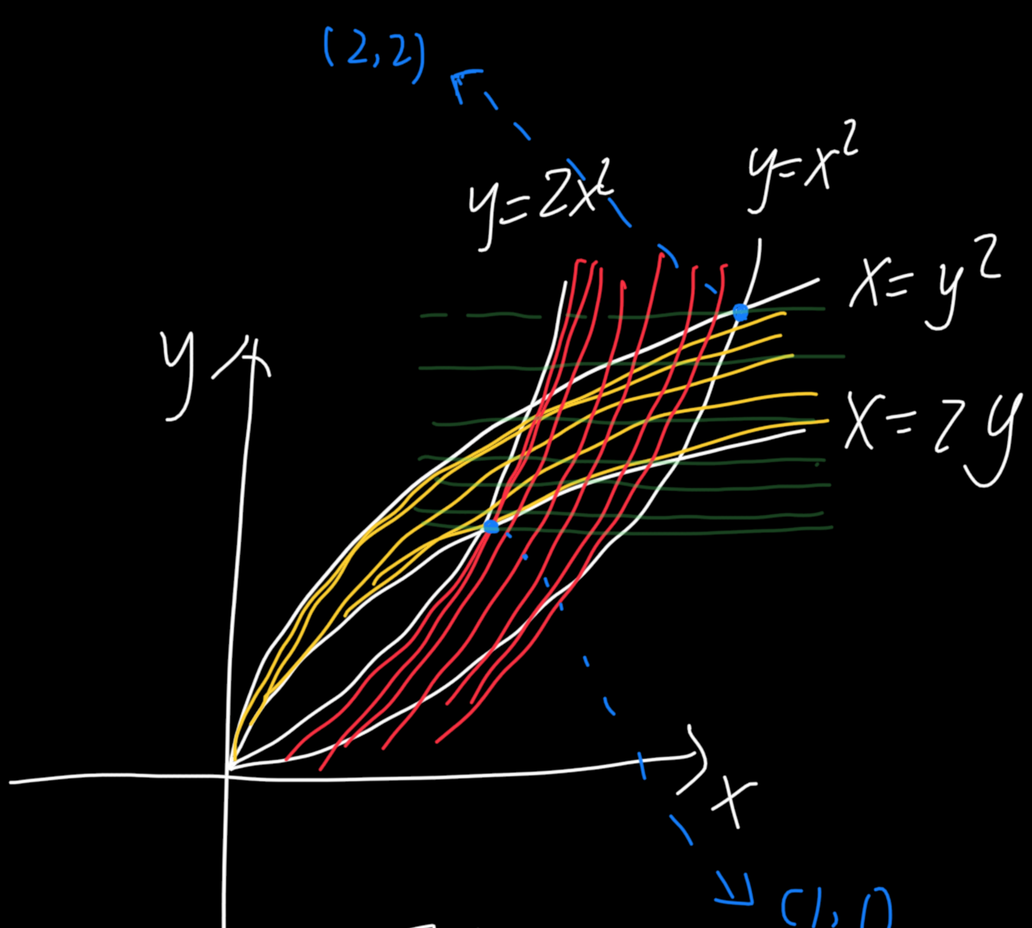
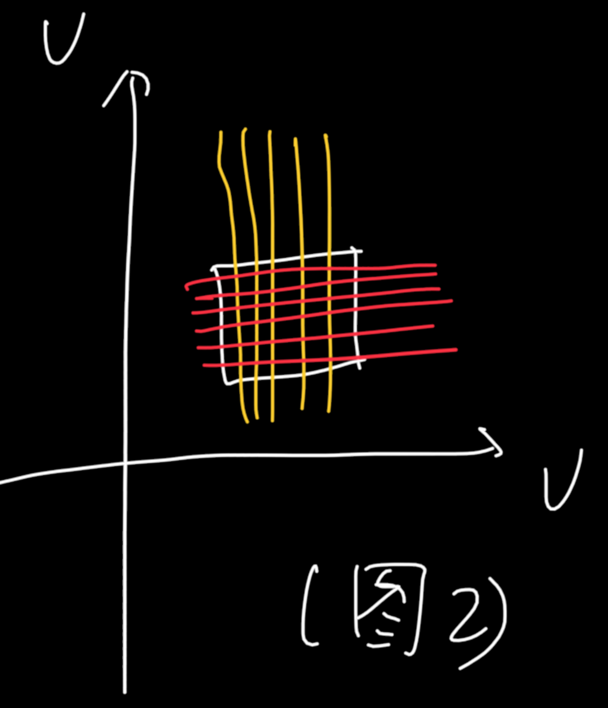


(图1)

对于 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x^2 \\ x=y^2 \\ x=2y^2 \end{cases}$

我们作换元 $\frac{y}{x^2}=u\in(1,2)$

$\frac{x}{y^2}=v\in(1,2)$



(图2)

当 u 从 1 到 2 取遍 (黄线时)

对应 $y=ux^2$ 抛物线族取遍黄色区域

当 v 从 1 到 2 取遍红线时

对应 $x=vy^2$ 抛物线簇取遍红色区域

由此确定 u.v 为独立变量，即积分上下限为常数.

但当我们作变换 $\begin{cases} \frac{y}{x^2}=u\in(1,2) \\ y=v\in(1,2) \end{cases}$ ⟶ 由图1得

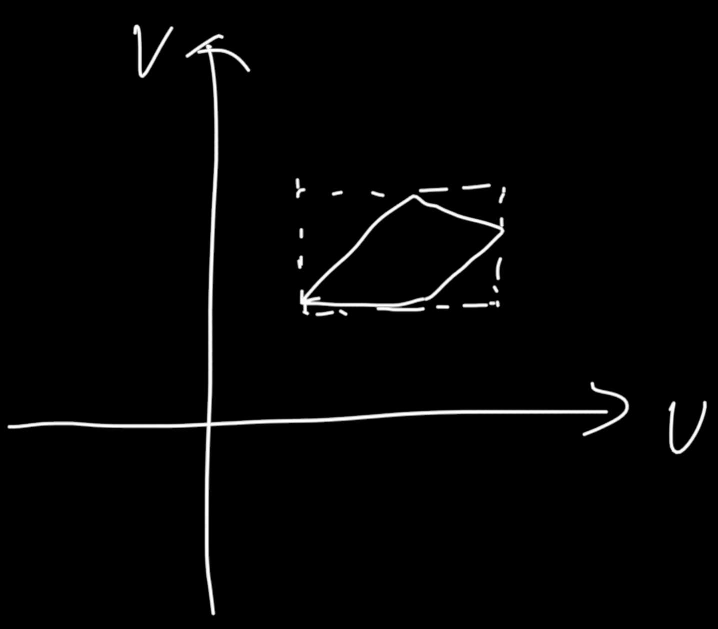
此时

图一是由带约束的 $y=v$ 直线族

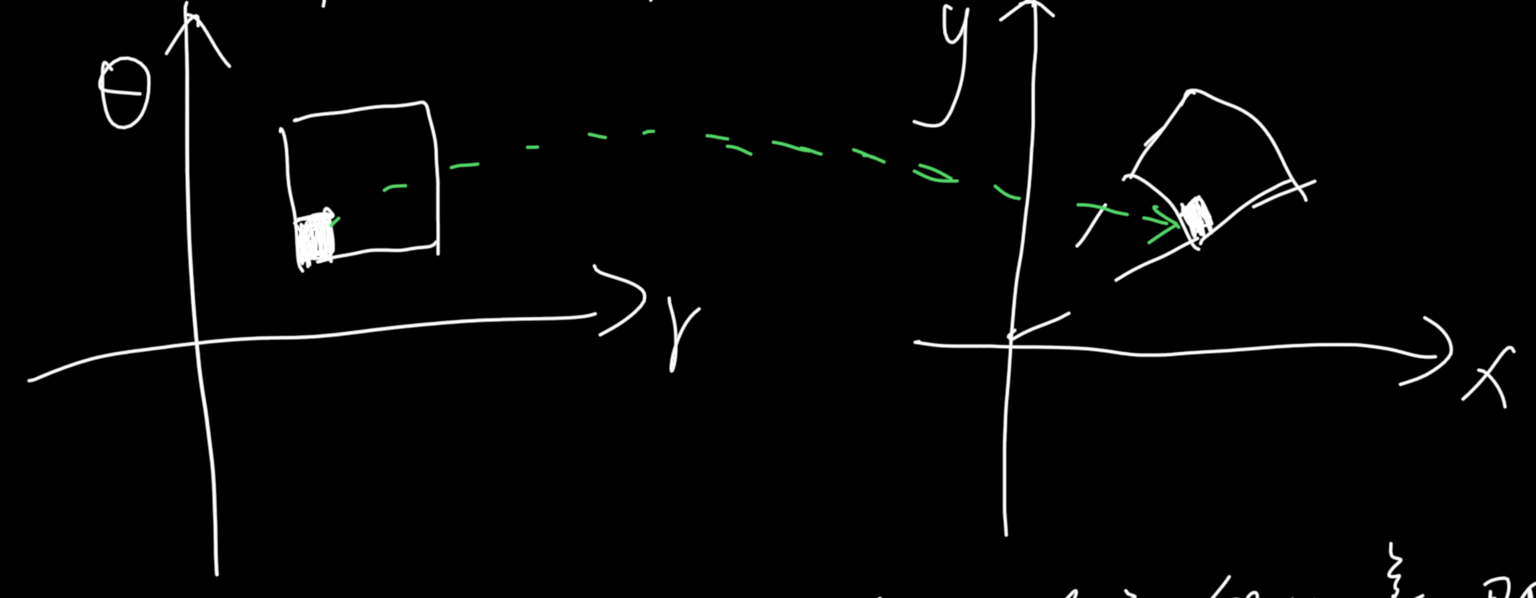
与 $y=ux^2$ 抛物线族的交集

因此积分上下限带参，即非矩形

这也说明 u,v 2个变量不独立

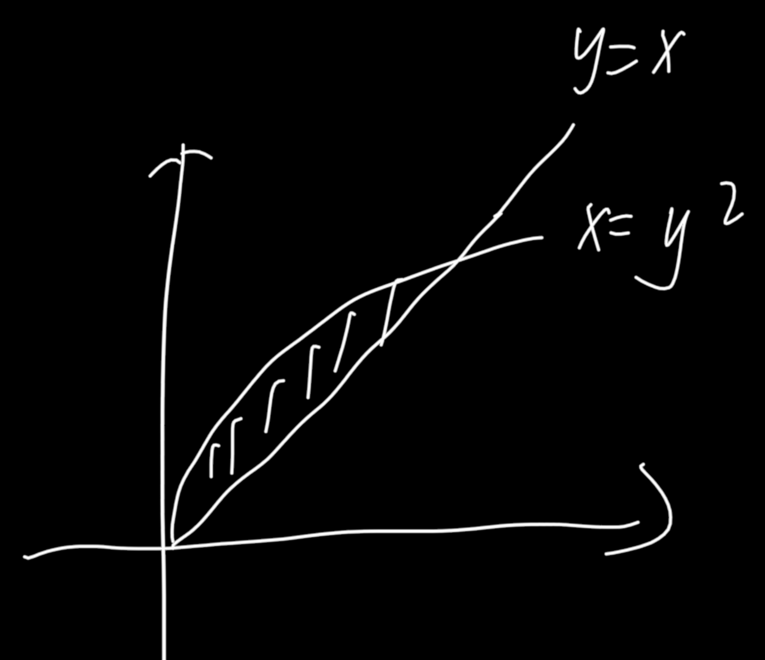


值得提，在极坐标意义下，我们可认为 r θ 垂直



但映射的面积比率，即雅可比行列式存在

当出现



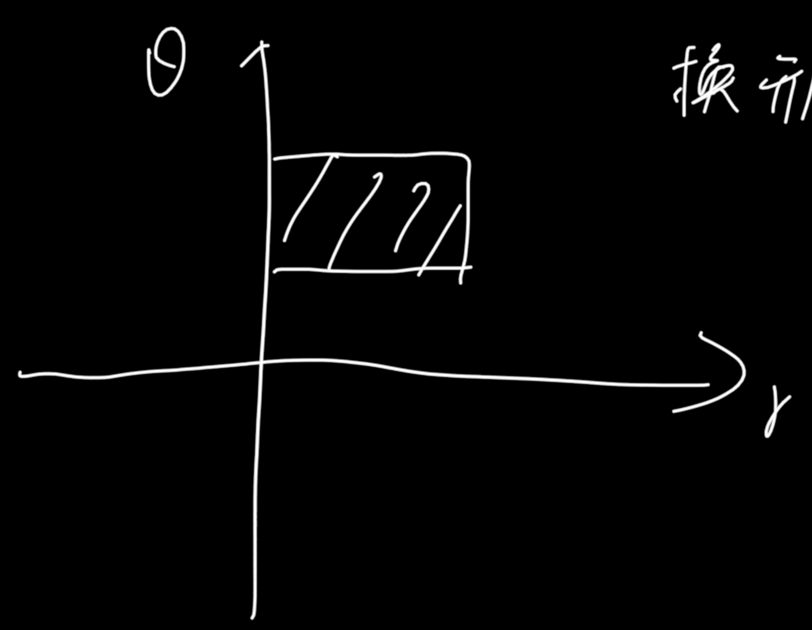
这种面积时，我们作变换

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

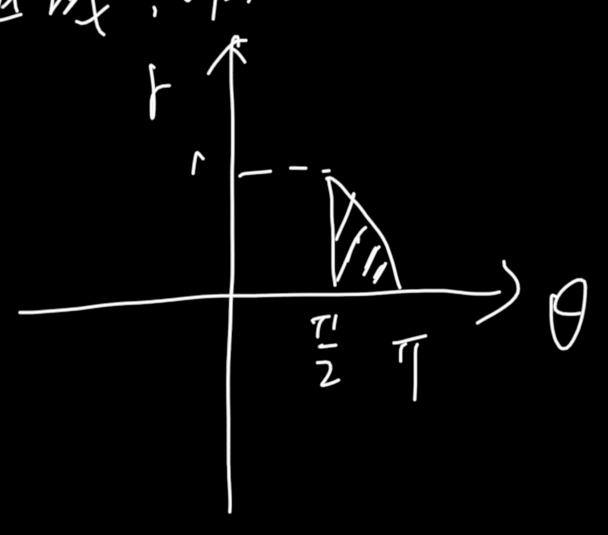
得 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$0\le r\le 1$

但



换元后非矩形区域，而是该区域



如何确定是哪种形式？

我们只需在换元后，假设是矩阵区域，然后变动 u, v

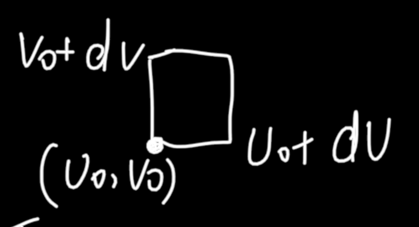
观察原曲线族是否能准确交集成原面积

例：图1 的第2种变换法，变动 u, v

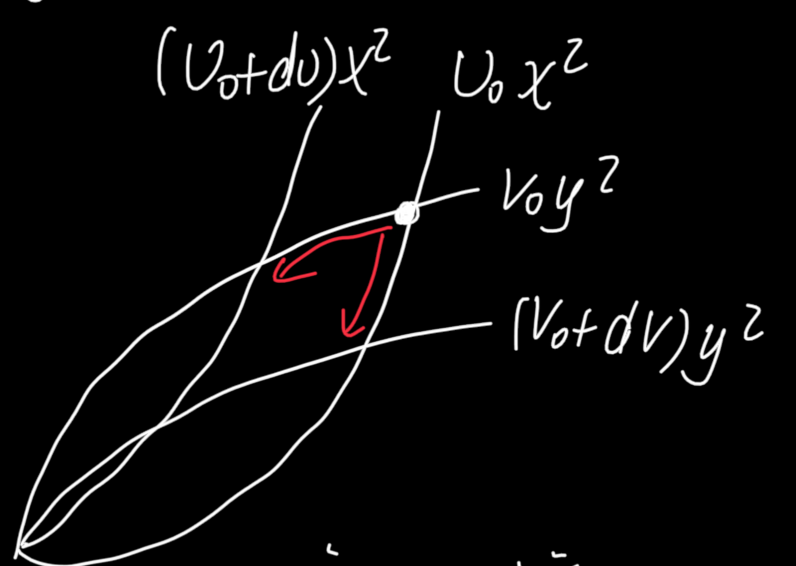
形成绿线与黄线交集不是原图形

说明 u,v 在积分过程中存在约束

简证明：取面积元 $du\times dv$



在逆变换 $(u,v)\Rightarrow(x,y)$ 下



两面积元以雅可比行列式的比率一一对应