一、图的定义

图是由顶点的有穷非空集合和顶点之间边的集合组成，通常表示为：

$$G=(V，E)$$

其中：G表示一个图，V是图G中顶点的集合，E是图G中顶点之间边的集合。

注：

在线性表中，元素个数可以为零，称为空表；

在树中，结点个数可以为零，称为空树；

在图中，顶点个数不能为零，但可以没有边。

二、图的基本术语

略。

三、图的遍历

图的遍历是在从图中某一顶点出发，对图中所有顶点访问一次且仅访问一次。

图的遍历操作要解决的关键问题：

① 在图中，如何选取遍历的起始顶点?

解决方案：从编号小的顶点开始 。

在线性表中，数据元素在表中的编号就是元素在序列中的位置，因而其编号是唯一的； 在树中，将结点按层序编号，由于树具有层次性，因而其层序编号也是唯一的； 在图中，任何两个顶点之间都可能存在边，顶点是没有确定的先后次序的，所以，顶点的编号不唯一。 为了定义操作的方便，将图中的顶点按任意顺序排列起来，比如，按顶点的存储顺序。

② 从某个起点始可能到达不了所有其它顶点，怎么办?

解决方案：多次调用从某顶点出发遍历图的算法。

③ 因图中可能存在回路，某些顶点可能会被重复访问，那么如何避免遍历不会因回路而陷入死循环。

解决方案：附设访问标志数组visited[n] 。

④ 在图中，一个顶点可以和其它多个顶点相连，当这样的顶点访问过后，如何选取下一个要访问的顶点?

解决方案：深度优先遍历和广度优先遍历。

1、深度优先遍历

基本思想 ：

⑴ 访问顶点v；

⑵ 从v的未被访问的邻接点中选取一个顶点w，从w出发进行深度优先遍历；

⑶ 重复上述两步，直至图中所有和v有路径相通的顶点都被访问到。

2、广度优先遍历

基本思想：

⑴ 访问顶点v；

⑵ 依次访问v的各个未被访问的邻接点v1，v2，…，vk；

⑶ 分别从v1，v2，…，vk出发依次访问它们未被访问的邻接点，并使“先被访问顶点的邻接点”先于“后被访问顶点的邻接点”被访问。直至图中所有与顶点v有路径相通的顶点都被访问到。

四、图的存储结构

是否可以采用顺序存储结构存储图?

图的特点：顶点之间的关系是m:n，即任何两个顶点之间都可能存在关系（边），无法通过存储位置表示这种任意的逻辑关系，所以，图无法采用顺序存储结构。

如何存储图?

考虑图的定义，图是由顶点和边组成的，分别考虑如何存储顶点、如何存储边。

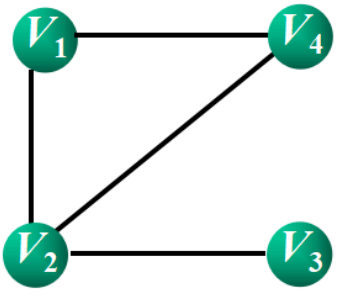
①邻接矩阵（数组表示法）

基本思想：用一个一维数组存储图中顶点的信息，用一个二维数组（称为邻接矩阵）存储图中各顶点之间的邻接关系。

假设图G＝(V，E)有n个顶点，则邻接矩阵是一个n×n的方阵，定义为：

$$\mathbf{arc[i][j]}=\begin{cases}1 & \text{若}(v_i, v_j)\in \mathbf{E}\text{（或}\langle v_i, v_j\rangle\in \mathbf{E}\text{）}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

无向图的邻接矩阵



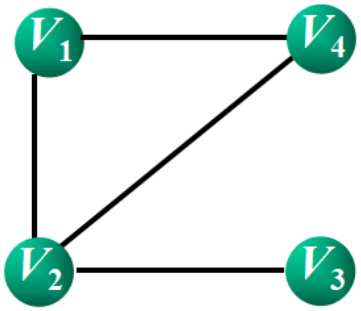
$$\mathbf{vertex}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline V_1 & V_2 & V_3 & V_4\\ \hline\end{array}$$

$$\mathbf{arc}=\begin{array}{c} \begin{matrix}V_1 & V_2 & V_3 & V_4\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\end{matrix}\end{array}$$

无向图的邻接矩阵的特点？

主对角线为 0 且一定是对称矩阵。

无向图的邻接矩阵



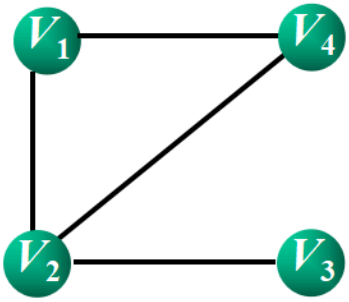
vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

$$arc=\begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix}$$

如何求顶点*i*的度？

邻接矩阵的第*i*行（或第*i*列）非零元素的个数。

无向图的邻接矩阵



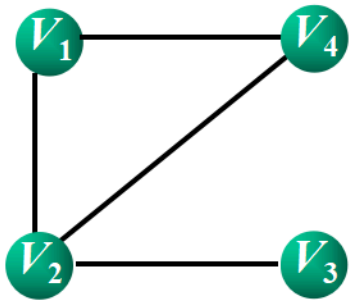
vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

$$arc=\begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix}$$

如何判断顶点 *i* 和 *j* 之间是否存在边？

测试邻接矩阵中相应位置的元素arc[i][j]是否为1。

无向图的邻接矩阵



vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

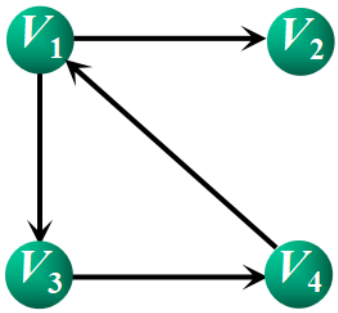
arc=

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	0	1
V_2	1	0	1	1
V_3	0	1	0	0
V_4	1	1	0	0

如何求顶点 *i* 的所有邻接点？

将数组中第 *i* 行元素扫描一遍，若arc[i][j]为1，则顶点 *j* 为顶点 *i* 的邻接点。

有向图的邻接矩阵



vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

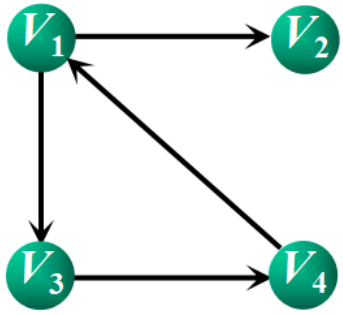
arc=

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	1	0
V_2	0	0	0	0
V_3	0	0	0	1
V_4	1	0	0	0

有向图的邻接矩阵一定不对称吗？

不一定，例如有向完全图。

有向图的邻接矩阵



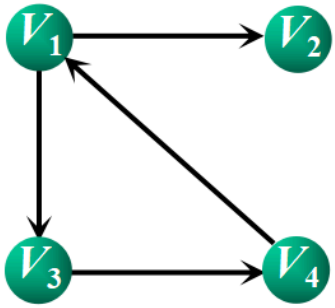
vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

$$arc=\begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix}$$

如何求顶点 *i* 的出度？

邻接矩阵的第 *i* 行元素之和。

有向图的邻接矩阵



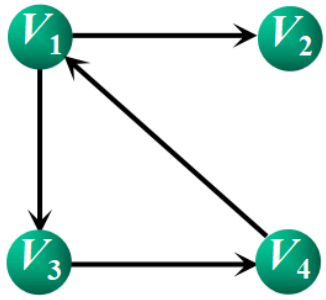
vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

$$arc=\begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix}$$

如何求顶点 *i* 的入度？

邻接矩阵的第 *i* 列元素之和。

有向图的邻接矩阵



vertex= | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |

arc=

	V_1	V_2	V_3	V_4	
	0	1	1	0	V_1
	0	0	0	0	V_2
	0	0	0	1	V_3
	1	0	0	0	V_4

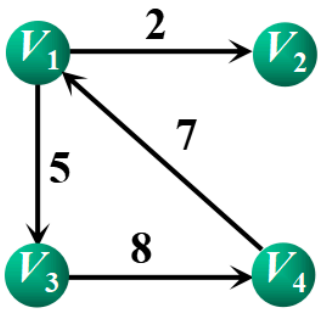
如何判断从顶点 *i* 到顶点 *j* 是否存在边？

测试邻接矩阵中相应位置的元素arc[i][j]是否为1。

网图的邻接矩阵

网图的邻接矩阵可定义为：

$$arc[i][j]=\begin{cases} w_{ij} & 若(v_i, v_j)\in E（或<v_i, v_j>\in E） \\ 0 & 若i=j \\ \infty & 其他 \end{cases}$$



arc=

0	2	5	∞
∞	0	∞	∞
∞	∞	0	8
7	∞	∞	0

②**邻接表**

邻接表存储的基本思想：对于图的每个顶点vi，将所有邻接于vi的顶点链成一个单链表，称为顶点vi的边表（对于有向图则称为出边表），所有边表的头指针和存储顶点信息的一维数组构成了顶点表。

邻接表有两种结点结构：顶点表结点和边表结点..

vertex	firstedge

顶点表

adjvex	next

边表

其中：vertex：数据域，存放顶点信息。 firstedge：指针域，指向边表中第一个结点。 adjvex：邻接点域，边的终点在顶点表中的下标。 next：指针域，指向边表中的下一个结点。

定义邻接表的结点：

```
// 边表顶点
struct ArcNode
{    int adjvex;
     ArcNode *next;
};
// 顶点表
template <class T>
struct VertexNode
{
     T vertex;
     ArcNode *firstedge;
};
```

五、C++代码实现

Ⅰ、邻接矩阵

```
// queue.h
#pragma once
#include <iostream>
const int queueSize = 100;
template<class T>
class queue
{
public:
    T data[queueSize];
    int front, rear;
};
// graph.h
#pragma once
#include<iostream>
#include"queue.h"
// 基于邻接矩阵存储结构的图的类实现
const int MaxSize = 10;
int visited[MaxSize] = { 0 };// 顶点是否被访问的标记
template<class T>
class MGraph
{
public:
    MGraph(T a[], int n, int e);// 构造函数建立具有N个定点e条边的图
    ~MGraph(){}// 析构函数
    void DFSTraaverse(int v);// 深度优先遍历图
    void BFSTraverse(int v);// 广度优先遍历图
private:
    T vertex[MaxSize];// 存放图中顶点的数组
    int arc[MaxSize][MaxSize];// 存放图中边的数组
    int vertexNum, arcNum;// 图中顶点数和边数
};

template<class T>
inline MGraph<T>::MGraph(T a[], int n, int e)
```

```
{
    vertexNum = n;
    arcNum = e;
    for (int i = 0; i < vertexNum; i++) // 顶点初始化
        vertex[i] = a[i];
    for (int i = 0; i < vertexNum; i++) // 邻接矩阵初始化
        for (int j = 0; j < vertexNum; j++)
            arc[i][j] = 0;
    for (int k = 0; k < arcNum; k++)
    {
        int i, j;
        std::cin >> i >> j;         // 输入边依附的顶点的编号
        arc[i][j] = 1;             // 置有边标记
        arc[j][i] = 1;
    }
}

template<class T>
inline void MGraph<T>::DFSTraaverse(int v)
{
    cout << vertex[v]<<" ";
    visited[v] = 1;
    for (int j = 0; j < vertexNum; j++)
    {
        if (arc[v][j] == 1 && visited[j] == 0)
            DFSTraaverse(j);
    }
}

template<class T>
inline void MGraph<T>::BFSTraverse(int v)
{
    int visited[MaxSize] = { 0 };// 顶点是否被访问的标记
    queue<T> Q;
    Q.front = Q.rear = -1;     // 初始化队列
    cout << vertex[v]<<" ";
    visited[v] = 1;
    Q.data[++Q.rear] = v;     // 被访问顶点入队
    while (Q.front != Q.rear)
    {
        v = Q.data[++Q.front];     // 对头元素出队
        for (int j = 0; j < vertexNum; j++)
        {
            if (arc[v][j] == 1 && visited[j] == 0)
            {
                std::cout << vertex[j]<<" ";
                visited[j] = 1;
                Q.data[++Q.rear] = j;     // 邻接点入队
            }
        }
    }
}
// main.cpp
#include"graph.h"
using namespace std;
int main()
{
    int arry[] = { 1,2,3,4,5,6 };
```

```
    MGraph<int> graph(arry, 6, 9);
    graph.BFSTraverse(1);
    cout << endl;
    graph.DFSTraaverse(1);
    system("pause");
    return 0;
}
```

II、邻接表

```
// queue.h
#pragma once
#include <iostream>
const int queueSize = 100;
template<class T>
class queue
{
public:
    T data[queueSize];
    int front, rear;
};
// graph.h
#pragma once
#include<iostream>
#include"queue.h"
// 定义边表结点
struct ArcNode
{
    int adjvex;// 邻接点域
    ArcNode* next;
};
// 定义顶点表结点
struct VertexNode
{
    int vertex;
    ArcNode* firstedge;
};

// 基于邻接表存储结构的图的类实现
const int MaxSize = 10;
int visited[MaxSize] = { 0 };// 顶点是否被访问的标记
//typedef VertexNode AdjList[MaxSize];    //邻接表
template<class T>
class ALGraph
{
public:
    ALGraph(T a[], int n, int e);// 构造函数建立具有N个定点e条边的图
    ~ALGraph() {}// 析构函数
    void DFSTraaverse(int v);// 深度优先遍历图
    void BFSTraverse(int v);// 广度优先遍历图
private:
    VertexNode adjlist[MaxSize];// 存放顶点的数组
    int vertexNum, arcNum;// 图中顶点数和边数
};
```

```
template<class T>
ALGraph<T>::ALGraph(T a[], int n, int e)
{
    vertexNum = n;
    arcNum = e;
    for (int i = 0; i <vertexNum; i++)
    {
        adjlist[i].vertex = a[i];
        adjlist[i].firstedge = NULL;
    }
    for (int k = 0; k < arcNum; k++)
    {
        int i, j;
        std::cin >> i >> j;
        ArcNode* s = new ArcNode;
        s->adjvex = j;
        s->next = adjlist[i].firstedge;
        adjlist[i].firstedge = s;
    }
}

template<class T>
inline void ALGraph<T>::DFSTraaverse(int v)
{
    std::cout << adjlist[v].vertex;
    visited[v] = 1;
    ArcNode* p = adjlist[v].firstedge;
    while (p != NULL)
    {
        int j = p->adjvex;
        if (visited[j] == 0)
            DFSTraaverse(j);
        p = p->next;
    }
}

template<class T>
inline void ALGraph<T>::BFSTraverse(int v)
{
    int visited[MaxSize] = { 0 };// 顶点是否被访问的标记
    queue<T> Q;
    Q.front = Q.rear = -1;    // 初始化队列
    std::cout << adjlist[v].vertex;
    visited[v] = 1;
    Q.data[++Q.rear] = v;// 被访问顶点入队
    while (Q.front != Q.rear)
    {
        v = Q.data[++Q.front];    // 对头元素出队
        ArcNode* p = adjlist[v].firstedge;
        while (p != NULL)
        {
            int j = p->adjvex;
            if (visited[j] == 0)
            {
                std::cout << adjlist[j].vertex;
                visited[j] = 1;
                Q.data[++Q.rear] = j;
```

```
            }
            p = p->next;
        }
    }
}
// main.cpp
#include"graph.h"
using namespace std;
int main()
{
    int arry[] = { 1,2,3,4,5 };
    ALGraph<int> graph(arry, 5, 7);
    graph.BFSTraverse(3);
    cout << endl;
    graph.DFSTraaverse(3);
    system("pause");
    return 0;
}
```