変位$\vec{s}$は直交しているので，仕事 $W = 0.0$ J.

問 7-1-6.

1)　$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 3×2 + 2×0 = 6.0$ J.　　2)　$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 4×2 + 2×(-3) = 8 - 6 = 2.0$ J.

3)　変位 $\vec{s} = (-3.0\,,-2.0)$ m　→　$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = -3×(-3) + 1×(-2) = 9 - 2 = 7.0$ J.

4)　力$\vec{F} = (2.0\,,1.0)$ kgw $= (19.6\,,9.8)$ N　→　$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 19.6×2 + 9.8×(-3) = 39.2 - 29.4 = 9.8$ J.

問 7-1-7.

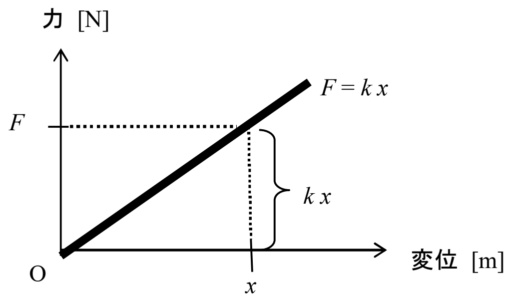
2 つの部分に分けて考える．

$W = W_1 + W_2 = F_1\,x_1\cos 60° + F_2\,x_2\cos 45° = 5×4×(1/2) + 8×6×(\sqrt{2}/2) = 10 + 24\sqrt{2} = 10 + 33.936 = 43.936 \sim 44$ J.

問 7-1-8.

1)　フックの法則より，「 $F = k\,x$ 」の関係がある．

右に図示する．



2)　変位が「0 から x」までの F-x グラフの面積が外からの力がした仕事 W となる．

$$W = \text{三角形の面積} = \frac{\text{底辺×高さ}}{2}$$

$$= \frac{x \times k\,x}{2} = \frac{1}{2}\,k\,x^2.$$

問 7-1-9.

仕事 $W = F\,x\cos 60° = 3×18×(1/2) = 56$ J.

時間 $t = 2$ s で，仕事率 $P = W/t = 56/2 = 28$ W.　時間 $t = 4$ s で，仕事率 $P = W/t = 56/4 = 14$ W.

(注意；　仕事を表す記号 W(ダブリュー)は斜体(イタリック)で，単位の W(ワット)は立体で表す．　)

時間 $t = 10$ s で，仕事率 $P = W/t = 56/10 = 5.6$ W.　時間 $t = 1$ min で，仕事率 $P = W/t = 56/60 = 0.93333 \sim 0.93$ W.

問 7-1-10.

微小時間 Δt の間に，一定の力$\vec{F}$が微小仕事 ΔW の仕事をしたときの仕事率 P は下の式のように表すことができる.
(微小時間 Δt の間に微小変位 $\Delta\vec{s}$だけ移動したので，物体の速度$\vec{v} = \Delta\vec{s}/\Delta t$ となる)

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\,v\cos 0 = F\,v = 40\times 2 = 80 \text{ W.}$$

問 7-2-1.

運動エネルギー$K = m\,v^2/2$ なので，速さ v が 3 倍になると，運動エネルギーK は 9 倍になる.

問 7-2-2.

質量 $m = 200$ g $= 0.2$ kg，速さ $v = 72$ km/h $= 20$ m/s より，運動エネルギー$K = m\,v^2/2 = 0.2\times(20)^2/2 = 40$ J.

問 7-2-3.

東向きを$+x$ 方向，北向きを$+y$ 方向とすると，始めの速度$\vec{v}_0 = (8 , 0)$m/s，終わりの速度$\vec{v} = (0 , 6)$ m/s となる.
運動エネルギーの変化 $\Delta K = m\,(\vec{v})^2/2 - m\,(\vec{v}_0)^2/2 = 26^2/2 - 2\times 8^2/2 = 36 - 64 = -28$ J.
運動量の変化 $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\,\vec{v} - m\,\vec{v} = 2\,(0 , 6) - 2\,(8 , 0) = (-16 , 12)$ kg m/s，大きさ$|\Delta\vec{p}| = 20$ kg m/s，向きは 北西.

問 7-2-4.

運動量$\vec{p} = m\,\vec{v} = 2\,(3.0 , -4.0) = (6.0 , -8.0)$，大きさ $p = |\vec{p}| = 10$ kg m/s，向きは南東，
運動エネルギー$K = m\,(\vec{v})^2/2 = 2\,(6^2 + (-8)^2)/2 = 100$ J.

問 7-2-5.

1)　$U_1 = m\,g\,h_1 = 2\times 9.8\times 10 = 196$ J.
2)　$U_2 = m\,g\,h_2 = 2\times 9.8\times(-8) = -156.8 \sim -157$ J.
3)　$U_3 = m\,g\,h_3 = 2\times 9.8\times 5 = 98$ J.
4)　$U_4 = m\,g\,h_4 = 2\times 9.8\times 12 = 235.2 \sim 235$ J.

問 7-2-6.

位置エネルギー$U = k\,x^2/2 = 2\times(0.05)^2/2 = 2.5\times 10^{-3}$ J.

問 7-2-7.

1)　ばねの伸びを y とすると，フックの法則より，ばね定数 k = 力(重力)/ばねの伸び $= m\,g/y = (2.0\times 10^{-2}\times 9.8)/(4.0\times 10^{-2})$
$= 4.9$ N/m,　→　弾性力による位置エネルギー $= k\,y^2/2 = 4.9\times(4.0\times 10^{-2})^2/2 = 3.92\times 10^{-3} \sim 3.9\times 10^{-3}$ J.
→　重力による位置エネルギー $= m\,g\,(-y) = (2.0\times 10^{-2}\times 9.8)\times(-4.0\times 10^{-2}) = -7.84\times 10^{-3} \sim -7.8\times 10^{-3}$ J.

2)　位置エネルギーの合計 = 弾性力による位置エネルギー $= k\,y'^2/2 = 4.9\times(2.0\times 10^{-2})^2/2 = 1.96\times 10^{-3} \sim 2.0\times 10^{-3}$ J.

問 7-3-1.

力学的エネルギー保存則より，　$0 + m\,g\,h = m\,v'^2/2 + 0$　→　$v' = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\times 9.8\times 19.6} = \sqrt{19.6^2} = 19.6$ m/s.

問 7-3-2.

力学的エネルギー保存則を用いる. $m\,v_0{}^2/2 + m\,g\,h_0 = m\,v^2/2 + m\,g\,h$, ①

1) 始めの運動エネルギー $K_0 = m\,v_0{}^2/2 = 2\times(14)^2/2 = 196$ J ~ 2.0×10^2 J.

2) 始めに真上に投げたので, 最高点では速さ $v = 0$ となる. 最高点での高さ $h_{\max} = (m\,v_0{}^2/2)/(\,m\,g) = v_0{}^2/(2g) = 10$ m.

3) ①式より, $v_1{}^2 = v_0{}^2 - 2\,g\,h_1$ → $v_1 = \sqrt{v_0{}^2 - 2\,g\,h_1} = \sqrt{14^2 - 2\times9.8\times2} = \sqrt{196 - 39.2} = \sqrt{156.8} = 12.52 \sim 13$ m/s.

4) ①式より, $h_2 = (v_0{}^2 - v_2{}^2)/(2\,g) = (14^2 - 10^2)/(2\times9.8) = 96/19.6 = 4.898 \sim 4.9$ m.

問 7-3-3.

斜面の底を高さの基準にとる. 力学的エネルギー保存則を用いる. $m\,g\,(3h) = m\,v^2/2 + m\,g\,y$, ①

1) 底に達するとき, その高さ $y_1 = 0$ なので, ①式に代入し, その速さ $v_1 = \sqrt{6\,g\,h}$.

2) ①式に高さ $y_2 = h$ を代入する. その速さ $v_2 = \sqrt{4\,g\,h} = 2\sqrt{g\,h}$.

3) 飛び出す角度は 45 °なので, 最高点での速さ v_3 は速さ v_2 の水平成分だけになる. したがって, 速さ $v_3 = v_2 \cos 45°$

$= 2\sqrt{g\,h}\times(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2\,g\,h}$, したがって, その高さ y_3 は①式から求める.

→ $y_3 = (3\,g\,h - v_3{}^2/2)/g = 3h - h = 2h$.

4) 飛び出す角度は 60 °なので, 最高点での速さ v_4 は速さ v_2 の水平成分だけになる. したがって, 速さ $v_4 = v_2 \cos 60°$

$= 2\sqrt{g\,h}\times(1/2) = \sqrt{g\,h}$, したがって, その高さ y_4 は①式から求める.

→ $y_4 = (3\,g\,h - v_4{}^2/2)/g = 3h - h/2 = 5h/2 = 2.5h$.

問 7-3-4.

力学的エネルギー保存則を用いる. $m\,v_0{}^2/2 = m\,v^2/2 + k\,x^2/2$, ①

1) ばねが最大に縮んだとき, 物体の速さが 0 になるので, ①式より, その縮み $x_{\max}$ は下のように求めることができる.

$m\,v_0{}^2/2 = k\,x_{max}{}^2/2$ → $x_{\max} = \sqrt{m/k}\ v_0 = \sqrt{0.05/20}\times1.6 = \sqrt{25\times10^{-4}}\times1.6 = 8.0\times10^{-2}$ m.

2) そのときの縮み $x = x_{\max}/2 = 4.0\times10^{-2}$ m を代入すると, その速さ v' は下のように求めることができる.

$m\,v_0{}^2/2 = m\,v'^2/2 + k\,(x_{max}/2)^2/2 = m\,v'^2/2 + m\,v_0{}^2/8$ → $v' = v_0\sqrt{3}/2 = 1.3856 \sim 1.4$ m/s.

問 7-3-5.

衝突前と衝突後では, 「運動量保存則」を用い, 衝突後は「力学的エネルギー保存則」を用いる.

衝突直後の速さを v とする. $m\,v_0 = (m+M)\,v$, ①

衝突後, ばねが x だけ縮んだときの速さを v' とする. $(m+M)\,v^2/2 = (m+M)\,(v')^2/2 + k\,x^2/2$, ②

1) 物体 B の運動エネルギー $K_{0,\mathrm{B}} = m\,v_0{}^2/2$.

2) ①式より, 速さ $v_\mathrm{A} = v_\mathrm{B} = v = m\,v_0/(m+M)$.

3) 衝突直後の物体 A と物体 B の全運動エネルギー $K = m\,v_\mathrm{B}{}^2/2 + M\,v_\mathrm{A}{}^2/2 = (m+M)\,v^2/2 = (m\,v_0)^2/(2\,m + 2M)$.

4) ②式より, 最大に縮んだとき止まるので, 速さ $v' = 0$ を代入する.

→ 最大の縮み $x_{\max} = \sqrt{\dfrac{m+M}{k}}\ v = m\sqrt{\dfrac{1}{k\,(m+M)}}\ v_0$.

5) このときの全運動エネルギー $K' = 0$, 全位置エネルギー $U' = \dfrac{1}{2}\,k\,x_{\max}{}^2 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{m^2}{(m+M)}\,v_0{}^2$.

6)　縮み $x_1 = x_{max}/2$ を②式に代入して求める．　→　$\dfrac{m^2}{(m+M)} v_0{}^2 = \dfrac{1}{2}(m+M) v_1{}^2 + \dfrac{1}{2} k (x_{max}/2)^2$

$$\rightarrow \quad (m+M) v_1{}^2 = 2 \frac{m^2}{(m+M)} v_0{}^2 - \frac{1}{4} k \left(\frac{m^2}{k(m+M)} v_0{}^2 \right) = \frac{7}{4} \frac{m^2}{(m+M)} v_0{}^2$$

$$\rightarrow \quad v_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \frac{m}{m+M} v_0 .$$

問 7-3-6.

運動量保存則より,　　$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$　→　$6 = v_A' + 2 v_B'$,　①

はねかえり係数より,　$e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$　→　$e(0-3) = -3e = -v_A' + v_B'$,　②

1)　衝突前の全運動エネルギー$K = m_A v_A{}^2/2 + m_B v_B{}^2/2 = 0 + 2\times3^2/2 = 9.0$ J.

2)　はねかえり係数 $e = 1$ を②式に代入して，①式+②式より，$v_B' = 1.0$ m/s，これを①式に代入して，$v_A' = 4.0$ m/s,

このときの，衝突後の全運動エネルギー$K = m_A v_A'^2/2 + m_B v_B'^2/2 = 4^2/2 + 2\times1^2/2 = 8 + 1 = 9.0$ J.

3)　はねかえり係数 $e = 0$ を②式に代入して，①式+②式より，$v_B' = v_A' = 2.0$ m/s,

このときの，衝突後の全運動エネルギー$K = m_A v_A'^2/2 + m_B v_B'^2/2 = 2^2/2 + 2\times2^2/2 = 2 + 4 = 6.0$ J.

4)　①式+②式より，$v_B' = 2 - e$,　これを①式に代入して，$v_A' = 2 + 2e$,

このときの，衝突後の全運動エネルギー$K = m_A v_A'^2/2 + m_B v_B'^2/2 = (2+2e)^2/2 + 2\times(2-e)^2/2 = 2(1+e)^2 + (2-e)^2$

$= 6 + 3e^2$ [J].

8. 章