

## 10. 単振動

物体の運動には 2 つの地点を往復する「振動」と呼ばれる現象がある。例えば、振り子、車のワイパー、エンジンのピストン運動などがある。ここでは、単純な振動である「単振動<sup>96</sup>」について、その運動の性質を調べる。

### 10-1. 円運動と単振動の関係

8 章では円周上を一定の速さで回転する「等速円運動」について、その性質を学んだ。その際、平面上を円運動する物体の位置を  $x$  成分と  $y$  成分に分けて表現し、速度と加速度についても同様に  $x$  成分と  $y$  成分とで表した。

下の図で示すように「等速円運動する物体を横から見ると、単純な往復運動」に見える。円運動における「1 周」は、単振動では「1 往復」に相当する。それゆえ、単振動における物理量は、円運動の物理量と対応させることができる。

・**基本的な物理量**      単振動での 1 往復は、円運動では 1 周に相当するので、1 往復では位相角  $\theta$  が  $2\pi$  [rad] 進むことになる。

周期  $T = 1$  往復する時間[単位: 秒] (10-1-1)

振動数  $f = 1$  秒当たりの往復(振動)する回数[単位: 1/s=Hz]  $= \frac{1}{T}$  (10-1-2)

角振動数(または、角速度)  $\omega = 1$  秒間当たり進む位相角[単位: rad/s=1/s]  $= \frac{\theta}{t} = 2\pi f$  (10-1-3)

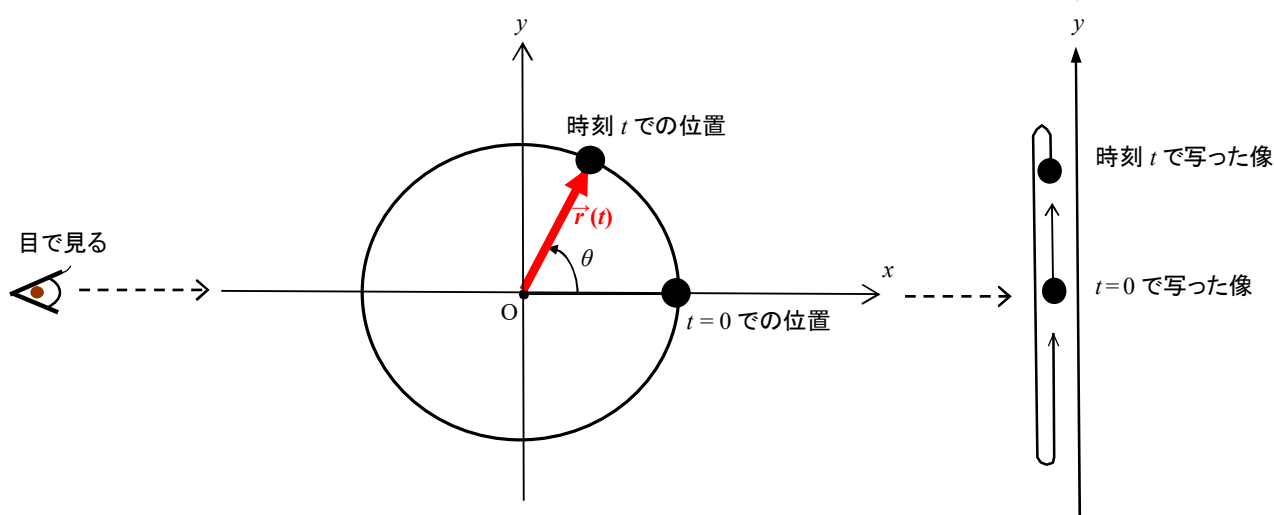
→ 位相角  $\theta = \omega t$  (10-1-4)

振幅  $A$  = 振動の中心から振動の変位が最大となる振れ幅[単位: m] (10-1-5)

→ 円運動の半径に相当

・**単振動の扱い方**    →    円運動を横から見ると縦方向( $y$  方向)の運動しか見えない    →     **$y$  方向運動が単振動に見える**

スクリーン上に写る  $y$  方向の運動だけが見える



上の図で見たように、「単振動する物体の位置(変位)、速度、加速度は、『等速円運動での位置、速度、加速度について成分表示して、その  $y$  成分を採用する。』」

<sup>96</sup> 単振動とは「規則正しい往復運動」とする。ここで、「規則正しい → 往復する時間が一定である」ことを意味する。

## 10-2. 単振動の位置, 速度, 加速度

半径を表す記号として  $r$  の代わりに振幅  $A$  を用いて, 円運動の物体の位置 $\vec{r}$ , 速度 $\vec{v}$ , 加速度 $\vec{a}$ を表すと,

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (A \cos \theta, A \sin \theta) \quad (10-2-1)$$

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = (-A\omega \sin \theta, A\omega \cos \theta) \quad (10-2-2)$$

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) = (-A\omega^2 \cos \theta, -A\omega^2 \sin \theta) \quad (10-2-3)$$

と表されることを 8 章で示した. ここで, 位相角  $\theta = \omega t$  とした. 単振動においては円運動の  $y$  成分しか見えないので, (10-2-1)式 ~ (10-2-3)式で  $y$  成分を取り出すことで, 単振動の位置(変位) $y$ , 速度  $v$ , 加速度  $a$  を下の式のように表すことができる.

$$y(t) = A \sin \theta = A \sin(\omega t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (10-2-4)$$

$$v(t) = A\omega \cos \theta = A\omega \cos(\omega t) = A\omega \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (10-2-5)$$

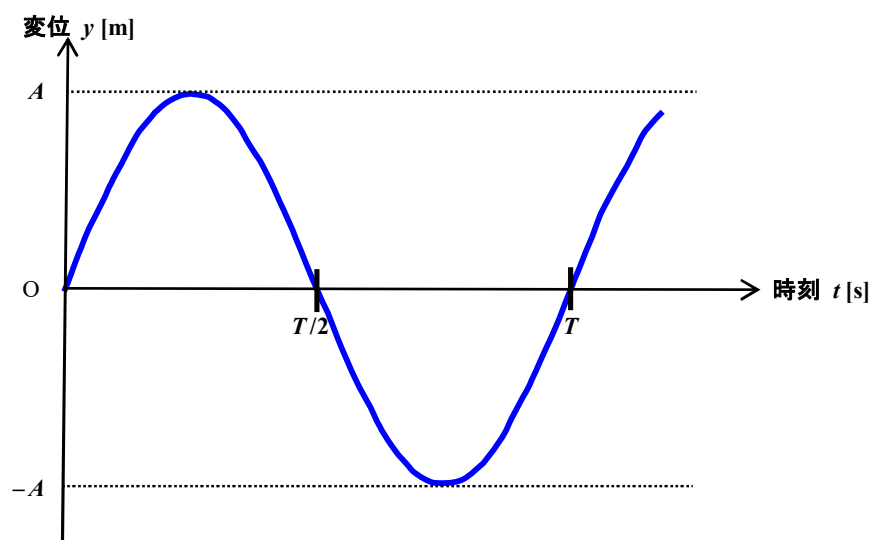
$$a(t) = -A\omega^2 \sin \theta = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -A\omega^2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (10-2-6)$$

$$= -\omega^2 (A \sin(\omega t)) = -\omega^2 y \quad (10-2-7)$$

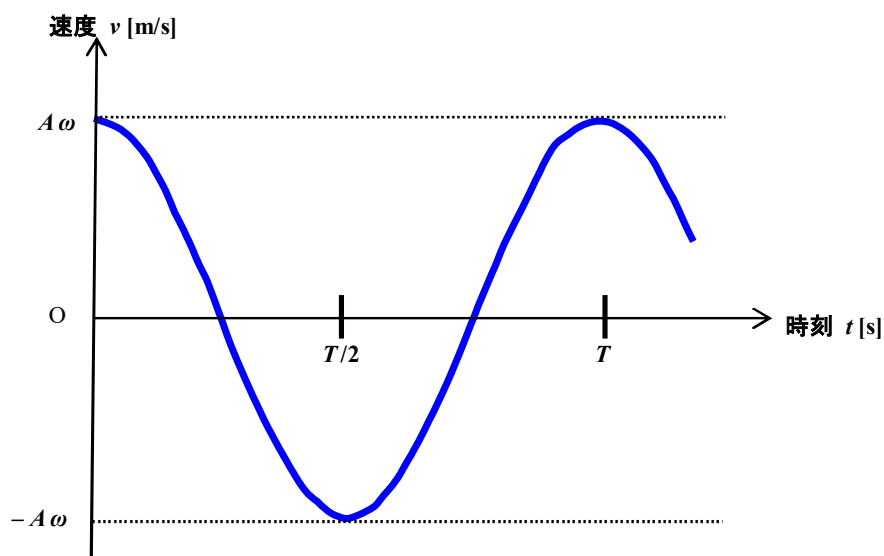
(10-2-4)式では, 物体の位置の基準として振動の中心(原点  $O$ )に選び, 基準点からの位置(変位)とした. 振動の中心から変位が最大となるときの, その値は振幅  $A$  となる. また, 変位の初期値  $y(t=0) = 0$ , 速度の初期値  $v(t=0) = A\omega$  とする.

・**グラフ** 上の(10-2-4)式~(10-2-6)式で示された位置(変位) $y$  [m], 速度  $v$  [m/s], 加速度  $a$  [m/s<sup>2</sup>]について, これらの量を縦軸に, 時刻  $t$  [s]を横軸にとったグラフを下に描く(周期  $T$  の周期性を持つ).

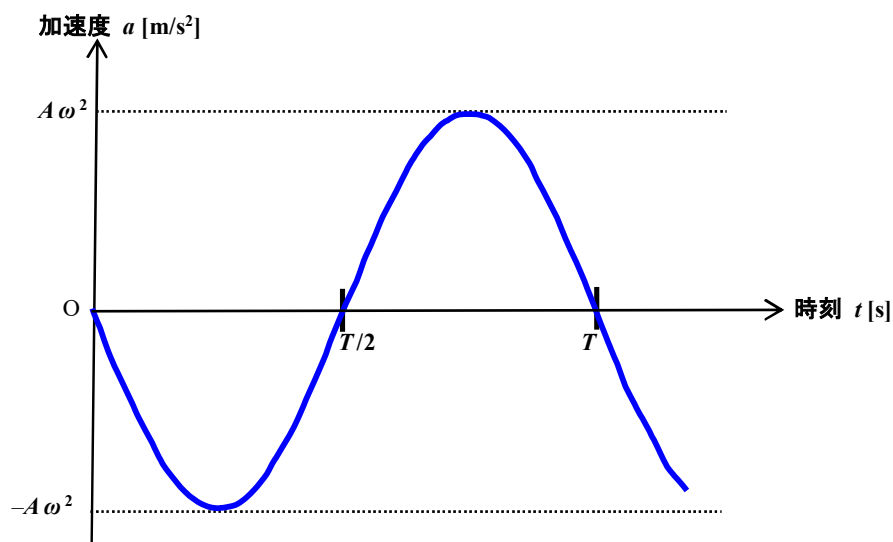
### ① 変位 $y$ ( $y$ - $t$ グラフ)



② 速度  $v$  ( $v$ - $t$  グラフ)



③ 加速度  $a$  ( $a$ - $t$  グラフ)



問 10-2-1. 幅  $L = 40 \text{ cm}$  の間を 25 秒間で 60 回往復する物体がある.

- 1) この物体の往復運動の周期  $T$  と振動数  $f$  を求めよ.
- 2) 角振動数(角速度)  $\omega$  を求めよ.
- 3) この物体の往復運動での速度の最大値  $v_{\text{max}}$  と加速度の最大値  $a_{\text{max}}$  を求めよ.

問 10-2-2. 振動数  $f = 2.0 \text{ Hz}$  で単振動している振幅  $A = 4.0 \text{ cm}$  で動いている質量  $m = 2.0 \text{ kg}$  の物体がある.

- 1) 振動の周期  $T$  と角振動数(角速度)  $\omega$  を求めよ.
- 2) 単振動している物体の変位  $y = 2.0 \text{ cm}$  の時, 物体にかかる加速度  $a$  と力  $F$  を求めよ.
- 3) 物体の変位  $y = -3.0 \text{ cm}$  のとき, 物体にかかる加速度  $a$  と力  $F$  を求めよ.
- 4) 単振動している物体の変位  $y = 0.0 \text{ cm}$  のとき, 物体の動いている速さ(速度の大きさ)  $|v|$  を求めよ.

\* 初期位相  $\theta_0$  がある場合の  $y$ - $t$  グラフ

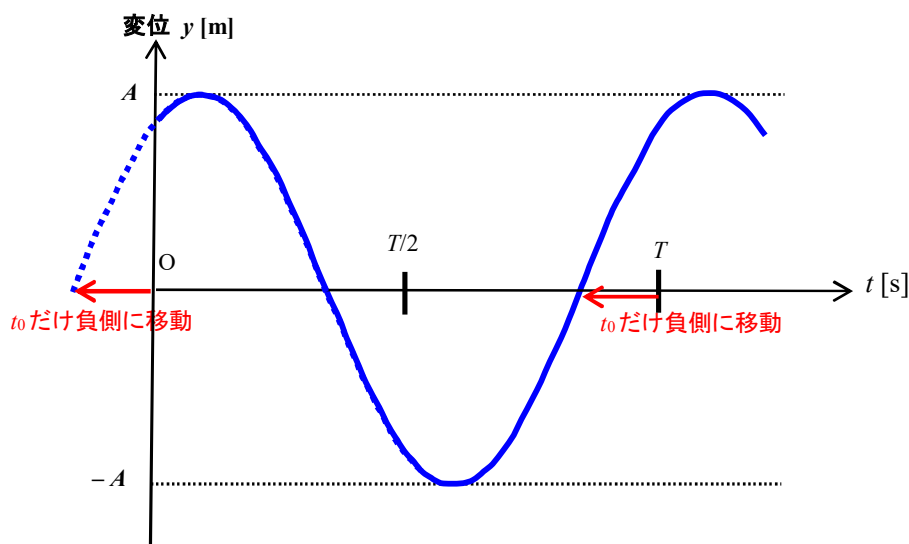
時刻  $t$  に対する単振動の変位  $y$  を表す式(10-2-4)式において、初期位相  $\theta_0$  が含まれている場合の  $y$ - $t$  グラフを示す。ここで、時刻  $t$  での変位  $y(t)$  は下の式で表されるものとする。

$$y(t) = A \sin(\omega t + \theta_0) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \theta_0\right) \quad (10-2-8)$$

初期位相  $\theta_0$  に対し、「 $\theta_0 = \omega t_0$ 」の関係を満たす時刻  $t_0$  を導入すると、上の式は下のように変形できる。

$$y(t) = A \sin(\omega(t + t_0)) = A \sin\left(2\pi \frac{t + t_0}{T}\right) \quad (10-2-9)$$

(10-2-9)式で示される  $y$ - $t$  グラフは初期位相  $\theta_0 = 0$  となるサイン関数のグラフに比べ、横軸が「 $t_0$ 」だけ負側(←側)にずれたグラフに相当する。



加法定理を使う方法

(10-2-8)式に対し、加法定理を用いて変形することで、グラフが簡単に描くことができる場合もある。

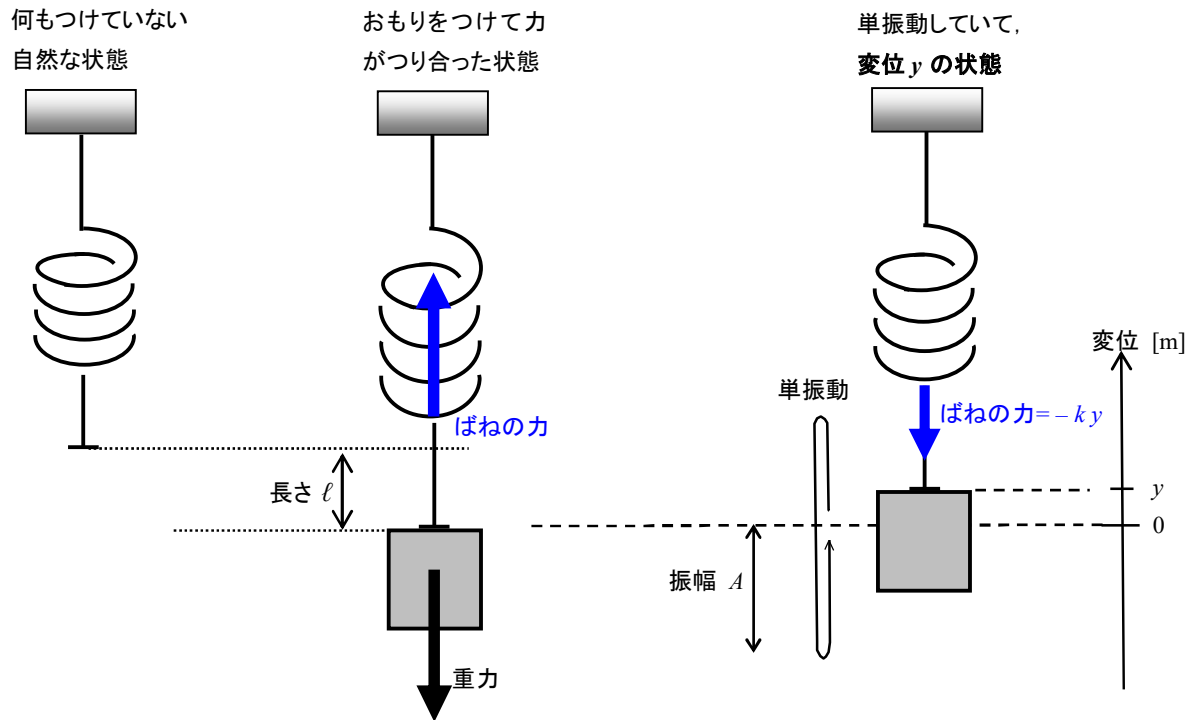
$$y = A \sin(\omega t + \theta_0) = A (\sin(\omega t) \cos \theta_0 + \cos(\omega t) \sin \theta_0) = A \left( \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \cos \theta_0 + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \sin \theta_0 \right)$$

### 10-3. 単振動の例 -ばね振り子と単振り子-

・ ばね振り子

ばね定数  $k$  のばねの先端に質量  $m$  のおもりをつけて静かにつるす。このとき、ばねは何もつけていない状態から長さ  $\ell$  だけ伸び、重力とばねの力が釣り合う(重力の大きさ  $= mg$  = ばねの力の大きさ  $= k\ell$ )。力が釣り合った状態におけるばねの位置を新たに位置の基準点とすると、すでに重力とばねの力は打ち消しあっているので、これ以降は重力の影響を考えなくともよい。

この状態から、上方向(下方向)へ、おもりを大きさ  $A$  だけ持ち上げ(引き下げ)てから、自由にすると、ばねについたおもりは振幅  $A$  とする単振動を行う。単振動している状態で、位置の基準点から変位  $y$  にある状態の下の図の右に描く。



上の図の右に描いた状態(変位  $y$ )では、おもりに働く力はばねの力だけになるので、ニュートンの運動方程式は下の式のようになる。

$$m a = -k y \quad (10-3-1)$$

上の式で左辺にある加速度  $a$  に(10-2-7)式を代入すると

$$-m \omega^2 y = -k y \quad (10-3-2)$$

となる。ここで、一般に変位  $y$  は「0」でないので、両辺に共通にある  $y$  を消去すると

$$m \omega^2 = k \quad (10-3-3)$$

と導出できる。この式は振動の角速度  $\omega$  はおもりの質量  $m$  とばね定数  $k$  によって決まるといっている。したがって、振動の周期  $T$  は  $\omega T = 2\pi$  より、下の式で表すことができる。

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10-3-4)$$

#### ・ばね振り子における力学的エネルギー保存則

ばね定数  $k$  となるばねに質量  $m$  の物体つるさされていて単振動している。時刻  $t$  における単振動する物体の変位  $y$  が(10-2-4)式で与えられるとすると、その状態でのばねの弾性エネルギー  $U$  は下の式で表すことができる。

$$U = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 \sin^2(\omega t) \quad (10-3-5)$$

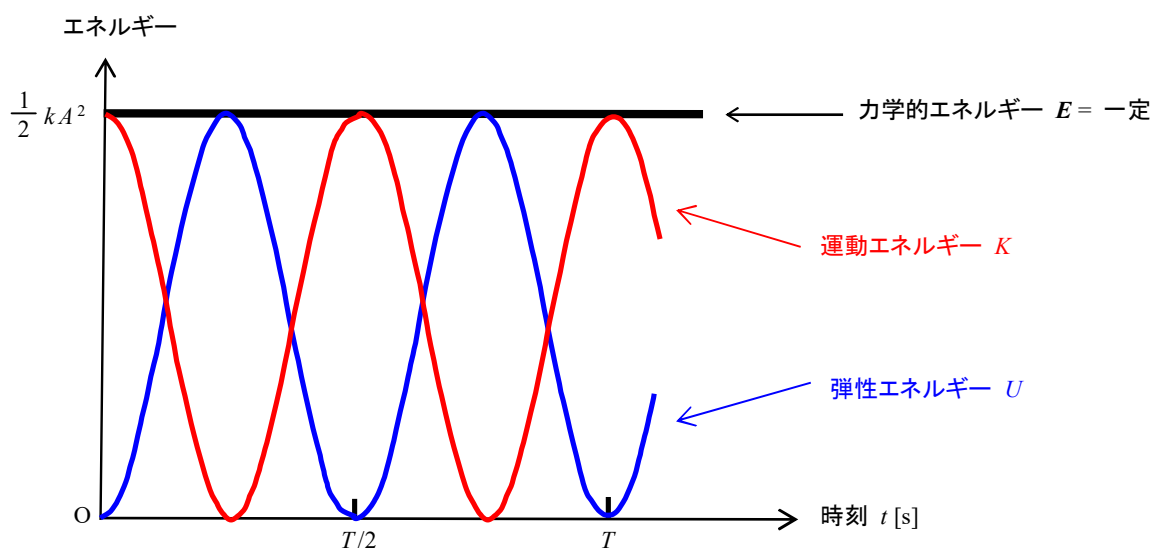
さらに、この物体の運動エネルギー $K$ は下の式で表すことができる。

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A\omega \cos(\omega t))^2 = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 \cos^2(\omega t) \quad (10-3-6)$$

したがって、力学的エネルギー $E = K + U$ は下の式のように計算でき、時間によらず一定値となることが確認できる。

$$E = K + U = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 \{ \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \} = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (10-3-7)$$

下の図に、弾性エネルギー $U$ 、運動エネルギー $K$ 、力学的エネルギー $E$ の時間依存性を示す。



問10-3-1. 質量 $m = 40 \text{ g}$ のおもりに、ばね定数 $k = 0.2 \text{ kgw/m}$ のばねをつけて、振幅 $A = 5.0 \text{ cm}$ で単振動させた。

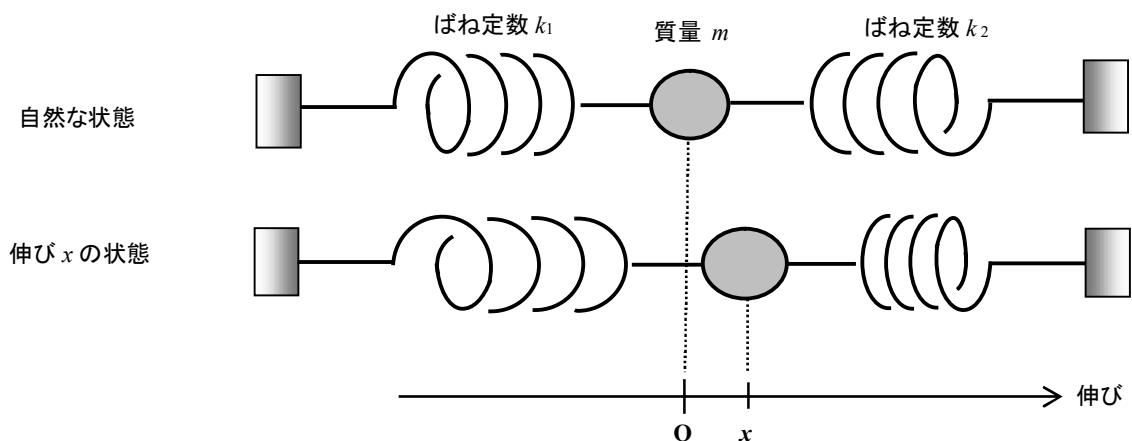
- 1) このばねのばね定数 $k$ は何N/mか?
- 2) このばね振り子の角振動数(角速度) $\omega$ をもとめよ。
- 3) このばね振り子の速さの最大値 $v_{\max}$ を求めよ。
- 4) このばね振り子の加速度の最大値 $a_{\max}$ を求めよ。
- 5) ばね振り子の速さが最大になるのは変位 $y$ がどのような値のときか? ただし、振動の中心で変位 $y = 0.0 \text{ m}$ とする。
- 6) ばね振り子の加速度の大きさが最大になるのは変位 $y$ がどのような値のときか?
- 7) ばね振り子の加速度の大きさが最小になるのは変位 $y$ がどのような値のときか?
- 8) ばね振り子が振動の中心位置にあるとき、この物体に働くばねの力の大きさ $F$ を求めよ。
- 9) ばね振り子の変位が最大になったとき、この物体に働くばねの力の大きさ $F$ を求めよ。

問 10-3-2. 質量  $m$  のおもりに、ばね定数  $k$  のばねをつけ、振幅  $A$  で単振動させた。

- 1) 質量  $m$  のおもりの代わりに質量  $4m$  のおもりをつけたら振動の周期  $T$ はどうなるか?
- 2) ばね定数  $k$  の代わりにばね定数  $4k$  のばねをとりつけたら振動の周期  $T$ はどうなるか?
- 3) 振幅  $A$  の代わりに振幅  $4A$  で単振動させたら、振動の周期  $T$ はどうなるか?

問 10-3-3. 図のように、質量  $m$  のおもりに、ばね定数  $k_1$  と  $k_2$  のばねをつけ、振幅  $A$  で単振動させた。

- 1) 伸びが下の図のように  $x$  の時、ばね定数  $k_1$  のばねに働く力  $F_1$  とばね定数  $k_2$  のばねにかかる力  $F_2$ を図示せよ。
- 2) この系の合成のばね定数  $k$ 、振動の角速度  $\omega$ と周期  $T$ を求めよ。



問 10-3-4. 振幅  $A = 4.0 \text{ cm}$ , 振動数  $f = 0.2 \text{ Hz}$  で単振動する物体の変位  $y$ , 速度  $v$ , 加速度  $a$  のそれぞれの量を縦軸にとり, 横軸に時刻  $t$  をとったときのグラフを図示せよ. ただし, 時刻  $t = 0$  で, 変位  $y = 0$  で, 速さが正の場合のときと負となる場合のときの, 両方について, それぞれグラフを書け(ヒント: 速度が正の時は変位が負から正(−から+)へ, 速度が負の時は変位が正から負(+から−)へ動いている).

問 10-3-5. 時刻  $t [\text{s}]$  での変位  $y [\text{cm}]$  が  $y = 5 \sin(\pi t)$  で表されている単振動している物体がある.

- 1) この単振動の振幅  $A$ , 角速度(角振動数) $\omega$ , 周期  $T$  を求めよ.
- 2) この単振動の速度の最大値  $v_{\text{max}}$ , 加速度の最大値  $a_{\text{max}}$  を求めよ.
- 3) この単振動の  $y-t$  グラフ,  $v-t$  グラフ,  $a-t$  グラフを書け.

問 10-3-6. 時刻  $t [\text{s}]$  での変位  $y [\text{m}]$  が  $y = 0.2 \sin(\pi t/4 + \pi/4)$  で表されている単振動している物体がある.

- 1) この単振動の振幅  $A$ , 角速度(角振動数) $\omega$ , 周期  $T$  を求めよ.
- 2) この単振動の速度の最大値  $v_{\text{max}}$ , 加速度の最大値  $a_{\text{max}}$  を求めよ.
- 3) この単振動の  $y-t$  グラフ と  $v-t$  グラフを書け.

問 10-3-7. 時刻  $t [\text{s}]$  での変位  $y [\text{cm}]$  が  $y = 10 \sin(\pi t/8 - \pi/2)$  で表されている単振動している物体がある.

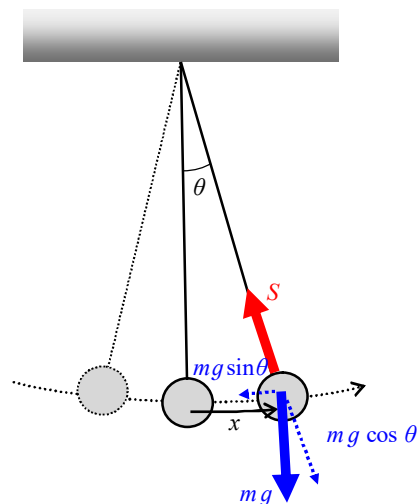
- 1) この単振動の振幅  $A$ , 角速度(角振動数) $\omega$ , 周期  $T$  を求めよ.
- 2) この単振動の  $y-t$  グラフ と  $v-t$  グラフを書け.

## ・ 単振り子

長さ  $\ell$  の軽い糸の先に質量  $m$  のおもりをつけて, 振れ幅を小さくとり, 静かにゆらして振動させたものを単振り子と呼ぶ. 運動方程式から, 単振り子の周期  $T$  を導出しよう.

最下点から糸の円弧に沿った変位  $x$  の地点にある物体に働く力は糸の張力  $S$  と重力  $mg$  が働いているが, 重力の糸に沿った成分( $mg \cos \theta$ )と糸の張力  $S$  が釣りあい, 円弧に沿った方向で単振動を行う. 重力の円弧に沿った成分( $mg \sin \theta$ )が単振動を引き起こす力となる. 円弧に沿った図のような向きを正とすると運動方程式は下の式で表すことができる.

$$m a = -m g \sin \theta$$



角度  $\theta$  が小さい場合,  $\sin \theta \doteq \theta = x/\ell$  と近似できる(円弧の長さ=半径 $\times$ 内角;  $x = \ell \theta$ ). さらに, 変位  $x$  を用いると単振動での加速度  $a = -\omega^2 x$  と表すことができるので, これらを代入すると下の式が成り立つ.

$$-m \omega^2 x = -mg x/\ell \quad (10-3-8)$$

変位  $x$  は恒に 0 ではないので, 両辺に  $1/(m x)$  をかけると, 単振動の角速度  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  が得られる. したがって, 振れ幅が小さい場合, 単振り子の周期  $T$  は下の式のように, 糸の長さ  $\ell$  と重力加速度  $g$  の値で決まり, 振れ幅にはよらない. 逆に, この式を使って, 単振り子の周期  $T$  と糸の長さ  $\ell$  を測定することで, 重力加速度  $g$  の値を間接的に測定することができる.

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (10-3-9)$$



# 11. 波

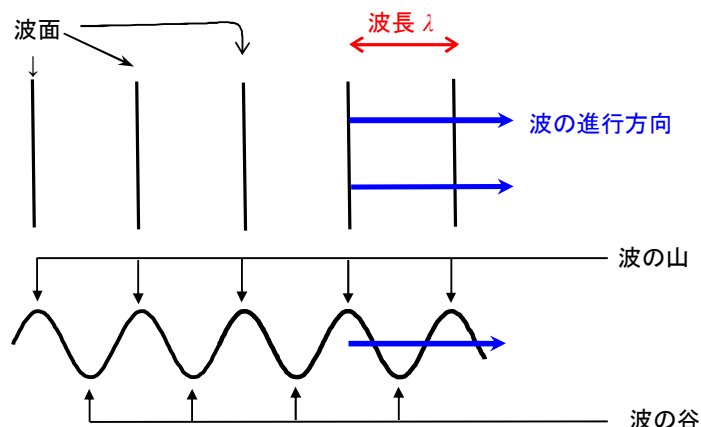
10 章では単純な振動である単振動の運動の様子を学んだ。単振動では、ある場所を原点として、原点を中心とした往復運動(ゆれ)であったが、**波(波動)**は**振動(ゆれ)が空間的に伝わる現象**である。別な言い方をすれば、振動は時間的なゆれであったが、波は時間的、時間的なゆれで、ゆれの度合いを変位として表す。ここでは、波(波動)を表現する数学的な記述法として、波の形(**波形**)を最も簡単に記述することができる**正弦波**(三角関数の正弦 ( $\sin \theta$ ))で波の変位を表し、波の性質を調べる。

## 11-1. 波の性質と伝わり方

波は、波を伝える物質(**媒質**)があつて、この**媒質が時間的、空間的なゆれを起こす現象**である。波は下の表のように媒質の違いによって多くの種類がある。

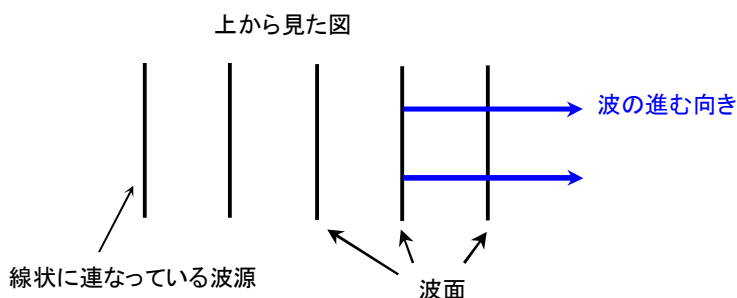
| 波の名称 | 水面上の波、津波 | 地震波<br>(P 波、S 波、表面波) | 音波 | 競技場でのウェーブ | 電波、光、X 線<br>(電磁波) | ひもでつく波 |
|------|----------|----------------------|----|-----------|-------------------|--------|
| 媒質   | 水面       | 地球内部の固体物質            | 空気 | 人間の手      | 真空、空気             | ひも     |

水面上を伝わる波の最も高い部分のみ見ると、その高い部分は進んでいるように見える。しかし、水面に浮かんでいるボートは波を受けると動かずにただ、上下運動を繰り返す。このように、波は媒質が移動することで伝わるのではなく、媒質の振動(上下運動や横方向の往復運動)が空間的に伝わっていき、波の変位が最も高い部分(**山**)や最も低い部分(**谷**)が進んでいるように見える。2 次元平面を進む波では波の山、あるいは谷を結ぶと直線になるが、3 次元空間で進む波では面となる。波の山や谷(あるいは任意の変位)を連続して結んだ線や面を**波面**と呼ぶ。2 次元平面で進む波の波面を下の図に示す(ここでは、波面として「山を連続的に結んだ線」で表した)。波面と波面の間の距離は波 1 個分の長さとなり、これを「**波長  $\lambda$** 」と呼ぶ。

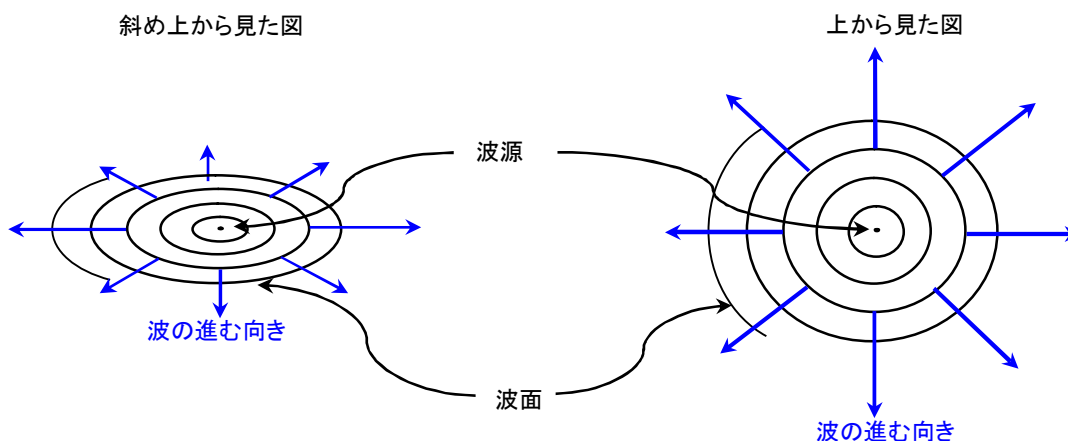


波が発生する源を**波源(source)**と呼ぶ。海や川の岸に押し寄せる波では、波の山や谷は直線状に進むことが観察される。このような波を**平面波**と呼ぶ。さらに、波源が点状である場合、波は同心円状、または球状に進む、このような波を**球面波**と呼ぶ。

- ① 平面波：波面が平行になって進む波で、波の進む向きは波面に対して垂直方向となる。



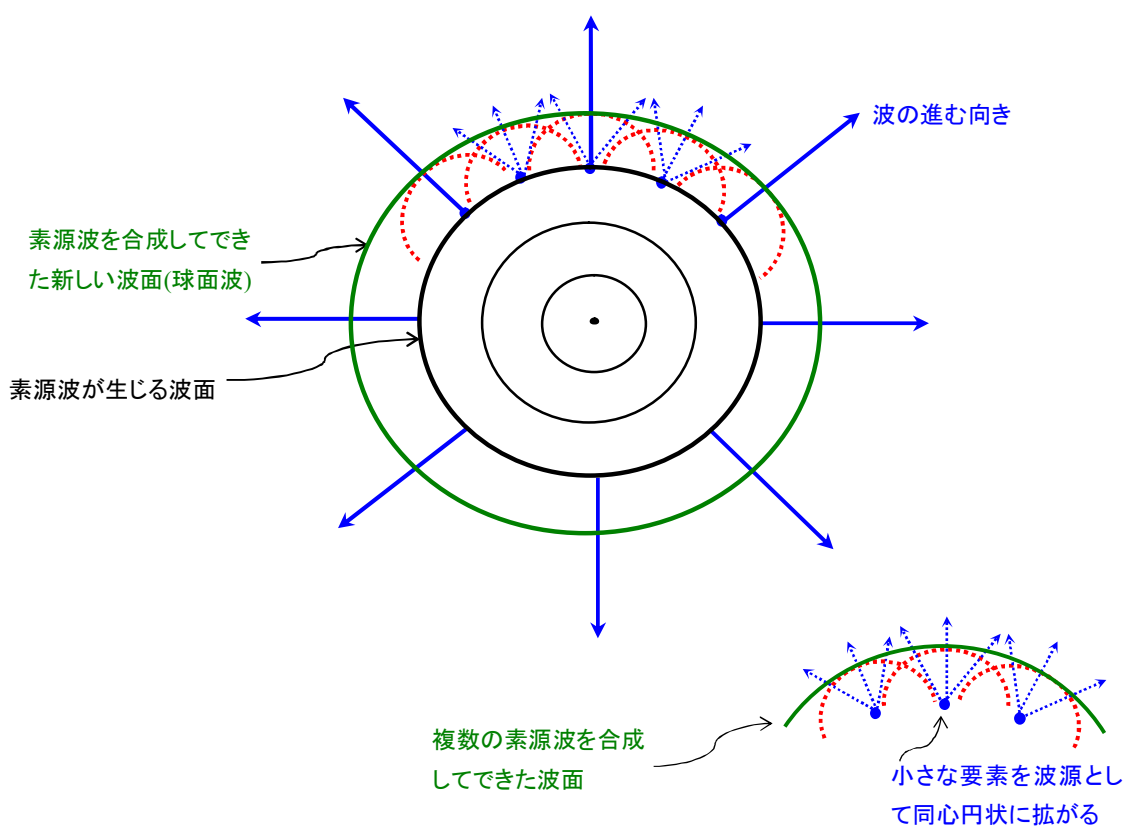
② 球面波： 波が同心円状に広がって進む波で、例えば、水面上にしずくを一定間隔で垂らすとできる。



#### ・ホイヘンスの原理

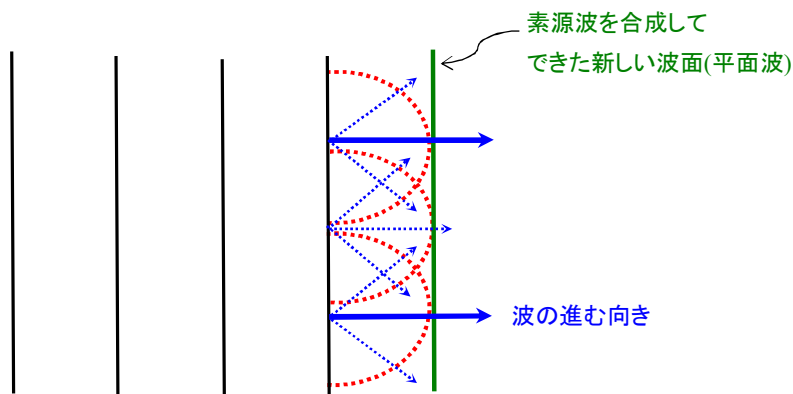
ホイヘンスは波の進み方を説明する一つの方法として、「[ホイヘンスの原理](#)」を提案した。「ホイヘンスの原理」は、進んでいる波の波面を小さな要素に分け、その小さな要素から新たに、同心円状に球面波(素源波)が出て、その球面波(素源波)が合成されて新しい波面を形成するという説である。

例えば、下の図に球面波の波面が次の球面波の波面をつくる様子を描いた。ある波面の小さな要素を波源(下の図で青い点で描いた部分)から素源波(下の図で赤い点線で描いた小さな同心円)が複数発生して、それら複数の素源波が合成して新しい波面(下の図で緑で描いた大きな同心円)を形成して、波面が拡大して、波が進んでいく。



このような仕組みで新しい波面ができるとすると、球面波からは新しい球面波ができ、平面波からは新しい平面波ができる説明がつく。下の図には、平面波のある波面の小さな要素から、素源波が出て、複数の素源波を合成すると、新たな波面ができ、この

波面が平面波となることを示している。

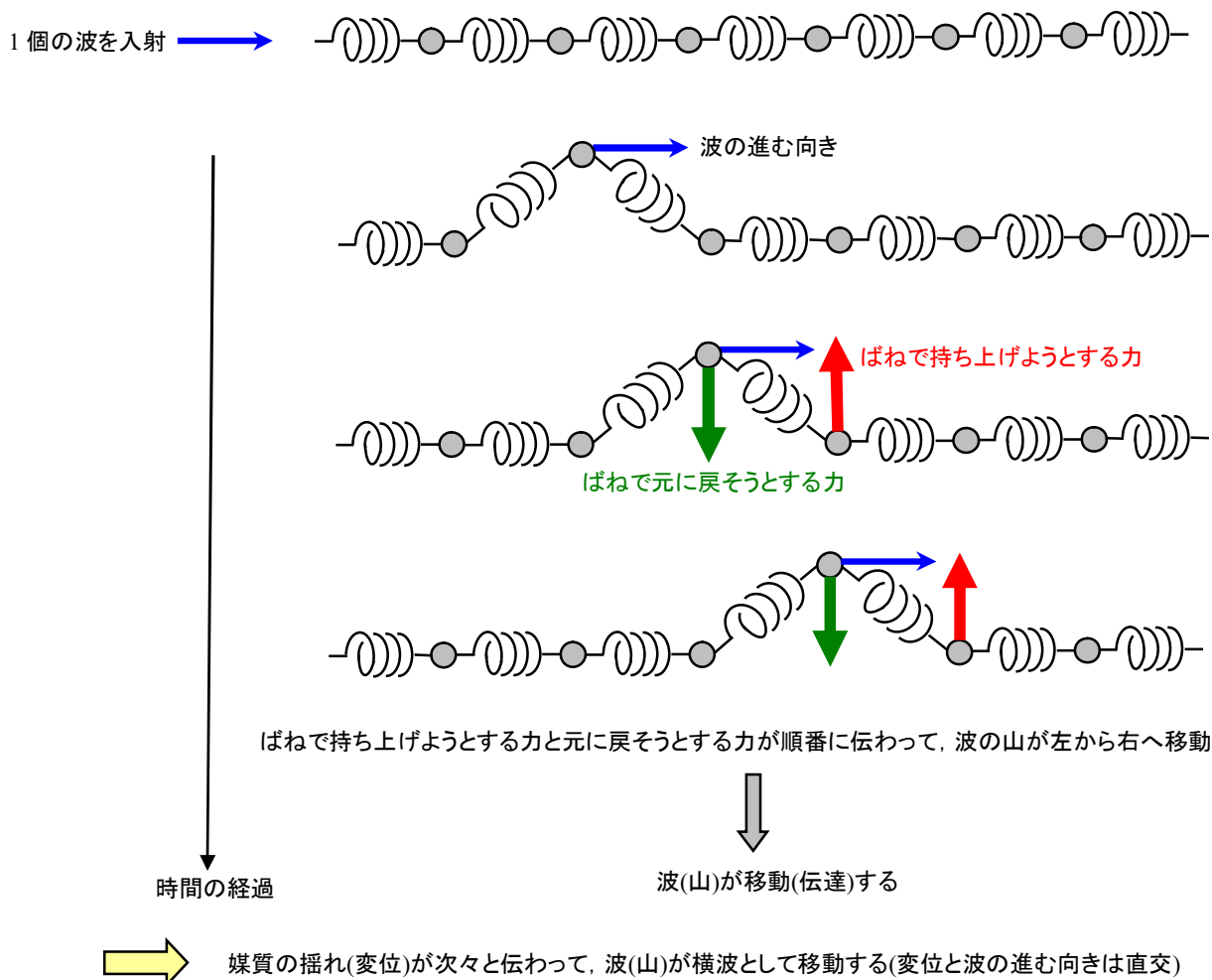


## ・横波と縦波

波は、「媒質の振動(上下運動や横方向の往復運動)が空間的に伝わっていく現象」と説明した。媒質が振動する向きと波が進む向きの違いによって、「横波」と「縦波」がある。

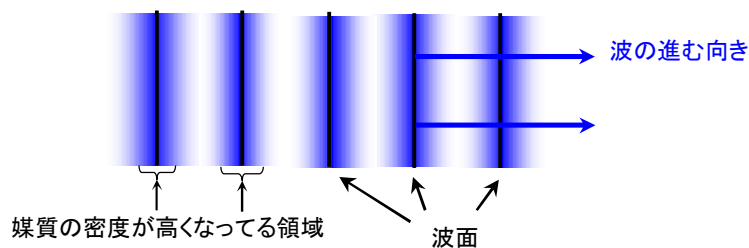
### ① 横波 ; 進む向きと媒質の振動が直交する波

ここまでで図で示した波(球面波と平面波)はいずれも横波で、波の進行方向と垂直となる向きで媒質の振動が生じる。横波が進む原理を理解するために、媒質として、互いにばねで結ばれたおもりが連なっている系を考えよう。この場合、つながったばねが媒質に相当する。この系に、左側から **1 個の波(山)** を入射させる。山となった場所では隣にある(波の進む向き)のおもりをばねの力で持ち上げて、山にしようとする。すなわち、山が移動したことになる。この様子を次々に見ていくことで、波(山)が進んでいるように見える。この図では、波の山が進む向きと変位の向きが直交するので横波である。

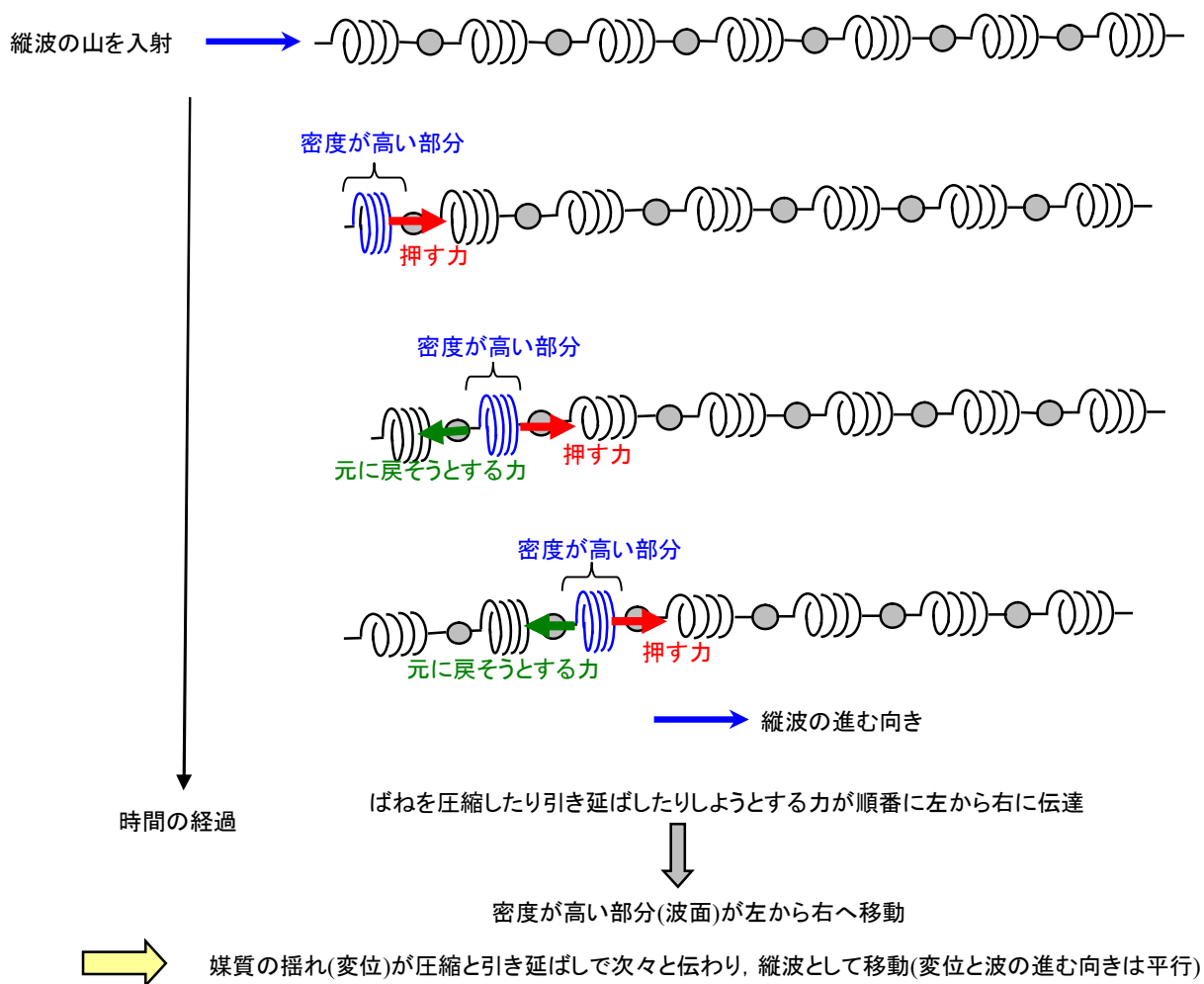


## ② 縦波：進む向きと媒質の振動が平行となる波

媒質が圧縮したり、引き伸ばされたりして進む波となる。下の図には媒質が圧縮されて、媒質の密度が高い場所を濃い色で、低い場所を薄い色で示した。波面は最も濃い場所を結んだ線となる。この密度が高い場所が波の進む向きに進行していく。



横波の場合と同様に、互いにばねで結ばれたおもりが連なっている系を考え、左側から1個の縦波の山を入射させる。下の図では波が進む向きと変位の向き(振動する向き)が平行となるので縦波である。



縦波の例として、音波(空気の密度が圧縮・引き伸ばされて伝わる波)、一部の地震波(P波)などがある。

## 11-2. 波長と波の速さ (→これ以降、「波」としては、主に「横波で平面波(正弦波)」を扱う)

波は媒質のゆれが時間的、空間的に伝わる現象である。ある位置に固定して波が通過する現象を見ると、媒質の時間的な

ゆれが観測される。この時間的なゆれは単振動における「変位」と全く同じように振る舞う。したがって、周期  $T$ 、周波数(振動数)  $f$ 、角周波数(角速度)  $\omega$  の間で成り立つ関係式は下の式のように単振動での成り立つ関係式と全く同じである。

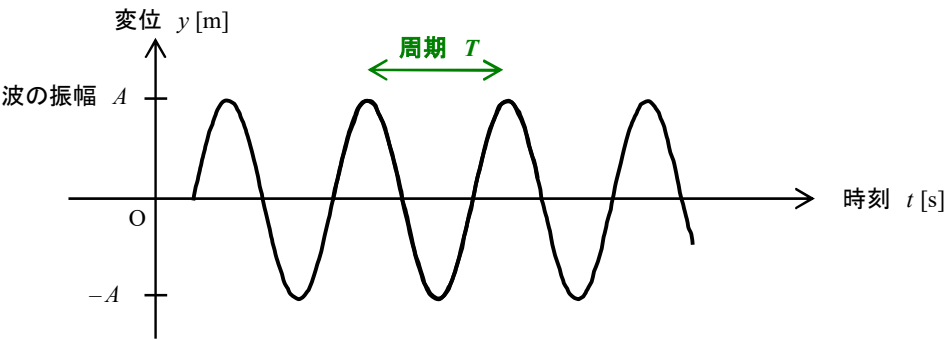
周期  $T$ = 波が時間的に 1 回振動する時間 [単位; s]

(11-2-1)

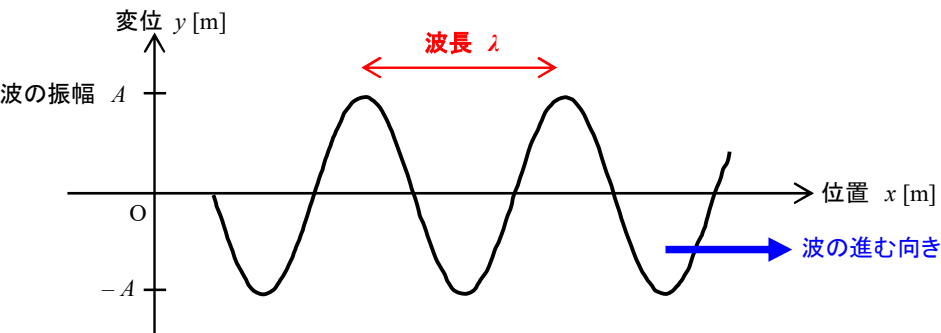
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

(11-2-2)

ある位置に固定して、波を観測し、横軸を時刻  $t$ 、縦軸に波の変位  $y$  をとったグラフを下に書く。変位が最大となる時間の間隔が波の周期  $T$  である。



次に、空間的なゆれを見てみよう。動いている波をある時刻で見ると、空間的に(変位が最大となる)山と(変位が最小となる)谷が交互に表れる波形が観測される。ここでは、山と谷が空間的に規則正しく並んでいて、波形として、三角関数で表される正弦波を考えよう。下の図はある時刻で波の形を横軸に位置  $x$  にとり、縦軸に波の変位  $y$  をとったグラフである。山と山の間の長さが波 1 つ分の長さで、波の波長  $\lambda$  である。



時間的な揺れを特徴づける量として周期と角振動数(角速度)を導入したのに対応する空間的なゆれの量を導入する。

波長  $\lambda$ = 波が空間的に 1 回振動する長さ [単位; m]

(11-2-3)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(11-2-4)

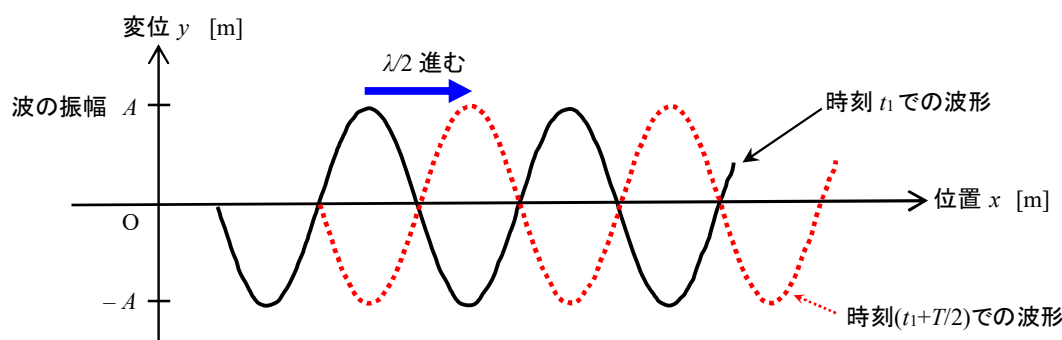
ここで、 $k$  は空間角周波数、または波数と呼ばれる量で、単位は「rad/m = 1/m」である。これらの量は下の表のように対応づけることができる。

| 時間的な量                                   | 空間的な量                                     |
|---|---|
| 周期 $T$ [単位; s]                          | 波長 $\lambda$ [単位; m]                      |
| 周波数 $f = 1/T$ [単位; 1/s = Hz]            | $1/\lambda$ [単位; 1/m]                     |
| 角速度(角周波数) $\omega = 2\pi/T$ [単位; rad/s] | 波数(空間角周波数) $k = 2\pi/\lambda$ [単位; rad/m] |

波の速さ  $v$  [単位: m/s] は 1 秒間当たりの波の進む距離で、波は 1 周期の間に 1 波長進むので、下の式で表すことができる。

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\text{波が1回の振動で動く距離}}{\text{波が1回の振動に要する時間}} = \frac{\text{波長}}{\text{周期}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{T} \lambda = f \lambda \quad (11-2-5)$$

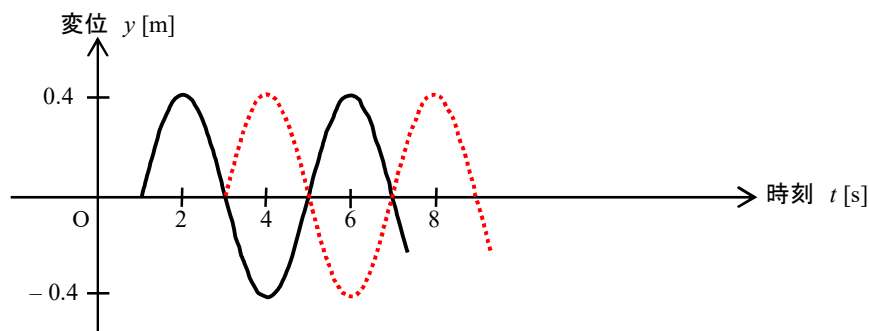
例えば、ある時刻  $t_1$  での波形と時刻  $(t_1 + T/2)$  での波形を実線と点線(赤色)で下にかくと、時間  $T/2$  後の波形は  $\lambda/2$  だけ波が前方に進む。



問 11-2-1. 周波数  $f = 1000$  kHz (AM ラジオ) と  $90$  MHz (FM ラジオ) の電波の波長  $\lambda$  をそれぞれ求めよ。ただし、電波の速さ  $v = 3.0 \times 10^8$  m/s とする。

問 11-2-2. 音速を  $v = 330$  m/s とすると、振動数  $f = 440$  Hz の音叉が出す音の波長  $\lambda$  と周期  $T$  を求めよ。

問 11-2-3. 下の図は位置  $x = 2.0$  m と  $x = 6.0$  m の位置で波を観測した時の変位  $y$  と時刻  $t$  を書いた図である。この図から、この波の周期  $T$ 、周波数  $f$ 、波長  $\lambda$ 、速さ  $v$ 、振幅  $A$  を求めよ。また、位置  $x = 8.0$  m での変位  $y$  と時刻  $t$  の関係を表すグラフを書け。さらに時刻  $t = 2.0$  s での変位  $y$  と位置  $x$  の関係を表すグラフを書け。



### 11-3. 波の変位を表す式

波長  $\lambda$ 、周期  $T$ 、波の速さ  $v$ 、振幅  $A$  で  $+x$  方向に進む正弦波がある。この正弦波の時刻  $t$ 、位置  $x$  における波の変位  $y$  を表す式を求めよう。波は媒質の振動が  $+x$  方向に伝わる現象なので、始めに位置  $x = 0$  における波の変位  $y$  を表す式を基本にして、その後、 $x = 0$  から少しだけ  $+x$  方向にずれた位置  $x$  での波の変位  $y$  を表す式を求める。

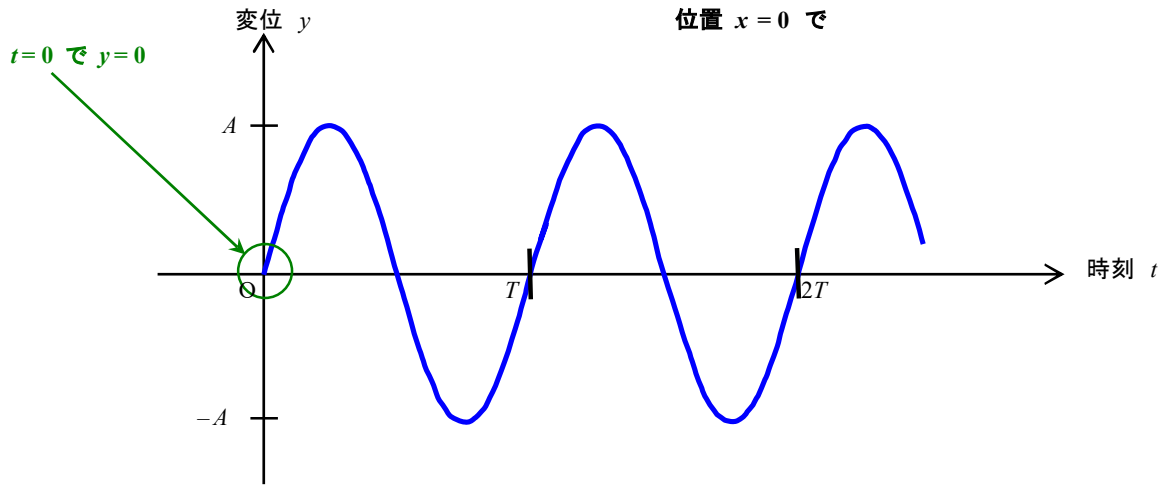
(i) 位置  $x = 0$  における波の式(変位  $y$  の時間依存性の式)

位置  $x = 0$  の地点で波を観測すると単振動の変位を表す(10-2-4)式と同じ下の式で表されると仮定する。

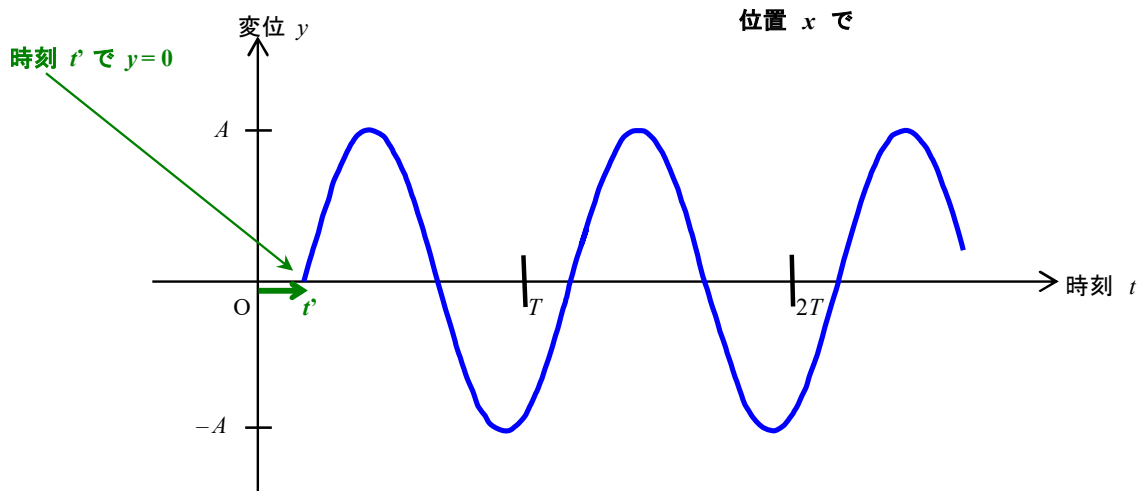
$$y(t) = A \sin \theta = A \sin (\omega t) \quad (11-3-1)$$

$$= A \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (11-3-2)$$

上の式をグラフに表すと下の図のように書くことができる。



- (ii) 位置  $x$  ( $x > 0$ ) における波の式(変位  $y$  の時間依存性の式) (一般的な位置  $x$  での波の変位を表す式)  
位置  $x=0$  での波が、位置  $x$  では時刻  $t'$  だけ遅れて到達する。



したがって、位置  $x$  での波の変位  $y$  を表す式は上の式において、時刻  $t$  を  $t \rightarrow t - t'$  と変更することで表すことができる。

$$y(t) = A \sin(\omega(t - t')) = A \sin \left( 2\pi \frac{t - t'}{T} \right) \quad (11-3-3)$$

上の式では時刻  $t = t'$  で変位  $y$  は 0 となるので、原点  $x = 0$  にあった波が時間  $t'$  だけ遅れてやってきたことを表す。また、波は時間  $t'$  で長さ  $x$  を動いてきたので波の速さ  $v$  は

$$v = \frac{\text{進んだ距離}}{\text{要した時間}} = \frac{x}{t'} \quad (11-3-4)$$

となるので、遅れてきた波の到達時間  $t' = \frac{x}{v}$  を(11-3-3)式に代入すると変位  $y$  は時刻  $t$  と位置  $x$  の関数となる。

$$y(x, t) = A \sin \left( \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right) = A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) \right\} \quad (11-3-5)$$

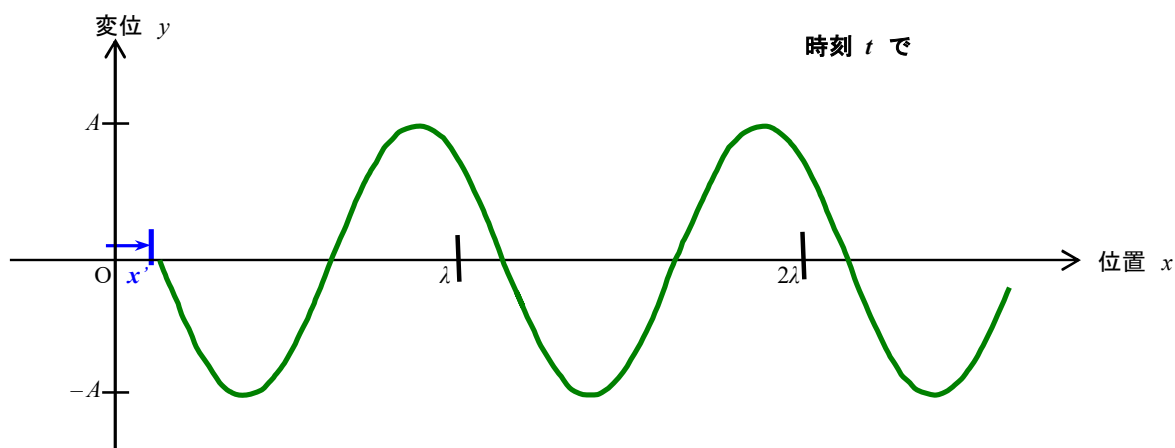
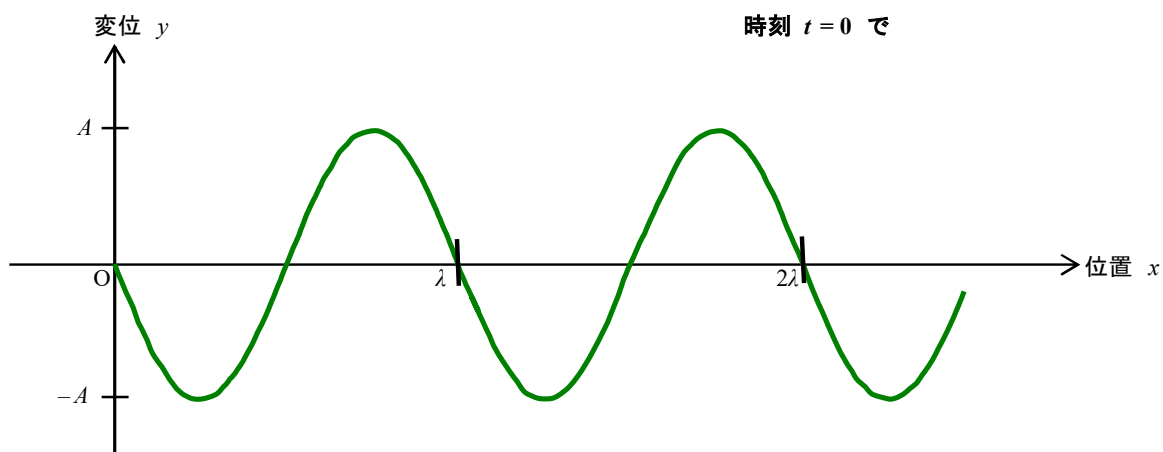
さらに,  $vT = v/f = \lambda$ , 角速度  $\omega = 2\pi/T$ , 波数  $k = 2\pi/\lambda$  より, 変位  $y$  は下の式のように表すことができる.

$$y(x, t) = A \sin \left\{ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\} \quad (11-3-6)$$

$$= A \sin (\omega t - kx) \quad (11-3-7)$$

上の式が一般の**時刻  $t$ , 位置  $x$  においての  $+x$  方向に進む波の変位  $y$  を表す式**である. ここで, 正弦関数の角度に相当する部分となる「 $(\omega t - kx)$ 」が位相角  $\theta$  となる. (11-3-6)式に対し, 位置  $x=0$  と, 位置  $x$  (+方向に 0 から少しずれた位置) での時刻  $t$  と変位  $y$  の関係を表したグラフは既に示されている. 次は, (11-3-6)式に対し, 時刻  $t=0$  と, 時刻  $t$  (+方向に 0 から少しずれた時刻)での位置  $x$  と変位  $y$  の関係を表したグラフを示す. (11-3-6)式において, 時刻  $t=0$  を代入すると下の式が得られ, これをグラフ化し, さらに, 時刻  $t=0$  から少し経過した時刻  $t$  でのグラフを描こう.

$$y(x, 0) = A \sin \left\{ 2\pi \left( -\frac{x}{\lambda} \right) \right\} = -A \sin \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (11-3-8)$$



ここで,  $x' = vt$  である(時刻  $t=0$  にあった波が時刻  $t$  だけ経過したことで, 距離  $x'$  だけ進んだことを意味する).

また,  $-x$  方向に進む波(正弦波)である場合, 位置  $x \rightarrow -x$  と変更して, 下のような式で変位  $y$  を表す.

$$y(x, t) = A \sin \left\{ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right\} \quad (-x \text{ 方向に進む波}) \quad (11-3-9)$$



$$= A \sin(\omega t + kx) \quad (-x \text{ 方向に進む波}) \quad (11-3-10)$$

さらに、波の変位  $y$  を表す式に対して一般化しよう。位置  $x = 0$  で、時刻  $t = 0$  での位相角(初期位相角)を  $\theta_0$  [単位: rad]とすると、一般化した波の式は下のように表すことができる。このときの位相角  $\theta$  は、 $\theta = (\omega t \mp kx + \theta_0)$  である。

$$y(x, t) = A \sin \left\{ 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \theta_0 \right\} \quad (\mp \text{ は波の進む向きが } \pm x \text{ 方向となる}) \quad (11-3-11)$$

$$= A \sin(\omega t \mp kx + \theta_0) \quad (11-3-12)$$

問11-3-1. 位置  $x$  [m], 時刻  $t$  [s]での波の変位  $y$  [cm]として、 $y = 4 \sin \{ \pi(t/2 - x/4) \}$  と表される波がある。

- 1) この波の角速度  $\omega$ , 周期  $T$ , 波数  $k$ , 波長  $\lambda$ , 速さ  $v$ , 振幅  $A$  を求めよ。
- 2) 時刻  $t = 0, 1.0, 2.0$  [s]での波の変位  $y$  と位置  $x$  の関係を表すグラフを各々書け。
- 3) 位置  $x = 0, 1.0, 2.0$  [m]での波の変位  $y$  と時刻  $t$  の関係を表すグラフを各々書け。

問 11-3-2.  $-x$  方向に進む速さ  $20 \text{ cm/s}$  で進む振幅  $A = 5.0 \text{ cm}$ , 周期  $T = 20 \text{ s}$  の正弦波がある。時刻  $t = 0 \text{ s}$ , 位置  $x = 0 \text{ m}$  でこの波の変位  $y = -5.0 \text{ cm}$  であった。

- 1) 波長  $\lambda$ , 初期位相  $\theta_0$  を求め、波の変位を表す式を(11-3-11)式のように書け。
- 2) 時刻  $t = 0, 5.0, 10$  [s]での波の変位  $y$  と位置  $x$  の関係を表すグラフを書け。
- 3) 位置  $x = 0, 1.0, 2.0$  [m]での波の変位  $y$  と時刻  $t$  の関係を表すグラフを書け。

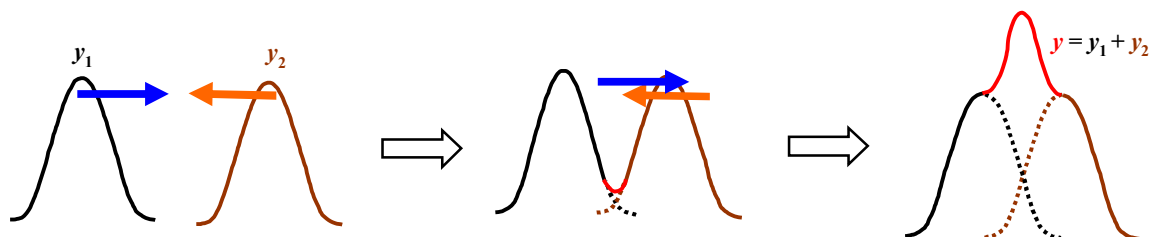
問 11-3-3. 角速度  $\omega$  を波の速さ  $v$  と波数  $k$  を用いて表せ。次に、初期位相  $\theta_0 = 0$  の場合、(11-3-12)式に適用し、波の変位を表す式である(11-3-12)式に対して、波数  $k$  と速さ  $v$  を用いて表せ。次に、角速度  $\omega$  と速さ  $v$  を用いて表せ。

## 11-4. 波の重ね合わせ

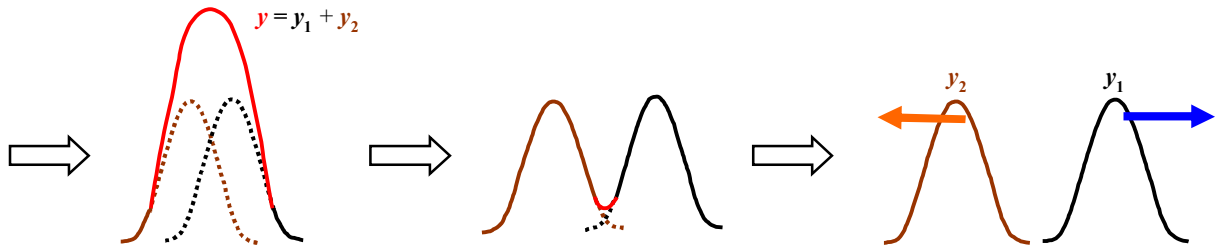
位置  $x$ , 時刻  $t$  において、変位  $y_1(x, t)$  と表される波 1 と変位  $y_2(x, t)$  と表される波 2 がぶつかったとき、その合わせた波(合成波)の変位  $y$  は下の式のように 2 つの波の変位を足し合わせた「重ね合わせの原理」が成り立つ<sup>97</sup>。なお、2 つの波はぶつかった後、それぞれ別な波からの影響を受けないで進む。

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (11-4-1)$$

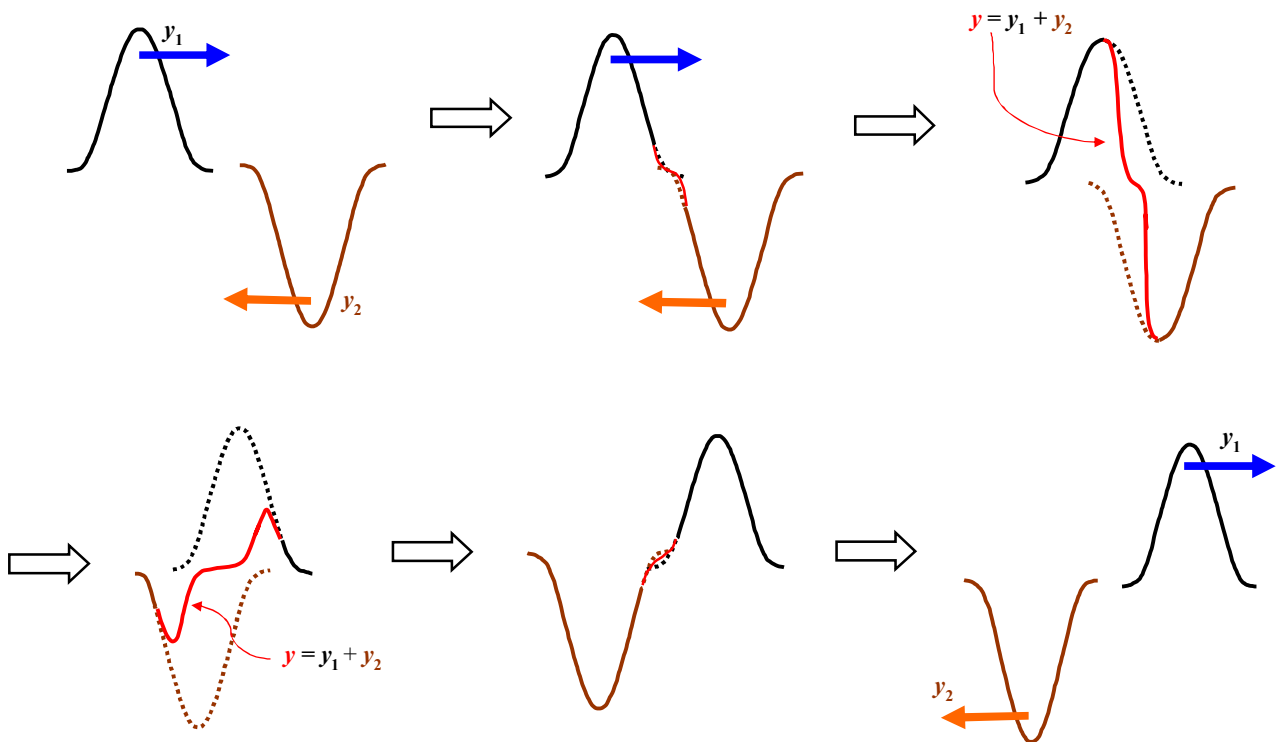
i) 山と山の衝突 (強めあって、高い山ができる)



<sup>97</sup> 海上で、波の高さが大きくなる時の原因となることがある。また、互いに逆位相となる波(山と谷となる波)を足し合わせることで波が見かけ上、消えることもある(← 雑音の消去の方法として用いられることもある)。

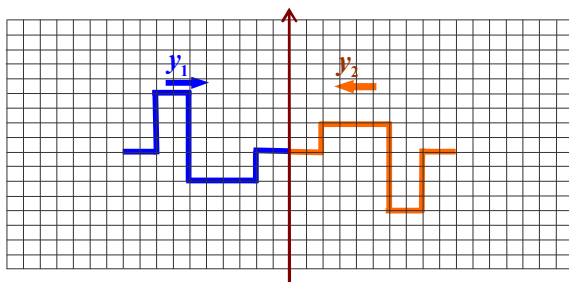


ii) 山と谷の衝突 (弱めあって, 山が低くなる)

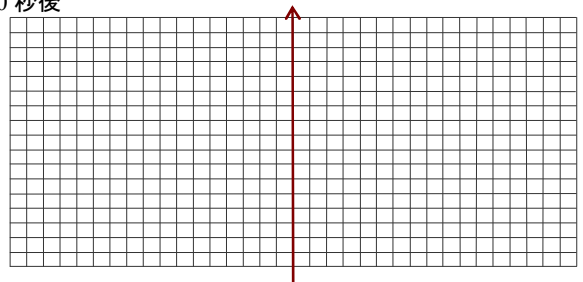


iii) 谷と谷との衝突 (強めあって, 低い谷ができる) ← 山と山との衝突と同様

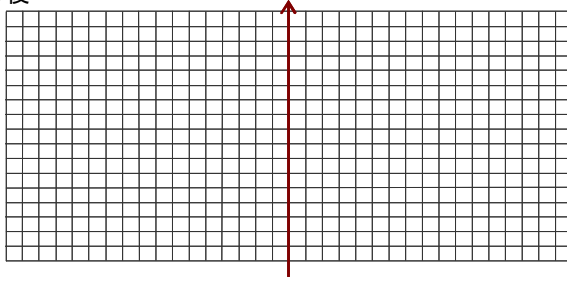
問 11-4-1. 下のマス目で, 1 目盛りが 2.0 cm であるとする. 波  $y_1$  と  $y_2$  の速さ  $v = 2.0 \text{ cm/s}$  となると, 衝突してから, 2.0 秒後, 3.0 秒後, 4.0 秒後, 5.0 秒後, 6.0 秒後の波  $y_1$  と  $y_2$  及び合成波(赤色)を図示せよ.



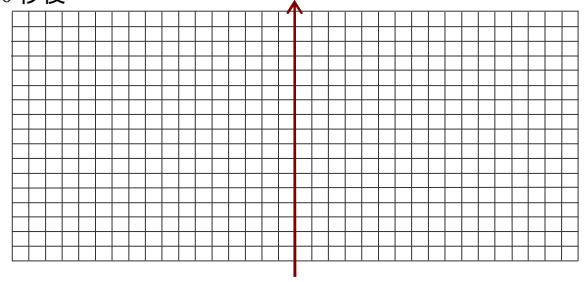
2.0 秒後



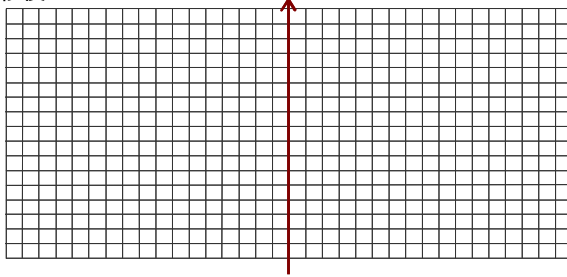
3.0 秒後



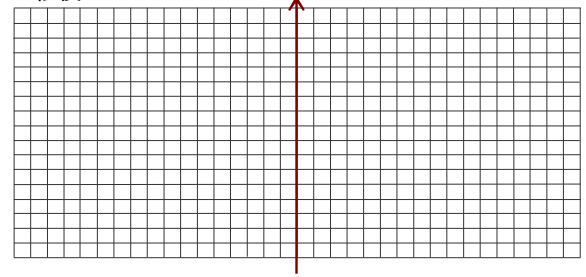
4.0 秒後



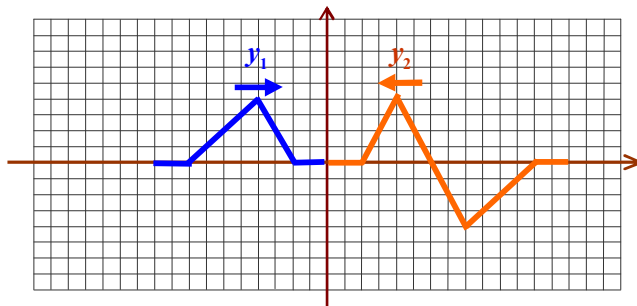
5.0 秒後



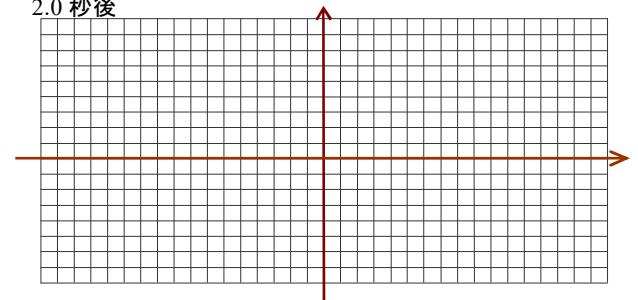
6.0 秒後



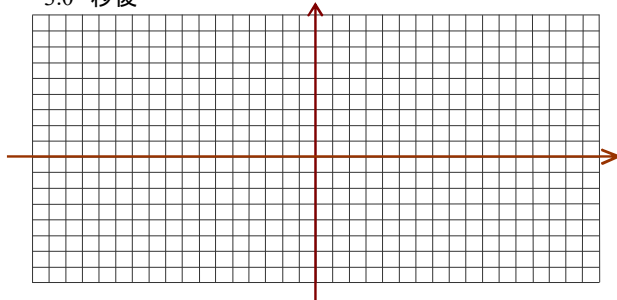
問 11-4-2. 下のマス目で、1 目盛りが 2.0 cm であるとする。波  $y_1$  と  $y_2$  の速さ  $v = 2.0$  cm/s とすると、衝突してから、2.0 秒後、3.0 秒後、4.0 秒後、5.0 秒後、6.0 秒後の波  $y_1$  と  $y_2$  及び合成波(赤色)を図示せよ。



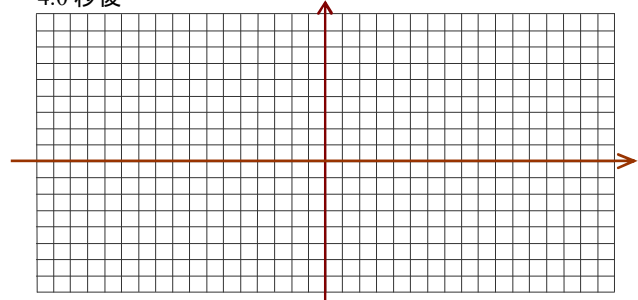
2.0 秒後



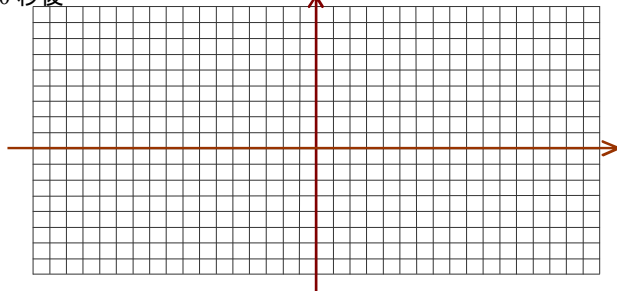
3.0 秒後



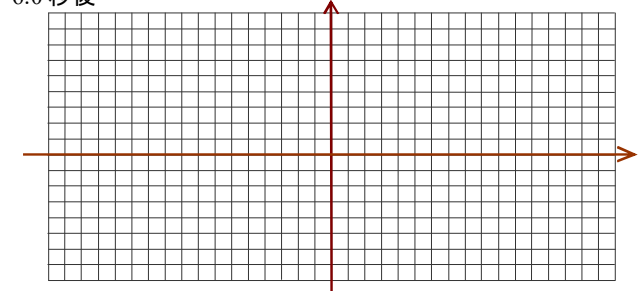
4.0 秒後



5.0 秒後



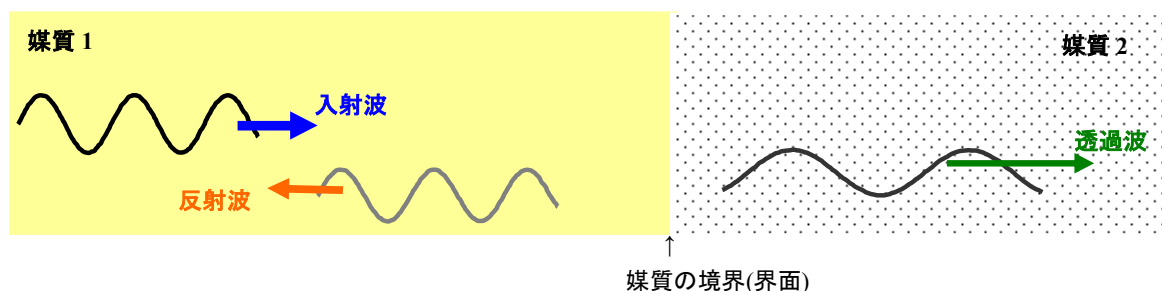
6.0 秒後



## 11-5. 反射波と透過波

波は媒質の中を伝達し、進んでいく。波の進む速さは媒質と波の性質によって決まる。波が異なる媒質(2つの異なる媒質の境目を「境界」または、「界面」と呼ぶ)に入ると、波の進む速さが変わる(波長も変わる)。ある媒質から他の媒質へ入る波を**入射波**と呼ぶ。波が入射した後で異なる媒質の中を進む波を**透過波**と呼ぶ。入射波が境界に垂直に入射すると透過波も境界から垂直に進むが、境界に斜めに入射すると、透過波は入射波とは異なる向きに進む(この現象を「**屈折**」と呼ぶ)。この現象が起きる場合、透過波を**屈折波**とも呼ぶ。一方、入射波が境界にぶつかった後、境界で反射して元の媒質を逆に進む波<sup>98</sup>を**反射波**と呼ぶ(入射波と反射波は進む速さと波長は同じ)。

入射波が境界にぶつかることにより、透過波と反射波が生じるので、入射波、透過波、反射波の周波数(単位時間当たりに境界にぶつかる山の数、あるいは境界から出ていく山の数)は等しい。

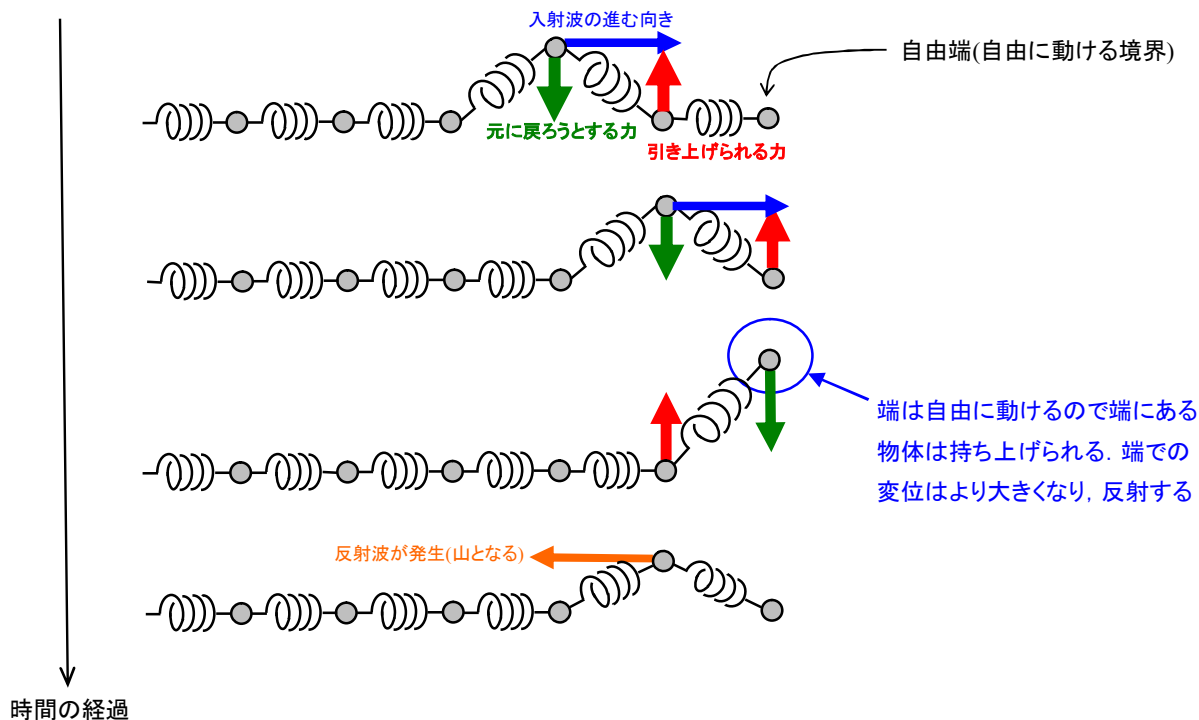


### ① 反射波(Reflection Wave)

ここでは、簡単のために上の図で媒質2が波を伝達できない物質である場合を考えよう。この場合、透過波は発生せず、反射波ができるか、境界で波が消失することとなる。さらに、境界の物理的な条件の違いで、自由に振動できる境界(**自由境界**, または**自由端**)か、または束縛されて振動できない(**固定境界**, または**固定端**)境界に分類できる。

#### i) 自由端

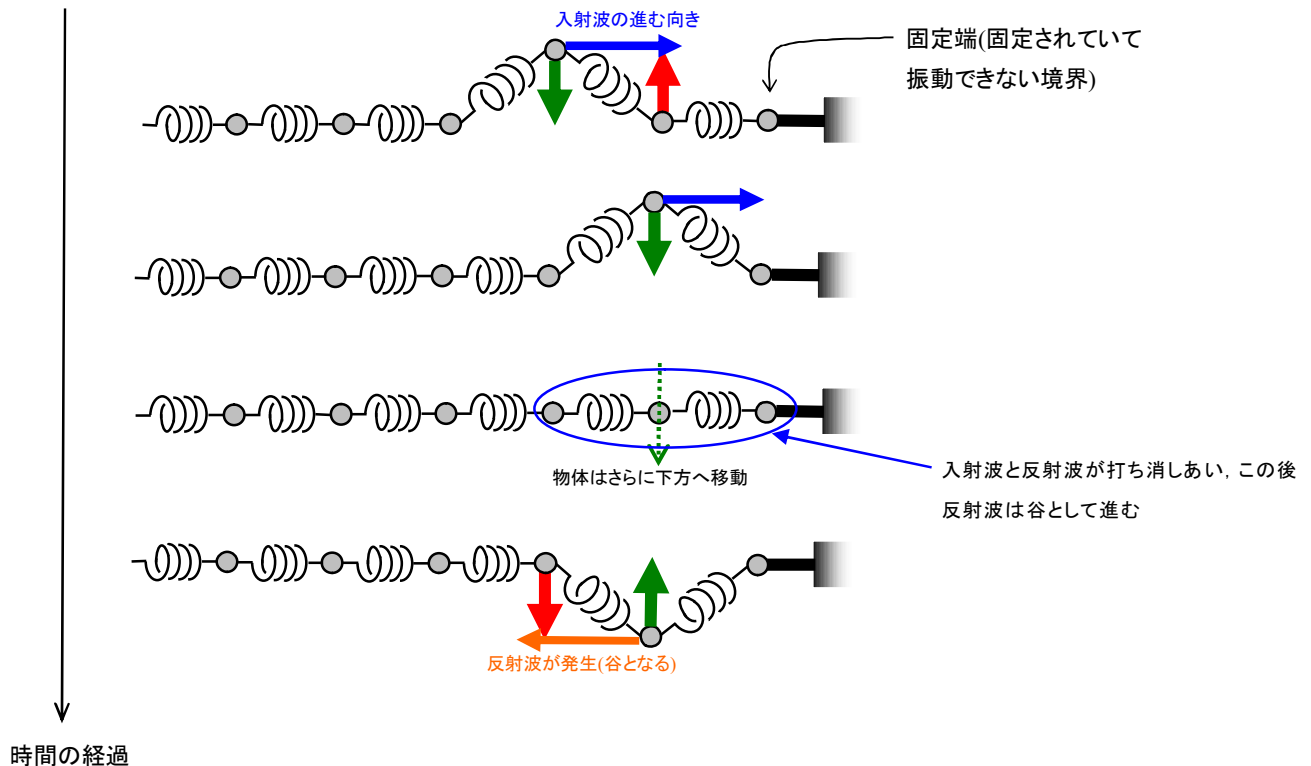
境界において、媒質は自由に振動できるので、**山で境界に入射した波は山として反射される**。→ 端(境界)における変位は入射波と反射波で同じ値で合成すると2倍になる。入射波と反射波では位相のずれは生じない。



<sup>98</sup> 境界で反射し、逆向きに進む波を「**逆行波**」と呼ぶこともある。また、逆行波に対して、順行方向に進む波を「**進行波**」と呼ぶ。

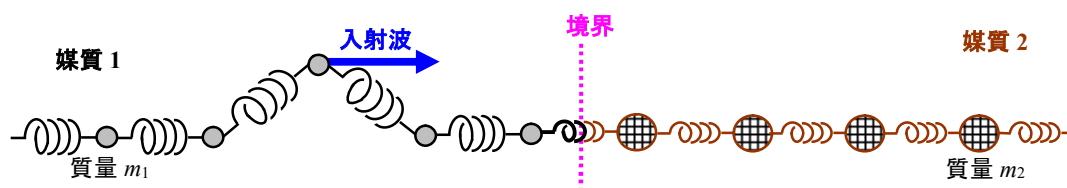
## ii) 固定端

境界において、媒質が固定されていて全く振動できない、**山で境界に入射した波は谷として反射される**。→ 端(境界)で入射波(山)と反射波(谷)を足し合わせると、全く振動しない(変位 = 0)。固定端となる境界では、入射波と反射波が打ち消し合い「変位 = 0」となるので、この場合、「**反射波は入射波から位相が  $\pi$  ずれる**」(観測される変位 = 合成した変位  $y$  = 入射波の変位 + 反射波の変位  $= A \sin \theta + A \sin(\theta + \pi) = 0$ )。

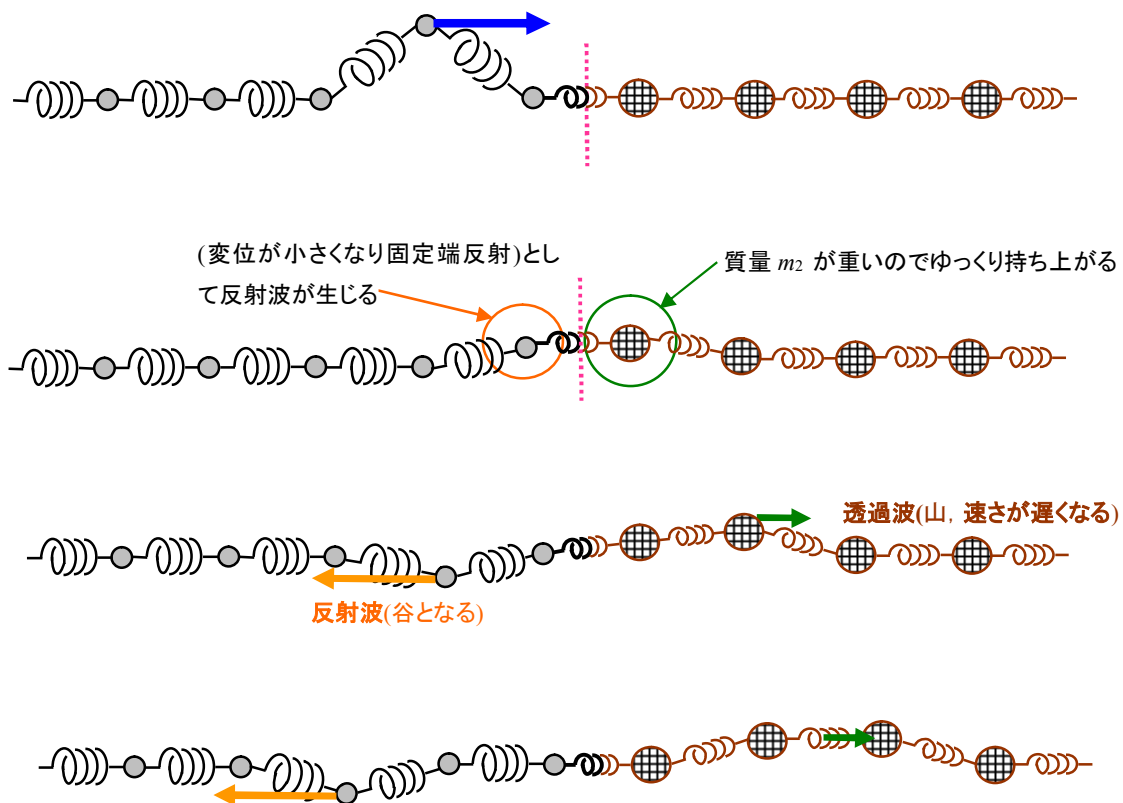


## ② 透過波(Transmission Wave) <sup>99</sup>

11-1 で用いた波を伝えるモデル(多くの物体がばねで結ばれたモデル)をここでも考えよう。このモデルでは、媒質の違いはばね定数と物体の質量の違いとなって現れる。下の図で左側にある媒質 1(質量  $m_1$  の物体をばね定数  $k_1$  でつないだもの)から右側にある媒質 2(質量  $m_2$  の物体をばね定数  $k_2$  でつないだもの)；ここでのモデルとしては、 $m_1 < m_2$ ， $k_1 > k_2$  で媒質 2 では媒質 1 に比べ、**波はゆっくり伝搬する**。<媒質 1 と媒質 2 での波の進む速さを  $v_1$ ,  $v_2$  とすると、 $v_1 > v_2$  となる>)へ横波が入射する場合を考える。境界の両端にある物体は自由に動くことができるが、媒質 2 にある質量  $m_2$  の物体は重いのでゆっくりとしか動けず変位も小さくなり、反射波は固定端反射のように谷として入射波と同じ速さで逆向きに進む。一方、透過波は入射波と比べ、遅い速さ  $v_2$  で進む。**山で境界に入射した波は、山として透過する(入射波に対し、透過波は位相のずれは生じないが反射波は位相が  $\pi$  ずれる)**。



<sup>99</sup> 省略してもよい。以前の Ver.は誤りであった(2021.07.16 訂正)



\* 透過率と反射率 (省略してよい)

入射波の変位  $y_1^{(in)}$  とその振幅  $A_1^{(in)}$ , 反射波(逆行波)の変位  $y_1^{(re)}$  とその振幅  $A_1^{(re)}$ , 透過波の変位  $y_2$  とその振幅  $A_2$  すると, これらの波の変位は下の式のように表すことができる.

$$y_1^{(in)} = A_1^{(in)} \sin(\omega t - k_1 x), \quad y_1^{(re)} = A_1^{(re)} \sin(\omega t + k_1 x), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t - k_2 x) \quad (11-5-1)$$

媒質 1 では合成波として, 入射波と反射波の重ね合わせになり, その変位  $y_1$  は下の式のように与えられる.

$$y_1 = y_1^{(in)} + y_1^{(re)} \quad (11-5-2)$$

境界(「位置  $x = 0$ 」とする)で成立する境界条件は, 2 つあり, 始めに, 媒質 1 と媒質 2 での波の変位が, 境界において等しいので, 「 $y_1 = y_2$ 」となる. さらに,  $\sin(\omega t)$  は恒等的に「0」にはならないので下の関係式が成立する.

$$A_1^{(in)} + A_1^{(re)} = A_2 \quad (11-5-3)$$

次に, 波は境界において滑らかに接続するので, 「 $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$ 」となる. したがって, 下の関係式が成立する.

$$k_1 (A_1^{(in)} - A_1^{(re)}) = k_2 A_2 \quad (11-5-4)$$

この 2 つの関係式と媒質 1 と 2 での波の進む速さ  $v_1 = f \lambda_1 = \omega/k_1$ ,  $v_2 = f \lambda_2 = \omega/k_2$  より, 反射波の振幅  $A_1^{(re)}$  と透過波の振幅  $A_2$  は入射波の振幅  $A_1^{(in)}$  を用いて下の式のように表すことができる.

$$A_1^{(re)} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_1^{(in)}, \quad (11-5-5)$$

$$A_2 = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} A_1^{(in)} \quad (11-5-6)$$

(11-5-5)式より、波の進む速さが遅い媒質に入射する場合( $v_1 > v_2$ )は反射率  $A_1^{(re)}/A_1^{(in)}$  は負になり、反射波は逆位相(すなわち、位相が  $\pi$  ずれ、山で入射した波は谷として反射する)となり固定端反射に相当する( $-|A| \sin \theta = |A| \sin(\theta + \pi)$ )。これは、媒質 2 における変位の変化の応答が悪くなるため、(結果的に)媒質 1 で入射波と反射波を逆位相にすることで、媒質 2 での変位の変化に対し、追従できるようにするためであろう。一方、波の進む速さが速い媒質に入射する場合( $v_1 < v_2$ )は、反射率  $A_1^{(re)}/A_1^{(in)}$  は正となり、反射波は同位相(山で入射した波は山として反射する)でとなり、自由端反射に相当する。さらに、(11-5-6)式より、透過率  $A_2/A_1^{(in)}$  は恒に正となり、透過波には位相のずれは生じない(山で入射した波は山として透過する)。

透過波が存在しない固定端反射では、媒質 2 での振幅  $A_2 = 0$  で境界での合成波の変位  $y_1 = 0$  が成立する( $A_1^{(re)} = -A_1^{(in)}$ )。自由端反射では媒質 2 での振幅  $A_2 = 0$  で境界での合成波の変位の連続性  $dy_1/dx = 0$  が成立する( $A_1^{(re)} = A_1^{(in)}$ )。

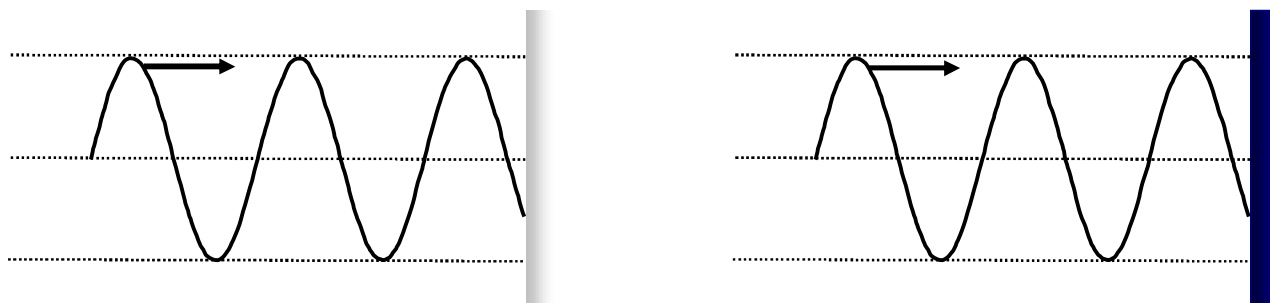
**問 11-5-1.** 位置  $x$  [m] , 時刻  $t$  [s]において、変位  $y = 4 \sin(\pi(t - 0.5x))$  [cm] と表せる波がある。この波が、時刻  $t = 0$  s で  $-x$  方向から  $+x$  方向に進んできて、位置  $x = 0$  の地点に到達した。位置  $x > 0$  では波の媒質がなく、位置  $x = 0$  の境界は自由端であるとする。

- 1) 時刻  $t = 0.0$  s での入射波を実線でグラフに書け。
- 2) 時刻  $t = 0.5$  s での入射波を実線で、反射波を青の点線でグラフに書け。
- 3) 時刻  $t = 1.0$  s での入射波を実線で、反射波を青の点線でグラフに書け。
- 4) 時刻  $t = 1.5$  s での入射波を実線で、反射波を青の点線でグラフに書け。

**問 11-5-2.** 下の図は連続的に入射波が境界にぶつかっていて、ある時刻での入射波を描いた図である。境界が自由端のときと固定端であるときの反射波をそれぞれ図示せよ(振幅は入射波と同じとする、透過波はないものとする)。

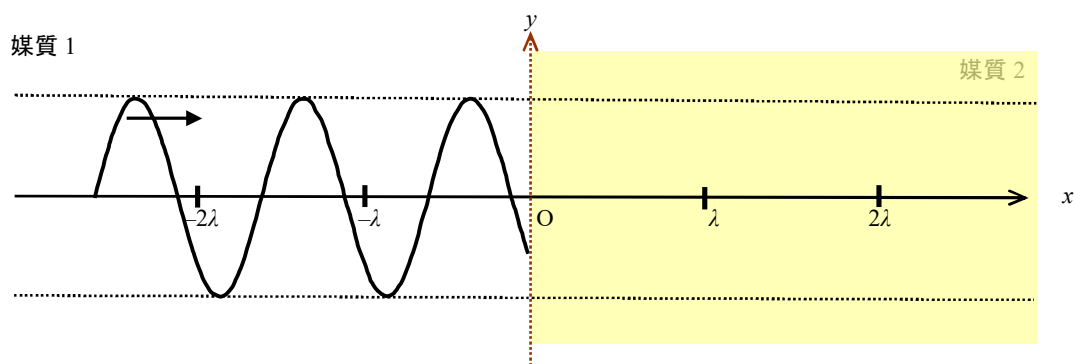
i) 自由端

ii) 固定端



**問 11-5-3.** 下の図は連続的に入射波が媒質の異なる物体にぶつかった図である。連続的な波が入射して透過波ができているとする。このときの透過波を図示せよ。透過波の速さ  $v_2$  は入射波の速さ  $v_1$  の 1.5 倍と 0.5 倍の 2 つの場合について書け(振幅は変わらない)。

- 1) 「 $v_2/v_1 = 1.5$ 」のとき、青の実線で描く
- 2) 「 $v_2/v_1 = 0.5$ 」のとき、赤の点線でえがく



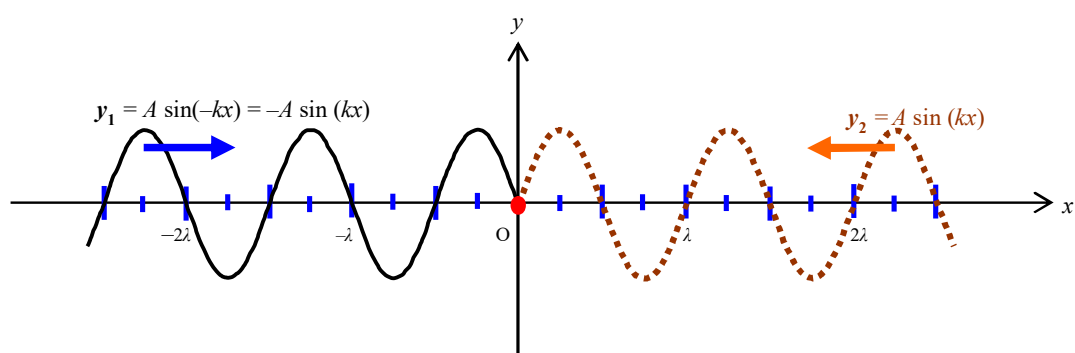
## 11-6. 定常波

同じ振幅  $A$ , 同じ波長  $\lambda$  を持つ順行波と逆行波が衝突すると, 見た目にはどちらにも進んでいない波ができる。これを, **定常波(Stationary Wave)**, または, **定在波(Standing Wave)**<sup>100</sup>と呼ぶ。例えば, 下の式で表される  $+x$  方向に進んでいる波  $y_1$  と  $-x$  方向に進んでいる波  $y_2$  が時刻  $t = 0$  において原点でぶつかったとする。その後, 時刻の経過とともに 2 つの波は「重ね合わせの原理」に基づいて合成波が生じる。元の波  $y_1$  (実線),  $y_2$  (点線) 及び合成波  $y = y_1 + y_2$  (赤の実線) の波形について時刻  $t$  が  $T/4$  ずつ経過した図を記すと下の図のようになる。

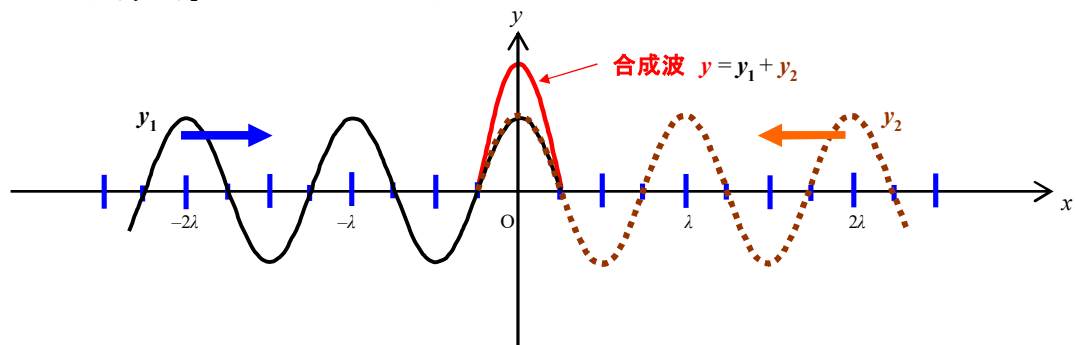
$$y_1(x, t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin(\omega t - kx) \quad (11-6-1)$$

$$y_2(x, t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin(\omega t + kx) \quad (11-6-2)$$

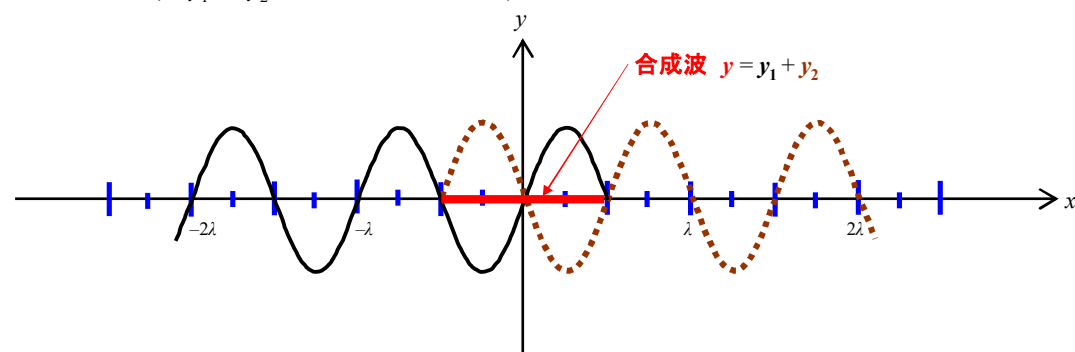
(0)  $t = 0$  のとき ( $-x$  方向からきた波  $y_1$  と  $+x$  方向から来た波  $y_2$  が原点( $x = 0$ )でぶつかる)



(1)  $t = T/4$  のとき (波  $y_1$  と  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $\lambda/4$  進む)



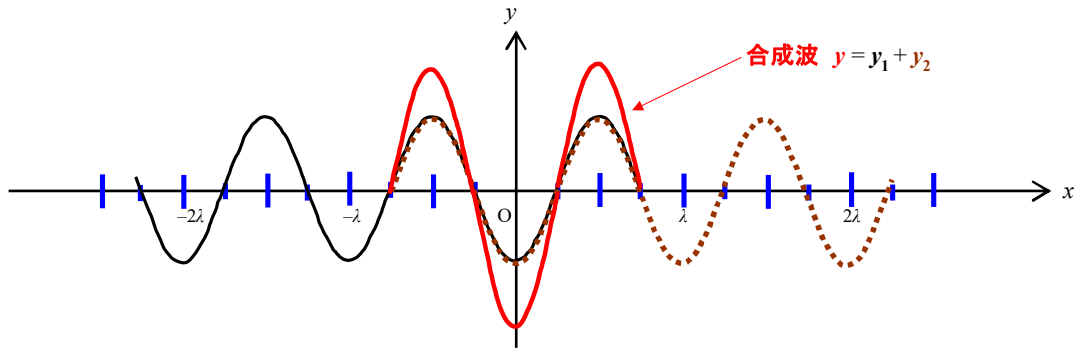
(2)  $t = 2T/4 = T/2$  のとき (波  $y_1$  と  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $\lambda/2$  進む)



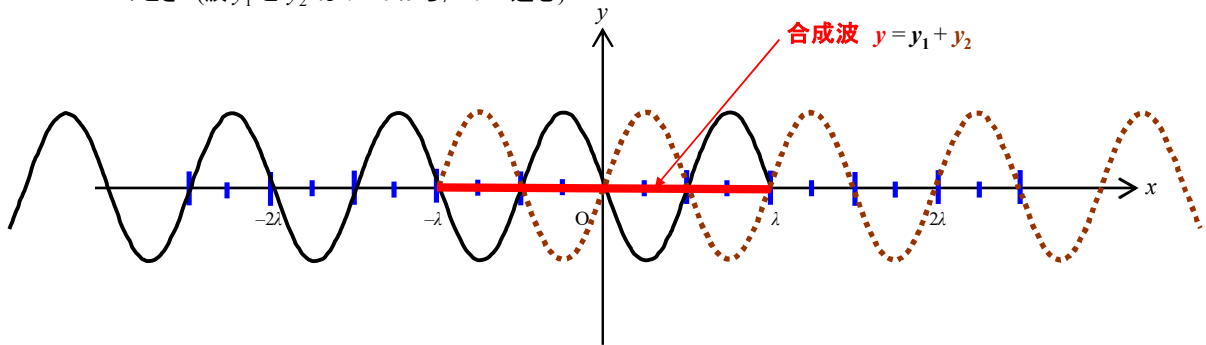
<sup>100</sup> 見かけ上は動いているように見えない波で, 同じ場所で媒質が振動しているように見える。また, 媒質の境界がある場合は, 順行波は入射波に, 逆行波は反射波に相当する。



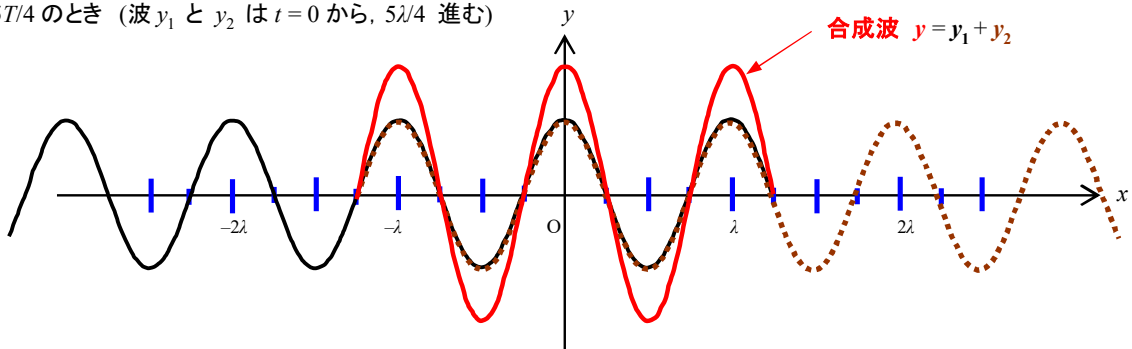
(3)  $t = 3T/4$  のとき (波  $y_1$  と  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $3\lambda/4$  進む)



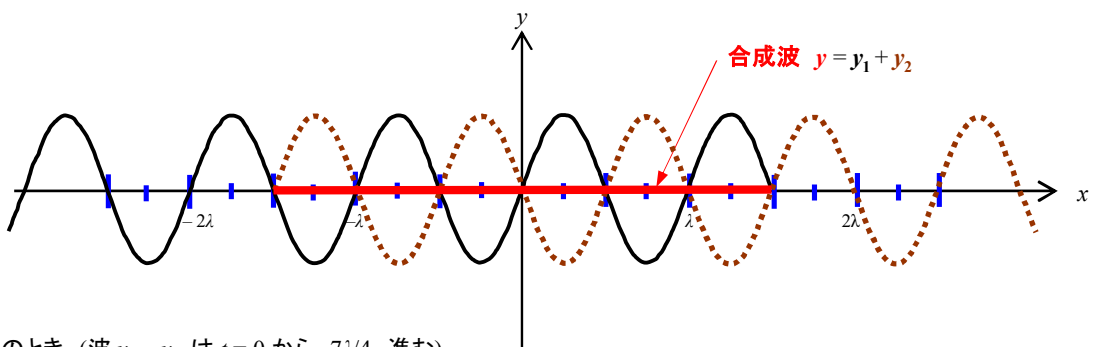
(4)  $t = 4T/4 = T$  のとき (波  $y_1$  と  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $4\lambda/4$  進む)



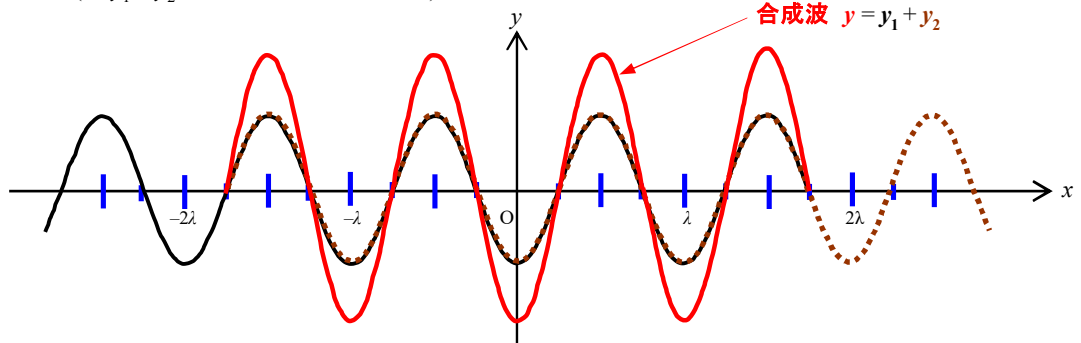
(5)  $t = 5T/4$  のとき (波  $y_1$  と  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $5\lambda/4$  進む)



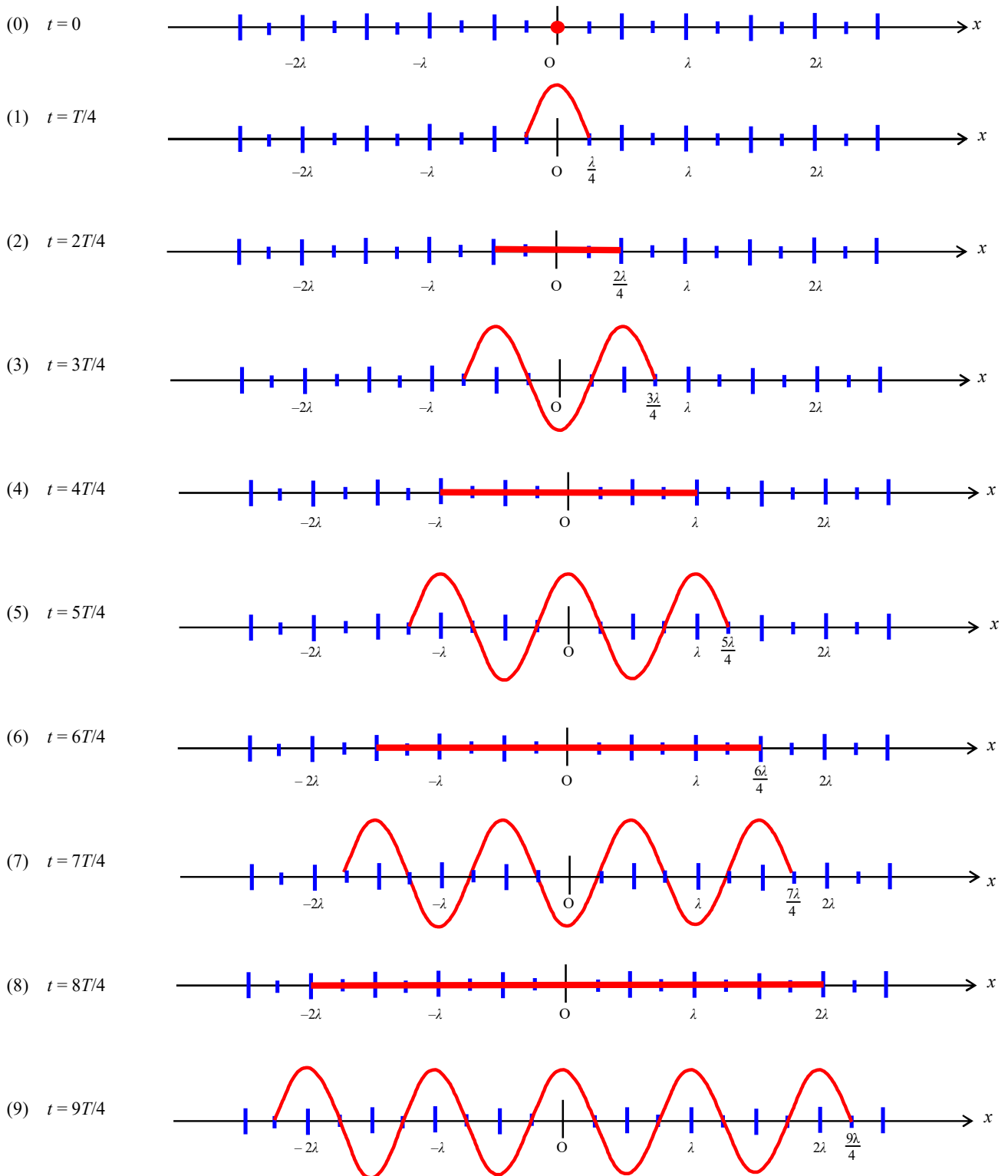
(6)  $t = 6T/4 = 3T/2$  のとき (波  $y_1$  ,  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $6\lambda/4 = 3\lambda/2$  進む)



(7)  $t = 7T/4$  のとき (波  $y_1$  ,  $y_2$  は  $t = 0$  から,  $7\lambda/4$  進む)

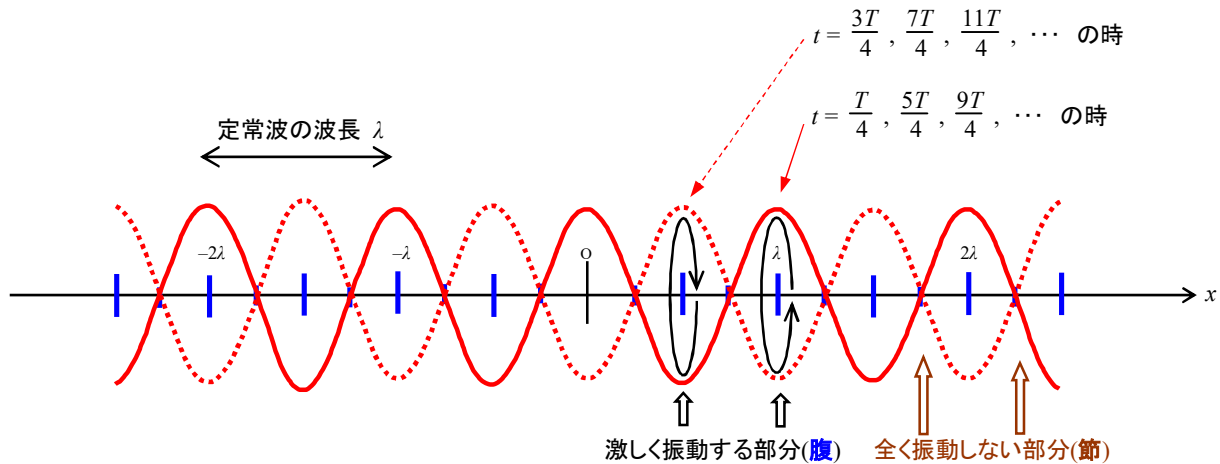


さらに合成波のみを書く。



これらの合成波をひとつの図にまとめる。合成波に対し、時間を追って見ると、振幅が $2A$ で振動する位置と全く振動しない位置が交互に配置されていることがわかる。合成波は見かけ上は動かないので、**定常波**と呼ばれる。定常波において、激しく振動する

部分(下の図で、位置  $x = 0, \pm\lambda/2, \pm\lambda, \pm3\lambda/2, \pm2\lambda, \dots$  )を**腹**と呼び、全く振動しない部分(下の図で、位置  $x = \pm\lambda/4, \pm3\lambda/4, \pm5\lambda/4, \pm7\lambda/4, \dots$  )を**節(node)**と呼ぶ。



これらの図示した関係について、(11-6-1)式と(11-6-2)式から合成波の変位  $y$  について三角関数の加法定理を適用して計算する。

$$\begin{aligned}
 y &= y_1 + y_2 = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx) \\
 &= A [\sin(\omega t) \cos(kx) - \cos(\omega t) \sin(kx) + \sin(\omega t) \cos(kx) + \cos(\omega t) \sin(kx)] \\
 &= 2A \sin(\omega t) \cos(kx)
 \end{aligned}
 \tag{11-6-3}$$

上の式は  $\cos(kx)$  という時間によらない位置の関数と  $\sin(\omega t)$  という時間のみの関数のかけ算になっている。この式は、位置  $x$  での振幅を  $|2A \cos(kx)|$  とした周期  $T$  で媒質が振動している現象を表しており、波の山及び谷の位置は移動しない。定常波の節となる位置  $x$  では、振動しないので、 $|2A \cos(kx)| = 0$  となる条件が成立する。つまり、下の条件を満たす位置  $x$  である。

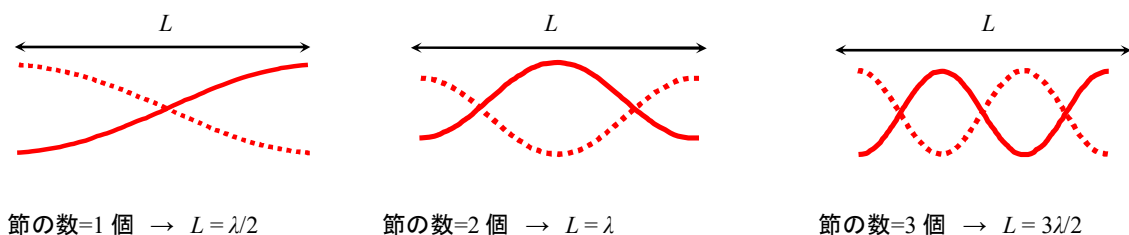
$$x = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \quad (n \text{ は整数で, } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{11-6-4}$$

#### ・境界からの反射波と境界への入射波とでできる定常波

境界が自由端であろうと固定端であろうと、反射波の波長は入射波の波長と変わらない。反射波の振幅に入射波と比べて減衰がない場合は、入射波と反射波の合成波は定常波となる。例えば、ギターなどの弦楽器では両端が固定されているので、両端が固定端となるような定常波が生じる。また、管楽器では、開いた開口部で自由端となる定常波ができる。

##### (i) 両端が自由端の場合

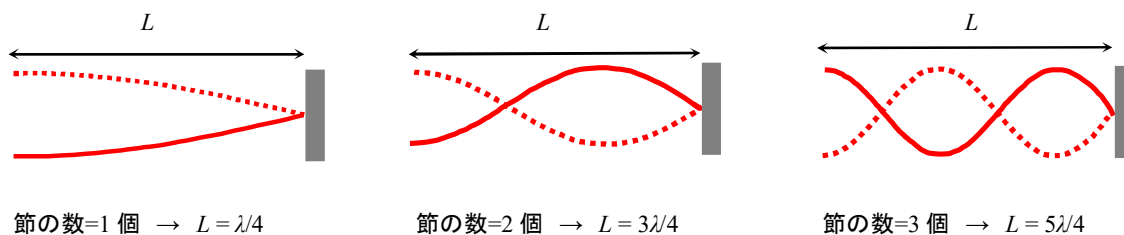
自由端では、媒質が自由に振動でき、両端で腹となる定常波ができる。全体の長さを  $L$  と定常波の波長を  $\lambda$  とすると、下の図のような定常波ができる。節の数が 1 個の場合の定常波(振動)を基本振動と呼ぶ。



$$\text{したがって, } n = \text{節の数} \rightarrow L = n \lambda / 2 = 2n \lambda / 4 \tag{11-6-5}$$

(ii) 自由端と固定端の場合

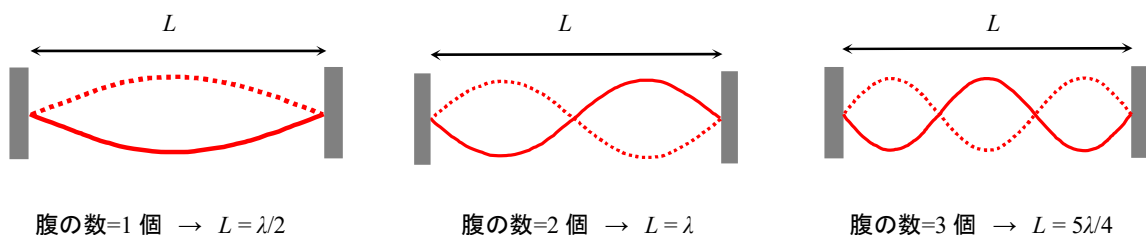
固定端では、媒質が自由に振動できないので、固定端では節、自由端では腹となる定常波ができる。節の数が1個の場合の定常波(振動)を基本振動と呼ぶ。



$$n = \text{端を含めた節の数} \rightarrow L = (2n+1) \lambda/4 \quad (11-6-6)$$

(iii) 両端が固定端の場合

固定端では、媒質が自由に振動できないので、両端で節となる定常波ができる。腹の数が1個の場合の定常波(振動)を基本振動と呼ぶ。



$$m = \text{腹の数} \rightarrow L = m \lambda/2 = 2 m \lambda/4 \quad (11-6-7)$$

問 11-6-1. 波  $y_1 = A \cos(\omega t - kx)$  と波  $y_2 = A \cos(\omega t + kx)$  がぶつかってできる合成波の変位  $y$  を表す式を三角関数の加法定理を用いて計算し、節となる位置を求めよ。また、合成波  $y$  がどの位置でも  $y=0$  となる時刻を求めよ。

問 11-6-2. 両端が固定端となる弦でできる定常波の中で、腹の数が4個、5個、6個の定常波の波長  $\lambda$  を弦の長さ  $L$  を用いて表せ。また、その定常波での節の位置は弦の右端からどの位置にあるか？

問 11-6-3. 波数が少しだけ ( $k \rightarrow k + \delta k$ ) 違う2つの波  $y_1 = A \sin(\omega t - (k + \delta k)x)$  と波  $y_2 = A \sin(\omega t + kx)$  がぶつかったとき、合成波はどうなるか？

問 11-6-4. 波  $y_1$  の式が  $y_1 = A \sin(\omega t - kx + \pi/2)$  と波  $y_2$  の式が  $y_2 = A \sin(\omega t + kx)$  と表されるとき、合成してできる定常波の節の位置を書け。波数  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  は波長) とする。

問 11-6-5. 波  $y_1$  の式が  $y_1 = A \sin(\omega t - kx + \pi/4)$  と波  $y_2$  の式が  $y_2 = A \sin(\omega t + kx)$  と表されるとき、合成してできる定常波の節の位置を書け。波数  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  は波長) とする。

問 11-6-6. 波  $y_1$  の式が  $y_1 = A_1 \sin(\omega t - kx)$  と波  $y_2$  の式が  $y_2 = A_2 \sin(\omega t + kx)$  と表され振幅  $A_1$  が  $A_1 = A + \delta A$ 、振幅  $A_2$  が  $A_2 = A - \delta A$  とする時、合成波の変位の式を  $A$  と  $\delta A$  を用いて表せ。

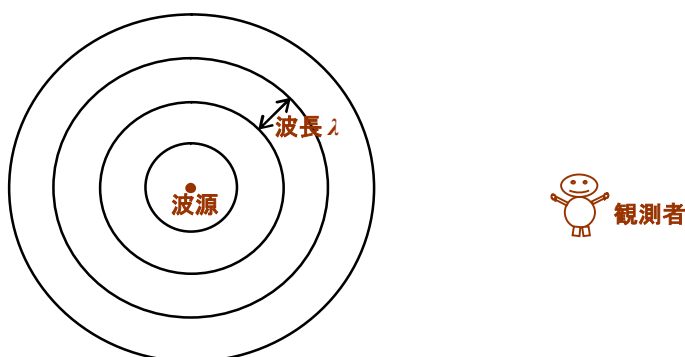
## 11-7. ドップラー効果

音の波(音波)によく知られた性質として、「救急車がサイレンを鳴らして近づくときは音が高く聞こえ、遠ざかるときは低く聞こえる」ことがある(救急車が音源となり、音源が移動している)。**音の高さ(低さ)は音波の周波数が大きい(小さい)に対応している**。このように、波源(または、観測車)の移動によって、観測車が観測する波の周波数が見かけ上、より大きくなったり、小さくなったりする効果を「**ドップラー(Doppler)効果<sup>101)</sup>**」と呼ぶ。

ここでは、音波についてのドップラー効果について調べてみよう。波源(音源;Source)と観測者(Observer)があり、共に動いていないとき、波源から出た波の周波数を  $f$ 、波長を  $\lambda$ 、波の速さを  $v$  とすると、下の関係式が成り立つ。

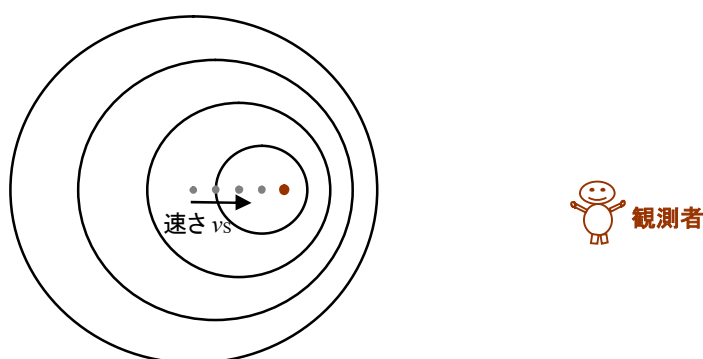
$$v = f\lambda \quad (11-7-1)$$

これを図に示す。波源から出た波は同心円に広がり、山と山の間の長さが波長  $\lambda$  となる。



(i) 波源が観測者に速さ  $v_s$  で近づいていく場合<sup>102)</sup>

波源から出た波は、その波が出た位置で同心円となり広がっていく。波源が移動しているので同心円の中心が速さ  $v_s$  で移動する。この場合は下の図からわかるように観測者が感じる波の波長が短くなっている(速さ  $v_s$  が波の速さ  $v$  と等しくなるとき、波の山が全て重なることに注意)観測者が感じる波長  $\lambda_o$  は



$$\lambda_o = \lambda (1 - v_s/v) \quad (11-7-2)$$

<sup>101)</sup> 19 世紀のオーストリアの物理学者。ドップラー効果は音波だけでなく電磁波でも観測される現象である。ビッグバン宇宙論では宇宙は膨張し、星は互いに遠ざかっているが、星の遠ざかる速度はドップラー効果より算出されている。

<sup>102)</sup> ここでは、音源の速さが元の音波の速さを超えない場合を取り扱う。もし、音源の速さと音波の速さが一致する場合は、音源から出た山が集まり、観測者にはそれらの山の集団が同時に到達することとなる。この波の山の集団でできる波を衝撃波と呼ぶ。また、音の速さをマッハ 1 と呼ぶ。1 気圧、 $T$  °C の温度では音の速さ  $v$  は  $v \sim 331.5 + 0.6 T$  [m/s] と観測されている。

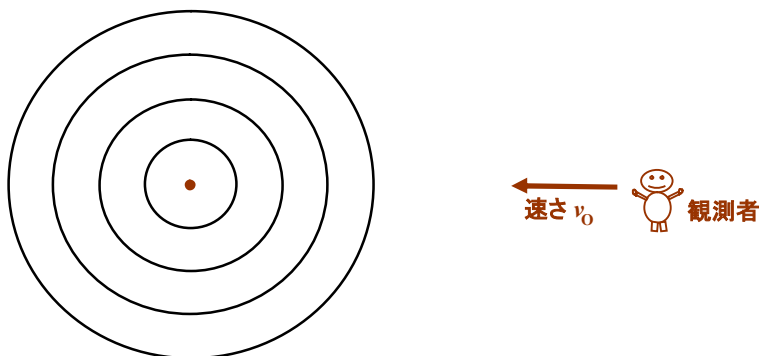
と表すことができ. したがって, 他の量は変わらないので, 観測者が感じる周波数  $f_0$  は

$$f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = f \frac{\lambda}{\lambda_0} = f \frac{1}{1 - v_s/v} = f \frac{v}{v - v_s} \quad (11-7-3)$$

となり, 観測される(見かけの)周波数  $f_0$  は元の周波数  $f$  よりも大きくなり, より高い音として聞こえる.

(ii) 観測者が波源に速さ  $v_0$  で近づいていく場合

観測者が速さ  $v_0$  で波源に近づいているので, 観測者が感じる波の速さ  $v'$  について観測者が動いている分, 速く感じる.



$$v' = v + v_0 \quad (11-7-4)$$

したがって, 観測者が感じる周波数  $f_0$  は

$$f_0 = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{v (1 + v_0/v)}{\lambda} = f \left( 1 + \frac{v_0}{v} \right) = f \frac{v + v_0}{v} \quad (11-7-5)$$

となり, 観測される(見かけの)周波数  $f_0$  は元の周波数  $f$  よりも大きくなる.

波源, 観測者が一直線上を動いており, 共に, 速さ  $v_s$  と  $v_0$  で近づく時は(11-7-3)式と(11-7-5)式を合体させて, 観測者が感じる周波数  $f_0$  は

$$f_0 = f \frac{v + v_0}{v - v_s} \quad (11-7-6)$$

となる. なお, 音源と観測者がそれぞれ遠ざかる場合は, それぞれの速さ  $v_s$  と  $v_0$  について, 正から負の値に変える.

**問 11-7-1.** 音源が振動数  $f = 200$  Hz の音を出しながら一直線上を一定の速さ  $v_s = 30$  m/s で進んでいる. 空気中における音の進む速さ  $v = 340$  m/s とする.

- 1) 観測者が止まっているときに聞こえる音の振動数  $f_0$  と観測者が観察する音の波長  $\lambda_0$  を求めよ.
- 2) 観測者が速さ  $v_0 = 20$  m/s で音源に近づいているときに聞こえる音の振動数  $f_0$  と観測者が観察する音の波長  $\lambda_0$  を求めよ.
- 3) 観測者が速さ  $v_0 = 36$  km/h で音源から遠ざかるときに聞こえる音の振動数  $f_0$  を求めよ.