物理

- 低学年（高専 1 年）用 -

（2 単位）

2020 年公開(コロナ禍のため遠隔授業開始)

函館高専

長澤 修一

・目次

1. 数学的準備
 1-1. 簡単な計算規則
 1-2. べき乗(累乗)と指数
 1-3. 三角比と三角関数
 1-4. ベクトル
2. 物体の運動
 2-0. 時間
 2-1. 位置
 2-2. 速度
 2-3. 加速度
3. 落体の運動(等加速度運動の一例)
 3-0. 重力加速度
 3-1. 自由落下運動
 3-2. 鉛直投射運度
 3-3. 水平投射運動
 3-4. 斜方投射運動
4. 力
 4-1. 力
 4-2. 力のつり合い
 4-3. 力の種類
  ① 重力
  ② 垂直抗力
  ③ 糸の張力
  ④ 弾性力(バネの力)
  ⑤ 摩擦力
5. 運動の法則(ニュートンの運動の 3 法則)
 5-1. 第1法則 (慣性の法則)
 5-2. 第2法則 (運動の法則)
 5-3. 第3法則 (作用・反作用の法則)
 5-4. 運動方程式の応用

* **物理の問題を解くときの注意点**

① 問題の内容を理解し，その意味を簡単な図を書いて「何を求めるのか?」を認識する.
 (ここで，問題で与えられた条件(**条件が隠れている場合もあります**)に注意する)

② 用いる物理法則(物理法則を表している基本式)を選ぶ.

③ 計算は丁寧に行う.

④ 「求めた答えの単位は正しいか?求めた答えは答えとしてもっともらしいか?」再検討する.

⑤ 最後にもう一度，問題とその解を概観し(大枠をつかむ)，まとめる(結論を出す).

1. 数学的準備

物理では数学を用いて，起きている現象を考えことが多い．また，数式を使った計算によって現象を予言しようと試みる場合もある．そのため，物理学を学習する際には必要な数学を修得しなければならない．場合によっては，新たな数学法則を作り出さなければならないこともある．道具としての数学は必要になった時点で学習するのがよいが，この章では，物理を学習するために，最低限度，必要な数学をまとめよう．

1-1. 簡単な計算規則

数学などの自然科学では記号(アルファベット，ギリシャ文字)を用いて数を表す．

a　　はある何らかの数を表す．　　(例えば，a を小数として　　$a = 1.233$　　)

1) 足し算

簡単な計算規則として，足し算(加法)があり，下のような記号「 ＋ 」を使う．

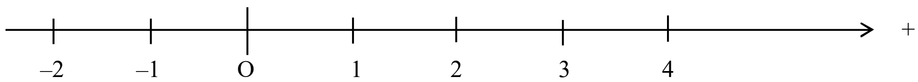
$a + b$　　　　(例えば，　$a = 1.2$　，　$b = 2.3$　とすると　$a + b \;=\; 1.2 \;+ 2.3 \;=\; 3.4$　と計算する)

2) 引き算

次に，引き算（減法）がある．記号「 $-$ 」を用いる．

$a - b$　　　　(例えば，　$a = 2.3$　，　$b = 1.2$　とすると　$a - b \;=\; 2.3 - 1.2 \;=\; 1.1$　と計算する)

以上の計算規則は数直線を考えるとイメージしやすい．原点 O をとり，数直線上で，原点 O から右側には正(+)の数，左側には負(–)の数を順序よく並べる．数直線のある位置(この位置を a とする)をとり，足し算はこの位置から右側に移動する操作，引き算はこの位置から左側に移動する操作に対応する．



3) かけ算

かけ算(乗法，または積)は記号「 × 」を用いる．その他の記号として「 ・ 」や「 $*$ 」がある．文字式の場合は空欄を用いてもかけ算を表す．例えば，　$a = 2$　，　$b = 1.3$　とすると，下の書き方は全て，かけ算(積)を表す．

$$a \times b = a \cdot b = a * b = a\ b = 2\times1.3 = 2 \cdot 1.3 = 2*1.3 = 2.6$$

4) 割り算

割り算(除法)は記号「 ÷ 」を用いる．その他の記号として「 / 」(「スラッシュ」と呼ぶ)や横線(「 ― 」で割り算を表す．横線「 ― 」で割り算を表した数は分数とも呼ばれる．例えば，　$a = 20$　，　$b = 4$　とすると，下の書き方はすべて割り算(除)を表す．

$$a \div b = a\,/\,b = \frac{a}{b} = 20 \div 4 = 20/4 = \frac{20}{4} = 5$$

ただし，今後は，理数系の計算では，なるべく　**「 ÷ 」は使わないようにすること**．　→　**単位の計算を明確にするため.**

＊　複雑な割り算（割り算の割り算）

普通の数の場合はかけ算ではそのまま計算しても計算結果は変わらない．例えば，$a = 24$，$b = 4$，$c = 2$ とすると，積の計算は下の式のようになり，**普通の掛け算は，積の順序によらないことが確認できる．**

$$a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = 192 \tag{1-1-1}$$

一方，割り算が複数ある計算では，計算の順序によってその結果が大きく変わる

$$a \div (b \div c) = 24 \div 2 = 12 \tag{1-1-2}$$

→ 始めに，「かっこ」の割り算を行う → $b \div c = 4 \div 2 = 2$ → $a \div (b \div c) = a \div 2$

$$(a \div b) \div c = 6 \div 2 = 3 \tag{1-1-3}$$

→ 始めに，「かっこ」の割り算を行う → $a \div b = 24 \div 4 = 6$ → $(a \div b) \div c = 6 \div c$

上に示したように，割り算は計算の順序で異なる計算結果が得られる．計算順序として，最も内側のかっこから計算を始め，次に，その外側のかっこの計算を行う．これを「スラッシュ「 / 」記号[1]」を用いて表現する場合は特にかっこに注意する．

例えば，(0-1-2)式と(0-1-3)式は下のように表すことができる．さらに，分数で表すときは，分数を表す横線(「 — 」の長さに注意する． → 一番短い線が最も内側のかっこに相当する．

$$a \div (b \div c) = a / (b / c) = \cfrac{a}{\cfrac{b}{c}} \tag{1-1-4}$$

$$(a \div b) \div c = (a / b) / c = \cfrac{\cfrac{a}{b}}{c} \tag{1-1-5}$$

ここで，最右辺の分数では，分数を表す横線の最短部分を始めに計算し，それより長い横線の分数は後で計算するという規則である．分数の分数という形で表された上の式をかけ算を用いて別な表現で表すと，

$$\cfrac{a}{\cfrac{b}{c}} = a \div (b / c) = a \times (c / b) = a c / b = \frac{a c}{b} \tag{1-1-6}$$

と複数の分数(横線「 — 」からなる数)が 1 つの分数を用いて表した．また，(1-1-3)式は下のように表すことができる．

$$\cfrac{\cfrac{a}{b}}{c} = (a / b) \div c = (a / b) \times (1/c) = a / (b c) = \frac{a}{b\ c} \tag{1-1-7}$$

例えば，$a = 24$，$b = 4$，$c = 2$ とすると，下の式のように計算する．

$$\cfrac{a}{\cfrac{b}{c}} = \cfrac{24}{\cfrac{4}{2}} = \frac{24 * 2}{4} = 12 \qquad \left(\text{あるいは，} \cfrac{a}{\cfrac{b}{c}} = \cfrac{24}{\cfrac{4}{2}} = \frac{24}{2} = 12\right),$$

---

[1] コンピュータで複雑な分数を表現する場合は小括弧しか使えない．また，割り算は「 / (スラッシュ)」記号のみしか使えない．この練習問題ではコンピュータで分数を表記する際の練習にもなる．

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{24}{4}}{2} = \frac{24}{4*2} = 3 \qquad (あるいは, \ \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{24}{4}}{2} = \frac{6}{2} = 3).$$

さらに分数が複雑になっても同様な計算規則に則って計算を行う.

外側「a と d」の積

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c} = \frac{a\,d}{b\,c} \tag{1-1-8}$$

内側「b と c」の積

例えば, $a = 24$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$ とすると, 下の式のように計算する.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{24}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{24*3}{4*2} = 3*3 = 9$$

問 1-1-1. 下の分数式を「/(スラッシュ)とかっこ(かっこは大括弧[ ] , 中括弧{ }, 小括弧( )を用いてもよいし, 小括弧のみを用いてもよい)」を用いて表し, 次に計算せよ. (下段のアルファベットを用いた式では, 簡単化せよ. → 分数を表す横線(—)を 1 つだけ使って表すまで簡単化する).

1) $\dfrac{2}{\frac{3}{4}+1}$. 2) $\dfrac{\frac{3}{4}+1}{2}$. 3) $\dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{4}{-3}}$. 4) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$. 5) $\dfrac{\frac{\frac{2}{3}}{3}}{2}$. 6) $\dfrac{\frac{\frac{2}{3}}{4}}{5}$. 7) $\dfrac{2}{\frac{3}{\frac{4}{5}}}$

8) $\dfrac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a}{b^3}}$. 9) $\dfrac{1+a}{1-\frac{1}{2+a}}$. 10) $\dfrac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$. 11) $\dfrac{a^2-1}{\frac{1}{a}+1}$. 12) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$. 13) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}$. 14) $\dfrac{1}{a-\frac{1}{a-\frac{1}{a}}}$.

問 1-1-2. 次の計算を行え

1) $\dfrac{2}{0.2}$. 2) $\dfrac{2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$. 3) $\dfrac{2}{\frac{1}{2}+0.2}$. 4) 4/(1+(2+1)/4+3/(1+3)). 5) 3 − (2/(−4))/(1/3) .

1-2. べき乗(累乗)と指数

0(ゼロ)でないある数 a を 2 回かけた数について, 「$a \times a = a * a = a^2$ 」を「a の 2 乗」と呼ぶ. 一般に, n 回かけた数を「a の n 乗」と呼ぶ. これらをまとめて, 「a のべき乗(累乗)」と呼ぶ。数 n を指数, または, べきと呼ぶ(コンピュータでは「a^n = **a^n** 」と表す). .

$$a^1 = a, \qquad a \times a = a^2, \qquad a \times a \times a = a^3, \qquad \underbrace{a \times a \times \ \dots \times a}_{n\,個} = a^n \tag{1-2-1}$$

整数 m と n について, 下の等式が成り立つ.

$a^n a^m = a^{n+m}$ → (a を n 回かけたもの)×(a を m 回かけたもの) = a を($n+m$)回かけたもの

= (a の n 乗)×(a の m 乗) = a の($n+m$)乗 (1-2-2)

$(a^n)^m = a^{nm}$ → (a を n 回かけたもの)を m 乗 = a の($n\times m$)乗 (1-2-3)

$(a\,b)^n = a^n b^n$ → ($a\,b$)の n 乗 = (a の n 乗)×(b の n 乗) (1-2-4)

* 負のべき乗(分数表示)

$\underbrace{a\times a\times\ \dots\ \times a}_{n\text{個}} = a^n$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→ $\underbrace{a\times a\times\ \dots\ \times a}_{(n-1)\text{個}} = a^{n-1}$ → ($\frac{1}{a}$ 倍する)→ ····

→ $a\times a\times a = a^3$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→ $a\times a = a^2$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→ $a = a^1$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→

→ $\mathbf{1 = a^0}$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→ $\mathbf{\frac{1}{a} = a^{-1}}$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→ $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ →($\frac{1}{a}$ 倍する)→ ··· → $\mathbf{\frac{1}{a^m} = a^{-m}}$

(さらに $\frac{1}{a^{-m}}$ →(分子・分母に a^m をかける)→ $\frac{a^m}{a^{-m}\times a^m} = \frac{a^m}{a^0} = \frac{a^m}{1} = a^m$)

問 1-2-1. 次の計算を行え(簡単化せよ). 「 10) までの問題は, 10 の何乗か? 」

1) 100^0 2) $(10^2)^3$ 3) 0.01 4) $10^4/10^5$ 5) $(10^1)^3$

6) $(10^{-3})^4$ 7) $\frac{10}{0.01}$ 8) $(10^4\,10^2)/(\frac{1}{100})$ 9) $\frac{10^{-4}}{(10^{-3})^{-2}}$ 10) $\frac{(10^2)^4\times 5^3\times 2^3}{(10^{-3})^2}$

11) $(10^{-2})^3\times 5^6\times 2^5$ 12) 8^3 (← 2 の何乗か?) 13) $(2^4\,5^3)/10^2$ 14) $125^2/5^5$

問 1-2-2. 次の計算を行え. ただし, $a\neq 0, b\neq 0$ とする.

1) $(-a^2 b)^2 (a\,b^2)^3$ 2) $(-3a\,b^2)^2 / (3\,a\,b^2)^3$ 3) $\frac{(-2\,a^2\,b)^3}{(4\,a\,b^3)^2}$ 4) $\frac{\frac{a^2}{b^3}}{a^4\,b^3}$ 5) $\frac{(a^2\,b^{-1})^3}{(a^{-1}\,b^2)^2}$

* 分数のべき乗と累乗根

0(ゼロ)でない正の数 a を考える.

例えば,「数 a を 2 乗して 2 になるとする」 → 数式にする → $a\times a = a^2 = 2$ → 数 a は 2 の平方根(2 乗根)

→ $a = \sqrt{2}$ → この数 a を,「2 の $\frac{1}{2}$ 乗と仮定する 」→ $a = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1/2} = 2^{0.5}$ → (この表現で OK かを確認する)

→ 数 a の 2 乗 $= a^2 = (2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2}\times 2} = 2^1 = 2$ →「数 a は 2 の $\frac{1}{2}$ 乗で OK! → 確認した! 」

一般に, 数 a の n 乗根を考える(→ n 乗すると a になる数) ($n = 2$ なら平方根)

数 a の n 乗根 $= a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (1-2-5)

→ $a^{\frac{1}{n}}$ を n 乗する = $a^{\frac{1}{n}}$ を n 回かける $= \underbrace{a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\times a^{\frac{1}{n}}}_{n\text{個}} = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}*n} = a^1 = a$

問 1-2-3． 次の計算を行え(簡単化せよ)． ただし，$a \neq 0, b \neq 0$ とする．

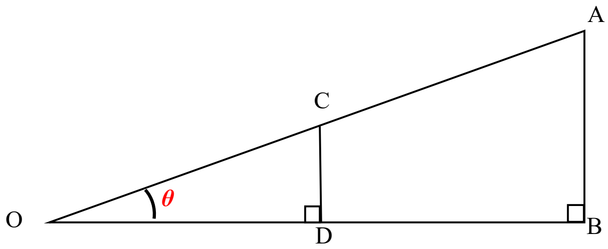
1) $4^{-\frac{3}{2}}$　　2) $(\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2})^{12}$　　3) $16^{1.25}$　　4) $(8^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$　　5) $\dfrac{1}{4^{0.5}}$　　6) $\dfrac{1}{4^{-2.5}}$

7) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$　　8) $\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}$　　9) $\sqrt[4]{a^3} \times \dfrac{1}{a^{-3/2}}$　　10) $\sqrt[4]{a} \times a^{0.5}$　　11) $(\sqrt[3]{a^2}\ b^2)^3 / (a\ \sqrt[3]{b}\ a^{2/3})^3$

1-3. 三角比と三角関数

大きさが違っても，形が同じである 2 つの三角形について，「2 つの三角形は相似 [2]である」と呼ぶ． 相似となる三角形では，3 つの辺の比は一定となり，三角形の内角の 2 つの角度が等しい．

三角形のなかで，直角三角形において，(直角でない)ある 1 つの角度が等しい場合，相似になる．したがって，直角三角形では(直角でない)1 つの角度が決まれば，辺の比も決まる．例えば，下の図のようにある角度が共通な直角三角形 OAB と OCD があるとしよう．



ここで，$\angle O = \angle AOB = \angle COD$ となる角度を表す記号としてギリシャ文字の θ (「シータ」と呼ぶ)で表す[3]．角度 θ が決まれば，直角三角形の形が決まる．このとき，直角三角形にある 3 つの辺の比も決まる．直角三角形において，これら 3 つの辺の比を三角比[4]と呼び，それぞれの辺の比を，角度 θ に対する余弦(**コサイン**)，正弦(**サイン**)，正接(タンジェント)と呼び，下の式のように定義する．

$$\cos\theta = \frac{\text{底辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} \tag{1-3-1}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺の長さ}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OC}} \tag{1-3-2}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺の長さ}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OD}} \tag{1-3-3}$$

ここで「斜辺の長さ」とは角度 90 °と反対の辺の長さを指す．角度 θ は「斜辺と底辺」ではさまれる．また，「高さ」は角度 θ の対辺となる．上の 3 つの式は各々，「コサイン・シータ」，「サイン・シータ」，「タンジェント・シータ」と呼ぶ．

---

[2] 三角形の相似の条件は 3 つあり，その条件は中学校で学んだ．「3 つの辺の比が等しい」，「2 つの辺の比とその間の角が等しい」，「2 つの角が等しい」である．

[3] 角度を表す記号として，θ の他に，アルファベットや他のギリシャ文字を用いて表すこともある．

[4] 三角比は鋭角の角度 θ に対する辺の比を表す(直角三角形では角度 θ は鋭角となる)．

＊注意　$\cos\theta$ とは「角度 θ に対するコサインの値は?」という意味であり，cos と θ のかけ算の意味ではない

→　「$\theta\cos$ や $\cos\times\theta$」という書き方はしない．

三角関数を書くときは必ず，角度を表す文字，または，角度の数値をつけること．

→　「cos ＝ ･･･」という書き方はしない．

→　「$\cos\theta=$ ･･･」，または，「$\cos 60°=$ ･･･」のように書く．

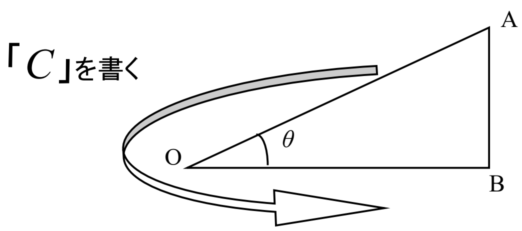
さらに，$\tan\theta$ は(1-3-1)式から(1-3-2)式を用いて，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて下の式のように表すことができる．以下では，下の式が「$\tan\theta$」の定義式とする．

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

問 1-3-1.　(1-3-1)式と(1-3-2)式を(1-3-4)式に代入することで，(1-3-3)式が成り立つことを確認せよ．

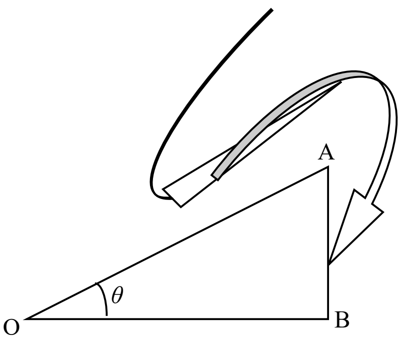
＊　**三角比の覚え方**

三角比を始めて学ぶ場合，どの辺の比が，「コサイン・シータ」か，あるいは，「サイン・シータ」か，について忘れることが多い．そこで，始めのうち，下のように三角比を覚えるとよい．「$\cos\theta$」ではコサインの頭文字の「C」の字を「斜辺(90°となる角の対辺に相当する辺)」から始めて，角度 θ をはさむようにして「底辺」に到達する．



$$\cos\theta = \frac{「C」の到着の辺}{「C」の出発の辺} = \frac{OB}{OA}$$

「$\sin\theta$」ではサインの頭文字の筆記体の「S」の字を「斜辺」から始めて，角度 θ を避けるように「高さの辺」に到達する．



$$\sin\theta = \frac{「S」の到着の辺}{「S」の出発の辺} = \frac{AB}{OA}$$

問 1-3-2.　次の直角三角形 OAB を簡単に図示し，その三角形の角度 θ での三角比の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，$\angle B=90°=$ 直角 とする．

1)　$\angle O=\theta=30°$　→　$\cos 30°=$?　$\sin 30°=$?

2)　$\angle O=\theta=45°$　→　$\cos 45°=$?　$\sin 45°=$?

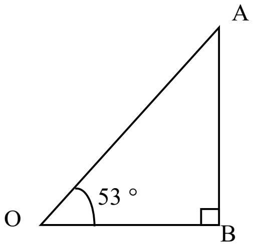
3)　$\angle O=\theta=60°$　→　$\cos 60°=$?　$\sin 60°=$?

問 1-3-3.　次の直角三角形の角度 θ は各々53 °と 64 °である. 三角比の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ.

1)

OA = 5

AB = 4

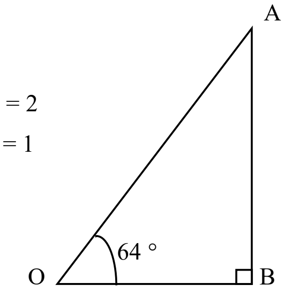


$\cos 53° =$?　　$\sin 53° =$?

2)

AB = 2

OB = 1

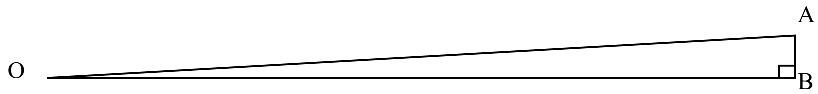


$\cos 64° =$?　　$\sin 64° =$?

*** 角度 $\theta = 0°$ と $\theta = 90°$ での三角比**

角度 θ が 0° または 90 °になると直角三角形はつぶれて, もはや作成できない. しかし, つぶれる直前の直角三角形を考えると, 三角比を求めることができる.

i)　∠O (= θ) が 0° 近傍の場合

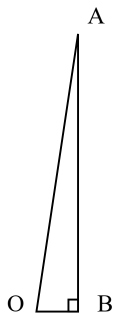


さらに, 角度 θ を小さな値にして, 0° にさらに近づける. その時, 点 A は点 B にくっつき(A→B), OA = OB , AB = 0 (ゼロ) となる. したがって, 角度 $\theta = 0°$ では下の式が成り立つ.

$$\cos 0° = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OA} = 1 \tag{1-3-5}$$

$$\sin 0° = \frac{AB}{OA} = \frac{0(\text{ゼロ})}{OA} = 0 \tag{1-3-6}$$

ii)　∠O (= θ) が 90°近傍の場合



角度 θ をさらに 90 °に近づけると点 O は点 B にくっつき(O→B), OA = AB, OB = 0 (ゼロ) となる. したがって, 角度 $\theta = 90°$ では下の式が成り立つ.

$$\cos 90° = \frac{OB}{OA} = \frac{0(\text{ゼロ})}{OA} = 0 \tag{1-3-7}$$

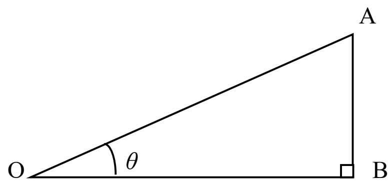
$$\sin 90° = \frac{AB}{OA} = \frac{OA}{OA} = 1 \tag{1-3-8}$$

となる. ここまでの結果をまとめると角度 θ が 0° ~ 90 °までの三角比 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値は下の表のようになる.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

＊注意　三角比の性質

下の図のように直角三角形 OAB において，中学校で学んだように三平方の定理(ピタゴラスの定理)が成り立つ．



三平方の定理

$(\mathrm{OA})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{AB})^2$

→　上の式の両辺を$(\mathrm{OA})^2$で割ると，下の式のようになる．

$$1 = \left(\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}\right)^2$$

$$= (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \qquad (1\text{-}3\text{-}9)$$ [5]

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

→　三平方の定理について三角関数を用いて表した！

問 1-3-4.　問 1-3-2 と問 1-3-3 で求めた三角比 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を使って，(1-3-9)式がいずれも成立することを確かめよ．

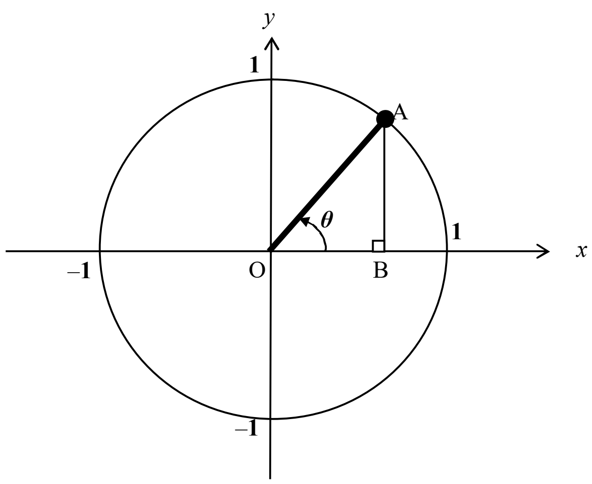
問 1-3-5.　(1-3-9)式を使って，$1/(\cos\theta)^2 = 1 + (\tan\theta)^2$　が成立することを確かめよ．

＊ 三角比の一般化(三角関数)

ここまでは，角度 θ が $0° \leqq \theta \leqq 90°$ となる鋭角の場合の三角比を扱ってきた．次に，別な(新たな)三角比の定義を導入し，角度 θ が鈍角やマイナスに相当する一般の角度でも適用できるようにする．このとき，角度 θ に対して，コサインやサインの値が決まるので，1 種の関数となる．この関数は，三角比を拡張した関数なので「**三角関数**」と呼ぶ．

横軸を x 軸，縦軸を y 軸として，中心を点 O として，半径 $r = 1$ の円を描く．x 軸から反時計周りに，角度 θ だけ回した点を A とする．点 A から x 軸に垂直に下ろした点を B としよう(半径 $r = \mathrm{OA} = 1$)．

点 A の座標(位置)を (x, y) とすると，x 座標は OB の長さ，y 座標は AB の長さになる．また，直角三角形 OAB を考えると，従来の三角比の考え方より



[5] 三角比 $\cos\theta$ の 2 乗($\cos\theta \times \cos\theta$)は $\cos^2\theta$ と書く書き方が一般的である．本来の意味から考えて，ここでは，あえて，$(\cos\theta)^2$ と書いた．

$$\cos\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB \ , \qquad \sin\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$$ より

点 A の座標 $= (x, y) = (OB, AB) = (\cos\theta \ , \ \sin\theta)$ (1-3-10)

が成立する．つまり点 A の，x 座標が cos θ，y 座標が sin θ となる[6]．このように，三角比を三角関数として，新たに定義することで，一般の角度 θ に対する三角関数の値を求めることができる．

問 1-3-6. 上のような半径が 1 の円(単位円と呼ぶ)の図を作成し，下の角度 θ に対応する円周上の点 A を図示し，点 A の座標を求めて，三角関数 cos θ と sin θ の値を求めよ．

$\theta = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°$

θ (°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
cos θ									
sin θ									

θ (°)	180	210	225	240	270	300	315	330	360
cos θ									
sin θ									

問 1-3-7. 上の問 1-3-6. と同様にして，角度 $\theta = -30°, -45°, -60°$ と $390°, 405°$ の三角関数 cos θ と sin θ の値を求めよ．

問 1-3-8. 上の問 1-3-6 から，全ての角度 θ に対して，恒に $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ となることを確かめよ．
また，cos θ と sin θ の値は，–1 から +1 までの範囲にあること($-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$) となることも確かめよ．

問 1-3-9. 横軸に角度 θ ($0° \leqq \theta \leqq 360°$)，縦軸に cos θ と sin θ をプロットし，それらの点を滑らかな線で結び，グラフをかけ．

* 1-3. のまとめ

三角関数 cos θ，sin θ は半径 $r = 1$ の単位円を書いて，角度 θ だけ反時計回りに回した円周上の点 A の x 座標と y 座標からなる．

円周上の点 A の座標 $= (x, y) = (\cos\theta \ , \ \sin\theta)$ (1-3-11)

三角関数 cos θ，sin θ は任意の角度 θ に対して下の式が恒に成り立つ(恒等式)．

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

[6] 角度 θ は $+x$ 軸(横軸)から反時計回りに回る角度をさす．角度 θ がマイナスの場合は $+x$ 軸から時計回りに回る角度をさす．

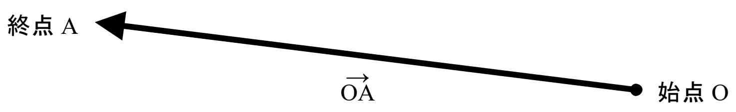
1-4.　ベクトル

物理で扱う量を「**物理量**」と呼ぶ．物理量とは観測可能な量である．物理量はその性質から大きく分けて，スカラー量とベクトル量の 2 種類ある．ここではベクトル量(略して，ベクトル)についてその性質を調べる．

- スカラー量 → 大きさだけを持つ量　(例；質量，長さ，体積，速度の大きさ(速さ)，・・・)
- ベクトル量 → 大きさと向きを持つ量　(例；速度，力，電界(電場)，磁界(磁場)，・・・・)

＊ ベクトルの定義とその表し方

ベクトルは大きさと向きを持つ量なので，ベクトルを図示する場合は，矢印で表す[7]．矢印の始点を点 O，終点を点 A とすると，このベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とし，始点から終点へ向けての矢印で表す．



矢印の
向き　= ベクトルの向き
大きさ(長さ) = ベクトルの大きさ

始点と終点でベクトルを表す場合と 1 文字だけで表す場合がある． $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ と表すこともある

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a} \tag{1-4-1}$$

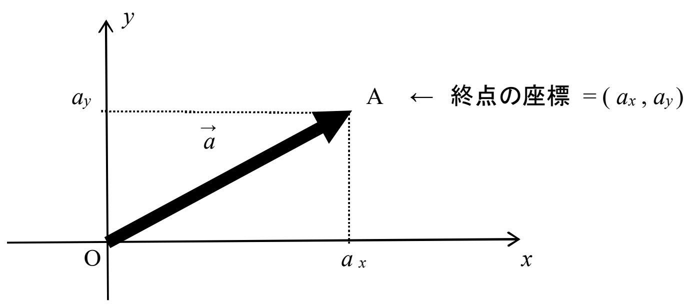
＊ ベクトルの性質

上のようにベクトルを定義すると，下のようなベクトルの性質がある(**ここでは簡単のために 2 次元のベクトルのみを扱う**)．

(1)　成分表示

ベクトルの始点を原点 O にとると，ベクトルは終点の x 座標と y 座標の組で表現できる．例えば，ベクトル $\vec{a}$ の終点の x 座標(x 成分)が a_x，y 座標(y 成分)が a_y である時，ベクトル $\vec{a}$ は下の式のように表される．ベクトルを成分で表す方法を成分表示と呼ぶ．

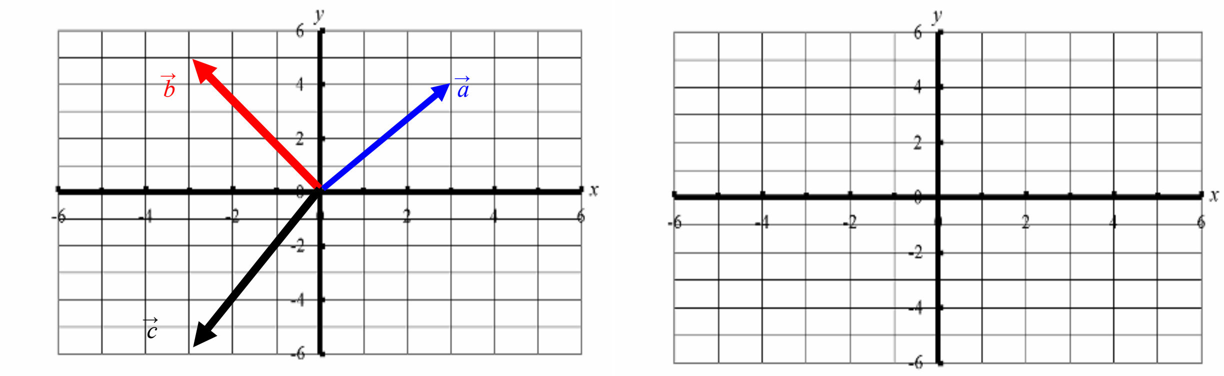
$$\vec{a} = (a_x, a_y) \tag{1-4-2}$$



---

[7] 矢印が始まる点 = 始点，　矢印が終わる点 = 終点

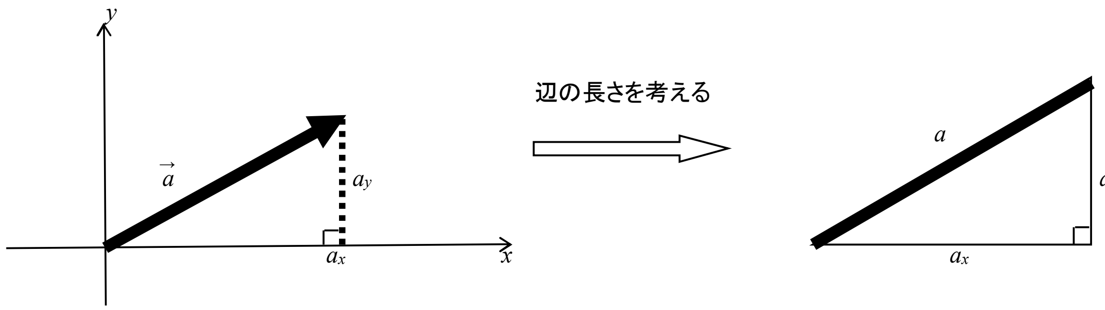
問 1-4-1.　下の左の図に表されたベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を成分表示で表せ.



問 1-4-2.　ベクトル $\vec{d}=(0\,,5)$, $\vec{e}=(-6\,,3)$, $\vec{f}=(-4\,,-5)$ で表されたベクトルを上の右の図に書き込め.

(2)　大きさ(長さ)

ベクトルの大きさは, 矢印の長さである. 数学的にはベクトル$\vec{a}$の大きさは $|\vec{a}|$ と表す[8]. また, 簡単のため, a とすることもある.



大きさ a は三平方の定理より, 下の式のように計算できる.

$$\vec{a}\text{ の大きさ } = |\vec{a}| = a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} \;=\; \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

問 1-4-3.　次のベクトルの大きさを求めよ.　$\vec{a}=(1\,,2)$, $\vec{b}=(-3\,,4)$, $\vec{c}=(-5\,,-12)$

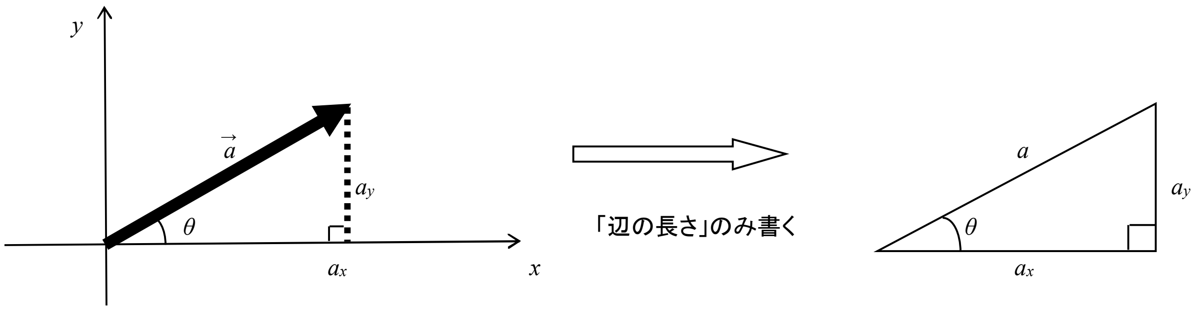
(3)　成分表示をベクトルの大きさとなす角 θ を使っての表示

ベクトルは成分表示で表すことができることを, 性質(1)で示した. 別な表し方として, 成分表示をベクトルの大きさと x 軸からの角度 θ を用いて表すことができる.

下の図から, 三角関数を用いると, $\vec{a}$の x 成分 a_xと$\vec{a}$の y 成分 a_yについて, 下の式で表すことができる.

$$\begin{cases} a_x/a = \cos\theta \\ a_y/a = \sin\theta \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a_x = a\cos\theta & (1\text{-}4\text{-}4) \\ a_y = a\sin\theta & (1\text{-}4\text{-}5) \end{cases}$$

[8] $|\cdot\cdot|$ は絶対値記号といい, $\cdot\cdot$ (ある量)の大きさを指すことを意味する. $\cdot\cdot$ がベクトルの場合はベクトルの大きさ(ベクトルの大きさは, すでに向きを持たない)を指す. したがって, ベクトルの大きさはスカラーとなる.



したがって，ベクトル$\vec{a}$を成分表示を用いて，下の式のように表すことができる．

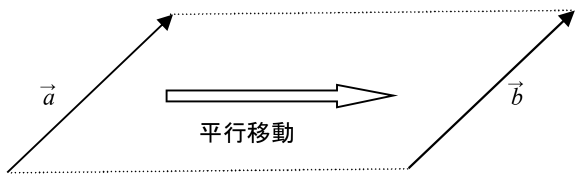
$$\vec{a} = (a_x , a_y) = (a \cos \theta , a \sin \theta) \tag{1-4-6}$$

ここで，$|\vec{a}| = a = 1$ の場合は，$\vec{a} = (\cos \theta , \sin \theta)$ となり，単位円の円周上の位置となる．

問 1-4-4. $|\vec{a}| = a = 2$ で，$\theta = 0$ °，30 °，45 °，60 °，90 °，120 °，135 °，150 °，180 °，210 °，225 °，240 °，270 °，–30 °，–45 °，–60 ° において $\vec{a}$ を成分表示せよ．

(4) 平行移動

ベクトルは大きさと向きを持った量である．ベクトルは平行移動させても大きさと向きは等しいので，ベクトルは平行移動しても同じベクトルとなる．



この時，$\vec{a} = \vec{b}$ が成立する．

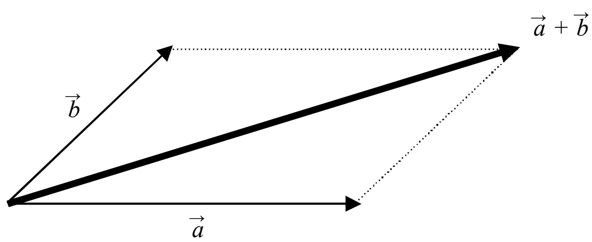
(5) 足し算（ベクトルの合成）

2 つのベクトルを足し合わせることをベクトルの合成と呼ぶ．ベクトルの合成は普通の数のように’ +記号 ’を使って表す．

$$2\text{ つのベクトルの合成} = \vec{a} + \vec{b} \tag{1-4-7}$$

方法(a)

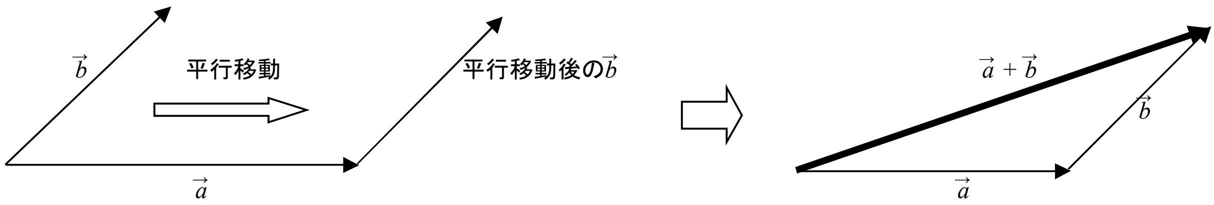
(i) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を一致させ，平行四辺形を作る．
(ii) 同じ始点から平行四辺形の対角方向に矢印を引く． → この矢印が合成したベクトル $\vec{a} + \vec{b}$ に対応する．



方法(b)

(i)　$\vec{b}$の始点を$\vec{a}$の終点に一致させるように，$\vec{b}$ を平行移動させる．

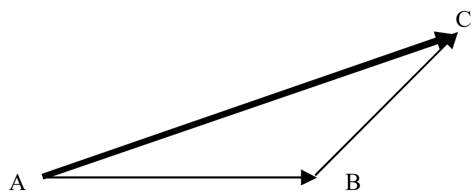
(ii) $\vec{a}$の始点から，平行移動後の$\vec{b}$の終点に向けて矢印を引く．　→　この矢印が合成したベクトル「$\vec{a}+\vec{b}$」に対応



＊方法(b)の別な扱い方(<u>注意</u>　ここで書くことは，便宜的に書いてあり，正確ではない)

3 つの点 A, B, C を考える．上の右の図と同じになるように配置する．

ここで，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ (点 A から点 B に向かうベクトル)，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ (点 B から点 C に向かうベクトル)となる．



$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

(点 A から点 B を経由して点 C へ到達)

→「+」で 2 つのベクトルをくっつける

$=\overrightarrow{A\cancel{BB}C}$　(重なった点 B は消える)

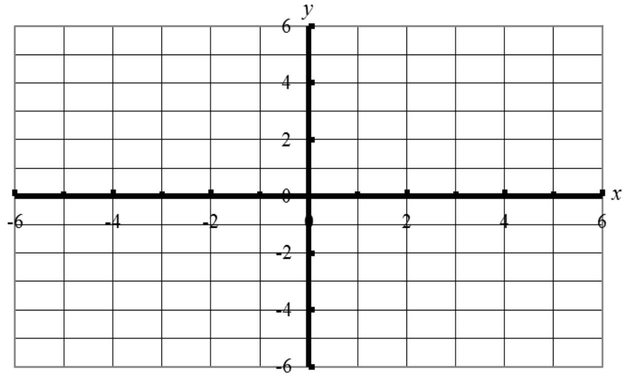
$=\overrightarrow{AC}$ (点 A から直接，点 C へ向かう)

方法(c)　←　**成分表示を使う**

(i)　$\vec{a}$と$\vec{b}$を成分表示して，各々の成分ごとに足し算をする．

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= (a_x, a_y)+(b_x, b_y)\\ &= (a_x+b_x, a_y+b_y)\end{aligned} \tag{1-4-8}$$

問 1-4-5.　ベクトル$\vec{a}=(4, 1)$, $\vec{b}=(1, 3)$, $\vec{c}=(-5, 0)$, $\vec{d}=(-1, -4)$ とするとき，$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{d}$ について，方法(a)のやり方で図示し，次に方法(c)のやり方で求めよ．



＊合成したベクトルの大きさの表し方の注意

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$の大きさは下のように絶対値記号を用いて表す．($|\vec{c}|=c$, $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$)

$$|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}| \tag{1-4-9}$$

$$c=|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}|+|\vec{b}|=a+b \tag{1-4-9'}$$

(6) ベクトルのスカラー積(ベクトルとスカラーのかけ算)

ベクトル$\vec{a}$にスカラーmをかけたものがベクトル$\vec{b}$であるとすると下の式が成り立つ．

$$\vec{b}=m\,\vec{a} \tag{1-4-10}$$

上の式を成分表示で表すと各々の成分にスカラーmをかけて下の式のようになる．

$$(b_x, b_y)=m\ (a_x\ ,\ a_y)=(m\,a_x\,,\,m\,a_y) \tag{1-4-11}$$

問 1-4-6. $\vec{a}=(4,-1)$, $m=2$, $n=-2$ の時，$m\vec{a}$ と $n\vec{a}$ を成分表示で求め，それら 2 つのベクトルの大きさを求め，図示せよ．

$\vec{b}=m\,\vec{a}$ において，$m>0$ の場合は，$\vec{b}$と$\vec{a}$は同じ向きで，$m<0$ の場合は 2 つのベクトルは逆向きになる．また，下の式のように，$\vec{b}$の大きさ$=|\vec{b}|$は，m の大きさ＝$|m|$と$\vec{a}$の大きさ$=|\vec{a}|$ の積として表すことができる．

$$\vec{b}\text{の大きさ}=|\vec{b}|=|m\,\vec{a}|=|m|\,|\vec{a}|=\underbrace{m\text{ の大きさ}}_{\text{正}}\times\underbrace{\vec{a}\text{の大きさ}}_{\text{正}} \tag{1-4-12}$$

上の式を成分で表すと，

$$b=\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2}=\sqrt{(m\,a_x)^2+(m\,a_y)^2}=\sqrt{m^2\,(a_x{}^2+a_y{}^2)}=\sqrt{m^2}\ \sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}=\sqrt{m^2}\ a \tag{1-4-13}$$

となる．また，$m=-1$ の場合は

$$\vec{b}=(-1)\,\vec{a}=-\vec{a} \tag{1-4-14}$$

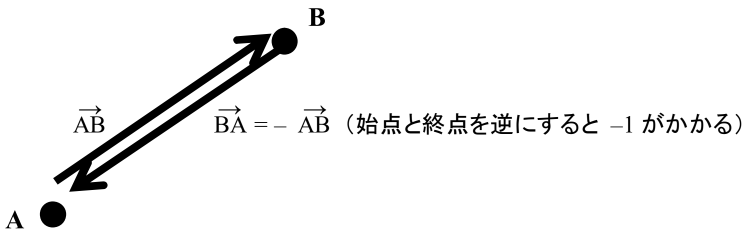
となり，$\vec{b}$ と $\vec{a}$ は互いに逆向きで同じ大きさのベクトルとなる．

＊ $\vec{0}$について

$\vec{0}$は各成分が 0 となるベクトルで，この場合は’ **0** ’ と書いてもよい．

$$\vec{0}=(0,0)=0 \tag{1-4-15}$$

2 点 A, B がある時，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{BA}$は逆向きのベクトルである．この時，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{ABBA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}=0$ となる．



(7) ベクトルの引き算

ベクトルの足し算と同様に引き算もある.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\,\vec{b} \tag{1-4-16}$$

と表すことができるので，ベクトルの引き算の方法として下のような方法がある.

方法(a)

(i) $\vec{b}$ に(-1)をかけて，$-\vec{b}$ を作成する.

(ii) $\vec{a}$ に $-\vec{b}$ を足し合わせる($\vec{a}$ と $-\vec{b}$ を合成する).

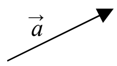
方法(b)　←　成分表示を使う

(i) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を成分表示して，各々の成分に対して引き算をする.

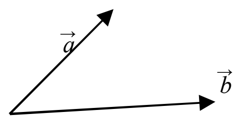
$$\vec{a} - \vec{b} = (\,a_x, a_y\,) - (\,b_x, b_y\,) = (a_x - b_x,\ a_y - b_y) \tag{1-4-17}$$

問 1-4-7. 下の図に表されているベクトルを図で書いて表せ.

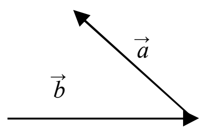
1) $-3\vec{a}$



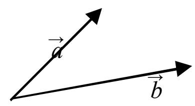
2) $\vec{a} + \vec{b}$



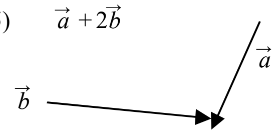
3) $\vec{a} + \vec{b}$



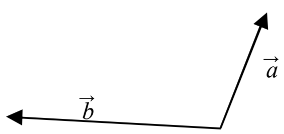
4) $\vec{a} - \vec{b}$



5) $\vec{a} + 2\vec{b}$



6) $\vec{a} - \vec{b}/2$



問 1-4-8. ベクトル $\vec{a} = (4, 1)$，$\vec{b} = (1, 3)$，$\vec{c} = (-5, 0)$，$\vec{d} = (-1, -4)$とするとき，$\vec{a} + 2\vec{b}$，$\vec{a} - \vec{b}$，$\vec{a} - 2\vec{b}$，$\vec{c} - \vec{d}$ について成分表示して，その大きさを計算せよ.

2. 物体の運動

「物理学」を学ぶための数学的な準備ができたので，物理学の基礎となる「**物体**[9]**の運動**」について学習する．「物体が動くということ」は，**時間**が経過するのに伴い，**物体の位置**が**変化する**(移動する)ことを意味する．したがって，運動の性質を調べるためには，**時間**と**物体の位置**について知らなければならない．即ち，これらの量について，**「測定」**しなければならない．なお，物理量は，一般的には測定した量は，**小数とその単位**を用いて表す．また，物理量を表す記号としてはアルファベットやギリシャ文字を用いることが多い．例えば，物理量として，時間は，時間 $t = 2.5\ \mathrm{s}$ のように，物理量表す記号，数値，単位を用いて表す．

2-0. 時間(time) t

時間を測定するために，多くの物理現象の中から規則的な運動を選び，その規則性から一定となる時間間隔を定める．そして，その一定の時間間隔を基にして「時計(時間を測定する器具)」を作成する．例えば，太陽の周りを地球が 1 回転する時間を(恒に，一定と見なして)「1 年」と定める．また，「1 日」は地球が 1 回転の自転をする時間として定める．このようにはじめは，地球，月，太陽などの惑星の規則的な運動を時間の基準に採用した．時は自然に流れ，逆戻りしないが，時の流れの一瞬の瞬間を時刻と呼ぶ．

「時間・時刻」を英語では time と書くので，その頭文字を取って，**時間，時刻を表す記号**として t を用いる．「時間はある時刻とある時刻の間の差」を指す．例えば，始めの時刻 t_1 と終わりの時刻 t_2 として，そ間の時間を Δt とすると，時間 Δt は下の式のように表すことができる．

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \rightarrow \quad \textbf{時間}(\text{終わりの時刻と始めの時刻の間}) = \text{終わりの時刻} - \text{始めの時刻} \qquad (2\text{-}0\text{-}1)$$

(ここで，「Δ (デルタ)」は物理量としての時刻 t の変化量(差)を表している．また，「Δt」はひとまとまりで，「時間 = 時刻の差」の意味であり，掛け算($\Delta \times t$)の意味ではないので注意すること．)

次に，物理で使用される**時間の単位**を，下の表に示す．

日本語	英語	英語の省略形
世紀	century	c
年	year	y
日	day	d
時	hour	h
分	minute	min
秒	second	s

特に，「**秒(second)**」は「物理学」において時間の単位として重要[10]である．また，世界的には単位は上の表に書いたような「英語の省略形」を用いる[11]．これらの単位の間には下の表に示すような単位同士の換算関係が成立する．

1 c = 100 y
1 y = 365 d
1 d = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

[9] ここでは，「物体とは何か?」とは問わないことにする．

[10] 物理学では時間の単位は秒[s]を用いるのが国際基準になっている．

[11] 物理量を表す記号(アルファベット)と単位を表す記号(アルファベット)の使い方の違いに注意すること．物理量を表す記号は，一般に，斜体文字(Italic)を用いる．また，単位はかっこを用いて表すこともある．

＊　**単位の換算について**

1 時間を秒に換算する．上の表より，1 時間は 60 分である．60 分は 1 分(= 60 秒)が 60 だけ集まった時間なので，これを式の形にすると下のようになる．

1 時間 ＝60 分 ＝60×1 分 ＝60×60 秒 ＝3600 秒

さらに，「秒」よりも短い時間については下の表のように m(ミリ)，μ(マイクロ)，n(ナノ)，p(ピコ)などを用いて表す[12]．

記入例	呼び方	
1 ms	1 ミリ秒	$= 10^{-3}$ s
1μs	1 マイクロ秒	$= 10^{-6}$ s
1 ns	1 ナノ秒	$= 10^{-9}$ s
1 ps	1 ピコ秒	$= 10^{-12}$ s

問 2-0-1．　上の表の換算関係を用いて下の問に答えよ．

1)　0.2 h　は何 s か?　　2)　1 s　は何 h か(小数で答えよ)?　　3)　1/12 d　は何 s か?

4)　15 s は何分か，また，何時間か(小数で答えよ)?　　5)　2 h 15 min　は何 h か，また，何 s か?

6)　8130 s は何時間何分何秒か? また，何時間か?

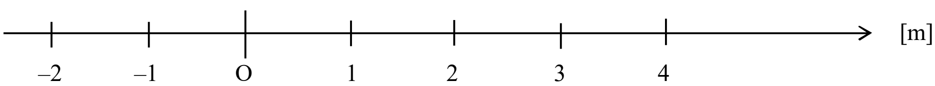
2-1．位置(位置ベクトル)　$\vec{s}$　または　$\vec{r}$

物体の位置は，ある基準となる位置(これを，「基準点」または，「原点」[13]と呼ぶ)を適当に定めて，そこからの長さ(距離)と向きで定める．長さと向きを合わせ持つ量なので，位置はベクトル量のひとつである．位置の単位は長さ(距離)の単位と同じである．世界基準としての長さの単位は m (メートル)が用いられている[14]．日常では長さの単位は km(キロメートル)もよく用いられる(1 km = 1000 m = 10^3 m)．

物体の動きが直線的(1 次元的)，平面的(2 次元的)，立体的(3 次元的)に動くことで，ベクトルを表す成分として，1 次元の運動では 1 成分(x 成分)，2 次元の運動では 2 成分(x 成分と y 成分)，3 次元の運動では 3 成分(x 成分，y 成分と z 成分)で表す．物体の位置も同様に，ある地点を原点 O に選び，1 次元の運動を行う物体の位置は x 座標，2 次元の運動を行う物体の位置は x 座標と y 座標，3 次元の運動を行う物体の位置は x 座標，y 座標と z 座標で表すことができる．

①　1 次元(直線)

直線上のある地点を原点　O　にとり，その点を基準にして，例えば，右にある地点を正(+)に，左にある地点を負(–)にとり，原点からの距離を　m[メートル]単位にとったのが下の図である．



横方向に運動する場合は，位置を表す記号として「x」を用いることが多い．向きは正と負で表す．

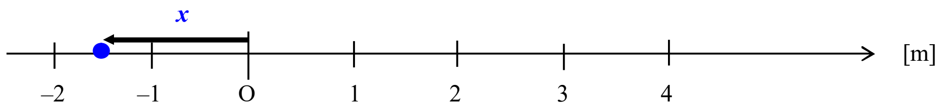
[12]　ミリ，マイクロ，ナノ等は時間だけでなく，質量の単位 g (グラム)に対しても用いる．例；mg(ミリグラム)，μg(マイクログラム)

[13]　基準点，原点はアルファベットの記号「**O**」を用いて表す．グラフの原点も記号「O」を用いる．

[14]　1 m(メートル)は．現在の定義は違うが，元々は赤道から北極(南極)までの地球表面上の長さの「1000 万分の 1」と定めた．

位置 $= x$ (2-1-1)

例えば，物体の位置 $x = -1.5$ m であれば，下の図のように数直線上での位置を表す．



また，原点からの距離(長さ)は位置の絶対値記号を使って表す．

原点からの距離 $= |x| = \sqrt{x^2}$ (2-1-2)

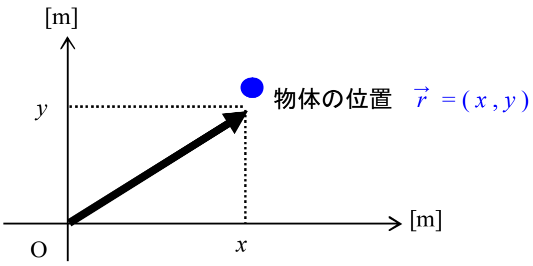
＊ 1 次元の位置を表す他の記号

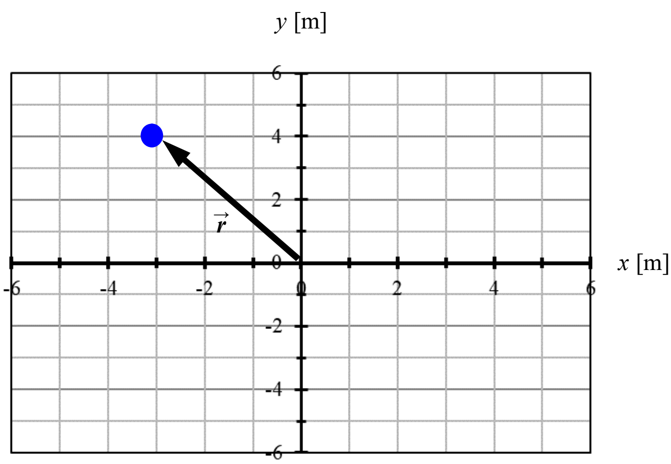
1 次元(直線)上を運動する場合，他の記号を用いる場合もある．例えば，鉛直方向(縦方向)に運動する場合は，位置を「y」で表すことが多い．また，記号「s」を用いる場合もある．ベクトルを用いると，位置$\vec{r}$，または，$\vec{s}$は，$\vec{r} = (x) \rightarrow x$，または，$y$, $\vec{s} = (s) \rightarrow s$ と 1 成分のみで表すことに対応する[15]．

② 2 次元(平面)

ある地点を原点 O に選び，横軸を x 軸(右向きを正とする)，横軸と直交する縦軸を y 軸(上向きを正とする)にとり，2 次元(平面)上にある物体の位置について，ベクトルを用いて$\vec{r}$と表す．位置$\vec{r}$は下の式のように，x 座標と y 座標で表す[16]．

$\vec{r} = (x, y)$ (2-1-3)





例えば，物体の位置$\vec{r} = (-3.0, 4.0)$ m であれば，右の図のようにベクトルの矢印を用いて表す．

原点からの距離(長さ)r は，絶対値記号を用いて，下の式のように三平方の定理を用いて求めることができる．

原点からの距離 $= r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (2-1-4)

[15] s, x, y のうち，どの記号を用いるかは場合による．横方向の運動では x，縦方向の運動では y を用いることが多い．
[16] 横軸や縦軸で単位はかっこを用いて表す．例えば，m(メートル)では，[m]，または，(m)と表す．

上の図の例では，原点からの距離$= r = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5.0\ \mathrm{m}$ となる．

③ 3 次元(空間)

同様に，3 次元(空間)で運動する物体の位置$\vec{r}$は下の式のように，互いに直交するx座標，y座標，z座標を用いて表し，また，原点からの距離rも下の式のように計算することができる．

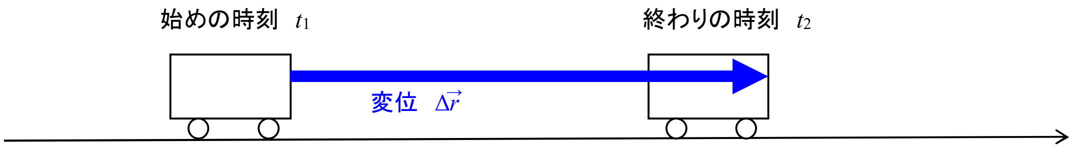
$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{2-1-5}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2-1-6}$$

・ **変位**

物体が運動している場合，位置が時間とともに変化する．「位置の変化量を変位」と呼ぶ．例えば，時刻 t_1 で位置 $\vec{r}_1$ にあり，その後，この物体が運動し，時刻 t_2 で位置 $\vec{r}_2$ に達した場合，**変位** $\Delta\vec{r}$ は下の式のように表すことができる[17]．

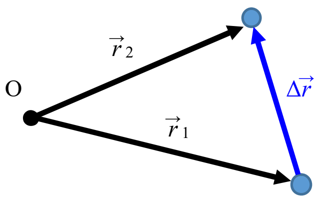
$$\Delta\vec{r} = \text{終わりの位置} - \text{始めの位置} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{2-1-7}$$



また，(1-1-7)式を変形すると，下の式のように表すこともできる．

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \text{終わりの位置} = \text{始めの位置} + \text{変位} \tag{2-1-8}$$

ベクトルとしての図では下のように表すことができる．



2 次元での運動では，時刻 t_1 で位置 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$，時刻 t_2 で位置 $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$とすると，変位 $\Delta\vec{r}$とその間の動いた長さ(距離) Δr は下の式のように表すことができる．

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\rightarrow \quad \Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{2-1-9}$$

$$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2-1-10}$$

問 2-1-1.

1) 直線上のある位置を原点 O とする．始め，原点 O から右に 2.0 m にいた物体が，30 秒後には原点から左に 4.0 m にいたとする．この物体の始めの位置 x_1, 30 秒後の位置 x_2, 30 秒間での変位 Δx を求めよ． (右向きを「+」とする)
2) 平面上のある位置を原点 O とする．始め，原点 O から東に 2.0 m，南に 5.0 m の地点にいた物体が，20 秒後には原点 O

[17] 変位「$\Delta\vec{r}$」や時間「Δt」で用いられる「Δ」は「変化量」や「差」という意味である．様々な物理量において変化量は，必ず，「**変化量(変化分) = 終わりの量 − 始めの量**」として計算する．

から西に 3.0 m に，北 7.0 m の地点にいたとする．この物体の始めの位置$\vec{r}_1$，20 秒後の位置$\vec{r}_2$，20 秒間での変位 $\Delta\vec{r}$を成分表示で表し，動いた距離 Δr を求めよ．　(東向きを $+x$ 方向，北向きを $+y$ 方向とする)

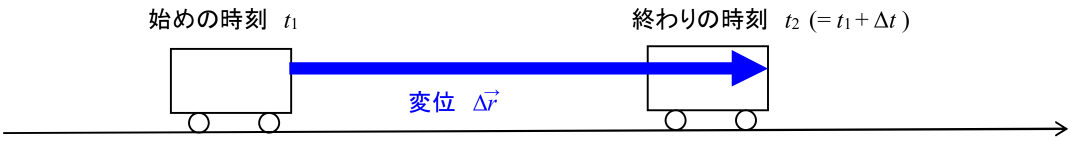
3) ある物体の始めの位置が原点 O から左に 3.0 m ($x_1 = -3.0$ m)であった．この物体の変位 $\Delta x = 8.0$ m であったとすると，この物体の終わりの位置 x_2を求めよ．

4) ある物体の終わりの位置$\vec{r}_2 = (2.0\ , 5.0)$ m である．この物体の変位 $\Delta\vec{r} = (3.0\ , 1.0)$ m であるとすると，この物体の始めの位置$\vec{r}_1$を求めよ．

2-2. 速度(velocity) $\vec{v}$

物体が運動するという現象は，「時刻とともにその位置が変化する」現象である．運動の激しさを比べる物理量として「**速度**」がある．速度を，**「1 秒間当たりの，位置の変化量」**として定義しよう．この定義から，より激しい運動では，1 秒間当たりの位置の変化量がより大きくなり，速度の値もより大きくなる．

ある物体が始めの時刻 t_1 で位置 $\vec{r}_1$ にあり，その後，この物体が運動し，終わりの時刻 t_2 (= $t_1 + \Delta t$) での位置 $\vec{r}_2$ まで移動したとしよう．



この時，この物体の**平均の速度 $\vec{v}$** は，下の式のように，位置の変化量(変位) $\Delta\vec{r}$を分子，移動に要した時間 Δt を分母とすると，「1 秒間当たりの変位」を表すことができる．

$$\vec{v} = \frac{\text{位置の変化量(変位)}}{\text{移動に要した時間}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

上の式で表した速度は時刻 t_1 と時刻 t_2 の間の平均速度なので，その速度に対応する時刻は，2 つの時刻の平均値である時刻 $t = (t_1 + t_2)/2$ とする．

上の式でわかるように速度はベクトル量の一つである．物理[18]では，速度の大きさを速さと呼ぶ．速さ v はスカラー量となる．

$$v = \text{速度の大きさ} = |\vec{v}| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\text{移動距離}}{\text{移動に要した時間}} \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

ここで，$\Delta r = |\Delta\vec{r}|$ = 変位の大きさ = 移動した距離，移動に要した時間 Δt とした．

・単位と単位の換算の仕方

(2-2-1)式からもわかるように，速度の単位は，分子が位置の単位となり，分母が時間の単位となる．

$$\text{速度の単位} = \frac{\text{変位の単位}}{\text{時間の単位}} = \frac{\text{m(メートル)}}{\text{s(秒)}} = \text{m/s} \quad \text{(呼び方；メートル毎秒[19])} \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

また，km/h (キロメートル毎時)も速度の単位である．もちろん，速さの単位は速度の単位と同じである．

速度の単位の換算は分子と分母に分けてそれぞれ換算して，最後に数値を計算する(最終的には**小数**[20]で求めること)．例えば，1 m/s は下の式のように計算し，km/h に換算する[21]．

[18] 日常生活では「速度(velocity)」と「速さ(speed)」の区別はない．
[19] あるいは，「メートル・パー・セカンド」でもよい．「パー(per)・・」は「・・当たり」という意味である．
[20] 物理では，道具を使って量を測定することになる．器具を使っての測定は**分数でなく**，小数で表示される．

$$1\ \text{m/s} = \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{\frac{1}{1000}\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = \frac{3600}{1000}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 3.6\ \text{km/h} \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

問 2-2-1.

1) 10 m/s は何 km/時か?
2) 時速 90 km は何 m/s か?
3) ある物体は 4.0 km 動くのに 40 分かかった. この物体の速さは時速何 km か? また, 秒速何 m か?
4) 20 m/s の速さで 20 秒間に動く距離を求めよ.
5) 20 m/s の速さで 600 m 動くのに要する時間は何分か?
6) 2 分 30 秒で 750 m 動く物体の速さは何 m/s か?
7) あるマラソン選手は 42 km を 2 時間 15 分で走るという. このマラソン選手の平均の速さは何 km/h か? また, 何 m/s か?

・速度の成分表示

2 次元(平面上)の運動の場合, 速度はベクトル量なので 2 成分(x 成分と y 成分)を用いた表示ができる. 速度 $\vec{v}$ を成分表示すると下の式のように表すことができる.

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

速度の大きさ, すなわち, 速さ $v\,(=|\vec{v}|)$は下の式のように三平方の定理を用いて求めることができる.

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

問 2-2-2.

1) 直線上のある位置を原点 O とする. 始め, 原点から右に 2.0 m ($x_1 = 2.0$ m)にいた物体が, 30 秒後には原点から左に 4.0 m ($x_2 = -4.0$ m)にいたとする. この物体の速度 v を求めよ.
2) 平面上のある位置を原点 O とする. 始め, 原点から東に 2.0 m, 南に 1.0 m の地点($\vec{r}_1 = (2.0, -1.0)$ m)にいた物体が, 0.5 秒後には原点 O から西に 3.0 m に, 北に 3.0 m の地点($\vec{r}_2 = (-1.0, 3.0)$ m)にいたとする. このとき, 物体の変位 $\Delta\vec{r}$, 動いた距離 Δr, 速度$\vec{v}$, 速さ v を求めよ.
3) ある物体は 4 分間に右へ 120 m 動いた. この物体の速度 v を求めよ.
4) 速度$\vec{v} = (2.0, 3,0)$ m/s で動いている物体がある. 3.0 秒間でのこの物体の変位 $\Delta\vec{r}$を求めよ.
5) 右へ 3.0 m/s で動いている物体が 36 m 動くのに要する時間 t を求めよ.
6) 始め, 原点 O にあった物体が 4.0 秒後に西へ 16 m, 北へ 12 m 動いた. この物体の速度$\vec{v}$と速さ v を求めよ.
7) 時刻 $t_1 = 2.0$ 秒の時, ある物体の位置$\vec{r}_1 = (2.0, -1.0)$ m であった. その物体が時刻 $t_2 = 5.0$ 秒で位置$\vec{r}_2 = (-4.0, 7.0)$ m に到達した. このとき, この物体の変位 $\Delta\vec{r}$, 動いた距離 Δr, 速度$\vec{v}$, 速さ v を求めよ. 次に, この求めた速度で動くとして時刻 $t_3 = 10$ 秒での物体の位置$\vec{r}_3$ を求めよ.

・平均の速度と瞬間の速度

(2-2-1)式の分母の「移動に要した時間」がとても小さな時間となる場合はこの速度は瞬間的な速度[22]とみなしてよい. また, 比較的長い場合は平均の速度として扱うことができる.

---

[21] 今は, 道具を使って数値を読み取る際, 数値をどのケタまで読み取れるか(有効数字)については考えないことにする.
[22] 「瞬間の速度」とは, 本来は「移動に要した時間」が無限小の場合を指すが, ここではあまりこだわらなくともよい(厳密には, $(t_2-t_1)/t_1$, または, $(t_2-t_1)/t_2$ か, $(t_2-t_1)/((t_1+t_2)/2)$が 1 より非常に小さい時, 瞬間の速度と見なしてよい).

(移動に要した時間 $\Delta t \to 0$ に近づける(Δt を微小時間にとる)　　平均速度 → 瞬間速度

・等速度運動

速度 $\vec{v}$ に対し時間が経過してもその大きさ(速さ)と向きがが一定の場合．等速度運動(または，等速直線運動)と呼ぶ．したがって，(1-2-1)式から下の式のようになる．

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \text{一定} \tag{2-2-7}$$

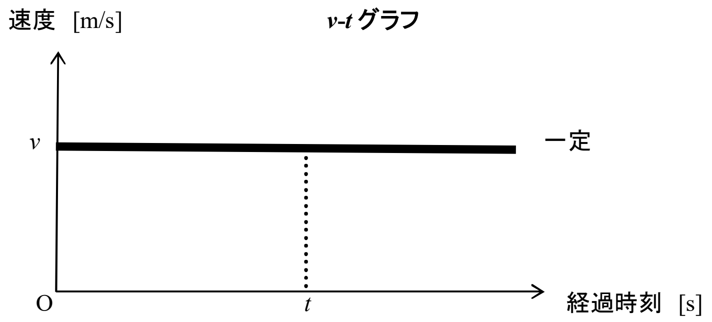
1 次元(直線上)で運動する場合，物体が動く一直線(1 次元)上の向きを+方向にとると，この運動は直線上の運動になる．特に，初期位置 x_0 を原点 O にとると，変位 Δx は終わりの位置 x と等しくなり($\Delta x = x - x_0 = x$)，初期時刻 t_0 を 0 にとると，移動に要した時間 Δt も時間 t を用いると($\Delta t = t - t_0 = t$)，下の式のように表すことができる(一直線上の運動では，「+」と「−」で向きを表す)．

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x}{t} = \text{一定値} \tag{2-2-8}$$

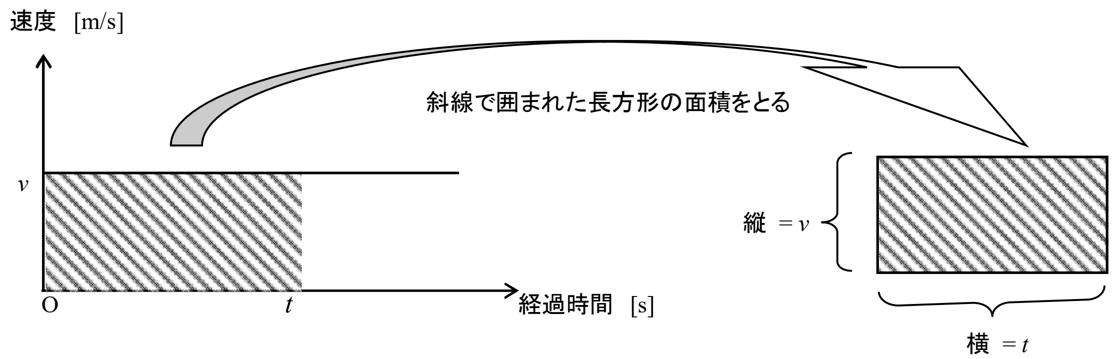
上の式より，時刻 t での位置 x は，下の式で表すことができる．

$$x = v\ t = \text{一定値} \times t \tag{2-2-9}$$

(2-2-8)式や(2-2-9)式を満たす等速度運動の場合，横軸に(始めの時刻を $t = 0$ として)時刻 t [s]，縦軸に速度 v [m/s] をとったグラフ(***v-t* グラフ**と呼ぶ)を描くと下の図のようになる．



時刻 t での位置(変位) x は[23]下の図に表すように v-t グラフの横軸，縦軸とグラフの直線で囲まれた長方形の面積[24]に相当する．



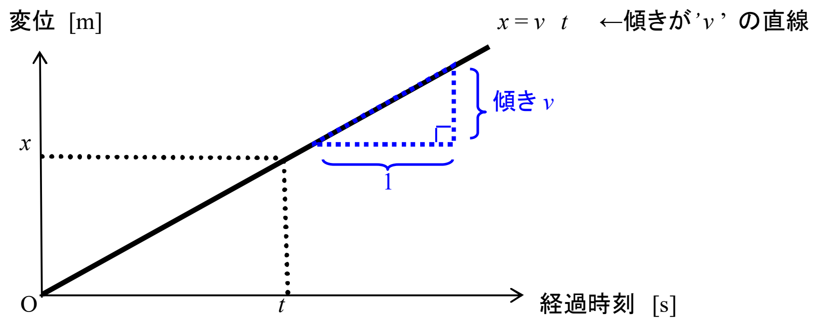
***v-t* グラフの面積**(囲んだ長方形の面積) = 縦 × 横 = $v \times t$ = 変位(位置) x

[23] 始めの位置を’0’として位置の基準とした場合，変位は物体の位置と等しくなる．
[24] ここでの面積は「長さ×長さ」の単位ではなく，単純に「縦×横」ということである．

この長方形の面積の単位 ＝ 縦の単位×横の単位 ＝ [m/s] × s = m(メートル) = 距離の単位

また，横軸に時刻 t [s] ，縦軸に位置 x [m] をとったグラフ(x-t **グラフ**と呼ぶ)を描くと下の図のように原点 O を通る比例関係を示すグラフとなる．この x-t グラフの直線(速度 v が一定の時)の傾きが比例定数で，速度 v に相当する．

***x-t* グラフ**



x-t グラフの傾き ＝ 速度 v

2-2. のまとめ

時間 Δt 秒間に物体の変位(位置の変化) $\Delta\vec{r}$ [m]とするとその物体の速度(1 秒間当たりの変位) $\vec{v}$ [m/s]は下の式で表される．

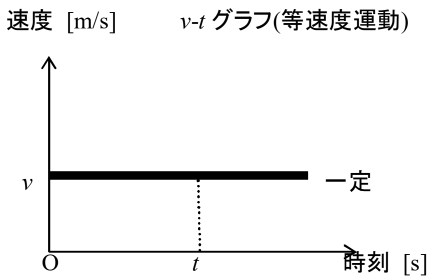
$$\vec{v} = \frac{\text{変位}}{\text{移動に要した時間}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2\text{-}2\text{-}10)$$

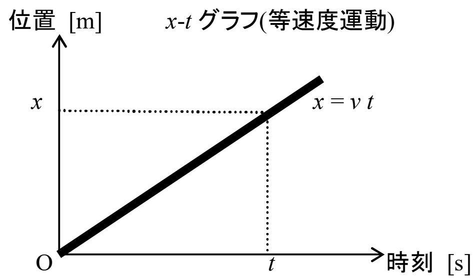
・等速度運動の場合

一直線上の運動とみなすことができ，速度 v が一定なので，下の式のように表される．

$$v = \frac{x}{t} = \text{一定} \qquad (2\text{-}2\text{-}11)$$

v-t グラフ(縦軸に速度 v [m/s]を取り，横軸に時刻 t [s]を取ったグラフ)では，速度 v が一定であり，横軸と平行なグラフとなる．そして，x-t グラフ(縦軸に変位 x [m]を取り，横軸に時刻 t [s]を取ったグラフ)では，原点を通り，右上がりの直線となる．





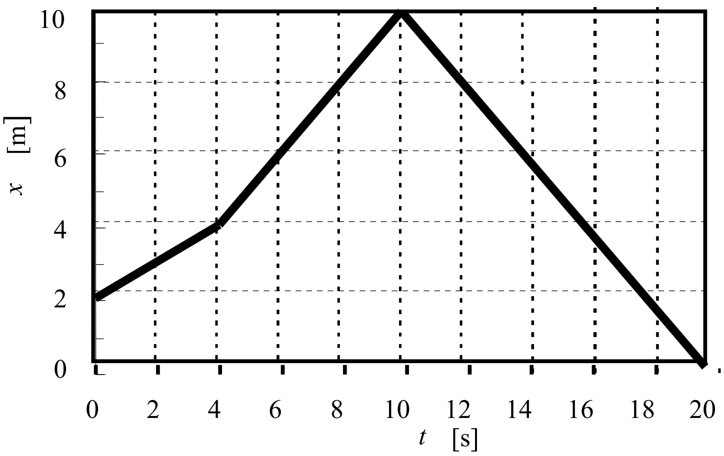
位置 x = (v-t グラフで囲んだ面積)
速度 v = (x-t グラフでの直線の傾き)

問 2-2-3.

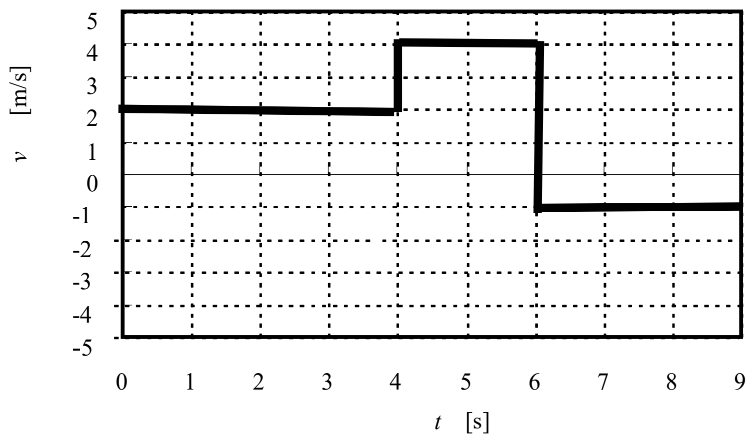
1) 始め(時刻 $t = 0$)で，物体は位置 $x = 0$ m にあった．時刻 t [s]が，$0 \leqq t \leqq 2.0$ [s]で物体は速度 $v = 3.0$ m/s の等速度で動いた．この物体の運動を表す v-t グラフと x-t グラフを作成せよ．

2) 始め(時刻 $t = 0$)で，物体は位置 $x = 2.0$ m にあった．$0 \leqq t \leqq 2.0$ [s]で物体は速度 $v_1 = 3.0$ m/s の等速度で動いた．さらに，$2.0 < t \leqq 5.0$ [s]で物体は速度 $v_2 = 4.0$ m/s の等速度で動いた．この物体の運動を表す v-t グラフと x-t グラフを作成せよ．

3) 下に示した x-t グラフより，v-t グラフを作成せよ．



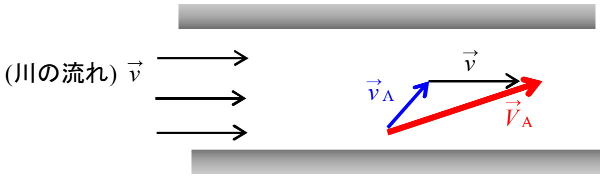
4) 下に示した v-t グラフより，x-t グラフを作成せよ(時刻 $t = 0$ での位置 $x = 0$ m とする)．



* 合成速度 (省略してよい)

静水中の速度が $\vec{v}_A$ となる船 A があり，速度 $\vec{v}$ で流れている川の中を船 A が航行するとき，岸から見た船 A の速度 $\vec{V}_A$ は，船 A が川の流れに押されるので，2 つの速度の合成として，下の式のように 2 つのベクトルの合成(足し算)として表される．

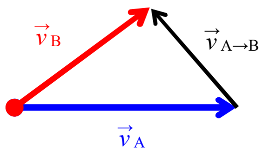
$$\vec{V}_A = \vec{v}_A + \vec{v} \tag{2-2-12}$$



* 相対速度　(省略してよい)

速度$\vec{v}_A$で動く物体 A と速度$\vec{v}_B$で動く物体 B がある．物体 A にいる人から物体 B を観測した時の速度$\vec{v}_{A\to B}$を物体 A に対する物体 B の相対速度と呼び，下の式で表すことができる．添え字の「A→B」は「A から見た B」を表す．

$$\vec{v}_{A\to B} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \tag{2-2-13}$$



物体 A から物体 B を見るということは，「物体 A を基準とした物体 B の速度」となるので，物体 B から基準となる物体 A の速度を引いている．この関係もベクトルとしての引き算として計算する．どのように見えるかは，どちらかの物体が静止している場合を考えると理解しやすい．

2-3.　加速度(acceleration)　$\vec{a}$

等速度運動は速度が一定となる運動であった．しかし，例えば，自動車が発車するときは止まっていた状態(速度 = 0)から速度を上げていく(速度が 0 でない状態となる)．そこで，速度が変化する様子を特徴づける量として，加速度(加速する度合い)を導入する．加速度は，「**1 秒間当たりの，速度の変化量**」と定義する．ある物体が始めの時刻 t_1 で速度 $\vec{v}_1=(v_{1x}, v_{1y})$ で動いていて，その後，終わりの時刻 t_2 ($t_2=t_1+\Delta t$)での速度 $\vec{v}_2=(v_{2x}, v_{2y})$で動いていたとしよう．

この間の速度の変化 $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ で，それに要した時間 $\Delta t = t_2 - t_1$ となるので，この物体の加速度 $\vec{a}$ は下の式で表すことができる．この加速度は平均の時刻 $=(t_1+t_2)/2$ における平均の加速度となる[25]．

$$\vec{a} = \frac{\text{速度の変化}}{\text{要した時間}} = \frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{2-3-1}$$

速度が一定の場合は，上の式より加速度 $\vec{a}=\mathbf{0}$ となる．しかし，速さが一定(等速運動)でも，速度の向きが変化する場合は(向きが変化する場合は等速度運動ではない)，速度 $\vec{v}$ は一定ではないので，「 $\vec{a}\neq 0$ 」となる．

・単位

(2-3-1)式から，加速度 $\vec{a}$ の単位は，分子が速度の単位で，分母が時間の単位であるので，

$$\text{加速度の単位} = \frac{\text{速度の単位}}{\text{時間の単位}} = \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{m/s^2} = \text{メートル毎秒毎秒} \tag{2-3-2}$$

速度の単位の換算と同様に，単位を換算する時は分子と分母，それぞれで換算して計算する．

[25] 減速する場合も減速度とは呼ばずに，加速度と呼ぶ(速度の変化 ＝ 終わりの速度 － 始めの速度)．

問 2-3-1.

1) ある自動車は速度$v_1 = 4.0$ m/sから速度$v_2 = 20$ m/sになるのに時間$t = 4.0$秒かかった．この時の加速度aを求めよ．

2) ある自動車は信号で止まった状態から，時速72 kmになるのに20秒かかった．この時の平均の加速度aは何m/s^{2}か?

3) ある自動車がブレーキをかけたところ，時速54 kmから時速9 kmになるのに5.0秒かかった．この時の平均の加速度aは何m/s^{2}か?

4) ある自動車は加速度$a = 2.0$ m/s^{2}で加速している．始め，速度$v_1 = 4.0$ m/sで動いていた自動車の 3.0秒後の速度を求めよ．

・加速度の成分表示

2 次元(平面上)の運動の場合，加速度もベクトル量なので 2 成分(x 成分とy 成分)を用いた表示ができる．(2-2-5)式のように加速度 $\vec{a}$ を成分表示すると，速度の変化 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_{2x}, v_{2y}) - (v_{1x}, v_{1y}) = (v_{2x} - v_{1x}, v_{2y} - v_{1y}) = (\Delta v_x, \Delta v_y)$ とすると，下の式のように成分で表すことができる．

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

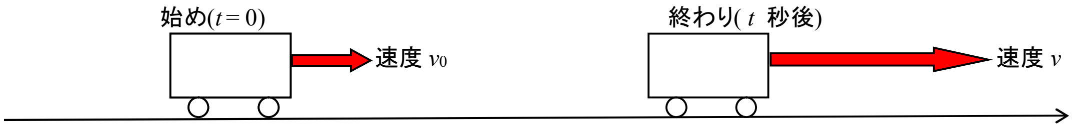
また，加速度の大きさ a (= $|\vec{a}|$)は下の式のように三平方の定理を用いて求める．

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)^2} \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

平均の加速度,瞬間の加速度についても速度と同様に扱う．

・直線(1 次元)上の等加速度運動

直線(1 次元)上で等加速度運動する物体がある．始め(時刻$t = 0$とする)この物体の速度(初速度)がv_0 であった．その後，t 秒だけ時間が経過しところ，速度v となった．この時，一定の加速度 a は(2-3-1)式から，下の式のように表すことができる．



$$a = \frac{\text{速度の変化}}{\text{要した時間}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \text{一定} \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

物体が動いている向きを+方向とすると，上の式で加速度 a の符号が正と負の時，物体の運動は下のように分類できる．

$$\begin{cases} a > 0 & \text{加速(速度は時間の経過とともに増えている).} \\ a = 0 & \text{加速なし(速度が一定で動いている．または，止まったままである).} \\ a < 0 & \text{減速(速度は時間の経過とともに減っている).} \end{cases}$$

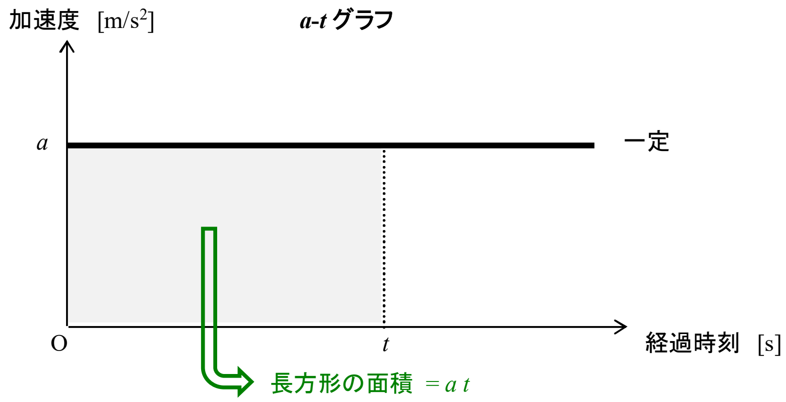
(2-3-5)式を変形すると，時刻 t での速度 v は下の式で表すことができる．

$$\boldsymbol{v = v_0 + a\,t} \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

上の式の意味は下の式のように，時刻 t での速度 v は 2 つの項の足し算として表すことができる．

$$\text{時刻}\ t\ \text{での速度} = \text{初速度} + t\ \text{秒間の間に加速した分の速度} \tag{2-3-7}$$

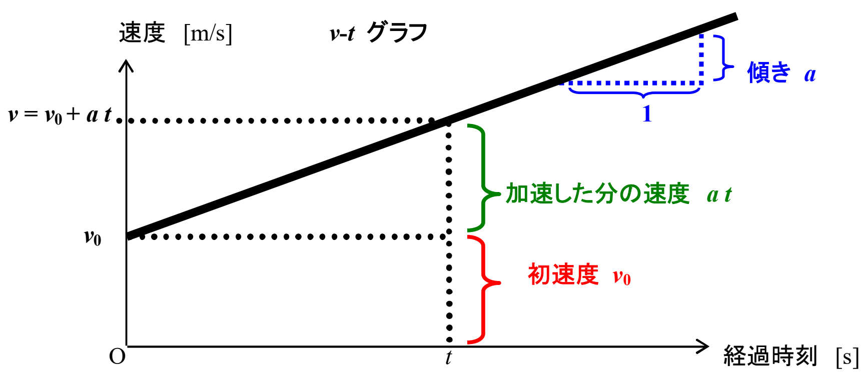
等加速度運動の場合，横軸に(始めの時刻を $t = 0$ として)始めからの経過時刻 t [s]，縦軸に加速度 a [m/s^2] をとったグラフ(a-t グラフと呼ぶ)を書くと下の図のように，時間変化しない一定のグラフとなる．



上の a-t グラフで囲まれた面積($= a\,t$)は時刻 $t = 0$ から，速度が加速した分の速度($= \Delta v = v - v_0$)とみなすことができる．

$$\Delta v = v - v_0 = a\,t\ (a\text{-}t\ \text{グラフの面積}) \quad \rightarrow \quad v = v_0 + a\,t$$

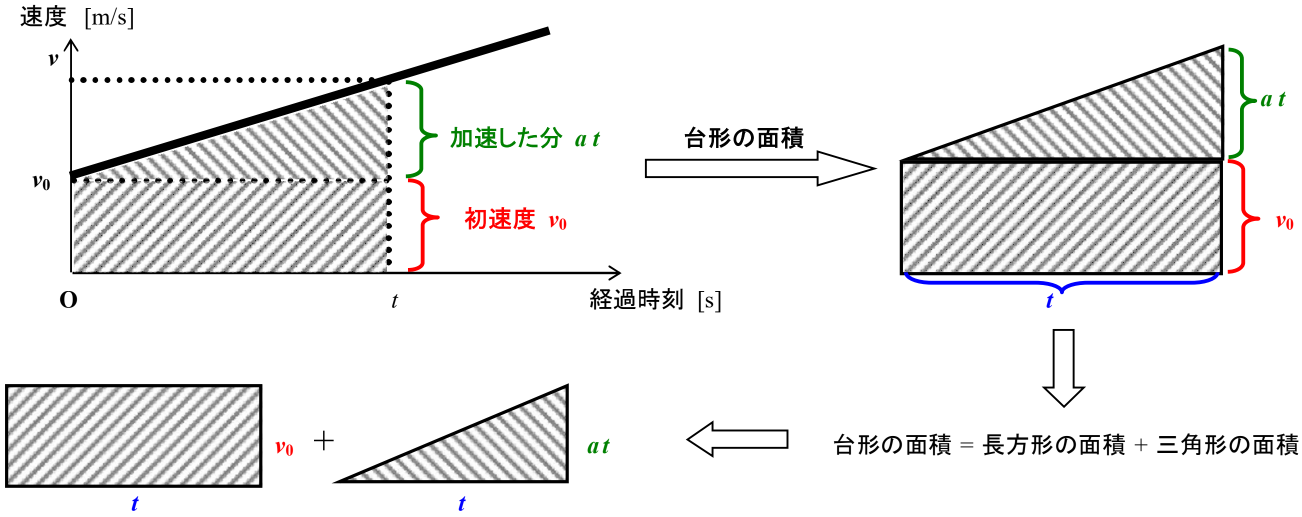
また，(2-3-6)式を満たす物体の運動に対し，v-t グラフを書くと下のようになる．



上のグラフからも時刻 t での速度 ’v‘ は初速度 ’v_0‘ に加速度によって速度が変化した分の速度 ’$a\,t$‘ の足し算になっていることがわかる．また，この直線の傾きが加速度 a となる．

$$v\text{-}t\ \text{グラフの傾き} = \text{加速度}\ a$$

さらに，等速度運動で物体の変位を v-t グラフの面積から求めたのと同様にここでも，v-t グラフの面積が変位となる(ここでは v-t グラフで囲まれた面積が台形となるので台形の面積となる．台形の面積を長方形の面積と三角形の面積の和として考える)．



長方形の面積= $v_0\ t$　　　　三角形の面積 $= \dfrac{(a\,t)\times t}{2} = \dfrac{a\,t^2}{2}$

したがって，t 秒間の物体の変位 x (= 位置の基準点を原点にとった時は位置と等しい)は下の式が成立する．

変位　x = (v-t グラフの面積)　→

$$x = v_0\ t + \frac{1}{2}\ a\,t^2 \qquad (2\text{-}3\text{-}8)$$

上の式の意味は下の式のように表すことができる．

時刻 t での位置(t 秒間の変位) = 初速度で動いた分 ＋ 加速度によって動いた分　　　(2-3-9)

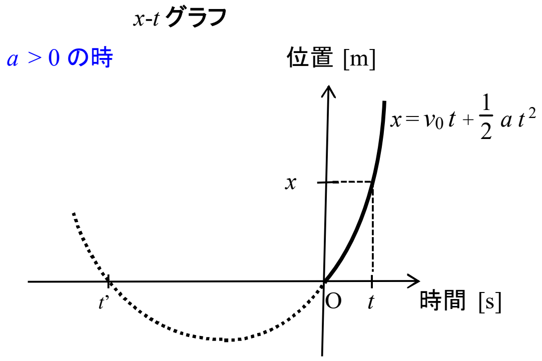
次に，x-t グラフを書くために，下の手順に従って(2-3-8)式を調べる．

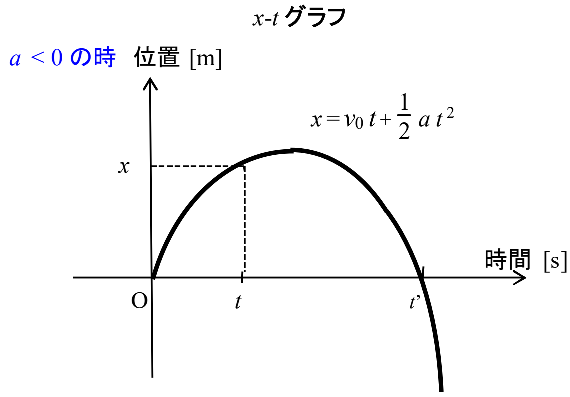
(i)　時間 t に対して 2 次関数となるので，加速度 a が正なら下に凸，加速度 a が負なら上に凸の放物線となる．

(ii)　時間 $t = 0$ を代入すると $x = 0$ となる(→ 位置の基準点として時刻 $t = 0$ での位置を基準点とした)．

(iii)　因数分解すると $x = t\,(v_0 + a\,t/2)$ となるので，$x = 0$ となる(横軸を横切る)時刻 t は $t = 0$ または，
$t = t' = -2v_0/a$ となる．

上の 3 つの性質から，加速度 $a > 0$ と加速度 $a < 0$ の場合についての x-t グラフを書くと下の図のようになる($v_0 > 0$ の場合)．





(上の左図では時刻 $t < 0$ の場合は物理では取り扱わないので点線とした[26])

* (2-3-6)式と(2-3-8)式から時刻 t を消去した式(位置 x と速度 v，初速度 v_0 の関係式)　→ 省略してもよい

(2-3-6)式より，時刻 t は下の式のように表すことができる．そして，下の式を(2-3-8)式に代入する．

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = v_0\,\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{2v\,v_0 - 2v_0{}^2}{2\,a} + \frac{v^2 - 2v\,v_0 + v_0{}^2}{2\,a} = \frac{v^2 - v_0{}^2}{2\,a} \qquad \rightarrow \text{(両辺に } 2a \text{ をかける)}$$

$$\boldsymbol{2\,a\,x = v^2 - v_0{}^2} \qquad (2\text{-}3\text{-}10)$$

上の式は，(2-3-6)式と(2-3-8)式から導出でき，この 2 つの式を用いることと同じだが，場合によっては計算を省略でき，便利な公式としても使うこともできる．

・平面(2 次元)や立体(3 次元)での等加速度運動

直線上(1 次元)の等加速度運動の振る舞いは(2-3-6)式と(2-3-8)式で表される．2 次元や 3 次元での運動はベクトルとして扱うことになるので，初期位置 $\vec{r}_0$ とすると，(2-3-6)式と(2-3-8)式を拡張して下の式でその運動を表すことができる．

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad (2\text{-}3\text{-}11)$$

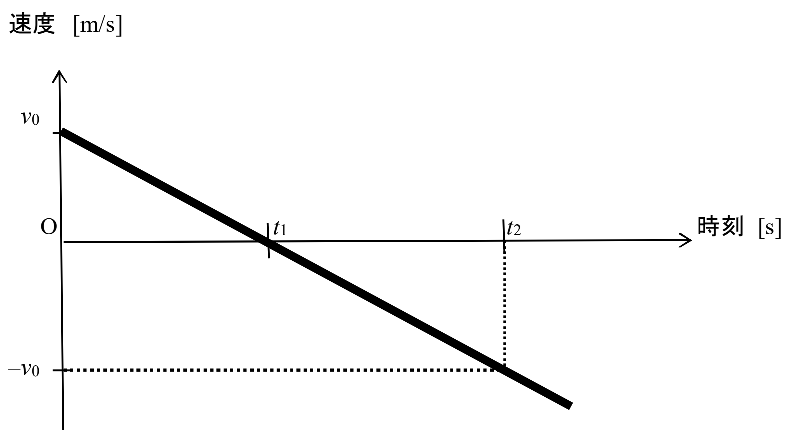
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2 \qquad (2\text{-}3\text{-}12)$$

2 次元の運動の場合，成分表示すると，位置 $\vec{r} = (x\,, y)$，速度 $\vec{v} = (v_x, v_y)$，加速度 $\vec{a} = (a_x\,, a_y)$ となる．

・ 初速度 $v_0 > 0$ ，加速度 $a < 0$ における運動の様子

(2-3-6)式と(2-3-8)式で表される等加速度直線運動において，初速度 $v_0 > 0$，加速度 $a < 0$ の場合の運動の様子を考える．この場合の v-t グラフは下のように，右下がりのグラフになる．

***v-t* グラフ**



[26] 数学的には，時刻 $t < 0$ の場合も取り扱うこともできる．

このグラフでは横軸を横切る時刻 t_1 がある．時刻 t_1 では速度 $v=0$ となる(この時，一瞬，静止する)ので(2-3-6)式より，

$$v=0 \quad \rightarrow \quad 0=v_0+a\,t_1 \quad \rightarrow \quad t_1=-\frac{v_0}{a} \tag{2-3-13}$$

と求められる．また，速度 $v=-v_0$ (この時，速度の向きが逆で大きさが同じ速度である)となる時刻を $t=t_2$ とすると，(2-3-6)式から

$$v=-v_0 \quad \rightarrow \quad -v_0=v_0+a\,t_2 \quad \rightarrow \quad t_2=-\frac{2v_0}{a} \tag{2-3-14}$$

となる．さらに，$t=t_2=-\dfrac{2v_0}{a}$ を(2-3-8)式に代入すると，

$$x(t=t_2)=v_0\,t_2+\frac{1}{2}\,a\,(t_2)^2=t_2\,(v_0+\frac{1}{2}\,a\,t_2)=0 \tag{2-3-15}$$

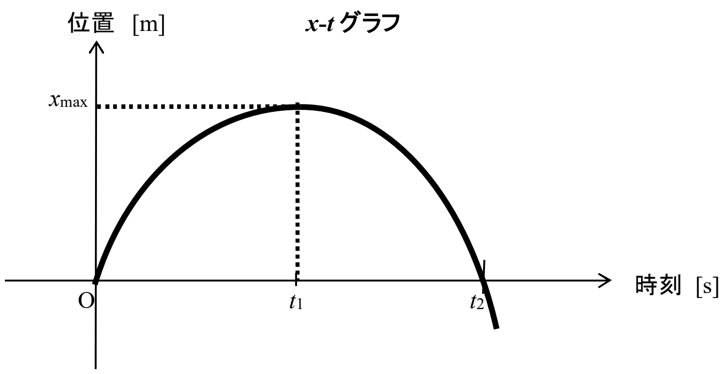
となり，物体の位置 x が元の位置($t=0$ での位置)に戻ることがわかる．(2-3-8)式に対し，完全 2 次形式になるように変形すると，

$$x=v_0\,t+\frac{1}{2}\,a\,t^2=\frac{1}{2}\,a\,(t^2+2\,\frac{v_0}{a}\,t)=\frac{1}{2}\,a\left\{(t+\frac{v_0}{a})^2-(\frac{v_0}{a})^2\right\}=\frac{1}{2}\,a\,(t+v_0/a)^2-\frac{(v_0)^2}{2a} \tag{2-3-16}$$

となり，時刻 $t=t_1=-\dfrac{v_0}{a}$ で位置 s は最大値 x_{max} に該当し，その値は下の式のようになる．

$$x(t=t_1=-\frac{v_0}{a})=x_{max}=-\frac{(v_0)^2}{2a} \tag{2-3-17}$$

したがって，x-t グラフは下のグラフのように上に凸の放物線となる．



2-3.　のまとめ

t 秒間に物体の速度が $\vec{v}_0$ から $\vec{v}$になった時，その物体の加速度(1 秒間当たりの速度の変化分) $\vec{a}$ （単位は m/s^2)は下の式で表される．

$$\vec{a}=\frac{\text{速度の変化}}{\text{かかった時間}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t} \tag{2-3-18}$$

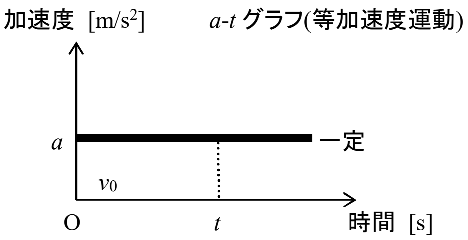
・等加速度運動の場合

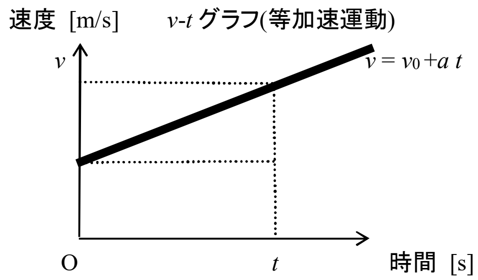
1 成分での運動となり，加速度 a が一定であり，この時，初速度を v_0　t 秒後の速度を v ，変位を x とすると下の式のように表すことができる(初期位置 $x_0 = 0$ の場合).

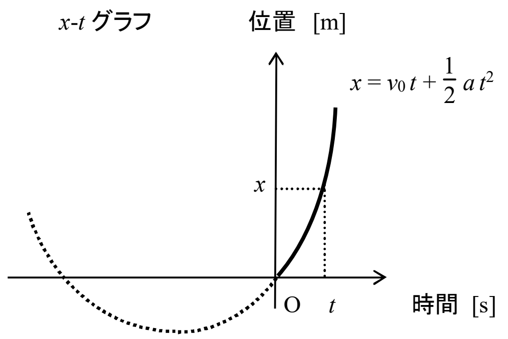
$$v = v_0 + a\,t \tag{2-3-19}$$

$$x = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \tag{2-3-20}$$

a-t グラフ(縦軸に加速度 a [m/s^2]を取り，横軸に時間 t [s]を取ったグラフ)では，加速度 a が一定であり，横軸と平行なグラフとなる．そして，v-t グラフ(縦軸に速度 v [m/s]を取り，横軸に時刻 t [s]を取ったグラフ)では，切片を初速度 v_0 ，傾きを加速度 a とした直線となる．さらに，x-t グラフ(縦軸に位置 x [m]を取り，横軸に時間 t [s]を取ったグラフ)は放物線となる($a > 0$ では下に凸，$a < 0$ では上に凸の 2 次曲線となる).







変位　x = 初期位置 + (v-t グラフで囲まれた面積)
速度　v = 初速度 + (a-t グラフで囲まれた面積) = (x-t グラフでの傾き)
加速度　a = (v-t グラフでの傾き)

x-t グラフ　→ → →（傾き）　速度 v ; v-t グラフ　→ → →（傾き）　加速度 a

位置 x　← ← ←（面積）　v-t グラフ ; 速度 v　← ← ←（面積）　a-t グラフ

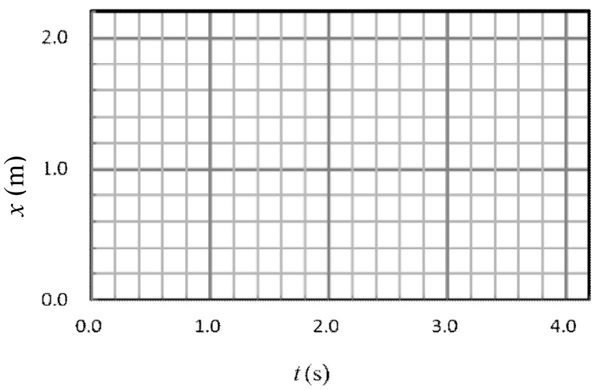
問 2-3-2.　下の表はある物体が時刻t [s]で，位置x [m]を通過したデータをまとめたものである.

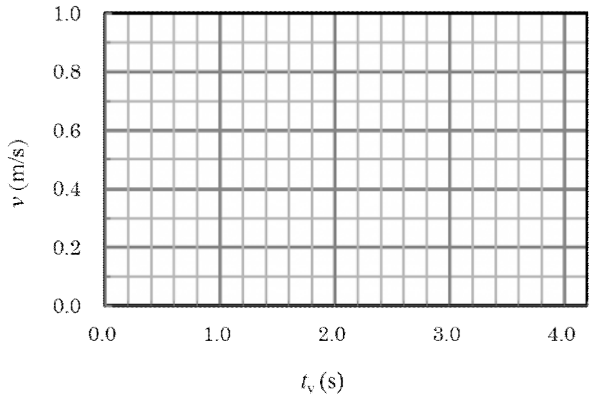
1)　このデータを用いて，各々の平均速度v (例えば，$t = 0.0$ s と 1.0 s の間の平均速度)とそれに対応する平均時刻t_v を

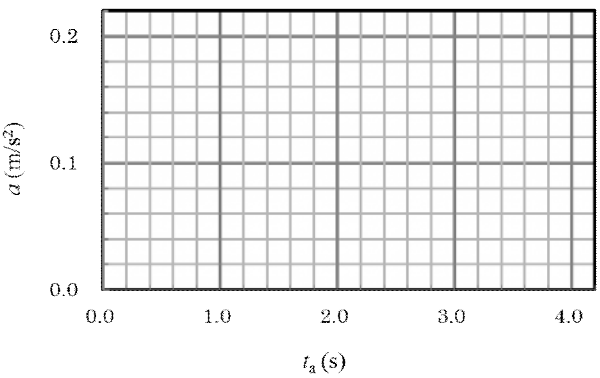
計算し，さらに求めた平均速度から平均加速度a とそれに対応する平均時刻t_a を求めよ.

t [s]	x [m]	t_v [s]	v [m/s]	t_a [s]	a [m/s^2]	
0.0	0.10					
1.0	0.30					
2.0	0.70					
3.0	1.30					
4.0	2.08					

2) 上の表より，下にx-tグラフ，v-tグラフ，a-tグラフを書け(滑らかな曲線または直線も引くこと).







3) グラフより初速度 v_0 の値を見積もれ.

4) これらの結果より，t = 6.0 s での速度と位置を予測せよ.

問 2-3-3.

1) 等加速度運動(右向きを+方向とする)する物体の初速度 v_0 = 3.0 m/s，加速度 a = 0.4 m/s^2 のとき，速度 v = 5.0 m/s になるのは何秒後か？ またその時までの変位 Δx を求めよ.

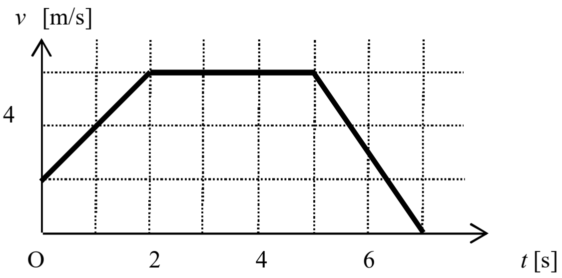
2) 初速度 v_0 = 2.0 m/s，一定の加速度 a = 0.5 m/s^2 で動いている物体が位置 9.0 m となるのに何秒かかるか？ また，そのときの速度 v を求めよ.

3) 初速度 v_0 = 2.0 m/s，一定の加速度 a = – 0.5 m/s^2 で動いている物体がある. この物体が最も右に到達するのは何秒後か？ それは時刻 t = 0 での位置に比べて右に何 m 移動しているか？

4) 初速度 v_0 = 4.0 m/s，一定の加速度 a = – 2.0 m/s^2 で動いている物体がある. この物体が時刻 t = 0 での位置に再び戻ってくるのは何秒後か？ さらに，そのときの速度 v を求めよ.

5) 時刻 t = 0 で位置 x_0 = 0 m，速度(初速度)v_0 = – 8.0 m/s で運動し始め，一定の加速度 a = 2.0 m/s^2 で動いている物体がある. この物体が速度 v = 0 となる時刻 t_1 とその時の位置 x_1 を求めよ. 次に，v-t グラフと x-t グラフを描け.

問 2-3-4. 下の図は直線上を運動する物体の運動(速度 v と時刻 t の関係)を表した v-t グラフである.



1) 加速度 a を 3 つの領域に分けてその数値を求めよ.

(i) $0 \leqq t \leqq 2.0$ [s] → $a =$

(ii) $2.0 \leqq t \leqq 5.0$ [s] → $a =$

(iii) $5.0 \leqq t \leqq 7.0$ [s] → $a =$

2) 上の問で求めた答えより, a-t グラフを書け.

3) 時刻 $t = 0 \sim 2.0$ [s]の間に動いた距離 Δx_1 を求めよ.

4) 時刻 $t = 2.0 \sim 5.0$ [s]の間に動いた距離 Δx_2 を求めよ.

5) 時刻 $t = 5.0 \sim 7.0$ [s]の間に動いた距離 Δx_3 を求めよ.

6) 時刻 $t = 0$ での位置 x は原点 O にあるとすると, 時刻 t =5.0 s, 7.0 s での位置を求めよ.

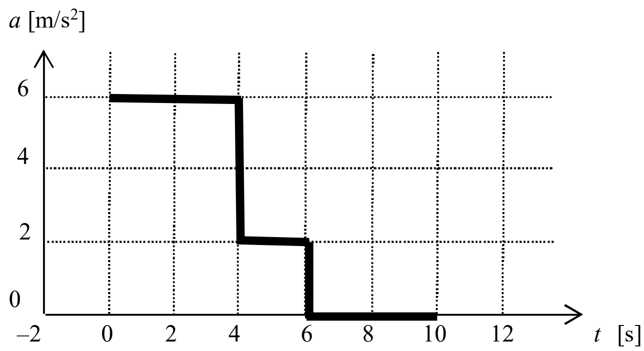
7) 上の問 1)での領域(i)において, 時刻 t を用いて位置 x を表せ. ただし, t =0 での位置 x は原点にあるとする.

8) 上の問 1)での領域(ii) において, 時刻 t' (t'は $t = 2.0$ s から経過した時刻で, $t' = t - 2$)を用いて位置 x を表せ.

9) 上の問 1)での領域(iii) において, 時刻 t'' (t''は $t = 5.0$ s から経過した時刻で, $t'' = t - 5$)を用いて位置 x を表せ.

10) 上の問 8) ~ 9)の答えを参考にして, x-t グラフを書け.

問 2-3-5. 下の図は直線上を運動する物体の運動(速度 a [m/s^2]のと時刻 t [s]の関係)を表した a-t グラフである. 時刻 $t = 0$ での位置 $x_0 = 0$ m, 速度 $v_0 = -12$ m/s であったとする.



1) $0 \leqq t \leqq 4.0$ [s]の領域で速度が 0 になる時刻は何秒の時か?

2) 時刻 $t =$ 1 s, 4 s, 6 s, 8 s, 10 s での速度をそれぞれ求めよ.

3) 時刻 t と速度 v の関係を表す v-t グラフを書け.

4) 時刻 $t =$ 2 s, 4 s, 6 s, 8 s, 10 s での位置をそれぞれ求めよ.

5) $0 \leqq t \leqq 6.0$ [s]の領域で, 時刻 t と位置 x の関係を表す x-t グラフを書け.

問 2-3-6. 時刻 t [s]における, 物体の位置 x [m] が $x = 3 + 2t - t^2$ で動いているものとする.

1) この物体の初速度 v_0 と加速度 a を求めよ.

2) x-t グラフ, v-t グラフ, a-t グラフを書け.

3) 速度が 0 になるのは何秒の時か? そして, この時の位置は何 m か?

問 2-3-7. 初速度 $v_0 = -4.0$ m/s, 等加速度 $a = 2.0$ m/s^2 で動く物体がある. 速度 $v = -2.0$ m/s, 0.0 m/s, 2.0 m/s, 4.0 m/s, 6.0 m/s となるとき, 物体の変位 Δx を求めよ.