

2. 真空中の静電場

2-1. 静電気力(クーロン力)

2つの静止した点電荷 q_1 と q_2 の間には力が働くことが実験的に確認されている。2つの点電荷が同じ符号を持つ場合は斥力(反発力)が、異なる符号を持つ場合は引力が互いに働いている。

$$\text{点電荷 } q_1 \text{ と } q_2 \rightarrow \begin{cases} \text{同符号(+ と +, または, - と -)なら, 斥力} \\ \text{異符号(+ と -)なら, 引力} \end{cases}$$

下の図のように、2つの正の電荷 q_1 と q_2 ($q_1, q_2 > 0$)の間には、互いに反発するような力 \vec{F}_1 と \vec{F}_2 がそれぞれの電荷に働いている。2つの力 \vec{F}_1 と \vec{F}_2 がは作用反作用の関係の力であるので、2つの力は、大きさは同じで(力 \vec{F}_1 の大きさ = $|\vec{F}_1|$ = 力 \vec{F}_2 の大きさ = $|\vec{F}_2|$ = F)、逆向きとなる力である。



異符号となる電荷 q_1 と q_2 (例えば, $q_1 > 0, q_2 < 0$)には、互いに引きつけあうような力 \vec{F}_1 と \vec{F}_2 がそれぞれの電荷に働いている。



18世紀のフランスの物理学者のクーロン¹は、真空中の2つの点電荷の間に働く力の大きさ F は、2つの点電荷の積(q_1 と q_2 の積)に比例し、2つの電荷の間の距離 r の2乗に反比例することを発見した。比例定数を k_e とすると、点電荷の間に働く力の大きさ F は下の式で表すことができる²。このように、静止した点電荷の間に働く力を静電気力、またはクーロン力と呼ぶ。

$$F = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (2-1-1)$$

ここで、静電気力に関する比例定数(クーロン定数) k_e は真空中³で、 $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ と測定されている。なお、ここで用いた定数 ϵ_0 は真空の誘電率で、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$ である。比例定数 k_e に対して、真空の誘電率 ϵ_0 を用いて、このように表す理由は後で示す。

例題 2-1 距離 $r = 3.0 \text{ cm}$ 離れた点に電荷 $q_1 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ と電荷 $q_2 = 6.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ を持つ2つの点電荷が真空中に置かれている。この2つの点電荷の間に働く力の大きさ F を求めよ。さらに、この力は、地上の重力では、何 kg の質量に相当するか?

答; 静電気力を表す(2-1-1)式より、下のように求めることができる。さらに、この静電気力と重力($= mg$; 重力加速度の大きさ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)を等しいと置くことで、質量 m を求める。

¹ クーロン(Charles A. de Coulomb)は18世紀のフランスの物理学者で、電荷の単位 C(クーロン)は彼の名にちなんでいる。

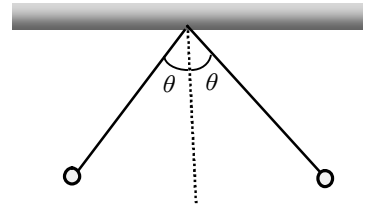
² (2-1-1)式での分子は絶対値を使って、「正」にしている。絶対値を使わない場合、この式の分子の ' $q_1 q_2$ ' が正の場合は斥力で、' $q_1 q_2$ ' が負となる場合は引力となる。

³ 以下では、特に記述がない場合、全て「真空中」として扱う。

$$F = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \frac{|2.0 \times 10^{-6} \times 6.0 \times 10^{-6}|}{(3.0 \times 10^{-2})^2} = 12 \times 10^{9-12+4} = 1.2 \times 10^2 \text{ N}$$

$$F = m g \rightarrow m = F/g = 120/9.8 = 12.24 \text{ kg} \sim 12 \text{ kg}$$

例題 2-2 質量が無視できる 2 本の長さ ℓ の糸の先に、それぞれの先に、質量 m 、電荷 q を持つ点電荷をつるしたら図のようになった。電荷 q の大きさを、質量 m 、重力加速度の大きさ g 、角度 θ 、静電気力に関する比例定数 k_e を用いて求めよ。



答; 2 つの電荷には静電気力、重力、糸の張力が働いている。静電気力の大きさ F 、重力の大きさ $m g$ 、糸の張力の大きさ S とすると、それぞれの電荷で 3 つの力がつり合っている。

(2 つの電荷の間の距離 $r = 2 \ell \sin \theta$ 、静電気力の大きさ $F = k_e \frac{q^2}{r^2}$)

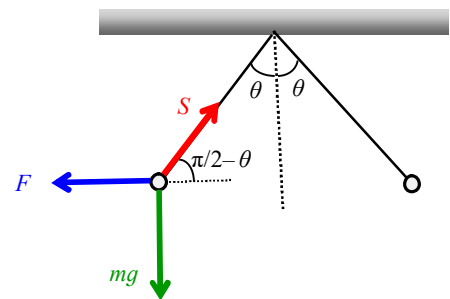
水平方向の力のつり合いから、 $F = S \sin \theta$,

鉛直方向の力のつり合いから、 $m g = S \cos \theta$,

この 2 つの式から $F = m g \tan \theta$ が成立するので、

$$q^2 = \frac{1}{k_e} r^2 m g \tan \theta = \frac{m g}{k_e} (2 \ell \sin \theta)^2 \tan \theta$$

$$q = \sqrt{\frac{m g \tan \theta}{k_e}} 2 \ell \sin \theta$$

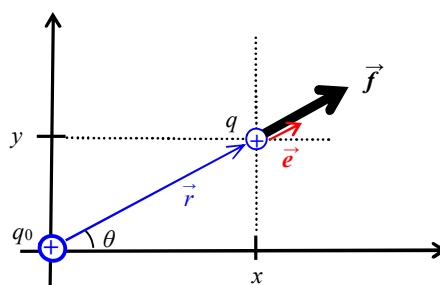


・静電気力のベクトル表示

静電気力は、大きさと向きを持ち、ベクトル量の 1 つである。そこで、静電気力をベクトルとして表してみよう。ここでは、簡単のために 2 次元(平面)のベクトル⁴として扱う。

2 つの正の点電荷 q_0 と q に対し、原点 O に点電荷 q_0 が、位置 $\vec{r} = (x, y)$ に点電荷 q があるとする。2 つの点電荷間に働く力は斥力となるので、点電荷 q には、図のような向きに静電気力 \vec{f} が働く。ここで、原点 O から位置 \vec{r} までの距離 r は、三平方の定理より、下の式で表される。

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2-1-2)$$



⁴ 3 次元のベクトルへの拡張は容易で、位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ と表す。1 次元では、位置 x で、向きは「+ (右向き)」と「- (左向き)」で表す。

上の図から、位置(ベクトル) \vec{r} と静電気力 \vec{f} は同じ向きになる。位置 \vec{r} と同じ向きで、大きさが 1 となる単位ベクトルを \vec{e} と表すと、その単位ベクトル \vec{e} は x 軸からの角度 θ を用いて下の式で表すこともできる。

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (2-1-3)$$

単位ベクトル $\vec{e}_x = (1, 0)$ と $\vec{e}_y = (0, 1)$ は、それぞれ x 方向と y 方向を向いた単位ベクトルである。この単位ベクトル \vec{e} を用いると、電荷 q に働く静電気力 \vec{f} は下のベクトルを用いた式で表すことができる。

$$\vec{f} = k_e \frac{q q_0}{r^2} \vec{e} = k_e \frac{q q_0}{r^3} \vec{r} \quad (2-1-4)$$

上の式では、2 つの電荷 q と q_0 が異符号(引力)となる場合も含んでいる。力を成分を用いて表すと、下の式のように表すこともできる。

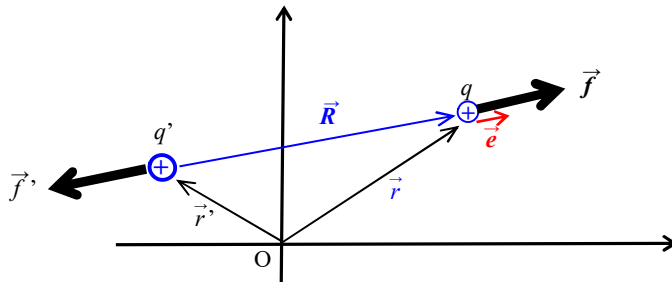
$$\vec{f} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y = (f_x, f_y) = k_e \frac{q q_0}{r^2} (\cos \theta, \sin \theta) = k_e \frac{q q_0}{r^3} (x, y) \quad (2-1-5)$$

次に、静電気力のベクトルでの表示を一般化するために、位置 $\vec{r} = (x, y)$ に電荷 q が、位置 $\vec{r}' = (x', y')$ に点電荷 q' があるとしよう。2 つの点電荷が同符号となる場合、静電気力は斥力となるので、変位 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ として、点電荷 q には図の向きに静電気力 \vec{f} が働く。ここで、単位ベクトル \vec{e} は下の式で表す。

$$\vec{e} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2-1-6)$$

また、変位 \vec{R} の大きさ(2 点間の距離) R は、三平方の定理より、下の式で表すことができる。

$$R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2-1-7)$$



したがって、点電荷 q に働く静電気力 \vec{f} は下の式で表すことができる。

$$\vec{f} = k_e \frac{q q'}{R^2} \vec{e} = k_e \frac{q q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (2-1-8)$$

一方、点電荷 q' に働く静電気力 \vec{f}' は、静電気力 \vec{f} に対する反作用となる力だが、単位ベクトル $\vec{e}' = -\vec{e} = (\vec{r}' - \vec{r})/|\vec{r}' - \vec{r}|$ を用いて、下の式で表すことができる。

$$\vec{f}' = -\vec{f} = k_e \frac{q'q}{R^2} \vec{e}' = k_e \frac{q'q}{R^2} (-\vec{e}) = k_e \frac{q'q}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} (\vec{r}' - \vec{r}) \quad (2-1-9)$$

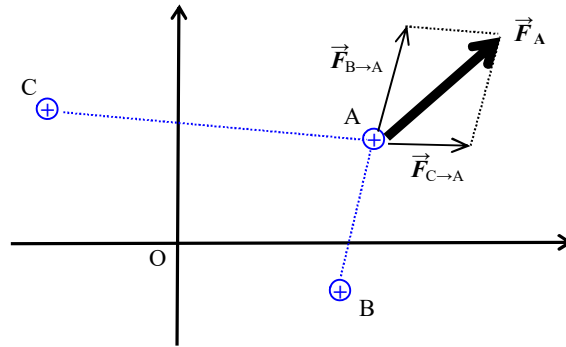
・3 個以上の点電荷による静電気力の合成

点電荷が 3 個以上ある場合、例えば、位置 $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ の 3 点 A, B, C に 3 つの正の点電荷 q_A, q_B, q_C が配置されている場合を考えよう。点 A の点電荷には点 B にある点電荷から静電気力 $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ と点 C にある点電荷から静電気力 $\vec{F}_{C \rightarrow A}$ が働いているので、点 A の受ける静電気力の合計の力、すなわち、合力 \vec{F}_A は下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{C \rightarrow A} \quad (2-1-10)$$

$$= k_e \frac{q_B q_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^3} \vec{e}_{B \rightarrow A} + k_e \frac{q_C q_A}{|\vec{r}_C - \vec{r}_A|^3} \vec{e}_{C \rightarrow A} \quad (2-1-10)'$$

ここで、 $\vec{e}_{B \rightarrow A}$ は点 B から点 A に向かう単位ベクトルで、 $\vec{e}_{C \rightarrow A}$ は点 C から点 A に向かう単位ベクトルである。



このように、2 つの力を足し合わせて、合力を求めることを、力に関する「**重ね合わせの法則**」と呼ぶ。

点電荷が 3 個以上ある場合も、合力は重ね合わせの法則を用いることによって求めることができる。例えば、位置 \vec{r}_A に電荷 q_A があり、位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ に電荷 q_1, q_2, \dots, q_N の計 N 個の電荷があるとき、位置 \vec{r}_A にある電荷 q_A に働く静電気力の合力 \vec{F}_A は下の式のように重ね合わせの法則を適用して求めることができる。

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{1 \rightarrow A} + \vec{F}_{2 \rightarrow A} + \dots + \vec{F}_{N \rightarrow A} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i \rightarrow A} = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i q_A}{|\vec{r}_i - \vec{r}_A|^2} \vec{e}_{i \rightarrow A} \quad (2-1-11)$$

ここで、 $\vec{e}_{i \rightarrow A}$ は位置 \vec{r}_i から位置 \vec{r}_A に向かう単位ベクトルである。

例題 2-3 原点に点電荷 Q 、原点からの距離 $r=a$ で x 軸からの角度 $\theta = 30^\circ = \pi/6$ の位置に点電荷 q があるとき、点電荷 q に働く静電気力 \vec{F} を x 方向と y 方向の単位ベクトル \vec{e}_x と \vec{e}_y を用いて表せ。次に、 x 軸からの角度 $\theta = 30^\circ$ の代わりに角度 $\theta' = 135^\circ = 3\pi/4$ の位置に点電荷 q があるとき、点電荷 q に働く静電気力 \vec{F} を x 方向と y 方向の単位ベクトル \vec{e}_x と \vec{e}_y を用いて表せ。

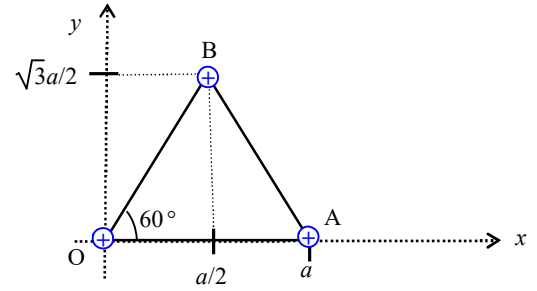
答； 角度 $\theta = 30^\circ$ の場合

$$\vec{F} = k_e \frac{qQ}{a^2} (\cos 30^\circ \vec{e}_x + \sin 30^\circ \vec{e}_y) = k_e \frac{qQ}{a^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y \right)$$

角度 $\theta' = 135^\circ$ の場合

$$\vec{F} = k_e \frac{qQ}{a^2} (\cos 135^\circ \vec{e}_x + \sin 135^\circ \vec{e}_y) = k_e \frac{qQ}{a^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y\right)$$

例題 2-4 図のように、辺の長さ a の正三角形 OAB があり、原点 O 、点 A 、点 B の各頂点に点電荷 q が置かれている。点 B にある点電荷 q に働く静電気力の合計 \vec{F}_B とその大きさ F_B を求めよ。



答: 点 O にある電荷によって、点 B にある点電荷に働く静

電気力 $\vec{F}_{O \rightarrow B}$ は下の式で表すことができる。

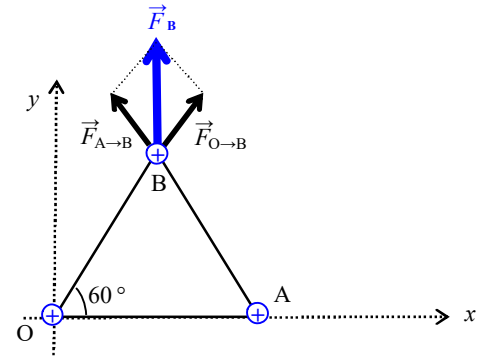
$$\vec{F}_{O \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_{O \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y\right) \quad (1)$$

また、点 A にある電荷によって、点 B にある点電荷に働く静電気力 $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ は下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y\right) \quad (2)$$

したがって、点 B にある点電荷 q に働く静電気力の合計 \vec{F}_B とその大きさ F_B は下の式のように計算できる。

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{O \rightarrow B} + \vec{F}_{A \rightarrow B} = k_e \frac{\sqrt{3}q^2}{a^2} \vec{e}_y, \quad F_B = k_e \frac{\sqrt{3}q^2}{a^2}$$

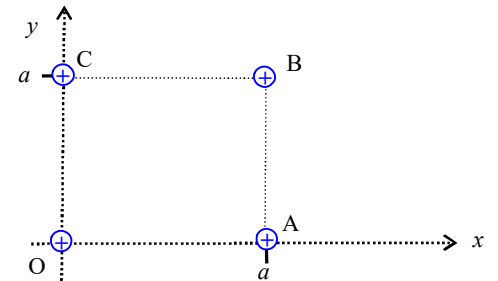


例題 2-5 図のように、辺の長さ a の正方形 $OABC$ があり、原点 O 、点 A 、点 B 、点 C の各頂点に点電荷 q が置かれている。点 B の点電荷に働く静電気力の合計 \vec{F}_B とその大きさ F_B を求めよ。

答: 点 O にある電荷によって、点 B にある点電荷に働く静電気力

$\vec{F}_{O \rightarrow B}$ は下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_{O \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2} \vec{e}_{O \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{2a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y\right) = k_e \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad (1)$$



また、点 A にある電荷によって、点 B にある点電荷に働く静電気力 $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ は下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_y = k_e \frac{q^2}{a^2} (0, 1) \quad (2)$$

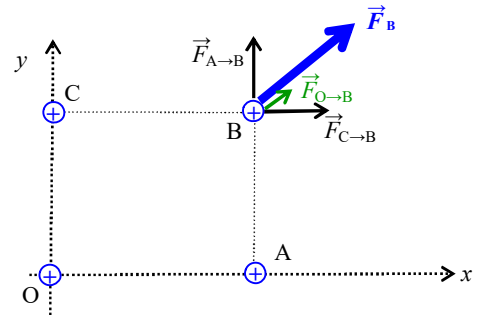
さらに、点 C にある電荷によって、点 B にある点電荷に働く静電気力 $\vec{F}_{C \rightarrow B}$ は下の式で表すことができる。

$$\vec{F}_{C \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_{C \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_x = k_e \frac{q^2}{a^2} (1, 0) \quad (3)$$

したがって、点 B にある点電荷 q に働く静電気力の合計 \vec{F}_B は下の式のように計算できる。それを下の図に示す。

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{O \rightarrow B} + \vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{C \rightarrow B} = k_e \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{4+\sqrt{2}}{4}, \frac{4+\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$F_B = k_e \frac{q^2}{a^2} \sqrt{9/4 + \sqrt{2}}$$



問題 2-1 点 A(座標は $(a, 0)$)に点電荷 q ($q > 0$)、点 B(座標は (a, a))に点電荷 q ($q > 0$)、点 C(座標は $(-a, a)$)に点電荷 $-5q$ を置いたとき、点 A にある点電荷に働く静電気力の合計 \vec{F}_A とその大きさ F_A を求め求めよ。

$$\text{答} \quad \vec{F}_A = k_e \frac{q^2}{a^2} \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 \right), F_A = k_e \frac{q^2}{a^2} \sqrt{2 - 2\sqrt{5}/5}$$

2-2. 電気力線と電場(電界)

離れた場所に2つの点電荷を置いたとき、2つの点電荷は直接、接触していなくとも、**静電気力(クーロン力)**が働いている。ファラデー⁵はこの現象を説明するために、2つの点電荷の間の空間に、仮想的な電気のつな、すなわち、「**電気力線**」があり、その電気力線によって、力が作用すると考えた。電気力線が空間にあるということは、電氣的に空間がつながっていることを示し、電氣的につながった空間に電荷をおくと、その電荷に電気力が働くことになる。

・電気力線の性質

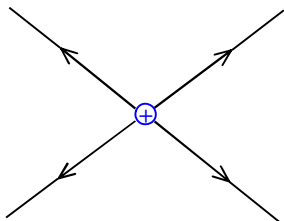
電気力線の性質として、下のように考えると、2つの電荷に働く静電気力の性質を矛盾なく説明することができる。

- 1) 正(+)の電荷から電気力線が発生して、負(-)の電荷に入ると電気力線は消滅する。
- 2) 電気力線は、交差したり、分岐したりしない。
- 3) 電荷の大きさと、発生する(あるいは、消滅する)電気力線の数とは比例する。
- 4) 電気力線でつながった電荷の間には、引力が働く(結ばれた電気力線の数が多いほど、大きな力が働く)。
- 5) 同じ符号の電荷の間には、電気力線が密集しないような力(斥力)が働く。

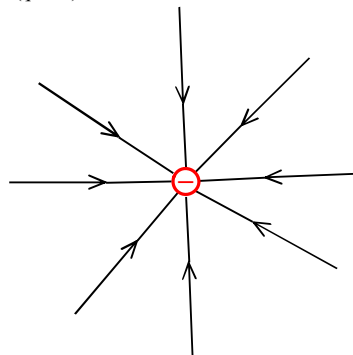
⁵ ファラデー(Michel Faraday)は 19 世紀のイギリスの物理学者・化学者で、特に電磁気学分野への貢献が大きい。電気力線の導入の他に、電磁誘導の法則、磁性体の性質、電気分解の法則などを発見・研究した。

例えば、電荷 q ($q > 0$) 当たり 4 本の電気力線が発生すると仮定する。電荷 q 、電荷 $(-2q)$ がそれぞれ、単独に存在する場合は、下の図のように電気力線を描くことができる(電気力線は等間隔となるように分布する)。

① 正の電荷 q ($q > 0$)

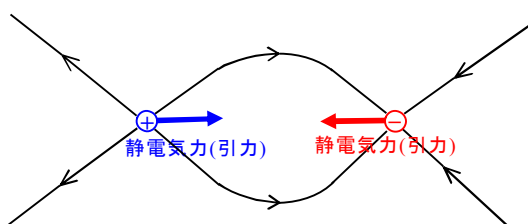


② 負の電荷 $(-2q)$ ($q > 0$)

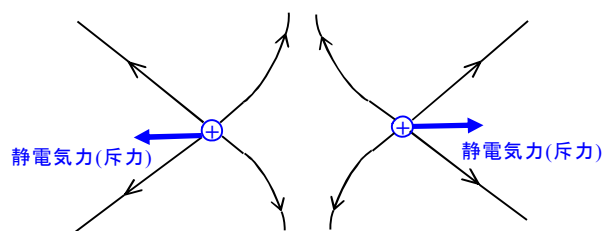


また、正と負の電荷の組、正と正の電荷の組での静電気力と電気力線を図で示す。電気力線で結ばれた電荷の間には引力が、密集するような電気力線が配置された電荷の間には斥力が働く。

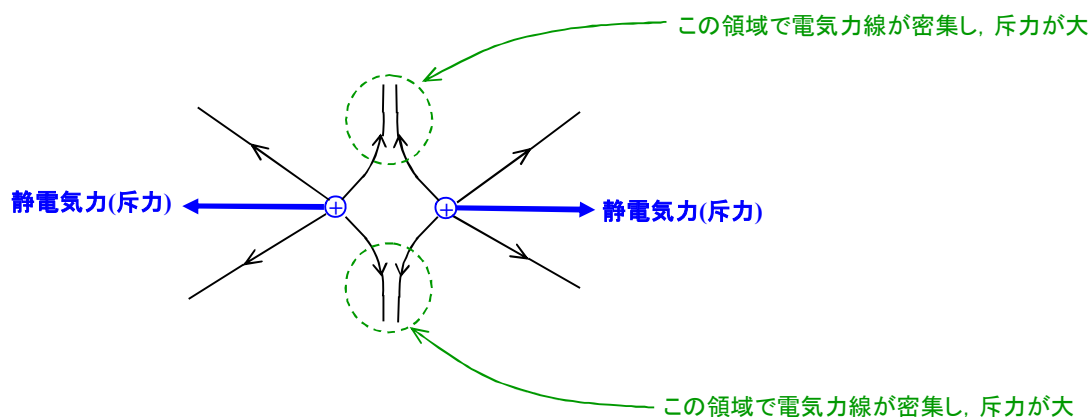
③ 正と負の電荷 q と $(-q)$



④ 正と正の電荷 q と q



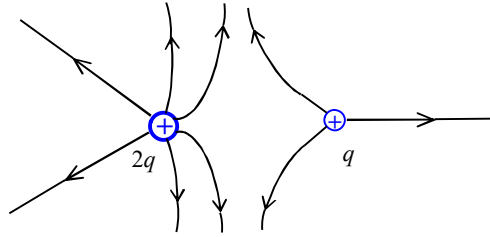
さらに、上の図の④で、正の電荷と正の電荷をお互いに近づけると、中心部の電気力線がさらに密集し、斥力が強くなる。



問題 2-2 電荷 q ($q > 0$) 当たり、3 本の電気力線が発生するとして、次の点電荷が配置されているとき、電気力線の様子を図示せよ。

- 1) $2q$ と q
- 2) $2q$ と $-3q$
- 3) 正三角形の頂点に、 $q, q, 2q$
- 4) 正三角形の頂点に、 $q, 2q, -3q$

答 1)のみ 点電荷 $2q$ から6本, q から3本の電気力線が発生 2)～4) は略



・電場(電界)とは⁶

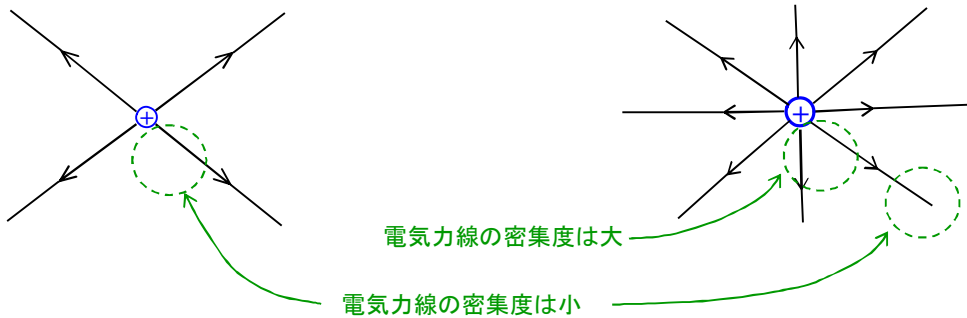
電気力線が空間に存在している状態は, 電気力が影響を及ぼす空間になっていることを示す. このような空間を「**電場(電界)**」が存在していると呼ぶ. 電気力線と電場の関係を下に示す.

- 1) 電場(電界)の向きは電気力線の向きと同じ(電場の向きは電気力線の接線方向)
- 2) 電場(電界)の大きさは電気力線の密集度(ある閉じた面を貫く電気力線の数, 換言すると, 電気力線の面密度)に比例する

例えば, 電荷 q ($q > 0$) 当たり4本の電気力線が発生すると仮定すると, 電荷 q , 電荷 $2q$ の周りの電気力線は下の図のように描くことができ, 電気力線の密集度を比べることで, 電場(電界)の大きさを比べることができる.

電荷 q

電荷 $2q$



・電場(電界)の定義

電気力線が存在している空間(電場(電界)が存在している空間)に電荷 q (ここでは, 正の電荷を想定する)を置くと, 電荷 q には, 電場(電界) \vec{E} によって, 静電気力 \vec{F} が発生する. 電気力線が密集しているほど(電場 \vec{E} が大きいほど)静電気力 \vec{F} が大きくなり, 電場と静電気力は比例する. その比例関係を式で表すと下の式が成立する. この式は電場(電界)に対する定義式でもある.

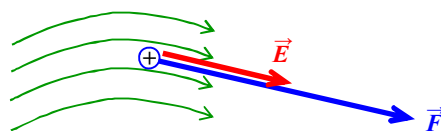
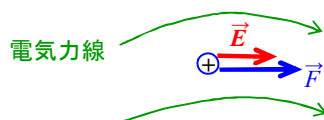
$$\vec{F} := q \vec{E}$$

(2-2-1)

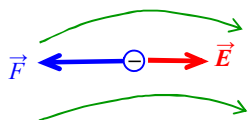
密集していない電気力線($q > 0$)

密集している電気力線($q > 0$)

⁶ 物理学の分野では「電場」, 電気工学の分野では「電界」と呼ぶ. どちらも同じ意味である. 英語では 'Electric field' と呼ぶ.



電荷 q が負となる場合($q < 0$)は、電気力は電場と逆向きに作用する。



・電場の単位

電場の定義式(2-2-1)式より、電場の単位は「N/C」となる。また、後で示すが、電位の単位「V(ボルト)」と長さの単位「m(メートル)」を用いて下のように表すこともできる。

$$\text{電場の単位} = \text{N/C} = \text{V/m} \quad (2-2-2)$$

・点電荷が作る電場

原点 O に点電荷 Q があり、位置 $\vec{r} = (x, y)$ において、点電荷 Q が作る電場 \vec{E} を求めよう⁷。点電荷 q が位置 \vec{r} にあるとすると、点電荷 q に働く静電気力 \vec{F} は(2-1-4)式より、次のように表すことができる。

$$\vec{F} = k_e \frac{qQ}{r^2} \vec{e} = q k_e \frac{Q}{r^2} \vec{e}$$

この式と電場の定義式(2-2-1)式と比べることで、位置 \vec{r} における電場 \vec{E} とその大きさ E は下の式で表すことができる。

$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \vec{e} = k_e \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2-2-2)$$

$$E = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (2-2-3)$$

・複数の点電荷が作る電場

位置 \vec{r}_A に電荷 q_A があり、位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ に電荷 q_1, q_2, \dots, q_N の計 N 個の電荷があるとき、位置 \vec{r}_A にある電荷 q_A に働く静電気力の合力 \vec{F}_A を(2-1-11)式で表した。位置 \vec{r}_A における電場を \vec{E}_A 、または、 $\vec{E}(\vec{r}_A)$ とすると、電荷 q_A に働く電気力 \vec{F}_A は、「 $\vec{F}_A = q_A \vec{E}_A$ 」と表されるので、電場 \vec{E}_A は下の式で表すことができる。

⁷ 位置 \vec{r} での電場なので、この位置での電場 \vec{E} は位置 \vec{r} の関数となるので、電場の x 成分を E_x , y 成分を E_y とすると、「 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y) = (E_x(x, y), E_y(x, y))$ 」と表すこともできる。

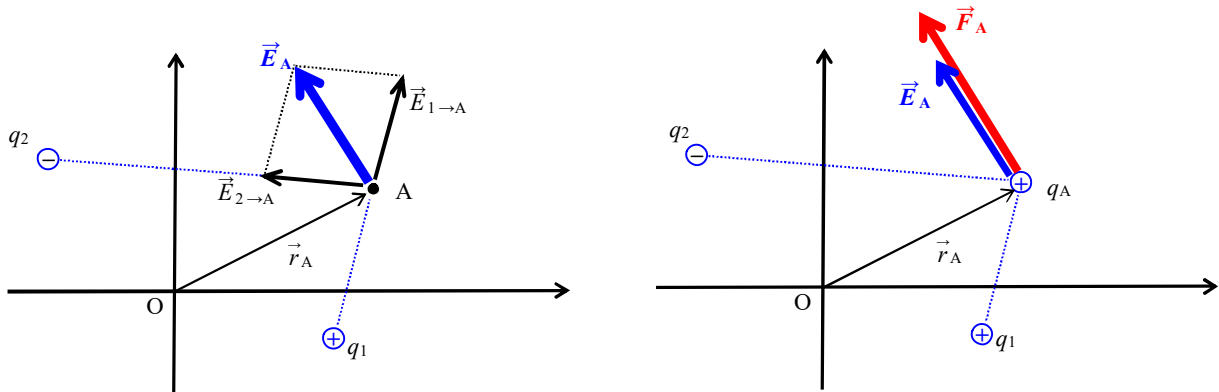
$$\vec{F}_A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i \rightarrow A} = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i q_A}{|\vec{r}_i - \vec{r}_A|^2} \vec{e}_{i \rightarrow A} = q_A \vec{E}_A \quad (2-1-11)'$$

$$\vec{E}_A = \vec{E}(\vec{r}_A) = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_A|^2} \vec{e}_{i \rightarrow A} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{i \rightarrow A} \quad (2-2-4)$$

$$\vec{E}_{i \rightarrow A} = k_e \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_A|^2} \vec{e}_{i \rightarrow A} \quad (2-2-5)$$

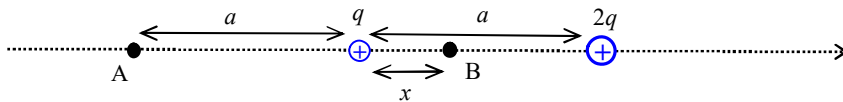
ここで、電場 $\vec{E}_{i \rightarrow A}$ は、位置 \vec{r}_i にある点電荷 q_i が位置 \vec{r}_A につくる電場である。電場 \vec{E}_A は、点電荷 q_i がつくる電場 $\vec{E}_{i \rightarrow A}$ の合成電場となる。これは、電場に関する「重ね合わせの法則」である。

例えば、位置 \vec{r}_1 にある点電荷 q_1 が、位置 \vec{r}_2 にある点電荷 q_2 が(下の図では q_2 は負の電荷とした)あるとき、位置 \vec{r}_A での合成電場 \vec{E}_A と、その位置に点電荷 q_A (ここ図では q_A は正の電荷)を置いたときの点電荷 q_A に働く静電気力 $\vec{F}_A (= q_A \vec{E}_A)$ を下の図に示した。



【 * 注意; 点電荷 q_A を置くことによって、ある電場が発生するが、この発生した電場によって点電荷 q_A 自身には影響を与えない。他の点電荷によって作られる電場によってのみ影響を受ける。】

例題 2-6 図のように、右向きを正として、距離 a だけ離れた地点に点電荷 q ($q > 0$)と $2q$ が置かれている。次の問に答えよ。



- 1) 点電荷 q から距離 a だけ離れた地点 A での合成電場の大きさと向き(+方向か-方向か)を求めよ
- 2) 2つの点電荷にはさまれた地点で、合成電場 E が「0」となる地点 B はどこか? 点電荷 q からの距離 x を求めよ。

答; 1) 点 A において、点電荷 q が作る電場を E_1 、点電荷 $2q$ が作る電場を E_2 とすると、合成電場 E は下のように求めることができる。

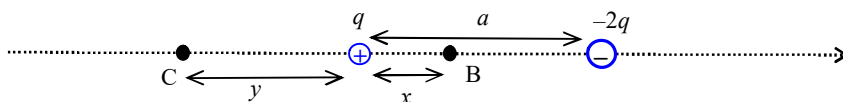
$$E = E_1 + E_2 = -k_e \frac{q}{a^2} + (-k_e \frac{2q}{(2a)^2}) = -k_e \frac{3q}{2a^2} \rightarrow \text{合成電場の大きさ} = k_e \frac{3q}{2a^2}, \text{向きは左向き(-向き)}$$

- 2) 点電荷 q と $2q$ にはさまれた領域では、点電荷 q が作る電場は右向き、点電荷 $2q$ が作る電場は左向きとなるので、合成電場 E が 0 となる点 B では、下の式から、点電荷 q からの距離 x を求めることができる。

$$E = E_1 + E_2 = k_e \frac{q}{x^2} + (-k_e \frac{2q}{(a-x)^2}) = 0 \rightarrow E = k_e \frac{q}{x^2(a-x)^2} \{ (a-x)^2 - 2x^2 \} = 0 \rightarrow x^2 + 2ax - a^2 = 0$$

上の 2 次方程式を解くと、解は、 $x = -a \pm \sqrt{2}a$ となるが、距離 x は、 $0 < x < a$ の条件があるので、距離 $x = (\sqrt{2} - 1)a$ となる。

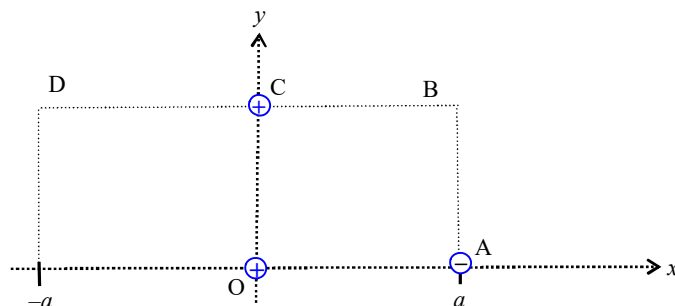
問題 2-3 図のように、右向きを正として、距離 a だけ離れた地点に点電荷 q ($q > 0$) と $-2q$ が置かれている。次の問に答えよ。



- 1) 点電荷 q から距離 x だけ離れた地点 B での電場(合成電場)の大きさと向き(+方向か-方向か)を求めよ
- 2) 点電荷 q から距離 y だけ離れた地点 C での電場(合成電場) E が「0」となる地点 C はどこか? 点電荷 q からの距離 y を求めよ。

答 1) +方向, $E = k_e \frac{q(a^2 - 2ax + 3x^2)}{x^2(a-x)^2}$ 2) $y = (\sqrt{2} + 1)a$

例題 2-7 辺の長さ a の正方形 OABC がある。原点 O には点電荷 $2\sqrt{2}q$ ($q > 0$) が、座標 $(a, 0)$ の点 A には点電荷 $-q$ が、座標 $(0, a)$ の点 C には点電荷 q が置かれている。座標 (a, a) の点 B における電場 \vec{E}_B と座標 $(-a, a)$ の点 D における電場 \vec{E}_D を求めよ。



答; 点 O にある電荷が点 B に作る電場 $\vec{E}_{O \rightarrow B}$, 点 A にある電荷が点 B に作る電場 $\vec{E}_{A \rightarrow B}$, 点 C にある電荷が点 B に作る電場 $\vec{E}_{C \rightarrow B}$ はそれぞれ下のように表され、その合成電場 \vec{E}_B は合成して下のように求めることができる。

$$\vec{E}_{O \rightarrow B} = k_e \frac{2\sqrt{2}q}{(\sqrt{2}a)^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) = k_e \frac{q}{a^2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y), \quad \vec{E}_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q}{a^2} (-\vec{e}_y), \quad \vec{E}_{C \rightarrow B} = k_e \frac{q}{a^2} \vec{e}_x,$$

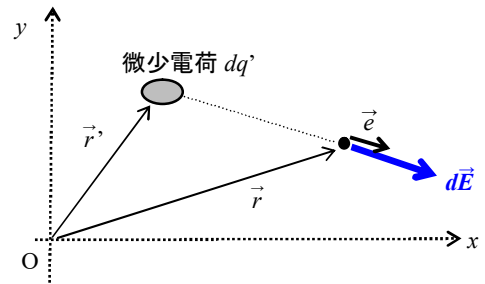
$$\vec{E}_B = \vec{E}_{O \rightarrow B} + \vec{E}_{A \rightarrow B} + \vec{E}_{C \rightarrow B} = 2k_e \frac{q}{a^2} \vec{e}_x = \left(2k_e \frac{q}{a^2}, 0 \right)$$

同様に、点 D における電場 $\vec{E}_D = k_e \frac{q}{a^2} \left(-2 + \frac{2\sqrt{5}}{25}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{25} \right)$

・大きさを持った電荷が作る電場(電界)

図のように、2次元平面上にある位置 \vec{r}' に大きさを持った微少電荷 dq' があるとしよう。この微少電荷 dq' は微少面積 dS' 上にあり、電荷の面密度 ρ で分布している。この微少電荷によって、位置 \vec{r} にできる微少電場を $d\vec{E}$ とする。

微少電荷 $dq' = \rho dS' = \rho dx' dy'$ と表されるので、位置 \vec{r} における微少電場 $d\vec{E}$ は、微少電荷から位置 \vec{r} に向かう単位ベクトルを \vec{e} として、下の式で表すことができる。



$$d\vec{E} = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{e} = k_e \frac{\rho dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{e} \quad \left(\text{単位ベクトル } \vec{e} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (2-2-6)$$

したがって、これを電荷分布する領域にわたって積分することで、位置 \vec{r} における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めることができる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = k_e \int_{(\text{電荷分布の領域})} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' = k_e \iint_{(\text{電荷分布の領域})} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' \quad (2-2-7)$$

* 3次元空間分布による電場:

3次元空間に電荷が分布しているときは、電荷の空間密度 ρ を用いると、微少体積 $dV' = dx' dy' dz'$ 内にある微少電荷 $dq' = \rho dV' = \rho dx' dy' dz'$ と表すことができる。位置 \vec{r} における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は下の式で表すことができる。

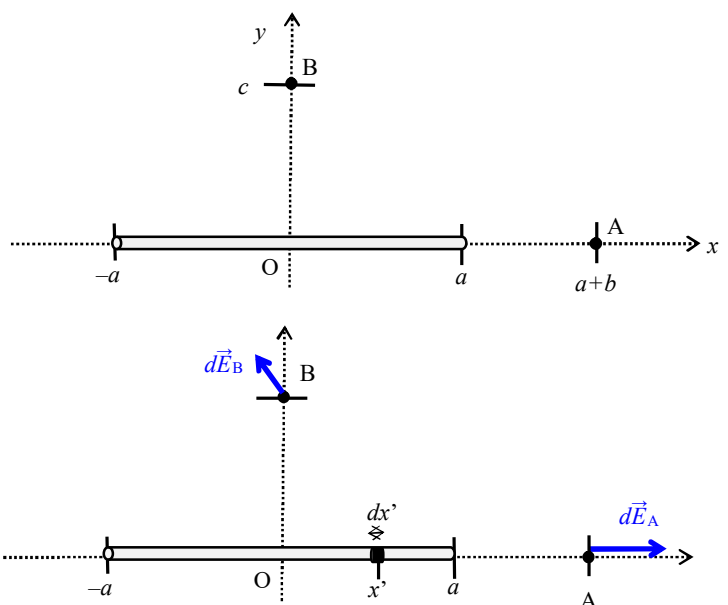
$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_{(\text{電荷分布の領域})} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = k_e \iiint_{(\text{電荷分布の領域})} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz' \quad (2-2-7)'$$

例題 2-8 長さ $2a$ の棒に電荷 q が一様に分布している。この棒を図のように x 軸と平行に置いたとき、点 A と点 B における電場 \vec{E} を求めよ。

答; この棒の電荷の線密度 $\rho = q/(2a) = q/(2a)$ である。
棒の中にある位置 x' における微少領域 dx' にある微少電荷 $dq (= \rho dx')$ が点 A に作る微少電場 $d\vec{E}_A$ と点 B に作る微少電場 $d\vec{E}_B$ は下の式で表すことができる。

$$d\vec{E}_A = k_e \frac{\rho dx'}{(a+b-x')^2} \vec{e}_x,$$

$$d\vec{E}_B = k_e \frac{\rho dx'}{c^2 + x'^2} \left(\frac{-x'}{\sqrt{c^2 + x'^2}} \vec{e}_x + \frac{c}{\sqrt{c^2 + x'^2}} \vec{e}_y \right),$$



これらを、 $-a < x' < a$ まで積分して、点 A での電場 \vec{E}_A と点 B での電場 $\vec{E}_B = (E_{Bx}, E_{By})$ を計算することができる。

$$\vec{E}_A = k_e \rho \int_{-a}^a \frac{dx'}{(a+b-x')^2} \vec{e}_x = k_e \rho \left[\frac{1}{a+b-x'} \right]_{-a}^a \vec{e}_x = k_e \rho \frac{2a}{b(2a+b)} \vec{e}_x = k_e \frac{q}{b(2a+b)} \vec{e}_x$$

$$E_{Bx} = -k_e \rho \int_{-a}^a \frac{x' dx'}{(c^2 + x'^2)^{3/2}} = 0 \quad (\text{被積分関数 } \frac{x'}{(c^2 + x'^2)^{3/2}} \text{ は奇関数, 積分範囲が } -a \text{ から } a \text{ なので, 「0」となる})$$

$$E_{By} = k_e \rho c \int_{-a}^a \frac{dx'}{(c^2 + x'^2)^{3/2}} \quad (\text{被積分関数 } \frac{1}{(c^2 + x'^2)^{3/2}} \text{ は偶関数, 積分範囲が } -a \text{ から } a \text{ なので, 下の式が成立})$$

$$= 2 k_e \rho c \int_0^a \frac{dx'}{(c^2 + x'^2)^{3/2}} \quad (x' = c \tan \theta \text{ と置くと, } dx' = c d\theta / \cos^2 \theta, \text{ 被積分関数 } \frac{1}{(c^2 + x'^2)^{3/2}} = c^{-3} \cos^3 \theta)$$

$$= 2 k_e \rho c^{-1} \int_0^\theta \cos \theta d\theta \quad (\text{角度 } \theta \text{ は, } a = c \tan \theta \text{ を満たす角度} \rightarrow \sin \theta = \frac{a/c}{\sqrt{1+(a/c)^2}} = \frac{a}{\sqrt{c^2 + a^2}})$$

$$= 2 k_e \rho \frac{a/c}{\sqrt{c^2 + a^2}} = k_e \frac{q}{c \sqrt{c^2 + a^2}}$$

$$(\text{さらに, 棒の長さがとても長い場合は, } \sin \theta = 1 \text{ で } \rightarrow \theta = \pi/2 \text{ となり, } \rightarrow E_{By} = \frac{2 k_e \rho}{c})$$

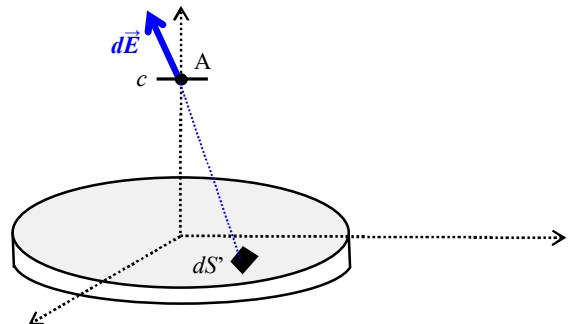
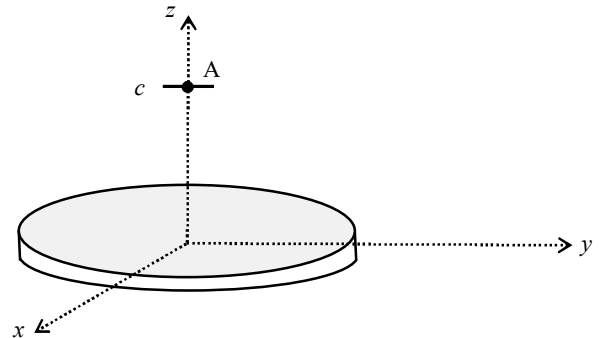
例題 2-9 xy 平面にある半径 R の薄い円板に電荷 q が一様に分布している。図のような z 軸上の点 A における電場 \vec{E} を求めよ。(重積分に慣れていない学生は省略してよい)

答: 円板における電荷の面密度 $\rho = q/(\pi R^2)$ である。円板内にある微少面積要素 $dS' = dx' dy' = r' dr' d\theta'$ が点 A に作る微少電場 $d\vec{E}$ は微少面積要素と点 A の間の距離が $\sqrt{c^2 + x'^2 + y'^2}$ なので、下のようにして求めることができる。

$$d\vec{E} = (dE_x, dE_y, dE_z)$$

$$= k_e \frac{\rho dx' dy'}{c^2 + x'^2 + y'^2}$$

$$\left(\frac{-x'}{\sqrt{c^2 + x'^2 + y'^2}}, \frac{-y'}{\sqrt{c^2 + x'^2 + y'^2}}, \frac{c}{\sqrt{c^2 + x'^2 + y'^2}} \right)$$



円板は、 x 方向と y 方向については対象で、微少電場の x 成分 dE_x は変数 x について奇関数、 y 成分 dE_y は変数 y について奇関数となるので、 x 成分、または、 y 成分で積分すると「0」になる。したがって、 z 成分のみ値を持つ。

$$E_z = \int dE_z = k_e \iint_{0 < x'^2 + y'^2 < R^2} \frac{\rho c \, dx' \, dy'}{(c^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

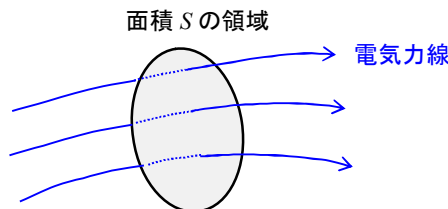
次のように変数変換して、積分する. $x' = r' \cos \theta'$, $y' = r' \sin \theta' \rightarrow$ 微少面積要素 $= dx' \, dy' = r' \, dr' \, d\theta'$

$$= k_e \rho c \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R \frac{r' \, dr'}{(c^2 + r'^2)^{3/2}} = k_e \rho c \, 2\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{c^2 + p}} \right]_{p=0}^{p=R^2} = k_e \rho c \, 2\pi \frac{\sqrt{c^2 + R^2} - c}{c\sqrt{c^2 + R^2}} = \frac{2k_e q}{R^2} \frac{\sqrt{c^2 + R^2} - c}{\sqrt{c^2 + R^2}}$$

(円板の半径がとても広い($R \rightarrow \infty$)場合は, $E_z = 2\pi k_e \rho = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$)

2-3. ガウスの法則

前の節 '2-2. 電気力線と電場(電界)' において, 「**電場(電界)の大きさは電気力線の密集度(ある閉じた面を貫く電気力線の数, つまり, 電気力線の面密度)に比例する**」とした. 面積 S となる領域を選び, この領域を貫く電気力線の数 N とする. このときの領域内の電場の大きさ E とすると, 下の式で表すことができる.



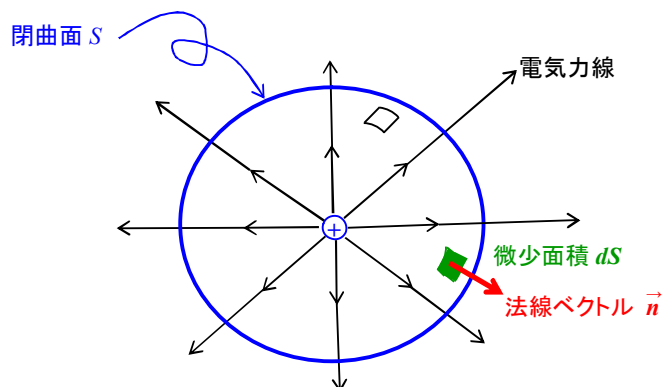
$$E := \text{電気力線の密集度(面密度)} = \frac{\text{電気力線の本数}}{\text{領域の面積}} = \frac{N}{S} \quad (2-3-1)$$

あるいは,

$$(\text{電場の大きさ}) \cdot (\text{領域の面積}) := \text{貫く電気力線の数} \rightarrow \mathbf{E} S := N \quad (2-3-2)$$

電気力線が生じる原因は電荷なので, **真空**において, 電荷 q ($q > 0$) のまわりを取り囲むように閉曲面 S で包む. 電荷から四方八方に出る電気力線の本数は電荷の大きさに比例する. 閉曲面上にある**微少面積要素** dS から, 曲面の垂直方向の単位ベクトル(「**法線ベクトル**」と呼ぶ) \vec{n} とすると, 微少面積要素について, 法線方向を向いたベクトル(微少面積要素ベクトル)と見なし, 下の式で表す.

$$d\vec{S} = \vec{n} \, dS$$



このとき, 微少面積要素を貫く電気力線の本数を dN とし, (2-3-2)式に対応し, ベクトルの内積を用いて下の式が成り立つ.

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} := dN \quad (2-3-3)$$

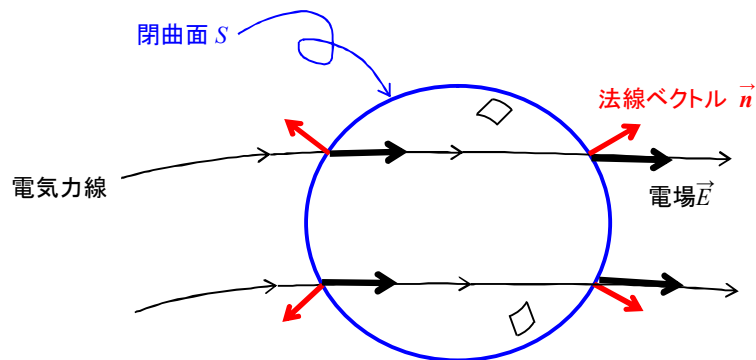
電場と閉曲面の法線ベクトルの向きが同じなら, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$
 が成立し, その間の角度が θ なら, 「 $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta$ 」が成り立つ

上の(2-3-3)式を閉曲面全体で積分(曲面の表面での「面積分」とも呼ぶ)すると, 右辺は, 中心にある電荷 q から発生する電気力線の総数 N となる. 電気力線の総数 N は中心の電荷 q に比例する. 比例関係として, 「真空中では, 電荷 ϵ_0 当たり 1 本の電気力線が発生する」と仮定しよう. したがって, 電荷 q では電気力線の総数は「 q/ϵ_0 」となる. これを式で表すと下の式で表すことができる. この関係式を「ガウス⁸の法則」と呼ぶ.

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{閉曲面から出る電気力線の総数} \quad (2-3-4)$$

・閉曲面内に電荷がない場合のガウスの法則

閉曲面内に電荷がないので, 電気力線は外から, この閉曲面の中に入り, 次に, 別な境界から閉曲面の外へ出る. 電気力線と電場は同じ向きとなるので, 下の図のように, 閉曲面に入る境界では, 電場と曲面の法線ベクトルが逆向き ($\vec{E} \cdot \vec{n} < 0$) になる. 一方, 閉曲面に入る境界では, 電場と曲面の法線ベクトルが同じ向き ($\vec{E} \cdot \vec{n} > 0$) になる. このように 2 つの境界において, 負と正で打ち消し合う. したがって, (2-3-4)式の右辺 = 0 となる.



$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2-3-5)$$

・閉曲面内に複数の電荷がある場合のガウスの法則

真空の閉曲面内に電荷 q_1, q_2, \dots, q_N と複数の電荷があるとすると, 電荷 q_i によってできる電場を \vec{E}_i とすると, ガウスの法則は下の式で表される.

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (2-3-6)$$

さらに, 合成電場 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$, 閉曲面内にある全電荷 $Q = \sum_{i=1}^N q_i$ とすると, 次のガウスの法則が成立する.

⁸ ガウス(J. Carl Friedrich Gauss)は 19 世紀のドイツの数学者・物理学者で, 最小自乗法, 複素解析, 正規分布関数などを考案し, 数学(幾何学), 電磁気学などに多大な足跡を残した.

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2-3-7)$$

また、閉曲面内の電荷が連続して分布している場合は、体積電荷密度を ρ とすると、閉曲面内の全電荷 Q は次の式で表され、ガウスの法則も下の(2-3-9)式で表すことができる。

$$Q = \int_{\text{閉曲面内の体積 } V} \rho dV \quad (2-3-8)$$

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{閉曲面内の体積 } V} \rho dV \quad (2-3-9)$$

・ガウスの法則と静電気力

ここで、ガウスの法則と静電気力の関係についてまとめる。

ガウスの法則は電磁気学において、重要な法則の1つである。閉曲面内に電荷があるときは、(2-3-4)式の左辺に相当する「電場の面積分が有限な値」を持ち、電荷がないときは「0」となる。

正の電荷があるとき、正の電荷から、電気力線が発生する(負の電荷の場合は、電気力線が消失する)。電気力線が発生・消失するのは、電気的な性質からみて、その地点が空間的に特殊な構造をしている、すなわち、「特異点」となっているからである。実際、点電荷 q のまわりの電場の大きさ E は、点電荷からの距離 r として、「 $E = k_e q/r^2$ 」となり、「 $r = 0$ 」で、数学的に発散⁹している。

電荷が存在する位置は、電気的空間として特異点で、電荷は点状なので、「点状の特異点」と言うことができる。特異点がない空間では、閉曲面状における面積積分を実行すると、その値は「0」となる。

「ガウスの法則にしたがって、電荷が発生源となり、空間に電場 \vec{E} ができる」

→ 電場の存在する空間に電荷 q があると、電場から電荷は静電気力 \vec{F} を受ける。静電気力 \vec{F} は、
「 $\vec{F} = q \vec{E}$ 」の関係満たす。この関係式は、電場(電磁気学)と力(力学)を結びつける重要な関係式である。

→ 電荷 q を置いたことでできた電場と外からの電場が相互に影響を及ぼし合うことを図示したのが、電気力線である。

・ガウスの法則の適用例

ガウスの法則を適用させて、電場を求めてみよう。

① 原点に電荷 q があり、原点からの距離 r での電場(電界)

原点からの等距離 r にある閉曲面、すなわち、半径 r の球面上では、電場 \vec{E} と法線ベクトル \vec{n} は、2 つとも中心から外に向かうので、向きは同じとなるので、「 $\vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E dS$ 」が成り立ち、等方的なので、電場の大きさ E は一定となる。したがって、(2-3-4)式は下の式のように計算できる。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{閉曲面 } S} E dS = E \int_{\text{閉曲面 } S} dS = E \times (\text{半径 } r \text{ の表面積}) = E \times (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

上の式を変形すると、真空中に点電荷 q が原点にあり、原点からの距離 r における電場の大きさ E を求めることができる。

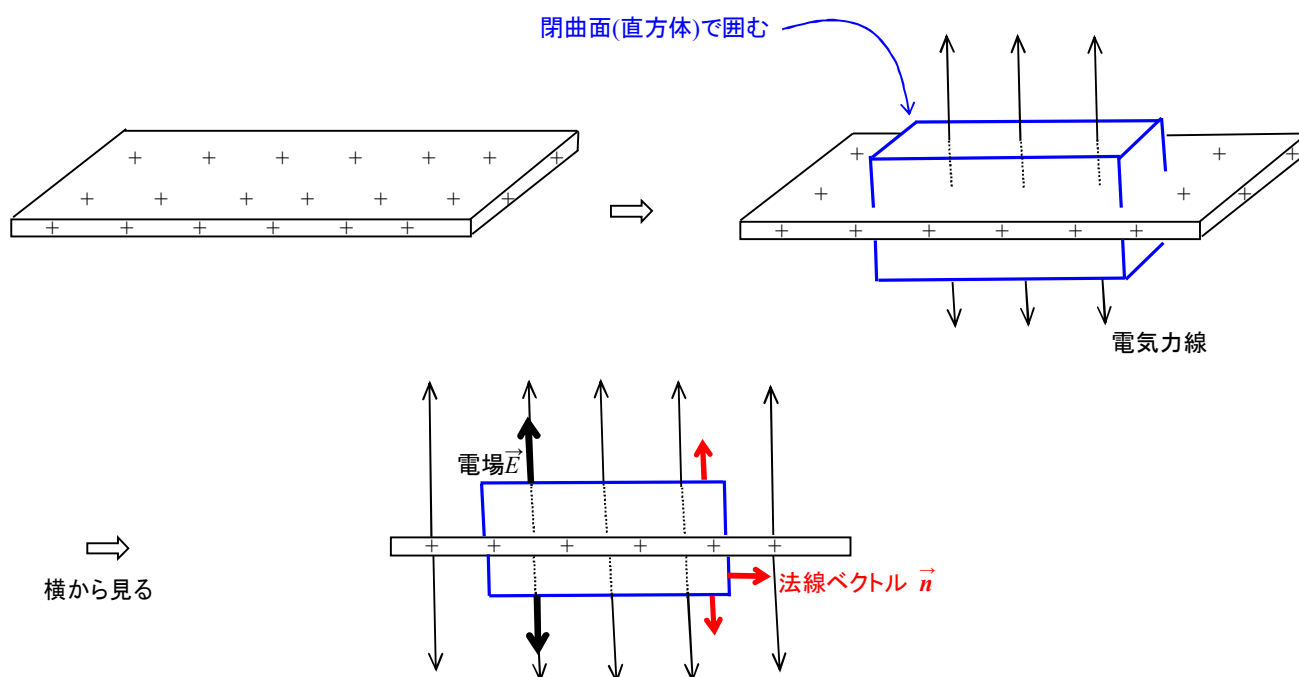
⁹ 電荷の最小単位を「電子」とすると、「電子の構造」については考えないこととする。ここでは、電子のすぐ外では、電場が非常に大きくなるという意味で、「発散」という語句を使った。

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (2-3-10)$$

上のように、「ガウスの法則」を使って求めた電場と「クーロンの法則, (2-2-3)式」から求めた電場は同じ結果となる。
逆に言えば、同じ結果になるために比例定数 k_e を(2-1-1)式のように、「 $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ 」と定めたと言うことができる¹⁰。

② 面密度 σ ($\sigma > 0$) の薄い平板のまわりの電場(電界)

電荷の面密度 σ が一様(平板の場所によらず一定)となる平板がある(平板は大きく、電気力線はこの平板に垂直に出て行くものとする)。このとき、平板のまわりを図のような閉曲面(ここでは、直方体)で囲む。その囲んだ直方体の電気力線が貫く面の表面積を S 、直方体の内側に分布した電気量を Q とする(面密度 $\sigma = \text{電気量}/\text{表面積} = Q/S$)。ガウスの法則を適用して、この直方体を貫く電場の大きさ E を求める。



(2-3-4)式の左辺で、直方体の上面(面積 S)と下面(面積 S)では、電場(電界)と法線ベクトルは同じ向きになり($\vec{E} \cdot \vec{n} = E$)、側面では、電場と法線ベクトルは直交する($\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$)ので、下の式が成り立つ。

$$\int_{\text{直方体の表面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{直方体の上面}} E dS + \int_{\text{直方体の下面}} E dS = E S + E S = 2 E S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

上の式より、平板の上下における電場の大きさ E は下の式で表すことができる。

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2-3-11)$$

(2-3-11)式は、クーロンの法則を用いて得られた結果(例題 2-9 において、円板の半径が大きい場合)と同じである。

③ 一様に帯電した半径 R の球における電場(電界)

真空中にある半径 R の球に一様に帯電した球を考える。球全体の電気量は Q で、電荷(体積)密度 $\rho = \text{電気量}/\text{体積} = Q/(4\pi R^3)$

¹⁰ 電場の性質の観点から、「クーロンの法則」よりも、「ガウスの法則」の方がより基礎的な法則である。

$^{3/3}$)となる. ($Q = \rho 4\pi R^3/3$)

球の中心を原点に置くと, 等方的なので, 電場の大きさ E は原点からの距離 r の関数となる. 電場の大きさ E は 2 つの領域「 $r \geq R$ 」と「 $r < R$ 」に分けて計算する.

「 $r \geq R$ 」で

半径 r の球面を閉曲面とすると, 閉曲面内部の電荷は Q なので, 原点に点電荷 Q がある場合と同じ結果となる. この領域での電場の大きさ E は下の式で表すことができる.

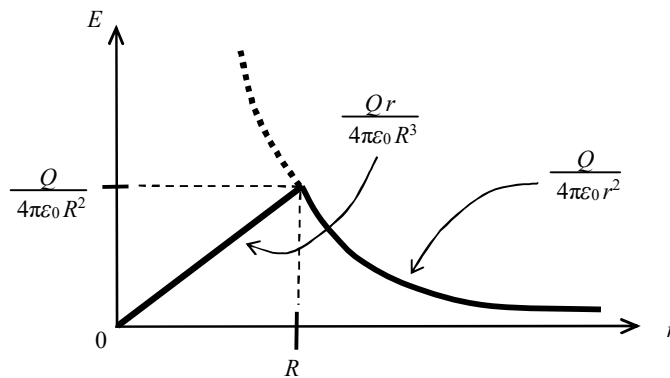
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2-3-12)$$

「 $r < R$ 」で

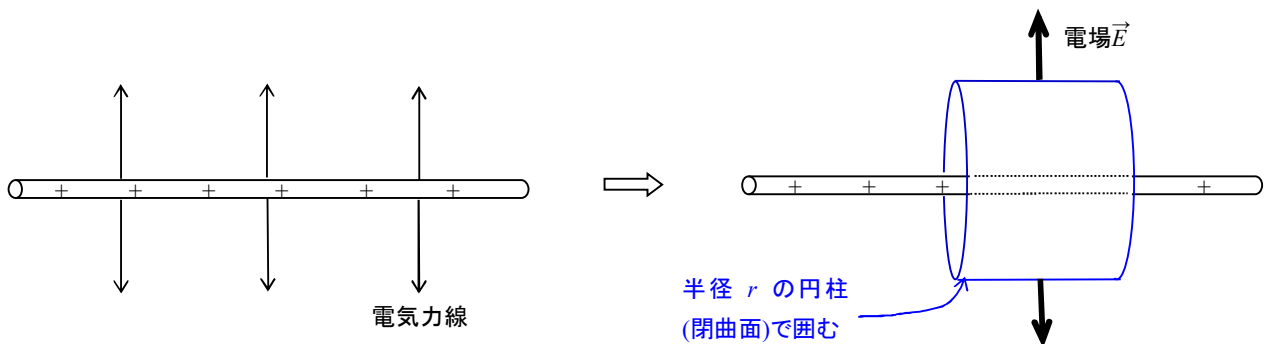
半径 r の球面を閉曲面とすると, 閉曲面内部の電荷を Q' とすると, 電荷 Q と Q' の比は体積比なので, 「 $Q : Q' = 4\pi R^3/3 : 4\pi r^3/3$ 」を満たす. したがって, 電荷 Q' は「 $Q' = Q r^3/R^3$ 」となるので, この領域での電場の大きさ E は下の式で表すことができる.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad (2-3-13)$$

(2-3-12)式と(2-3-13)式より, 横軸を球の中心からの距離 r , 縦軸を電場の大きさ E をとったグラフを下に示す.



問題 2-4. 直線状に, 電荷の線密度 ρ で分布した電荷がある. この直線から距離 r における電場の大きさ E をガウスの法則を用いて求めよ.



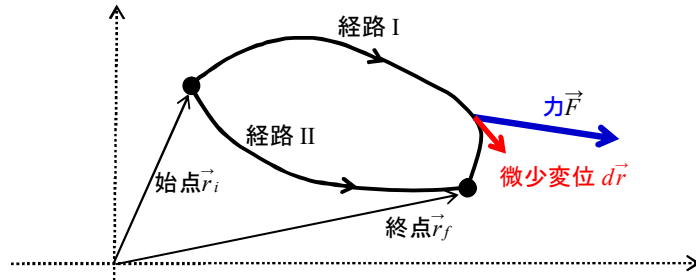
答 $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r}$

2-4. 電位と位置エネルギー

・仕事とエネルギー

力 \vec{F} で物体を始めの位置 \vec{r}_i から終わりの位置 \vec{r}_f まで動かしたとき、この力が物体にした仕事 W は下の式で定義される。

$$W := \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2-4-1)$$



ここで、2次元空間では、力 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ と微少変位 $d\vec{r} = (dx, dy)$ の内積 $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ は成分を用いて、下の式¹¹で表すことができる。

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy \quad (2-4-2)$$

(2-4-1)式を用いて仕事 W を計算する際、途中の経路によらず、仕事 W が始めの位置 \vec{r}_i と終わりの位置 \vec{r}_f が与えられると、その値が一意に決まる場合、その力を「**保存力**」と呼び、位置 \vec{r} によって一意に決まる位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー¹²) $U(\vec{r})$ を与えることができる。

力 \vec{F} が保存力となる場合¹³、位置 \vec{r} における力 $\vec{F}(\vec{r})$ による位置エネルギー U は定義式より、下の式で表すことができる。位置エネルギー U は基準点から位置 \vec{r} まで動かしたとき、保存力 \vec{F} がした仕事に (-1) をかけたものに等しい。あるいは、逆に位置 \vec{r} から基準点まで動かしたときに保存力 \vec{F} がした仕事となる。

$$U(\vec{r}) := - \int_{(\text{基準点})}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (2-4-3)$$

上の式より、位置エネルギー U は位置 \vec{r} が決まれば一意に決まる関数である。また、「位置エネルギー $U = 0$ 」となる**位置エネルギーの基準点は任意の位置(場所)を選択することができる**。

・電位と静電気力による位置エネルギー

静電気力は保存力の1つなので、静電気力による位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)を定義できる。位置 \vec{r} における静電気力 $\vec{F}(\vec{r})$ による位置エネルギー U はその定義式より、(2-4-3)式で表すことができる。

ある空間に電場(電界) \vec{E} が存在し、その空間に電荷 q が置かれたとき、この電荷に働く静電気力 \vec{F} は、「 $\vec{F} = q\vec{E}$ 」の関係が成立するので、この関係式を(2-4-3)式に代入すると下の式が成立する。

$$U(\vec{r}) = -q \int_{(\text{基準点})}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

¹¹ 3次元空間では、力と微少変位の内積 $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ は、 $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ となる。

¹² ポテンシャルエネルギー(Potential energy)の「Potential」は「潜在性の」という意味で、物体がある位置をとることによって、潜在的にエネルギーを持つ。

¹³ 力が保存力の場合、位置エネルギーが計算でき、「位置エネルギー + 運動エネルギー = 一定」となる「力学的エネルギー保存則」が成立する。逆に、物体に働く力が保存力であった場合、「力学的エネルギー保存則」が成立する。

上の式で与えられた位置エネルギー U を2つの積, すなわち, 電荷 q と電位 φ の積で表す. 電位¹⁴ φ は電場 \vec{E} を用いて, (2-4-5)式で表すことができる.

$$U(\vec{r}) = q \varphi(\vec{r}) \quad (2-4-4)$$

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{(\text{基準点})}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (2-4-5)$$

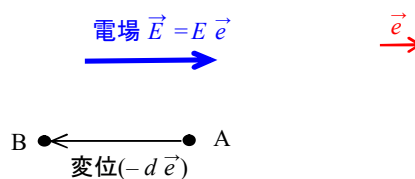
・電位差

位置 \vec{r}_A での電位を φ_A , 位置 \vec{r}_B での電位を φ_B とすると, 2つの位置の間での電位の差を, 「電位差」, または「電圧」と呼び, 記号 V_{BA} , または, φ_{BA} と表す. 電位差は位置の基準点には関係しない. さらに, 電位を表す記号として, 「 φ 」のほかに「 V 」を用いることもある.

$$V_{BA} = \varphi_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2-4-6)$$

・電場が一定のときの電位差

電場の大きさ E が一定で, 単位ベクトル \vec{e} の向きを向いているとすると, 電場は「 $\vec{E} = E \vec{e}$ 」と表される. 点Bと点Aの間の変位を $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ とし, 電場と変位が逆向きとなる場合の電位差 V_{BA} を計算してみよう. 点Aと点Bの間の距離を d とすると, 点Bと点Aの間の変位 $(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -d\vec{e}$ と表される. そのとき, (2-4-6)式から, 電位差 V_{BA} は, 電場の大きさ E と距離 d の積となる.



$$V_{BA} = - \vec{E} \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{r} = - \vec{E} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = E d \quad (2-4-7)$$

上の式より, 電場の始点側, すなわち, 電場の向きと逆側の位置で, より高い電位を持つ.

・電位の単位

電位, および電位差(電圧)の単位として, **V(ボルト)**¹⁵がある.

したがって, 電場の単位は「N/C」であったので, (2-4-9)式から, V(ボルト)は以下の関係が成り立つ.

$$1 \text{ V} = 1 \text{ (N/C)} \cdot \text{m} \quad \rightarrow \quad \text{電場(電界)の単位} = \text{N/C} = \text{V/m} \quad (2-4-8)$$

さらに, エネルギーの単位はJ(ジュール)なので, V(ボルト)を用いると下の関係が成り立つ.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ C} \cdot \text{V} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (2-4-9)$$

さらに, 1個の電子に電位1Vの電位を加えたとき, 電子が持つ位置エネルギーの大きさを1eV(エレクトロン・ボルト)と定義する.

¹⁴ 「電位」のことを「静電ポテンシャル」と呼ぶこともある.

¹⁵ 電位・電位差の単位「V(ボルト)」は, 18世紀末から19世紀のイタリアの物理学者 Alessandro Volta(アレッサンドロ・ボルタ)に由来する. ボルタの電池を作成した.

「位置エネルギー $U = qV$ 」から、1 eV は、電子の電荷の大きさが 1.602×10^{-19} C なので、次のように表すことができる。

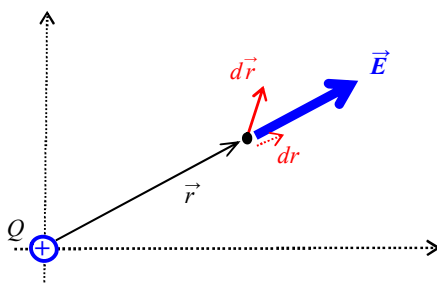
$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (2-4-10)$$

・点電荷が作る電位と位置エネルギー

原点に点電荷 Q が置かれたとき、位置 \vec{r} での電位 $\varphi(\vec{r})$ を(2-4-5)式を用いて計算しよう。ここでは、電位 $\varphi = 0$ となる基準の位置を無限遠方¹⁶とする($\vec{r} \rightarrow \infty$)。

位置 \vec{r} (原点からの距離 r) において、電場 \vec{E} は「 $\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ 」となる。ここで、単位ベクトル $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ で、位置 \vec{r} と平行な単位ベクトルとなる。微小変位 $d\vec{r}$ は、「 $d\vec{r} = d(r\vec{e}_r) = dr(\vec{e}_r) + r d(\vec{e}_r)$ 」と変形でき、右辺の第1項は単位ベクトル \vec{e}_r と平行なベクトル、第2項は単位ベクトル \vec{e}_r と直交するベクトルである。したがって、電場と微小変位の内積は下の式に変形できる。

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = k_e \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \cdot \{ dr(\vec{e}_r) + r d(\vec{e}_r) \} = k_e \frac{Q}{r^2} dr \quad (2-4-11)$$

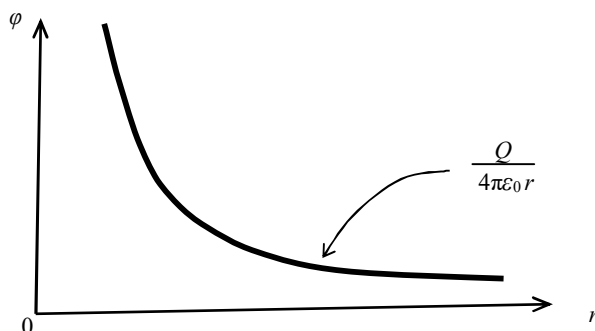


上の(2-4-6)式を用いて、電位 φ は原点からの距離 r に関して等方的なので、距離のみの関数となり、下の式が得られる。

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow \varphi(r) = - \int_{\infty}^r k_e \frac{Q}{r^2} dr = k_e \left[\frac{Q}{r} \right]_{\infty}^r = k_e \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2-4-12)$$

(2-4-12)式について、横軸を距離 r 、縦軸を電位 φ にとると、下のグラフとなる。このグラフでも、距離 r が「0」近傍で発散する。また、

「 $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0$ 」となり、無限遠方で電位が0となり、無限遠方を電位の基準にとったことと矛盾がない。



さらに、位置 \vec{r} にある点電荷 q が持つ位置エネルギー $U(\vec{r})$ は(2-4-4)式に代入すると、下の式が得られる。この式は、原点に点電荷 Q が固定されていて、点電荷 Q が作る電場 \vec{E} の中を、位置 \vec{r} にあった点電荷 q を位置 \vec{r} から無限遠方に動かしたときに静電気力 \vec{F} (=

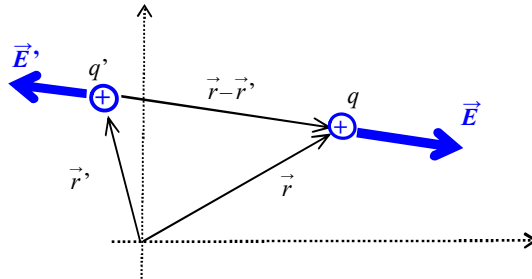
¹⁶ 位置の基準を無限遠方にとると、(2-4-7)式から、無限遠方では、電位が「0」とすると都合がよい。

$q \vec{E}$)がした仕事に相当する。

$$U(\vec{r}) = q \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} \quad (2-4-13)$$

・2つの点電荷による位置エネルギー(省略してよい)

次に、位置 \vec{r} に点電荷 q を、位置 \vec{r}' に点電荷 q' が置かれたとき、2つの点電荷間の静電気力による位置エネルギー $U(\vec{r}, \vec{r}')$ を求めてみよう。元の位置 \vec{r} と位置 \vec{r}' にあった2つの点電荷を位置の基準点に動かしたときに静電気力がした仕事を計算することで、位置エネルギー $U(\vec{r}, \vec{r}')$ を求めることができる。ここでも、位置エネルギーの基準は無限遠方(2つの点電荷の間の距離も無限遠方)とする。



計算方法は2つある。1つ目は、点電荷 q' を始めに固定し、点電荷 q を位置 \vec{r} から無限遠方に移動させ、次に、点電荷 q' を位置 \vec{r}' から(点電荷 q と異なる)無限遠方に移動させた仕事 W_1 を求める。計算は(2-4-12)式を導出したのと同じように実行する。

$$W_1 = k_e q \left\{ \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} + k_e q' \left\{ \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \lim_{\vec{r}' \rightarrow \infty} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} = k_e \frac{q q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

2つ目は、点電荷 q を始めに固定し、点電荷 q' を位置 \vec{r}' から無限遠方に移動させ、次に、点電荷 q を位置 \vec{r} から(点電荷 q' と異なる)無限遠方に移動させた仕事 W_2 を求める。静電気力は保存力なので、経路(方法)が違って同じ結果となる。

$$W_2 = k_e q' \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} + k_e q \left\{ \lim_{\vec{r}' \rightarrow \infty} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} = k_e \frac{q q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

したがって、2つの点電荷間の静電気力による位置エネルギー $U(\vec{r}, \vec{r}')$ は上の2つの式で表すことができる。これは、クーロン力が2物体間の相互作用による力なので、2物体の電荷と位置の関数となる。

$$U(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2-4-13)$$

・3つの点電荷による位置エネルギー(省略してよい)

位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ に点電荷 q_1, q_2, q_3 が配置されたとき、静電気力による位置エネルギー $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ を求めてみよう。この場合も2物体間の相互作用が働いているので、下の式のように、可能な組み合わせの和となる。

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \right\} \quad (2-4-14)$$

・複数の点電荷がある場合の電位(省略してよい)

複数の点電荷 q_1, q_2, \dots, q_N が位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ にあるとしよう。これらの点電荷で電場 $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$ ができる。位置 \vec{r} での点電荷 q_i による電場 \vec{E}_i は「 $\vec{E}_i = (q_i/4\pi\epsilon_0) (\vec{r} - \vec{r}_i)/|\vec{r} - \vec{r}_i|^3$ 」と表されるので、電場 \vec{E}_i によってできる電位を ϕ_i とすると、合成電場 \vec{E} は、重ね合わせの法則より、「 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_i \vec{E}_i$ 」と表されるので、合成電位 $\phi(\vec{r})$ も、下の式のように、電場 \vec{E}_i によってできる電位 ϕ_i の重ね合わせとして、表すことができる。

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (2-4-15)$$

・複数の点電荷がある場合の位置エネルギー(省略してよい)

複数の点電荷 q_1, q_2, \dots, q_N が位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ にあるとしよう。点電荷がこのように配置されている場合は、(2-4-14)式で表されたように 2 物体間の相互作用の重ね合わせで、系全体の位置エネルギー $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ を表す。2 体間の組み合わせで、重複しないようにする。

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2-4-16)$$

右辺の最後の式は、 i 番目と j 番目が一致しないように、1 番目から N 番目の総和を行う。2 物体の対が 2 回あるので、始めに $(1/2)$ をかけて、調整している。例えば点電荷の個数 $N=3$ のときは、(2-4-14)式となる。さらに、電荷 q_i が感じる電位 $\phi_i(\vec{r}_i)$ は、

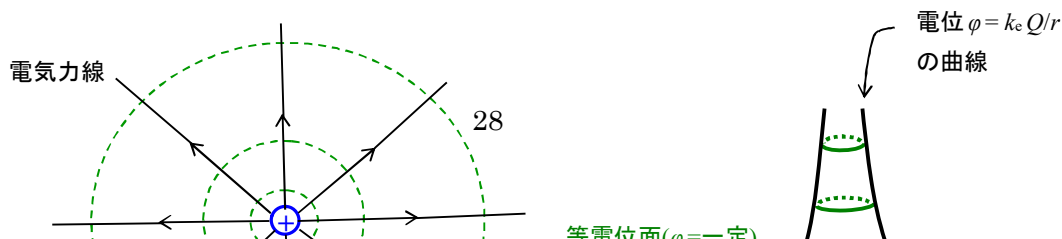
$$\phi_i(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

であるので、(2-4-18)式は電位 $\phi_i(\vec{r}_i)$ を用いて、下の式で表すこともできる。

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(\vec{r}_i) \quad (2-4-17)$$

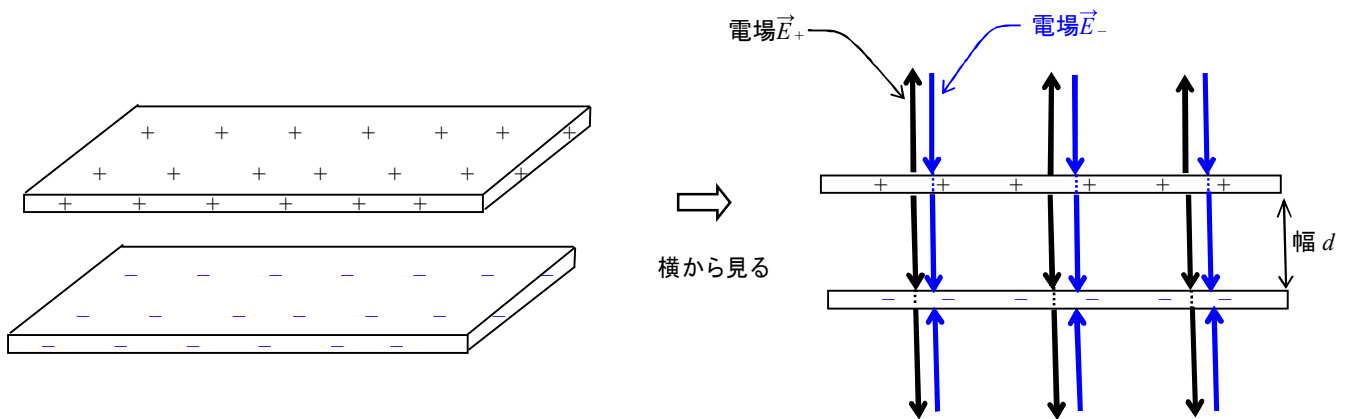
・等電位面

空間で電位が等しい地点を結んだ曲面を、等電位面と呼ぶ。等電位面は電気力線と直交する。下の左の図は、中心に正の点電荷を置き、その周りの電気力線と等電位面について図示した。この場合、中心部になるほど、電位の値が高くなり、周辺部ではその値が低くなる。等電位面は、2 次元空間では境界線、3 次元空間では境界面となる。電場(電界)の向きは電気力線と同じ向きで、等電位面と垂直に電位の高いところから低いところに向かう。下の右の図では、中心に正の点電荷が置かれたときの電位の曲線を図示した。電位が高い場所から低い場所に向かって電気力線が向かう(電場も同じ向き)。等電位面は電位が同じ値となる曲面(2 次元では曲線)を形成する。



・2枚の平板間の電場と電位差

3章において、「コンデンサ」という電気機器(デバイス)について、扱うが、そのための準備として、正と負に帯電した2枚の平板でできる電場と平板間の電位差について考えてみよう。このとき、電荷の面密度の大きさ σ は同じとする。また、平板は大きく、(電気力線が曲がる)端の効果は無視できるものとする。正に帯電した平板が作る電場を \vec{E}_+ 、**負に帯電した平板**が作る電場を \vec{E}_- とすると、下の図のように電場ができ、合成電場 $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ と2つの電場の重ね合わせで求めることができる。



(2-3-11)式より、正と負に帯電した平板が作る電場の大きさは等しく、「 $E_+ = E_- = \sigma/(2\epsilon_0)$ 」となる。2つの平板にはさまれた領域では、2つの電場 \vec{E}_+ と \vec{E}_- は同じ向きなので強め合って、合成電場の大きさ $E = E_+ + E_- = \sigma/\epsilon_0$ となり、その外側では、2つの電場は逆向きなので、打ち消され、合成電場の大きさ $E = 0$ となる。

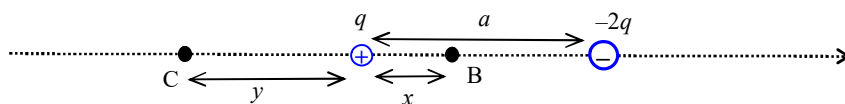
$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \text{一定} & \text{(2つの平板にはさまれた領域)} \\ 0 & \text{(2つの平板の外側の領域)} \end{cases} \quad (2-4-18)$$

また、合成電場が一定で、平板間の距離が d なので、+側と-側の平板間の電位差(電圧) V は下の式で表される(+側の平板の方が-側の平板に比べ、電位が高い)。

$$V = E d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (2-4-19)$$

問題 2-5 距離 a だけ離れた地点に点電荷 q ($q > 0$)と $-2q$ が置かれている。電位の基準を無限遠方として、次の問に答えよ。図の

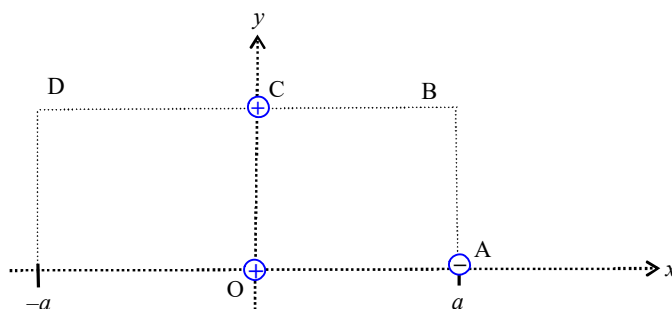
ように、右向きを正とする。



- 1) 点電荷 q から距離 x だけ離れた地点 B での電位 φ を表せ。
- 2) 2つの点電荷の間で、電位が「0」となる地点での距離 x を求めよ。
- 3) 点電荷 q から距離 y だけ離れた地点 C での電位 φ_C を表せ。

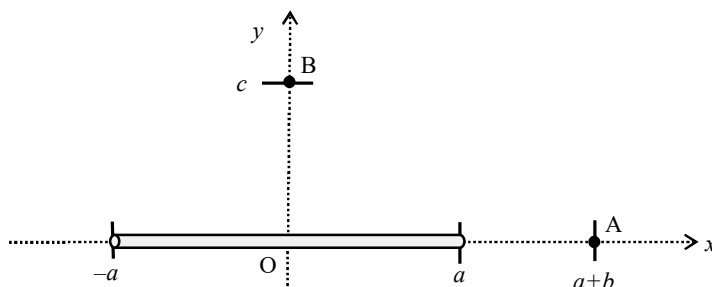
答 1) $\varphi = k_e \left(\frac{q}{x} + \frac{-2q}{a-x} \right)$ 2) $x = a/3$ 3) $\varphi_C = k_e \left(\frac{q}{y} + \frac{-2q}{a+y} \right)$

問題 2-6 辺の長さ a の正方形 OABC がある。原点 O には点電荷 $2\sqrt{2}q$ ($q > 0$) が、座標 $(a, 0)$ の点 A には点電荷 $-q$ が、座標 $(0, a)$ の点 C には点電荷 $2q$ が置かれている。座標 (a, a) の点 B での電位 φ_B と座標 $(-a, a)$ の点 D での電位 φ_D を求めよ。ただし、電位の基準は無限遠方とする。



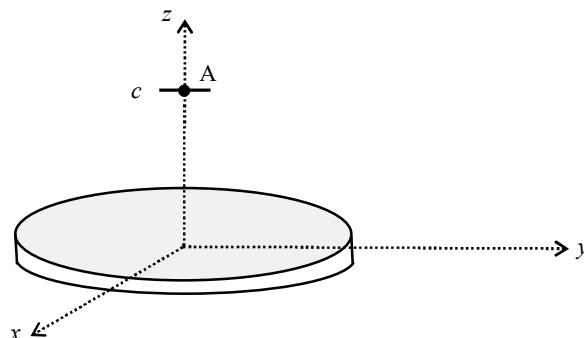
答 $\varphi_B = k_e \frac{3q}{a}$, $\varphi_D = k_e \left(\frac{4q}{a} - \frac{q}{\sqrt{5}a} \right)$

問題 2-7 長さ $2a$ の棒に電荷 q が一様に分布している。この棒を図のように x 軸と平行に置いたとき、点 A での電位 φ_A と点 B での電位 φ_B を求めよ。ただし、電位の基準は無限遠方とする。



答 $\varphi_A = k_e \frac{q}{2a} \ln \left(\frac{2a+b}{b} \right)$, $\varphi_B = k_e \frac{q}{2a} \ln \left(\frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{\sqrt{a^2+c^2}-a} \right)$

問題 2-8 xy 平面にある半径 R の薄い円板に電荷 q が一様に分布している。図のような z 軸上の点 A における電位 φ を求めよ。ただし、電位の基準は無限遠方とする。(重積分に慣れていない学生は省略してよい)



答 $\varphi = k_e 2\pi \frac{q}{\pi R^2} (\sqrt{R^2+c^2} - c)$

問題 2-9 半径 R の球がある。球の中心は原点にある。次の場合に対し、電位 φ を原点からの距離 r の関数として求めよ。ただ

し、電位の基準は無限遠方とする。

- 1) 球全体に一樣に、電荷が分布して、球全体の電荷が Q となる場合
- 2) 球の表面だけに、電荷が分布して、球全体の電荷が Q となる場合

$$\text{答 } 1) \quad r > R \text{ のとき } \varphi = k_e \frac{Q}{r} \quad 0 < r \leq R \text{ のとき } \varphi = k_e \frac{Q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$2) \quad r > R \text{ のとき } \varphi = k_e \frac{Q}{r} \quad 0 < r \leq R \text{ のとき } \varphi = k_e \frac{Q}{R}$$

2-5. 微分を用いた電位とガウスの法則(高専3年以上を対象; 微分が苦手な学生は省略してよい)

・電位から電場(電界)を導出

電場(電界) \vec{E} から電位 φ を求めるには、(2-4-5)式を用いた。(2-4-5)式で両辺の微分をとると、下の式を得ることができる(ここでは、3次元空間を扱うこととする)。

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (2-5-1)$$

x 成分, y 成分, z 成分について、電位 φ に対し、偏微分をとると電場の各々の成分は下の式を用いて表すことができる。

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2-5-2)$$

上の式について、下の式のようにベクトルを用いて表すことができる($i=1$ は x 成分, $i=2$ は y 成分, $i=3$ は z 成分を指す)。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_x, E_y, E_z) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = \sum_{i=1}^3 E_i \vec{e}_i \\ &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi \end{aligned}$$

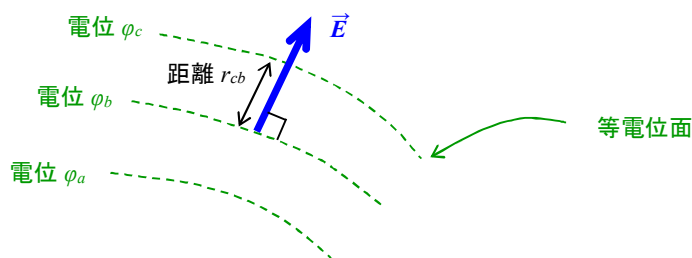
$$\vec{E} = -\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = -\vec{\nabla} \varphi = -\text{grad } \varphi \quad (2-5-3)$$

$\vec{\nabla}$ は「ナブラ」と呼び、下の式で示すように微分を含んだ微分演算子である。また、**grad** は「**グラデーディエント**(gradient); **勾配**」と呼ばれる。(2-5-3)式のように電場は電位(静電ポテンシャル) φ から導くことができる。

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2-5-4)$$

「電位 $\varphi = \text{一定}$ 」となる場合は、(2-5-3)式より「電場 $\vec{E} = 0$ 」となる。電場の向きは、電位が一定となる曲面(等電位面)と垂直方向に、電位の高い地点から低い地点に向かう。下の図のように、電位 φ が「 $\varphi_a > \varphi_b > \varphi_c$ 」の大小関係があるとき、電位のより低い向きに電場が向く。電位 φ_c と φ_b の等電位面となる曲面間の距離を r_{cb} 、その電位差 $\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_c$ とすると、電場の大きさ E は、(2-5-3)式から、下の式で近似される。

$$E \sim \frac{\partial \phi}{\partial r} \sim -\frac{\phi_c - \phi_b}{r_{cb}} = \frac{\Delta \phi}{r_{cb}} \quad (2-5-5)$$



例題 2-10 点電荷 Q が原点にあると、原点からの距離 r の関数として、電位 ϕ は、「 $\phi(r) = k_e Q/r$ 」と表すことができる。この関数から、電場 \vec{E} を求めよ。

答；電場の x 成分は、下の式のようにして求めることができる。（三平方の定理より、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ が成り立ち、両辺で微分を

とると、「 $2r dr = 2x dx + 2y dy + 2z dz$ 」となる。この式より、 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ 、 $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ 、 $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ がなりたつ）(2-5-2)式より、

電場の x 成分 E_x は下の式のように計算できる。

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -k_e Q \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} = -k_e Q \frac{-1}{r^2} \frac{x}{r} = k_e Q \frac{x}{r^3}$$

y 成分、 z 成分も同様に計算できる。まとめると、下の式のようになり、クーロンの法則で導出した電場と同じ結果となる。

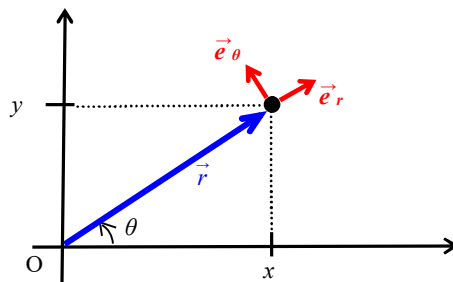
$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = \frac{k_e Q}{r^3} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = \frac{k_e Q}{r^3} \vec{r} = \frac{k_e Q}{r^3} (r \vec{e}_r) = \frac{k_e Q}{r^2} \vec{e}_r$$

・ナブラの極座標表示

ナブラ $\vec{\nabla}$ は微分演算子である。直交座標系(デカルト座標系)に対するナブラ $\vec{\nabla}$ は、(2-5-4)式に示した。ここでは、2次元と3次元の極座標系と3次元の円柱座標系に対するナブラを導出する。

① 2次元平面における極座標系

(2-1-2)式と(2-1-3)式で既に表示したように、位置 \vec{r} を原点からの距離 r と x 軸からの角度 θ を用いて表すと(2-1-3)式で表すことができる。再度、位置 \vec{r} について、距離 r と角度 θ を用いて表す。同様に、(2-1-3)式で既に表した単位ベクトル \vec{e} について、改めて、単位ベクトル \vec{e}_r として表す。次に、単位ベクトル \vec{e}_r と直交する単位ベクトル \vec{e}_θ を(2-5-9)式のように導入する。2つの単位ベクトルの内積「 $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$ 」となるので、直交していることがわかる。



$$\vec{r} = r (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \quad (2-5-6)$$

$$\vec{e}_r = \vec{r}/r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (2-5-8)$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (2-5-9)$$

上の(2-5-8)式と(2-5-9)式について、行列を用いて表すと(2-5-10)式で表され、その逆行列を計算することで、単位ベクトル \vec{e}_x と \vec{e}_y は単位ベクトル \vec{e}_r と \vec{e}_θ を用いて表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} \quad (2-5-10)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} \quad (2-5-11)$$

一方、微分要素 $\frac{\partial}{\partial r}$ と $\frac{\partial}{\partial \theta}$ についても、下の式のように行列を用いて書き表し、さらに、逆行列を用いて、微分要素 $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ について表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-5-12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{-\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (2-5-13)$$

2次元のナブラ $\vec{\nabla}$ は(2-5-11)式と(2-5-13)式を用いて、極座標系において、下の式で表すことができる。

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2-5-14)$$

さらに、任意のベクトル \vec{a} についての極座標表示を考えよう。下の式のように、直行座標系と極座標系で表現する。

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta \quad (2-5-15)$$

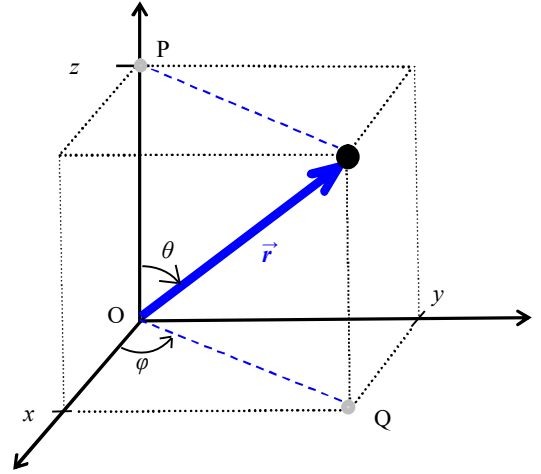
ここで、極座標系の成分 a_r と a_θ は下の式で表される。

$$a_r = \vec{a} \cdot \vec{e}_r = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \quad a_\theta = \vec{a} \cdot \vec{e}_\theta = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta \quad (2-5-16)$$

② 3次元空間における極座標系

3次元空間において、極座標系は多くの場合、下の図のように、位置 \vec{r} について、原点からの距離を r 、 z 軸からの角度を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)、位置 \vec{r} について xy 平面上に射影した点について、 x 軸からの角度を φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$)ととる。これで、3次元空間全ての位置を網羅する。

図より, 位置の z 成分 = $OP = r \cos \theta$ で, 位置 \vec{r} を xy 平面に投影した長さ $OQ = r \sin \theta$ となるので, 位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ は下の式で表すことができる.



$$\vec{r} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$= r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z \quad (2-5-17)$$

2次元の場合と同様に, 位置 \vec{r} と同じ向きを向く単位ベクトルを \vec{e}_r とし, それに直交するベクトルとして 2 つの単位ベクトル \vec{e}_θ と \vec{e}_φ について, 下の式で表される.

$$\vec{e}_r = \vec{r}/r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (2-5-18)$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \quad (2-5-19)$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad (2-5-20)$$

上の 3 つの単位ベクトルは, 「 $|\vec{e}_r|^2 = |\vec{e}_\theta|^2 = |\vec{e}_\varphi|^2 = 1$, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_r = 0$ 」という直交条件を満たしている. また, 上の 3 つの単位ベクトルについて, 行列を用いて表し, さらに逆行列を用いると, 下の式で表すことができる.

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (2-5-21)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix} \quad (2-5-22)$$

(2-5-12)式, (2-5-13)式と同様に, 微分要素 $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ についても, 下の式のように行列を用いて書き表し, さらに, 逆行列を用

いて, 微分要素 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ について書き表すことができる.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2-5-23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi & -\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (2-5-24)
\end{aligned}$$

直交座標系(デカルト座標系)での 3 次元のナブラ $\vec{\nabla}$ はである(2-5-4)式に, (2-5-22)式と(2-5-24)式を代入すると, 下の極座標系でのナブラ $\vec{\nabla}$ を表すことができる.

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2-5-25)$$

2 次元のベクトルと同様に, 任意の 3 次元のベクトル \vec{a} についての極座標表示を考えよう. 下の式のように, 直行座標系と極座標系で表現する.

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (2-5-26)$$

ここで, \vec{a} の極座標系での成分 a_r , a_θ , a_φ は下の式で表される.

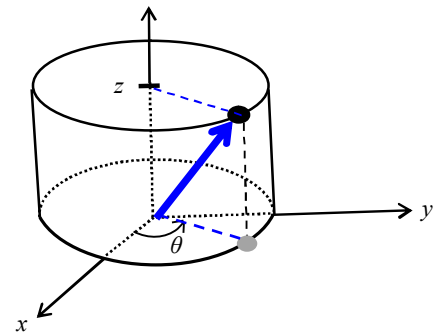
$$a_r = \vec{a} \cdot \vec{e}_r = a_x \sin \theta \cos \varphi + a_y \sin \theta \sin \varphi + a_z \cos \theta, \quad (2-5-27a)$$

$$a_\theta = \vec{a} \cdot \vec{e}_\theta = a_x \cos \theta \cos \varphi + a_y \cos \theta \sin \varphi - a_z \sin \theta, \quad (2-5-27b)$$

$$a_\varphi = \vec{a} \cdot \vec{e}_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \quad (2-5-27c)$$

③ 3 次元空間における円柱座標系

次に, 3 次元空間だが, xy 平面は(2次元)の極座標で z 方向は直交座標系におけるナブラを考えよう. xy 平面上で原点からの距離を r , x 軸からの角度を θ とする(z 方向はそのまま)と, 位置 \vec{r} は(2-5-28)式で表すことができる. また, ナブラ $\vec{\nabla}$ も xy 平面では 2 次元の極座標表示で, z 方向は直交座標系と同じなので, (2-5-29)式で表すことができる.



$$\vec{r} = (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (2-5-28)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2-5-29)$$

・ガウスの法則の微分形

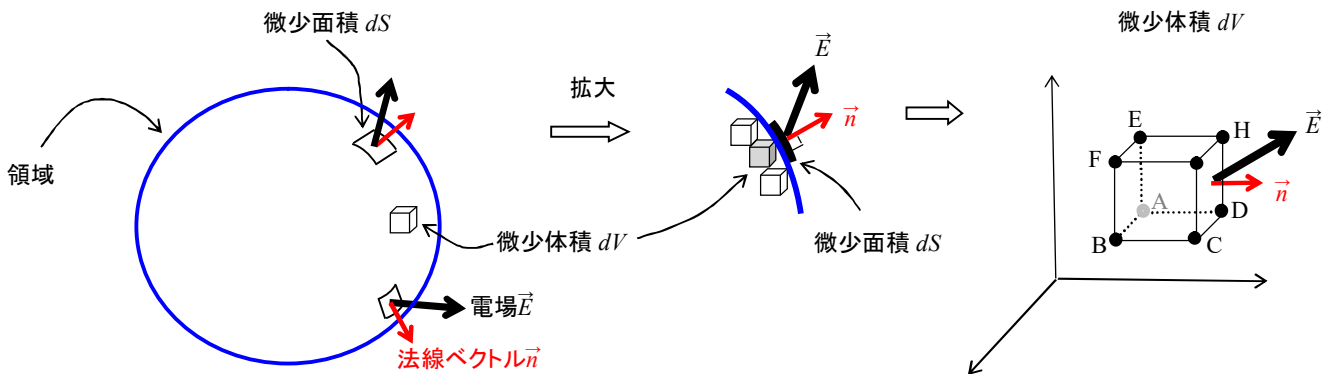
積分を用いた**ガウスの法則**は(2-3-4)式で示した。ここでは、**ガウスの法則について微分形**を用いて表現しよう。

(2-3-4)式の右辺について、考えてみよう。一般には、電荷分布は位置 \vec{r} に依存する。領域内にある全電気量 q は体積電荷密度 ρ [単位は C/m³] について、領域内での体積積分を実行して、求めることができる。

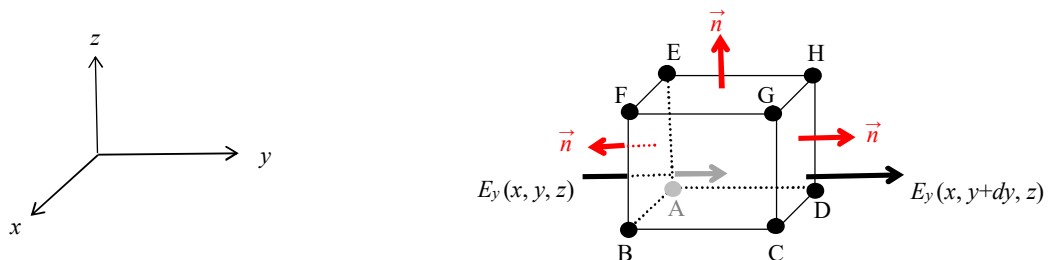
$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{領域内}} \rho(\vec{r}) dV \quad (2-5-30)$$

ここで、1辺の長さが dx, dy, dz からなる微少な立方体からなる微少体積要素 dV は、 $dV = dx dy dz$ である。領域内の体積積分は、微少体積要素について、領域内で積分して求めることができる。そこで、領域内の微少体積要素について考えよう。

下の左の図には、対象とする領域とその表面での微少面積要素 dS を示す。中央の図は、領域の表面を拡大した。下の右の図は微少体積要素である微少立方体を示した(表面近傍では、微少体積要素を並べてもギザギザになるが、そのギザギザの効果は積分すると相殺され、無視できる → 積分の考え方)。



上の右の図を拡大したものを下に示す。面積積分について、微少立方体の表面で(2-3-4)式の右辺の面積積分を扱う。点A～点Hの座標はそれぞれ、A; (x, y, z) , B; $(x + dx, y, z)$, C; $(x + dx, y + dy, z)$, D; $(x, y + dy, z)$, E; $(x, y, z + dz)$, F; $(x + dx, y, z + dz)$, G; $(x + dx, y + dy, z + dz)$, H; $(x, y + dy, z + dz)$ である。



xy 面, yz 面, zx 面で、微少立方体の表面における面積積分を計算し、その総和をとる。上の図では3つの面のうち、 zx 面(zx 面の法線ベクトルは y 方向を向く)に関する面積積分を計算するために上に図で示した。面 EFBA に入る電場の向き(y 方向)は、面 EFBA

の法線ベクトルと逆向きとなり、内積をとると、負(-)となる。一方、面 HGCD から出る電場の向き(y 方向)は、面 HGCD の法線ベクトルと同じ向きとなる。したがって、(2-3-4)式の左辺の被積分関数「 $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ 」は微少立方体では下の式で表すことができる。

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_y \cdot \vec{n} dS = (E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)) dx dz$$

上の式の右辺の 1 項目について、テーラー展開し、1 次の微少量までとると、下の式が得られる。

$$(E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)) dx dz \sim (E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} dy - E_y(x, y, z)) dx dz = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz$$

さらに、x 方向と z 方向に関する面積積分では、下の式で近似される

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} \sim \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz \quad (x \text{ 方向})$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} \sim \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz \quad (z \text{ 方向})$$

3 つの微少量の積 $dx dy dz$ は微少体積要素 dV である。また、対象とする領域を微少立方体の集合体とみなすと、面積積分は体積積分になり、(2-3-4)式の左辺は下の式で表すことができる。

$$\int_{\text{領域の表面積}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{領域内}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV \quad (2-5-31)$$

上の式は面積積分を体積積分に変換する式で、この関係式を「**ガウスの定理**」と呼ぶ。上の式と(2-5-28)式を等号で結び、被積分関数の部分の式を「**微分を用いたガウスの法則(ガウスの法則の微分形)**」と呼ぶ。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-5-32)$$

上の式の左辺は微分演算子 $\vec{\nabla}$ を用いて表現することができる。直交座標系の単位ベクトルの直交条件「 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ 」¹⁷を用いて、ナブラと電場の内積をとる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=1}^3 E_j \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div } \vec{E} \quad (2-5-33)$$

上の式の右辺の最後の **div** は「**ダイバージェンス(divergence); 発散**」と呼ばれる。領域から外に出るベクトルの場合は「正」となり、領域内に入るベクトルの場合は「負」となる。微分演算子を用いた「ガウスの法則の微分形」は下の式で表される。この式は 4 つある電磁気学における最重要な式の 1 つである。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-5-34)$$

¹⁷ ここで、「 δ_{ij} 」はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれ、 $i=j$ (i または j は、1~3 (x~z)) のときは「1」で、 $i \neq j$ のときは「0」となる。

・極座標系における発散(divergence)

極座標系における $\vec{\nabla}$ は(2-5-25)式で示した。一方、ベクトルの極座標での展開は(2-5-26)式で示した。2つの式から、極座標系における発散(divergence)を表現しよう。極座標系の3つの単位ベクトル $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ はともに角度 θ と φ の関数となっていることに注意して計算する。

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (E_r \vec{e}_r) = \frac{\partial E_r}{\partial r} \vec{e}_r + E_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial E_r}{\partial r} \vec{e}_r + E_r \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + E_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - E_\theta \vec{e}_r, \\ &\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \vec{e}_\varphi) = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi + E_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (E_r \vec{e}_r) = \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + E_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + E_r \sin \theta \vec{e}_\varphi, \\ &\frac{\partial}{\partial \varphi} (E_\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + E_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + E_\theta \cos \theta \vec{e}_\varphi, \\ &\frac{\partial}{\partial \varphi} (E_\varphi \vec{e}_\varphi) = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + E_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - E_\varphi (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(E_r + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} (E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}) \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r} E_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} E_\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \quad (2-5-35)\end{aligned}$$

・円柱座標系における発散(divergence)

円柱座標系でのナブラ $\vec{\nabla}$ は(2-5-29)式で示した。円柱座標系における発散(divergence)を表す。

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_z \vec{e}_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (E_r \vec{e}_r) = \frac{\partial E_r}{\partial r} \vec{e}_r + E_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial E_r}{\partial r} \vec{e}_r + E_r \vec{e}_\theta, \\ &\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + E_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - E_\theta \vec{e}_r, \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(E_r + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (2-5-36)\end{aligned}$$

・ポアソン方程式

ガウスの法則の微分形を(2-5-34)式で示した。静電場 \vec{E} について、電位 φ を用いると、「 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ 」と表される。この関係式を(2-5-34)式に代入すると、直交条件「 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ 」から下の式のように計算できる。

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi) = - \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} \varphi \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}\quad (2-5-37)$$

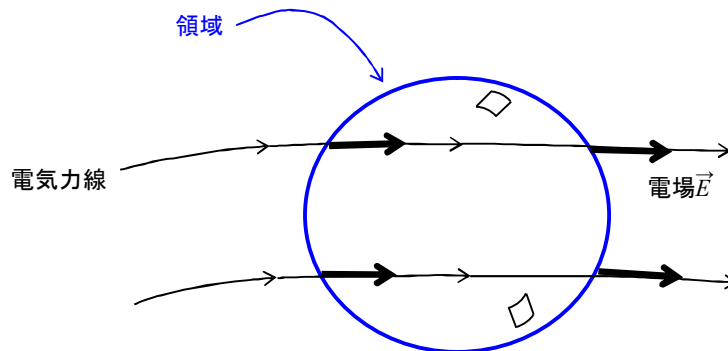
ここで、「 $\vec{\nabla}^2 := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} := \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 」はラプラシアンと呼ばれる微分演算子である。このラプラシアンを用いて上の式を表すと、下の式で表すことができる。この式はポアソン方程式¹⁸と呼ばれる。

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{ポアソン方程式}) \quad (2-5-38)$$

特に、電荷がない場合は、電荷密度 $\rho = 0$ となる。このときの方程式はラプラス方程式¹⁹と呼ばれる。

$$\Delta \varphi = 0 \quad (\text{ラプラス方程式}) \quad (2-5-39)$$

ラプラス方程式が成立するのは、対象としている領域内に電荷がなく、電場が領域内に入り、そして出て行くような場合である。この領域内では、電気力線が出現したり、消滅したりすることはない。



2次元と3次元の極座標系と3次元の円柱座標系において、位置 \vec{r} における関数 $f=f(\vec{r})$ に対するラプラシアンを導出する。

① 2次元の極座標系

2次元の極座標系のナブラは(2-5-14)式で示した。2次元の極座標系でのラプラシアンは下のように計算できる。ここでも、単位ベクトル \vec{e}_r と \vec{e}_θ が角度 θ に依存することに注意する。

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

¹⁸ ポアソン(S. D. Poisson) は19世紀のフランスの数学者、物理学者で、力学、熱力学、確率統計の分野に業績を残した。

¹⁹ ラプラス(P.-S. Laplace)は18世紀-19世紀前半のフランスの数学者、物理学者、天文学者で、「ラプラシアン」や「ラプラス変換」の由来にもなっている。

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r}) &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \vec{e}_\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}) &= \frac{1}{r} (\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}) = \frac{1}{r} (-\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}) \end{aligned} \right. \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\
&= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} f \tag{2-5-40}
\end{aligned}$$

② 3次元空間における極座標系

3次元の極座標系のナブラは(2-5-25)式で示した。3次元の極座標系でのラプラシアンは下のように計算できる。ここでも、単位ベクトル \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ が角度 θ と φ に依存することに注意する。

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}) \cdot (\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) \\
& \left[\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r}) &= \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}) = \vec{e}_\theta (\frac{-1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}) = \vec{e}_\theta (\dots), \\ \frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) &= \vec{e}_\varphi (\dots) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r}) &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} = \vec{e}_\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}) &= \frac{1}{r} (\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}) = \frac{1}{r} (-\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) &= \frac{1}{r} (\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi (\frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta}) \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi}) \\ &= \frac{1}{r} (0 - \vec{e}_\varphi \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi}), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r}) &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} = \sin \theta \vec{e}_\varphi \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}) &= \frac{1}{r} (\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta}) = \frac{1}{r} (\cos \theta \vec{e}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta}), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) &= \frac{1}{r \sin \theta} (\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}) = \frac{1}{r \sin \theta} (-\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \right. \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} (\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 0) + \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} f \tag{2-5-41}
\end{aligned}$$

③ 3次元空間における円柱座標系

3次元の円柱座標系のナブラは(2-5-29)式で示した。そのラプラシアンは2次元の極座標系の結果を用いて下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\Delta f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}) \\&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\&= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} f\end{aligned}\quad (2-5-42)$$

・電場が持つ位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)

真空中に、点電荷が N 個ある場合について、その位置エネルギーについては、(2-4-16)式、または、(2-4-17)式で示した。これを、点電荷の代わりに、電荷密度 $\rho(\vec{r})$ で電荷が分布している空間が持っている電気力による位置エネルギー U を導出しよう。(2-4-17)式は点電荷が持つ位置エネルギーであったが、この式に対し、電荷密度 ρ を用いて表すと、体積積分の式で表すことができる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\vec{r}_i) \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \int_{\text{領域内}} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV \quad (2-5-43)$$

上の式で、電荷密度に対し、ガウスの法則の微分形を用いると、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{領域内}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi \, dx \, dy \, dz = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{領域内}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \phi \, dx \, dy \, dz$$

となり、さらに3つの成分に対し、部分積分を用いて変形すると、下の式で表すことができる。

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \int_{\text{領域の境界面}} (E_x \phi \, dy \, dz + E_y \phi \, dx \, dz + E_z \phi \, dx \, dy) - \int_{\text{領域内}} (E_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + E_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + E_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) \, dx \, dy \, dz \right\}$$

上の式の第1項は表面積分だが、境界を無限遠方にとると、「電位 $\phi = 0$ 」として考えて、その寄与は消える。第2項は、「電場 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ 、(x成分では、 $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$)」なので、下の式で、真空中の静電場 \vec{E} が持つ位置エネルギーを表す。

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E_x E_x + E_y E_y + E_z E_z) \, dx \, dy \, dz = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{E}) \, dx \, dy \, dz = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 \, dx \, dy \, dz \quad (2-5-44)$$