

付録 A

「力学」は物体の運動の性質やふるまいについて調べる分野である。この付録では、「物体の運動」を表現するために3つの方法について述べる¹。3番目の方法は「力学」を一般化(数学化)した「解析力学」に関係するので、初学者は省略してよい。

① 「運動方程式」を用いた方法

ニュートンは「3つの運動の法則」を提示した。特に、第2法則は、「運動の法則」と呼ばれ、物体の質量 m 、時刻 t の関数としての位置 $\vec{r}(t)$ 、それにこの物体に作用する力 \vec{F} の間の関係を示したもので、時刻 t に対する2階の微分方程式として「運動方程式」と呼ばれる。

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (\text{A-1})$$

上の2階の微分方程式を解いて、物体の運動を特徴づける速度と位置を決定するためには、2つの初期条件(あるいは、任意の時刻における2つの条件式)が必要となる。例えば、時刻 $t=0$ における速度 $\vec{v}(0)$ と位置 $\vec{r}(0)$ を与えて微分方程式を解くことで、時刻 t における速度 $\vec{v}(t)$ が、次に、位置 $\vec{r}(t)$ を決めることができる。2つの条件式を与えて、速度 $\vec{v}(t)$ と位置 $\vec{r}(t)$ を得ることができる。速度 $\vec{v}(t)$ と位置 $\vec{r}(t)$ の2つの量で運動の性質を表す。

物体が複数個ある場合は、第3法則となる「作用・反作用の法則」を用いて、2物体間でやり取りする(相互作用する)力の関係を用いて、他の物体から受ける力の合力を受ける。さらには、系の外からの力も合わせた合力を、(A-1)式の右辺の力 \vec{F} として扱う。

② 「保存則」を用いた方法

(A-1)式で与えられた「運動方程式」を解く方法とは別に、対象とする物理系において持っている「保存則」を用いて運動のふるまいを調べる方法がある。その物理系が持つ対称性によって、「力学的エネルギー保存則」、「運動量保存則」、「角運動量保存則」がある。

1) 力学的エネルギー保存則

質量 m の物体が速さ v で運動しているとする。運動している物体が持つ運動エネルギー K は、「 $K = m v^2/2$ 」と表され、物体が位置 \vec{r} に配置することで持つ位置エネルギー U は位置 \vec{r} の関数として、「 $U = U(\vec{r})$ 」と表される²。そして、運動エネルギー K と位置エネルギー U の合計を力学的エネルギー E と呼ぶ。力学的エネルギー保存則とは、「摩擦などによってエネルギーの損失がない限り、力学的エネルギー E が一定(時間変化しない)となる」ことを指す。

¹ 3つの方法の中で、2番目と3番目の方法については、ランダウ=リフシッツ理論物理学教程「力学」、東京図書(1974)に準拠した。この教科書は初学者にとっては難しいが、多くの方がおっしゃっているように、示唆に富んだ素晴らしい教科書である。この教科書は、「解析力学」と呼ばれる分野の教科書であり、「力学」を発展させた分野にあたる。

² この場合、速さ v と位置 \vec{r} は時刻 t の関数だが、運動エネルギーと位置エネルギーは直接、時刻 t の関数とならない。

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) = \text{一定} \quad (\text{A-2})$$

or

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (\text{A-3})$$

力学的エネルギー保存則によると、位置エネルギー U は位置 \vec{r} の関数であり、位置が変われば、位置エネルギーが変化し、それに伴って、運動エネルギー(速さ)も変化する。物体の運動の性質を解析するためには、(A-1)式で表した「**運動方程式**」を解き、物体の位置や速度を確定することが基本であるが、2階の微分方程式である(A-1)式を解くのが困難な場合もある。このような場合は、運動の向きを除いた「速さ」のみを扱う「**力学的エネルギー保存則**」を用いた方がやさしい場合がある。

例えば、曲面上を物体が移動するような運動では、物体の運動が曲面に束縛されるので、運動方程式では、曲面と直交する(**束縛力**としての)垂直抗力を加えなければならない。このような運動を解析するのは一般には難しい。一方、力学的エネルギー保存則を用いる場合は、仕事に寄与しない垂直抗力については考慮する必要がなく、曲面上の位置がわかると、その位置での速さをたやすく求めることができる。その一方、初期状態からのその状態に達するまでの**時刻**を求める際は、曲面に沿った線積分を行わなければならない、その線積分を実行するのは(一般には)難しい。

* 力学的エネルギー保存則と時間の一様性³ (省略してよい⁴)

力学的エネルギー保存則は「**時間の一様性**」と関係するが、ここでは、その関係性を示す(導出する)ことは行わない⁵。

「力学的エネルギー保存則」が成立している力学系を考えよう。例えば、ばねに結ばれた物体が単振動している運動、地球が太陽のまわりを回転している運動、振り子が往復する運動、ボールが曲面上を往復する運動などがそれに相当する。これらの系では、運動している経路上において、ある定められた場所を通過する時間間隔は一定となるような「**周期運動**」をしている。これらの運動では時間が一様に経過するために時間間隔が一定になっていると解釈する。そして、運動の周期から、一定時間間隔を測定できる「**時計**」を作ることができる。つまり、「力学的エネルギー保存則」が成立している系では、**時間の一様性**を利用して、「**時計**」を作成できるようになる。

ここでは、物体の質量、長さ、速度などはまだ決定されておらず、力学的エネルギーも数値的には測定できないが、ある物理量⁶が、この力学系で保存されている(一定である)と仮定して、この力学系での周期運動からまずは、「**時計**」を作成することができるとし、そのあと、他の法則を用いて、質量、長さなどを測定できるようにした。

複数の物体が関与する場合、 i 番目の物体の質量 m_i 、その速さ v_i 、位置 \vec{r}_i とすると、系全体の力学的エネルギー E_{tot} は下の式で

³ 一般には、「ネーター(Noether)の定理」と呼ばれる。ランダウ=リフシッツの教科書「力学」においても、その記述がある。

⁴ 以降に記す「時間の一様性」、「空間の一様性」、「空間の等方性」に関するコメントは筆者個人の見解である。

⁵ 例えば、ランダウ=リフシッツの「力学」を参照すること。

⁶ この物理量が、後で定義する物理量(質量、時間、長さなど)を用いると、「**力学的エネルギー**」と一致し、その量が測定できる。

表すことができる.

$$E_{\text{tot}} = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(\vec{r}_i) \right] + \sum_{\substack{i, j \\ (i > j)}} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (\text{A-4})$$

上の式で右辺の1項目は運動エネルギーの総和, 2項目は*i*番目の物体に作用する位置エネルギーの総和, 3項目は*j*番目の物体と*i*番目の物体の間に働く相互作用による位置エネルギーの総和である⁷.

2) 運動量保存則

質量*m*, 速度 \vec{v} で運動する物体の運動量 \vec{p} は下の式で与えられる.

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (\text{A-5})$$

運動量保存則とは, 「系の外側から力が作用していない場合, 系全体の運動量 \vec{p} は一定(時間変化しない)となる」ことを指す.

$$\vec{p} = \text{一定} \quad (\text{A-6})$$

or

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (\text{A-7})$$

* 運動量保存則と空間の一様性⁸ (省略してよい)

運動量保存則は「空間の一様性」と関係するが, ここでは, その関係性を示す(導出する)ことは行わない.

ある物体が運動しているとする. そして, この物体には力が作用しておらず, 「運動量保存則」が成立しているものとする. (普通)質量*m*は時間変化せずに一定であるので, 「速度 $\vec{v} = \text{一定}$ 」となり, 物体は等速直線運動を行う. この場合, 物体は直線上を一定の速さで通過しており, (力学的エネルギー保存則を用いて確定した)等時間間隔で区切ると, 直線上における等距離となる間隔を決定できる. これは, 「空間が直線的に一様な性質」を持つためである. つまり, 運動量保存則を用いると, 等距離を測定できる「ものさし」を作成できることとなる(さらに, 直線も定めることができる).

次に, 2体系を考えよう. 質量*m*₁で速度 \vec{v}_1 の物体1と質量*m*₂で速度 \vec{v}_2 の物体2が運動しているとする. 系全体の運動量の合計 \vec{P}_{tot} は下の式で表すことができる.

⁷ 重複して総和しないために, 「*i* 番目 > *j* 番目」の条件をつけて, 総和をとっている.

⁸ 一般には, 「ネーター(Noether)の定理」と呼ばれる.

$$\vec{P}_{\text{tot}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (\text{A-8})$$

系の外から力が作用していない場合は、運動量保存則が成立し、系全体の運動量の合計 \vec{P}_{tot} は一定となる。

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \text{一定} \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad (\text{A-9})$$

2つの物体間に相互作用が存在し、力をやりとりするような場合でも運動量保存則は成立する。例えば、2つの物体が衝突して、短い時間に力のやり取りを行うような場合を考えよう。「2-4. 運動方程式と様々な力」の節で示したように、運動量保存則を用いて、「**物体の質量**」を測定することができる。

複数の物体が関与する場合は系全体の運動量 \vec{P}_{tot} は下の式で与えられる。

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (\text{A-10})$$

「力学的エネルギー保存則」と同様に、「運動方程式」から解を見つけるよりも、「運動量保存則」を用いて、運動の性質を調べた方がたやすい場合がある。例えば、2つの物体が衝突する場合などは、「**運動量保存則**」を用いると運動の性質を調べることがより容易となる。

3) 角運動量保存則

原点Oからの物体の位置 \vec{r} とし、運動量 \vec{p} ($= m \vec{v}$)とすると、角運動量 \vec{L} は下の式で与えられる。

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad (\text{A-11})$$

角運動量保存則とは、「系の外側から力のモーメント(トルク)が作用していない場合、系全体の角運動量 \vec{L} は一定(時間変化しない)となる」ことを指す。

$$\vec{L} = \text{一定} \quad (\text{A-12})$$

or

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (\text{A-13})$$

* 角運動量保存則と空間の等方性 (省略してよい)

角運動量保存則は「空間の等方性」と関係するが、ここでは、その関係性を示す(導出する)ことは行わない。

ある物体が z 軸を回転軸として回転運動しているが、この物体には力のモーメントが作用しておらず、「角運動量保存則」が成立しているものとする。一様な回転運動では、一定の時間間隔で回転する(xy 平面上での)角度は等間隔となる。つまり、回転面に関しては、どの方向も等しく分配でき、1周する角度を 2π と定めると、それを4分割し、 $\pi/2$ 回転するごとに、直交する向きを定めることができる。例えば、 $+x$ 方向(x 軸)から角度 $\pi/2$ だけ回転させた向きを $+y$ 方向(y 軸)を定めて、 xy 平面上での等方性を確保できるようになる。運動量保存則では直線を定めたが、角運動量保存則では平面上での回転角を導入し、等分配することで、ある直線(x 軸)と直交する別な(直線となる) y 軸を定めることができる。さらに、回転軸が x 軸となるような回転面から、 z 方向を定め、3次元空間の自由度と対応する直交する3つの軸を定めることができる。

複数の物体が関与する場合は系全体の角運動量 \vec{L}_{tot} は下の式で与えられる。

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (\text{A-14})$$

回転に関係する運動においても、「運動方程式」から解を見つけるより、「角運動量保存則」を用いて、運動の性質を調べた方がたやすい場合がある。

③ 「最小作用の原理」を用いた方法

「力学」では「最小作用の原理」を用いて物体の運動を解析する方法がある。始めに、「最小作用の原理」(ここでは、前述したランダウの「力学」にしたがって、物理量を表す記号を用いる)について、簡単に紹介する。次に、最小作用の原理と似た方法として、光学における「フェルマーの原理」と量子力学における「ファインマンによる経路積分の方法」を紹介し、それらの間の関係性について私見を述べる。

1) 最小作用の原理 (解析力学の導入)

簡単のために1次元空間を運動する質点を考えよう。時刻 t における質点の位置 $q(t)$ 、その速度 $\dot{q}(t)$ ($= dq/dt$; ここでは、時間微分を位置 q の上にドットをつける)、加速度 $\ddot{q}(t)$ ($= d^2q/dt^2$; ここでは、2階の時間微分を位置 q の上に2つのドットをつける)と表す。質点の運動を決定する「運動方程式」は、2階の時間微分を含む微分方程式である。この微分方程式を解き、時刻 t での解を求めるために、2つの条件式が必要となる。その条件式は、下の式のように、3つのパターンがある(位置を与える条件式が1つ以上必要)。ここで、任意の時刻(例えば、初期時刻)を t_i 、さらに、別の時刻(例えば、終期時刻)を t_f とした。

$$\left\{ \begin{array}{ll} q(t_i) \rightarrow \text{与える}, & \dot{q}(t_i) \rightarrow \text{与える} \quad (\text{初期位置, 初期速度を与える. 終期 } t_F \text{ としても同じ}) \quad (\text{A-15}) \\ q(t_i) \rightarrow \text{与える}, & q(t_F) \rightarrow \text{与える} \quad (\text{初期位置と終期位置を与える}) \quad (\text{A-16}) \\ q(t_i) \rightarrow \text{与える}, & \dot{q}(t_F) \rightarrow \text{与える} \quad (\text{初期位置, 終期速度をあたえる, 逆でもよい}) \quad (\text{A-17}) \end{array} \right.$$

時刻 t における運動の状態は, 位置 $q(t)$ と速度 $\dot{q}(t)$ である. **これらは運動方程式を解いて与えられる**. 運動方程式を作成する方法として「**最小作用の原理**」という方法がある. この方法を下に述べる.

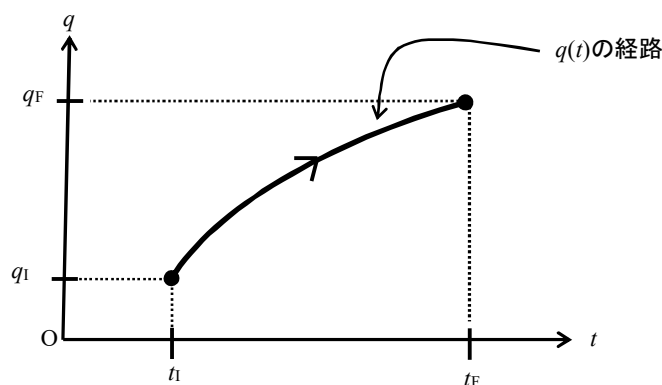
速度 $\dot{q}(t)$ の関数である運動エネルギー $K(\dot{q}(t))$ から, 位置 $q(t)$ の関数である位置エネルギー $U(q(t))$ を差し引いた関数を**ラグランジアン**(ラグランジュ関数) $L = L(q(t), \dot{q}(t))$ と定義する⁹. ラグランジアンでは位置 q と速度 \dot{q} を独立な力学変数として扱う.

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(\dot{q}(t)) - U(q(t)) \quad (\text{A-18})$$

時刻 t_i で位置 $q(t_i) = q_i$, 時刻 t_F で位置 $q(t_F) = q_F$ に固定されている(初期位置と終期位置を与える)ものとして, ラグランジアンを時刻 t_i から t_F まで時間積分して得られたものを**作用(あるいは, 作用積分) S** と呼ぶ.

$$S = \int_{t_i}^{t_F} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (\text{A-19})$$

下に, 横軸を時刻 t , 縦軸に位置 q をとり, 時刻 t_i から t_F までの質点の**ある運動の経路**¹⁰を図で示す.



積分して求めた「**作用 S が最小(極小)**でよい」となるような経路 $q(t)$ を現実的には選択する¹¹. これを, 「**最小作用の原**

⁹ ここでは, ラグランジアンには時刻 t は直接の関数として含まれないことを仮定する. 位置 q や速度 \dot{q} が時刻 t の関数となる.

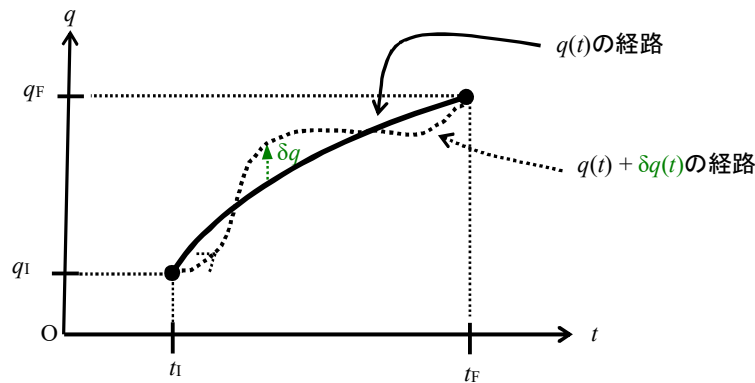
¹⁰ 経路を決めるためには, それぞれの時刻における**位置と経路の接ベクトル(速度 \dot{q})**を知る必要がある(位置 $q(t+dt)$ の値は $q(t)$ と $\dot{q}(t)$ の値を使って求める). 始め, **位置 q と速度 \dot{q} を独立変数として扱って, 経路(時刻の関数とした位置 $q(t)$)を決まる**.

¹¹ 力が作用していない場合は, (慣性の法則, または運動量保存則より)初期位置と終期位置は直線で結ばれる. 曲線になるのは, 力が作用しているためである.

理」と呼ぶ¹²。ある経路で作用 S が最小(極小)となることを満たすためには、初期位置と終期位置を固定しながら、経路を $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$ へと変更したときに、作用 S の変分量 δS が「0」となることと等価である。このとき、初期位置と終期位置は固定されているので、 $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$ の関係が成立する。

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = 0 \quad (\text{A-20})$$

下に、運動の経路が $q(t) + \delta q(t)$ となった場合の図を示す。



上の式に対し、下のように計算して、任意の時刻 t において、成立する条件式を求める。

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)) dt - \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

(変分量 δq と $\delta \dot{q}$ について、1次の微小量までとる)

$$\sim \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt$$

($\delta \dot{q} = \delta \frac{dq}{dt} = \frac{d(\delta q)}{dt}$ で、2項目を部分積分すると下の式が得られる)

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \quad (\text{A-21})$$

最後の項は、初期と終期の条件(境界条件)「 $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$ 」より消え、任意の変分量 δq に対し、上の式が成立するためには被積

¹² 「ハミルトンの原理」とも呼ぶ。

分関数が全ての時刻 t において、「0」となる必要がある。すなわち、下の式が成り立たなければならない。下の式を「**ラグランジュ方程式**」と呼び、この式を解くことで始めて経路が決まる。この式はニュートンが提示した運動方程式と同等である。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{A-22})$$

ラグランジュ方程式を導出したポイントの一つは、時間積分する際の境界条件として、初期位置と終期位置を固定したことで、(A-21)式の最後の項(境界)による影響を排除できたことである。運動の状態を決定するための境界条件として、(A-15)式から(A-17)式までの3通りがあるが、(A-16)式を採用することで、扱いやすい形式を作成することができた。さらに、変数変換することも容易になり、応用性が広がった。一方、ニュートンの運動方程式では、解を得るために(A-15)式の境界条件を採用した。

* ハミルトン方程式

ニュートンの運動方程式を求める方法として、「ラグランジュ方程式」を紹介した。さらに、似た方法として「**ハミルトン方程式**」がある。ここでは、その「ハミルトン方程式」を導出しよう。

ラグランジアンは、時刻 t における運動状態を表す量として位置 $q(t)$ と速度 $\dot{q}(t)$ を用いて表した。速度の他に運動状態を表す量として、運動量 $p(t)$ がある。ラグランジアンに含まれる運動エネルギー $K = K(\dot{q}(t))$ は速度 \dot{q} の関数であり、質点の質量を m とすると、 $K = m \dot{q}^2/2$ である。運動量 p に対し、ラグランジアンを用いて下の式で定義しよう。

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (\text{A-23})$$

この式より、質量 m の質点の運動量 p は、「 $p = m \dot{q}$ 」となる。この式を用いると、ラグランジュ方程式から「 $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ 」と

なる。ラグランジアン $L(q(t), \dot{q}(t))$ に対し、完全微分をとり、「 $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ 」, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ 」を用いると下の式が得られる。

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \dot{p} dq + p d\dot{q} \quad (\text{A-24})$$

さらに、「 $p \dot{q}$ 」の完全微分「 $d(p \dot{q}) = p d\dot{q} + \dot{q} dp$ 」より、上の式の「右辺 = $\dot{p} dq + d(p \dot{q}) - \dot{q} dp$ 」となる。完全微分となる項を左辺にまとめると、下の式のようにまとめることができる。

$$d(p \dot{q} - L) = -\dot{p} dq + \dot{q} dp \quad (\text{A-25})$$

上の式にある左辺の関数を**ハミルトニアン(ハミルトン関数)** H と呼ぶ。力学変数は位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ である。

$$H(q(t), p(t)) = p(t) \dot{q}(t) - L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (\text{A-26})$$

右辺の変数には速度 \dot{q} が含まれているが、左辺の関数は運動量 p を用いて表す。ハミルトニアンは系の持つ力学的エネルギーを位置 q と運動量 p を用いて表したものである。質量 m の質点では「 $\dot{q} = p/m$ 」より、上の式の右辺の1項目は「 $p \dot{q} = p^2/m (= m \dot{q}^2) = 2 K$ 」となるので、ハミルトニアンは力学的エネルギーを表していることがわかる。

$$H(q(t), p(t)) = p \dot{q} - L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - U(q) \right) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = K(p) + U(q) \quad (\text{A-27})$$

(A-25)式に対して、両辺で時間微分をとると、下の式のように「0」になり、力学的エネルギー保存則を意味する。

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{p} \frac{dq}{dt} + \dot{q} \frac{dp}{dt} = -\dot{p} \dot{q} + \dot{q} \dot{p} = 0 \quad (\text{A-28})$$

さらに、(A-25)式に対して、 dq と dp で偏微分をとると、下の式が得られる。これらの式は、力学変数である位置 q と運動量 p に対する時間発展を表す式で、ニュートンの運動方程式、または、ラグランジュ方程式と同等である。この2つの方程式を「ハミルトン方程式」、あるいは、「ハミルトンの正準方程式」と呼ぶ。

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (\text{A-29})$$

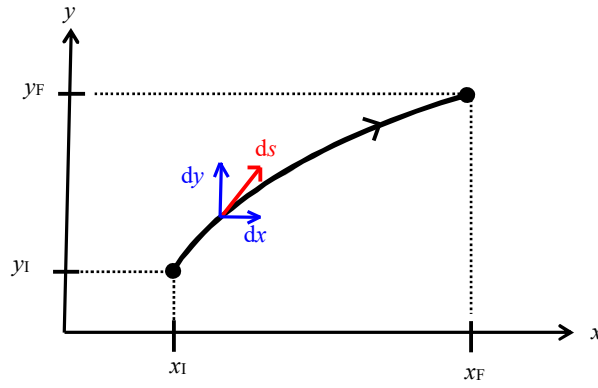
2) 「最小作用の原理」の意味 (省略してよい)

最小作用の原理と似た方法として、光学では「フェルマーの原理」、量子力学では「ファインマンによる経路積分の方法」がある。下に残りの2つの方法について簡単に述べ、3つの方法の関係性について私見を述べる。

* フェルマーの原理

「始めの位置から終わりの位置へ光が到達する場合、多くの経路の中で最小時間となるような経路をとる」という要請を置いて、経路を決定するというのが「フェルマーの原理(または、最小時間の原理)」である。あるいは、「光学的距離(光路長)¹³を最短にするような経路」としてもよい。(簡単のため)2次元空間で下の図のように、一様でない媒質中を光が初期位置 $\vec{r}_I = (x_I, y_I)$ から終期位置 $\vec{r}_F = (x_F, y_F)$ まで、ある経路で到達するとしよう。媒質が一様でないために、経路は曲線となる。

¹³ 「光学的距離」とは、光がある媒質を進むときに、同じ時間で光が真空中を進む距離を指す。一様な媒質中を直進する場合は、(絶対)屈折率 n 、媒質を進む距離 d とすると、光学的距離 $= n d$ となる。



媒質中の光の速さ v 、真空中の光の速さ c とすると、媒質の(絶対)屈折率 $n = c/v = \lambda_0/\lambda = k/k_0$ である。ここで、媒質中での光の波長 λ 、真空中での光の波長 λ_0 、媒質中での波数 $k = 2\pi/\lambda$ 、真空中での波数 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ とする。この経路上の微小長さ $(ds)^2$ は x 方向の微小長さ dx と y 方向の微小長さ dy を用いて、「 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 」と表される。光が初期位置から終期位置までの移動に要する時間 \tilde{t} は下の式で表される。

$$\tilde{t} = \int_{(\text{初期位置})}^{(\text{終期位置})} dt = \int_{(\text{初期位置})}^{(\text{終期位置})} \frac{1}{v} ds \quad (\text{A-30})$$

上の式に真空中の光速 c をかけると、光学的距離 D となる(屈折率 n は場所によって変わるので、 $n(x, y)$ とした)。

$$D = \int_{(\text{初期位置})}^{(\text{終期位置})} \frac{c}{v} ds = \int_{(\text{初期位置})}^{(\text{終期位置})} n(x, y) ds \quad (\text{A-31})$$

「フェルマーの原理」では、「経過時刻の変分量 $\delta\tilde{t} = 0$ 、あるいは、光学的距離の変分量 $\delta D = 0$ 」となるような経路が、実際の経路になるように選ばれる。ここでは、上の式を扱うこととする¹⁴。上の式で、微小長さ(微小距離) ds は、下の式で表される。

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (\text{A-32})$$

経路に沿って進む光の波数ベクトル \vec{k} は経路の(単位ベクトルの1つである)接ベクトル \vec{e} に比例するので、 x 軸からのこの接ベクトル \vec{e} までの角度を α とすると、波数ベクトル $\vec{k} = k \vec{e} = k (\cos \alpha, \sin \alpha) = k (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$ となる。波数 $k = k_0 n$ を用いると、(A-31)式は下の式で表すことができる。ただし、波数ベクトル $\vec{k} = \vec{k}(\vec{r})$ は位置 $\vec{r} = (x, y)$ の関数である。

¹⁴ 嘉藤 誠さんによる「電子光学入門(第3回)」, Journal of Surface Analysis Vol.11(2004)pp.196-221 を参考にした。

$$k_0 D = \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} \vec{k} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{k} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A-33})$$

$$\left[\begin{array}{l} * \text{ 上式の確認} \\ \vec{k} \cdot d\vec{r} = k_x dx + k_y dy = k \left(\frac{(dx)^2}{ds} + \frac{(dy)^2}{ds} \right) = k_0 n \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{ds} = k_0 n ds \rightarrow (\text{A-31})\text{式と同じ} \end{array} \right.$$

上の式の右辺は、初期位置から終期位置まで波数ベクトル \vec{k} について、経路にそって線積分することを意味する。そして、この線積分の値を最小(極小)にするような経路に選択するのが「フェルマーの原理」に相当する。したがって、「フェルマーの原理」は下のような積分の変分 = 0 にするような経路を求めることと同等である。

$$\delta \tilde{I} = \delta \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} dt = 0 \quad \text{or} \quad \delta (k_0 D) = \delta \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} \vec{k} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{A-34})$$

* ファインマンによる経路積分の方法

簡単のために、1自由度での量子系を考えよう¹⁵。始めの時刻 t_i において、位置 q_i であった状態を $|q_i, t_i\rangle$ 、終わりの時刻 t_f において、位置 q_f に到達した状態を $|q_f, t_f\rangle$ とする。時刻 t_i と t_f の間を $(N+1)$ 等分し、微小時間 $\Delta t = t_{j+1} - t_j = (t_f - t_i)/(N+1)$ として、時刻に対して、 $t_i = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_N \rightarrow t_{N+1} = t_f$ として時間発展させて、経路積分を実行する。経路積分の計算方法によると、始めの状態 $|q_i, t_i\rangle$ から終わりの状態 $|q_f, t_f\rangle$ へ遷移する遷移振幅 $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ は下の式で表される(この式の導出は行わない)。

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \frac{dp_0}{2\pi} \prod_{j=1}^N \left(\frac{dp_j dq_j}{2\pi} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left(p_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} - H \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}, p_j \right) \right) \Delta t \right] \\ &= \int_{(q(t_i)=q_i)}^{(q(t_f)=q_f)} Dp Dq \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} (p(t) \dot{q}(t) - H(q(t), p(t))) dt \right] \end{aligned} \quad (\text{A-35})$$

(A-35)式で、下の行の式は分割数 $N \rightarrow \infty$ としたときを表した略記である。上の式は初期状態 $|q_i, t_i\rangle$ から終期状態 $|q_f, t_f\rangle$ へ状態が変化する場合、可能な経路($q_i \rightarrow \{q_1\} \rightarrow \{q_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{q_N\} \rightarrow q_f$; 途中の状態 $\{q_j\}$ はとりうる可能な状態の集合)をすべて足し合わせる(積分する)ことを意味する。上の式が「位相空間{位置 $q(t)$, 運動量 $p(t)$ }にける経路積分を用いて表した状態間の遷移振幅」である。さらに、運動エネルギー $K(p) = p^2/(2m)$ となっている場合は、運動量積分が実行でき、上の式から下の式のように表す

¹⁵ 経路積分の方法については、例えば、九後 汰一郎さんによる「ゲージ場の量子論 I」, 裳華房(1989)の第4章を参照のこと。

ことができる。

$$\begin{aligned}
 \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle &= \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dq \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} \left(\frac{m}{2} (\dot{q}(t))^2 - U(q(t)) \right) dt \right] \\
 &= \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dq \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \right]
 \end{aligned} \tag{A-36}$$

ファインマンは状態遷移の遷移振幅として、上の式を提案した。この式がファインマンによる「経路積分の方法」と呼ばれる式であり、この式からシュレディンガー方程式を導出できる。上の式は、指数関数部分に、作用 S を含んでおり、作用 S を用いて下の式のように表すこともできる。

$$S = \int_{t_I}^{t_F} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \tag{A-37}$$

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle = \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dq \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right] \tag{A-38}$$

* 3つの方法の関係性

ここで紹介した3つの方法、すなわち、「最小作用の原理」、「フェルマーの原理(最短時間の原理)」、「経路積分の方法」はよく似ている。「最小作用の原理」と「経路積分の方法」は作用を含んでいる。「最小作用の原理」では、作用の変分量 $\delta S = 0$ から力学的経路が、「フェルマーの原理」では、光学的経路の変分量 $\delta D = 0$ から光学的経路が決定される。ここでは、これらの3つの方法を統一的に理解することを試みる。

光や量子は波としても扱うことができる。位置 \vec{r} 、時刻 t における波(量子)の確立振幅(波動関数) $\psi(\vec{r}, t)$ は、波数ベクトル \vec{k} 、角速度 ω の平面波(正弦波)として、下の式のように、位相角 θ を用いた指数関数(三角関数)で表すことができる。

$$\psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r}, t | \psi \rangle \sim \exp[i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] = \exp[i \theta] \tag{A-39}$$

ここで、波数 \vec{k} が位置 \vec{r} の関数、角速度 ω が時刻 t の関数であると仮定し、初期状態 (\vec{r}_I, t_I) から終期状態 (\vec{r}_F, t_F) まで、ある経路を**通って**到達したときの確率振幅 $\langle \vec{r}_F, t_F | \vec{r}_I, t_I \rangle$ を下の式のように表現できることを要請する。

$$\langle \vec{r}_F, t_F | \vec{r}_I, t_I \rangle \sim \exp[i \Delta \theta] = \exp[i (\int_{(\text{初期位置})}^{(\text{終期位置})} \vec{k} \cdot d\vec{r} - \int_{t_I}^{t_F} \omega dt)] \quad (\text{A-40})$$

量子論では、運動量 \vec{p} とエネルギー E はド・ブローイとアインシュタインが提出した関係より、 $[\vec{p} = \hbar \vec{k}, E = \hbar \omega]$ と表せるので、これを上の式に代入して、下の式のように表す。

$$\langle \vec{r}_F, t_F | \vec{r}_I, t_I \rangle \sim \exp[i \Delta \theta] = \exp[\frac{i}{\hbar} (\int_{(\text{初期位置})}^{(\text{終期位置})} \vec{p} \cdot d\vec{r} - \int_{t_I}^{t_F} E dt)] \quad (\text{A-41})$$

1次元系の場合は、位置の変数を q とし、下の式となる。

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle \sim \exp[i \Delta \theta] = \exp[\frac{i}{\hbar} (\int_{q_I}^{q_F} p dq - \int_{t_I}^{t_F} E dt)] \quad (\text{A-42})$$

さらに、速度を \dot{q} と表し($dq = \dot{q} dt$)、エネルギー E の代わりにハミルトニアン H を用いて表すと下の式が得られる。

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle \sim \exp[i \Delta \theta] = \exp[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} (p \dot{q} - H) dt] \quad (\text{A-43})$$

上の式は始状態から終状態まで1つの経路で遷移することを意味する。量子力学では、始状態から終状態への確率振幅は、位空間 $\{(q, p)\}$ の中で可能となる**全ての経路の寄与を足し合わせる経路積分**を用いて表示されなければならない。確率振幅が(A-43)式の右辺にある被積分関数は(A-26)式より、ラグランジアン L で、これを時間積分すると作用 S になり、(A-38)式と同じ式になる。

$$\begin{aligned} \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle &= \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dp Dq \exp[i \Delta \theta] = \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dp Dq \exp[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} (p \dot{q} - H) dt] \\ &= \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dq \exp[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} L(q(t), \dot{q}(t)) dt] = \int_{(q(t_I)=q_I)}^{(q(t_F)=q_F)} Dq \exp[\frac{i}{\hbar} S] \\ &\sim \sum_{\text{あらゆる経路}} \exp[\frac{i}{\hbar} S] \end{aligned} \quad (\text{A-44})$$

この式は、(A-43)式がある経路における平面波の位相変化に相当するので、**平面波の位相変化をあらゆる経路で重ね合わせ**とし

て表現できることを意味する。あらゆる経路の中で、作用 S に対し、最小値(極小値) S_{\min} となる経路とそれからずれた経路での作用 S_1 , S_2 , .. の和で表してみよう。

$$S = S_{\min} + S_1 + S_2 + \cdots \quad (\text{A-45})$$

作用の最小値(極小値) S_{\min} となる経路は、経路を少しずらしたときの変分量が 0 として、下の式で求めることができる。

$$\delta S = 0 \quad (\text{A-46})$$

力学系や光学系での古典系では、(作用 S の値と比べて、非常に小さい)ディラック定数 $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとってよいので、最小値(極小値)以外の S/\hbar は、 S_{\min}/\hbar と比べ、大きな値になり、指数関数を作用させると激しく振動し、それらを足し合わせると、打ち消し合って、その効果を見捨てることできる¹⁶。

$$\sum_{\text{あらゆる経路}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \sim \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{\min}\right] + \overbrace{\exp\left[\frac{i}{\hbar} S_1\right] + \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_2\right] + \cdots}^0 \sim \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{\min}\right] \quad (\text{A-47})$$

したがって、量子系ではあらゆる経路について足し合わせる必要があるが、**古典系では、位相差 $\Delta\theta$ または、作用 S の変分が0となるような経路のみを採用**すればよい(変分量 δS が 0 となるような最小値(極小値) S_{\min} となるような経路を採用する)。以後、古典系の力学では、「最小作用の原理 $\delta S = 0$ 」を満たす**「ラグランジュ方程式を満たす経路のみで、物体の運動が決定される。」**

$$\text{古典系の経路} \rightarrow \delta(\Delta\theta) = 0 \quad \text{or} \quad \delta S = 0 \quad (\text{A-48})$$

・「光学系」

幾何光学系においては、光は**媒質が変わっても角速度(角周波数) ω が一定**なので、(A-41)式における位相差 $\Delta\theta$ は下の式で表すことができる。

$$\Delta\theta = \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} \vec{k} \cdot d\vec{r} - \omega \int_{t_i}^{t_f} dt \quad (\text{A-49})$$

上の式の右辺の1項目と2項目は同じ寄与を与えるので、どちらかの項だけの「**変分量が 0**」となる経路を採用すればよい。

¹⁶ 例えば、J. J. Sakurai さんの「現代の量子力学」、吉岡書店(1989)の第 2 章を参照。

$$\rightarrow \delta \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} \vec{k} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{or} \quad \delta \int_{t_1}^{t_F} dt = 0 \quad (\text{A-50})$$

上の式は、「フェルマーの原理(最小時間の原理)」と同じである。

次に、「フェルマーの原理」に基づいて、光線の経路を表す「ラグランジュ方程式」に対応する式を導出しよう。(A-31)式の右辺にある屈折率 $n(x, y)$ を含んだ式を扱う。経路上の微小長さ $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + (x')^2} dy$ とする。ここで、微分記号 $y' = \frac{dy}{dx}$ で、 $x' = \frac{dx}{dy}$ とした。この記号を用いて、(A-31)式を下の式のように表し、2つの関数 $f_1(y(x), y'(x))$ と $f_2(x(y), x'(y))$ を定義する。関数 $y(x)$ と $x(y)$ は経路を表すがこの時点では未定である。

$$D = \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} n(y(x)) \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{x_1}^{x_F} f_1(y(x), y'(x)) dx \quad (\text{A-51})$$

$$= \int_{\text{(初期位置)}}^{\text{(終期位置)}} n(x(y)) \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_{y_1}^{y_F} f_2(x(y), x'(y)) dy \quad (\text{A-52})$$

上の2つの式に対して変分 $\delta D = 0$ をとることで、下の式のようにラグランジュ方程式と対応した式を求めることができる。

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f_1}{\partial y'} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-53})$$

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial f_2}{\partial x'} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-54})$$

また、 $\frac{d}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{d}{ds}$, $\frac{d}{dy} = \sqrt{1 + (x')^2} \frac{d}{ds}$ と $\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{dy}{ds}$, $\frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} = \frac{dx}{ds}$ の関係を使うと、上の式は

下の式で表すことができる。

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (\text{A-55})$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (\text{A-56})$$

経路上の接ベクトル $\vec{e} = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$, 波数ベクトル $\vec{k} = k \vec{e} = n k_0 \vec{e}$ より、上の2つの式をまとめると下の式で表すことができる。

$$\frac{d}{ds}(n \vec{e}) = \vec{\nabla} n \quad \text{or} \quad \frac{d}{ds} \vec{k} = \vec{\nabla} k \quad (\text{A-57})$$

上の式にしたがって光線の経路が決定される。

・「力学系」

力学系においては、経路積分で用いた経路の中で、作用 S の変分 δS が 0 となる経路を採用する。このとき、作用は最小値(極小値) S_{\min} となる。これは、「**最小作用の原理**」と等しい。

$$\rightarrow \delta S = 0 \quad , \quad \delta \int_{t_1}^{t_F} (p \dot{q} - H) dt = 0, \quad \text{or} \quad \delta \int_{t_1}^{t_F} L(q, \dot{q}) dt = 0 \quad (\text{A-58})$$

この時点では、上の式の被積分関数に含まれるハミルトニアン H に対して、**エネルギー保存則は適用されない**(「 $H = E$ (力学的エネルギー) = 一定」とすることはできない)¹⁷。そのため、下の式の右辺のような変分をとって、経路にそった線積分(dq で積分)と時間積分(dt で積分)を分離できない¹⁸。これが、幾何光学(「フェルマーの原理」)との大きな違いである。

$$\delta \int_{t_1}^{t_F} (p \dot{q} - H) dt = \delta \left(\int_{q_1}^{q_F} p dq - \int_{t_1}^{t_F} H dt \right) \neq \delta \left(\int_{q_1}^{q_F} p dq - E \int_{t_1}^{t_F} dt \right) \quad (\text{A-59})$$

力学的エネルギー保存則は多くの経路の中で、ラグランジュ方程式、あるいは、ハミルトン方程式を満たす経路上において成立する。さらに、ラグランジアン L は運動エネルギー K と位置エネルギー U の差($L = K - U$)なので、運動エネルギー K の時間積分の変分と位置エネルギー U の時間積分の変分が同じ値になるように、力学系は振る舞う。

$$\delta \int_{t_1}^{t_F} K(\dot{q}(t)) dt = \delta \int_{t_1}^{t_F} U(q(t)) dt \quad (\text{A-60})$$

上の式で運動エネルギー $K(\dot{q}) = m \dot{q}^2/2$ とし、経路の変分 δq の1次のオーダーまでとると、上の式の左辺(被積分関数 $m \dot{q} \delta \dot{q}$ に部分

¹⁷ 力学的エネルギー保存則($dH/dt = 0$)はラグランジュ方程式、あるいは、ハミルトン方程式が成立している場合に成立する。(A-44)式のハミルトニアン $H = H(q, p)$ では経路がまだ決まっていないので、ラグランジュ方程式、あるいは、ハミルトン方程式を用いることはできない。古典的な経路を確定するために、ラグランジュ方程式、あるいは、ハミルトン方程式がある。古典系では、ラグランジュ方程式(ハミルトン方程式)を満たすような物理量しか意味を持たない(これを、「オンシェルにある」という。→ 例えば、大貫義郎さんの「現代の物理学 力学」、岩波書店(1994)の1章(1-3)を参照)。

¹⁸ 2つの積分を分離できる場合は「フェルマーの原理」で見たように((A-50)式に相当)、運動量の線積分のみの変分で経路を決めることができるが、これは力が働いていない自由粒子(位置エネルギーがない)の場合に相当する。

積分を行って、境界条件を代入から「 $-m \ddot{q} \delta q$ 」、右辺から「 $\partial U / \partial q \delta q (= -F \delta q)$ 」となり、ニュートンの運動方程式($m \ddot{q} = F$)と一致する。また、逆の操作をすると、ニュートンの運動方程式から、最小作用の原理に到達できる。

・まとめ

量子力学における「経路積分の方法」において、始めの時刻 t_1 から終わりの時刻 t_F へ遷移する遷移振幅 $\langle q_F, t_F | q_1, t_1 \rangle$ は、位相変化 $\Delta\theta$ を用いると、下の式のように $\exp [i \Delta\theta]$ に比例した重みをもち¹⁹、とりうる可能な経路をすべて取り込むものだった。

$$\langle q_F, t_F | q_1, t_1 \rangle = \int_{(\text{可能なすべての経路})} Dp Dq \exp [i \Delta\theta] = \int_{(\text{可能なすべての経路})} Dp Dq \exp \left[i \frac{S(t_1, t_F)}{\hbar} \right] \quad (\text{A-61})$$

位相変化 $\Delta\theta$ は、作用 $S = S(t_1, t_F)$ とディラック定数 \hbar を含み、下の式で与えられる。

$$\Delta\theta = \frac{S(t_1, t_F)}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_F} (p \dot{q} - H) dt = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_F} L dt \quad (\text{A-62})$$

対象としている物理系(古典系、および量子系)において、初期状態から終期状態への移行は経路積分で表示するのが正しい。ところが、古典系では、ディラック定数 $\hbar \rightarrow 0$ の極限²⁰として扱うことができ、位相変化 $\Delta\theta$ が最も小さい経路のみが有効となり、その他の経路については無視してもかまわない。つまり、作用の変分 $\delta S = 0$ となる経路のみで、運動の性質を特定できる。作用 S/\hbar が平面波の位相変化 $\Delta\theta$ と同じ意味を持つ。古典系では、「[フェルマーの原理](#)」と「[最小作用の原理](#)」は共に、位相差を最小にするような経路を採用する「[位相差最小の原理](#)」という言葉で統一することができる。

$$\Delta\theta = \frac{S(t_1, t_F)}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_F} (p \dot{q} - H) dt = \int_{q_1}^{q_F} k dq - \int_{t_1}^{t_F} \omega dt \quad (\text{A-63})$$

上の式の積分では、一般には、波数 k は位置 q の、角速度(角周波数) ω は時刻 t の関数として扱われる。

量子系では、作用の変分 $\delta S = 0$ となる経路を古典解として、それから少しずれた経路も考慮する。ずれを考慮する方法として、摂動論²¹やWKB法(鞍点法)などがある。

¹⁹ この重みは、経路の途中における位置と運動量の配位によって変わる。

²⁰ 運動量 p と位置 q の交換関係 $[p, q] = -i\hbar \rightarrow 0$ となり、量子性の特性が失われる。

²¹ 摂動論を用いた計算方法として、「ファインマン・ダイアグラムを用いた方法」がある。