4. 回転運動

2章では，力学(物理学)の出発点となる「ニュートンが提案した3つの運動の法則」を示した．その第2法則の「運動の法則」では，運動の様子を記述する運動方程式が提案された．「回転運動」は運動の形態の1種なので，運動方程式を用いても運動の様子をしらべることはできるが，回転運動に特化した(もう少し見通しのよい)「回転運動に関する運動方程式」を導出する．回転運動に関する運動方程式を導出するため，「ベクトルの外積」，「角運動量」，「力のモーメント」を学び，「回転運動に関する運動方程式」を導出する．その後，「慣性力」について学ぶ．(回転運動に伴う)遠心力は慣性力の1種である．

4-1.　ベクトルの外積

回転運動を調べるには「ベクトルの外積」を用いると便利である．ここでは，最初にベクトルの外積について学ぶ．

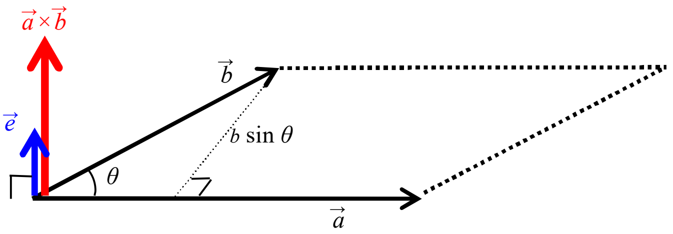
＊ ベクトルの外積の定義

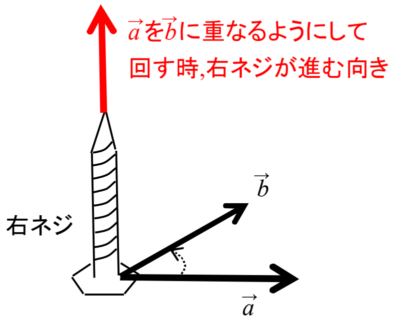
2 つの 3 次元のベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$を考える．$\vec{a}$と$\vec{b}$のベクトルの外積は記号「 $\vec{a}\times\vec{b}$ 」と表し，2 つのベクトルをクロス(×)ではさむ．$\vec{a}$と$\vec{b}$の間の角度 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$とすると，外積は下の式で定義さする．また，外積してできた量はベクトル量となり，その向きは$\vec{a}$を$\vec{b}$に重ねるように回転させたときに右ネジが進む向き(右ネジの法則)となる．

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\sin\theta\ \vec{e}} = \begin{cases} 大きさ = |\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\sin\theta \\ 向き = \vec{a}を\vec{b}に重ねるように回転させたときに \\ \quad 右ネジが進む向き(単位ベクトル\vec{e}の向き) \quad \rightarrow \ 右ネジの法則 \end{cases} \tag{4-1-1}$$

外積の大きさ　$|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\sin\theta$ は，$\vec{a}$と$\vec{b}$を 2 つの辺とした平行四辺形の面積に等しい．

(平行四辺形の，底辺の長さが$|\,\vec{a}\,|$，高さが$|\,\vec{b}\,|\sin\theta$　となる)





＊ 外積の性質

$$\begin{cases} \vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b}) & \text{(交換則 (外積はかけ算の順序による))} \quad (4\text{-}1\text{-}2) \\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} & \text{(分配則)} \quad (4\text{-}1\text{-}3) \\ \vec{a}\times(m\,\vec{b}) = (m\,\vec{a})\times\vec{b} = m\,(\vec{a}\times\vec{b}) & (m\ \text{はスカラー量}) \quad (4\text{-}1\text{-}4) \\ \vec{a}\times\vec{a} = 0 & \text{(同じベクトルの外積)} \quad (4\text{-}1\text{-}5) \end{cases}$$

* 単位ベクトルどうしの外積

直交座標系(デカルト座標系)の 3 つの単位ベクトル, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ は大きさが 1 でそれらの間の角度は各々90°となり, 外積をとると, その向きは右ネジの法則から求めることができ, 下の式のような関係式(直交性の関係式)を導くことができる.

$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z,\quad \vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x,\quad \vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y \qquad (4\text{-}1\text{-}6)$$

* 成分で表した外積

上の(4-1-6)式を使い, $\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$ と $\vec{b} = b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y + b_z\,\vec{e}_z$ の外積をとると, 同じ単位ベクトルどうしの外積は「0」となるので, 下の式のように計算できる. 最後の式は行列式を用いて表した.

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z)\times(b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y + b_z\,\vec{e}_z)$$

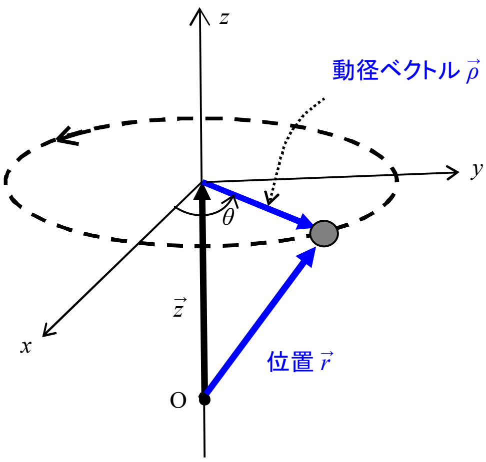
$$= a_x b_y\,\underbrace{(\vec{e}_x\times\vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} + a_x b_z\,\underbrace{(\vec{e}_x\times\vec{e}_z)}_{-\vec{e}_y} + a_y b_x\,\underbrace{(\vec{e}_y\times\vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z} + a_y b_z\,\underbrace{(\vec{e}_y\times\vec{e}_z)}_{\vec{e}_x} + a_z b_x\,\underbrace{(\vec{e}_z\times\vec{e}_x)}_{\vec{e}_y} + a_z b_y\,\underbrace{(\vec{e}_z\times\vec{e}_y)}_{-\vec{e}_x}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{e}_z$$

$$= (\,a_y b_z - a_z b_y\,,\ a_z b_x - a_x b_z\,,\ a_x b_y - a_y b_x\,) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (4\text{-}1\text{-}7)$$

* 円柱座標系の単位ベクトルの間の外積

「1-7. 極座標表示」では 2 次元平面上を運動する物体の運動を調べるために, 2 次元平面における極座標表示を導入した. ベクトルの外積は 3 次元ベクトルで定義されるので, 物体の位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ に対し, xy 平面では極座標表示し, z 方向はそのままの座標で表す円柱座標系を導入する. 動径(半径) ρ は z 軸からの物体までの距離, 角度 θ は x 軸からの物体までの角度とする.



$$\vec{r} = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0) + (0, 0, z) = \vec{\rho} + \vec{z} \tag{4-1-8}$$

$$= \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z \tag{4-1-8'}$$

ここで，動径方向の単位ベクトル$\vec{e}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$，それと垂直な単位ベクトル$\vec{e}_\theta = d\vec{e}_\rho/d\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$，$z$ 方向を向いた単位ベクトル$\vec{e}_z = (0, 0, 1)$で，動径 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．(4-1-7)式を使うと，この 3 つの単位ベクトルの間の外積にも下の関係式が成り立つことが確かめられる．

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z\,, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho\,, \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \tag{4-1-9}$$

問題 4-1　2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$の外積の大きさ $|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|$ を求めよ($\vec{a}$と$\vec{b}$の間の角を θ とする)．

1)　$|\vec{a}| = 2$,　$|\vec{b}| = 3$,　$\theta = 30°$　　2)　$|\vec{a}| = 2^{1/2}$,　$|\vec{b}| = 4$,　$\theta = 135°$

3)　$|\vec{a}| = 2$,　$|\vec{b}| = 4$,　$\theta = 5\pi/6$　　4)　$|\vec{a}| = 1$,　$|\vec{b}| = 4$,　$\theta = 2\pi/3$

問題 4-2　次のベクトルの外積$(\vec{a}\times\vec{b})$と$(\vec{b}\times\vec{a})$を求め，$(\vec{b}\times\vec{a}) = -(\vec{a}\times\vec{b})$が成立することを確かめよ．

1)　$\vec{a} = (1, 3, 0)$　$\vec{b} = (4, 2, 0)$　　2)　$\vec{a} = (0, 1, 2)$　$\vec{b} = (0, 1, -3)$

3)　$\vec{a} = (2, 1, 3)$　$\vec{b} = (-2, 0, -3)$　　4)　$\vec{a} = (1, 2, 1)$　$\vec{b} = (3, 1, 2)$

問題 4-3　次のことを確かめよ．

1)　$\vec{a} = (2, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, 4)$のとき，$(\vec{a}\times\vec{b})$と$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$を計算し，後者は横2，縦3，高さ4 の直方体の体積Vと同じであることを確かめよ．

2)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ となることを確かめよ．

問題 4-4　$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$　が成り立つことを確めよ．

問題 4-5　(1-7-13)式~(1-7-15)式で示した 3 次元空間における極座標表示の単位ベクトル $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ に対し，(4-1-9)式のように外積の直行性を確かめよ．(省略してよい)

4-2.　角運動量(Angular momentum)

並進運動の激しさを表す量として運動量$\vec{p} = m\,\vec{v}$ を採用したが，回転運動の激しさを表す量として，「**角運動量$\vec{L}$**」を導入する．原点 O から位置$\vec{r}$に質量 m の質点があり，質点が運動量$\vec{p}$で運動していたとすると，角運動量$\vec{L}$は下の式のように，位置$\vec{r}$と運動量$\vec{p}$の外積で定義する．また，角運動量は原点の位置によってその値(向きも)が変わるので注意する必要がある．

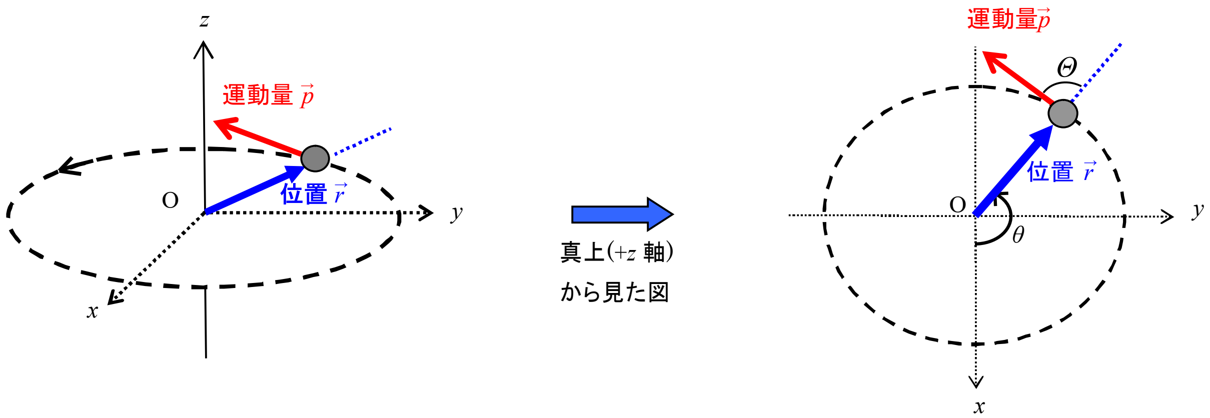
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\, \vec{v} \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

位置$\vec{r}$と運動量$\vec{p}$の間の角度を Θ とすると，上の定義式より角運動量$\vec{L}$の大きさと向きは下の式のように表すことができる．

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\, \vec{v} = \begin{cases} \text{大きさ } L = r\, p \sin\Theta = m\, r\, v \sin\Theta \\ \text{向き = 位置を運動量に重ねるようにして右ネジが進む向き} \end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

質点の運動が原点 O に対し，遠ざかる(または，近づく)運動では，位置$\vec{r}$と運動量$\vec{p}$が平行(並進運動)となり，2 つのベクトルの間の角度 $\Theta = 0$ (または，π)となり，「$\sin\Theta = 0$」が成立し，「角運動量$\vec{L} = 0$ 」が成立する．

次に，質点の運動が回転運動となっている場合を想定してみよう．最も単純な回転運動として，xy 平面上で回転運動する質点の角運動量$\vec{L}$を計算しよう．下の図のように質量 m の質点が原点 O から xy 平面上の位置$\vec{r} = (x, y, 0)$で運動量$\vec{p} = (p_x, p_y, 0) = (m v_x, m v_y, 0)$で，反時計まわりで回転運動していたとする．角度 θ は位置$\vec{r}$の$+x$ 軸からの角度，角度 Θ は位置と運動量$\vec{p}$の間の間の角度を表す．



(4-2-2)式より，角運動量$\vec{L}$の向きは，位置ベクトルを運動量ベクトルに重なるように回転させたときに右ネジが進む向き，この運動の例では，「$+z$ 方向」となるので，xy 平面上で反時計回りの回転運動では，その角運動量$\vec{L}$の向きは「$+z$ 方向」となる．回転面と直交する向きのベクトル(回転軸に関係する)のことを「軸性ベクトル」と呼ぶ．角運動量や後で述べる力のモーメントは軸性ベクトルである．原点 O からの距離 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$，運動量の大きさ $p = |\vec{p}| = \sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2}$ を用いると，(4-2-2)式は下の式のように$+z$ 方向の単位ベクトル$\vec{e}_z$を用いて表すことができる．

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\, p \sin\Theta\ \vec{e}_z = r\, m\, v \sin\Theta\ \vec{e}_z \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

円運動する場合は，角度 $\Theta = 90$ °となるので，角運動量$\vec{L} = r\,m\,v\,\vec{e}_z$となる．また，ベクトルの成分を使った行列式を用いて表すと下の式で表すことができる．

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\,0\,,0\,,x\,p_y - y\,p_x\,) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} \vec{e}_z \tag{4-2-4}$$

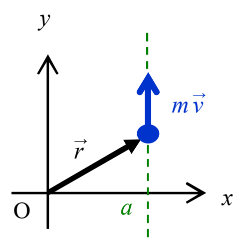
* 角運動量の単位

角運動量の単位はその定義式である(4-2-1)式より，下の式で表すことができる．

$$\text{角運動量の単位} = \mathrm{kg\ m^2/s} \tag{4-2-5}$$

* xy 平面上を運動する質点の角運動量（その 1） (*省略してよい ← 原点を変えると，角運動量の値が変わる例)

原点 O から遠ざかる(または，近づく)直線運動は，並進運動で「角運動量$\vec{L} = 0$ 」となることを述べたが，同じ直線運動で原点をずらした場合の角運動量を計算してみよう．図のように原点 O を$-x$ 方向にずらした点を新たにとると，質点は位置$\vec{r} = (a, y, 0)$，運動量$\vec{p} = (0, m\,v, 0)$で$+y$ 方向に運動し，角運動量$\vec{L} = a\,mv\,\vec{e}_z$ となり，「角運動量$\vec{L} \neq 0$」となる．質点が同じ運動をしても，角運動量は原点の取り方によって，その値が異なる 1 例である．



* xy 平面上を運動する質点の角運動量

xy 平面上で運動する質点の位置$\vec{r}$について角運動量$\vec{L}$を求めてみよう．(4-1-8)式で示した円柱座標系を採用すると，xy 平面上でのみ運動する質点の位置$\vec{r}$の z 成分$= z = 0$ となる．そのため，質点の位置$\vec{r}$は動径ベクトル$\vec{\rho}$のみで表すことができる．原点 O から質点までの距離 r (= 回転半径 = 動径 $= \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$)，$x$ 軸からの角度 θ とする．

$$\vec{r} = (x, y, 0) = (\rho\cos\theta\,, \rho\sin\theta\,, 0) = \vec{\rho} = \rho\,\vec{e}_\rho \tag{4-2-6}$$

この位置$\vec{r}$に対して，時間で微分し，速度$\vec{v}$を求めると下の式で表すことができる．

$$\vec{v} = \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\cos\theta - \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta\,,\ \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\sin\theta + \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta\,, 0\right) \tag{4-2-7}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}(\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0) + \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\sin\theta\,, \cos\theta\,, 0\,)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho + \rho\,\omega\,\vec{e}_\theta \qquad \text{(4-2-7)'}$$

xy 平面上で運動する場合，角運動量$\vec{L}$は下の式のように，z 方向を向くベクトルとして表すことができる(角速度 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$).

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = \rho\,\vec{e}_\rho \times m\,(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\omega\,\vec{e}_\theta) = m\,\rho^2\,\omega\,(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta) = m\,\rho^2\,\omega\,\vec{e}_z = L_z\,\vec{e}_z \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

さらに，回転面と垂直となる回転軸方向(ここでは$+z$ 方向)を向いた**角速度ベクトル$\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_z$**と定義すると，この場合は下の式のように，角運動量$\vec{L}$と角速度ベクトル$\vec{\omega}$は同じ向き($+z$ 方向)を向き，比例する.

$$\vec{L} = m\,\rho^2\,\vec{\omega} \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

xy 平面上で回転する速度成分(動径方向と直交する成分)は $\rho\,\omega\,\vec{e}_\theta$で，角速度ベクトル$\vec{\omega}$を用いて表すと下の式で表される. 回転の向き(回転面)は角速度ベクトル$\vec{\omega}$と直交する.

$$\text{速度}\vec{v}\text{の回転への寄与} = \rho\,\omega\,\vec{e}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

***　慣性モーメント**

(4-2-9)式より，原点 O を中心とする xy 平面上で回転する質点の角運動量$\vec{L}$は角速度ベクトル$\vec{\omega}$に比例していることがわかった. 角運動量$\vec{L}$の大きさ L と角速度 ω を下の式のように比例関係で結び，その比例定数を**「慣性モーメント I」**として定義する. .

$$\boldsymbol{L = m\,\rho^2\,\omega = I\,\omega} \qquad (4\text{-}2\text{-}11)$$

$$\boldsymbol{I = m\,\rho^2} \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

* 慣性モーメントの単位

上の式より，慣性モーメント I の単位は下の式で表すことができる.

$$\text{慣性モーメントの単位} = \mathrm{kg\ m^2} \qquad (4\text{-}2\text{-}13)$$

問題 4-6　質量の無視できる長さ $L = 0.5$ m の棒の先端に質量 $m_A = 2.0$ kg と $m_B = 4.0$ kg の物体 A と物体 B をつけ，物体 A から長さ $r_A = 0.3$ m の位置を中心として，反時計周りに 6 秒間で 4 回転の割合で回転させた. このとき，回転の角速度 ω，物体 A と B の速さ v_A と v_B，物体 A と B の運動量の大きさ p_A と p_B，物体 A と B の角運動量の大きさ L_A と L_B をそれぞれ求めよ.

問題 4-7　質量 $m = 2.0$ kg の物体が時刻 t [s]における位置$\vec{r} = (2\cos(\pi t), 4\sin(\pi t), 0)$ [m]として運動している．この物体の角運動量$\vec{L}$を求めよ．

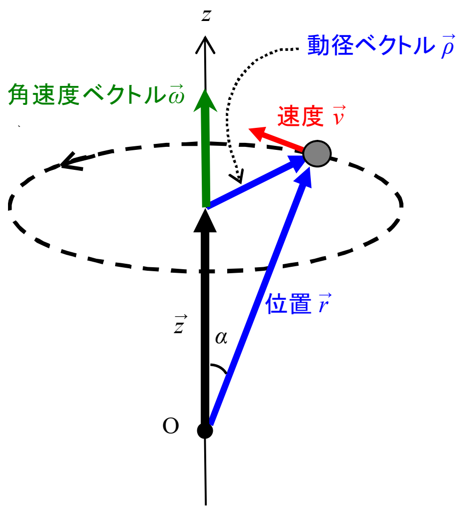
問題 4-8　質量 $m = 2.0$ kg の物体を xz 平面上の斜め上方に投射した。時刻 t [s]における物体の位置$\vec{r} = (2t, 0, 2t - 4.9t^2)$ [m] で運動しているとき，この物体の角運動量$\vec{L}$を求めよ．

問題 4-9　質量 $m = 400$ g の物体が xy 平面上を原点からの距離 $r = 2.0$ m で円運動している．この物体の慣性モーメント I を求めよ．

* xy 平面で回転する質点の角運動量

(←原点を変えると(z 成分 $\neq 0$)，角運動量の値が変わる例．初学者は省略してよい)

質点の位置$\vec{r}$を円柱座標系で表現し，位置の z 成分も値があるとしよう．原点 O を図のように回転軸上にとり，$\vec{z} = z\,\vec{e}_z$とし，座標(0, 0, z)を回転の中心として，xy 平面上で回転する場合の角運動量を計算よう．回転半径をρとし，回転の動径ベクトル$\vec{\rho} = \rho\,\vec{e}_\rho$ とすると，質点の位置$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z}$ で，角運動量$\vec{L}$は下の式のように計算できる(回転半径 $\rho = r\sin\alpha$)．回転する速度成分は角速度ベクトルと直交し，(4-2-10)式と同様に($\vec{\omega} \times \vec{z} = 0$ を用いる)，$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \rho\,\omega\,\vec{e}_\theta$と表される．



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{\rho} + \vec{z}) \times \vec{p} = \vec{\rho} \times \vec{p} + \vec{z} \times \vec{p}$$

$$= \rho\,\vec{e}_\rho \times m\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\,\omega\,\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right) + z\,\vec{e}_z \times m\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\,\omega\,\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right)$$

$$= m\rho^2\omega\,\vec{e}_z - m\,\rho\frac{dz}{dt}\vec{e}_\theta + m\,z\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\theta - m\,z\,\rho\,\omega\,\vec{e}_\rho = m\rho^2\omega\,\vec{e}_z + m\left(z\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{dz}{dt}\right)\vec{e}_\theta - m\,z\,\rho\,\omega\,\vec{e}_\rho$$

$$= m\rho^2\,\vec{\omega} + m\left(z\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{dz}{dt}\right)\vec{e}_\theta - m\,z\,\omega\,\vec{\rho} \qquad (4\text{-}2\text{-}14)$$

回転半径 ρ と位置の z 成分が一定の場合($d\rho/dt = dz/dt = 0$)では，角運動量$\vec{L}$は下の式で表される．

$$\vec{L} = m(-xz, -yz, x^2 + y^2) \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

問題 4-10　3 次元空間おける極座標表示を用いて，角運動量$\vec{L}$を求めよ(位置$\vec{r} = r\ \vec{e}_r$ とし，速度は$\vec{v}$は(1-7-16)式を用いる)．

(省略してよい)

* xy 平面上を運動する質点の運動エネルギー

xy 平面上を運動する質点の時刻 t での速度$\vec{v}$は，原点 O からの距離 ρ，x 軸からの角度 θとすると，(4-2-7)'式で表すことができ，運動エネルギーK は下の式で表すことができる．

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\rho \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2 \tag{4-2-16}$$

「回転半径 ρ が一定」となる場合は，上の式の右辺の 1 項目が「 0 」となり，(4-2-12)式で表された慣性モーメント I を用いて下の式で表すことができる．この式は「回転運動の運動エネルギー」を表している．

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2} I \omega^2} \tag{4-2-17}$$

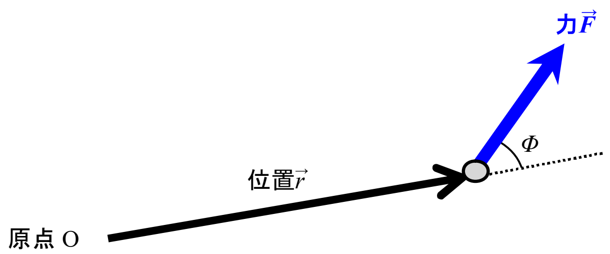
4-3.　力のモーメント(Moment of force)

原点 O から位置$\vec{r}$の地点に力$\vec{F}$を作用させたとする．力のモーメント$\vec{M}$(または，「トルク」と呼ぶ)は下の式のように，位置$\vec{r}$と力$\vec{F}$の外積として定義する．

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} \tag{4-3-1}$$

力のモーメント$\vec{M}$の大きさと向きは下の式のように表すことができる．ここで，角度 Φ は位置$\vec{r}$と力$\vec{F}$の間の角度である．

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{cases} \text{大きさ } M = r\,F \sin \Phi \\ \text{向き = 位置を力に重ねるようにして右ネジが進む向き} \end{cases} \tag{4-3-2}$$



＊ 力のモーメントの単位

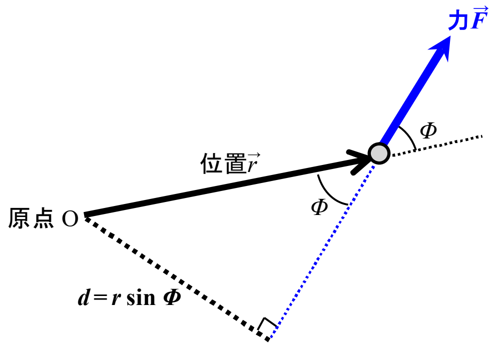
力のモーメントの単位はその定義式である(4-3-1)式より，下の式で表すことができる [1].

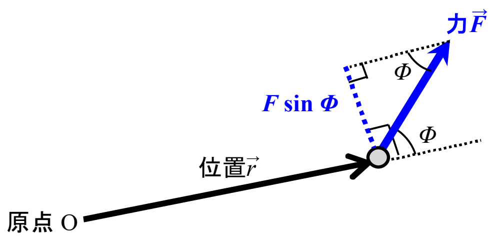
$$\text{力のモーメントの単位} = \mathrm{N\ m} = \mathrm{kg\ m^2/s^2} \tag{4-3-3}$$

力のモーメントは原点 O のまわりで物体を回転させるための原因となる物理量で，軸性ベクトルの 1 つである．例えば，力のモーメントが$+z$ 方向を向く場合，物体は(z 軸と直交する)xy 平面上で反時計回り(+の回転)に回転させようとする原因になる.

＊ 力のモーメントの意味

力のモーメントは物体を回転させる原因となる物理量で，回転面上で物体の位置と物体に作用する力が直交している場合(Φ = 90 °)が最も回転させるための効率が良い．そこで，位置や力について，(どちらか一方を)互いに直交するような成分に分割し，それらを掛け算して求める．下に述べるように分割する方法は 2 つある.





① 上の左の図のように，力が直角に作用するまでの距離(力が作用するまでの腕の長さ) $d = r \sin \Phi$ なので力のモーメントの大きさ $M = d\,F = r \sin \Phi \cdot F = r\,F \sin \Phi$

② 上の右の図のように，物体を回転させる実質的な力(位置と直交する力成分) $f = F \sin \Phi$ なので，力のモーメントの大きさ $M = r\,f = r \cdot F \sin \Phi = r\,F \sin \Phi$

問題 4-11 下のような位置$\vec{r}$に力$\vec{F}$が作用している．このとき，力のモーメント$\vec{M}$を求めよ.

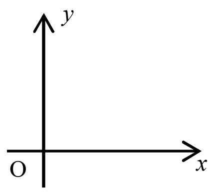
1) $\vec{r} = (3.0\ ,2.0\ ,0)$ m, $\vec{F} = (1.0\ ,4.0\ ,0)$ N

2) $\vec{r} = (1.0\ ,2.0\ ,3.0)$ m, $\vec{F} = (3.0\ ,4.0\ ,-2.0)$ N

3) $\vec{r} = (2.0\ ,4.0\ ,-2.0)$ m, $\vec{F} = (1.0\ ,2.0\ ,-1.0)$ N

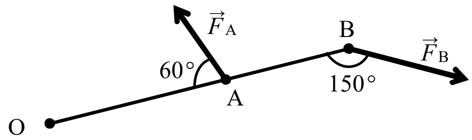
[1] 力のモーメント(トルク)は次の節で学ぶように，回転運動を発生させる原因となるものである．単位の「 N m 」は仕事，およびエネルギーの単位「 J 」と等しいが，物理的意味が違うので，力のモーメントの単位として，「 J 」は使わない(仕事はベクトルの内積を使って計算するが，力のモーメントは外積を使って計算する)で，「 N m 」を用いる．定義式では，「 $\vec{r} \times \vec{F}$ 」だが，単位は N(ニュートン)を最初に書き，次に m(メートル)を書いて表す．また，土木工学では，力のモーメントを「 $\vec{F} \times \vec{r}$ 」と定義しているが，土木工学では xy 平面上で，時計回りの回転を正の回転と定義している(物理学・数学では反時計回りを正の回転と定義している)ので注意すること.

問題 4-12 下の図のように xy 平面上に力が働いているとき，原点 O からの点 A と点 B に力が働いていた．それぞれの力による力のモーメントの z 成分を求めよ．そして，このように力が働く場合は，どちら向き(時計回りか，反時計回りか)に回転しようとするか？ ここで，$+z$ 方向は紙面の裏から表に向かう向きとする．



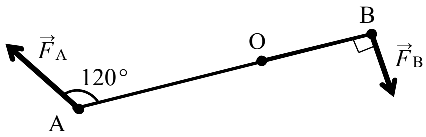
1) OA の長さ $r_A = 2.0$ m，力の大きさ $F_A = 3.0$ N

OB の長さ $r_B = 4.0$ m，力の大きさ $F_B = 3.0$ N

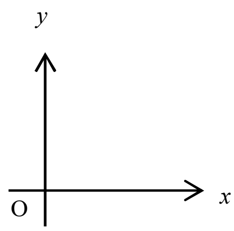


2) OA の長さ $r_A = 4.0$ m，力の大きさ $F_A = 3.0$ N

OB の長さ $r_B = 2.0$ m，力の大きさ $F_B = 3.0$ N

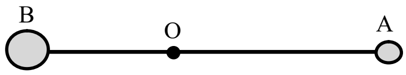


問題 4-13 座標軸を右の図のようにとる．質量が無視でき固くて変形しない棒の先に質量 $m_A = 2.0$ kg の物体 A と質量 $m_B = 3.0$ kg の物体 B がついている．点 O を回転軸として，点 O から物体 A までの長さ $r_A = 4.0$ m，点 O から物体 B までの長さ $r_B = 3.0$ m とする．下のような状態で，物体 A と B に働く重力による力のモーメントを求めよ．また，z 軸のまわりのどちら側に回転し始めるか？ ここで，重力は $-y$ 方向に働いており，重力加速の大きさを $g = 9.8$ m/s^2 とする．

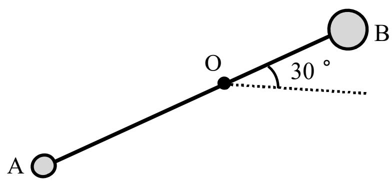


$+z$ 方向 = 紙面の奥から表に向かう方向

1) 図のように棒が x 軸と平行に置かれている．



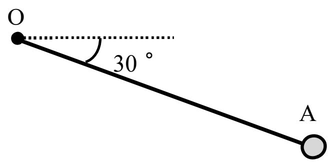
2) 図のように棒が x 軸から 30° 傾いて置かれている．



問題 4-14 上の問題と同様に，質量 $m_A = 2.0$ kg の物体 A に働く重力による力のモーメントを求めよ．ただし，OA 間の距離 $r_A = 7.0$ m とする．

1) 図のように棒が x 軸と平行に置かれている．

2) 図のように棒が x 軸から 30° 傾いて置かれている．



問題 4-15 向心力(中心力) $\vec{F}$ は，単位ベクトル $\vec{e}_r$ を用いて，「$\vec{F} = -f\,\vec{e}_r$」と表すことができる($|\vec{F}| = f$)．向心力による力のモー

メント$\vec{M}$は,「$\vec{M}=0$」となることを確かめよ.

4-4.　回転運動に関する運動方程式

この節では,「回転運動に関する運動方程式」を導出しよう. 角運動量$\vec{L}$の定義式である(4-2-1)式に対し, 時間微分する.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

上式の右辺の 1 項目は,「$\vec{v}\times m\vec{v}=0$ (平行なベクトルどうしの外積は「 0 」になる)」となる. 右辺の 2 項目の「$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$」は, ニュートンが発見した運動の第 2 法則を記述している「運動方程式」である(2-4-3)式から, この物体に作用している力$\vec{F}$となる. まとめると, 角運動量$\vec{L}$の時間微分すると, 下の運動方程式を得ることができる. 下の式で右辺は, 位置$\vec{r}$と力$\vec{F}$の外積なので, 力のモーメント$\vec{M}$となる.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}\ (=\vec{M}) \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

上の式の左辺は回転運動の激しさを表す角運動量$\vec{L}$の時間微分(角運動量$\vec{L}$の時間発展)で, それが力のモーメント$\vec{M}$に等しいという式であり, この式が「回転運動に関する運動方程式」である. 力のモーメントが有限な値をとると, (原点 O を通過する平面を回転面とした)回転運動に変化が生じる. 例えば, 最初は物体が静止していたとして, 力のモーメントが有限な値をとると, この物体は回転運動し始める. 回転し始める原因が, 力のモーメントである. なお, このときの回転面は, 力のモーメントの向きと直交する平面である.

特に, xy 平面上での回転運動を行うときは, 角運動量と力のモーメントの z 成分だけを扱えばよい. このとき, 角運動量の z 成分 L_z は(4-2-8)式と(4-2-11)式より, 角速度 ω と慣性モーメント I を用いて,「$L_z=I\,\omega$」と表すことができるので, (4-4-1)式の z 成分をとると, 下の運動方程式を得ることができる.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,\omega)=M_z \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

さらに, 慣性モーメント I が時間変化しないで一定となるとき, 下の「回転運動に関する運動方程式」を得ることができる.

$$I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_z \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

* 並進運動と回転運動の対比

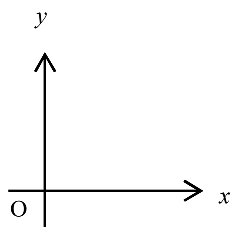
回転運動について，運動方程式や様々な物理量を表現する際，慣性モーメント I を用いると，並進運動と対応づけて扱うことができる．運動の激しさを表す量として，並進運動では運動量$\vec{p}$，回転運動では角運動量$\vec{L}$である．運動方程式を再度，表示すると下の式で表すことができる．力$\vec{F}$は並進運動を引き起こす原因となり，力のモーメント$\vec{M}$は回転運動を引き起こす原因となる．

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} & \text{(並進運動の運動方程式)} \\ \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} & \text{(回転運動の運動方程式)} \end{cases} \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

並進運動(向きは x 方向)と回転運動(xy 平面での回転を扱うので，回転の向きは z 方向)の間の対応関係は下の表にまとめることができる．

並進運動	回転運動
位置 x	角度 θ
速度 v (= dx/dt)	角速度 ω (= dθ/dt)
加速度 a (= dv/dt)	角加速度 α (= dω/dt)
質量 m	慣性モーメント I
運動量 $m\,v$	角運動量 $I\,\omega$
運動方程式 $m\,dv/dt = F$	運動方程式 $I\,d\omega/dt = M_z$
運動エネルギー $m\,v^2/2$	運動エネルギー $I\,\omega^2/2$

問題 4-16　鉛直上方向を$+y$ 方向に選び，右の図のような座標系をとる．質量 m の物体に重力 $m\vec{g} = (0\,,-m\,g\,,0)$が作用している 初期位置 $\vec{r}_0 = (x_0\,,h\,,0)$，初速度 $\vec{v}_0 = (0\,,v_0\,,0\,)$でこの物体を投げ上げた．次の問に答えよ．



$+z$ 方向 ＝ 紙面の奥から紙面の上方向

1)　時刻 t での物体の位置 $\vec{r}$，速度 $\vec{v}$，角運動量 $\vec{L}$を求めよ．

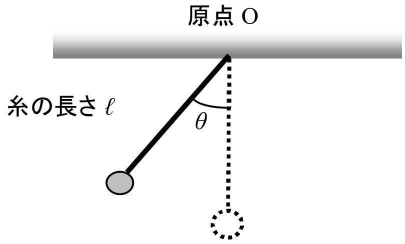
2)　重力による力のモーメント$\vec{M}_{重力}$を求めよ．

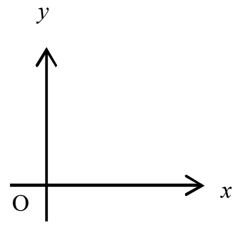
3)　角運動量の z 成分 L_zを用いて，角運動量に対する運動方程式(z 成分)を書け．

問題 4-17 図のように，長さℓの糸の先に質量m のおもりをつけた．おもりには重力$m\vec{g}$と張力$\vec{T}$が働いている．鉛直下向きからの角度を$\theta(t)$として，物体の位置$\vec{r}$，速度 $\vec{v}$，角運動量 $\vec{L}$とする．ここで，座標系は下の図のようにとるものとする．

1) 重力$m\vec{g}$による力のモーメント$\vec{M}_{重力}$，張力$\vec{T}$による力のモーメント$\vec{M}_{張力}$について角度θ，または，角速度ωを用いて表せ．

2) 角運動量 $\vec{L}$に対する運動方程式を表せ．





$+z$ 方向 ＝ 紙面の奥から紙面の上方向

4-5.　角運動量保存の法則

角運動量$\vec{L}$に対する運動方程式は(4-4-1)式で提示された．この式で右辺，すなわち，**力のモーメント$\vec{M}$** $(=\vec{r}\times\vec{F})$が「 **0** 」になると，角運動量$\vec{L}$が一定となる．角運動量$\vec{L}$が一定となる法則を**「角運動量保存の法則」**と呼ぶ．

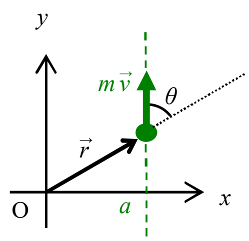
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L} = \text{一定} \qquad (4\text{-}5\text{-}1)$$

問題　4-18　最初，半径 r = 2.0 m の(質量が無視できる)棒の先に質量 m = 2.0 kg の物体が 2 個ついており，1.0 秒間に 2 回転していた．その後，2 個の物体のうち，1 個が落下し，1 個の物体だけが回転した．終わりの回転数と角運動量の大きさを求めよ．

問題　4-19　質量 m の物体が xy 平面上を長径 b，短径 c，角速度 ω で楕円軌道上を運動している．この物体の時刻 t での位置$\vec{r}$ は，$\vec{r} = (b\cos(\omega t)\,,\,c\sin(\omega t)\,,\,0)$ である．この物体の角運動量$\vec{L}$を求め，それが一定となっていることを確かめよ．

問題　4-20　質量 m の物体が xy 平面上で放物線運動している．この物体の時刻 t での位置$\vec{r}$は(変数 b，c，d を定数とする)，$\vec{r} = (b\,t\,,\,c\,t^2 + d\,,\,0)$ で運動している．この物体の角運動量$\vec{L}$を求よ．

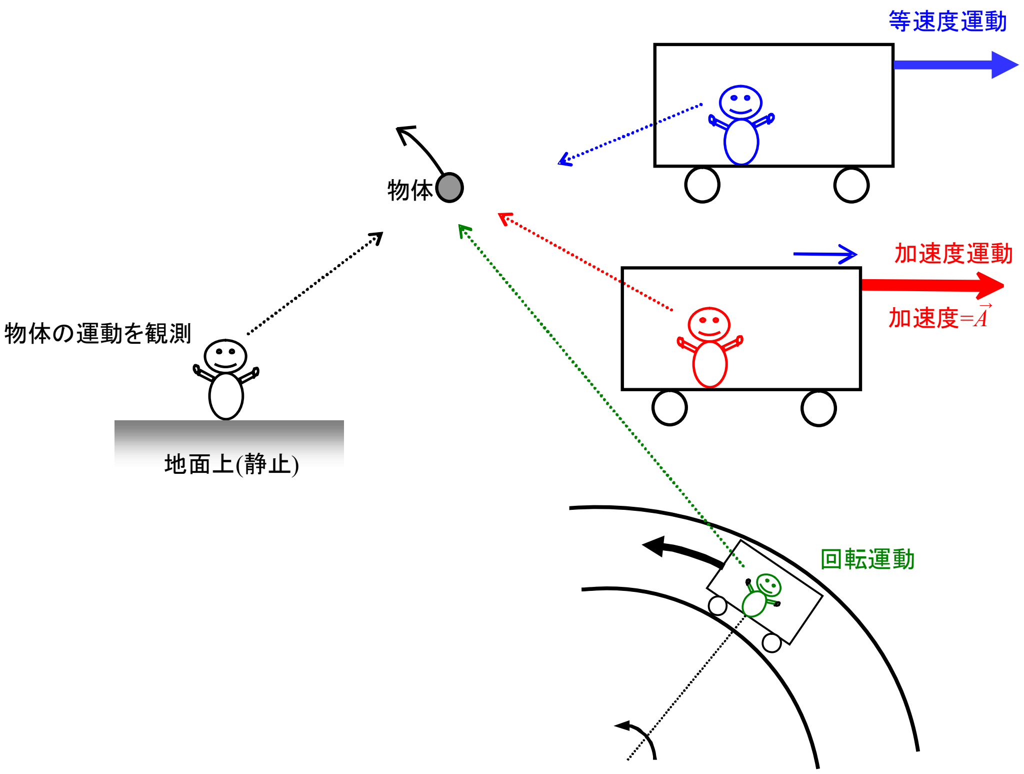
問題　4-21　速度$\vec{v}$ = (0, v, 0)で等速度運動する質量 m の物体が位置(a , 0 , 0)から出発している．この物体の角運動量$\vec{L}$が時刻 t に対して一定であることを示せ．次に，原点 O からの距離 r と図のような角度 θ をとった時の $\sin\theta$ 値に対して時刻 t を用いて表せ．さらに，この結果から，角運動量の大きさ $L = r\,mv\sin\theta$ が時刻 t に対して一定となっていることを再度，確認せよ．



4-6.　慣性力としての遠心力

バスがカーブを曲がるとき(このとき，バスは回転運動しており，バスはカーブの中心方向を向いた加速度運動してる)，バスに乗っている乗客はカーブの外方向(カーブの中心とは逆向き)に引っ張られるような力を感じる．このようなバスの乗客が感じる外向きの力を「**遠心力**」と呼ぶ．回転運動は加速度運動の1つであるが，バスが発進する(加速度運動する)ときも，乗客はバスが発進する向きと逆向きの力を感じる．このように，加速度運動している物体(乗り物)の中にいる人が感じる見かけの力を「慣性力」と呼ぶ．遠心力は慣性力の1種である．この節では，この慣性力について学ぶ．

物体の運動の様子を記述しているのは運動方程式である．「運動方程式は，物体に作用する力と物体に生じる加速度の関係」を記述している．物体の加速度は，観測者が物体の位置を測定し，その位置に対して2階の時間微分することで得られる．物体の位置は適当な座標系(例えば，2次元平面上の直交座標系は，原点Oで直交するx座標とy座標を定め，物体の位置をその座標を使って表示する)を選んで，観測することによって決まる．観測者が運動している場合，観測者が採用している座標系が運動しており，観測した物体の位置・速度・加速度にその座標系に運動の性質が含まれている．ここでは，観測者の座標系として，下の図のように，**⓪　静止座標系**[2]，**①　等速度運動している座標系**，**②　(並進運動としての)加速度運動している座標系**，**③　(原点Oのまわりに)回転運動している座標系**，を選んで物体の運動の見え方について調べる．なお，時刻$t = 0$では全ての系において原点Oは一致しているものとする．



[2]　静止座標系と運動している座標系は，あくまでも比較の問題である．基準とした座標系をどう選んだのかが問題となる．ここでは，「基準となる座標系 ＝ 静止座標系」として議論する．

⓪ 静止座標系(R系)

時刻tで観測された物体の位置を$\vec{r}(t)$と表すと，この座標系での運動方程式は下の式で表される．

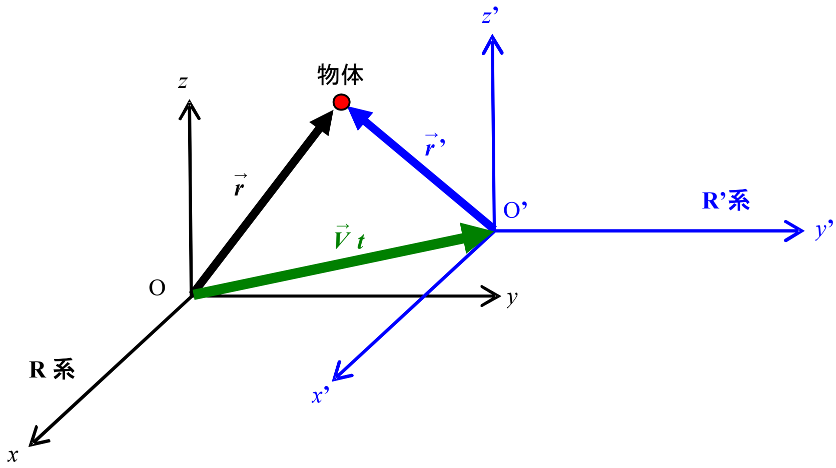
$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \qquad (4\text{-}6\text{-}1)$$

① 等速度運動している座標系(R'系)

静止座標系(R系)から見て等速度$\vec{V}$で並進運動している座標系(R'系)を考えてみよう．下の式のように，等速度$\vec{V}$はR系から見たR'系の相対速度に相当する．

$$\vec{V} = \text{R'系の速度} - \text{R系の速度} \qquad (4\text{-}6\text{-}2)$$

R系で観測した物体の位置を$\vec{r}(t)$，R'系で観測した物体の位置を$\vec{r}'(t)$とすると，下の式で表され，その位置関係は下の図のように表される．



$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{V}\,t \qquad (4\text{-}6\text{-}3)$$

2つの座標系の関係が(4-6-3)式で表されるので，物体の速度と加速度は下の関係式で表される．2つの座標系間の速度$\vec{V}$は一定である．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - \vec{V} \qquad (4\text{-}6\text{-}4)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad (4\text{-}6\text{-}5)$$

2つの座標系で加速度は変わらないので，運動方程式は不変である．

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad (4\text{-}6\text{-}6)$$

運動方程式が不変なので，どちらの座標系からみても運動の様子は変わらない．等速度運動している座標系では運動の第一法則(慣性の法則)と第二法則(運動の法則)が成り立つのでこれらの座標系をまとめて**慣性系**と呼ぶ．慣性系である座標系では運動の法則が同等で，物体の運動の様子も同等である．

② (並進運動として)加速度運動している座標系(R'系)

静止しているある座標系(**R**系)から見て，初速度$\vec{V}_0$，加速度$\vec{A}$で並進運動している座標系(**R**系)を考えてみよう．**R**系と**R'**系で観測した物体の位置を$\vec{r}(t)$と$\vec{r}'(t)$とすると，2つの系における位置･速度･加速度の関係は下の式で表される．

$$\vec{r}' = \vec{r} - (\vec{V}_0\, t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \vec{A}(t_2)\, dt_2) \qquad (4\text{-}6\text{-}7)$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - (\vec{V}_0 + \int_0^t \vec{A}(t_1)\, dt_1) \qquad (4\text{-}6\text{-}8)$$

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{A} \qquad (4\text{-}6\text{-}9)$$

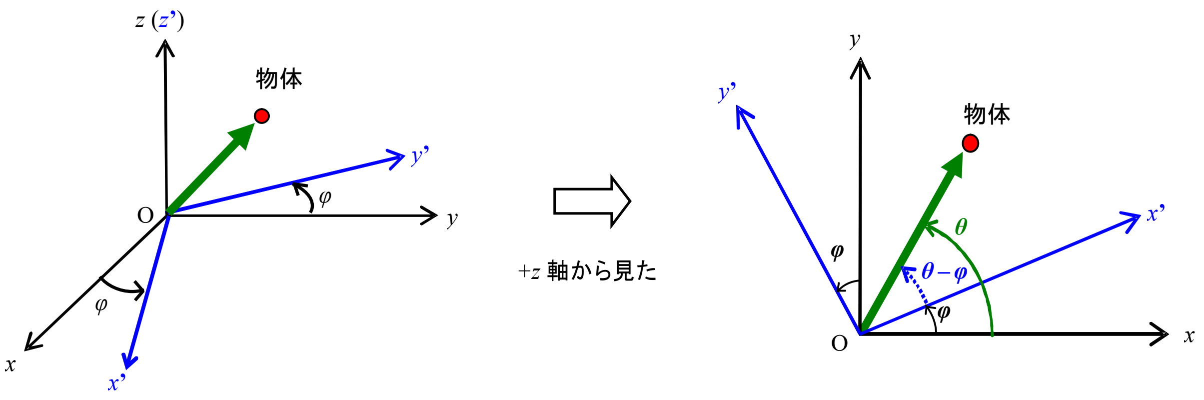
2つの系における加速度の関係は(4-6-9)式のように与えられる(**R'**系での加速度 = **R**系での加速度 $-\vec{A}$)．**R**系での運動方程式は「 $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ 」なので，**R'**系での運動方程式は下の式で与えられる．

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\left\{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{A}\right\} = \vec{F} - m\vec{A} \qquad (4\text{-}6\text{-}10)$$

上の式の右辺の第2項に**「慣性力」**とよばれる項 $-m\vec{A}$ (ここで係数に，－(マイナス)がついていることに注意する)が加わっている．(4-6-10)式より，静止系から見て加速度$\vec{A}$で加速度運動している**R'**系において，物体には，**R'**系の加速度と逆向きに力が働いているように見える．加速度運動している**R'**系の例として，発進するバスを考えると，バスの中にいる人は発進する向きと逆向きの力があたかも物体(自分自身も含めて)に働いていると感じる．

③ (原点Oのまわりに)回転運動している座標系(R'系)

下の図のように，静止している座標系(**R**系)と**R**系の原点Oからのz軸を回転軸として，時刻tでその周りに角度$\varphi(t)$だけ回転している座標系(**R'**系) を考えてみよう．



R系での物体の位置$\vec{r}$に対して下の式のように回転する**円柱座標系**を用いて表示する．

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \tag{4-6-11}$$

ここでは，xy平面での回転が需要なので，位置のz成分は回転運動に関係しないので，「$z = 0$」を満たすxy平面(2次元)での回転運動を扱う．上の式の長さrは回転軸(z軸)から見た物体までの距離(回転半径ρ) [3] である．角度θ は**R**系において，x軸から物体の位置の間の角度である．**R'**系は**R**系から角度$\varphi(t)$だけ回転している座標系であり，**R**系と**R'**系におけるxy平面上で観測した物体の位置$\vec{r}$と$\vec{r}\,'$は下の式のように表される．

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y \tag{4-6-12}$$

$$\vec{r}\,' = r\cos(\theta-\varphi)\,\vec{e}_x{}' + r\sin(\theta-\varphi)\,\vec{e}_y{}' \tag{4-6-13}$$

ここで，**R**系におけるx方向とy方向の単位ベクトルを$\vec{e}_x$と$\vec{e}_y$で表し，**R'**系におけるx'方向とy'方向の単位ベクトルを$\vec{e}_x{}'$と$\vec{e}_y{}'$と表す．また，2つの位置ベクトル$\vec{r}$と$\vec{r}\,'$は同じ位置を表すが，その時間変化は異なる(例えば，その速度$\vec{v}$と$\vec{v}\,'$は異なる)．**R'**系における単位ベクトルは，角度φが時間によって変化するので，その向きは下の式に従って時間変化する．

$$\vec{e}_x{}' = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \tag{4-6-14}$$

$$\vec{e}_y{}' = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \tag{4-6-15}$$

2次元の極座標表示における単位ベクトルとして，(1-7-2)式と(1-7-4)式と同じように，**R'**系においても単位ベクトル $\vec{e}_r{}'$と$\vec{e}_{\theta\varphi}{}'$を下の

---

[3] 円柱座標系では，回転半径をρとし，動径ベクトル$\vec{\rho} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$として表すが，$z$成分は関係しないため，ここでは，2次元(平面上)の位置$\vec{r}$を用いた．

式のように表す.

$$\vec{e}_r' = \frac{\vec{r}'}{r} = \cos(\theta - \varphi)\ \vec{e}_x' + \sin(\theta - \varphi)\ \vec{e}_y' = \frac{\vec{r}}{r} \tag{4-6-16}$$

$$\vec{e}_{\theta\varphi}' = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r'}{\mathrm{d}(\theta - \varphi)} = -\sin(\theta - \varphi)\ \vec{e}_x' + \cos(\theta - \varphi)\ \vec{e}_y' \tag{4-6-17}$$

R系と**R'**系から見た物体の位置$\vec{r}$は等しい($\vec{r} = \vec{r}'$)ので, 2つの(2次元)極座標単位ベクトルは, それぞれ等しい.

$$\vec{e}_r' = \vec{e}_r \quad , \qquad \vec{e}_{\theta\varphi}' = \vec{e}_\theta \tag{4-6-18}$$

上の式の左辺における単位ベクトルの時間微分は下の式のように計算できる.

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{e}_r')}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right) \vec{e}_{\theta\varphi}' \quad , \qquad \frac{\mathrm{d}(\vec{e}_{\theta\varphi}')}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right) \vec{e}_r' \tag{4-6-19}$$

したがって, **R'**系から見た速度 $\vec{v}' = (v_{x'}, v_{y'}, 0)$は, **R**系から見た速度 $\vec{v}$を用いて下の式のように表すことができる.

$$\vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r')}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r' + r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_{\theta\varphi}' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta = \vec{v} - r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta \tag{4-6-20}$$

ここで, 回転座標系はz軸の周りに角速度ωで回転しているので, 座標系の回転の角速度ベクトル$\vec{\omega}$として下の式で表す.

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega) = \left(0, 0, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right) \tag{4-6-21}$$

さらに, 円柱座標系での単位ベクトル間の外積は,「$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$」なので, (4-6-20)式の右辺2項目は外積を用いて下の式のように表現できる($-r\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)\ \vec{e}_\theta = r\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)\,(\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = (r\ \vec{e}_r) \times ((\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)\ \vec{e}_z) = \vec{r} \times \vec{\omega}$).

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{4-6-22}$$

同様に, **R'**系から見た物体の加速度 $\vec{a}'$は**R**系から見た加速度 $\vec{a}$を用いて下の式のように表すことができる.

$$\vec{a}' = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\ \vec{e}_r' + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_{\theta\varphi}' + r\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right)\vec{e}_{\theta\varphi}' - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \vec{e}_r'$$

$$= \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right\}\vec{e}_r + \left\{ 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \right\}\vec{e}_\theta - \left\{ 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \right\}\vec{e}_\theta + \left\{ 2r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right\}\vec{e}_r$$

$$= \vec{a} + r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{e}_r + 2r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r - 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\theta \tag{4-6-23}$$

上の式の右辺の3項目と4項目について，「$-\vec{\omega}\times\vec{v}' = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z\times\left\{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta\right\} = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r$」，第5項目は「$-\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}' = -\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z\times r\vec{e}_r = -r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\theta$」より，下の式のように角速度ベクトル$\vec{\omega}$を用いてまとめて表すことができる．

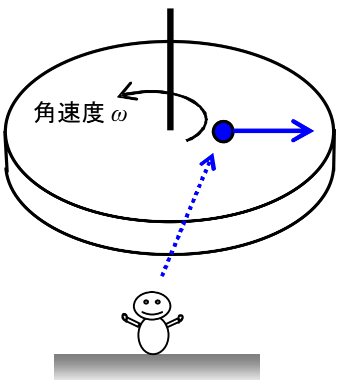
$$\vec{a}' = \vec{a} + \omega^2\vec{r}' - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}' \tag{4-6-24}$$

上の式の両辺に質量 mをかけて，**R**系での運動方程式$m\vec{a} = \vec{F}$ より，**R'**系での運動方程式が下の式のように得られる．

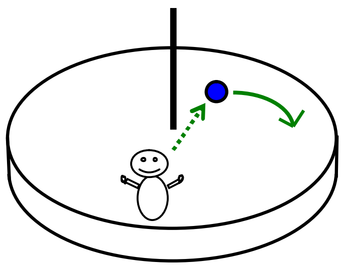
$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2\vec{r}' - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}' \tag{4-6-25}$$

上の式の右辺の第2項以降は回転運動という加速度運動している座標系に起こる見かけの上の力である．この中で，第2項は**遠心力**，第3項は**コリオリ力**で $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = 2m\omega(v_{y'}, -v_{x'}, 0)$，第4項は回転の加速度の影響による項である．

遠心力は動径(半径)方向の単位ベクトル$\vec{e}_r$と同じ向きを示すので遠心方向に働いていることがわかる．コリオリ力は動いている向きに対して，曲がるように働く．**コリオリ力**は回転運動に特徴的な力で，直進しようとする物体に対し，進む向きと垂直な力が働く．物体は本来，直進するのだが，その間に系は回転し，見かけ上，回転する向きと逆向きに曲がって進むようにみえる．この様子を下の図に示す．



円盤上の外にいて静止している人から見える運動(コリオリ力は見えない(円盤が回転しているのがわかる))



円盤上にいる人から見える運動(コリオリ力によって曲がっているように見える(自分が回転していることはわからない))

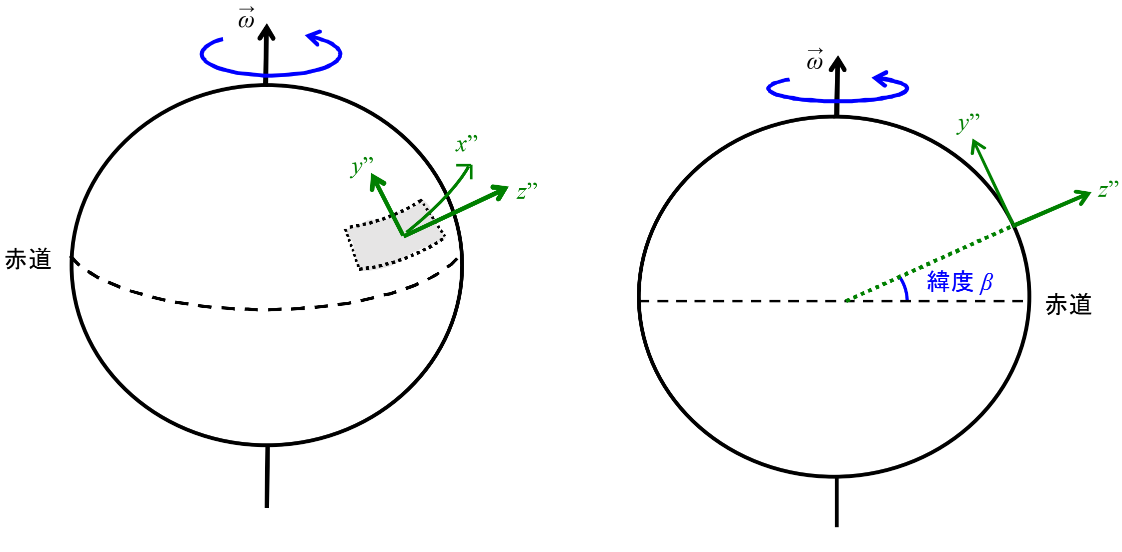
地球の自転によって地球は，北極からみて反時計回りの円運動している．北半球では，海流や地衡風(貿易風や偏西風など)や台風の移動の向きがすべて時計回りの向きに流れるのは**コリオリ力**が働いているためである．南半球では回転の向きが逆となり，反時計回りに流れる．また，自転による回転は等速なので，(4-6-25)式の第4項の効果はでない．

* 地表におけるコリオリ力 (省略してよい)

ここで地表の北半球と南半球において，コリオリ力の違いについて見てみよう．地球は極半径R_{90} = 6357 km，赤道半径R_0 = 6378 kmで赤道半径の方が長い回転楕円体であるが，ここでは簡単のために，真球として扱う．

① 北半球

図のように，地球の表面から鉛直上方をz”方向，西から東向きをx”方向，子午線に沿って南から北方向(赤道から北極方向)をy”方向とし，緯度(北緯)をβとする．そのとき，「$\vec{e}_{x''} \times \vec{e}_{y''} = \vec{e}_{z''}$，$\vec{e}_{y''} \times \vec{e}_{z''} = \vec{e}_{x''}$，$\vec{e}_{z''} \times \vec{e}_{x''} = \vec{e}_{y''}$」の関係を満たす．この座標系(**R”**系)では，自転の角速度ベクトル$\vec{\omega}$は，$\vec{\omega} \to \vec{\omega}'' = (0, \omega\cos\beta, \omega\sin\beta)$と変更される．



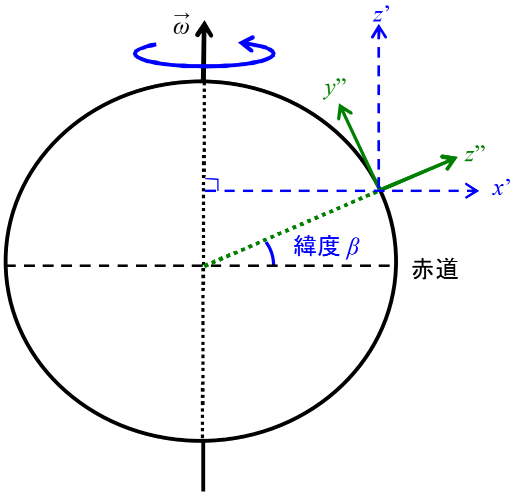
地球の自転によるコリオリ力しか働かないとすると，地表(**R”**系)での運動方程式は下の式で表すことができる．

$$\begin{cases} m\,a_{x''} = 2\,m\,\omega\,(v_{y''}\sin\beta - v_{z''}\cos\beta) \\ m\,a_{y''} = -\,2\,m\,\omega\,v_{x''}\sin\beta \\ m\,a_{z''} = 2\,m\,\omega\,v_{x''}\cos\beta \end{cases} \tag{4-6-26}$$

したがって，北半球では，西に向かう($v_{x''}$が負で他の成分は0)とき，地表では北向きの力が働く．また，北に向かう($v_{y''}$が正で他の成分は0)とき，地表では東向きの力が働く．すなわち，地表では時計回りに回転するように動く．

＊ 座標系に対するコメント (さらに省略してよい)

コリオリ力については(4-6-25)式の第3項で示したが，z軸を回転軸として，それと直交している回転座標系(R’系)において速度$\vec{v}$’で動いている物体が感じる見かけの力であった．速度$\vec{v}$’について，上で採用している座標系(R”系;地球から見て鉛直上方をz”方向とし，水平面をx”y”平面とした)に適用しよう．R’系とR”系の間の座標変換は下のように表すことができる．なお，「$y' = x''$」で紙面の表から裏に向かう成分(東向き)である．



$$y'' = \cos\beta\, z' - \sin\beta\, x' , \qquad z'' = \sin\beta\, z' + \cos\beta\, x' , \qquad x'' = y'$$

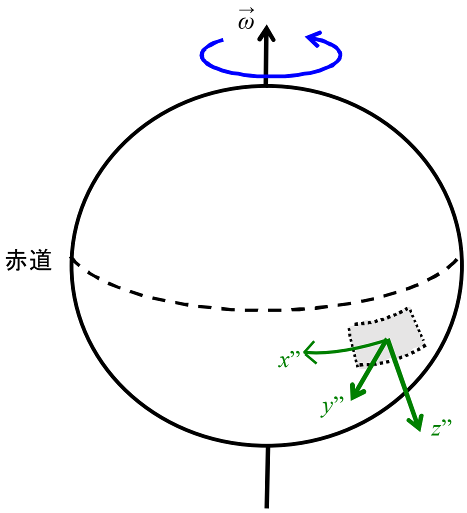
$$(x' = \cos\beta\, z'' - \sin\beta\, y'' , \qquad z' = \sin\beta\, z'' + \cos\beta\, y'', \qquad y' = x'')$$

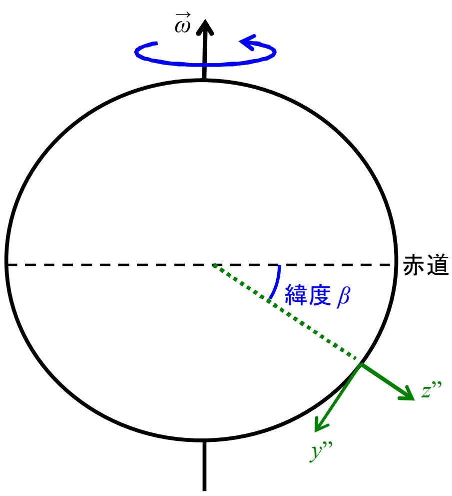
上式を参考にして，R’系におけるコリオリ力を代入すると下の式が得られ，(4-6-26)式と同等となる．

$$\begin{cases} F_{x''} = F_{y'} = -2\, m\, \vec{\omega} \times \vec{v}'\,\Big|_{y'\text{成分}} = -2\, m\, \omega\, v_{x'} = -2\, m\, \omega\, (v_{z''} \cos\beta - v_{y''} \sin\beta\,) \\ F_{y''} = \cos\beta\, F_{z'} - \sin\beta\, F_{x'} = 0 - \sin\beta\, F_{x'} = -\sin\beta\; 2\, m\, \omega\, v_{y'} = -2\, m\, \omega\, v_{x''} \sin\beta \\ F_{z''} = \sin\beta\, F_{z'} + \cos\beta\, F_{x'} = 0 + \cos\beta\, F_{x'} = \cos\beta\; 2\, m\, \omega\, v_{y'} = 2\, m\, \omega\, v_{x''} \cos\beta \end{cases}$$

② 南北半球

地球の表面から鉛直上方をz”方向，東から西向きをx”方向，子午線に沿って北から南方向(赤道から南極方向)をy”方向とし，緯度(南緯)をβとする．そのとき，「$\vec{e}_{x''} \times \vec{e}_{y''} = \vec{e}_{z''}$， $\vec{e}_{y''} \times \vec{e}_{z''} = \vec{e}_{x''}$, $\vec{e}_{z''} \times \vec{e}_{x''} = \vec{e}_{y''}$」の関係を満たす．この座標系(**R”系**)では，自転の角速度ベクトル$\vec{\omega}$は，$\vec{\omega} \;\rightarrow\; \vec{\omega}'' = (0\,, -\omega\cos\beta\,, -\omega\sin\beta)$と変更される．





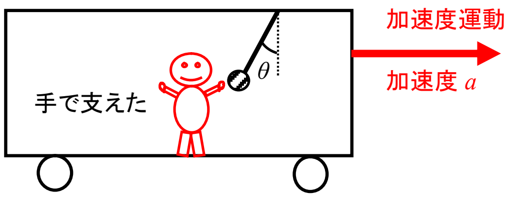
同様に，地球の自転によるコリオリ力しか働かないとすると，地表(**R”系**)での運動方程式は下の式で表すことができる．

$$\begin{cases} m\,a_{x''} = -2\,m\,\omega\,(v_{y''}\sin\beta - v_{z''}\cos\beta) \\ m\,a_{y''} = 2\,m\,\omega\,v_{x''}\sin\beta \\ m\,a_{z''} = -2\,m\,\omega\,v_{x''}\cos\beta \end{cases} \qquad (4\text{-}6\text{-}26)$$

南半球では，西に向かう($v_{x''}$が正で他の成分は0)とき，地表では南向きの力(力のy成分が正)が働く．南に向かう($v_{y''}$が正で他の成分は0)とき，地表では東向きの力が働く．すなわち，地表では反時計回りに回転するよう動く．角速度ベクトル$\vec{\omega}$が地表に対して，北半球と南半球では逆転するために，コリオリ力による回転が逆転する．

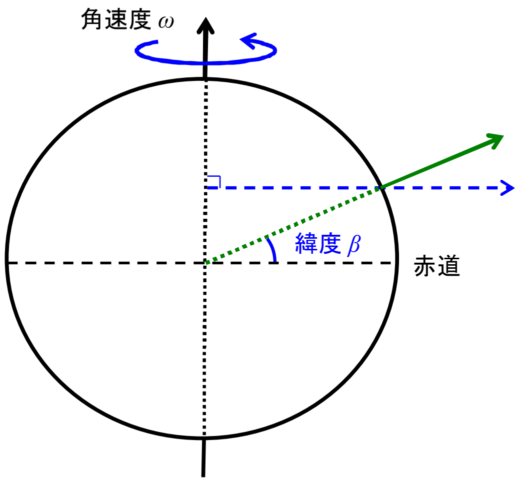
問題 4-22　ある一定の加速度で発進しているバスの天井から質量 m のおもりが軽い糸でつり下がられている．重力加速度の大きさを g とする．

1)　おもりを手で支えながら，ゆっくりと手を離したところ，おもりはバスの天井から角度 θ だけ後方に傾いて静止した．発進するバスの加速度の大きさ a を求めよ．



2)　発進する前，おもりはバスの天井から鉛直下方向につり下がっていた．ここから，一定の加速度 a で発車するとおもりはどのような運動をするか?

問題 4-23　地球は半径 R の真球と仮定するとき，万有引力のみによる重力加速度の大きさ g_0 ($= G\,M/R^2$;万有引力定数を G，地球の質量を M とする)とすると，緯度 β での自転による遠心力を考慮した重力加速度の大きさ g に対し，万有引力のみによる重力加速度の大きさ g_0，自転の角速度 ω，半径 R，緯度 β を用いて表せ．次に，万有引力のみによる重力加速度の大きさ g_0 = 9.83 m/s^2，地球の半径 R



$= 6368$ km とすると，赤道での遠心力を考慮した重

力加速度の大きさ g の値を求めよ．

問題 4-24　一定の角速度 ω で反時計回りに回る水平面に置かれた大きな円盤がある．円盤上にいる人からみた時刻 t における物体の速度 $\vec{v}'(t)$ と位置 $\vec{r}'(t)$ を求めよ．ただし，物体の初期位置 $\vec{r}'_0 = (r_0, 0)$，初速度 $\vec{v}'_0 = (v_0, 0)$ とする．また，回転による遠心力の効果は無視でき，コリオリ力のみ作用していると近似できる(条件； $r_0\,\omega^2 << v_0\,\omega$)ものとする．

問題 4-25　(地球におけるコリオリ力に関する問題なので省略してよい)

高い天井から，長い糸の先におもりをつるし，振幅が小さい振り子を作成する．北緯 β となる場所では，振り子(← フーコーの振り子)の往復運動はコリオリ力によって回転するが，往復運動の回転の周期 T' は 1 d(day)の何倍となるか?

問題 4-26　(地球におけるコリオリ力に関する問題なので省略してよい)

飛行機が速さ $v_0' = 300$ m/s で飛んでいる．

1) 飛行機が北緯 30 °と 60 °で北向きに飛んでいるときにコリオリ力による，加速度の大きさと向きを求めよ．

2) 飛行機が北緯30 °と60 °で東向きに飛んでいるときにコリオリ力による，加速度の大きさと向きを求めよ．

問題の答

問題 4-1　1)　$2 \times 3 \times \sin 30° = 3$　　2)　$2^{1/2} \times 4 \times \sin 135° = \sqrt{2} \times 4 \times (\sqrt{2}/2) = 4$

3)　$2 \times 4 \times \sin(5\pi/6) = 4$　　4)　$1 \times 4 \times \sin(2\pi/3) = 1 \times 4 \times (\sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3}$

問題 4-2　1)　$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -10)$,　$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 10)$,　「$(\vec{b}\times\vec{a}) = -(\vec{a}\times\vec{b})$が成立する」

2)　$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-5, 0, 0)$,　$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 0, 0)$,　「$(\vec{b}\times\vec{a}) = -(\vec{a}\times\vec{b})$が成立する」

3)　$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3, 0, 2)$,　$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3, 0, -2)$,　「$(\vec{b}\times\vec{a}) = -(\vec{a}\times\vec{b})$が成立する」

4)　$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, 1, -5)$,　$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -1, 5)$,　「$(\vec{b}\times\vec{a}) = -(\vec{a}\times\vec{b})$が成立する」

問題 4-3　1)　$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 6)$,　$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 4\times 6 = 24$,　直方体の体積 $V = 2\times 3\times 4 = 24$ → 確認した

2)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$　→ 確認した

問題 4-4　外積 $\vec{b}\times\vec{c}$ は(4-1-7)式のように行列式を用いて表すことができる. 2 行目が$\vec{b}$の成分で, 3 行目が$\vec{c}$の成分となる. したがって, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$は, 下の式のように 1 行目に$\vec{a}$の成分を置いた行列式で表すことができる. 行列式の性質として行ベクトルを循環的に入れ替えてもその値は同じとなる.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

問題 4-5

$$\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -(\sin^2\theta\sin\varphi + \cos^2\theta\sin\varphi)\,\vec{e}_x + (\cos^2\theta\cos\varphi + \sin^2\theta\cos\varphi)\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z$$

$$= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-\sin\theta\cos\varphi)\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + (\cos\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\varphi)\,\vec{e}_z$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z = \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x - (-\cos\theta\sin\varphi)\,\vec{e}_y + (-\sin\theta\sin^2\varphi - \sin\theta\cos^2\varphi)\,\vec{e}_z$$

$$= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z = \vec{e}_\theta$$

問題 4-6　角速度 $\omega = 2\pi f = 2\times 3.14\times(4/6\ \mathrm{s}) = 4.187 \sim 4.2$ rad/s,

物体 A 速さ $v_A = r_A\,\omega = 0.3\times 4.187 = 1.256 \sim 1.3$ m/s ,　物体 B の速さ $v_B = r_B\,\omega = 0.2\times 4.187 = 0.8374 \sim 0.84$ m/s,

物体 A の運動量の大きさ $p_A = m_A\,v_A = 2.0\times 1.256 = 2.512 \sim 2.5$ kg m/s , 物体 B の運動量の大きさ $p_B = m_B\,v_B = 4.0\times 0.8374 = 3.3496 \sim 3.3$ kg m/s,　物体 A の角運動量の大きさ $L_A = r_A\,p_A = 0.7536 \sim 0.75$ kg m^2/s,　物体 B の角運動量の大きさ $L_B = r_B\,p_B = 0.6699 \sim 0.67$ kg m^2/s

問題 4-7　速度 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\cos(\pi t),4\sin(\pi t),0)=(-2\pi\sin(\pi t),4\pi\cos(\pi t),0)$ [m/s]で，角運動量$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ より求める.

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2\cos(\pi t) & 4\sin(\pi t) & 0\\ -4\pi\sin(\pi t) & 8\pi\cos(\pi t) & 0\end{vmatrix}=8\pi\begin{vmatrix}\cos(\pi t) & 2\sin(\pi t)\\ -\sin(\pi t) & 2\cos(\pi t)\end{vmatrix}\vec{e}_z=16\pi\,(\cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t))\ \vec{e}_z$$

$$=16\pi\ \vec{e}_z=(0,0,16\pi)=(0,0,50.26)\sim(0,0,50)\ \mathrm{kg\ m^2/s}$$

問題 4-8　速度 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=(2,0,2-9.8\,t)$ [m/s] より，角運動量$\vec{L}$を計算する.

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2t & 0 & 2t-4.9t^2\\ 4 & 0 & 4-19.6\,t\end{vmatrix}=-\vec{e}_y\ 2\begin{vmatrix}2t & 2t-4.9t^2\\ 2 & 2-9.8\,t\end{vmatrix}=-2\ \vec{e}_y\ (4t-19.6t^2-(4t-9.8t^2))=19.6\,t^2\ \vec{e}_y$$

$$=(0,19.6\,t^2,0)\quad [\mathrm{kg\ m^2/s}]$$

問題 4-9　回転半径 r で円運動している質量 m の物体の慣性モーメント I は下のように求めることができる.

$$I=m\,r^2=0.4\times2^2=1.6\ \mathrm{kg\ m^2}$$

問題 4-10　3 次元の極座標表示での位置$\vec{r}$と速度$\vec{v}$は(1-7-12)式と(1-7-16)式で示されており，角運動量$\vec{L}$は下の式のように計算できる.

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=r\,\vec{e}_r\times m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta+r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$=m\,r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta\right)$$

問題 4-11　力のモーメント$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ より計算する.

1) $\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix}=10\ \vec{e}_z=(0,0,10)$ N m　　2) $\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-14\,\vec{e}_x+11\,\vec{e}_y-2\,\vec{e}_z=(-14,11,-2)$ N m

3) $\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0\,\vec{e}_x+0\,\vec{e}_y+0\,\vec{e}_z=(0,0,0)$ N m　　(位置$\vec{r}$と力$\vec{F}$が平行なので，外積=0 となる)

問題 4-12　力のモーメントの大きさ $M=r\cdot F\sin\Phi$　より計算する.

1)　$M_A=r_A\cdot F_A\cdot\sin\Phi_A=2\times3\times\sin 60°=3\sqrt{3}=$ 5.196…　~ 5.2 N m (反時計回り)

$M_B=r_B\cdot F_B\cdot\sin\Phi_B=2\times3\times\sin 150°=3.0$ N m (時計回り)

全力のモーメント $M=5.196+(-3.0)\sim2.2$ N m (反時計回り)

2)　$M_A=r_A\cdot F_A\cdot\sin\Phi_A=4\times3\times\sin 120°=3\sqrt{3}=$ 5.196…　~ 5.2 N m (時計回り)

$M_B=r_B\cdot F_B\cdot\sin\Phi_B=2\times3\times\sin 90°=6.0$ N m (時計回り)

全力のモーメント $M=5.2+6.0\sim11.2\sim11$ N m (時計回り)

問題 4-13　重力による力のモーメント$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$ より計算する.

1) $\vec{M}_A=\vec{r}_A\times m_A\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & -2g & 0\end{vmatrix}=-8g\,\vec{e}_z=-78.4$ N m, $\vec{M}_B=\vec{r}_B\times m_B\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ -3 & 0 & 0\\ 0 & -3g & 0\end{vmatrix}=9g\,\vec{e}_z=88.2$ N m,

力のモーメントの総和$\vec{M}=\vec{M}_A+\vec{M}_B=g\,\vec{e}_z=9.8\,\vec{e}_z$ N m　→　正の値なので, z 軸のまわりに反時計回りに回転

2) $\vec{r}_A=(-r_A\sin 30°, -r_A\cos 30°, 0)=(-2, -2\sqrt{3}, 0)$ m より, $\vec{M}_A=\vec{r}_A\times m_A\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ -2 & -2\sqrt{3} & 0\\ 0 & -2g & 0\end{vmatrix}=4g\,\vec{e}_z$

$=39.2\,\vec{e}_z$ N m,　　あるいは, 位置$\vec{r}_A$と重力 $m_A\vec{g}$の間の角度が 150 °なので, $M_A=r_A\,m_A\,g\sin 150°$

$=4\times 2g\times\sin 150°=4g=39.2$ N m,　(向きは z 軸の反時計回りに回転する向き)

$\vec{r}_B=(r_B\sin 30°, r_B\cos 30°, 0)=(1.5, 1.5\sqrt{3}, 0)$ m より, $\vec{M}_B=\vec{r}_B\times m_B\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1.5 & 1.5\sqrt{3} & 0\\ 0 & -3g & 0\end{vmatrix}=-4.5g\,\vec{e}_z$

$=-44.1\,\vec{e}_z$ N m,　　あるいは, 位置$\vec{r}_B$と重力 $m_B\vec{g}$の間の角度が 30 °なので, $M_B=r_B\,m_B\,g\sin 30°$

$=3\times 3g\times\sin 150°=4.5g=44.1$ N m,　(向きは時計回りに回転する向き)

力のモーメントの総和$\vec{M}=\vec{M}_A+\vec{M}_B=-0.5g\,\vec{e}_z=-4.9\,\vec{e}_z$ N m →　負の値なので, z 軸のまわりに時計回りに回転

問題 4-14　上の問題と同様に, 重力による力のモーメント$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$ より計算する.

1) $\vec{M}_A=\vec{r}_A\times m_A\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 7 & 0 & 0\\ 0 & -2g & 0\end{vmatrix}=-14g\,\vec{e}_z=-137.2\,\vec{e}_z\sim-140\,\vec{e}_z$ N m,

→ $M_{Az}=-140$ N m と負の値なので, z 軸のまわりに時計回りに回転

2) $\vec{M}_A=\vec{r}_A\times m_A\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 7\cos 30° & -7\sin 30° & 0\\ 0 & -2g & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 3.5\sqrt{3} & -3.5 & 0\\ 0 & -2g & 0\end{vmatrix}=-7\sqrt{3}\,g\,\vec{e}_z=-118.8\,\vec{e}_z\sim-120\,\vec{e}_z$ N m,

→ $M_{Az}=-120$ N m と負の値なので, z軸のまわりに時計回りに回転

問題 4-15　位置$\vec{r}$は, 「$\vec{r}=r\vec{e}_r$」と表すことができ, 向心力による力のモーメント$\vec{M}$は, 「$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=r\vec{e}_r\times(-f\,\vec{e}_r)=-rf(\vec{e}_r\times\vec{e}_r)$

$=0$　(同じベクトルどうしの外積 $=\vec{a}\times\vec{a}=0$, より)」となる

問題 4-16　1)　時刻 t での物体の速度 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t=(0, v_0-gt, 0)$, 位置$\vec{r}=\vec{r}_0+\int_0^t\vec{v}(t)\,dt=(x_0, h+v_0t-gt^2/2, 0)$,

角運動量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\,\vec{v}=m\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ x_0 & h+v_0t-gt^2/2 & 0\\ 0 & v_0-gt & 0\end{vmatrix}=x_0\,m\,(v_0-gt)\,\vec{e}_z=(0, 0, x_0\,m(v_0-gt))$

2)　重力による力のモーメント$\vec{M}_{重力}=\vec{r}\times m\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ x_0 & h+v_0t-gt^2/2 & 0\\ 0 & -mg & 0\end{vmatrix}=-x_0\,m\,g\,\vec{e}_z=(0, 0, -x_0\,m\,g)$

3)　回転運動の運動方程式「 $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ 」より，z 成分は，「 $\dfrac{dL_z}{dt} = M_z = -x_0 m g$ 」

→ 1) で求めた角運動量を時間微分したものと等しい

問題 4-17　1)　図より，物体の位置$\vec{r} = (-\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta, 0)$，速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-\ell\cos\theta, \ell\sin\theta, 0)\, d\theta/dt$,

角運動量 $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\,\ell^2 \dfrac{d\theta}{dt} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = m\,\ell^2 \dfrac{d\theta}{dt} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta)\, \vec{e}_z$

$= -m\,\ell^2 \dfrac{d\theta}{dt}\, \vec{e}_z$,

重力による力のモーメント$\vec{M}_{重力} = \vec{r}\times m\vec{g} = \ell \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = \ell\, m g \sin\theta\, \vec{e}_z$,

張力による力のモーメント$\vec{M}_{張力} = \vec{r}\times\vec{T} = \ell \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ T\sin\theta & T\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 0$

2)　回転に関する運動方程式「 $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ 」より， $m\,\ell^2 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\ell\, m g \sin\theta \rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta$

問題 4-18　始めの角速度 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi\times 2 = 4\pi$ rad/s，始めの角運動量 $L_0 = r\times m_0 v_0 = r\times 2m\,(r\,\omega_0)$

終わりの角速度 $\omega = 2\pi f$，終わりの角運動量 $L = r\times m\, v = r\times m\,(r\,\omega)$， 角運動量保存則より，「$L_0 = L$」が成立する.

→　$\omega = 2\,\omega_0 = 8\pi = 25.132 \sim 25$ rad/s,　$f = 2 f_0 = 4.0$ Hz

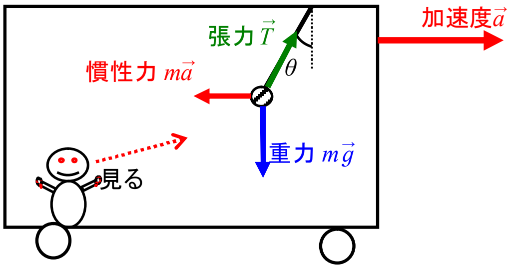
問題 4-19　速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \omega(-b\sin(\omega t), c\cos(\omega t), 0)$，　角運動量$\vec{L} = \vec{r}\times m\,\vec{v} = m\,\omega \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b\cos(\omega t) & c\sin(\omega t) & 0 \\ -b\sin(\omega t) & c\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix}$

$= m\,\omega\, b\, c\,(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))\, \vec{e}_z = m\,\omega\, b\, c\, \vec{e}_z$　→　一定

問題 4-20　速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (b, 2c\,t, 0)$，角運動量$\vec{L} = \vec{r}\times m\,\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b\,t & c\,t^2 + d & 0 \\ b & 2ct & 0 \end{vmatrix} = m\,(b\,c\,t^2 - bd)\, \vec{e}_z$

問題 4-21　時刻 t での位置$\vec{r} = (a, v\,t, 0)$で，角運動量$\vec{L} = \vec{r}\times m\,\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & v\,t & 0 \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix} = m\,a\,v\,\vec{e}_z =$ 一定で，時間変化しない．しかし，原点からの距離 r は，$r = \sqrt{a^2 + (v\,t)^2}$ で，$\sin\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (v\,t)^2}}$ となり，角運動量の大きさ $L = r\,mv\sin\theta = m\,a\,v$ となり，時間変化しない一定となる値をとる.

問題　4-22　1)　図より，バスの乗客が見るおもりに働く力は，重力，慣性力，糸の張力で，3つの力はつりあっている．したがって，水平方向と鉛直方向で力のつり合いから，下の式が成り立つ．

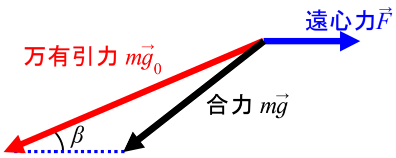


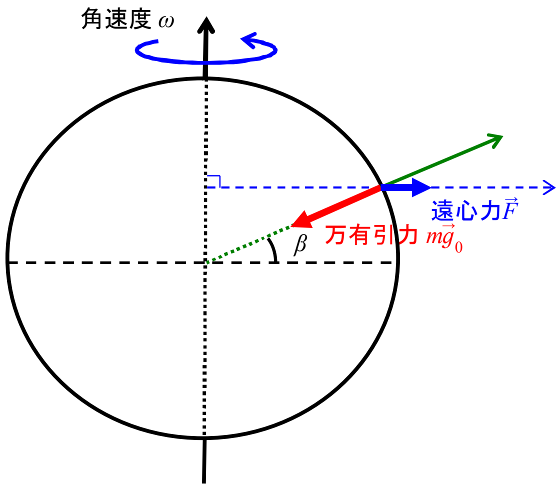
$$m\,a = T \sin\theta, \qquad m\,g = T\cos\theta$$

上の2つの式より，バスの加速度の大きさ $a = g\tan\theta$

2)　加速度$\vec{a}$でバスが動いている状態では，おもりが天井から角度θでつり下がった状態が力のつりあった平衡状態となる．はじめ，おもりは鉛直真下にあったので，おもりは角度θを中心として，角度0から2θまでの往復運動(単振動)する．

問題　4-23　図のように万有引力$m\vec{g}_0$は地球の中心に向かい，遠心力$\vec{F}$は自転軸から垂直に外方向に向かう．2つの力の合力の大きさが重力$m\vec{g}$となる．回転半径$r = R\cos\beta$　で遠心力の大きさ$F = m\,r\,\omega^2$　である．





上の図より，「$m\vec{g} = m\vec{g}_0 + \vec{F}$」が成立し，左辺と右辺について，それぞれ内積をとる(または，三角形に対する余弦定理を用いる)と下の式が成り立つ．

$$(m\,g)^2 = (m\,g_0)^2 + F^2 + 2\,m\,g_0 \cdot F \cdot \cos(\pi - \beta) \quad \rightarrow \quad g^2 = g_0^{\,2} + (R\cos\beta\,\omega^2)^2 - 2\,g_0\,R\cos^2\beta\,\omega^2$$

$$\rightarrow \quad g = \sqrt{g_0^{\,2} + R\cos^2\beta\,\omega^2\,(R\,\omega^2 - 2\,g_0)}$$

(上の式より，赤道上では，緯度$\beta = 0$　より，$g = \sqrt{g_0^{\,2} + R\,\omega^2\,(R\,\omega^2 - 2\,g_0)} = \sqrt{g_0^{\,2} - 2\,g_0\,R\,\omega^2 + (R\,\omega^2)^2}$

$= \sqrt{(g_0 - R\,\omega^2)^2} = g_0 - R\,\omega^2$　と遠心力は万有引力と逆向きに働くことがわかり，重力加速度の大きさgは最小となる．また，北極と南極では緯度$\beta = 90°$より，$g = g_0$で最大となる)

地球の自転の周期は1日なので，回転の角速度$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{24\times 3600} \sim 7.272\times 10^{-5}$ rad/sを代入する．

$$g = g_0 - R\,\omega^2 = 9.832 - 0.03369 \sim 9.7983 \sim 9.798\ \mathrm{m/s^2} \quad \rightarrow$$ 自転の影響で0.38 %減少する

問題　4-24　(4-6-21)式より，回転座標系(コリオリ力のみ作用)における運動を表す式は下のように表すことができる．

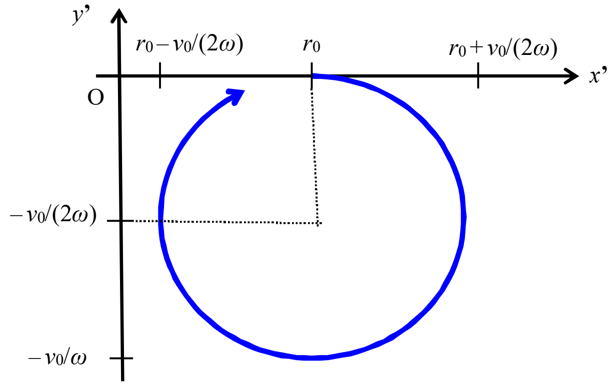
$$\frac{dv_{x'}}{dt} = 2\,\omega\, v_{y'}, \qquad \frac{dv_{y'}}{dt} = -2\,\omega\, v_{x'}, \quad \to \quad \frac{d^2 v_{x'}}{dt^2} = -(2\,\omega)^2\, v_{x'}$$

$$\to \quad v_{x'}(t) = C_1 \cos(2\,\omega\, t) + C_2 \sin(2\,\omega\, t), \qquad v_{y'}(t) = -C_1 \sin(2\,\omega\, t) + C_2 \cos(2\,\omega\, t)$$

初速度$\vec{v}'(0) = (v_0\,,\,0)$より，$\vec{v}'(t) = (v_0 \cos(2\,\omega\, t)\,,\,-v_0 \sin(2\,\omega\, t))$ で，

位置$\vec{r}'(t) = (r_0 + \frac{v_0}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\, t),\ \frac{v_0}{2\,\omega}(\cos(2\,\omega\, t) - 1))$ で，図のような軌跡を描き，時計回りに回転する．

回転の角速度$\omega = 2\pi/T$ より，コリオリ力による見かけの回転の周期は$T/2$となる．



問題 4-25　緯度βの水平面におけるコリオリ力は(4-6-26)式で表される．近似的に水平面で往復運動しているとすると，コリオリ力の水平成分(x”成分とy”成分)は，$F_{x''} = 2\,m\,\omega\, v_{y''} \sin\beta$, $F_{y''} = -2\,m\,\omega\, v_{x''} \sin\beta$ と表され，フーコーの振り子の往復運動面に対する回転の角速度$\omega'' = \omega \sin\beta$ となるので，(コリオリ力による)フーコーの振り子の回転の周期$T'' = T/\sin\beta = 1/\sin\beta$ [d] となる．北極では1日で時計回りに1回転し，緯度30 °では2日で1回転する．赤道上では回転しない．

問題 4-26　緯度βの水平面におけるコリオリ力は(4-6-26)式で表される．

$$a_{x''} = 2\,\omega\,(v_{y''} \sin\beta - v_{z''} \cos\beta), \qquad a_{y''} = -2\,\omega\, v_{x''} \sin\beta, \qquad a_{z''} = 2\,\omega\, v_{x''} \cos\beta$$

1) 北向きに進んでいるので，速度$\vec{v}'' = (v_{x''}, v_{y''}, v_{z''}) = (0, 300, 0)$ m/s，地球の自転の角速度 $\omega = 2\pi/(24\times3600) \sim 7.272\times10^{-5}$ rad/s を代入する．加速度$\vec{a}'' = (2\,\omega\, v_{y''} \sin\beta\,,\,0\,,\,0)$

→ 北緯 30 °で，　$a_{x''} \sim 2.18\times10^{-2}$ m/s^2 で東向き(x”向き)

北緯 60 °で，　$a_{x''} \sim 3.78\times10^{-2}$ m/s^2 で東向き(x”向き)

2) 東向きに進んでいるので，速度$\vec{v}'' = (v_{x''}, v_{y''}, v_{z''}) = (300, 0, 0)$ m/s，加速度$\vec{a}'' = (0\,,\,-2\,\omega\, v_{x''} \sin\beta\,,\,2\,\omega\, v_{x''} \cos\beta)$

→ 北緯 30 °で，加速度$\vec{a}'' \sim (0\,,\,-2.18\times10^{-2}\,,\,3.78\times10^{-2})$ m/s^2 で，向きは南で鉛直上方，

加速度の大きさ $a'' \sim 4.36\times10^{-2}$ m/s^2

北緯 60 °で，　加速度$\vec{a}'' \sim (0\,,\,-3.78\times10^{-2}\,,\,2.18\times10^{-2})$ m/s^2 で，向きは南で鉛直上方，

加速度の大きさ $a'' \sim 4.36\times10^{-2}$ m/s^2

→ 東向きに進んでいる場合は，加速度の大きさは緯度によらずに一定で，赤道上では鉛直上方に働く(遠心力と同じ向き)．