3. 落体の運動

2章では「物体の運動」に関して，位置・速度・加速度の関係性について学んできた．3章では「物体の運動」のなかで，特に，地表近くの空中にある物体が地球の中心方向へ移動する運動(落下運動)に限定して，その運動のふるまいを学ぶ[24]．落下運動では，物体を投げる初速度の違いにより，下の表のように4つに分類して調べる．

初速度 $\vec{v}_0$	落下運動の名称
0 (静かに物体を落下させる)	自由落下運動
真上(鉛直上方に)に速さ v_0 で投げる	鉛直投射運動
水平方向に速さ v_0 で投げる	水平投射運動
斜め上方に速さ v_0 で投げる(水平から上方に角度 θ で)	斜方投射運動

3-0. 重力加速度

地表近くの空中にある物体を落下させるとその運動はほぼ**等加速度運動**[25]であることが観測されている．したがって，落下運動は等加速度運動となる運動の一つである．物体が落下するときの加速度は重力(Gravitational Force)がその原因となるので，重力加速度と呼ばれる．加速度を表す記号として一般には記号$\vec{a}$で表すが，重力加速度の場合は，$\vec{g}$で表す．重力加速度の大きさ g はおおよそ下のような数値が測定で得られている．

$$g \sim 9.8 \text{ m/s}^2 \tag{3-0-1}$$

この値は地上の場所によって微妙に変わることが観測されている[26]．

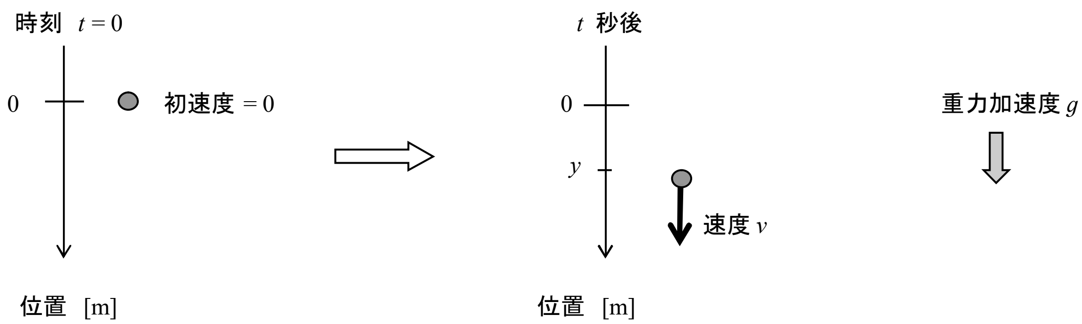
落下運動は等加速度運動なので，(2-3-10)式と(2-3-11)式から加速度$\vec{a}$の代わりに重力加速度$\vec{g}$を用いて，速度$\vec{v}$と位置$\vec{r}$は下の式のように表すことができる(初期位置$\vec{r}_0 = 0$ とした)．

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t \tag{3-0-2}$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 \tag{3-0-3}$$

3-1. 自由落下運動

初速度$\vec{v}_0 = 0$ で物体を落下させる運動を自由落下運動[27]と呼ぶ．下の図のように鉛直下向きを+方向にとり，時刻 $t = 0$ で物体の位置 y が原点にあるとする．重力加速度は下向きで正であり，1次元(直線上)の運動となり，下の式が成立する．



[24] 「物理学」を学習する過程において，落下運動は等加速度運動の一例なので，省略して次の章の「力」を学習してもよい．ただ，多くの高校生用教科書は「落下運動」が記述してあるので，ここでも掲載する．

[25] 地面から遠い(地球の半径位高い)位置から地上に落下する場合は等加速度運動ではなくなる．また，空気抵抗の影響が出る場合も等加速度運動ではなくなる．

[26] 重力加速度は地下に重い物質が多いとその値が大きくなる．また，地球の自転による影響も受ける．

[27] 自由落下運動をさせる場合，練習問題では「静かに落下させる」という表現をすることもある．

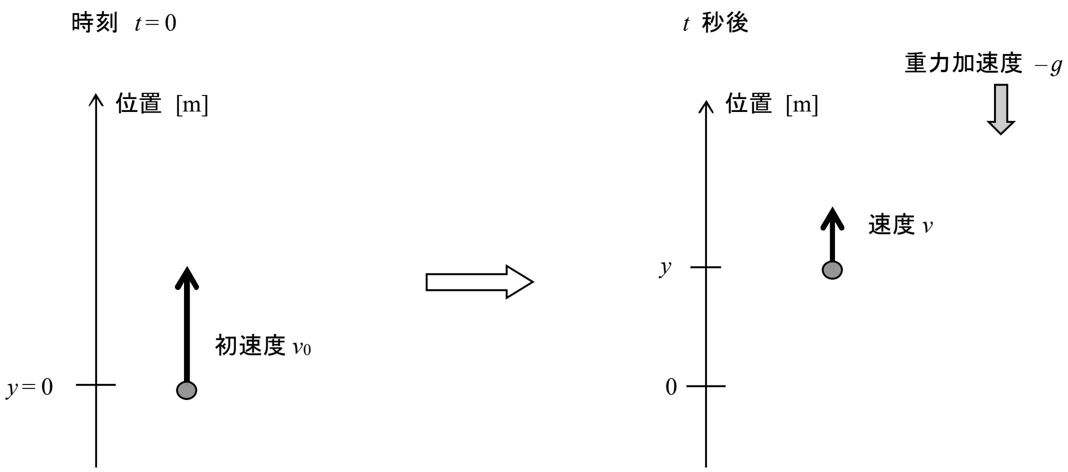
$$
\begin{cases}
v = g\,t & \text{(3-1-1)} \\[2ex]
y = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 & \text{(3-1-2)}
\end{cases}
$$

問 3-1-1.

1) ビルの屋上からある物体を静かに落下させたら，2.0 秒後に地面に落下した．地面に落下する寸前の速さ v とビルの高さ h を求めよ．
2) 高さ h = 44.1 m のビルの屋上からボールを自由落下させた．地面に到達するのは落としてから何秒後か?

3-2. 鉛直投射運動

初速度として，速さ v_0 で鉛直上向きに投げる物体の運動のことを鉛直投射運動と呼ぶ．下の図のように鉛直上向きを+y 方向にとり，時刻 $t = 0$ で物体の位置 y が原点($y = 0$)にあるとする．重力加速度は下向きなので負となり，1 次元(直線上)で鉛直方向の等加速度運動となるので，下の式が成立する．



$$
\begin{cases}
v = v_0 - g\,t & \text{(3-2-1)} \\[2ex]
y = v_0 t - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 & \text{(3-2-2)}
\end{cases}
$$

上の式から物体は，時刻 $t = 0$ で初速度 v_0 で真上に投げられ，時間が経過すると上向きの速度が小さくなり(小さくなっても速度が正の間は上昇し続ける)，最高点まで上昇する．最高点ではもうこれ以上，上昇しないので速度 $v = 0$ となる(一瞬静止する)．その後，速度は下向き(負となり)，下に落ちていく．最高点に達する時刻を t_1 とすると，その時刻は(3-2-1)式より，下の式のように求めることができる．

$$
v = 0 = v_0 - g\,t_1 \qquad \rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_0}{g} \tag{3-2-3}
$$

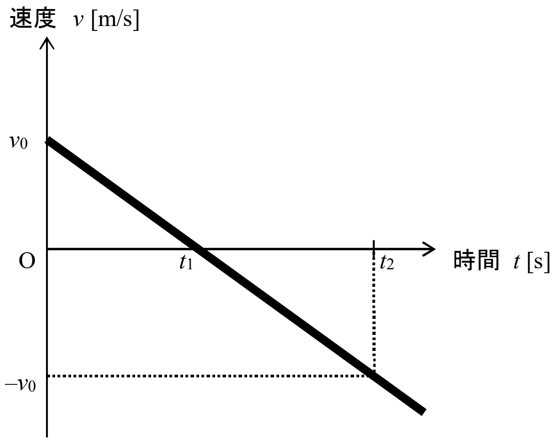
また，その時の位置(最高点)y_{max} は(3-2-2)式に代入することで，下の式のように求めることができる．

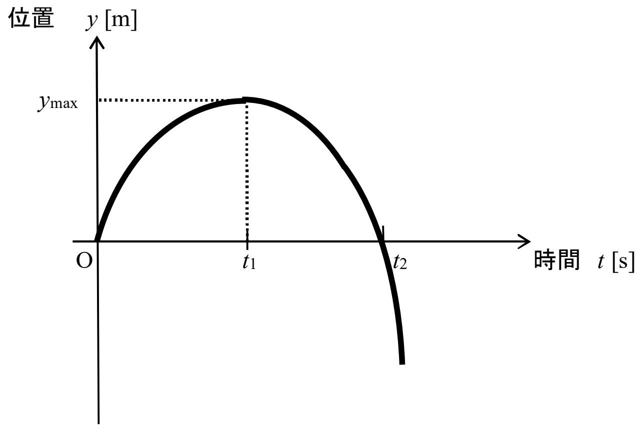
$$y_{\max} = y\,(t = t_1) = v_0 \times \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{(v_0)^2}{2g} \tag{3-2-4}$$

さらに，時間が経過して，投げた時と同じ位置($y = 0$)に戻る時刻を t_2 とすると，(3-2-2)式より，下の式のように求めることができる．

$$y = 0 = t_2\,(v_0 - \frac{1}{2}\,g\,t_2) \qquad \rightarrow \qquad t_2 = 0 \quad \text{または} \quad \frac{2\,v_0}{g} \tag{3-2-5}$$

この時の速度 v は(3-2-1)式から $v = -v_0$ となる．さらに，鉛直投射運動での v-t グラフと y-t グラフはそれぞれ下の図のようになる．





問 3-2-1.　小石を真上に速さ $v_0 = 19.6$m/s で投げた(空気抵抗は無視できるものとする).

1) 小石が最も高くなるのは投げてから何秒後か?
2) 最高点の高さは投げた位置より何 m 上か?
3) 投げた地点と同じ高さになるのは投げてから何秒後か?
4) 投げた地点と同じ高さになるときの小石の速度(速さとその向き)を求めよ.
5) 投げてから，1 秒後，2 秒後，3 秒後，4 秒後，5 秒後の速度 v を求めよ.
6) 投げてから，1 秒後，2 秒後，3 秒後，4 秒後，5 秒後の高さ y を求めよ.
7) 投げてから投げた地点と同じ高さになるまで，速度 v と時間 t の間の関係を表すグラフ(v-t グラフ)を書け.
8) 投げてから投げた地点と同じ高さになるまで，高さ y と時間 t の間の関係を表すグラフ(y-t グラフ)を書け.

問 3-2-2.　小石 A を真上に速さ $v_0 = 14.7$ m/s で投げた．その 2 秒後に同じ高さから小石 B を自由落下させた．その後，小石 A と小石 B は衝突した.

1) 小石 A と B が衝突するのはしたのは小石 A を投げてから何秒後か?
2) 2 つの小石が衝突するのは投げた地点を基準の高さとすると，どの地点か?
3) 衝突するときの小石 A の速さ v_A を求めよ.
4) 衝突するときの小石 B の速さ v_B を求めよ.

問 3-2-3.　小石を真下に速さ $v_0 = 9.8$ m/s で投げた.

1) 投げてから 1 秒後と 2 秒後の小石の速度(速さと向き)v を求めよ.
2) 投げてから 1 秒後と 2 秒後の小石の位置 y を求めよ.

* (3-2-1)式と(3-2-2)式から時刻 t を消去した式

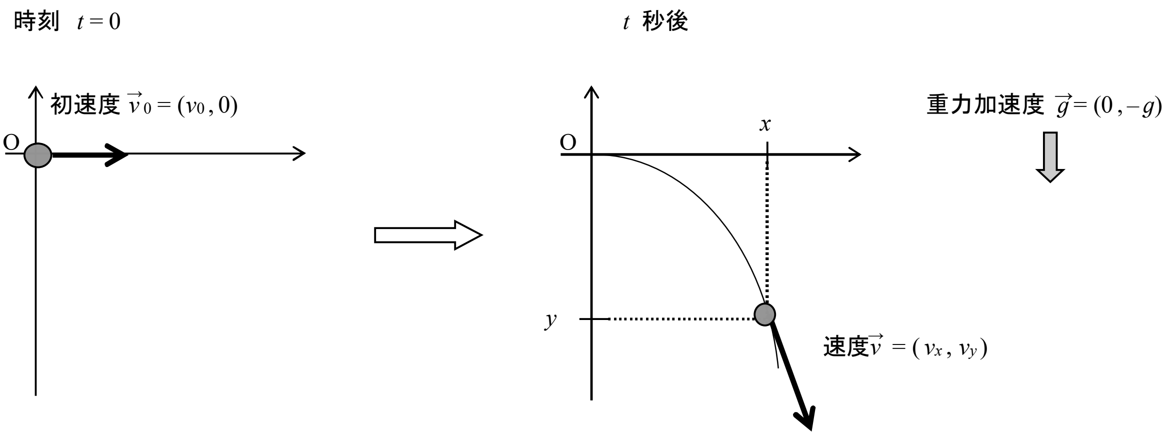
(3-2-1)式より,「 $t = (v - v_0)/g$ 」を(3-2-2)式に代入する.

$$y = v_0 t - g\,t^2/2 = v_0(v - v_0)/g - g\,\frac{(v - v_0)^2}{2\,g^2} = \frac{2\,v_0\,v - 2\,v_0^2 - (v - v_0)^2}{2\,g} = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,g} \quad \rightarrow$$

$$2\,g\,y = v^2 - v_0^2 \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

3-3. 水平投射運動

初速度として,速さ v_0 で水平方向に投げた物体が落下する運動のことを水平投射運動と呼ぶ.下の図のように水平投射運動では初速度の向きは水平方向で,重力加速度は鉛直下向きとなるので,水平方向(x 方向)と鉛直方向(y 方向)の 2 成分として扱わなければならばない.ベクトルの成分表示を用いると初速度$\vec{v}_0 = (v_0\,, 0)$で重力加速度 $\vec{g} = (0\,, -g)$であるので,(3-0-2)式と(3-0-3)式に代入し,投げてから t 秒後の速度を$\vec{v} = (v_x, v_y)$とし,位置$\vec{r} = (x\,, y)$とすると,各々の成分では下の式で表すことができる.



x 成分

$$\begin{cases} v_x = v_0 = \text{一定} & (3\text{-}3\text{-}1) \\ x = v_0\,t & (3\text{-}3\text{-}2) \end{cases}$$

y 成分

$$\begin{cases} v_y = -g\,t & (3\text{-}3\text{-}3) \\ y = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 & (3\text{-}3\text{-}4) \end{cases}$$

上の 4 つの式から,x 成分は初速 v_0 での等速運動,y 成分は自由落下運動と見なすことができる.また,この物体の落下の奇跡は放物線となる.

問 3-3-1. 小石を水平方向に速さ $v_0 = 9.8$ m/s で投げた(空気抵抗は無視できるものとする).

1) 投げてから，1 秒後，2 秒後，3 秒後，4 秒後の速度$\vec{v}$(水平成分 v_xと鉛直成分 v_y)と速さ v を求めよ(平方根はそのままでよい).

2) 投げてから，1 秒後，2 秒後，3 秒後，4 秒後の高さ y と投げた地点からの水平移動距離 x を求めよ.

3) 投げてから， 高さ y と時間 t の間の関係を表すグラフ(y-t グラフ)を書け.

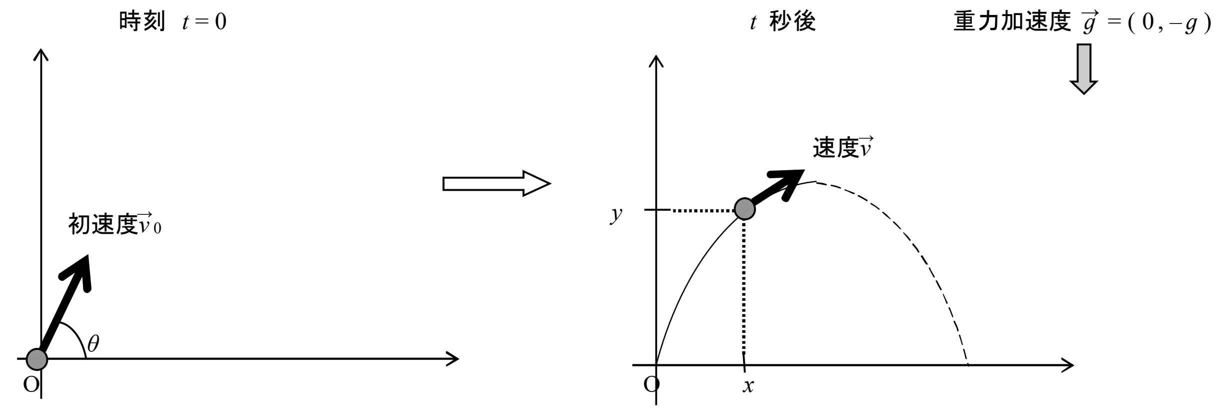
4) 投げてから，水平移動距離 x と時間 t の間の関係を表すグラフ(x-t グラフ)を書け.

5) 投げてからの，水平移動距離 x を用いて高さ y を表せ(高さ y を水平距離 x を用いて表せ).

6) 上の問 5)で求めた答えを用いて，高さ y と水平距離 x のグラフを書け(横軸に水平距離 x をとり，縦軸に高さ y をとれ).

3-4. 斜方投射運動

初速度として，速さ v_0 で水平方向から角度 θ で斜め上方に投げた物体が落下する運動のことを斜方投射運動と呼ぶ．斜方投射運動の様子を下の図に示す．水平投射運動と同様に水平方向(x 方向)と鉛直方向(y 方向)の 2 成分を用いて扱う．ベクトルの成分表示を用いると初速度$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$，重力加速度$\vec{g} = (0, -g)$として，(3-0-2)式と(3-0-3)式に代入し，投げてから t 秒後の速度を$\vec{v} = (v_x, v_y)$，位置$\vec{r} = (x, y)$とすると，各々の成分では下の式で表すことができる.



x 成分

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta = \text{一定} & (3\text{-}4\text{-}1) \\ x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cos\theta \cdot t & (3\text{-}4\text{-}2) \end{cases}$$

y 成分

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} - g\,t = v_0 \sin\theta - g\,t & (3\text{-}4\text{-}3) \\ y = v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} g\,t^2 = v_0 \sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} g\,t^2 & (3\text{-}4\text{-}4) \end{cases}$$

x 成分は初速 $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ での等速運動，y 成分は初速 $v_{0y} = v_0 \sin\theta$ での鉛直投射運動と見なすことができる．したがって，最高点に達する時間は鉛直投射運動の(3-2-3)式で，初速を $v_0 \to v_0 \cos\theta$ へ変更して求める．最高点の高さ $y_{\max}$ も同様に(3-2-4)式で初速を $v_0 \to v_0 \cos\theta$ へ変更して求める.

問3-4-1. ボールを水平方向から上向きに角度$\theta = 30$ °で速さ$v_0 = 19.6$ m/sで投げた. $\sqrt{3} = 1.73$とし，下の問いに答えよ.

1) 初速度の水平成分v_{0x} を求めよ.

2) 初速度の鉛直成分v_{0y} を求めよ.

3) 最高点での速度の水平成分v_xを求めよ.

4) 最高点での速度の鉛直成分v_yを求めよ.

5) 投げてから最高点に達するまでの時間t_1を求めよ.

6) 投げた地点から最高点までの高さy_1を求めよ.

7) 投げた地点から最高点までの水平距離x_1を求めよ.

8) 投げた高さの位置に再び，戻るのは何秒後か?そして，そのときの水平到達距離x_2を求めよ.

9) 投げた高さの位置に再び戻る時，速度の水平成分v_xを求めよ.

10) 投げた高さの位置に再び戻る時，速度の鉛直成分v_yを求めよ.

11) 投げた高さの位置に再び戻まで，時刻tと高さyの間の関係を表すグラフ(y-tグラフ)を書け.

12) 投げた高さの位置に再び戻まで，時刻tと速度の鉛直成分v_yの間の関係を表すグラフ(v_y-tグラフ)を書け.

13) 投げた高さの位置に再び戻まで，時刻tと水平移動距離xの間の関係を表すグラフ(x-tグラフ)を書け.

14) 投げた高さの位置に再び戻まで，時刻tと速度の水平成分v_xの間の関係を表すグラフ(v_x-tグラフ)を書け.

15) 初速度の大きさを同じにして，水平からの角度を30 °より3 °増やすと水平到達距離は増えるか?減るか?

16) 初速度の大きさを同じにして，水平からの角度を30 °より3 °増やすと最高点はより高くなるか?それとも低くなるか?

4. 力

物体の運動の振る舞いは「**力**」と大きく関係する. 4 章ではまず力についてその性質について学ぶ. そして, 次の章では「**力と物体の運動の関係**」について学習する.

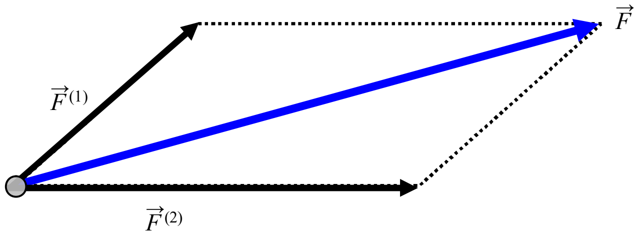
4-1. 力(Force)

物理で扱う**力(Force)**は大きさと向きを持ち, ベクトル量の 1 つである. 力を表す記号として, $\vec{F}$ で表すことが多い[28]. 物理学において, **力は「物体の運動の振る舞いを変える原因となるもの, 或いは,** 物体を変形させる原因**となるもの」**と定義する[29]. 力はベクトル量であるので 2 次元の力の場合は, 下の式のようにベクトルの成分表示を用いて表すことができる.

$$\vec{F} = (F_x, F_y) \tag{4-1-1}$$

複数の力が同じ物体にかかっている場合は, それらを合わせた力(=合力=合成した力)はベクトルの足し算の規則に従って, 足し合わせる. 例えば, 2 つの力 $\vec{F}^{(1)} = (F_x^{(1)}, F_y^{(1)})$, $\vec{F}^{(2)} = (F_x^{(2)}, F_y^{(2)})$ に対し, その合力$\vec{F}$は下の式のように計算する.

$$\vec{F} = \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} = (F_x^{(1)}, F_y^{(1)}) + (F_x^{(2)}, F_y^{(2)}) = (F_x^{(1)} + F_x^{(2)}, F_y^{(1)} + F_y^{(2)}) \tag{4-1-2}$$



合力が 0 の場合は実質的には物体に力がかかっていないのと同じである. また, 合力の大きさ$|\vec{F}|$は, 三平方の定理を用いて下の式のように計算する.

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{(F_x^{(1)} + F_x^{(2)})^2 + (F_y^{(1)} + F_y^{(2)})^2} \tag{4-1-3}$$

・力の単位

物理で標準的に用いられている単位に「**N(ニュートン)**」がある. 力の単位「**N**」についての定義は, 5 章の「5-2. 第 2 法則(運動の法則)」で提示する. その他, 日常生活で用いられる力の単位として, 「**kgw(キログラム重)**」がある. この単位については「4-3. ① 重力」で学習する.

問 4-1-1. 次の文章で物理学の「力」と関係のないものを選べ.

① 勉強したので理解する力がついた. ② カナヅチで釘を力一杯, 打ったので釘が板に刺さった.
③ アメリカの大統領は力が強いので多くの国が彼に賛同する.
④ 動いている自動車でブレーキをかけたら止まった. ⑤ 自動車が衝突したらへこんだ.
⑥ 学力は訓練によって身につく.

---

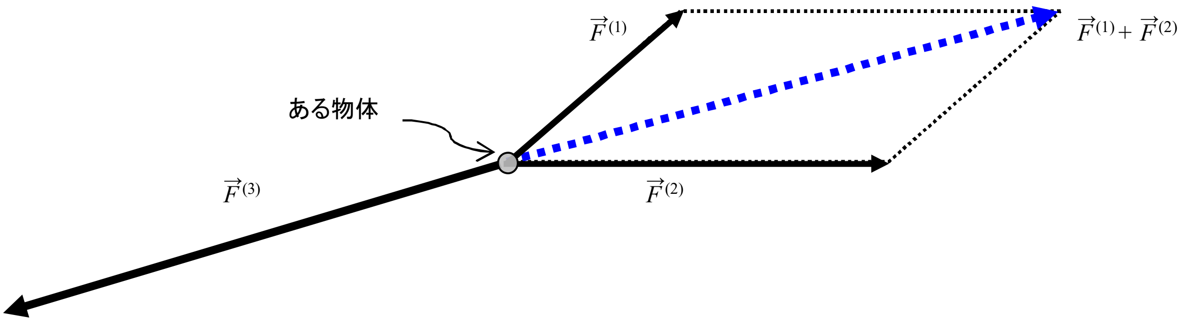
[28] 力の種類によっては別なアルファベットを用いて力を表すこともある.
[29] 日常生活で使う「力」は多用な意味で使われる.

4-2. 力のつりあい

ある物体に複数の力がかかっていて，その物体の運動の様子が変化しない場合[30]，物体に働く「**力はつり合っており，その合力は 0(ゼロ)となる**」 例えば，3 つの力 $\vec{F}^{(1)} = (F_x^{(1)}, F_y^{(1)})$，$\vec{F}^{(2)} = (F_x^{(2)}, F_y^{(2)})$，$\vec{F}^{(3)} = (F_x^{(3)}, F_y^{(3)})$ がつり合っている場合，その合力$\vec{F}$は下の式のように$\vec{0}$ (= 0)となる．

$$\vec{F} = \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} + \vec{F}^{(3)} = (F_x^{(1)}, F_y^{(1)}) + (F_x^{(2)}, F_y^{(2)}) + (F_x^{(3)}, F_y^{(3)})$$

$$= (F_x^{(1)} + F_x^{(2)} + F_x^{(3)}, F_y^{(1)} + F_y^{(2)} + F_y^{(3)}) = \vec{0} = (0, 0) = 0 \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

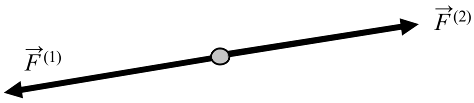


上の式はベクトルの和として，0 なので，各成分(x 成分と y 成分)がともに 0 となる．

・2 つの力のつり合い

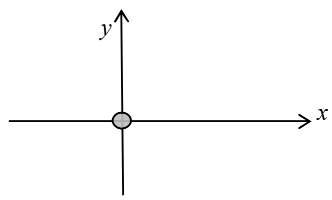
ある物体に 2 つの力$\vec{F}^{(1)}$，$\vec{F}^{(2)}$ が働いていて，その 2 つの力がつり合っている場合は

$$\vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{F}^{(1)} = -\vec{F}^{(2)} \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

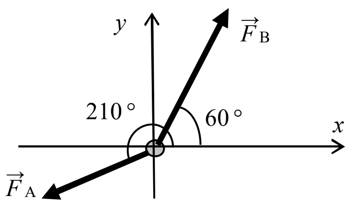


となり，2 つの力$\vec{F}^{(1)}$と$\vec{F}^{(2)}$は逆向きで，同じ大きさとなる．

問 4-2-1. 図のように x 方向と y 方向をとり，原点に置いた物体に 3 つの力$\vec{F}_A = (3, 0)$ N，$\vec{F}_B = (0, 4)$ N，$\vec{F}_C$ が働いており，3 つの力はつり合っている．$\vec{F}_C$ を成分表示で表し，次に，$\vec{F}_C$ の大きさ F_Cを求めよ．

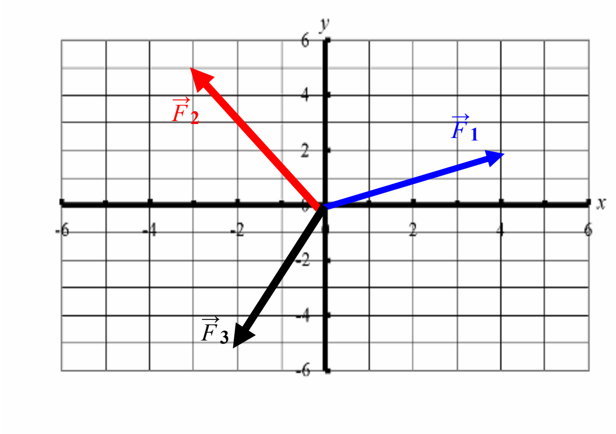


問 4-2-2. 図のように x 方向と y 方向をとり，原点に置いた物体に 3 つの力$\vec{F}_A$ ($\vec{F}_A$の大きさ = 2.0 N)，$\vec{F}_B$ ($\vec{F}_B$の大きさ = 4.0 N) と $\vec{F}_C$ が働いていて，3 つの力はつり合っている．$\vec{F}_C$ を成分表示で表し，次に，$\vec{F}_C$ の大きさ F_Cを求めよ．



[30] 例えば，止まっていた物体は止まり続けるなど．

問 4-2-3.　下の左図に表された力 $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ の合力$\vec{F}$を求めよ(1 マスの目盛りを 1.0 N とする). 次に，合力$\vec{F}$とつり合いの関係にある力 $\vec{F}_A$ を求めよ.



4-3. 力の種類

4-1 で,「力は物体の運動の振る舞いを変える原因か，物体を変形させる原因」となるものと定義した. 力はその性質により，多くの種類がある. この節では 5 種類の力を紹介し，その性質を学習する.

① 重力 $\vec{W}$

ある物体を(物体を支えている支えをなくして)空中から手を離すとその物体は地球の中心に向かって移動し始める(この現象を落下運動と呼ぶ)[31]. **落下する原因は重力**(Gravitational Force)が物体に働いているからである. 重力は物体を地球の中心方向へ引く力である. 重力を表す記号としては$\vec{W}$を用いることが多い. 物理学では，重力の大きさを重さ(**Weight**)と呼び[32]，記号 W で表す.

$$\text{重さ } W = \text{ 重力}\vec{W}\text{の大きさ} \tag{4-3-1}$$

・重力の単位 (← 力の単位の一つ)

地球上の地表近くにある質量[33] $\boldsymbol{m}$ **= 1 kg** の物体にかかる重力の大きさを **1 kgw(キログラム重)**[34]と定義する.

→　重力は物体の質量に比例する(例えば，質量 $m = 2$ kg の物体にかかる重力の大きさ $W = 2$ kgw となる).

・注意

(i)　kgw は重力の単位だけでなく,「力の単位のひとつ」である.

(ii)　**kgw は力の単位の 1 つで，kg は質量の単位**である.

(iii)　同じ質量の物体でも，厳密には，その物体にかかる重力は地上の場所によって異なる(その原因は様々).

(iv)　1 kgw = 9.8 N　である. この換算については，5 章の「5-2. 第 2 法則(運動の法則)」で学ぶ.

② 垂直抗力 $\vec{N}$

---

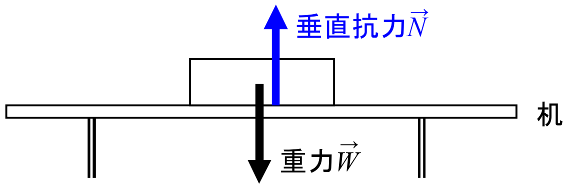
[31] 物体は止まっていた状態から，運動の振る舞いが変化し，落下したことになる. 運動の振る舞いが変化したのは物体に力が働いたからである.

[32] 日常会話では,「重さ」と「質量」は同義語として使っているが，物理ではこれらは違った量として定義されている.

[33] 質量(mass)は記号 m で表す. 質量とは何か?についてはここでは扱わない.

[34] kgw(キログラム重)の最後の「w」は「重さ(weight)」を表している. また，1 kgw　は 1 kgf ('f'は force の意味)と書くこともある.「kgw」はひとまとまりで 1 つの単位で，kg×w という意味ではない.

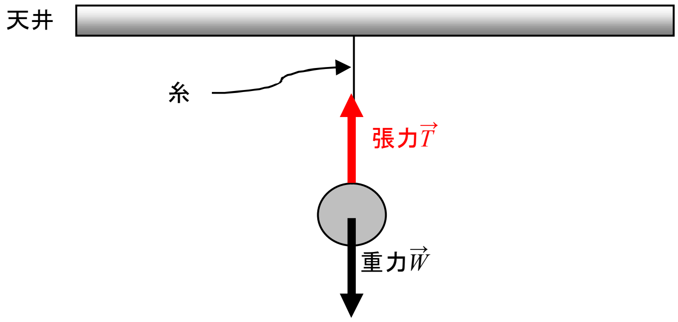
机の上に置かれた物体には重力が働いているが，物体は静止したままである．これは，机の面が舞台を持ち上げる力(これを垂直抗力(Normal Force)と呼ぶ)と重力がつり合っているためである[35]．垂直抗力を表す記号としては，$\vec{N}$を用いることが多い．



2 つの力がつり合っている　→　合力 $= \vec{W} + \vec{N} = 0$　(4-3-2)

③ 糸の張力　$\vec{S}$ または $\vec{T}$

ある物体に糸をつけ，天井からつるす．物体には重力が働いているが，静止したままである．これは，糸がピンと張って物体を持ち上げている力(糸の張力)と重力がつり合っているためである．糸の張力(Tension) を表す記号としては$\vec{S}$ または，$\vec{T}$を用いることが多い．



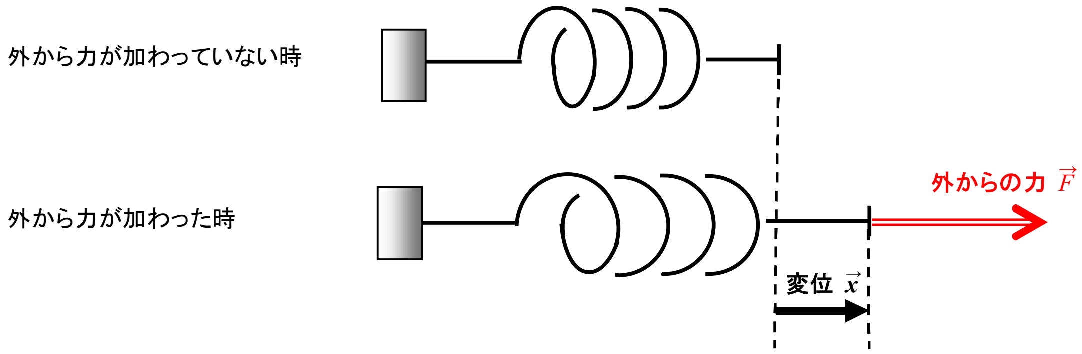
2 つの力がつり合っている　→　合力 $= \vec{W} + \vec{T} = 0$　(4-3-3)

④ 弾性力(ばねの力)　$\vec{f}$

ばねに力を加えて引くとばねは伸び，力を加えて押すとばねは縮む(「**力を加えると変形する**」)性質を持っている．力[36] を加えるのを止めるとばねは元の形に戻り，自然な長さの状態になる．ばねに外からの力$\vec{F}$を加えて引っ張った時，ばねは長さ x だけ伸びる(ばねの変位 = 終わりの位置 – 始めの位置 = $\vec{x}$ ； 変位の大きさ =$|\vec{x}| = x$)．**伸びの長さx が小さい間**は，外からの力$\vec{F}$とばねの変位 $\vec{x}$は下の式で表される比例関係が成立することが**実験的に確認**されている．この関係を「**フックの法則**」と呼ぶ．

$$\vec{F} = k\,\vec{x} \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

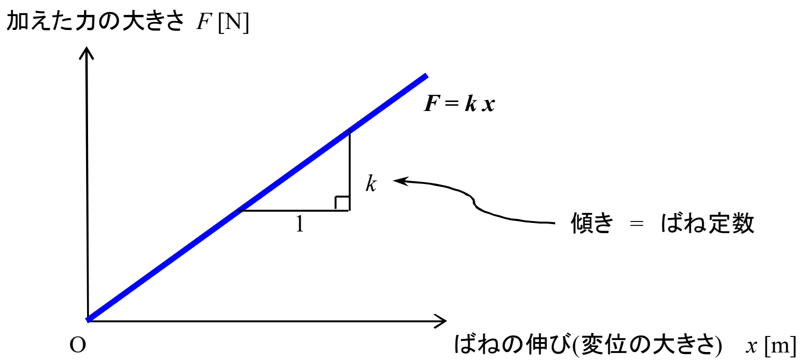
[35] 重力は重さの中心(=重心)からベクトルの矢印が出る．垂直抗力は机の表面が支える力なので机の表面から矢印が出る．
[36] 加える力が小さい場合．加える力が大きくなると比例関係が成立しなくなり，最後には，ばねが壊れる．



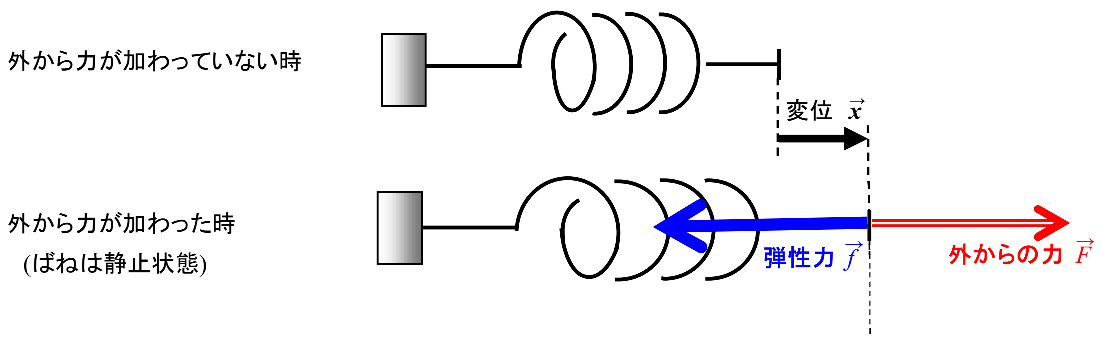
外からの力の大きさ F, 変位(伸び)の大きさ x を用いるとフックの法則は下の式でも表すことができる.

$$F = k\,x \tag{4-3-4'}$$

ここで, 比例定数 k はばね定数と呼ばれ, その単位は **N/m**, または kgw/m か gw/cm である. 上の式をグラフに表すと下のようになる.



ばね自体は伸びた(縮んだ)時, **ばねは元の形に戻ろうとする力(弾性力)**[37]が働く. ばねが静止した状態では(一定の伸びのままの状態も含む), 弾性力 $\vec{f}$ と外からの力 $\vec{F}$ はつり合う.



したがって, 弾性力 $\vec{f}$ は, 下の式のように変位 $\vec{x}$ と逆向きに働く.

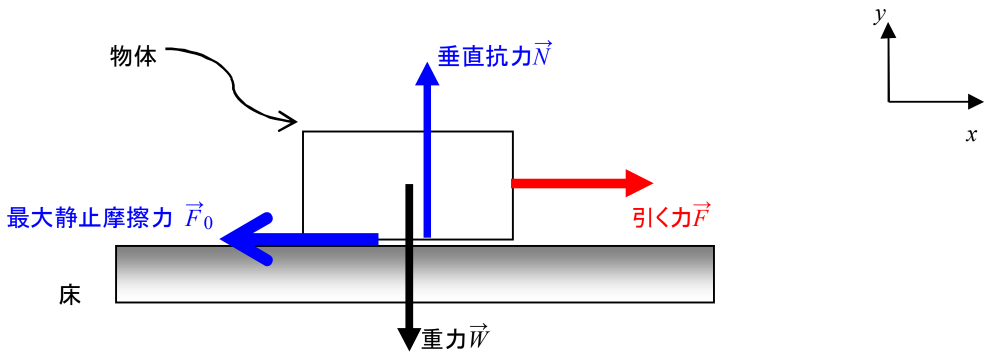
$$\vec{f} = -\vec{F} = -k\,\vec{x} \tag{4-3-5}$$

[37] 元の形に戻ろうとする力なので「復元力」と呼ぶこともある.

⑤ 摩擦力　$\vec{F}$　(最大静止摩擦力 $\vec{F}_0$ ； 動摩擦力 $\vec{F}'$)

床の上に物体を置き，外から力を水平にかけても物体は動かないことが多い．これは，物体の底の面と床の表面の間に摩擦(Friction)が生じ，摩擦力(Frictional Force)が発生したためである．摩擦力は物体が動こうとする向きと逆向きに働く．

物体が動き出さない状態では力がつり合っており，合力 = 0 となる．さらに水平に引く力を大きくしていくとある限界の力で物体は動き出す．この時の摩擦力を**最大静止摩擦力**と呼ぶ．最大静止摩擦力は記号 $\vec{F}_0$ を用いて表すことが多い．



合力 $= \vec{N} + \vec{W} + \vec{F} + \vec{F}_0 = 0$　　(4-3-6)

また，図のように x 方向と y 方向をとり，4 つの力を成分表示すると $\vec{N} = (0, N)$, $\vec{W} = (0, -W)$, $\vec{F} = (F, 0)$, $\vec{F}_0 = (-F_0, 0)$となる．ここで，垂直抗力の大きさ = N, 重力の大きさ = W, 引く力の大きさ = F, 最大静止摩擦力の大きさ = F_0 とした．上の式より，x 成分と y 成分で力のつりあいから下の式が成り立つ．

$$\begin{cases} N = W & (4\text{-}3\text{-}7) \\ F = F_0 & (4\text{-}3\text{-}8) \end{cases}$$

さらに，実験によると，垂直抗力の大きさ N と最大静止摩擦力の大きさ F_0 の間には下のような比例関係が成立する[38]と言われている．

$$\boldsymbol{F_0 = \mu N} \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

ここで μ は静止摩擦係数である．摩擦係数は2つの物体の接触している面の状態によるが，物体の重さにはよらない．

・**注意**
摩擦力$\vec{F}_0$ と垂直抗力$\vec{N}$ はその向きが異なるので，「 $\vec{F}_0 \neq \mu \vec{N}$ 」である．

動いている物体にも摩擦力が働く．この摩擦力を動摩擦力と呼び，$\vec{F}'$で表される．動摩擦力も最大静止摩擦力と同様な関係式が成立する．動摩擦力の大きさ F'と垂直抗力の大きさ N との間には下の比例関係式が成立する．

$$\boldsymbol{F' = \mu' N} \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

[38] 筆者が実験(2 種類の実験)した所，その中の一つの実験では再現性が悪く，ちょっとした条件の違い(例えば，実験装置をセットして，実験を開始するまでの時間が変わっていた)で大きくずれた摩擦係数の値が実験結果として得られた．また，最新の物理学においても，摩擦力に対する完全な理解は得られておらず，現象的にも理論的にも謎が残されている．

ここで，F'は動摩擦力の大きさ，N は垂直抗力の大きさ，μ'は動摩擦係数である．動摩擦係数は静止摩擦係数とはその値が異なり，多くの場合，動摩擦係数の方が静止摩擦係数と比べ，小さな値をとる．

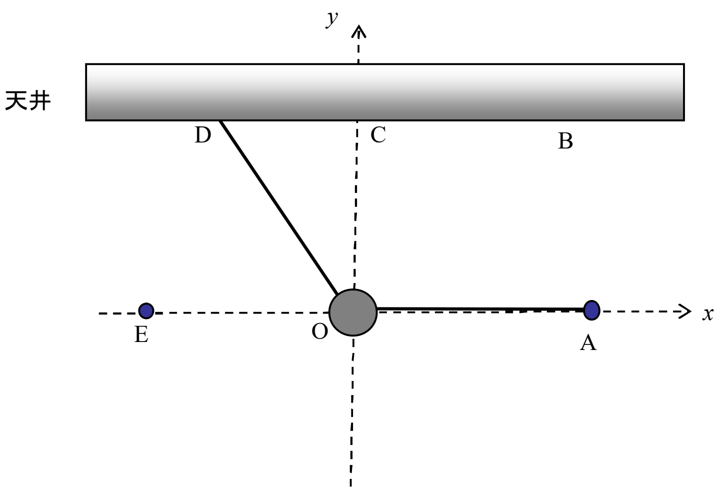
・ **注意**

問題を解く際，問題文中に「滑らかな面」とか「粗い面」と表現されていることがある．その意味は下の通りである．

「滑らかな面」 → 摩擦の影響を無視できる面
「粗い面」　　 → 摩擦の影響のある面

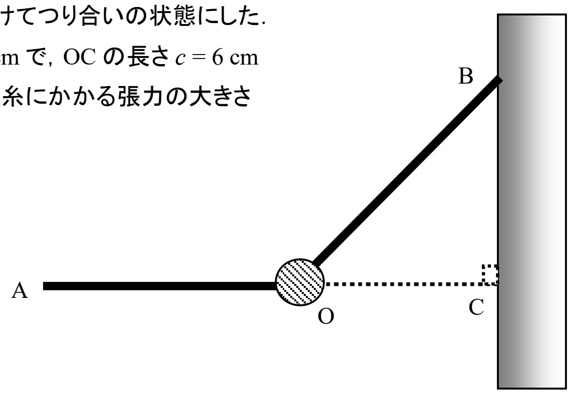
問 4-3-1.　質量 $m = 3.0$ kg の本を机の上に置いた．この本にかかる力の種類を述べ，それらの力の大きさを書け．

問 4-3-2.　図のように質量 $m = 17.3$ kg のおもりに 2 本の糸(糸は OA と OD に張ってある)をつけて一方は天井からつるし，点 A で糸 OA を引っ張った(x 方向と y 方向は図のように水平方向と鉛直方向にとる．物体は∠EOD = 60 °でつり下がっている)．



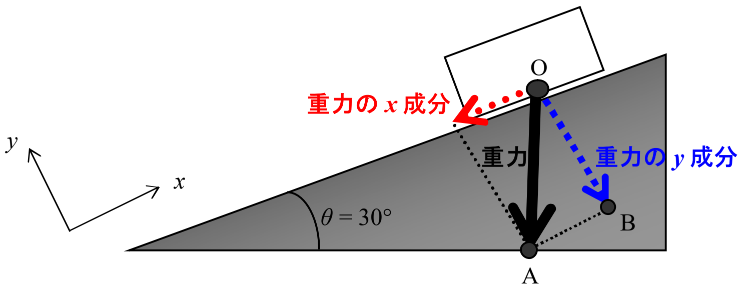
1) OA の糸にかかる糸の張力を$\vec{T}$とする．この張力$\vec{T}$を張力の大きさ T を用いて成分表示せよ．
2) ∠AOD の角度は何度か?
3) OD の糸にかかる糸の張力を$\vec{S}$とする．この張力$\vec{S}$を張力の大きさ S を用いて成分表示せよ．
4) この物体には張力$\vec{T}$と$\vec{S}$のほかに重力$\vec{W}$も働いている．上の図に矢印でこれらの力を示し，その近くに$\vec{T}$, $\vec{S}$, $\vec{W}$と記せ．
5) 重力$\vec{W}$を成分表示せよ(数値を使うこと)．
6) これら 3 つの力の間にはどのような関係が成り立つか?
7) 2 つの張力の大きさ T と S を求めよ(必要なら $\sqrt{2}$ = 1.41, $\sqrt{3}$ = 1.73, $\sqrt{5}$ = 2.24 を使うこと)．

問 4-3-3.　図のように質量 $m = 4.0$ kg のおもりに 2 本の糸をつけてつり合いの状態にした．糸 OA は水平に張られている．糸 OB の長さ b =10 cm で，OC の長さ c = 6 cm であった．OA の糸にかかる張力の大きさ S と OB の糸にかかる張力の大きさ T を求めよ．



問 4-3-4. 下の図のように水平から角度 $\theta = 30$ °の斜面上に質量 $m = 4.0$ kg の物体を載せた．斜面と平行な向きを x 方向，斜面と垂直方向を y 方向とする[39]．

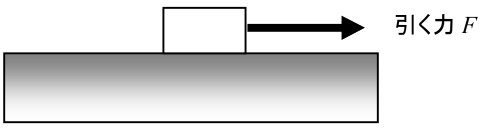
1) $\angle AOB = 30°$となることを示せ．
2) AB の長さ a と OB の長さ b について，OA の長さ ℓ と三角関数を用いて表せ．
3) この物体にかかる重力$\vec{W}$について，成分表示で求めよ(+と–に注意する)．



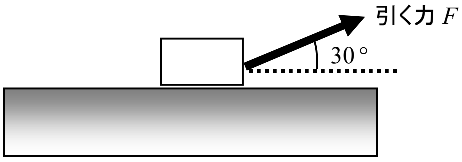
問4-3-5. あるばねを地面と垂直に取り付けた．質量$m = 50$ gのおもりを取り付けたら，ばねは長さ$x = 2.5$ cmだけ伸びた．このばねのばね定数kを求めよ(gw/cm, kgw/m, N/mの単位で求めよ)．

問4-3-6. ばね定数$k = 0.4$ kgw/mのばねに質量$m = 20$ gのおもりをつけた時の，ばねの伸びxを求めよ．

問4-3-7. 下の図のように水平に置かれた粗い面上に質量$m = 5.0$ kgの物体を置き，水平方向に引っ張った．引っ張る力の大きさ$F = 1.2$ kgwの時，物体が動き出した．静止摩擦係数μを求めよ．



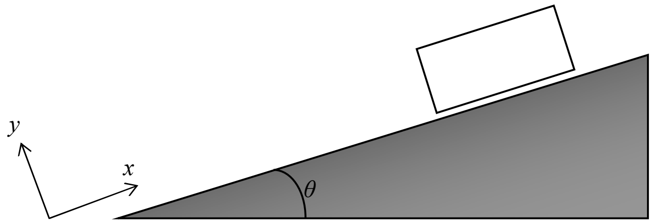
問4-3-8. 下の図のように水平に置かれた粗い面上に質量$m = 10$ kgの物体を置き，水平方向から上向きに角度$\theta = 30$ °で引っ張った．引っ張る力の大きさ$F = 4.0$ kgwの時，物体が動き出した．静止摩擦係数μを求めよ．



問 4-3-9. 下の図のように摩擦のある面に物体を載せ，水平から少しずつ角度を増やしたら角度 θ で物体は滑り落ち始めた．図のように斜面と平行な向きを x 方向，斜面と垂直方向を y 方向とする．

---

[39] 物理では各方向は自由に選ぶことができる(斜め方向をx方向とすることも可能である．ただ，選んだ方向の間は直角であることが望ましい)．



1) 上の図にこの物体にかかる力(重力$\vec{W}$, 垂直抗力$\vec{N}$, 最大静止摩擦力$\vec{F}_0$)を矢印で表し, その矢印の近くにその力を表す記号を書け.

2) 重力$\vec{W}$, 垂直抗力$\vec{N}$, 最大静止摩擦力$\vec{F}_0$ について各々の力の大きさを W , N , F_0 を用いて成分表示せよ(注意: 物体の質量を m [kg]とすると, 重力の大きさ = $W = m$ [kgw]となるが, ここでは重力の大きさ W を用いる).

3) 力のつり合いから, N と F_0 を重力の大きさ W と角度 θ を用いて表せ.

4) 上の問 3)の答えから, 静止摩擦係数 μ に対して角度 θ を使って求めよ.

5.　運動の法則(ニュートンが発見した運動の 3 つの法則)

物体の運動状態は，時刻 t における位置 $\vec{r}$ と速度 $\vec{v}$ によって特定される．これらの情報は，2 章で示したように(特に，(2-3-11)式と(2-3-12)式で示した)，時刻 $t=0$ での位置(初期位置)と速度(初速度)，および，加速度を与えることで予言できる．

4 章では，「力が物体の運動状態を変える原因」と定義した．加速度が物体の運動状態を変化させるので，「物体に力が作用すると加速度が発生し，運動状態が変化する」．この章では物体の運動状態と力を結びつける 3 つの基本法則(3 つの運動の法則)について学ぶ．この **3 つの運動の法則**は，物理学で最も重要な法則で，この法則を基にして，物理学が構築されている．3 つの運動の法則はニュートン(I. Newton)によって 17 世紀末に発見された．以下では，最初にその 3 つの運動法則を紹介する．

5-1. 第 1 法則(慣性の法則)

成立する前提条件 ；　物体に外から力が働いていない場合(合力 = 0 の場合，力が働いていないのと実質同じ)

⬇

物体は止まったままか，等速度運動し続ける．

物体が運動の状態を変えずにそのままの状態を保とうとする性質を**慣性**と呼び，第 1 法則は「**慣性の法則**」とも呼ばれる．

* **第 1 法則の別な意味**

「力がかかっていない場合，物体は等速度運動を行う」こと(等速度運動)に対し，下のように表現を変える．

→ 物体が等しい距離を通過するのに要する時間間隔はそれぞれ，等しい．

上に記したことを図に書き，説明する．

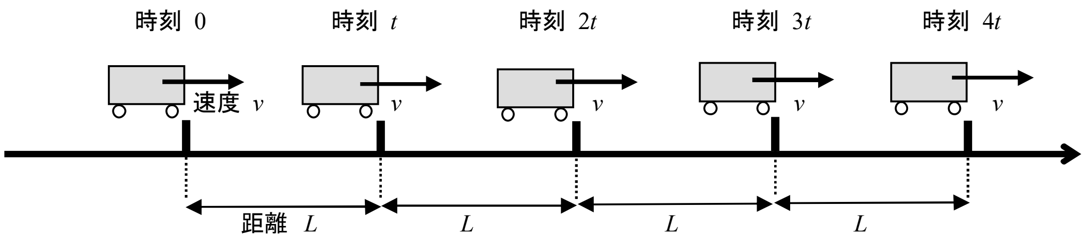
(i)　等しい距離を測ることのできる「ものさし」を用意する．

← この「ものさし」は，場所や時間でその長さは変わらないとする．

(ii)　その「ものさし」で等しい距離に印をつける．

(iii)　等速度運動する物体を走らせる．

(iv)　ものさしで印をつけた場所を物体が通過する時間が等しい時間間隔になる



第 1 法則を用いて，時計(等しい時間間隔を測定する機器)を作ることができる．

→ 時間を測定することが可能となる．

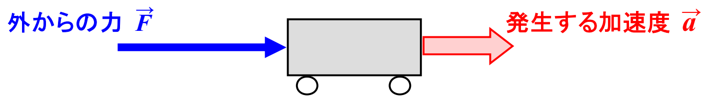
5-2. 第 2 法則(運動の法則)

成立する前提条件 ； 質量 m の物体に外から力(または，合力) $\vec{F}$ が働いている場合

⬇

物体には加速度 $\vec{a}$ が発生し，下の関係式[40]が成立する.

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$



上の式は**運動方程式**と呼ばれ，運動状態を調べるための重要な式である．第 2 法則は**「運動の法則」**とも呼ばれる．上の式より，物体に加える力とそれによって生じる加速度は比例関係にあり，その比例定数が**質量 m** に相当する．

また，複数の力がその物体に働いている場合は，その合力が実質的に物体に働く力となる．

・質量(mass)　m

物体が持っている固有の量[41]で，その物体の特性を表す量の一つである．質量の単位として，物理学で標準的に使うのは kg(**キログラム**)である．kg と g(グラム)は下のような換算関係で結ばれている[42]．

$$1\ \mathrm{kg} = 1000\ \mathrm{g} = 10^{3}\ \mathrm{g} \qquad (5\text{-}2\text{-}2)$$

・力の単位

質量 $m = 1$ kg の物体に対し，加速度の大きさ $a = 1\ \mathrm{m/s^2}$ となるような力の大きさ F を $F = 1$ **N(ニュートン)**と定義する．(5-2-1)式からベクトルの大きさだけを取り出すと下の式のようになる．

$$F = m\,a \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

この式より，力 $F = 1$ N，質量 $m = 1$ kg，加速度 $a = 1\ \mathrm{m/s^2}$ を代入すると，「$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \times 1\ \mathrm{m/s^2} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$」より，下の関係が成りたつ．

$$\boxed{\mathrm{N(ニュートン)} = \mathrm{kg \cdot m/s^2}} \qquad (5\text{-}2\text{-}4)$$

・重力

自由落下する物体には重力のみが働いている．その時，物体に生じる加速度は重力加速度となるので，(5-2-1)式において，外からの力が重力である場合は， 力$\vec{F}$ → 重力$\vec{W}$， 加速度$\vec{a}$ → 重力加速度$\vec{g}$ と書き換えて(または，ベクトルの大きさだけをとると)，下の式で表すことができる．

---

[40] この式は物理学で最も重要な式である．この**運動方程式**から物理学が成り立っているといっても過言ではない．

[41] 物体が存在するなら，必ず，その物体に付随する質量を持つ．

[42] 1 g(グラム)は元々，温度 0 ℃で体積 $1\ (\mathrm{cm})^3 = 1\ \mathrm{cm}^3$ の水の質量のことである．また，1kg は 1 ℓ(リットル) $= 1000\ \mathrm{cm}^3$ の水の質量である．その後，kg 原器が作られ，質量の基準となった．現在では新しい質量の定義により，質量 1 kg を定めている．

$\vec{W} = m\,\vec{g}$　　　　　$(\ W = m\ g\ )$　　　　　(5-2-5)

したがって，「質量 m = 1 kg の物体にかかる重力の大きさ W = 1 kgw」は上の式にその数値を代入して，下のような換算関係となる(**力の単位である kgw と N の単位の換算関係**).

$$\mathbf{1\ kgw} = 1\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} = \mathbf{9.8\ \ N} \qquad (5\text{-}2\text{-}6)$$

＊ 第 2 法則の別な意味

第 2 法則を表す運動方程式において，加速度は，物体の位置(ものさしを使う)と通過時刻(時計を使う)を測定することで，その値を測定することができる．

(→加速度は，位置と通過時刻から，速度と加速度の値を決めることができる)

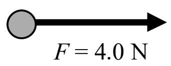
ある物体に，(同じ向きの)力を加えたときに発生する加速度を観測し，発生する加速度の大きさが 2 倍，3 倍･･になるときは，加えた力の大きさも 2 倍，3 倍･･になる．

つまり，発生する加速度の大きさを測定することで，加えた力の大きさが測定できることになる(測定とは，基準の量に対し，2 倍，3 倍，･･･の量が判定できることを意味する).

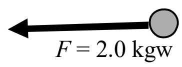
第 2 法則を用いて，力の大小を定めることができる．　→　力が測定可能となる．

問 5-2-1.　質量 m = 2.0 kg の物体に下の図のような力が各々働いているとき，物体に発生する加速度$\vec{a}$を成分表示で表し，その大きさ a を求めよ(下の図では，各々の力について，その大きさのみを表した).

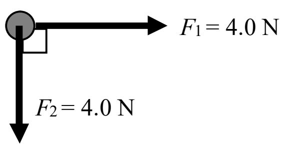
1)



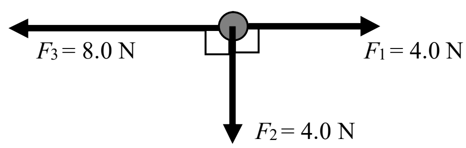
2)



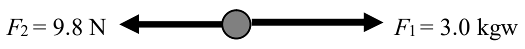
3)



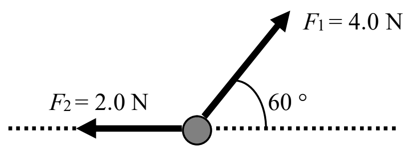
4)



5)



6)

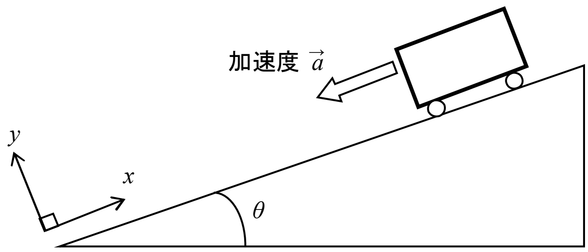


問 5-2-2.　質量 m = 3.0 kg の物体にかかる重力の大きさ W は何 N か?　また，それは何 kgw か?

問 5-2-3.　ばね定数 k = 0.2 kgw/m は何 gw/cm か?　また，何 N/m か?

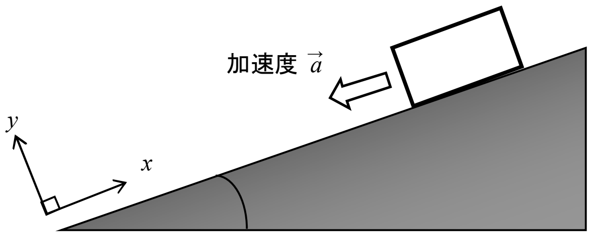
問 5-2-4.　あるばねに質量 m = 40 g のおもりをつるしたら，ばねは長さ ℓ = 5.0 cm 伸びた．このばねのばね定数 k を求めよ．

問 5-2-5.　図のように摩擦の影響が無視できる水平からの角度 θ となる斜面上に質量 m の物体をおいたら，加速度の大きさ a で斜面の下方に動き出した．下の図のように斜面と平行で上方を $+x$ 方向，斜面に対し垂直上方を $+y$ 方向として下の問に答えよ．



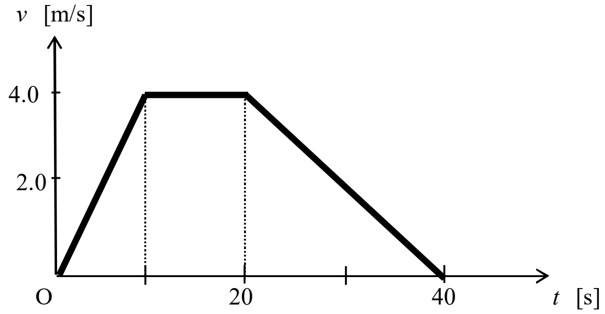
1) 加速度 $\vec{a}$ に対して，加速度の大きさ a を用いて成分表示で表せ．
2) 重力 $\vec{W} = m\vec{g}$ に対して，質量 m と重力加速度の大きさ g を用いて成分表示で表せ．
3) 垂直抗力 $\vec{N}$ に対して，垂直抗力の大きさ N を用いて成分表示で表せ．
4) ベクトル量を用いてこの物体に対する運動方程式を書け．　($\vec{a}$, $\vec{g}$, $\vec{N}$, m を使うこと)
5) 運動方程式の y 成分を解くことで，垂直抗力の大きさ N を質量 m と重力加速度の大きさ g (角度 θ も使う)を用いて表せ．
6) 運動方程式の x 成分を解くことで，加速度の大きさ a を質量 m と重力加速度の大きさ g (角度 θ も使う)を用いて表せ．

問 5-2-6.　図のように摩擦の効果がある斜面(角度 θ, 動摩擦係数 μ')上に質量 m の物体が加速度の大きさ $= a$ で斜面の下の方に動いている．図のように斜面と平行で上方を $+x$ 方向，斜面と鉛直上方を $+y$ 方向として下の問に答えよ．



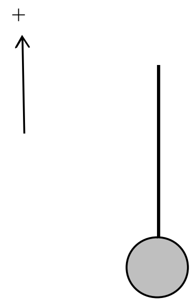
1) 上の図に重力 $\vec{W}$, 垂直抗力 $\vec{N}$, 動摩擦力 $\vec{F}'$ を矢印で表し，その矢印の近くに各々の力を表す記号($\vec{W}$, $\vec{N}$, $\vec{F}'$)を記せ．
2) 動摩擦力 $\vec{F}'$ に対して，動摩擦力の大きさ $= F'$ を用いて成分表示で表せ．
3) 動摩擦力の大きさ $= F'$ を垂直抗力の大きさ N を用いて表せ．
4) ベクトル量を用いてこの物体に対する運動方程式を書け．　($\vec{a}$, $\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}'$, m を使うこと)
5) 上の問 3)より，運動方程式の y 成分を示せ．
6) 上の問 3)より，運動方程式の x 成分を示せ．
(動摩擦力の大きさ F' を用いずに，垂直抗力の大きさ N と動摩擦係数 μ' を用いること)
7) 加速度の大きさ a を質量 m と重力加速度の大きさ g (角度 θ と動摩擦係数 μ' も使う)を用いて表せ．

問 5-2-7.　下のグラフは質量 $m = 5.0$ kg の物体が一直線上を運動しているときの v-t グラフである．物体の進行方向を+として下の問いに答えよ．



1) このグラフから加速度 a を 3 つの領域に分けて求めよ．
2) 問 1)の結果より a-t グラフを書け．
3) 問 1)の結果より，縦軸を物体にかかった力 F ，横軸を時刻 t とした F-t グラフを書け．

4) 時刻 $t = 0$ で物体の位置が原点にあったとすると，物体の位置 x と時刻 t との間の関係を表す x-t グラフを書け．



問 5-2-8. 糸に質量 $m = 0.5$ kg のおもりをつけて図のようにひっぱった．上向きを+方向とする．

1) この物体にかかる力は糸の張力(張力の大きさ T)と重力(重力の大きさ mg)が働いているが，これらの力を右の図に矢印を使って書き，そのそばに各々の物理量を表す記号を示せ．
2) おもりに発生する加速度 a として，おもりの運動に対する運動方程式を書け．
3) おもりが静止しているとき，糸にかかる張力の大きさ T を求めよ．
4) おもりが速さ 2.0 m/s の一定の速さで上げられている時，糸にかかる張力の大きさ T を求めよ．
5) おもりが速さ 3.0 m/s の一定の速さで下げられている時，糸にかかる張力の大きさ T を求めよ．
6) おもりが 2.0 m/s^2 の一定の加速度で上げられている時，糸にかかる張力の大きさ T を求めよ．
7) おもりが 3.0 m/s^2 の一定の加速度で下げられている時，糸にかかる張力の大きさ T を求めよ．

・ **注意 -第 1 法則と第 2 法則の関係について-**

物体に働く力 $\vec{F} = 0$ となる場合，運動方程式から，物体に生じる加速度 $\vec{a} = 0$ となる．加速度 $\vec{a}$ が 0 となるということは，等速度運動を表すので，第 2 法則は第 1 法則を含んでいると見なしがちである．しかし，第 1 法則で等速度運動が成立する時間・空間があるとする．その上で，第 2 法則が成立すると考えなければならない．

別な言い方をすると，第 1 法則では，(ものさしが存在すると仮定して)，時間を定める(←等速度運動から等時間間隔を定める)．そのような，時間と空間の性質を持った世界の中で第 2 法則が矛盾なく成立すると定める．

5-3. 第 3 法則(作用・反作用の法則)

対象とする系 ； 2 つの物体 A と B を考える．そして，物体 A と物体 B が互いに力を及ぼしあっている．

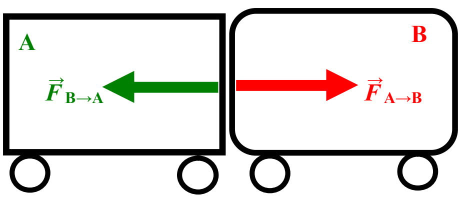
(B から)A へ与える力 ＝(B によって)A に働く力 ⇒ $\vec{F}_{B \to A}$ とする．

一方の力を作用と呼ぶと，もう一方の力は反作用と呼ばれる(逆でも可)．

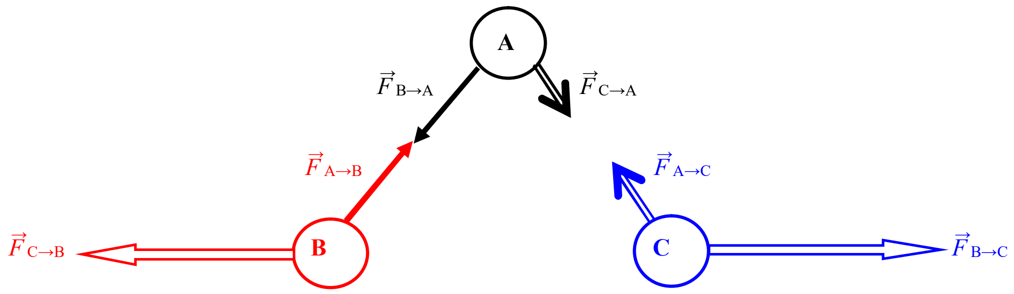
(A から)B へ与える力 ＝(A によって)B に働く力 ⇒ $\vec{F}_{A \to B}$ とする．

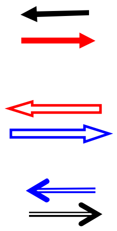
作用と反作用は下の関係式が成立する(作用と反作用は逆向きで同じ大きさとなる)．

$$\vec{F}_{B \to A} = -\vec{F}_{A \to B} \tag{5-3-1}$$



作用･反作用の法則は電気力のような離れた場所にある2つの物体の間[43]にもあてはまる．また，3つ以上の物体がある場合も同様に，各々の2物体間の作用･反作用の法則が同様に適用できる．例えば，A，B，Cの3つの物体がある場合は，下の図のようにAとB，BとC，CとAの間でそれぞれ，作用･反作用の力が存在する[44]．





AB間の作用･反作用の力($\vec{F}_{A\to B}$ と $\vec{F}_{B\to A}$)　　＜上の図では引力＞

BC間の作用･反作用の力($\vec{F}_{B\to C}$ と $\vec{F}_{C\to B}$)　　＜上の図では斥力(反発力)＞

CA間の作用･反作用の力($\vec{F}_{C\to A}$ と $\vec{F}_{A\to C}$)　　＜上の図では引力＞

全部で6つの力が3つの物体間に働いている．さらに多数の物体がある状況下でも，2つの物体間に働く力と同様に，各々の物体間に作用･反作用の力が存在する．上の図では結局，物体Aに働く力は2つの力 ($\vec{F}_{B\to A}$ (Bからの力) と $\vec{F}_{C\to A}$ (Cからの力))の合力となる．

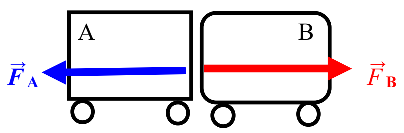
$$\text{物体 A にかかる力} = \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{C\to A} \tag{5-3-2}$$

この合力が物体Aに作用し，物体Aは下の式の運動方程式に従って運動する(ここで，m_A は物体Aの質量，$\vec{a}_A$ は物体Aに生じる加速度である)．

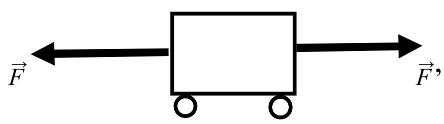
$$m_A \vec{a}_A = \text{物体 A に働く合力} = \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{C\to A} \tag{5-3-3}$$

・ **注意**　　**第1法則 と 第2法則 は「1つの物体」に対する法則であった．**
⇔　第3法則 は「2つの物体間」に対する法則である．
⇩
つり合いの関係にある2つの力も同じ大きさで逆向きの力であるが，この2つの力は**1つの物体に働く力**である．
一方，作用･反作用の力は**2つの物体間に働く力**である．

作用･反作用の力



つり合いの力

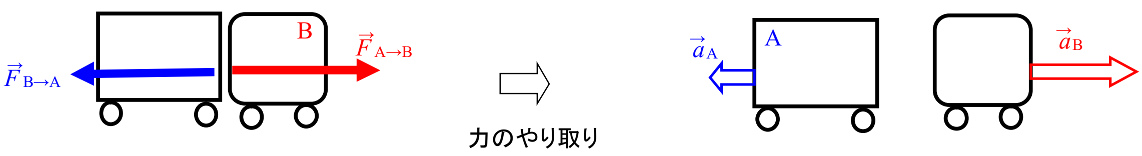


[43] 重力も遠距離間に働く力で，地球から(地上の)物体に働く力が重力となる．これを作用とすると，反作用は(地上の)物体が地球を引く力となる．地球の質量は(地上の物体と比べて)非常に大きいので地球は止まったままに見える．

[44] 2つの物体がお互いに力を及ぼしあうことを，「2つの物体間に相互作用がある」と表現することもある．

* **第 3 法則の別な意味　1**

質量 m_A と m_B となる 2 つの物体 A と物体 B があり，力をやり取りしている状況を考えよう. 2 つの物体間に働く力は「作用・反作用の法則」が成立している.



2 つの物体 A と B は，力を受けて加速度 $\vec{a}_A$ と $\vec{a}_B$ が発生する. 運動方程式と作用・反作用の法則から，「$\vec{F}_{B\to A} = m_A\,\vec{a}_A \;= -\,\vec{F}_{A\to B} = -\,m_B\,\vec{a}_B$」が成り立つ. 加速度が測定可能なので，発生する加速度の大きさの比を測定すると，間接的に下の式のように，質量比が測定できる.

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{m_A}{m_B} \qquad (5\text{-}3\text{-}4)$$

つまり，質量の基準を設定すれば，加速度の大きさを測定することにより質量を測定できることになる.

第 3 法則を用いて，質量の大小を定めることができる.　→　質量が測定可能となる.

* **第 3 法則の別な意味　2**

2 つの物体 A と物体 B に対し，「作用・反作用の法則」が成立しないと仮定する.

↓

A に働く力と物体 B に働く力は互いに逆向きとなっていない，または，大きさが異なる.

↓

A と B の全体を一体化させて考えると，A と B を合体させた物体に外から何も力をかけなくとも，2 つの物体があるだけで力が働き(合力 $\neq$ 0)，加速度が生じ，物体は動き始めてしまうことになる.

↓

この状況は空間，または時間が第 1 法則を破るような異常性がない限り，起こらない.

⇒　作用・反作用の法則は「空間(時間)が異常でない」ことを言っている.

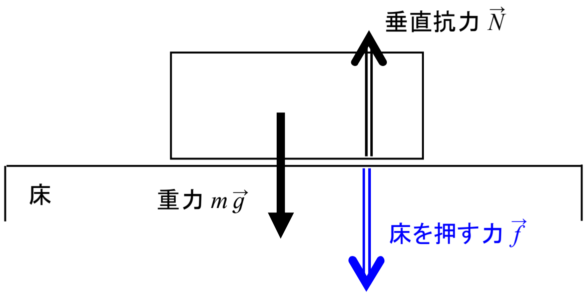
(空間が異常になることは，例えば，「ものさしが場所によって，変化する」ような場合である)

第 3 法則が成立するなら，「ものさし」の長さが場所によらず，一定となることを保証する!

→　第 1 法則の物理的意味と矛盾しない.

(第 1 法則では「ものさし」の長さが一定であることを仮定した)

例えば，質量 m の物体 A を下の図のように床の上に置く. その時，この 2 つの物体に働く力は下の図のようになる.



物体 A に働く力は重力 $m\vec{g}$ と床からの垂直抗力 $\vec{N}$ である．物体 A は止まったままなので，物体 A に働く合力は下の式のように 0 となる(重力 $m\vec{g}$ と垂直抗力 $\vec{N}$ はがつり合いの関係にある)．

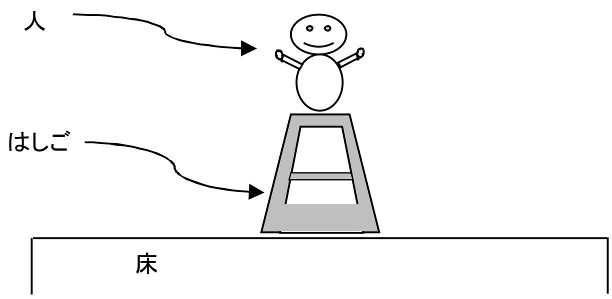
$$\text{物体 A にかかる合力} = m\vec{g} + \vec{N} = 0 \tag{5-3-5}$$

さらに，他の力としては物体 A が床を押す力 $\vec{f}$ がある．床を押す力 $\vec{f}$ と垂直抗力 $\vec{N}$ は 2 つの物体(物体 A と床)の間に働く力であり，作用・反作用の関係にある力である．これらの 2 つの力について，(5-3-1)式のような記号を用いると下の式のように表すことができる．

$$\begin{cases} \vec{N} = \text{(床が)物体 A を持ち上げている力} = \vec{F}_{\text{床}\to\text{A}} & (5\text{-}3\text{-}6) \\ \vec{f} = \text{(物体 A が)床を押す力} = \vec{F}_{\text{A}\to\text{床}} & (5\text{-}3\text{-}7) \end{cases}$$

問 5-3-1.　図のように床に質量 $m = 20$ kg のはしごを置き，その上に質量 $M = 40$ kg の人がのった．

1) 床(地球と一体化している)，はしご，人にかかる力について矢印を使って書き，その矢印の近くに力を表すベクトル記号を図に書き入れよ．
2) それらの力がどのような力かを書け．　(例；・・・にかかる重力，・・・を持ち上げている垂直抗力，・・など)
3) 作用・反作用の関係にある力の組を書き，それらがどの物体間に働く力なのかを書け．
4) つり合いの関係にある力の組を書き，それらがどの物体に働く力なのかを書け．
5) 上の問 1)であげた力の大きさ(数値と単位)と向きを示せ．

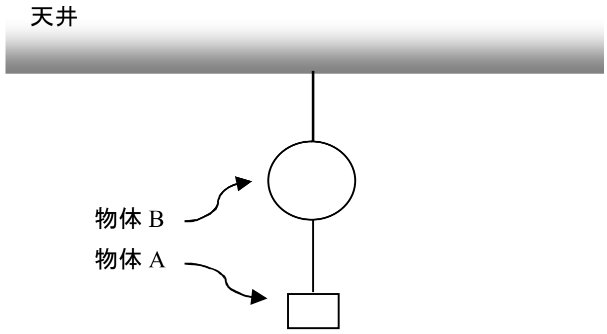


問 5-3-2.　図のように質量 $m_A = 0.5$ kg のおもり A と質量 $m_B = 2.0$ kg のおもり B に糸をつけ天井から，つり下げた．

1) 物体 A，物体 B に働く力を全てあげ，上の図に書き込み，それらの力を表すベクトル記号を図に書き入れよ．
2) それらの力がどのような力かを書け．
   (例；・・・にかかる重力，・・・を持ち上げている垂直抗力，・・・を引っ張る張力，・・ など)
3) 作用・反作用の関係にある力の組を書き，それらがどの物体間に働く力なのかを書け．
4) つり合いの関係にある力の組を書き，それらがどの物体に働く力なのかを書け．

5) 上の問 1)であげた力の大きさ(数値と単位)と向きを示せ.

6) 物体 A と物体 B の間にある糸を切ると，物体 A は落下する．この時，物体 A，物体 B に働く力をあげ，それぞれ力の大きさと向きを書け.

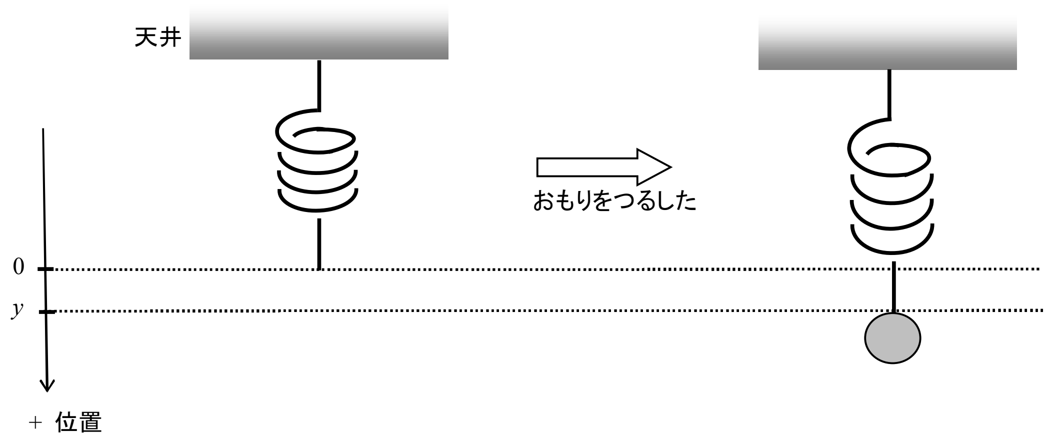


問 5-3-3. 図のようにばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつるして，静止させた．図のように下向きを$+y$ 方向とする．また，おもりをつけていない状態でばねの先端の位置を$y = 0$として，質量 m のおもりをつるした状態でばねの先端の位置を y とする.

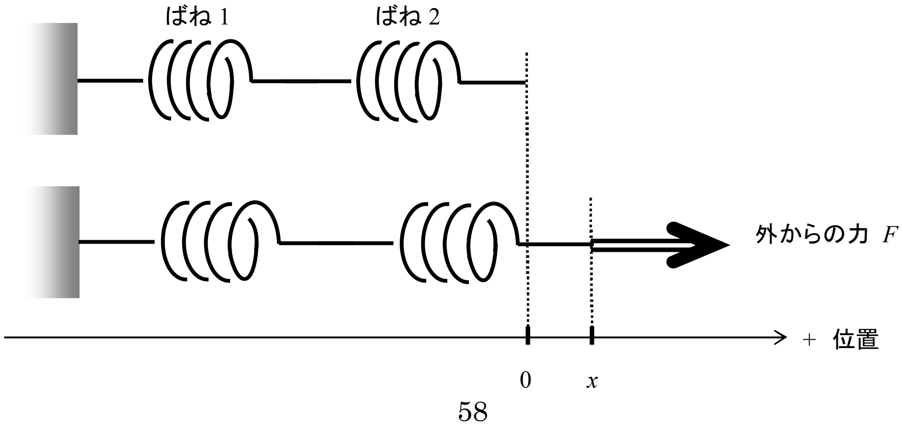
1) ばねにおもりをつるした時におもりに働く力を下の図に書け.

2) それらの力がどのような力かを言葉を用いて書け．さらに，それらの力の向きと大きさ(ばね定数 k，質量 m，ばねの伸びた位置 y，重力加速度の大きさ g)を書け.

3) 上の問 1)で答えた力はつり合いの関係にある力か? それとも作用・反作用の関係にある力か?

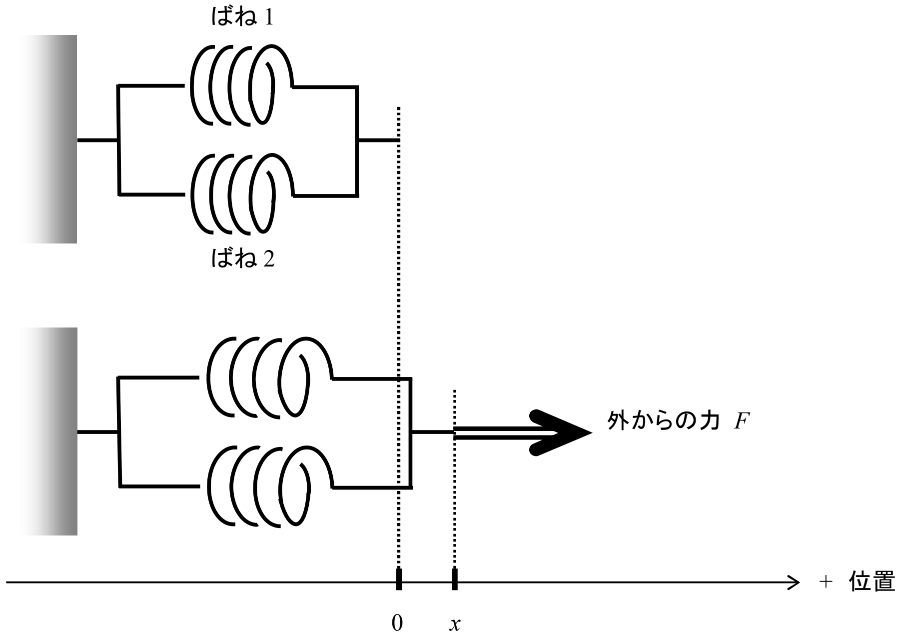


問 5-3-4. 図のようにばね定数 k_1 のばね 1 とばね定数 k_2 とばねを直列につないだ．このばねを右から力 F でひっぱり，全体を静止させた．ばね全体では変位 x だけ伸びた(ばね 1 の伸びを x_1，ばね 2 の伸びを x_2 とすると，$x = x_1 + x_2$ となる).



1) ばね 1 とばね 2 に働く力を図に書け.
2) それらの力がどのような力かを言葉を用いて書け.
3) それらの力が(どの物体から)どの物体に働く力なのかを書け.
4) 作用・反作用の関係にある力の組を書け.
5) つり合いの関係にある力の組を書け.
6) 直列につないだばね 1 とばね 2 を 1 つのばね(ばね定数 k で $F = k\ x$ を満たす)とみなすと, ばね定数 k をばね定数 k_1 とばね定数 k_2 を用いて表せ.

問 5-3-5. 図のようにばね定数 k_1 のばね 1 とばね定数 k_2 とばね 2 を並列につないだ. このばねを右から力 F でひっぱり, 全体を静止させた. ばね全体では変位 x だけ伸びた(ばね 1 の伸びを x_1 , ばね 2 の伸びを x_2 とすると, $x = x_1 = x_2$ となる).



1) ばね 1 とばね 2 に働く力を図に書け.
2) それらの力がどのような力かを言葉を用いて書け.
3) それらの力が(どの物体から)どの物体に働く力なのかを書け.
4) つり合いの関係にある力の組を書け.
5) 作用・反作用の関係にある力の組を書け.
6) 並列につないだばね 1 とばね 2 を 1 つのばね(ばね定数が k で $F = kx$ を満たす)とみなすと, ばね定数 k をばね定数 k_1 とばね定数 k_2を用いて表せ.

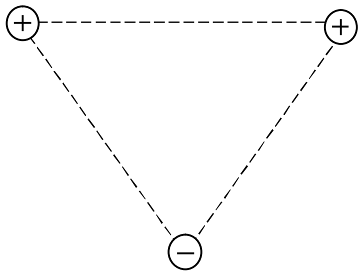
問 5-3-6. 正の同じ電気量を持つ 4 つの物体と負の電気量をもつ物体がある. 下のような状態で物体間に働く力を矢印(力の大きさは矢印の長さに比例する)で表せ.

(3 個の正の電気を 1 つに集めた物体内には力が働かないとする. →下の問 1)に関係する)

1) 正の電気を持つ 3 個の物体と 1 個の正の電気を持つ 2 つの物体

2) 1 個の正の電気を持つ物体と 1 個の負の電気を持つ 2 つの物体

3)　1個の正の電気を持つ物体，1個の正の電気を持つ物体，1個の負の電気を持つ3つの物体(3つの物体は正三角形の頂点においた)



5-4. 運動方程式の応用

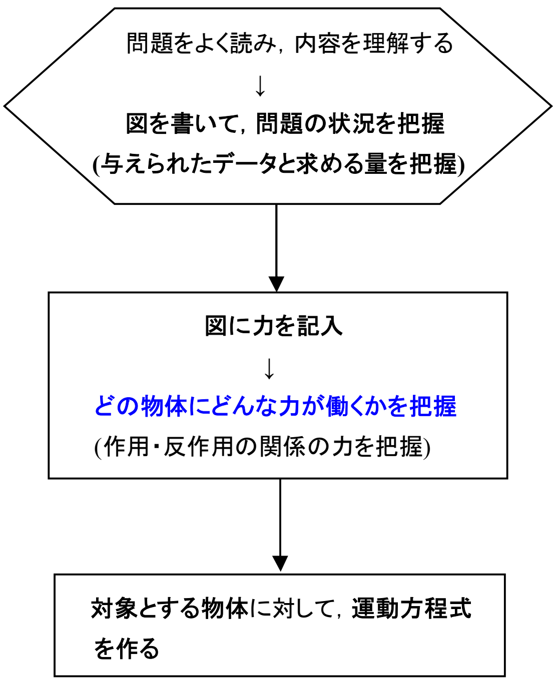
物体の運動の様子を解析するためには，下の手順に従って行う．

① 運動方程式を立てる．　→　② 運動方程式を解き，物体に生じる加速度を求める．　→
③ 加速度から，速度と位置を計算する．　→　④ グラフ等を作成し，運動に関するイメージを作る．

この節では，上に上げた①～④のうちで，①と②について(特に①)注目し，その方法を学習する．また，ここでは，2 つ以上の物体がある場合について扱い，第3法則(作用・反作用の法則)と第2法則(運動の法則)を組み合わせる方法について練習する．

・ 運動方程式の作り方

運動方程式の作るために，下のような手順で行うとよい．

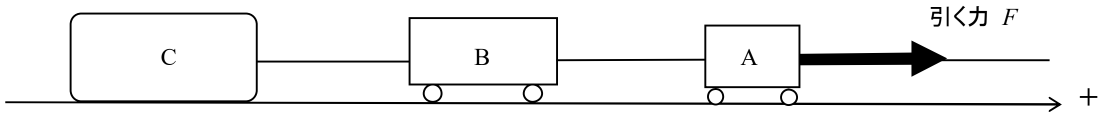


(5-2-1)式で示した運動方程式に対し，言葉を使って書くと下のような式となる．

対象とする物体にかかる合力 ＝ 対象とする物体の質量 × その物体に生じる加速度 (5-4-1)

物体が複数個(N個)ある場合はN個の運動方程式(1 個の物体に対して 1 個の運動方程式ができる)が立てられる．その場合は，物体間に働く作用・反作用の法則も考慮しながら，N 個の運動方程式を解くこととなる．例題を使って上の流れ図による扱い方を説明する．

・ **例題 1** 図のように質量 m，$2m$，$3m$ の物体 A，物体 B，物体 C がある．物体 C だけ床に直についているので摩擦(動摩擦係数 $=\mu$')の影響を受けている．物体 A を水平方向に力 F でひっぱった時，に物体 A，B，C に生じる加速度 a を求めよ．



解答

① 物体 A, B, C は糸でつながっているので同じ加速度 a となる(加速度の向きは外からの力と同じ右向き).

② 運動に関係するのは水平方向のみなので，鉛直方向の運動は考えない．

③ 各物体に働く力を考える．

物体 A； 外から引かれる力 $=F$

糸を介して B から引かれる力 ＝AB 間の糸の張力 $=T_{B\to A}$

物体 B； 糸を介して B から引かれる力 ＝AB 間の糸の張力 $=T_{A\to B}$ (← $T_{B\to A}$ と作用・反作用の力)

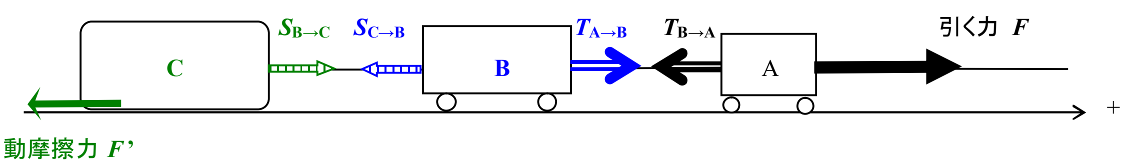
糸を介して C から引かれる力 ＝BC 間の糸の張力 $=S_{C\to B}$

物体 C； 糸を介して B から引かれる力 ＝BC 間の糸の張力 $=S_{B\to C}$ (← $S_{C\to B}$ と作用・反作用の力)

動摩擦力 $=-F' =-\mu' N_C =-\mu' m_C g$ (← 動摩擦力は負の値) (5-4-2)

(N_C ＝ 物体 C での垂直抗力の大きさ $=m_C g$ ← 物体 C は水平に置かれているから)
(m_C ＝ 物体 C の質量 $=3m$)

④ 図に力を記入する(図には力の大きさを示し，運動方程式で正負を与える).



⑤ 作用・反作用の関係にある力の組を調べる.

・ AB 間 → $T_{B\to A}$ と $T_{A\to B}$ → $T_{B\to A} = T_{A\to B}$ (同じ大きさ, 逆向き) (5-4-3)

・ BC 間 → $\boldsymbol{S}_{C\to B}$ と $S_{B\to C}$ → $\boldsymbol{S}_{C\to B} = S_{B\to C}$ (同じ大きさ, 逆向き) (5-4-4)

⑥ 運動方程式を立てる.

物体 A; $m\,a$ = A に働く合力 $= F + (-T_{B\to A})$ (5-4-5)

物体 B; $2m\,a$ = B に働く合力 $= T_{A\to B} + (-S_{C\to B})$ (5-4-6)

物体 C; $3m\,a$ = C に働く合力 $= S_{B\to C} + (-F')$ (5-4-7)

⑦ 運動方程式を解く.

上の 3 つの式の和をとる.

左辺 $= m\,a + 2m\,a + 3m\,a = 6m\,a$

右辺 $= F - T_{B\to A} + T_{A\to B} - S_{C\to B} + S_{B\to C} + (-F')$ ← (5-4-3)式と(5-4-4)式を用いると, 第 2 項と第 3 項及び第 4 項と第 5 項は互いに消去.

$= F + (-F')$ ← F' は(5-4-2)式を代入する.

$= F - \mu' 3m\,g$

⇒ 左辺 = 右辺 より, $6m\,a = F - \mu' 3m\,g$ (5-4-8)

⑧ 加速度 a を求める.

上の式より

$\boldsymbol{a = F/(6m) - \mu' g/2}$ ← **解** (5-4-9)

⑨ 上で求めた解が常識的に正しい解かどうか確かめる. → 上の解で, もし動摩擦力がないなら, $\mu' = 0$ となり,

$$a = \frac{F}{6m}$$

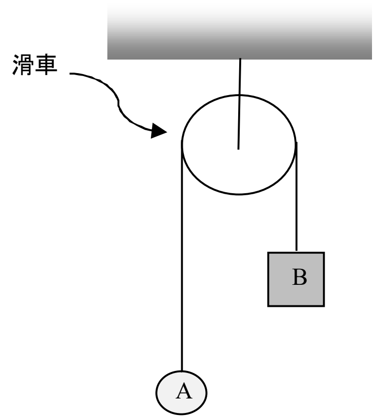
となる. これは, 物体 A, B, C を合体させて(全質量 $= 6m$), それを外からの力 F で引いた時に生じる加速度に相当する. → 常識と矛盾しない

また, 加速度 a が正になるためには外から引く力 F は下の不等式を満たさなければならない.

$F > \mu' 3m\,g$ (5-4-10)

これは, 引く力 F が動摩擦力($F' = \mu' m_C\,g$)より大きくなければならないことを意味する → 常識と矛盾しない.

・ **例題 2** 図のように質量 m と $3m$ の物体 A と物体 B が質量の無視できる滑車を介して糸で結ばれている. 物体 A と物体 B に生じる加速度の大きさ a を求めよ.



解答

① 計算しなくとも，常識的にわかることとしては，物体 B の質量の方物体 A より大きいので物体 B が下方へ落ちる．

→ 加速度の向き ＝ 物体 B の下方向 = 物体 A の上方向 → +方向と定める．

・ 滑車の役割

(1) 運動の向きを変える． → 滑車の影響を考慮して，+方向を定める．

(2) 滑車を介して，物体 A と物体 B の間で力のやりとりを行う．

② 滑車を介して，物体 A から物体 B へ向かう向きを+方向と定める．

→ 物体 A と物体 B の運動の向きは同じ(物体 A の加速度 ＝ 物体 B の加速度 $= a$)

③ 各々の物体に働く力を考える．

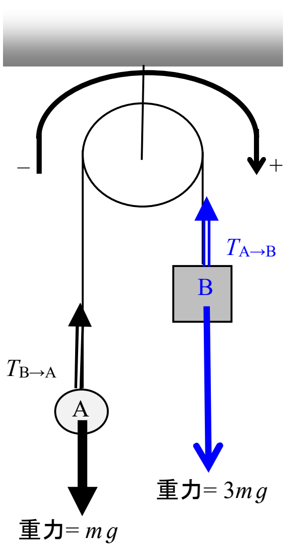
物体 A； 重力 $= m_A g = mg$ (← 物体 A の鉛直下方向の向きは負)

滑車を介して物体 B から引かれる力 ＝ 糸の張力 $= T_{B\to A}$

物体 B； 滑車を介して物体 A から引かれる力 ＝ 糸の張力 $= T_{A\to B}$ ($T_{B\to A}$ と作用・反作用の関係)

重力 $= m_B g = 3mg$ (← 物体 B の鉛直下方向の向きは正)

④ 図に力と運動の向きを記入する．



⑤ 作用・反作用の関係にある力の組を調べる.

・ (滑車を介して)物体 A と物体 B の間 → $T_{B \to A} = T_{A \to B}$ (5-4-11)

⑥ 運動方程式を立てる.

物体 A; $m\,a =$ A に働く合力 $= -m\,g + T_{B \to A}$ (5-4-12)

物体 B; $3m\,a =$ B に働く合力 $= 3m\,g + (-T_{A \to B})$ (5-4-13)

⑦ 運動方程式を解き, 加速度 a を求める.

(5-4-12)式と(5-4-13)式を足す.

$m\,a + 3m\,a = -m\,g + T_{B \to A} + 3m\,g + (-T_{A \to B})$

↓ まとめると

$4m\,a = 2m\,g + T_{B \to A} - T_{A \to B}$

↓ (5-4-11)式を用いて

$4m\,a = 2m\,g$

↓

$a = g/2$ (5-4-14)

⑧ 上で求めた解が常識的に正しい解かどうか確かめる.

加速度 a が予想通り, 正の値として求められた → OK

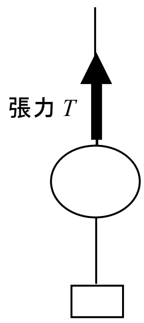
加速度 a の値が自由落下よりも小さな値をとることがわかった → OK

(自由落下の加速度 = 重力加速度 $= g$ よりも大きな加速度となるのは常識はずれ!)

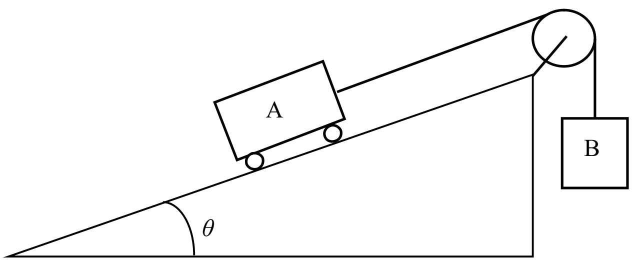
問 5-4-1. 質量 $m_A = 3.0$ kg の物体 A と質量 $m_B = 2.0$ k g の物体 B を糸でつなぎ, 物体 A の上につけた糸を張力 $T = 59$ N の力で引き上げた.

1) 2 つの物体に生じる加速度 a を求めよ.

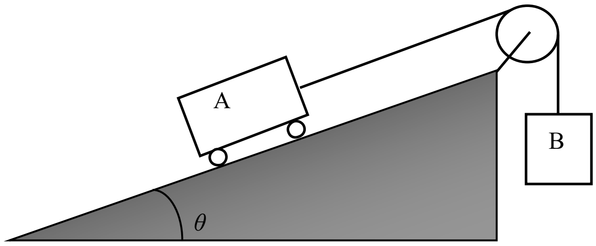
2) AB 間に働く糸の張力 S を求めよ.



問 5-4-2. 図のように摩擦のない水平からの角度 θ の斜面上に質量 m_A の物体 A と質量 m_B の物体 B が滑車をとおり糸で結ばれている. 物体 A が斜面に沿って上っていった時, 物体 A と物体 B に生じる加速度の大きさを求めよ.

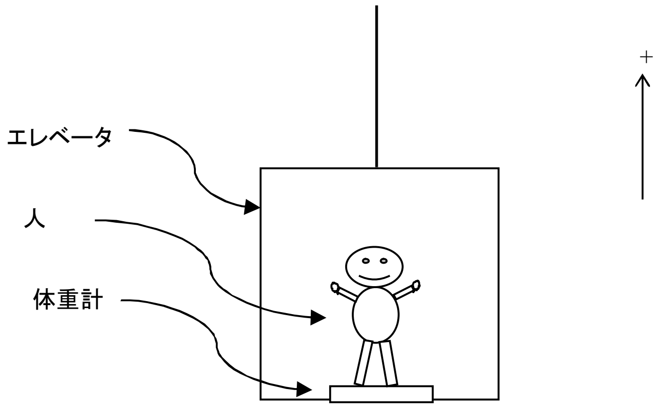


問 5-4-3. 図のように摩擦のある角度 θ の斜面上に図のように質量 m_A の物体 A と質量 m_B の物体 B が滑車をとおって糸で結ばれている. 物体 A が斜面を下っていった時, 物体 A と物体 B に生じる加速度の大きさ a を求めよ(物体 A は斜面と水平に糸がついている. また, 物体 A と斜面間の動摩擦係数を μ' とする).

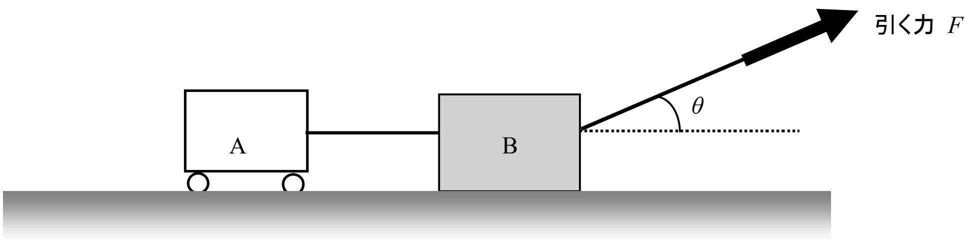


問 5-4-4.　図のように質量 $M = 200$ kg のエレベータの中に質量 $m = 50$ kg の人が体重計に乗っている(体重計はエレベータに埋め込まれていて，エレベータの質量に含まれている).

1) エレベータが一定の速さ $v = 4.0$ m/s で上がっている時，体重計の目盛はどのような数値になっているか?
2) エレベータが一定の加速度 $a = 4.0$ m/s^2 で上がっている時，体重計の目盛はどのような数値になっているか?
3) エレベータが一定の加速度 $a = -4.0$ m/s^2 で下がっている時，体重計の目盛はどのような数値になっているか?



問 5-4-5.　図のように，車輪のついている質量 m_A の物体 A と底がギザギザしている質量 m_B の物体 B がある．物体 B を水平から角度 θ だけ上向きに力の大きさ F で引っ張ったらある加速度 a で 2 つの物体は動いた(物体 B と床の動摩擦係数を μ'とする．物体 A と床の間には摩擦の影響がない)．この加速度 a を求めよ.



問 5-4-6.　図のように，車輪のついている質量 m_A の物体 A と質量 m_B の物体 B をばね定数 k のばねで結び，物体 B を力の大きさ F で引っ張ったらある加速度で 2 つの物体は動いた.

1) 生じる加速度 a を求めよ.
2) 物体が動き始める前に比べて，動いている状態で物体 A と物体 B の間の距離はどの位伸びるか?