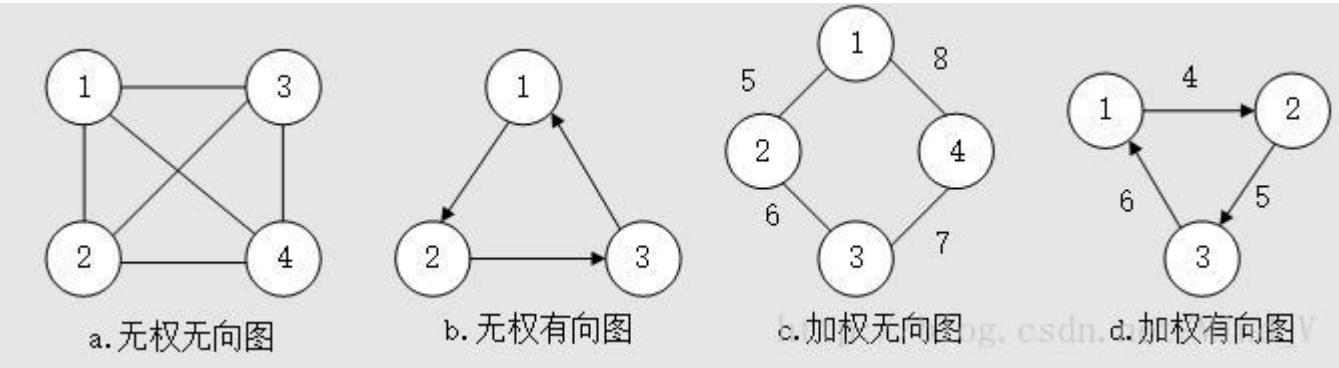
基本概念

图（graph）是用线连接在一起的顶点或节点的集合 ，即两个要素：**边**和**顶点**。每一条边连接个两个顶点，用（i，j）表示顶点为 i 和 j 的边。

如果用图示来表示一个图，一般用圆圈表示顶点，线段表示边。有方向的边称为**有向边**，对应的图成为**有向图**，没有方向的边称为**无向边**，对应的图叫**无向图**。对于无向图 ，边（i，j）和（j，i）是一样的，称顶点 i 和 j 是**邻接的**，边（i，j）**关联于**顶点 i 和 j；对于有向图 ，边（i，j）表示由顶点 i 指向顶点 j 的边，即称顶点 i **邻接至**顶点 j，顶点 i **邻接于**顶点 j，边（i，j）**关联至**顶点 j 而**关联于**顶点 i 。

对于很多的实际问题，不同顶点之间的边的权值（长度、重量、成本、价值等实际意义）是不一样的，所以这样的图被称为**加权图**，反之边没有权值的图称为**无权图**。所以，图分为四种：加权有向图，加权无向图，无权有向图，无权无向图。



在一个无向图中，与一个顶点相关联的边数成为该顶点的**度**。而对于有向图，则用**入度**来表示关联至该顶点的边数，**出度**来表示关联于该顶点的边数。

一个具有n个顶点和n(n-1)/2条边的无向图称为一个**完全图**，即每个顶点的度等于总顶点数减1。

图的描述

抽象数据类型

定义抽象数据类型graph，有向图、无向图、加权图和无权图都可以根据此ADT实现。

`numberOfVerticices()`：返回图的顶点数

`numberOfEdges`：返回图的边数

`exitsEdge(i, j)`：如果边（`i，j`）存在，则返回`true`，否则返回`false`

`insertEdge(theEdge)`：插入边`theEdge`

`eraseEdge(i, j)`：删除边（`i，j`）

`degree(i)`：返回顶点 `i` 的度（无向图）

`inDegree(i)`：返回顶点 `i` 的入度

`outDegree(i)`：返回顶点 `i` 的出度

`directed()`：当且仅当有向图，返回`true`

`weighted()`：当且仅当加权图，返回`true`

无权图的描述

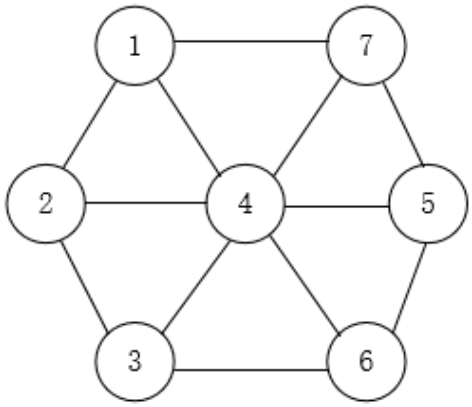
对无向图的描述方法都是基于邻接的方式：邻接矩阵、邻接 链表 和邻接数组。

邻接矩阵

用图e的邻接矩阵表示图f的无权图，A(i，j)等于1表示边（i，j）存在，等于0则表示不存在。有向图无向图都可以用矩阵这样表示，但是对于无向图，矩阵具有对称性，即A(i，j)和A(j，i)一样，所以为了节省空间，可以用下三角（上三角）矩阵表示。

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	1	0	0
7	1	0	0	1	1	0	0

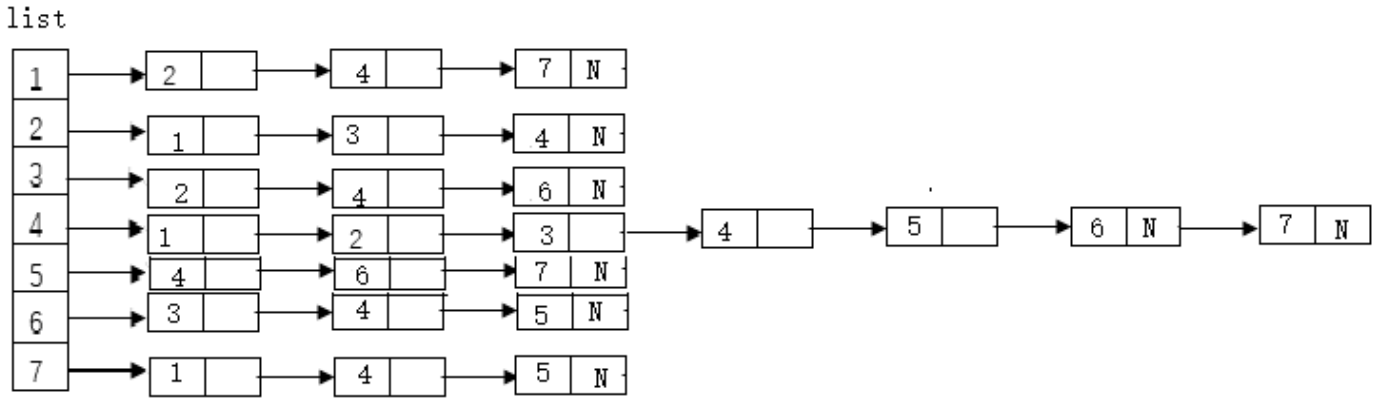
e. 图f对应的邻接矩阵



f. 无权图

邻接链表

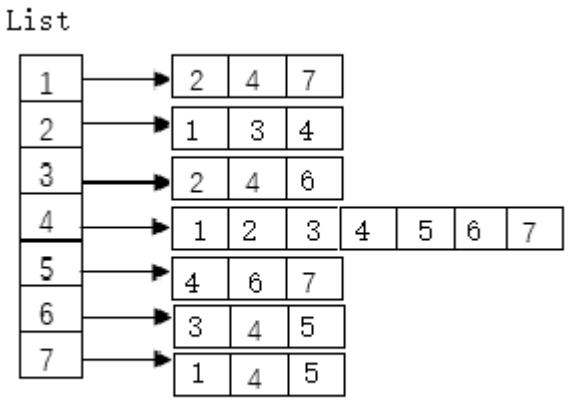
图g是图f对应的邻接链表，每一个和顶点 i 关联的顶点 j ，依次构成一条链表，节点的元素是顶点，节点的next指针指向下一个 j 构成的顶点，最后一个节点指向nullptr，7条链表用一个表List来维护。



g. 图f对应的邻接链表

邻接数组

图g是图f对应的邻接数组，可以看成一个列数不等的二位数组，也可以看成由一个元素为一维数组的表List。



h. 图f对应的邻接数组

加权图的描述

对于加权图，一般使用邻接矩阵或邻接链表描述。

邻接矩阵

和无权图的邻接矩阵描述相同道理，只不过A(I，j)的值不再是0或1，而是对应的加权图中的权值，而对于不存在的边，可以用一个固定的值表示，如-1。

邻接链表

和无权图的邻接链表描述也类似，每一个和顶点 i 关联的顶点 j 依次构成一条链表，不过需要改变的是节点元素包含两个域{顶点j，权值}，节点next指向下一个节点，也用一个List维护这些链表。

类实现(C++)

使用邻接矩阵描述实现加权有向图，权值类型为T，无向图和无权图都可以由它派生出。

```cpp
//加权图的边
template <typename T>
class weightedEdge {
public:
    weightedEdge() {}
    weightedEdge(int theV1, int theV2, T theW) : v1(theV1), v2(theV2), w(t
    ~weightedEdge() {}

    int vertex1() const { return v1; }
    int vertex2() const { return v2; }
    T weight() const { return w; }
    operator T() const { return w; }
private:
    int v1,
        v2;
    T w;
};
```

```cpp
//邻接矩阵加权有向图
template <typename T>
class adjacencyWDigraph {
public:
    //构造函数和析构函数
    adjacencyWDigraph(int numberOfVertices = 0, T theNoEdge = 0);
    ~adjacencyWDigraph();

    int numberOfVertices() const { return n; }
    int numberOfEdges() const { return e; }
    bool directed() const { return true; }
    bool weighted() const { return true; }

    //判断边(i, j)是否存在
    bool existEdge(int i, int j) const;
    //插入、删除边
    void insertEdge(weightedEdge<T> *theEdge);
    void eraseEdge(int i, int j);

    //顶点的入度和出度
    int inDegree(int theVertex) const;
    int outDegree(int theVertex) const;

    //广度优先遍历和深度优先遍历
    void bfs(int v, int reach[], int lable);
    void dfs(int v, int reach[], int lable);

```

```
28
29      //迭代器
30      class iterator {
31      public:
32          iterator(T *theRow, T theNoEdge, int numberOfVertices) {
33              row = theRow;
34              noEdge = theNoEdge;
35              n = numberOfVertices;
36              currentVertex = 1;
37          }
38
39          ~iterator() {}
40
41          int next() {
42              for (int j = currentVertex; j <= n; ++j)
43                  if (row[j] != noEdge) {
44                      currentVertex = j + 1;
45                      return j;
46                  }
47
48              currentVertex = n + 1;
49              return 0;
50          }
51
52          int next(T &theWeight) {
53              for (int j = currentVertex; j <= n; ++j)
54                  if (row[j] != noEdge) {
55                      currentVertex = j + 1;
56                      theWeight = row[j];
57                      return j;
58                  }
59
60              currentVertex = n + 1;
61              return 0;
62          }
63
64      private:
65          T *row;          //邻接矩阵的行
66          T noEdge;
67          int n;
68          int currentVertex;
69      };
70
71      //生成迭代器
72      iterator* makeIterator(int theVertex) {
73          checkVertex(theVertex);
74          return new iterator(a[theVertex], noEdge, n);
75
```

```
76      }
77
78  private:
79      int n;      //顶点数
80      int e;      //边数
81      int **a;    //邻接矩阵（二维数组）
82      T noEdge;   //表示不存在的边
83
84                  //检查顶点是否存在
85      void checkVertex(int theVertex) const;
86  };
87
88  template <typename T>
89  adjacencyWDigraph<T>::adjacencyWDigraph(int numberOfVertices = 0, T theNoE
90      if (numberOfVertices < 0) {
91          cout << "number of vertices must be >= 0";
92          exit(1);
93      }
94
95      n = numberOfVertices;
96      e = 0;
97      noEdge = theNoEdge;
98      a = new T*[n + 1];
99      for (int i = 0; i <= n; ++i)
100         a[i] = new int[n + 1];
101
102     //初始化邻接矩阵
103     for (int i = 1; i <= n; ++i)
104         fill(a[i], a[i] + n + 1, noEdge);
105 }
106
107 template <typename T>
108 adjacencyWDigraph<T>::~adjacencyWDigraph<T>() {
109     for (int i = 0; i <= n; ++i)
110         delete[] a[i];
111     delete[] a;
112     a = nullptr;
113 }
114
115 template <typename T>
116 bool adjacencyWDigraph<T>::existEdge(int i, int j) const {
117     if (i < 1 || i > n || j < 1 || j > n || a[i][j] == noEdge)
118         return false;
119     else
120         return true;
121 }
122
```

```
123
124 template <typename T>
125 void adjacencyWDigraph<T>::insertEdge(weightedEdge<T> *theEdge) {
126     int v1 = theEdge->vertex1();
127     int v2 = theEdge->vertex2();
128     if (v1 < 1 || v1 > n || v2 < 1 || v2 > n || v1 == v2) {
129         cout << "(" << v1 << "," << v2 << ") is not a permissble edge";
130         exit(1);
131     }
132
133     if (a[v1][v2] == noEdge)
134         ++e;
135     a[v1][v2] = theEdge->weight();
136 }
137
138 template <typename T>
139 void adjacencyWDigraph<T>::eraseEdge(int i, int j) {
140     if (i >= 1 && i <= n && j >= 1 && j <= n && a[i][j] != noEdge) {
141         a[i][j] = noEdge;
142         --e;
143     }
144 }
145
146 template <typename T>
147 void adjacencyWDigraph<T>::checkVertex(int theVertex) const {
148     if (theVertex < 1 || theVertex > n) {
149         cout << "no vertex " << theVertex;
150         exit(1);
151     }
152 }
153
154 template <typename T>
155 int adjacencyWDigraph<T>::inDegree(int theVertex) const {
156     checkVertex(theVertex);
157
158     int sum = 0;
159     for (int i = 1; i <= n; ++i)
160         if (a[i][theVertex] != noEdge)
161             ++sum;
162
163     return sum;
164 }
165
166 template <typename T>
167 int adjacencyWDigraph<T>::outDegree(int theVertex) const {
168     checkVertex(theVertex);
169
170     int sum = 0;
```

```
171         for (int j = 1; j <= n; ++j)
172             if (a[theVertex][j] != noEdge)
173                 ++sum;

            return sum;
        }
```

图的遍历

很多算法需要从一个已知的顶点开始，搜索所有可以到达的顶点。所谓顶点u是从顶点v可到达的，是指有一条顶点v到顶点u的路径。这种搜索有两种常见的方法：广度优先搜索（breadth first search，BFS）和深度优先搜索（depth first search，DFS）。一般来说，深度优先搜索方法效率更高，使用的也更多。

广度优先搜索

```
1   template <typename T>
2   void adjacencyWDigraph<T>::bfs(int v, int reach[], int lable) {
3       queue<int> q;
4       reach[v] = lable;
5
6       q.push(v);
7       while (!q.empty()) {
8           //从队列中删除一个标记过的顶点
9           int w = q.front();
10          q.pop();
11
12          iterator *iw = makeIterator(w);
13          int u;
14          while((u = iw->next()) != 0)
15          //u是w的相邻顶点
16              if (reach[u] == 0) {
17                  q.push(u);
18                  reach[u] = lable;
19              }
20
21          delete iw;
22      }
23  }
```

深度优先搜索

```
template <typename T>
void adjacencyWDigraph<T>::dfs(int v, int reach[], int lable) {
    reach[v] = lable;
    iterator *iv = makeIterator(v);

    int u;
    while ((u = iv->next()) != 0)
    //u是v的相邻顶点
        if (reach[u] == 0)
            dfs(u, reach, lable);

    delete iv;
}
```