3. 仕事とエネルギー

2章では，力学(物理学)の基本法則である「ニュートンが提案した3つの運動の法則」を示した．この3つの運動の法則は，物体の運動と物体に働く力の関係を表したものである．この章では，物体の運動について調べる別な方法として，「仕事とエネルギー」の観点から，物体の運動について調べる．「力学的エネルギー保存の法則」はニュートンが提案した運動の第2法則(運動方程式)から導かれた法則であるが，状況によっては，運動方程式を解析した調べるより，「力学的エネルギー保存則」を適用した方が，運動の性質を調べるのが容易となる．

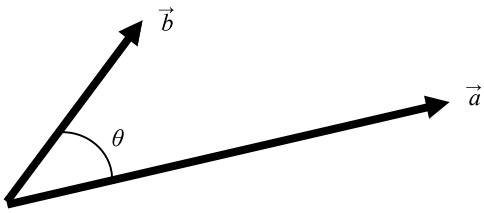
3-1.　ベクトルの内積

仕事を求める際，その計算に，「ベクトルの内積」が用いられる．ここでは，最初にベクトルの内積について復習する．

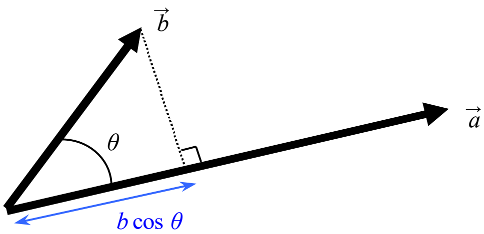
＊ ベクトルの内積の定義

$\vec{a}$と$\vec{b}$のベクトルの内積は記号「 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 」と表し，2 つのベクトルをドット(・)ではさむ．2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積は，$\vec{a}$と$\vec{b}$の間の角度 θ [1]とすると，下の式のように 2 つのベクトルの大きさとその間の角の余弦との積として定義する．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\theta = a\,b\cos\theta \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$



＊ 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の意味



① $\vec{b}$を$\vec{a}$に対し垂線を下ろして，重ねる．

② その重なった長さが $b\cos\theta$ となる．

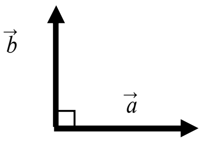
③ $\vec{a}$ の長さと上の操作での重なった長さ $b\cos\theta$ との積をとる．

ベクトルの内積　→　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = ($\vec{a}$の長さ)×($\vec{b}$の長さ)×(重なっている部分の割合(逆向きなら負の値))

(2 つのベクトルが重ねっている割合 $= \cos\theta$)

[1] 2 つのベクトルの間の角とは 2 つのベクトルの始点を一致させて，その 2 つのベクトルではさんだ角度を指す．間の角 θ の範囲は $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である(θ が 180°を越えそうに見える場合は，逆側の角度(180°を越えそうに見える反対側)を採用すること)．

＊ $\vec{a}$と$\vec{b}$が直角に交わる(直交する)場合



$\vec{a}$と$\vec{b}$が直交　⟺　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ (3-1-2)

2 つのベクトルの内積の定義式である(3-1-1)式から，2 つのベクトルの間の角 θ の範囲で内積の正負が決まる.

$$\begin{cases} 0^\circ \leqq \theta < 90^\circ & \rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} \ \text{は正の値} \\ \theta = 90^\circ & \rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \\ 90^\circ < \theta \leqq 180^\circ & \rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} \ \text{は負の値} \end{cases}$$

＊ 内積の性質

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a\,b\cos\theta$$ (交換則 (内積はかけ算の順序によらない)) (3-1-3)

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$ (分配則) (3-1-4)

$$\vec{a}\cdot(m\,\vec{b}) = (m\,\vec{a})\cdot\vec{b} = m\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$ (m はスカラー量) (3-1-5)

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$$ (同じベクトルの内積) (3-1-6)

＊ 単位ベクトルどうしの内積

単位ベクトルの間で内積を計算すると，下のような関係式(直交性の関係式)が成り立つ.

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = |\vec{e}_x|\times|\vec{e}_x|\times\cos 0^\circ = |\vec{e}_x|^2 = 1\times 1 = 1 \quad (3\text{-}1\text{-}7)$$

$$\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = |\vec{e}_y|\times|\vec{e}_y|\times\cos 0^\circ = |\vec{e}_y|^2 = 1\times 1 = 1 \quad (3\text{-}1\text{-}8)$$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = |\vec{e}_x|\times|\vec{e}_y|\times\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0 \quad (3\text{-}1\text{-}9)$$

上の関係式を使い，$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$ と $\vec{b} = b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y$ の内積をとると，下の式のように x 成分どうしの積と y 成分どうしの積との和として計算される.

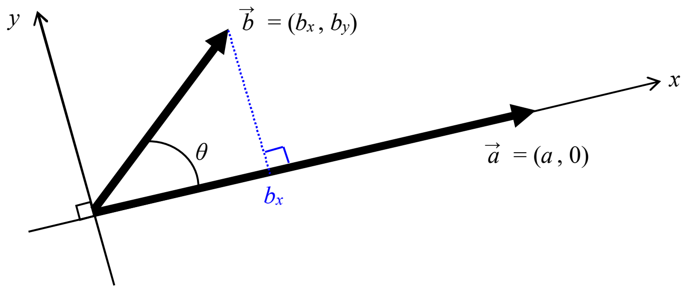
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y)\cdot(b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y) = a_x\,\vec{e}_x\cdot(b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y) + a_y\,\vec{e}_y\cdot(b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y)$$

$$= a_x b_x\,\underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x)}_{1} + a_x b_y\,\underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y)}_{0} + a_y b_x\,\underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x)}_{0} + a_y b_y\,\underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y)}_{1}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y = x\ \text{成分どうしの積} + y\ \text{成分どうしの積} \quad (3\text{-}1\text{-}10)$$

＊ (3-1-1)式と(3-1-10)式が一致することの確認

(3-1-1)式の図において$\vec{a}$の向きに x 軸をとる [2].



(3-1-1)式 $\rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\theta = a\,b\,\dfrac{b_x}{b} = a\,b_x$

(3-1-10)式 $\rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a\,,0)\cdot(b_x\,,b_y) = a\,b_x + 0 = a\,b_x$ $\rightarrow$ 2 つの式は一致する

問題 3-1 2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を求めよ($\vec{a}$と$\vec{b}$の間の角を θ とする).

1) $|\vec{a}| = 2,\ \ |\vec{b}| = 3,\ \ \theta = 30°$　　2) $|\vec{a}| = 2^{1/2},\ \ |\vec{b}| = 4,\ \ \theta = 135°$

3) $|\vec{a}| = 2,\ \ |\vec{b}| = 4,\ \ \theta = 5\pi/6$　　4) $|\vec{a}| = 1,\ \ |\vec{b}| = 4,\ \ \theta = 2\pi/3$

問題 3-2 次のベクトルの内積と 2 つのベクトルの間の角 θ を求めよ.

1) $\vec{a} = (1\,,3)$　$\vec{b} = (4\,,2)$　　2) $\vec{a} = (1\,,2)$　$\vec{b} = (1\,,-3)$

3) $\vec{a} = (2\,,3)$　$\vec{b} = (-2\,,-3)$　　4) [3*] $\vec{a} = (1\,,1)$　$\vec{b} = (1\,,\sqrt{3})$

問題 3-3 次のベクトルと直交する単位ベクトルを求めよ.

1) $(-4\,,3)$　　2) $(1\,,-2)$　　3) $(\sqrt{3}\,,1)$

問題 3-4 $\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}$, $\vec{b} = 3\vec{x} + \vec{y}$で, $|\vec{x}| = 2$, $|\vec{y}| = 1$, $\vec{x}\cdot\vec{y} = -1/2$ のとき, 次の値を求めよ.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　2) $|\vec{a}|$　　3) $|\vec{a} - \vec{b}|$　　4) $|\vec{a} + \vec{b}|^2$　　5) $(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + 3\vec{b})$

[2] x 方向の取り方は自由である. なぜなら, 物理現象は軸の取り方によらないからである. ただし, y 軸は x 軸と直交するように選ぶと便利である.

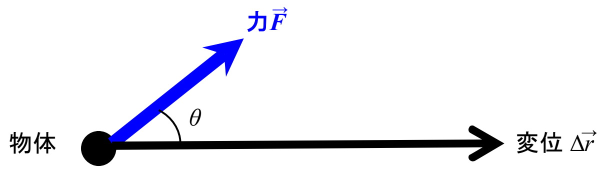
[3] ＊ 少し難しいので省略してもよい(三角関数の加法定理を用いる).

3-2.　仕事(Work)

物理学では，物体に力を加えて，位置を移動させたとき，「その力が物体に仕事をした」と呼ぶ．この節では，仕事(仕事量)を計算する方法について学ぶ．

*　一定の力が作用している場合

ある物体に一定の力$\vec{F}$を作用させ，物体の位置を$\vec{r}_0$ から$\vec{r}_1$ まで移動(変位 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$)させたときに，この力がした仕事(仕事量)$W$を下の式のように，力と変位の内積で定義する．



$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F\Delta r\ \cos\theta \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

上の式で，力の大きさ$F=|\vec{F}|$，変位の大きさ(移動距離) $\Delta r=|\Delta\vec{r}|$，力と変位の間の角度θとした．さらに，2 つのベクトルを成分表示して(ここでは，2 次元とする)表すと，力$\vec{F}=(F_x\,,F_y)$，変位$\Delta\vec{r}=(\Delta x\,,\Delta y)$ と表すことができるので，仕事Wは内積の成分表示を用いて下の式でも表すことができる．

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F_x\Delta x+F_y\Delta y \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

*　仕事の単位

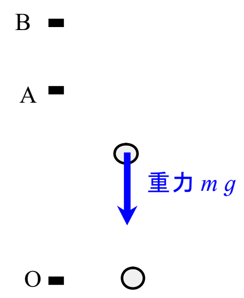
力の大きさ$F=1$ N の力で，物体を力と同じ向きに(角度$\theta=0$)，変位の大きさ(移動距離) $\Delta r=1$ m 動かしたときにした仕事Wを **1 J(ジュール)**と定義する．仕事の定義式である(3-2-1)式より，J(ジュール)は他の単位を用いて下の式で表すことができ，複合単位の 1 つである．

$$1\ \mathbf{J}=1\ \mathrm{N}\cdot1\ \mathrm{m}=1\ \mathbf{N\ m}=1\ \mathrm{kg\ m/s^2}\cdot\mathrm{m}=1\ \mathbf{kg\ m^2/s^2} \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

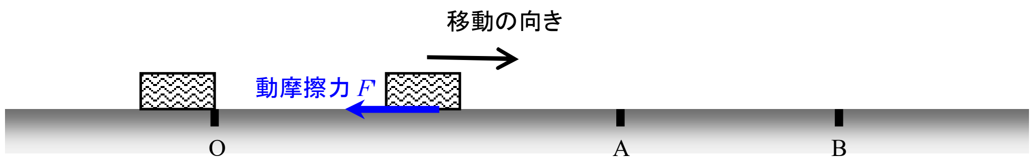
問題 3-5　始め，位置$\vec{r}_0=(3.0\,,4.0)$ m にいた物体に力$\vec{F}=(\,2.0\,,-3.0)$ N を加えたところ，位置$\vec{r}_1=(\,5.0\,,2.0)$ m に達した．この力がした仕事Wを求めよ．

問題　3-6　物体に力の大きさF= 4.0 N を加え，力の向きから角度 θ = 120 °となる向きに距離 Δr = 6.0 m 移動させた．この力がした仕事 W を求めよ．

問題　3-7　図のように，質量 m の物体を鉛直方向に点 O から点 A へ 2 つの経路で動かした．1 番目の経路は，「点 O → 点 A」で，2 番目の経路は，「点 O → 点 B → 点 A」となる経路である．OA 間の距離 a，AB 間の距離 b，重力加速度の大きさ g を用いて，1 番目の経路で重力がした仕事 W_1 と 2 番目の経路で重力がした仕事 W_2 を求めよ．



問題　3-8　図のように，摩擦の影響がある面上に質量 m の物体があり，この物体の右の先端を点 O から点 A へ 2 つの経路で動かした．1 番目の経路は，「点 O → 点 A」で，2 番目の経路は，「点 O → 点 B → 点 A」となる経路である．OA 間の距離 a，AB 間の距離 b，動摩擦係数 μ'，重力加速度の大きさ g を用いて，1 番目の経路で動摩擦力 F'のした仕事 W_1 と 2 番目の経路で動摩擦力のした仕事 W_2 を求めよ．



***　一定でない力が作用している場合(力が物体の位置に依存している場合)**

ある物体に位置$\vec{r}$に依存する力$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ を作用させ，物体の位置を$\vec{r}_0$ から$\vec{r}_1$ まで移動させたとき，この力がした仕事(仕事量)Wを求めてみよう．物体の位置を$\vec{r}$から$\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$だけの微小変位 $d\vec{r}$だけ動かしている間，力はほぼ一定とみなすことができ，その間の力がした微小仕事 dW は下の式で表すことができる．

$$\mathrm{d}W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{3-2-4}$$

一般には，力$\vec{F}$と微小変位 d$\vec{r}$の間の角度 θ が「$\theta = \theta(\vec{r})$」と位置$\vec{r}$の関数となっており，微小仕事 dW は力の大きさ F と微小変位の大きさ dr を用いて下の式で表すことができる(力の大きさ F も位置の関数となる)．

$$\mathrm{d}W = F \cos\theta\, \mathrm{d}r \tag{3-2-5}$$

平面(2 次元)上を運動する場合，成分表示では，力と微小変位「$\vec{F} = (F_x(\vec{r})\,,\, F_y(\vec{r}))$」，「$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x\,,\,\mathrm{d}y)$」と表すことができるので，微小

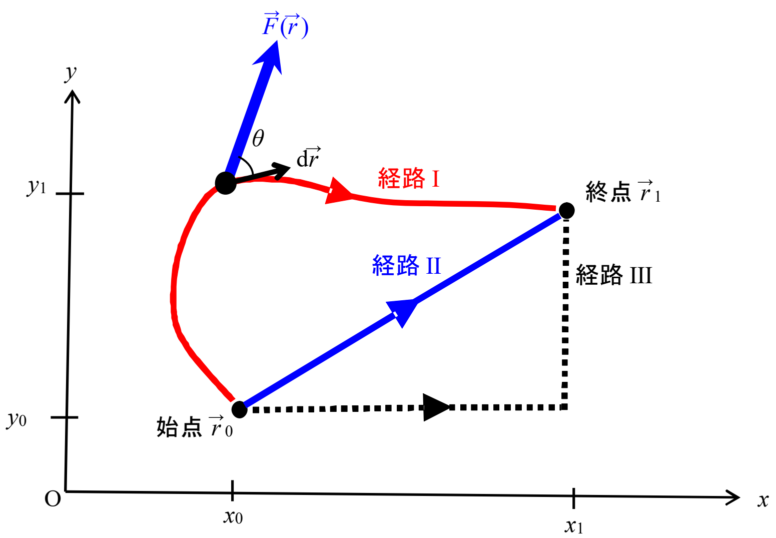
仕事 dW は下の式で表すことができる.

$$\mathrm{d}W = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y \tag{3-2-6}$$

物体の位置を始点$\vec{r}_0$から終点$\vec{r}_1$まで移動させたとき，この力がした仕事 W は，上の(3-2-5)式，または(3-2-6)式を積分して求める. 積分する場合，その値は始点から終点までの移動経路による. 経路による積分(この積分は経路の曲線によるので線積分と呼ばれる)は下の式のように表すことができる. 下の図の例のように，始点$\vec{r}_0$から終点$\vec{r}_1$までの移動経路はいくつも存在する.

$$W_{\text{経路}} = \int_{(\text{経路})\ (\text{始点})}^{(\text{終点})} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(\text{経路})\ (\text{始点})}^{(\text{終点})} F\cos\theta\,\mathrm{d}r \tag{3-2-7}$$

$$= \int_{(\text{経路})\ (\text{始点})}^{(\text{終点})} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y) = \int_{(\text{経路})\ x_0}^{x_1} F_x\,\mathrm{d}x + \int_{(\text{経路})\ y_0}^{y_1} F_y\,\mathrm{d}y \tag{3-2-8}$$



問題 3-9　直線上を動く物体がある. 物体の位置 x [m]とする. 始め，物体は $x_0 = 3.0$ m にいたが，外から力 $F = 3x^2$ [N]を受けて位置 $x_1 = -2.0$ m となった. この力が物体にした仕事 W を求めよ.

問題 3-10　物体の位置$\vec{r} = (x, y)$ [m]とする. 始め，位置$\vec{r}_0 = (2.0, 1.0)$ m にいた物体に力$\vec{F} = (2x, -3y^2)$ [N] を加えて，上の図の経路 III で動かしたところ，位置$\vec{r}_1 = (6.0, 3.0)$ m に達した. この力がした仕事 W_{III} を求めよ. さらに，経路 II で動かしたところ，その仕事 W_{II} が経路 III での結果と同じ値になることを確認せよ(経路 II は「$y = x/2$」に従う).

問題 3-11　物体の位置$\vec{r} = (x, y)$ [m]とする．始め，位置$\vec{r}_0 = (2.0, 1.0)$ m にいた物体に力$\vec{F} = (3x^2, -6xy)$ [N] を加えて，上の図の経路 III で動かしたところ，位置$\vec{r}_1 = (6.0, 3.0)$ m に達した．この力がした仕事 W_{III}と経路 II で動かしたときの仕事 W_{II}を求め，2 つの結果と違う値になることを確認せよ(経路 III は 2 つの過程からなり，経路 II では「$y = x/2$」となる条件に従う)．

*　**仕事率(Power)**

物体に力を加え，仕事 W をしたとしよう．そのとき，同じ仕事量でも，その仕事に要した時間 t によって，仕事の効率，すなわち**「1 秒間当たりの仕事量(仕事率)」**が異なる．仕事率 P は，下の式で表すことができる．

$$P = \frac{W}{t} \tag{3-2-9}$$

また，微小時間 $\mathrm{d}t$ の間にある力が微小仕事 $\mathrm{d}W$ を行ったとすると，その仕事率は下の式のように仕事の時間微分として表すことができる．

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{3-2-9)'$$

*　仕事率の単位

時間 $t = 1$ s の間に仕事量 $W = 1$ J の仕事をしたときの仕事率 P を**1 W(ワット)**と定義する．仕事率の定義式である(3-2-9)式より，W(ワット)は他の単位を用いて下の式で表すことができる．W(ワット)も複合単位の 1 つである．

$$1\ \mathbf{W} = \frac{1\ \mathrm{J(ジュール)}}{1\ \mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathbf{J/s} = 1\ (\mathrm{kg\ m^2/s^2})/\mathrm{s} = 1\ \mathrm{kg\ m^2/s^3} \tag{3-2-10}$$

問題　3-12　物体に力$\vec{F}$が作用していて，ある時刻 t において速度$\vec{v}$で動いているとする．この力が物体に与えている仕事率 P を求めよ．

3-3.　エネルギー(Energy)

物理学において，**「エネルギーは，他の物体に対して，どれくらいの仕事をすることができるのか？ その能力」**と定義している．

エネルギーは様々な形態があるが，力学においては，**「運動している物体が持っている運動エネルギー(Kinetic Energy)」**と**「物体がある位置にあることで持っている位置エネルギー(Potential Energy(ポテンシャルエネルギー))」**がある．2 つのエネルギーを合わせたエネルギーを**「力学的エネルギー(Mechanical Energy)」**と呼ぶ．この節では，始めに「運動エネルギー」について，次に「位置エネルギー」について学ぶ．

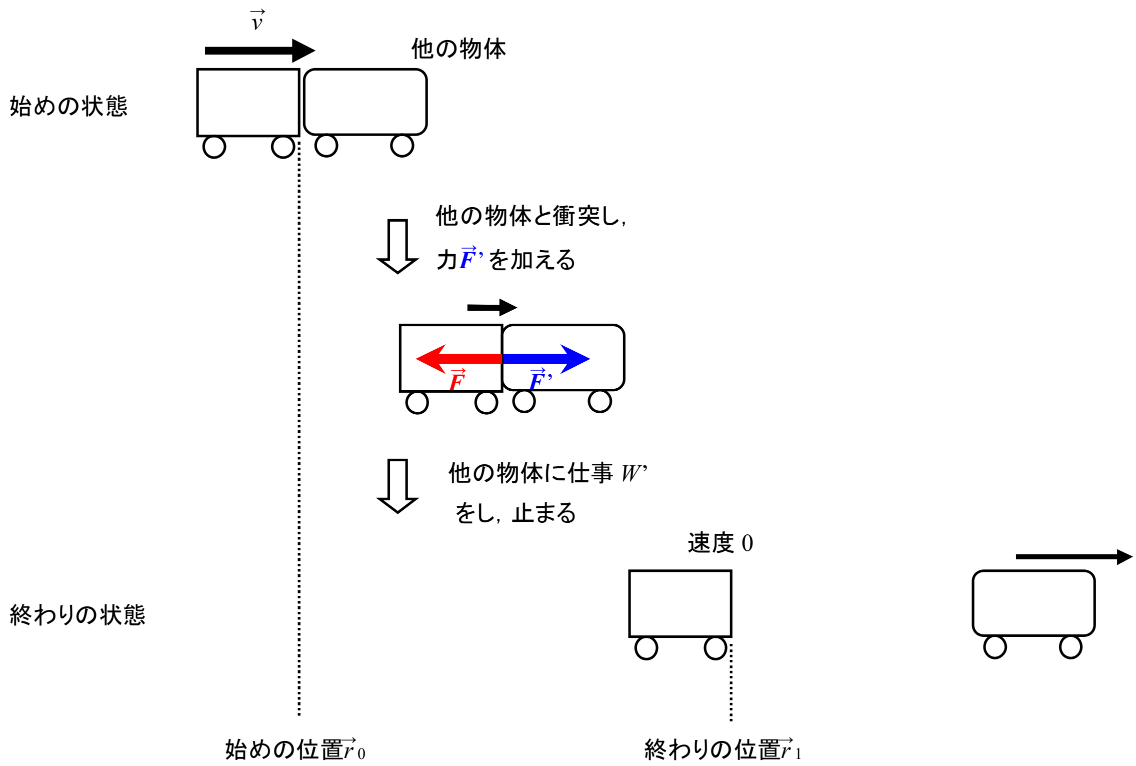
1) 運動エネルギー(Kinetic Energy)

質量 m の物体が速度 $\vec{v}$ で運動しているとする．この物体が速度 $\vec{v}$ から静止($\vec{v}=0$)するまでに，他の物体にした仕事量が，速度 $\vec{v}$ の状態において，この物体が持っていた**運動エネルギー K** と呼ぶ．ここでは，まず，運動エネルギー K を表す式を示し，次にその式を定義式にそって導出しよう．

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

* 運動エネルギーを表す(3-3-1)式の導出

下の図のように，質量 m の物体が，始めの時刻 t_0 で，位置 $\vec{r}_0$，速度 $\vec{v}$ で運動しているとする．その後，この物体は他の物体に衝突して，その物体に力 $\vec{F}'$ を加え，仕事 W' を与えて，終わりの時刻 t_1 において，位置 $\vec{r}_1$，速度 0 になったとしよう．



他の物体が受けた力は $\vec{F}'$ である．作用・反作用の法則より，「 $\vec{F}' = -\vec{F}$ 」が成立する．さらに，質量 m の物体で成立する運動方

程式は「$m\,\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{F}$」を満たす．これらの関係を用いると，位置が$\vec{r}_0$ から$\vec{r}_1$ になるまで，他の物体に力を加えて，他の物体にした仕事 W' は下の式のように求めることができる．

$$W' = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}' \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\ \mathrm{d}t\ \text{を用いて})$$

$$= -m\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\ \mathrm{d}t = -m\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\cdot\vec{v})\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,m\int_{(\vec{v})}^{(\vec{v}=0)} \mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = -\frac{1}{2}\,m\{0^2 - (\vec{v})^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,v^2 \tag{3-3-2}$$

上の式から，終わりの速度$\vec{v} = 0$ になるまで，他の物体にした仕事 W'が始めの状態(速度$\vec{v}$)が持っていた運動エネルギーKとなる．すなわち，質量 m の物体が速度$\vec{v}$で動いているとき，物体が持っていた運動エネルギーK は，(3-3-1)式で表しているように，「$\boldsymbol{K = W' = m\,v^2/2}$ 」である．逆に，外からの仕事を受けると，運動エネルギーは増加する(速さ v が増加する)．

* 運動エネルギーの単位

運動エネルギーを表す式である(3-3-1)式より，運動エネルギーの単位を見てみよう．(3-3-1)式より，その単位は下の式のようになり，(3-2-3)式で示したものと同じになる．

運動エネルギーK の単位 = J(ジュール) = (質量 m の単位)×(速さ v の単位)^2 = kg (m/s)^2

* 運動エネルギーと仕事の関係

質量 m の物体が外から力$\vec{F}$を受けて，仕事 W が加えられたとしよう．時刻 t_0 で，位置$\vec{r}_0$，速度$\vec{v}_0$で運動している状態から，時刻 t_1 で，位置$\vec{r}_1$，速度$\vec{v}_1$で運動している状態となったとする．終わりの状態が持っている運動エネルギーK_1 は，始めの状態が持っている運動エネルギーK_0 と外からの力$\vec{F}$によってこの物体にした仕事 W の和となる．この関係を数式で示すと下の式で表すことができる．

終わりの運動エネルギー K_1 = 始めの運動エネルギー K_0 + 外からの仕事 W

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\,m\,v_1^{\,2} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^{\,2} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{3-3-3}$$

あるいは，「外力がした仕事 W = 運動エネルギーの変化 $\Delta K = K_1 - K_0$ 」と表すこともできる．

問題　3-13　質量 $m = 4.0\,\mathrm{kg}$ の物体が下のような速度 $\vec{v}$ で運動している．このとき，物体が持っている運動エネルギー K を求めよ．

1)　直線上を左向きに速さ v =7.2 km/h で運動している．

2)　平面上を速度 $\vec{v}$ = (2.0 , – 3.0) m/s　で運動している．

問題　3-14　質量 m = 4.0 kg の物体が始め，速さ v_0 = 3.0 m/s で動いていたところ，外力から仕事 W = 32 J を与えられた後の速さ v_1 を求めよ．

2) 位置エネルギー(Potential Energy) [4]

ある物体が位置 $\vec{r}$ に位置(配置)することによって，この物体に働く力 $\vec{F}$ が持つエネルギーのことを**位置エネルギー U** と呼ぶ．位置エネルギー $U(\vec{r})$ は，位置 $\vec{r}$ の関数で，位置 $\vec{r}$ から位置の基準点 [5]まで，この力 $\vec{F}$ が，他の物体に与えることのできる仕事に等しい．ただし，ここで，力は「保存力」であることが条件となる．下で，「保存力」について説明する．

***　保存力**

ある物体に力 $\vec{F}$ を加え，位置 $\vec{r}_0$ から，ある経路で移動させ，位置 $\vec{r}_1$ に達したとしよう．このとき，一般には，その力がした仕事 W は移動経路に依存する．仕事 W は(3-2-7)式，または，下の式で表すことができるが，出発地点と到着地点が与えられれば，移動経路によらず仕事 W が一意に決まる力のことを「保存力」と呼ぶ．

$$W_{\text{経路}} = \int_{(\text{経路})\,\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \underset{\text{保存力の場合}}{\Longrightarrow} \quad W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

例えば，重力がする仕事は，その経路によらず，出発地点と到着地点の位置(高さ)によるので，保存力となる(例題 3-3 を参照)．一方，摩擦力がする仕事は，出発地点と到着地点の位置の他に経路に依存するので，非保存力となる(例題 3-4 を参照)．

***　位置エネルギーを表す式**

物体に働く力が「保存力」となる場合を考える．エネルギーの定義から，位置エネルギー $U(\vec{r})$ は，位置 $\vec{r}$ から位置の基準点まで，対象とした力(保存力) $\vec{F}$ がした仕事となる．これを式で表すと，下の式のように表すことができる．

[4] Potential(ポテンシャル)とは「潜在性を持った，可能性のある」という意味で，その位置から動くことで，対象とした力が他の物体に仕事をすることができることとなる．
[5] 正確には，「位置エネルギーの基準とした位置」のことで，基準点は任意に選択することができる．

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{(位置の基準点)} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} \quad = -\int_{(位置の基準点)}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

上の式では，力$\vec{F}$は保存力なので，積分する経路(移動経路)によらず，位置$\vec{r}$のみの関数となる．

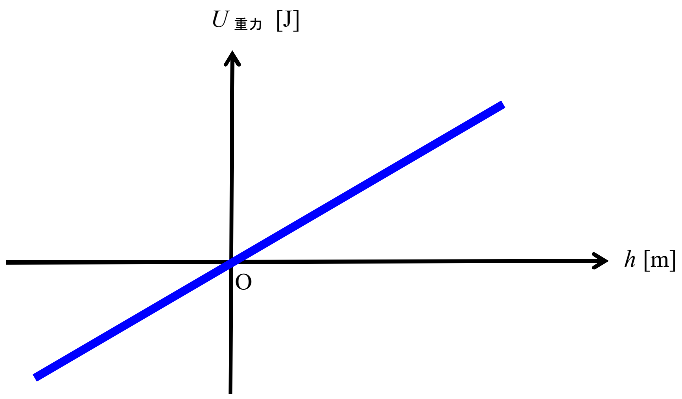
*　位置エネルギーの計算例

①　重力による位置エネルギー

質量 m の物体に働く力として重力 $m\vec{g} = (0, -m\,g)$が働いている場合を考えよう．位置の基準点として原点 O = (0, 0)，位置$\vec{r}$ = (x, h)とすると，重力と微小変位の内積は，「$m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = -m\,g\,\mathrm{d}y$」となるので，重力による位置エネルギー$U_{重力}$は下の式のように計算することができる．重力による位置エネルギー$U_{重力}$は物体の鉛直方向の基準面からの位置(高さ) h のみの関数となる．

$$U_{重力} = -\int_{(位置の基準点)}^{\vec{r}} m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^h m\,g\,\mathrm{d}y = m\,g\,[\,y\,]_0^h = m\,g\,h \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

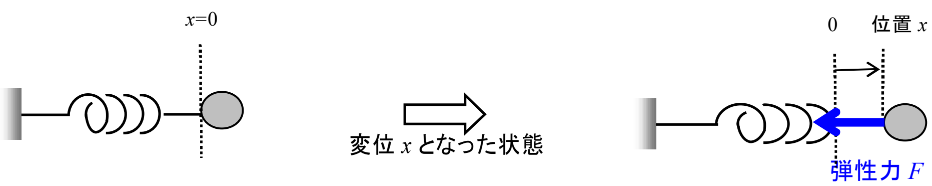
基準面より下側(地球の中心側)に位置する場合は，高さ h は負の値となり，重力による位置エネルギーも負の値となる．重力による位置エネルギー$U_{重力}$を縦軸に，基準面からの高さ(位置)h を横軸にとったグラフは下のように直線のグラフとなる [6]．



②　弾性力(ばねの力)による位置エネルギー

ばね定数 k のばねが水平に置かれており，ばねの一端に質量 m の物体がつながれている．ばねの伸びがない状態を位置の基準点に選び，そこからの物体の変位(位置) x とすると，フックの法則より，物体に働くばねの弾性力 F は「$F = -k\,x$ 」と表すことができる．

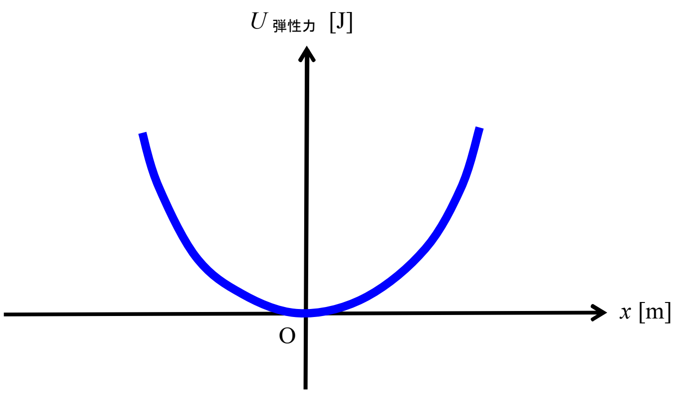
[6] ここで，この直線の傾きが「$m\,g$」となっていることに注意する．



したがって，位置の基準点として伸びがない状態($x = 0$)にとり，ばねにつながった物体の位置 x とすると，弾性力による位置エネルギー(弾性エネルギー) $U_{弾性力}$ は下の式で表すことができる．

$$U_{弾性力} = -\int_{(位置の基準点)}^{x} F\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{x} k\,x\,\mathrm{d}x = k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x = \frac{1}{2}k\,x^2 \tag{3-3-7}$$

上の式から，ばねが伸びたとき($x > 0$)も縮んだとき($x < 0$)も弾性エネルギーは正となり，変位の大きさが等しい場合は同じ値となる．弾性エネルギー $U_{弾性力}$ を縦軸に，変位 x を横軸にとったグラフは下のように放物線のグラフとなる．



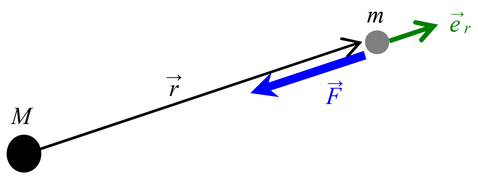
* 弾性エネルギーの単位

上の(3-3-7)式から弾性エネルギーの単位について見てみよう．両辺ともエネルギーの単位となることが確認できる．

$U_{弾性力}$の単位 = (ばね定数 k の単位)×(変位 x の単位)^2 = (N/m) × m^2 = N m = J

③ 万有引力による位置エネルギー

原点に質量 M の惑星があり，原点から位置 $\vec{r}$ に質量 m の物体があるとしよう．惑星と物体の間には，下の式で表される万有引力 $\vec{F}$ が働いている．ここで，万有引力定数 G，惑星(の重心)と物体の間の距離 r ($= |\vec{r}|$)とする．位置 $\vec{r}$ と同じ向きを向いた単位ベクトルとして，$\vec{e}_r = \vec{r}/r$ を用いると，質量 m の物体に働いている万有引力 $\vec{F}$ は，引力なので質量 M の惑星の方向を向き(単位ベクトル $\vec{e}_r$ と逆向き)，距離 r の 2 乗に反比例するので，下の式で表すことができる．

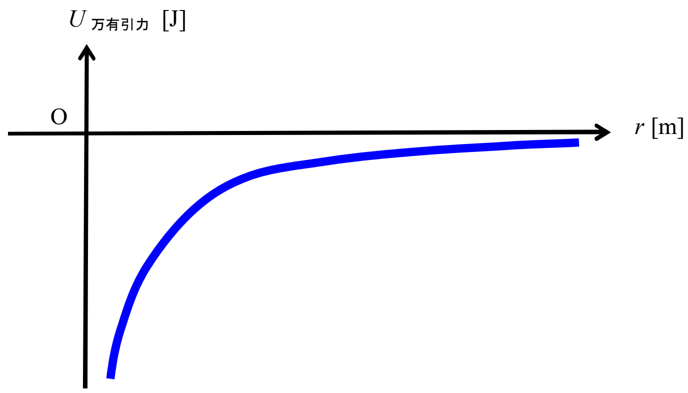


$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad (3\text{-}3\text{-}8)$$

さらに，微小変位 $\mathrm{d}\vec{r}$は，「$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(r\,\vec{e}_r) = (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}(\vec{e}_r) = (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r\,(\mathrm{d}\vec{e}_r/\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\theta = (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r\,\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}\theta$ 」となるので，万有引力$\vec{F}$と微小変位 $\mathrm{d}\vec{r}$との内積は，単位ベクトルの直行性を用いて，「$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -(G\,m\,M/r^2)\,\mathrm{d}r$ 」と計算できる．この式を用いて，原点 O から位置$\vec{r}$に位置する質量 m の物体が持っている万有引力による位置エネルギー$U_{\text{万有引力}}$ は下の式のように求めることができる．ここで，位置の基準点は無限遠方($r\to\infty$)とした．

$$U_{\text{万有引力}} = -\int_{(\text{位置の基準点})}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\infty}^{r} G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\left[G\frac{m\,M}{r}\right]_{\infty}^{r} = -G\,\frac{m\,M}{r} \qquad (3\text{-}3\text{-}9)$$

万有引力による位置エネルギー$U_{\text{万有引力}}$ を縦軸に，質量 M の惑星のからの距離 r を横軸にとったグラフは下のようなグラフとなり，無限遠方では，位置エネルギー$U_{\text{万有引力}}(r\to\infty)) = 0$ となる．また，距離 r が 0 に近づくと，位置エネルギーは負の無限大となり，発散する．



問題 3-15　ある物体が位置$\vec{r} = (x\,,\,y)$ にある．原点 O からの物体までの距離を r とすると，力$\vec{F} = (\,x\,,\,4\,y^3)$が物体に作用している．位置の基準点を原点 O として，位置$\vec{r}$においてこの力による位置エネルギー$U(\vec{r})$を求めよ．

問題 3-16　ある物体が位置$\vec{r} = (x\,,\,y)$ にある．原点 O からの物体までの距離を r とすると，力$\vec{F} = (\,x\exp(-r^2)\,,\,y\exp(-r^2)\,)$が物体に作用している．位置の基準点を無限遠方として，位置$\vec{r}$においてこの力による位置エネルギー$U(\vec{r})$を求めよ．

問題 3-17　地球の半径を R，地球の質量を M とする．地表から高さ h ($h << R$ とする)の場所に質量 m の物体があるとして，高さ h での位置エネルギー$U(h)$は(3-3-9)式から，係数 a, b, c を用いて，近似的に「$U(h) \sim a + b\,h + c\,h^2 + \cdots$」と表すことがで

きる．この係数 a, b, c を求めよ．さらに，地表から見た高さ h の位置エネルギー $U(h) \sim b\,h = m\,g\,h$ と重力による位置エネルギーと一致することを確認せよ．

3-4.　力学的エネルギー保存の法則

上の節では，「エネルギー」を定義し，運動エネルギー K と(いくつかの力に対する)位置エネルギー U について導出した．運動エネルギー K と位置エネルギー U の和を，**「力学的エネルギー E」**と呼ぶ．

$$\boldsymbol{E = K + U} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

質量 m の物体に保存力 $\vec{F}$ が働いていると仮定し，運動方程式を変形することで，**「力学的エネルギー保存の法則」**を表す式を導出してみよう．時刻 t_0 で，位置 $\vec{r}_0$，速度 $\vec{v}_0$ で運動しているとする．その後，この物体は力 $\vec{F}$ を受けて，時刻 t_1 では，位置 $\vec{r}_1$，速度 $\vec{v}_1$ になったとする．

「力学的エネルギー保存の法則」とは，「時刻 t_0 での力学的エネルギー $= E_0\ (= K_0 + U_0) =$ 時刻 t_1 での力学的エネルギー $= E_1\ (= K_1 + U_1)$」が成立することである．

(2-2-3)式で示した運動方程式の両辺に微小変位 $\mathrm{d}\vec{r}$ との内積をとり，始めの状態(時刻 t_0，位置 $\vec{r}_0$，速度 $\vec{v}_0$)から終わりの状態(時刻 t_1，位置 $\vec{r}_1$，速度 $\vec{v}_1$)まで積分する．

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \quad \rightarrow \text{(積分)} \rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

上の式の左辺は(3-3-2)式を導出したのと同じ計算をすると運動エネルギーの差となる．右辺は積分を 2 つに分離すると，力は保存力なので位置エネルギーの定義式となる(3-3-5)式を用いると位置エネルギーの差となる．

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}m\,v_1{}^2 - \frac{1}{2}m\,v_0{}^2 = K_1 - K_0 \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

$$\text{右辺} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left(\int_{\vec{r}_0}^{(\text{位置の基準点})} + \int_{(\text{位置の基準点})}^{\vec{r}_1}\right)\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left(-\int_{(\text{位置の基準点})}^{\vec{r}_0} + \int_{(\text{位置の基準点})}^{\vec{r}_1}\right)\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}_1) \qquad (3\text{-}4\text{-}4)$$

「左辺 = 右辺」とし，負となる量を移項すると，下の式のように，運動の状態によらず，**「力学的エネルギーE が一定となる力学的エネルギー保存則」**を表す式が導出できる．

$$\boldsymbol{E_1 = K_1 + U(\vec{r}_1) = K_0 + U(\vec{r}_0) = E_0 =} \text{ 一定} \qquad (3\text{-}4\text{-}5)$$

* 注意

運動方程式はベクトルとしての式で向きも関係していた．ところが，運動方程式から変形して得られた「力学的エネルギー保存則」の式は，ベクトルの内積を実行するので，向きの情報が消えている．運動の性質を調べる際，「運動方程式」を用いるより，(逆に向きの情報が消えているので)「力学的エネルギー保存則」を用いた方が簡単に扱える場合がある．

状態 0(時刻 t_0，位置$\vec{r}_0$，速度$\vec{v}_0$)から状態 1(時刻 t_1，位置$\vec{r}_1$，速度$\vec{v}_1$)への移行は，「力学的エネルギー保存則」が成立しているので，自然な形で行われる．逆に，時刻を逆行させ，状態 1(位置$\vec{r}_1$，速度$\vec{v}_1$)から状態 0(位置$\vec{r}_0$，速度$\vec{v}_0$)への移行も自然な形で行われる．2 つの状態間(状態 0 と状態 1 の間)の移行は可逆的となる．別な見方をすると，時間の進み方を反転させて，状態 1 から状態 0 への移行も自然な形で行われる．このとき，物体の運動は「時間反転(時間を逆行させること)」に対し，対称性を持つ．

非保存力となる「摩擦力」などが関与する場合は，仕事と運動エネルギーの間の関係式である(3-3-3)式が成立するが，この場合は非可逆的な状態間の移行となり，「時間反転」に対しては対称性を持たない．

問題 3-18　質量 m の物体をばね定数 k のばねに水平につなぎ，振幅 A で単振動させた．時刻 t における物体の位置(変位) $x(t)$として，「$x(t) = A\sin(\sqrt{k/m}\ t)$」と表すことができる場合，物体の速度 $v(t)$，運動エネルギーK，弾性力の位置エネルギーU，力学的エネルギーE を求め，力学的エネルギー保存則が成立することを確かめよ．

問題 3-19　力学的エネルギー保存則を用いて，ロケットが地球を離れて，無限遠方まで到達できるとすると，地球表面からの脱出の速さ(第 2 宇宙速度)v_2を求めよ．ただし，地球の質量 M，地球の半径 R，万有引力定数 G とする．

問題 3-20　ある物体を地表からの角度 θ，速さ v_0 で斜め上方に投げ上げた．力学的エネルギー保存則を用いて，物体の最高到達地点における地表からの高さ h_{max} を求めよ．

3-5.　位置エネルギーと保存力の関係

位置$\vec{r}$ = (x, y)における位置エネルギー$U(\vec{r}) = U(x, y)$は，保存力となる力$\vec{F}$を用いて，(3-3-5)式で与えられた．(3-3-5)式で両辺に対し，微分すると，下の式で表すことができる．

$$\mathrm{d}U = -\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -(F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y) \tag{3-5-1}$$

位置の y 成分が一定となる場合$(\mathrm{d}y = 0)$，上の式で，「$\mathrm{d}U = -F_x\,\mathrm{d}x$　(条件; $\mathrm{d}y = 0$)」が成立する．このとき，力の x 成分 F_x は変数 x で偏微分(2 つの変数のうち，一方は定数とし，他方の変数のみで微分する方法)して，下の式で表すことができる．

$$F_x = -\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(y\text{は一定})}} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x, y)}{x+\Delta x - x} = -\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(y\text{は一定})}} \frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{3-5-2}$$

さらに，力の y 成分 F_y も同様に変数 y で偏微分して下の式のように表すことができる．

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{3-5-3}$$

上の 2 つの式をベクトルとして成分表示で表すと，力$\vec{F}$は下の式で表すことができる[7]．

$$\boxed{\vec{F} = (F_x, F_y) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = -\vec{\nabla} U} \tag{3-5-4}$$

上の式で記号$\vec{\nabla}$ (「ナブラ」と呼ぶ)は，2 次元の座標系において，下の式で表すことができる．

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}} \tag{3-5-5}$$

問題　3-21　ある物体が位置$\vec{r} = (x, y)$ にある．この物体が位置$\vec{r}$ に位置するとき，位置エネルギー$U(\vec{r}) = (x^2+y^2)^2$ となる場合，この物体に働く力$\vec{F}$を求めよ．

問題　3-22　ある物体が位置$\vec{r} = (x, y)$ にあり，原点 O からの距離を $r = |\vec{r}|$ とする．この物体が位置$\vec{r}$ に位置するとき，定数 C を用いると，位置エネルギー$U(\vec{r}) = -C/r$ と表すことができる場合(万有引力による位置エネルギーに相当)，この物体に

[7] $\vec{\nabla}U$ はポテンシャルエネルギーU の勾配を表し，「grad U」と表すこともある．「grad」は「グラージェント(gradient);勾配」と呼ぶ．

働く力$\vec{F}$を求めよ(ヒント；(距離)$^2 = r^2 = x^2 + y^2$ より，両辺の微分をとると，「$2r\,\mathrm{d}r = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$」となる．この式を使う)．

問題の答

問題 3-1 1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 30° = 2 \times 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 135° = \sqrt{2} \times 4 \times (\dfrac{-\sqrt{2}}{2}) = -4$

3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(5\pi/6) = 2 \times 4 \times (\dfrac{-\sqrt{3}}{2}) = -4\sqrt{3}$ 4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(2\pi/3) = 1 \times 4 \times (\dfrac{-1}{2}) = -2$

問題 3-2 1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\times4 + 3\times2 = 10,\quad \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{10}{\sqrt{10}\times\sqrt{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ $(0 \le \theta \le \pi$ より)

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\times1 + 2\times(-3) = -5,\quad \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$ $(0 \le \theta \le \pi$ より)

3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -4 - 9 = -13,\quad \cos\theta = \dfrac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}} = -1 \rightarrow \theta = \pi$

4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 + \sqrt{3},\quad \cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times 2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$= \cos(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \cos\dfrac{\pi}{12} \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{12}$

問題 3-3 求める単位ベクトルを$\vec{e} = (x, y)$ とする．直交するので，「各々のベクトルとの内積が 0」，「単位ベクトルなので，$|\vec{e}|^2 = x^2 + y^2 = 1$」が成立する．

1) 内積 $= -4x+3y = 0 \rightarrow y = 4x/3$ なので， $x^2 + y^2 = x^2 + (4x/3)^2 = 25x^2/9 = 1 \rightarrow x = \pm 3/5,\ y = \pm 4/5 \rightarrow \vec{e} = \pm(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5})$

2) 内積 $= x-2y = 0 \rightarrow x = 2y$ なので， $x^2 + y^2 = 4y^2 + y^2 = 5y^2 = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{5}/5,\ x = \pm2\sqrt{5} \rightarrow \vec{e} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}(2, 1)$

3) 内積 $= \sqrt{3}x + y = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3}x$ なので， $x^2 + y^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow \vec{e} = \pm(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

問題 3-4 1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{x} - \vec{y})\cdot(3\vec{x} + \vec{y}) = 6|\vec{x}|^2 - \vec{x}\cdot\vec{y} - |\vec{y}|^2 = 24 - (-1/2) - 1 = 23\dfrac{1}{2} = 47/2$

2) $|\vec{a}|^2 = |2\vec{x} - \vec{y}|^2 = 4|\vec{x}|^2 - 4\,\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2 = 16+2+1=19 \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{19}$

3) $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{x} - \vec{y} - (3\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - 2\vec{y} \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{x}|^2 + 4\,\vec{x}\cdot\vec{y} + 4\,|\vec{y}|^2 = 4-2+4 = 6 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$

4) $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{x} - \vec{y} + (3\vec{x} + \vec{y}) = 5\vec{x} \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 25\,|\vec{x}|^2 = 100$

5) $(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + 3\vec{b}) = (-\vec{x} - 2\vec{y})\cdot(11\vec{x} + 2\vec{y}) = -11\,|\vec{x}|^2 - 24\,\vec{x}\cdot\vec{y} - 4\,|\vec{y}|^2 = -44+12-4 = -36$

問題 3-5 変位$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (5.0 - 3.0, 2.0 - 4.0) = (2.0, -2.0)$ mなので，力$\vec{F}$が物体にした仕事Wは，力と変位の内積となる．

$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = 2 \times 2 + (-3) \times (-2) = 4 + 6 = 10$ J

問題 3-6　$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\,\Delta r \cos 120\,° = 4 \times 6 \times \dfrac{-1}{2} = -12$ J

問題 3-7　経路「点 O → 点 A」での変位と重力は逆向きなので，このとき重力のした仕事 W_1 は，「$W_1 = -m\,g\,a$ 」，経路「点 O → 点 B → 点 A」のうち，「点 B → 点 A 」での変位は重力と同じ向きなので，重力のした仕事 W_2 は，「$W_2 = -m\,g(a+b) + m\,g\,b = -m\,g\,a$ 」，となり，重力のした仕事は経路が違っても同じ結果になる．

問題 3-8　動摩擦力は移動(変位)の向きと逆向きに働く．水平面に物体が置かれたとき，動摩擦力の大きさ $F' = \mu' m\,g$ のなので，「点 O → 点 A」となる経路 1 で動摩擦力のした仕事 W_1 は，「$W_1 = F'\,a \cos 180\,° = -\mu'\,m\,g\,a$ 」で，「点 O → 点 B → 点 A」となる経路 2 で動摩擦力のした仕事 W_2 は，「$W_1 = F'\,(a+b) \cos 180\,° + F'\,b \cos 180\,° = -\mu' m\,g\,(a+2b)$ 」となる．動摩擦力のした仕事は経路が違うと異なる結果になる．

問題 3-9　この力が物体にした仕事 $W = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{-2} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[\,x^3\,\right]_{3}^{-2} = (-2)^3 - 3^3 = -8 - 27 = -35$ J

問題 3-10　経路 III を 2 つに分けて，経路 III_1 として y 座標が一定となる経路である「始点 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ → 中間点 $\vec{r}_{01} = (x_1, y_0)$」を，経路 III_2 として x 座標が一定となる経路である「中間点 $\vec{r}_{01} = (x_1, y_0)$ → 終点 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$」とする．

経路 III_1 で，この力がした仕事 $W_{\mathrm{III\_1}}$ は，　$W_{\mathrm{III\_1}} = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F_x\,\mathrm{d}x + 0 = \int_{2}^{6} 2x\,\mathrm{d}x = \left[\,x^2\,\right]_{2}^{6} = 36 - 4 = 32$ J

経路 III_2 で，この力がした仕事 $W_{\mathrm{III\_2}}$ は，　$W_{\mathrm{III\_2}} = 0 + \displaystyle\int_{y_0}^{y_1} F_y\,\mathrm{d}y = -\int_{1}^{3} 3y^2\,\mathrm{d}y = -\left[\,y^3\,\right]_{1}^{3} = -(27 - 1) = -26$ J

したがって，経路 III で，この力がした仕事 W_{III} は，　$W_{\mathrm{III}} = W_{\mathrm{III\_1}} + W_{\mathrm{III\_2}} = 32 - 26 = 6.0$ J

力 $\vec{F}$ の x 成分 F_x は，位置の x 座標のみの関数で，力 $\vec{F}$ の y 成分 F_y は，位置の y 座標のみの関数となるので，経路 II で，

この力がした仕事 W_{II} は，　$W_{\mathrm{II}} = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F_x\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_1} F_y\,\mathrm{d}y = \int_{2}^{6} 2x\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{3} 3y^2\,\mathrm{d}y = \left[\,x^2\,\right]_{2}^{6} - \left[\,y^3\,\right]_{1}^{3} = 6.0$ J

問題 3-11　力 $\vec{F}$ の y 成分 F_y は，位置の x 座標と y 座標の関数となるので注意が必要である．経路 III_1 で，力 $\vec{F}$ の x 成分 F_x は，位置の x 座標のみの関数であるので，この力がした仕事 $W_{\mathrm{III\_1}}$ は下のように計算される．

$$W_{\mathrm{III\_1}} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,\mathrm{d}x + 0 = \int_{2}^{6} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[\,x^3\,\right]_{2}^{6} = 216 - 8 = 208 \text{ J}$$

さらに，経路 III_2 では，x 座標は $x_1 = 6$ m に固定されているので，仕事 $W_{\mathrm{III\_2}}$ は下のように計算される．

$$W_{\mathrm{III\_2}} = 0 + \int_{y_0}^{y_1} F_y\,\mathrm{d}y = -\int_1^3 6xy\Big|_{x=6}\mathrm{d}y = -\int_1^3 36y\,\mathrm{d}y = -18\left[\,y^2\,\right]_1^3 = -18\times(9-1) = -144\ \mathrm{J}$$

したがって，経路 III で，この力がした仕事 W_{III} は，　$W_{\mathrm{III}} = W_{\mathrm{III\_1}} + W_{\mathrm{III\_2}} = 208 - 144 = 64\ \mathrm{J}$

同様に，経路 II で，この力がした仕事 W_{II} は，　$W_{\mathrm{II}} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_1} F_y\,\mathrm{d}y = \int_2^6 3x^2\,\mathrm{d}x - \int_1^3 6xy\Big|_{x=2y}\mathrm{d}y$

$$= \left[\,x^3\,\right]_2^6 - \int_1^3 12y^2\,\mathrm{d}y = 208 - 4\left[\,y^3\,\right]_1^3 = 208 - 4\times(27-1) = 208 - 104 = 104\ \mathrm{J}$$

問題 3-12　微小仕事 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ と表される．物体の速度 $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ であり，仕事率 P は単位時間当たりの仕事なので，次のように表すことができる．

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

問題 3-13　運動エネルギー $K = \frac{1}{2}mv^2$ を用いる．

1)　速さ $v = 7.2\ \mathrm{km/h} = 7200\ \mathrm{m}/3600\ \mathrm{s} = 2.0\ \mathrm{m/s}$ なので，　運動エネルギー $K = \frac{1}{2}\times4.0\times2.0^2 = 8.0\ \mathrm{J}$

2)　速さ v の 2 乗 $v^2 = 2.0^2 + (-3.0)^2 = 4+9 = 13\ \mathrm{m^2/s^2}$ なので，　運動エネルギー $K = \frac{1}{2}\times4.0\times13 = 26\ \mathrm{J}$

問題 3-14　運動エネルギーと仕事の関係式「$\frac{1}{2}mv_1{}^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + W$」より求める．　$\rightarrow$　$v_1{}^2 = v_0{}^2 + 2W/m = 9 + 2\times32/4$

$= 9 + 16 = 25\ \mathrm{m^2/s^2}$　$\rightarrow$　$v_1 = 5.0\ \mathrm{m/s}$

問題 3-15　力 $\vec{F}$ が保存力であるとき，位置 $\vec{r}$ においてこの力による位置エネルギー $U(\vec{r})$ は下のように計算できる．

$$U(\vec{r}) = U(x, y) = -\int_{(\text{位置の基準点})}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{(\text{基準点})}^{x} F_x\,\mathrm{d}x - \int_{(\text{基準点})}^{y} F_y\,\mathrm{d}y = -\int_0^x x\,\mathrm{d}x - \int_0^y 4y^3\,\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\,x^2\,\right]_0^x - \left[\,y^4\,\right]_0^y = -\frac{1}{2}x^2 - y^4$$

問題 3-16　上の問題と同様にして位置エネルギーを求める．

$$U(\vec{r}) = U(x, y) = -\int_\infty^x F_x\,\mathrm{d}x - \int_\infty^y F_y\,\mathrm{d}y = -\int_\infty^x x\exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x - \int_\infty^y y\exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\,\exp(-(x^2+y^2))\,\right]_\infty^x + \frac{1}{2}\left[\,\exp(-(x^2+y^2))\,\right]_\infty^y = \exp(-(x^2+y^2)) = \exp(-r^2)$$

問題 3-17　地表を位置の基準点にすると，地球の中心からの距離 r での位置エネルギー $U(r)$ は，「$U(r) = -G\frac{mM}{r}$」となる．地

表からの高さ h は地球半径を R とすると，$r = R + h$ と表される.「$R >> h$」として，近似すると，次のように近似できる.

「$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R+h} = \dfrac{1}{R}\dfrac{1}{1+h/R} \sim \dfrac{1}{R}\left(1 - \dfrac{h}{R} + \left(\dfrac{h}{R}\right)^2 ..\right)$」. したがって，位置エネルギー$U(h)$は次のように近似することができる.　$U(r) \sim -G\dfrac{m\,M}{R} + G\dfrac{m\,M}{R^2}h - G\dfrac{m\,M}{R^3}h^2 + \cdots.$

→　係数 $a = -G\dfrac{m\,M}{R}$,　係数 $b = G\dfrac{m\,M}{R^2}$ ($= m\,g$；重力加速度の大きさ $g = G\,M/R^2$),　係数 $c = -G\dfrac{m\,M}{R^3}$

→　地上から高さ h にある物体の位置エネルギー $U(h) \sim m\,g\,h - G\dfrac{m\,M}{R^3}h^2 = m\,g\,h\,(1 - h/R)) \sim m\,g\,h$

問題 3-18　$v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A\sqrt{k/m}\cos(\sqrt{k/m}\;t)$,　$K = \dfrac{1}{2}m\,v^2 = \dfrac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\sqrt{k/m}\;t)$, $U = \dfrac{1}{2}k\,A^2\sin^2(\sqrt{k/m}\;t)$,

$E = K + U = \dfrac{1}{2}k\,A^2(\cos^2(\sqrt{k/m}\;t) + \sin^2(\sqrt{k/m}\;t)) = \dfrac{1}{2}k\,A^2 =$ 一定　($\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の恒等式を用いた)

問題 3-19　第2宇宙速度v_2で地表(距離 $r = R$)を出発すると，無限遠方(距離 $r = \infty$)まで到達できる. 無限遠方での速さv_∞は0である. 力学的エネルギー保存則より，第2宇宙速度v_2は次のように求めることができる.

$$\frac{1}{2}m\,v_2{}^2 + (-G\frac{m\,M}{R}) = \frac{1}{2}m\,v_\infty{}^2 + (-G\frac{m\,M}{\infty}) = 0 \quad \to v_2{}^2 = 2G\frac{M}{R} = 2\,g\,R \to \quad v_2 = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}} = \sqrt{2\,g\,R}$$

問題 3-20　ある物体を地表からの角度θ，速さv_0で斜め上方に投げ上げたとき，初速度$\vec{v}_0 = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$ と表すことができる. 力(重力)はy方向にのみ働き，速度のx成分は時間変化しない. したがって，最高点での速度$\vec{v}$は，速度のy成分が「0」となり，速度$\vec{v}' = (v_0\cos\theta, 0)$となる. これを力学的エネルギー保存則に適用させると，最高点での高さh_{max} は下のように求めることができる.

$$\frac{1}{2}m\,v_0{}^2 + 0 = \frac{1}{2}m\,v'^2 + m\,g\,h_{max} \quad\to\quad 2\,g\,h_{max} = v_0{}^2 - v'^2 = v_0{}^2(1 - \cos^2\theta) = v_0{}^2\sin^2\theta \quad\to h_{max} = \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2\,g}$$

問題 3-21　力$\vec{F} = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$ より，計算して次のように求めることができる.　→

$$\vec{F} = (-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2))$$

問題 3-22　(距離)$^2 = r^2 = x^2 + y^2$ より，偏微分して次の関係式を得ることができる.「$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$」

力$\vec{F} = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}\right) = -\left(\dfrac{C}{r^2}\dfrac{x}{r}, \dfrac{C}{r^2}\dfrac{y}{r}\right) = -\left(\dfrac{C\,x}{r^3}, \dfrac{C\,y}{r^3}\right)$

$= -\dfrac{C}{r^3}(x, y) = -\dfrac{C}{r^3}(r\,\vec{e}_r) = -\dfrac{C}{r^2}\vec{e}_r$　(→ (距離)^2 に反比例する　→ 万有引力の距離依存性と同じ)