問題解答

10. 章

問 10-2-1.

1) 周期 $T = \dfrac{\text{振動に要した時間}}{\text{振動した回数}} = \dfrac{25\ \text{s}}{60\ \text{回}} = 0.41666 \sim 0.42$ s, 回転数 $f = \dfrac{\text{振動した回数}}{\text{振動に要した時間}} = \dfrac{60\ \text{回}}{25\ \text{s}} = 2.4$ [1/s=Hz].

2) 角振動数(角速度) $\omega = 2\pi/T = 2\pi f = 4.8\pi = 15.0796 \sim 15$ rad/s.

3) 振動の振幅 A は幅 L の半分, $A = L/2 = 20$ cm $= 0.2$ m, 速度の最大値 $v_{\max} = A\,\omega = 0.2\times4.8\pi = 0.96\pi = 3.0159 \sim 3.0$ m/s,
加速度の最大値 $a_{\max} = A\,\omega^2 = 0.2\times(4.8\pi)^2 = 4.608\pi^2 = 45.4791 \sim 45$ m/s^2.

問 10-2-2.

1) 周期 $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{2.0} = 0.5$ s, 角振動数(角速度) $\omega = 2\pi f = 2\pi\times2 = 4\pi = 12.56637 \sim 13$ rad/s.

2) 加速度 $a = -\omega^2 y = -(4\pi)^2\times0.02 = -0.32\pi^2 = -3.15827 \sim -3.2$ m/s^2, 物体に働く力 $F = m\,a = 2\times(-0.32\pi^2) = -0.64\pi^2$
$= -6.316544 \sim -6.3$ N.

3) 加速度 $a = -\omega^2 y = -(4\pi)^2\times(-0.03) = 0.48\pi^2 = 4.73741 \sim 4.7$ m/s^2, 物体に働く力 $F = m\,a = 2\times0.48\pi^2 = 0.96\pi^2$
$= 9.47482 \sim 9.5$ N.

4) この場合，速さは最大になる．最大の速さ$|v| = A\,\omega = 0.04\times4\pi = 0.16\pi = 0.50265 \sim 0.50$ m/s.

問 10-3-1.

1) ばね定数 $k = 0.2$ kgw/m $= (0.2\times9.8)$ N/m $= 1.96$ N/m (1 kgw = 9.8 N より).

2) ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけ角速度 ω となるような単振動させたとき，「$m\,\omega^2 = k$」の関係が成立する.
角速度 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1.96/0.04} = \sqrt{49} = 7.0$ rad/s.

3) 速さの最大値 $v_{\max} = A\,\omega = 0.05\times7.0 = 0.35$ m/s.

4) 加速度の最大値 $a_{\max} = A\,\omega^2 = 0.05\times7.0^2 = 2.45 \sim 2.5$ m/s^2.

5) 原点 O, すなわち，変位 $y = 0$ m を通過するときに速さが最大となる.

6) 加速度 a と変位 y の関係は「$a = -\omega^2 y$」の関係があるので，加速度の大きさが最大となるのは変位の大きさが最大となるときで，変位 $y = A = 0.05$ m か， $y = -A = -0.05$ m のとき.

7) 加速度の大きさが最小となるのは変位 $y = 0.0$ m のとき.

8) 振動の中心では，変位 $y = 0$ m なので，加速度 $a = 0$ m/s^2 で物体に働く力 $F = 0$ N.

9) 変位が最大になったときとは，変位 $y = A$ のときなので，物体に働く力 $F = ma = m(-\omega^2 y) = -m\omega^2 A$
$= -0.04\times7.0^2\times0.05 = -0.098$ N.

問 10-3-2. ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけ角速度 ω となる単振動では，「$m\,\omega^2 = k$」の関係が成立する.

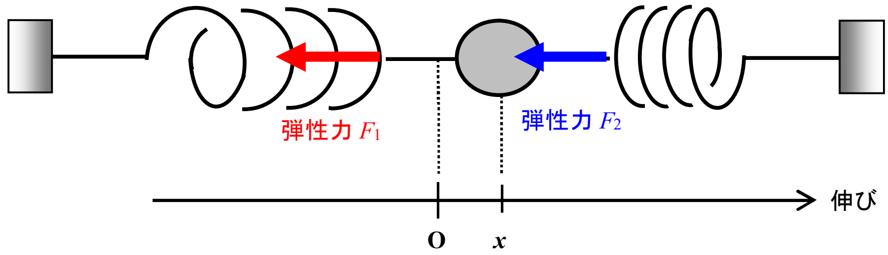
1) 質量 $4m$ のおもりをつけたら角速度 ω は 1/2 倍となる．周期 $T = 2\pi/\omega$ なので，周期は 2 倍となる.

2) ばね定数 $4k$ のばねつけたら角速度 ω は 2 倍となる．周期 $T = 2\pi/\omega$ なので，周期は 1/2 倍となる.

3) 上の式から，振幅の大小は角速度と周期には関係しない．周期は変わらない.

問 10-3-3.

1) 伸び x の状態



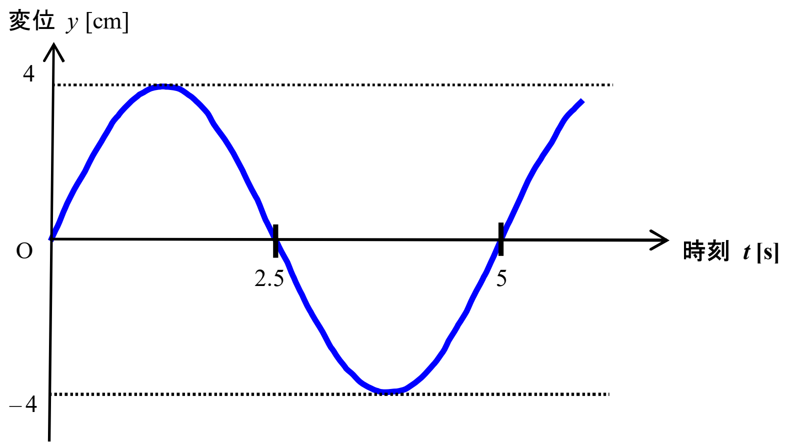
2) 伸び x の状態で，ばね 1 とばね 2 による弾性力 F_1 と F_2 は同じ向きでそれぞれ，$F_1 = -k_1 x$, $F_2 = -k_2 x$ となり，物体にはその合力 $F = F_1 + F_2 = -(k_1+k_2)x_1 = -kx$ が作用する．したがって，合成のばね定数 $k = (k_1+k_2)$で，振動の角速度 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(k_1+k_2)/m}$，周期 $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)}$ となる．

問 10-3-4.

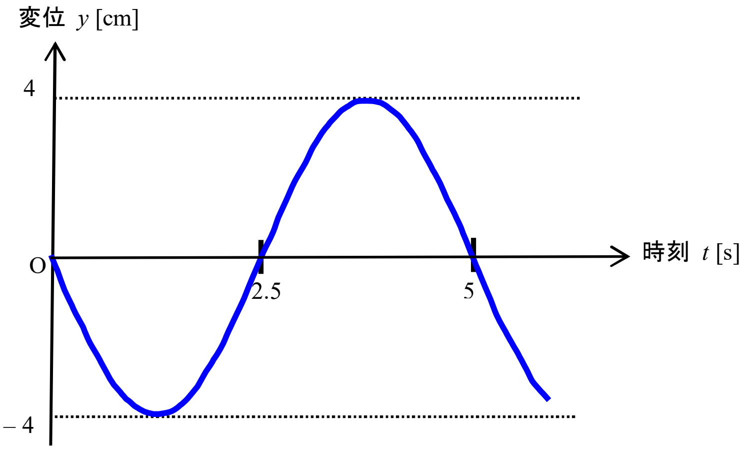
時刻 $t = 0$ で，変位 $y = 0$ となる場合，時刻 t での変位 y は，「$y = A\sin(\omega t)$」か，「$y = A\sin(\omega t + \pi)$」なので，

「$y = A\sin(2\pi\frac{t}{T}) = 4\sin(2\pi\frac{t}{5})$ [cm] 」か，「$y = A\sin(2\pi\frac{t}{T} + \pi) = 4\sin(2\pi\frac{t}{5} + \pi)$ [cm] 」

・ $y = 4\sin(2\pi\frac{t}{5})$ [cm] のとき（時刻 t=0 で変位が負から正となり，速度は正の値 ）



・ $y = 4\sin(2\pi\frac{t}{5} + \pi)$ [cm] のとき（時刻 t=0 で変位が正から負となり，速度は負の値 ）



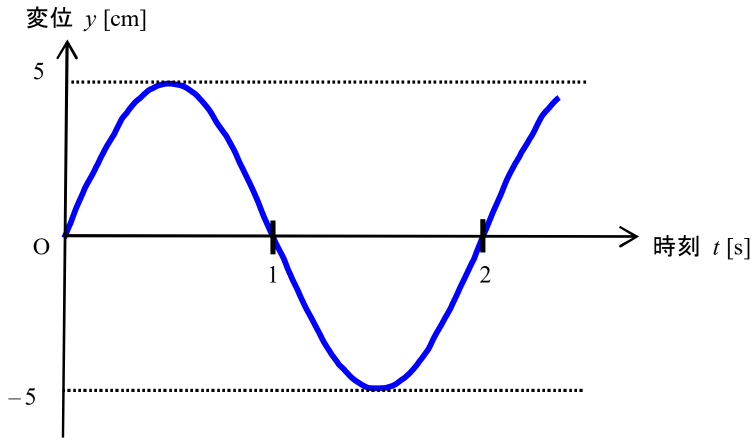
問 10-3-5.

1) $y = 5\sin(\pi t) = 5\sin(2\pi\frac{t}{2}) = A\sin(2\pi\frac{t}{T}) = A\sin(\omega t)$ [cm] より,

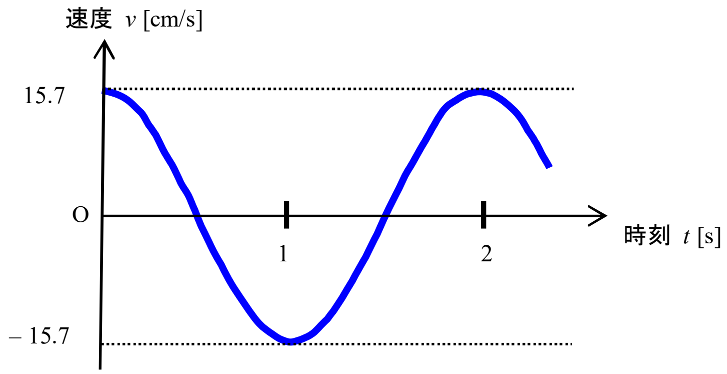
振幅 $A = 5.0$ cm, 角速度(角振動数)$\omega = \pi = 3.14$ rad/s, 周期 $T = 2.0$ s.

2) 速度の最大値 $v_{\max} = A\omega = 0.05\pi = 0.1571 \sim 0.16$ m/s, 加速度の最大値 $a_{\max} = A\omega^2 = 0.05\pi^2 = 0.49348 \sim 0.49$ m/s^2.

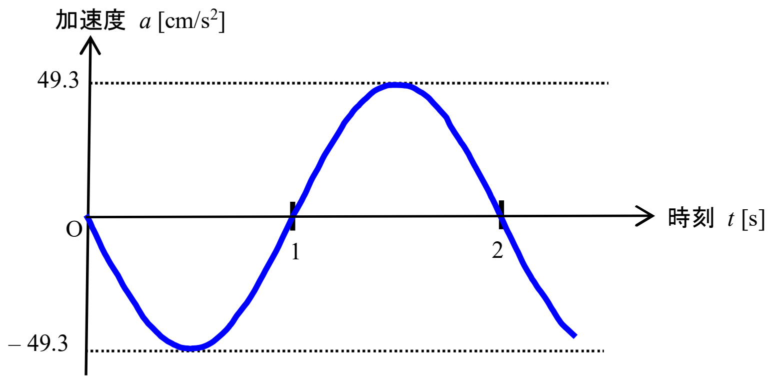
3) y-t グラフ



v-t グラフ $v = A\omega\cos(\omega t) = 5\pi\cos(2\pi\frac{t}{2})$ [cm/s],



a-t グラフ $a = -A\omega^2\sin(\omega t) = -5\pi^2\sin(2\pi\frac{t}{2})$ [cm/s^2],



問 10-3-6.

1)　変位 $y = A\sin(\omega t + \theta_0) = A\sin(2\pi\frac{t}{T} + \theta_0) = 0.2\sin(\pi t/4 + \pi/4) = 0.2\sin(2\pi\frac{t}{8} + \frac{\pi}{4})$　[m]　より，

振幅 $A = 0.2$ m，角速度(角振動数)$\omega = \pi/4 = 0.7854 \sim 0.79$ rad/s，周期 $T = 8.0$ s.

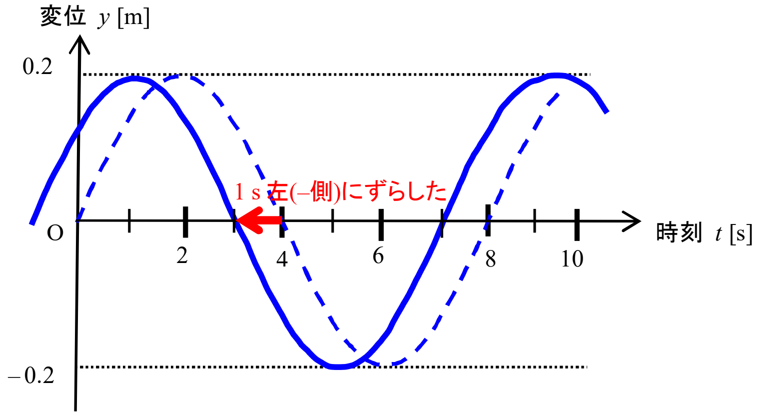
2)　速度の最大値 $v_{\max} = A\omega = 0.2(\pi/4) = 0.05\pi = 0.1571 \sim 0.16$ m/s,

加速度の最大値 $a_{\max} = A\omega^2 = 0.2(\pi/4)^2 = 0.0125\pi^2 = 0.12337 \sim 0.12$ m/s^2.

3)　変位 $y = 0.2\sin(2\pi\frac{t+1}{8})$　と変形できるので，y-t グラフは，「$y = A\sin(2\pi\frac{t}{T}) = 0.2\sin(2\pi\frac{t}{8})$ 」のグラフと比べて，

1 秒だけ左側(–側)にずらしたグラフとなる．時刻 $t = 3, 7, 11, \ldots$ [s]で，変位 $y = 0$ m となる．下に「y-t グラフ」を示す．

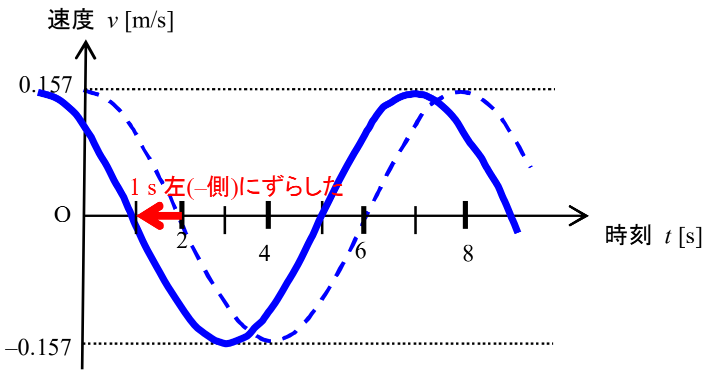
点線は「「$y = 0.2\sin(2\pi\frac{t}{8})$」のグラフである．



速度 $v = 0.157\cos(2\pi\frac{t+1}{8})$　と変形できるので，v-t グラフは，「$v = A\omega\cos(2\pi\frac{t}{T}) = 0.157\cos(2\pi\frac{t}{8})$ 」のグラフと

比べて 1 秒だけ左側(–側)にずらしたグラフとなる．時刻 $t = 1, 5, 10, \ldots$ [s]で，位相角 $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ となるので，

このとき，速度 $v = 0$ m/s となる．「v-t グラフ」を下に示す．点線は「$v = 0.157\cos(2\pi\frac{t}{8})$ 」のグラフである．



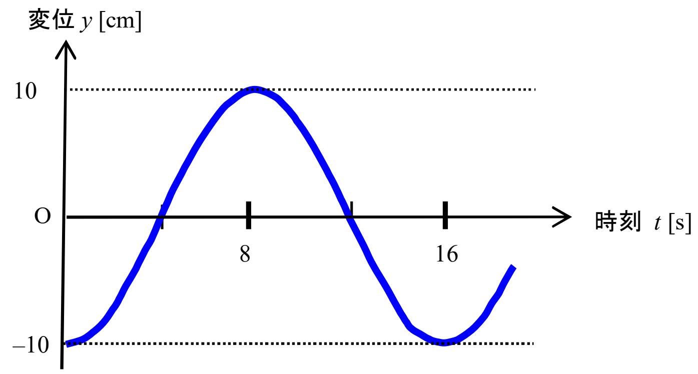
問 10-3-7.

1)　変位 $y = A\sin(\omega t + \theta_0) = A\sin(2\pi\frac{t}{T} + \theta_0) = 10\sin(\pi t/8 - \pi/2) = 10\sin(2\pi\frac{t}{16} - \frac{\pi}{2})$　[cm]　より，

振幅 $A = 10$ cm $= 0.1$ m，角速度(角振動数)$\omega = \pi/8 = 0.39273 \sim 0.39$ rad/s，周期 $T = 16$ s.

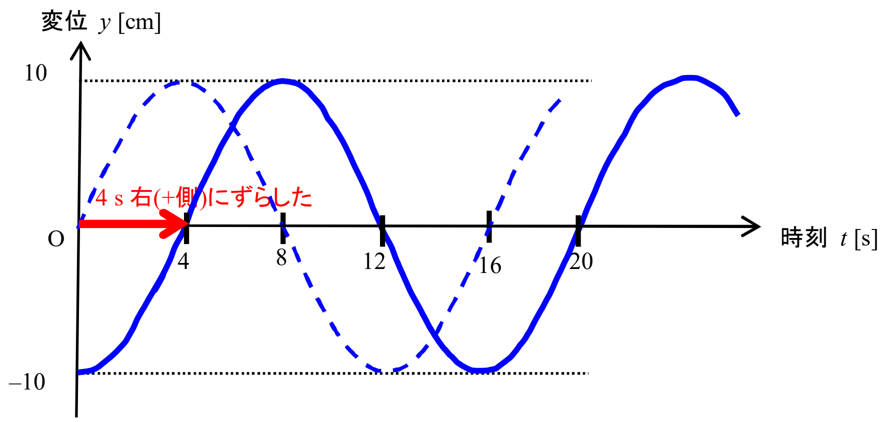
2)　三角関数の加法定理を用いると，変位 $y = 10\sin(2\pi\frac{t}{16} - \frac{\pi}{2}) = 10\,[\,\sin(2\pi\frac{t}{16})\cos\frac{\pi}{2} - \cos(2\pi\frac{t}{16})\sin\frac{\pi}{2}\,]$

$= 10\,[\sin(2\pi\frac{t}{16})\times 0 - \cos(2\pi\frac{t}{16})\times 1\,] = -10\cos(2\pi\frac{t}{16})$　[cm]と変形できる．



＊ 別解

変位 $y = 10\sin(2\pi\frac{t}{16} - \frac{\pi}{2}) = 10\sin(2\pi\frac{t-4}{16})$ と変形できるので，y-t グラフは，「$y = 10\sin(2\pi\frac{t}{16})$ 」のグラフと比べて，4 秒だけ右側(+側)にずらしたグラフとなる．時刻 $t = 4, 12, \ldots$ [s]で，変位 $y = 0$ m となる．下のグラフで実線が「$y = 10\sin(2\pi t/16 - \pi/2)$」のグラフで，点線が「$y = 10\sin(2\pi t/16)$」のグラフとなる．

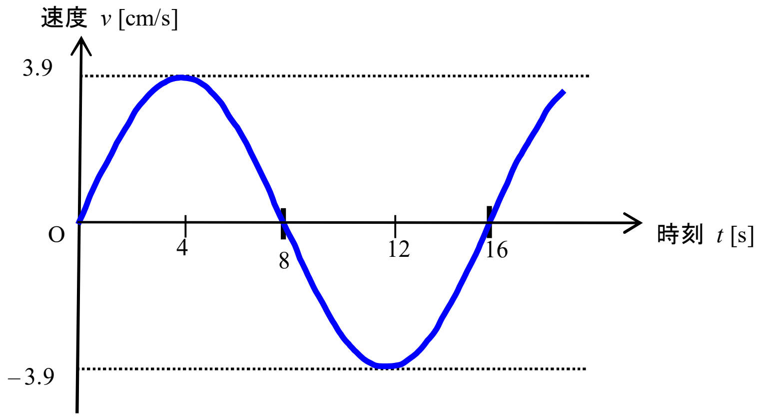


v-t グラフ

速度 $v = A\omega\cos(\omega t + \theta_0) = A\omega\cos(2\pi\frac{t}{T} + \theta_0) = \frac{10\pi}{8}\cos(2\pi\frac{t}{16} - \frac{\pi}{2}) = 3.895\cos(2\pi\frac{t}{16} - \frac{\pi}{2})$　[cm/s]

となる．上の式に対し，加法定理を適用する．速度 $v = 3.895\,[\cos(2\pi\frac{t}{16})\cos\frac{\pi}{2} + \sin(2\pi\frac{t}{16})\sin\frac{\pi}{2}\,]$

$= 3.895\sin(2\pi\frac{t}{16})$　[cm/s] となるので，v-t グラフは下のようになる．



速度 v [cm/s]
3.9
O
4
8
12
16
時刻 t [s]
−3.9

11. 章

問 11-2-1. 波の速さ v，波長 λ，周波数(振動数)f の間には「$v = f\lambda$」の関係があるので，波長 λ は下のように求める．

周波数 $f = 1000$ kHz $= 1.0\times10^6$ Hz のとき，波長 $\lambda = v/f = 3.0\times10^8/(1.0\times10^6) = 300 = 3.0\times10^2$ m,

周波数 $f = 80$ MHz $= 8.0\times10^7$ Hz のとき，波長 $\lambda = v/f = 3.0\times10^8/(8.0\times10^7) = 3.75 \sim 3.8$ m.

問 11-2-2. 波の速さ v，波長 λ，周波数(振動数)f の間の関係式「$v = \lambda/T = f\lambda$」より求める．波長 $\lambda = v/f = 330/440 = 0.75$m,

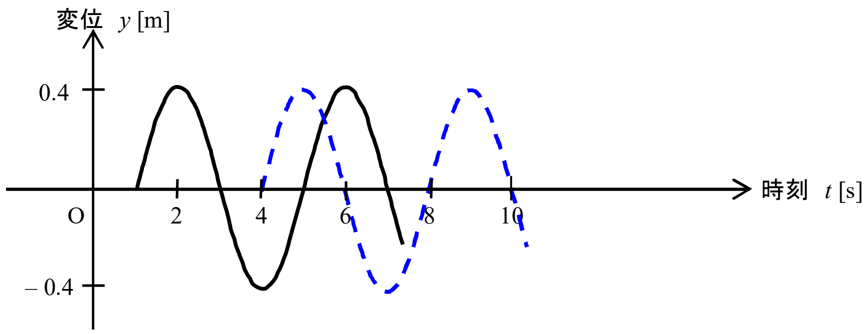
周期 $T = 1/f = 1/440 = 2.2727\times10^{-3} \sim 2.3\times10^{-3}$ s.

問 11-2-3. 周期 T は波の変位が最大となる時間間隔なので，グラフより，周期 $T = 4.0$ s，周波数 $f = 1/T = 1/4 = 0.25$ Hz,

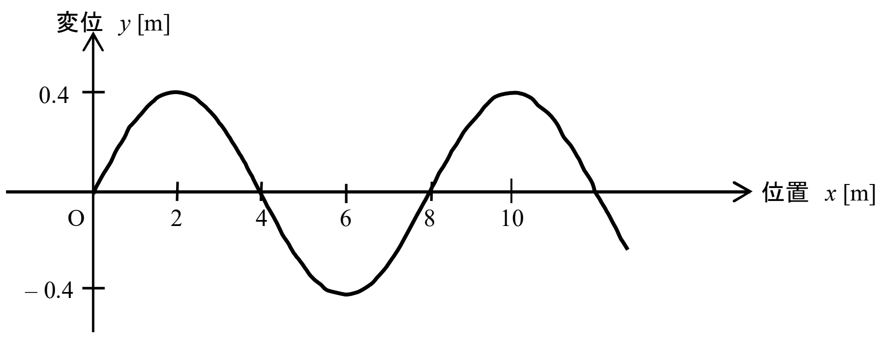
位置 $x = 2.0$ m では，始めに山が通過する時刻は時刻 $t = 2.0$ s である．そして，位置 $x = 6.0$ m では，始めに山が通過する時刻は時刻 $t = 4.0$ s である．つまり，波はこの間の時間 $t = 2.0$ 秒間に距離 $x = 4.0$ m 進んだことになるので，波の速さ $v = x/t = 4/2 = 2.0$ m/s である．そして，波の波長 λ は，「$v = \lambda/T = f\lambda$」より，波長 $\lambda = v\,T = 2\times4 = 8.0$ m,

グラフより，振幅 $A = 0.4$ m.

位置 $x = 8.0$ m では，位置 $x = 2.0$ m から，$3\lambda/4 = 6.0$ m だけ進んだことになる．時間的には半周期 $3T/4 = 3.0$ s 経過するので，位置 $x = 2.0$ m で変位が最大となる時刻 $t = 2$ s, 6 s, .. だったが，位置 $x = 8.0$ m では時刻 $t = 5$ s, 9 s, ..で変位が最大となる．下に位置 $x = 8.0$ m でのグラフを青の鎖線で描いた．



時刻 $t = 2.0$ s での波形としては，位置 $x = 2$ m, 10 m, .. で山，位置 $x = -2$ m, 6 m, 14 m, .. で谷となる．



問 11-3-1.

1) (11-3-6)式，および(11-3-7)式と与えられた式を比べて，各々の物理量を求める．

角速度 $\omega = \pi/2 = 1.5708 \sim 1.6$ rad/s，周期 $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(\pi/2) = 4.0$ s，波数 $k = \pi/4 = 0.7854$ rad/m ~ 0.79 rad/m，波長 $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(\pi/4) = 8.0$ m，速さ $v = \lambda/T = 2.0$ m/s，振幅 $A = 4.0$ cm.

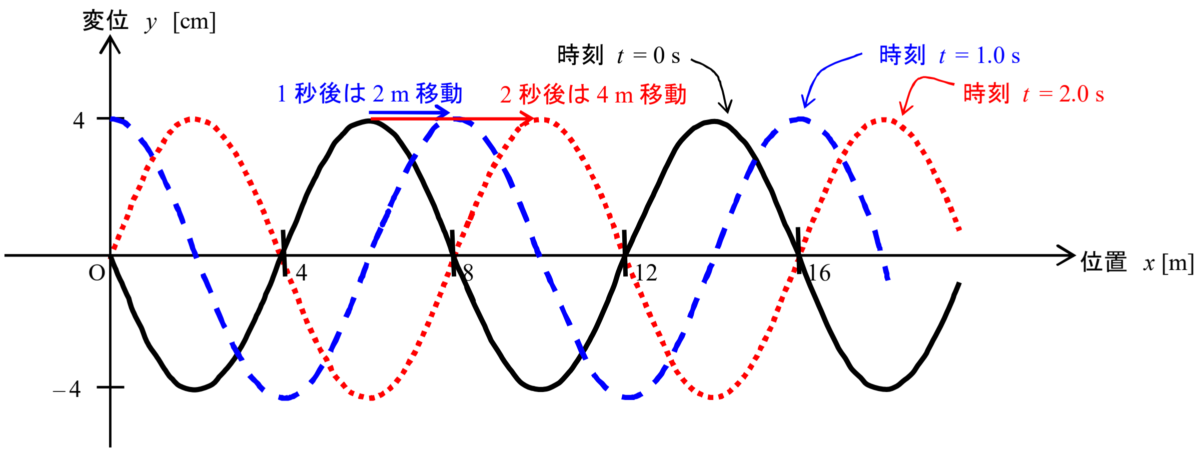
2)　波の変位 y は，$y = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - \frac{x}{8})\}$．時刻 $t = 0$ s では，変位 $y = 4\sin\{2\pi(0 - \frac{x}{8})\} = -4\sin(2\pi\frac{x}{8})$で，

時刻 $t = 1.0$ s では，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{1}{4} - \frac{x}{8})\} = 4\sin(\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{x}{8}) = 4\{\sin\frac{\pi}{2}\cos(2\pi\frac{x}{8}) - \cos\frac{\pi}{2}\sin(2\pi\frac{x}{8})\}$

$= 4\cos(2\pi\frac{x}{8})$．　　[あるいは，$y = 4\sin(2\pi\frac{2-x}{8}) = -4\sin(2\pi\frac{x-2}{8})$ と変形できるので，時刻 $t = 0$ s のグラフから$+x$ 方向に 2.0 m ずらしたグラフに相当.]

時刻 $t = 2.0$ s では，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{2}{4} - \frac{x}{8})\} = 4\sin(\pi - 2\pi\frac{x}{8}) = 4\{\sin\pi\cos(2\pi\frac{x}{8}) - \cos\pi\sin(2\pi\frac{x}{8})\}$

$= 4\sin(2\pi\frac{x}{8})$．　　[あるいは，$y = 4\sin\{2\pi(\frac{4-x}{8}) = -4\sin(2\pi\frac{x-4}{8})$ と変形できるので，時刻 $t = 0$ s のグラフから$+x$ 方向に 4.0 m ずらしたグラフに相当.]



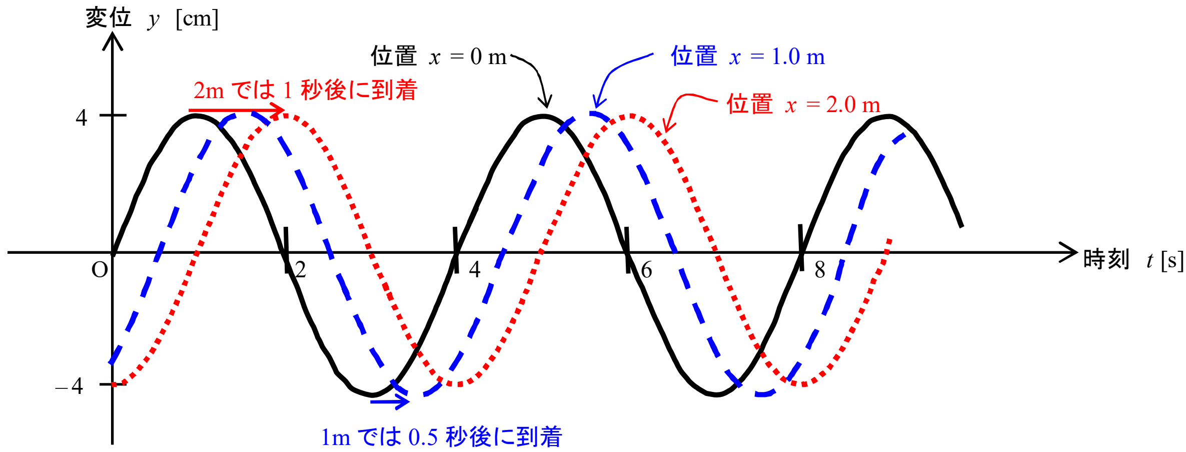
3)　波の変位 y は，$y = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - \frac{x}{8})\}$．位置 $x = 0$ m では，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - 0)\} = 4\sin(2\pi\frac{t}{4})$で，

位置 $x = 1.0$ m では，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - \frac{1}{8})\} = 4\sin(2\pi\frac{t}{4} - \frac{\pi}{4})$ (→　加法定理を用いても単純な形にならない)

$= 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - \frac{1}{8})\} = 4\sin(2\pi\frac{t-0.5}{4})$ と変形できるので，位置 $x = 0$ m にあった波が 0.5 秒遅れて到達.

位置 $x = 2.0$ m では，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - \frac{2}{8})\} = 4\sin(2\pi\frac{t}{4} - \frac{\pi}{2}) = 4\{\sin(2\pi\frac{t}{4})\cos\frac{\pi}{2} - \cos(2\pi\frac{t}{4})\sin\frac{\pi}{2}\}$

$= -4\cos(2\pi\frac{t}{4})$．　　[あるいは，$y = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{4} - \frac{2}{8})\} = 4\sin(2\pi\frac{t-1}{4})$ と変形できるので，位置 $x = 0$ m にあった波が，1.0 秒遅れて到達. → 位置 $x = 0$ m のグラフから $+t$ 側(右)に 1.0 s ずらしたグラフに相当.]



問 11-3-2.

1) 波の速さ $v = \lambda/T$ より，波長 $\lambda = v\,T = 0.2\times 20 = 4.0$ m となるので，初期位相を θ_0 とすると，位置 t，時刻 x で，$-x$ 方向に進むの波の変位 y は，

$$y = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \theta_0\right\} = 5\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{20} + \frac{x}{4}\right) + \theta_0\right\} \quad \text{[cm]}$$

となる．

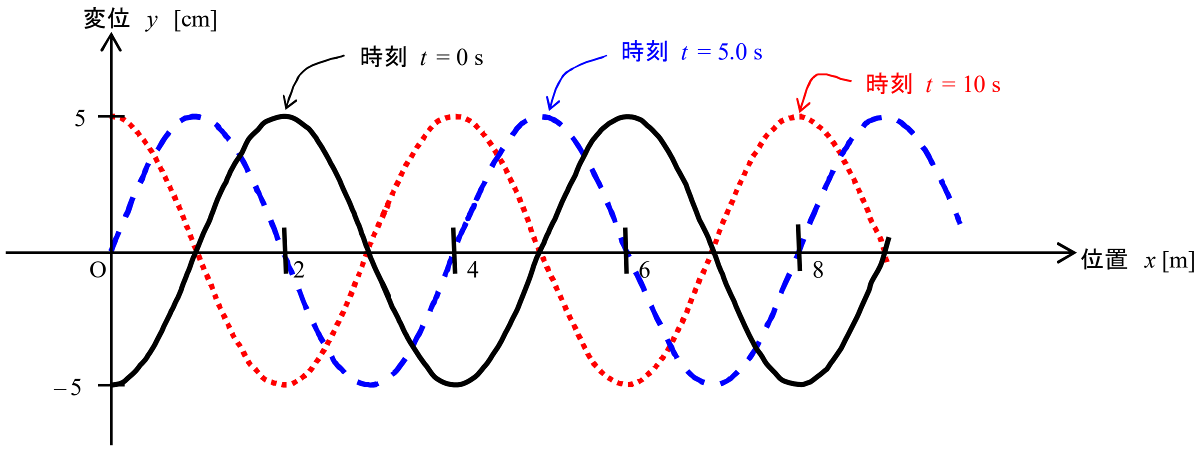
上の式に，時刻 $t = 0$ s，位置 $x = 0$ m を代入すると，変位 $y = -5.0$ cm となるので，$y = -5.0 = 5\sin\theta_0$ より，初期位相 $\theta_0 = 3\pi/2$，or，$-\pi/2$ となる．

2) 波の変位 $y = 5\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{20} + \frac{x}{4}\right) + \frac{3}{2}\pi\right\}$ [cm] に時刻 $t = 0$, 5.0 , 10 [s]を代入すると，それぞれ，

時刻 $t = 0$ s で，$y = 5\sin\left\{2\pi\left(0 + \frac{x}{4}\right) + \frac{3}{2}\pi\right\} = 5\left[\sin\left(2\pi\frac{x}{4}\right)\cos\frac{3}{2}\pi + \cos\left(2\pi\frac{x}{4}\right)\sin\frac{3}{2}\pi\right] = -5\cos\left(2\pi\frac{x}{4}\right)$ [cm],

時刻 $t = 5.0$ s で，$y = 5\sin\left\{2\pi\left(\frac{5}{20} + \frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}\pi\right\} = 5\sin\left(2\pi\frac{x}{4}\right)$ [cm],

時刻 $t = 10$ s で，$y = 5\sin\left\{2\pi\left(\frac{10}{20} + \frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}\pi\right\} = 5\sin\left(2\pi\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\pi\right) = 5\cos\left(2\pi\frac{x}{4}\right)\sin\frac{1}{2}\pi = 5\cos\left(2\pi\frac{x}{4}\right)$ [cm].

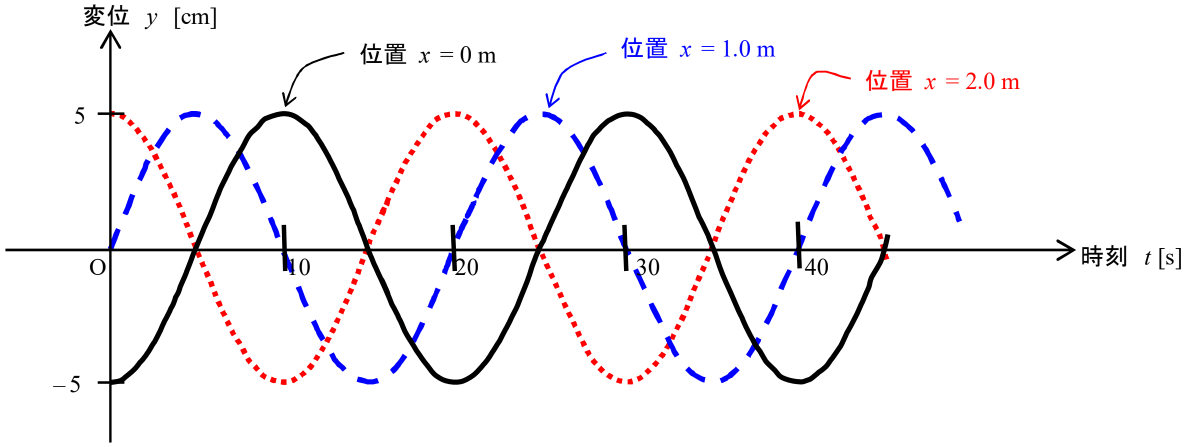


3) 波の変位 $y = 5\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{20} + \frac{x}{4}\right) + \frac{3}{2}\pi\right\}$ [cm] に位置 $x = 0$, 1.0 , 2.0 [m]を代入すると，それぞれ，

位置 $x = 0$ m で， $y=5\sin\{2\pi(\frac{t}{20}+0)+\frac{3}{2}\pi\} = 5[\sin(2\pi\frac{t}{20})\cos\frac{3}{2}\pi+\cos(2\pi\frac{t}{20})\sin\frac{3}{2}\pi] = -5\cos(2\pi\frac{t}{20})$ [cm],

位置 $x = 1.0$ m で， $y=5\sin\{2\pi(\frac{t}{20}+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}\pi\}=5\sin(2\pi\frac{t}{20})$ [cm],

位置 $x = 2.0$ m で， $y=5\sin\{2\pi(\frac{t}{20}+\frac{2}{4})-\frac{1}{2}\pi\}=5\sin(2\pi\frac{t}{20}+\frac{1}{2}\pi)=5\cos(2\pi\frac{t}{20})\sin\frac{1}{2}\pi=5\cos(2\pi\frac{t}{20})$ [cm].

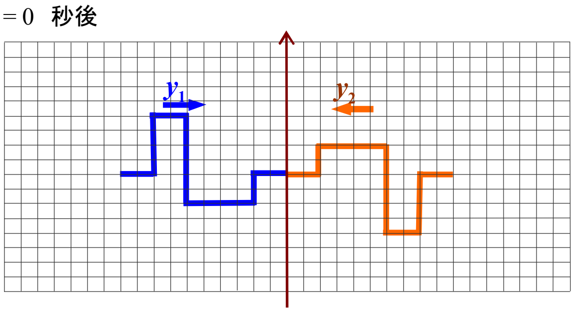


問 11-3-3. 波数 $k = 2\pi/\lambda$ より，波長 $\lambda = 2\pi/k$，角速度 $\omega = 2\pi/T$ より，周期 $T = 2\pi/\omega$ なので，波の速さ $v = \lambda/T = \omega/k$, $\rightarrow \omega = v\,k$.

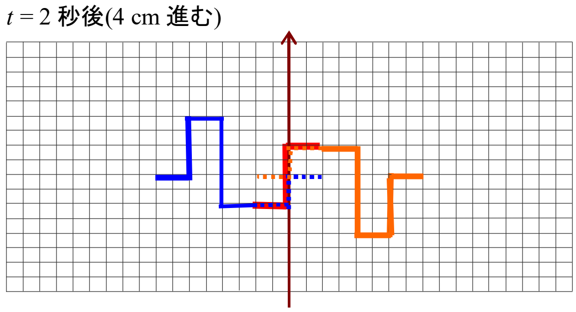
(11-3-12)式に代入する． $y(x,t) = A\sin(\omega t \mp kx + \theta_0) = A\sin\{k(vt \mp x)+\theta_0\} = A\sin\{\omega(t \mp \frac{x}{v})+\theta_0\}$.

問 11-4-1.

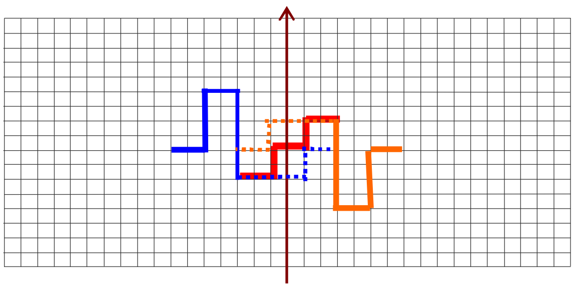
$t = 0$ 秒後



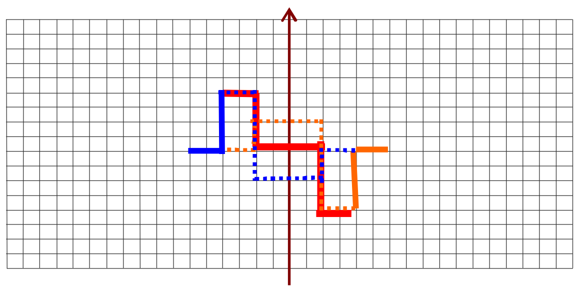
$t = 2$ 秒後(4 cm 進む)



$t = 3$ 秒後(6 cm 進む)

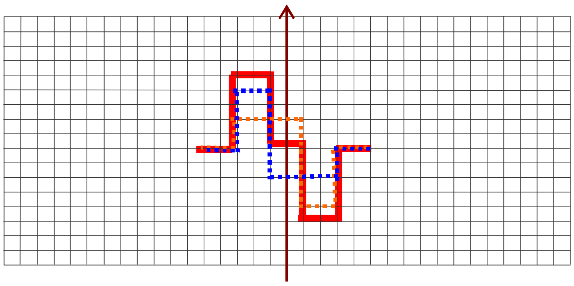


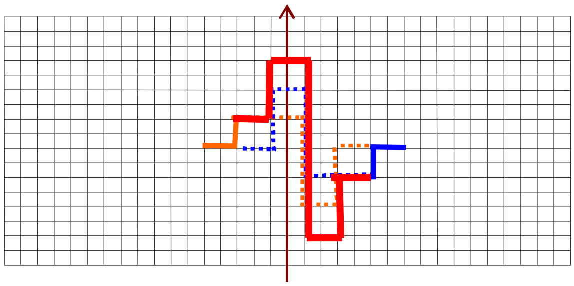
$t = 4$ 秒後(8 cm 進む)



$t = 5$ 秒後(10 cm 進む)

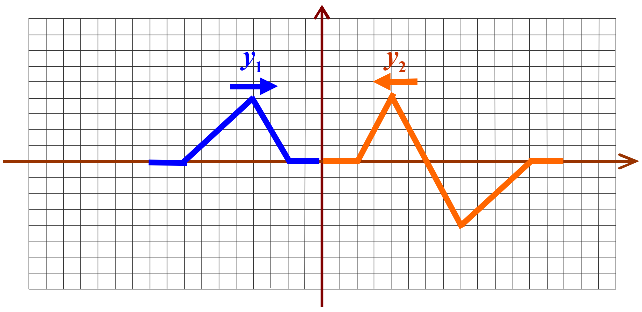
$t = 6$ 秒後(12 cm 進む)



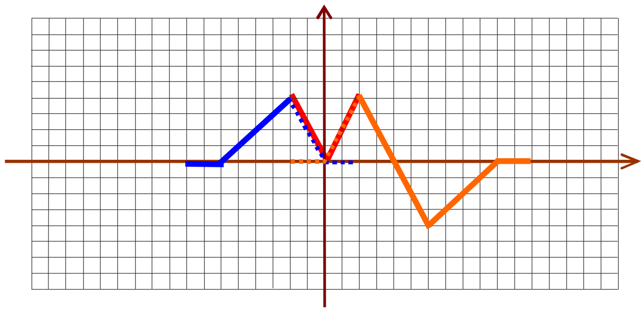


問 11-4-2.

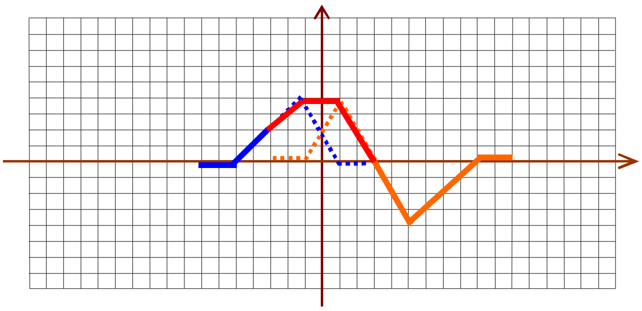
$t = 0$　秒後



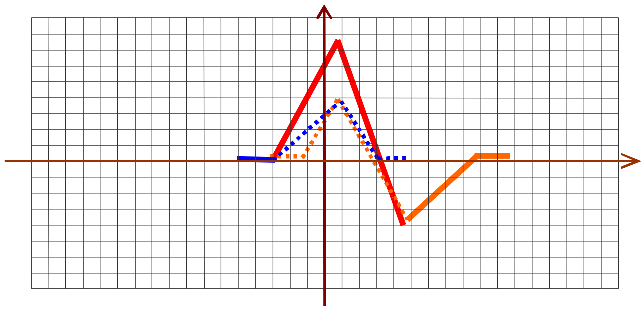
$t = 2$ 秒後(4 cm 進む)



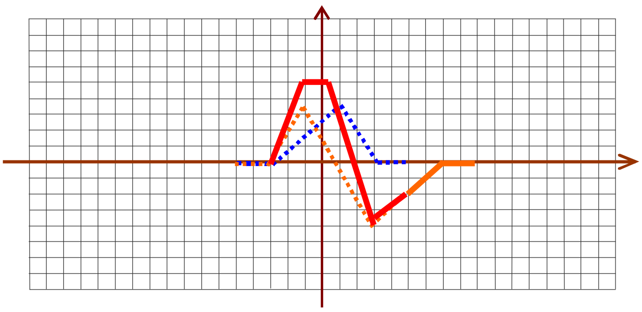
$t = 3$ 秒後(6 cm 進む)



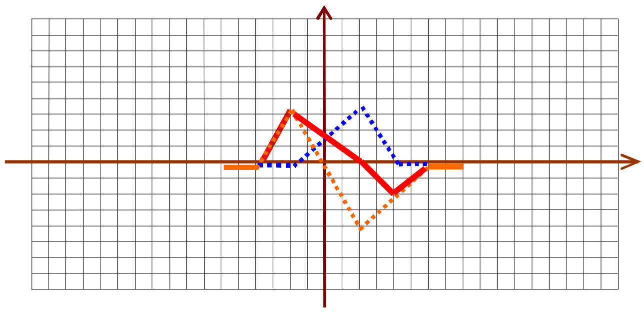
$t = 4$ 秒後(8 cm 進む)



$t = 5$ 秒後(10 cm 進む)

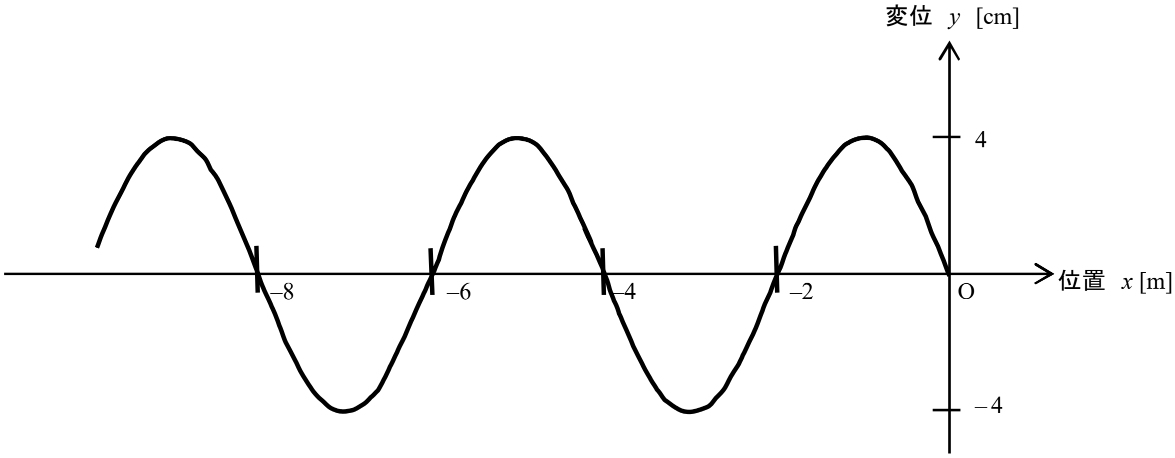


$t = 6$ 秒後(12 cm 進む)



問 11-5-1.　　　波の変位 $y = 4\sin(\pi(t - 0.5x)) = 4\sin\{2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4})\}$ 　[cm]　　→　周期 T=2.0 s,　波長 $\lambda = 4.0$ m.

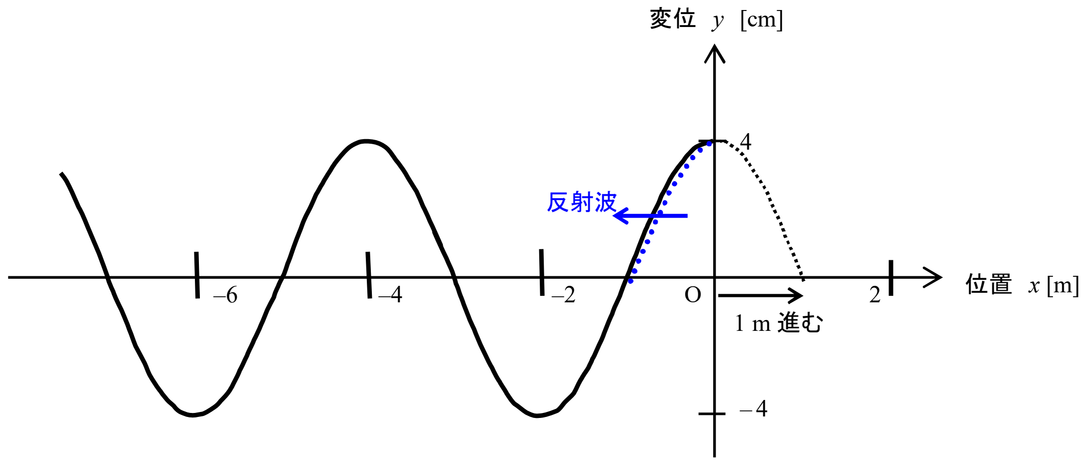
1)　時刻 $t = 0.0$ s を上の式に代入すると，変位 $y = 4\sin\{2\pi(0 - \frac{x}{4})\} = -4\sin(2\pi\frac{x}{4})$，となり，下の図で表すことができる.



2)　時刻 $t = 0.5$ s を上の式に代入すると，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{0.5}{2} - \frac{x}{4})\} = 4\sin(\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{x}{4}) = 4\cos(2\pi\frac{x}{4})$,　となり,

時刻 $t = 0.5$ s = $T/4$ なので，その間に $\lambda/4 = 1.0$ m 進む．下の図で黒の点線が，境界がない場合の入射波の予想の波形で青色の点線が反射波の波形である．→ 黒色と青色の点線は位置 $x = 0$ に関して左右対称となる.

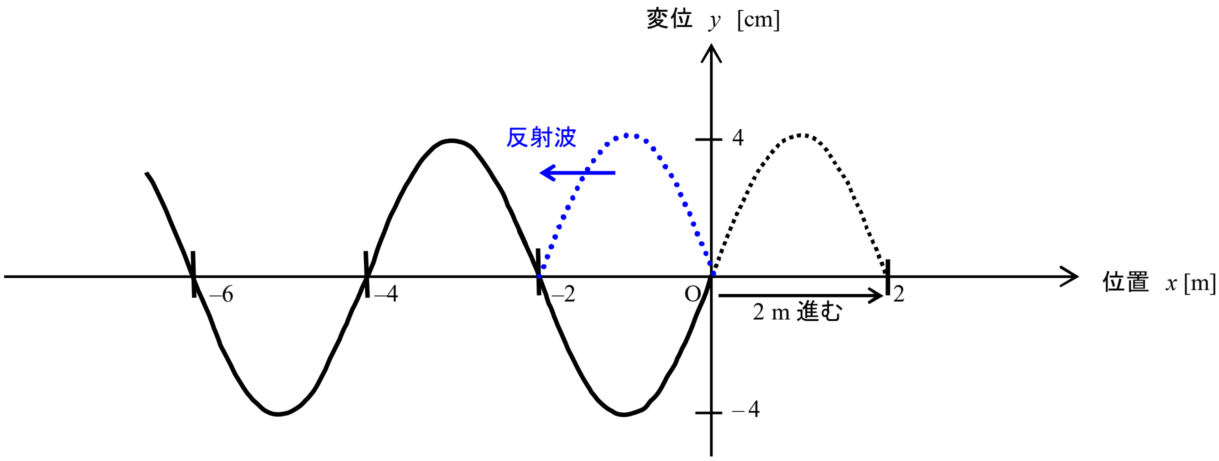
反射波の波形(変位) y は，　$y = 4\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi\frac{x}{4}) = 4\cos(2\pi\frac{x}{4})$　[cm]　となる（-1 m $\leq x \leq 0$　の範囲).



3)　時刻 $t = 1.0$ s を上の式に代入すると，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{1}{2} - \frac{x}{4})\} = 4\sin(\pi - 2\pi\frac{x}{4}) = 4\sin(2\pi\frac{x}{4})$,　となり,

時刻 $t = 1.0$ s = $T/2$ なので，その間に $\lambda/2 = 2.0$ m 進む．下の図で黒の点線が，境界がない場合の入射波の予想の波形で青色の点線が反射波の波形である．→ 黒色と青色の点線は位置 $x = 0$ に関して左右対称となる.

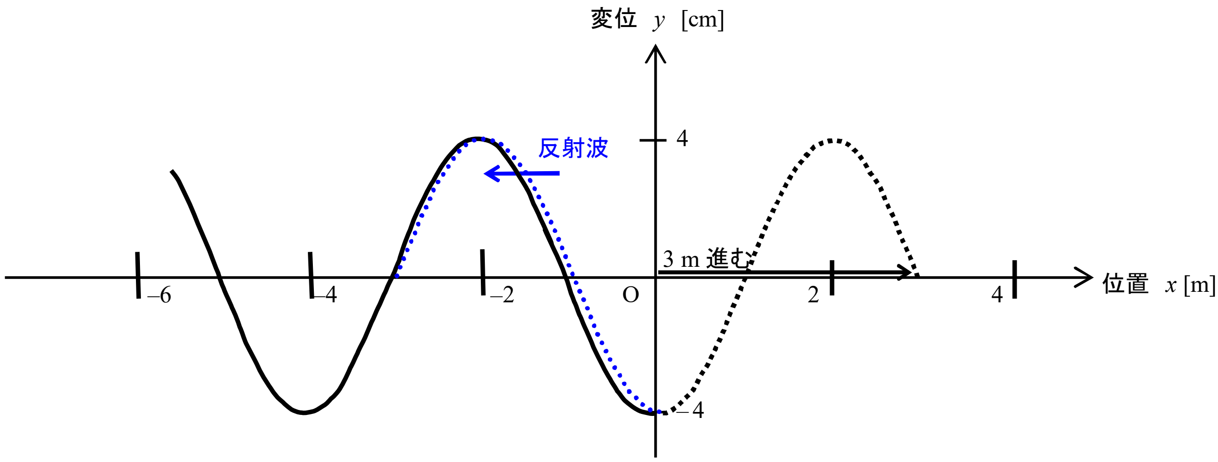
反射波の波形(変位) y は，　$y = 4\sin(\pi + 2\pi\frac{x}{4}) = -4\sin(2\pi\frac{x}{4})$　[cm]　となる（-2 m $\leq x \leq 0$　の範囲).



4) 時刻 $t = 1.5$ s を上の式に代入すると，変位 $y = 4\sin\{2\pi(\frac{1.5}{2} - \frac{x}{4})\} = 4\sin(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\frac{x}{4}) = -4\cos(2\pi\frac{x}{4})$， となり，

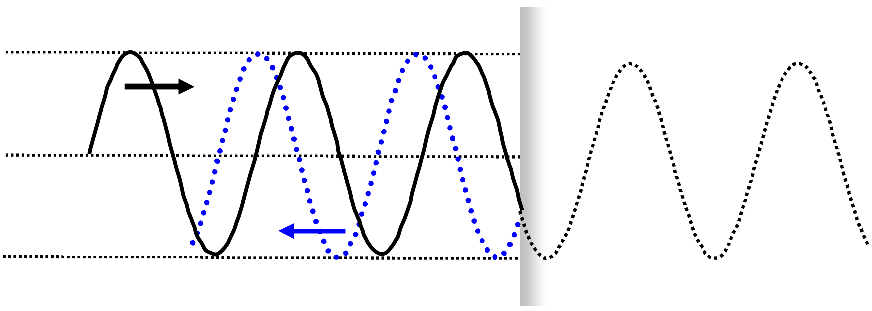
時刻 $t = 1.5$ s $= 3T/4$ なので，$3\lambda/4 = 3.0$ m 進む．下の図で黒の点線が，境界がない場合の入射波の予想の波形で青色の点線が反射波の波形である．→ 黒色と青色の点線は位置 $x = 0$ に関して左右対称となる．

反射波の波形(変位) y は， $y = 4\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\frac{x}{4}) = -4\cos(2\pi\frac{x}{4})$ [cm] となる (-3 m $\leq x \leq 0$ の範囲).



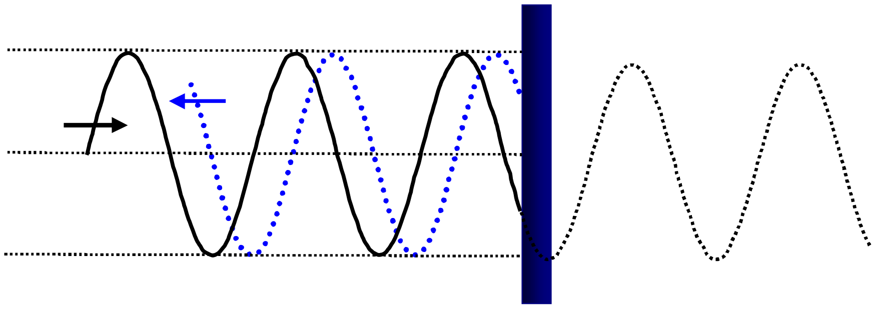
問 11-5-2. i) 自由端

境界の右側には，境界がないと仮定した場合の連続した入射波を黒の点線で図示した．反射波はこの黒の点線と線対象になるように境界から左側に反射する．反射波は青の点線で図示した．境界において，入射波と反射波の変位は同じ値となる．



ii) 固定端

境界の右側には，境界がないと仮定した場合の連続した入射波を黒の点線で図示した．反射波はこの黒の点線に(−1)をかけた(位相を π ずらしたことに相当)変位となるようにして反射する．反射波は青の点線で図示した．境界において，入射波と反射波の合成した変位は「0」となる．



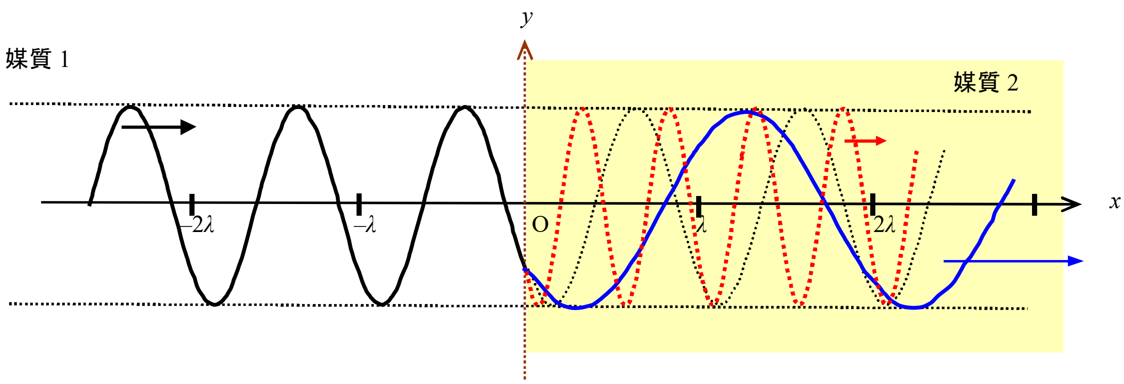
問 11-5-3.

境界に衝突する入射波の山が透過波の山となるので，入射波と透過波の振動数(1 秒間当たりの山の数)は等しい．波の振動数 f, 波長 λ, 速さ v とすると，媒質 1 と媒質 2 間で次の関係式が成り立つ．

→ $v_1 = f_1\lambda_1 = f\lambda_1$, $v_2 = f_2\lambda_2 = f\lambda_2$.

1) $v_2/v_1 = 1.5$ のとき → $\lambda_2 = 1.5\,\lambda_1$ (波長は 1.5 倍になる) → 青の実線で描いた

2) $v_2/v_1 = 0.5$ のとき → $\lambda_2 = 0.5\,\lambda_1$ (波長は 0.5 倍(半分)になる) → 赤の点線で描いた



問 11-6-1.

2 つの波の合成波の変位 y を計算する．

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx)$$

$$= A\,[\cos(\omega t)\cos(kx) + \sin(\omega t)\sin(kx) + \cos(\omega t)\cos(kx) - \sin(\omega t)\sin(kx)]$$

$$= 2A\cos(\omega t)\cos(kx),$$

節となる位置は，「$2A\cos(kx) = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}) = 0$」を満たす位置 x となる．→ 節となる位置 $x = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$, ($n$ は整数).

どの時刻でも，合成波の変位 y=0 となるのは，「$\cos(\omega t) = \cos(2\pi \frac{t}{T}) = 0$」を満たす時刻 t である．

→　時刻 $t = (m+\frac{1}{2})\frac{T}{2}$,　$(m = 0, 1, 2, ...)$.

問 11-6-2.　両端が固定端なので，定常波の腹の数 m と定常波の波長 λ の間の関係は「$L = m\lambda/2$」である．

・腹の数 $m = 4$ となる場合，定常波の波長 $\lambda = L/2$ なので，長さ L となる弦の中に(両端が節となる)定常波が 2 個含まれている(両端を除いた節の数は 3 個である)．　→　位置 $x = L/4, 2L/4, 3L/4$ が節の位置となる．

・腹の数 $m = 5$ となる場合，定常波の波長 $\lambda = 2L/5$ となる．弦の中に定常波が 2.5 個ある．
両端を除いた節の数は 4 個である．　→　位置 $x = L/5, 2L/5, 3L/5, 4L/5$ が節の位置となる．

・腹の数 $m = 6$ となる場合，定常波の波長 $\lambda = 2L/6 = L/3$ となる．弦の中に定常波が 3 個ある．
両端を除いた節の数は 5 個である．　→　位置 $x = L/6, 2L/6, 3L/6, 4L/6, 5L/6$ が節の位置となる．

問 11-6-3.　2 つの波の合成波の変位 y を計算する．

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t - (k+\delta k)x) + A\sin(\omega t + kx)$$

$$= A[\sin(\omega t)\cos((k+\delta k)x) - \cos(\omega t)\sin((k+\delta k)x) + \sin(\omega t)\cos(kx) + \cos(\omega t)\sin(kx)]$$

$$= A[\sin(\omega t)\{\cos(kx)\cos(\delta k x) - \sin(kx)\sin(\delta k x)\} - \cos(\omega t)\{\sin(kx)\cos(\delta k x) + \cos(kx)\sin(\delta k x)\}$$
$$+ \sin(\omega t)\cos(kx) + \cos(\omega t)\sin(kx)]$$

$$= A[\sin(\omega t)\{\cos(kx)(1+\cos(\delta k x)) - \sin(kx)\sin(\delta k x)\}$$
$$+ \cos(\omega t)\{\sin(kx)(1-\cos(\delta k x)) - \cos(kx)\sin(\delta k x)\}]$$

(2 次の微小量までとる)

$$\sim A[\sin(\omega t)\{\cos(kx)(2 + \frac{(\delta k x)^2}{2}) - \sin(kx)(\delta k x)\}$$

$$+ \cos(\omega t)\{\sin(kx)(-\frac{(\delta k x)^2}{2}) - \cos(kx)(\delta k x)\}]$$

$$= 2A\sin(\omega t)\cos(kx) - A(\delta k x)\cos(\omega t - kx) + A\frac{(\delta k x)^2}{2}\sin(\omega t - kx)$$

(1 次の微小量までとる)

$\sim\ 2A\sin(\omega t)\cos(kx) - A(\delta k x)\cos(\omega t - kx)$　→　定常波+進行波

問 11-6-4.　2 つの波の合成波の変位 y を計算する．

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t - kx + \pi/2) + A\sin(\omega t + kx)$$

$$= A[\sin(\omega t - kx)\cos\pi/2 + \cos(\omega t - kx)\sin\pi/2] + A\sin(\omega t + kx) = A\cos(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx)$$

$$= A[\cos(\omega t)\cos(kx) + \sin(\omega t)\sin(kx) + \sin(\omega t)\cos(kx) + \cos(\omega t)\sin(kx)]$$

$$= A[\sin(\omega t)\{\cos(kx) + \sin(kx)\} + \cos(\omega t)\{\cos(kx) + \sin(kx)\}]$$

$$= A[\sin(\omega t)\sqrt{2}\cos(kx - \pi/4) + \cos(\omega t)\sqrt{2}\cos(kx - \pi/4)]$$

$$= \sqrt{2}A(\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\cos(kx - \pi/4) = 2A\sin(\omega t + \pi/4)\cos(kx - \pi/4),$$

→　節の位置は，「$\cos(kx - \pi/4) = \cos(2\pi\frac{x - \lambda/8}{\lambda}) = 0$」となるとき →「$x - \lambda/8 = \pm\lambda/4, \pm 3\lambda/4, \pm 5\lambda/4, ...$」のとき

→　節の位置 $x = \lambda/8 \pm (2n+1)\lambda/4$　　(n は自然数で，$n = 1, 2, 3, \ldots$),

or,　$x = (4m-1)\lambda/8$　　(m は整数で，$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

問 11-6-5.　2 つの波の合成波の変位 y を計算する.

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t - k x + \pi/4) + A \sin(\omega t + k x)$$
$$= A\,[\,\sin(\omega t + \pi/8 - (k x - \pi/8)) + \sin(\omega t + \pi/8 + k x - \pi/8)\,]$$
$$= A\,[\,\sin(\omega t + \pi/8)\cos(k x - \pi/8) - \cos(\omega t + \pi/8)\sin(k x - \pi/8)$$
$$+ \sin(\omega t + \pi/8)\cos(k x - \pi/8) + \cos(\omega t + \pi/8)\sin(k x - \pi/8)\,]$$
$$= 2A \sin(\omega t + \pi/8)\cos(k x - \pi/8),$$

→　節の位置は，「$\cos(k x - \pi/8) = \cos\left(2\pi\dfrac{x-\lambda/16}{\lambda}\right) = 0$ 」となるとき，→「$x - \lambda/16 = \pm\lambda/4, \pm3\lambda/4, \pm5\lambda/4, \ldots\ldots$」のとき，

→　節の位置 $x = \lambda/16 \pm (2n+1)\lambda/4$　　(n は自然数で，$n = 1, 2, 3, \ldots$),

or,　$x = (8m-3)\lambda/16$　　(m は整数で，$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

問 11-6-6.　2 つの波の合成波の変位 y を計算する.

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega t - k x) + A_2 \sin(\omega t + k x) = (A + \delta A)\sin(\omega t - k x) + (A - \delta A)\sin(\omega t + k x)$$
$$= 2A\cos(\omega t)\cos(k x) + \delta A\,[\cos(\omega t)\cos(k x) + \sin(\omega t)\sin(k x) - \cos(\omega t)\cos(k x) + \sin(\omega t)\sin(k x)\,]$$
$$= 2A\cos(\omega t)\cos(k x) + 2\,\delta A\sin(\omega t)\sin(k x),$$

→　節の位置が異なる 2 つの定常波の合成波.

→　腹の位置は変わらない($x = n\,\lambda/4$,　n = 整数 = 0 , ±1 , ±2 ，・・・),

完全な節にはならない(振幅 δA の定常波(振動)が現れる).

問 11-7-1.

1)　音源が観測者に近づいてくるので，観測者が感じる見かけの音波の波長 λ_O は元の波長より縮む. (11-7-2)式より,

見かけの波長 $\lambda_O = \lambda\,(1 - v_S/v) = \dfrac{v}{f}\left(1 - \dfrac{v_S}{v}\right) = \dfrac{v}{f}\left(1 - \dfrac{v_S}{v}\right) = \dfrac{340}{200}\left(1 - \dfrac{30}{340}\right) = 1.7\times0.91176 = 1.55$ m となる.

したがって，見かけの振動数 f_O は下の式で計算される.

$$\rightarrow\quad f_O = \frac{v}{\lambda_O} = f\,\frac{v}{v - v_S} = 200\,\frac{340}{340-30} = 219.35 \sim 219\ \text{Hz.}$$

2)　見かけの波長 λ_O は観測者の動きと関係しないので，上の 1)の答えと同じで，見かけの波長 $\lambda_O = 1.55$ m となる.

見かけの振動数 f_O は音波の見かけの進む速さがより速く感じるので，(11-7-6)式を用いて求める.

$$\rightarrow\quad f_O = \frac{v + v_O}{\lambda_O} = f\,\frac{v + v_O}{v - v_S} = 200\,\frac{340+20}{340-30} = 200\times1.16129 = 232.25 \sim 232\ \text{Hz.}$$

3)　観測者が速さ $v_O = 36$ km/h = 10 m/s で音源に近づく. 見かけの波長 λ_O は 1)の答えと同じで，$\lambda_O = 1.55$ m となる.

見かけの振動数 f_O は見かけの進む速さがより遅く感じるので，(11-7-6)式で分子の速さ v_O の前の符号を正から負に

変更する.　　$\rightarrow\quad f_O = \dfrac{v - v_O}{\lambda_O} = f\,\dfrac{v - v_O}{v - v_S} = 200\,\dfrac{340-10}{340-30} = 200\times1.0645 = 212.903 \sim 213$ Hz.