工　程

矩阵理论

教　　　　材

工程矩阵理论，张明淳，东南大学出版社

参　　　考　　　书

1. **高等代数**，北京大学数学系几何与代数教研室代数小组，高等教育出版社
2. **Matrix Analysis**, R.A.Horn and C.R.Johnson, Cambridge University Press, 1985(中译本，杨奇译，天津大学出版社）

要　　求

1. 重点是基本理论，基本方法；
2. 结合授课内容，熟悉课本；
3. 通过例题，掌握相关概念和理论；
4. 通过练习题，熟悉相关理论、方法；
5. 及时复习、总结，巩固所学内容。

本课程大致内容

第0章 复习与引深

第1章 线性空间与线性变换

第2章 内积空间、等距变换

第3章 矩阵的相似标准形

第4章 Hermite二次型

第5章 范数及矩阵函数

第6章 矩阵的广义逆

矩阵理论

1.设A是方阵，计算A^k.

2.极限$\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

3.线性方程组$Ax=b$的求解.

第0章　复习与引深

1. 矩阵运算
2. 线性方程组
3. 向量组的极大无关组及秩
4. 矩阵的秩及等价标准形

矩阵的乘法中应注意的问题

1 存在非零零因子

例1

$$N_{n\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2 不可交换

例2：设$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$，其中，$d_1, d_2$互异.求所有与$A$可交换的矩阵.

可以证明:

如果A与任意n阶方阵可交换,则A是数量矩阵.

由此导致的一些问题

- 乘法消去律不成立

对给定的矩阵A,当A满足什么条件时，由$AB=AC$必可推出$B=C$?

- 一些代数恒等式对矩阵不再成立

当A与B可交换时,相应的二项式定理成立,即

$$(A+B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1}B + C_m^2 A^{m-2}B^2 + \cdots + C_m^{m-1}AB^{m-1} + B^m$$

例3

计算下述$n\times n$矩阵的k次幂：$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$

解：

$\because A=\lambda I+N$且λI与N可交换，

$$\therefore A^k=(\lambda I+N)^k=(\lambda I)^k+C_k^1(\lambda I)^{k-1}N+C_k^2(\lambda I)^{k-2}N^2+\cdots+C_k^{k-1}(\lambda I)N^{k-1}+C_k^kN^k$$

$$\therefore A^k=\lambda^kI+C_k^1\lambda^{k-1}N+C_k^2\lambda^{k-2}N^2+\cdots+C_k^{k-1}\lambda N^{k-1}+C_k^kN^k$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \ddots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & C_k^2\lambda^{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k\end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法规则

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{n\times t}$ 将这两个矩阵分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix}$$

在一定条件下，$C=AB$ 也可以写成分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix}$$

其中，

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{iq}B_{qj}$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{iq}B_{qj}$$

条件：上式有意义

$\Leftrightarrow A$的列的分法与B的行的分法一致.

一些特殊的分块形式

1. $A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$

A, B均按行进行分块

$$\Rightarrow r(A+B)\leq r(A)+r(B)$$

（接上页） 设$A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{n\times t}$

2.A按列分块，B不分块

$\Rightarrow AB$的列向量均是A的列向量的线性组合，

且组合系数刚好是B的相应的各个列的元素

$\Rightarrow r(AB)\le r(A), r(B)$

（接上页）

3.将A视作一块，B按列分块。

$$\Rightarrow \text{若} AB = O, \text{则} r(A) + r(B) \le n.$$

（接上页）

4.将相关矩阵分成四块。

例 4 证明：可逆上三角矩阵的逆阵也是上三角矩阵。

非齐次线性方程组

线性方程组

$Ax=b$, 其中，$A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}, b=\left(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_s\right)^T$

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r\left(A \quad b\right)$

2. 若 $r(A)=r\left(A \quad b\right)=r$, 则有唯一解 $\Leftrightarrow r=n$.

3. 若 $r(A)=r\left(A \quad b\right)=r<n$, 则通解中含有 $n-r$ 个自由未知量.

齐次线性方程组的基础解系

对于齐次线性方程组

$$Ax=\theta, \quad \text{其中，} A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}$$

1. 有非零解当且仅当 $r(A)<n.$

2.若$r(A)<n,$则其基础解系中含$n-r$个解向量.

3.若$r(A)<n,$则其任意$n-r$个线性无关的解向量是其基础解系.

Gauss消元法

用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形矩阵；

确定自由未知量；

用回代法找出通解。

例5　求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \\ 3x_1+3x_2-x_3-2x_4+4x_5=3 \\ x_1+x_2-4x_3-5x_4+5x_5=1 \end{cases}$$

$$\text{增广矩阵} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

简化阶梯形矩阵

满足下列条件的阶梯形矩阵称为简化阶梯形矩阵：

（1） 各个非零行的非零首元均为 1；

（2） 除了非零首元外，非零首元所在的列其余元素都为零。

例5 求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \\ 3x_1+3x_2-x_3-2x_4+4x_5=3 \\ x_1+x_2-4x_3-5x_4+5x_5=1 \end{cases}$$

$$\text{增广矩阵} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例6 求齐次线性方程组的基础解系：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-x_3-2x_4+4x_5=0 \\ x_1+x_2-4x_3-5x_4+5x_5=0 \end{cases}$$

$$\text{增广矩阵} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例6

设A是$s \times n$矩阵，b是s维列向量。证明：

1.$r(A) = r(A^H A)$;

2.线性方程组$A^H Ax = A^H b$恒有解。

向量组的极大无关组及秩

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$线性无关,
且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中每个向量均可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$线性表示,
则称$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一极大无关组,
称r是 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩。

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r$，则其中任意$r$个线性无关的向量均是其极大无关组

例7

求给定向量组的极大无关组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

并且将其余向量用所得极大线性无关组线性表示。

矩阵的秩

矩阵A的秩=A中非零子式的最高阶数

=A的行（列）向量组的秩

有关矩阵的秩的不等式：

$1. r(A+B) \le r(A)+r(B);$

$2. r(AB) \le r(A), r(B);$

$3.$ 若$A_{s\times n}B_{n\times t} = O$, 则$r(A)+r(B) \le n;$

$4. r(A_{s\times n}B_{n\times t}) \ge r(A)+r(B)-n;$

$5.$ 设$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, 则$r(M) \ge r(A)+r(B).$

例8

若A是可逆矩阵，证明$r(AB)=r(B)$.

例9

设A是n阶幂等矩阵，证明：

$$r(A)+r(I-A)=n$$

矩阵的等价标准形

$s\times n$ 矩阵 A 的秩等于 r

$$\Leftrightarrow A\text{ 与矩阵}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\text{等价}$$

$$\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P_{s\times s}, Q_{n\times n}\text{，使得 } A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

（满秩分解）

例10：假设$s\times n$矩阵A的秩为r，证明存在$s\times r$矩阵B及$r\times n$矩阵C，使得$A=BC$（矩阵的满秩分解）.

例11：

$$求A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}的满秩分解$$

$$解：A \xrightarrow{初等行变换} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{初等行变换} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第一章

线性空间和线性变换

第一节 线性空间的定义

用F表示实数全体（R）或复数全体（C）.

定义：设V是非空集合，F是（实或复）数域.

在V及F上定义了两种运算:

加法：对$\forall \alpha, \beta \in V$,在$V$中有惟一的元素与之对应,

记这个元素为$\alpha + \beta$,称为α, β的和;

数乘：对$\forall \alpha \in V, k \in F$,在$V$中有惟一的元素与之对应,

记这个元素为$k\alpha$，称为k与α的积.

如果满足下述公理，则称V是数域F上的线性空间，V中的元素称为是向量。

1.对$\forall \alpha, \beta \in V, \alpha+\beta=\beta+\alpha;$

2.对$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);$

3.$\exists$元$\theta \in V$,使得$\forall \alpha \in V, \alpha+\theta=\alpha;$

4.对$\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V$,使$\alpha+\beta=\theta;$

5.对$\forall \alpha \in V, 1\alpha=\alpha;$

6.对$\forall \alpha \in V, l \in F, (l\alpha)=(kl)\alpha;$

7.对$\forall \alpha \in V, k, l \in F, (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha;$

8.对$\forall \alpha, \beta \in V, k \in F, k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

例1

$1. V = F^n$

$2. V = F^{n \times n}$

$3. V = F[x]$

$4. V = F_n[x]$

$5. V = C, F = R$

$6. V = C, F = C$

例1（续）

$7.V=R,F=C$

$8.V=R^{+},F=R,$通常运算

$9.V=R^{+},F=R$

定义新的运算:

$\oplus$:对$\alpha,\beta\in V,\alpha\oplus\beta=\alpha\beta;$

$\circ$:对$\alpha\in V,k\in F,k\circ\alpha=\alpha^{k}$

线性空间的性质

假设V是数域F上的线性空间,则

1. V中的零向量是惟一的;
2. 对$\forall \alpha \in V, \alpha$的负元素是惟一的,记为$-\alpha$;
3. 加法消去律:若$\alpha+\beta=\alpha+\gamma$,则$\beta=\gamma$;
4. 对$\forall \alpha, \beta \in V$,向量方程$\alpha+x=\beta$有惟一解$(x=\alpha+(-\beta))$,记$x=\alpha-\beta$;
5. $(-k)\alpha=-(k\alpha)$,特别地,$(-1)\alpha=-\alpha$;
6. $k\alpha=\theta \Leftrightarrow k=0$或$\alpha=\theta$

第二节 基、维数和坐标

在线性空间中可以定义线性组合、线性表示、线性相关、线性无关，向量组的极大线性无关组、秩等概念。

如：

定义：设α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s \in V$.若∃不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s=\theta$,则称向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$线性相关。否则，称$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_s$是线性无关的。

一些重要结论

1.若$s \geq 2$,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow \exists j$,使$\alpha_j$可由其余$s-1$个向量线性表示

2.若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关,但$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.而且,线性表示的方法是惟一的.

一些重要结论（续）

3.若$t > s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,
则，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性相关.

推论1.若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,
且$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性无关，则$t \le s$.

推论2.若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$等价,且均
线性无关,则$s = t$.

例1

1.在$F^{2\times 2}$中，$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2.在$F_3[x]$中，$\alpha_1=2+x+3x^2,\alpha_2=1+3x-x^2,\alpha_3=3+4x+2x^2$

3.$V=C,F=R,\quad \alpha_1=1,\alpha_2=i=\sqrt{-1}$

4.$V=C,F=C,\quad \alpha_1=1,\alpha_2=i=\sqrt{-1}$

定义（基，维数）

若α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_n \in V$满足条件

(1).α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n线性无关；

(2).$\forall \eta \in V$均可由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n线性表示

则，称α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n是V的一组基.

称n是V的维数，记为

维(V)或$\dim V$

注：

命题：若$\dim V = n$,则V中任意$n+1$个向量线性相关.

注：线性空间的基不一定存在. 如：

零空间：$V = \{\theta\}$ $\quad \dim\{\theta\} = 0$

$V = F[x]$ $\quad \dim F[x] = \infty$

例2

$1. V = F^n.$

$2. V = F^{2\times 2}.$

$3. V = F_n[x].$

$4. V = C, F = R.$

$5. V = C, F = C.$

$6. V = R^+, F = R.$

定理1

若$\dim V = n$,则V中任意n个线性无关的向量均构成V的基.

例3:证明:在$F_3[x]$中,下述三个向量构成一组 基:

$$f_1(x)=1+2x+3x^2,\ f_2(x)=3+x-x^2,\ f_3(x)=2-x+x^2$$

定义（坐标）：

设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n是V的一组基, $\beta\in V$且

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则称$x_1, x_2, \cdots, x_n$是β在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标,

或$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$是$\beta$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标(列向量).

例4

F^n中， $\eta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在基

$e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,0)$

下的坐标.

例5

在$F^{2\times 2}$中，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$在基$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$下的坐标.

注

1.线性空间的基是有序的。

2.基的几何意义

定理2

假设η，$\eta_i \in V$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$下的坐标分别是$X$及$X_i$, $i = 1,2,\cdots,s$.则

1. $\eta = \theta \Leftrightarrow X = \theta$;

2. $\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s \Leftrightarrow X = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s$;

3. $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$线性相关 $\Leftrightarrow X_1, X_2, \cdots, X_s$线性相关.

极大无关组的计算

例6

判断$F_3[x]$中下述向量组的线性相 关性：

$$f_1(x)=1+x,\ f_2(x)=2+x+x^2,\ f_3(x)=x+x^2$$

例7

求$F^{2\times 2}$中下述向量组的极大无关组:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

形式记号

若$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$是$\beta$在基$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_n$下的坐标,

则β可形式地记成

$$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)X$$

形式记号

若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示,

于是,我们可以找到一个$s\times t$矩阵A,使得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$$

形式记号的性质

若$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$

$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)B$

则$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)(AB)$

例8

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ A是可逆矩阵.

定义(过渡矩阵)

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$都是$V$的基,且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

则称A是从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.

于是，过渡矩阵一定是可逆的

过渡矩阵的性质

1.若从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵是$A$，
则从基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的过渡矩阵是$A^{-1}$。

2.若从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵是$A$，
从基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$的过渡矩阵是$B$,
则从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$的过渡矩阵是$AB$.

例9

在F^3中，求

从基$\alpha_1=(2,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(1,1,2)$

到基$\beta_1=(1,2,2),\beta_2=(2,1,2),\beta_3=(2,2,1)$

的过渡矩阵。

定理3(坐标变换公式)

设$\eta \in V$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标是$X$,

在基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标是Y,

而从基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵是$A$,

则 $X = AY$, 或 $Y = A^{-1}X$

例10

在$F_3[x]$中,求$f(x)=1+x+x^2$在基

$$2+x, x+x^2, 2x+3x^2$$

下的坐标

第三节　子空间, 交与和

定义: 设V是数域F上的线性空间,W是V的非空子集.
若W关于V的运算也构成F上的线性空间,则称W是V的
子空间.记$W \le V$.

例: $F_n[x]$是$F[x]$的子空间.

注: W的运算与V中的运算应当相同.

定理1

设$W \subseteq V$.则W是V的子空间$\Leftrightarrow W$关于线性运算封闭.

例:$\{\theta\}$及V本身均是V的子空间.

例:R^3中集合

$$V_1=\{(x,y,z)\,|\,3x+2y-5z=1\}$$

$$V_2=\{(x,y,z)\,|\,3x+2y-5z=0\}$$

两类重要的子空间

1.设$A\in F^{s\times n}.V=\left\{\eta\in F^{n}\mid A\eta=\theta\right\}$

称V是齐次线性方程组$Ax=\theta$的解空间.

2.设V是F上的线性空间。α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_s\in V$.集合

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\mid k_i\in F\right\}$$

称W是由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间.$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是其生成元.记

$W=L(\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots\alpha_s)$

命题：

1.若$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则$\forall\alpha_j\in W$；

2.$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价；

3.$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组是$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的基。

故，$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

例1

在F^4中,已知

$$\alpha_1=(1,2,1,1),\alpha_2=(2,3,1,2),\alpha_3=(1,1,1,1),\alpha_4=(2,0,1,2)$$

求$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组基及其维数.

例2

在$F^{2\times 2}$中,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

求$W=L(A,B,C,D)$的一组基.

求 A,B,C,D 在所得基下的坐标。

问题：为什么 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 不是W 的基?

例3

求$F^{2\times 2}$中子空间$W=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \mid x,y\in F\right\}$的一组基.

例4

设$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,证明:$W=\{X\in F^{2\times 2}\mid AX=XA\}$是$F^{2\times 2}$的子空间,并求$W$的一组基.

定理2

有限维线性空间V的子空间的基均可扩充成V的一组基.

例;已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.将$A, B$扩充成$F^{2\times 2}$的一组基.

子空间的交与和

假设V_1，$V_2 \leq V$.

定义:

$$V_1 \cap V_2 = \{\eta \in V \mid \eta \in V_1 \text{且} \eta \in V_2\}$$

$$V_1 + V_2 = \{\eta \in V \mid \exists \eta_1 \in V_1，\eta_2 \in V_2 \text{使得} \eta = \eta_1 + \eta_2\}$$

定理3:

$V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$是V的子空间.

注：交与并的区别

命题:若$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s),V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，则

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

定理4（维数定理）

假设$V_1, V_2 \leq V$,有$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim V_1\cap V_2$

例5

设$F^{2\times 2}$子空间

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in F\right\}, V_2=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \mid x, y \in F\right\}$$

求V_1, V_2, V_1+V_2及$V_1 \cap V_2$的及维数.

例6

设$\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(-1,1,1,1),\beta_1=(2,-1,0,1),\beta_2=(1,-1,3,7)$

$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$,求$F^4$的子空间$V_1+V_2,V_1\cap V_2$的基及维数.

例7

$$\text{已知} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V_1=\{x\in F^4 \mid Ax=\theta\}, V_2=\{x\in F^4 \mid Bx=\theta\}$$

求$V_1\cap V_2$，V_1+V_2的基及维数.

直和

定义.设$V_1,V_2 \leq V$.若$\forall \eta \in V_1+V_2$，$\exists$惟一的$\eta_1 \in V_1,\eta_2 \in V_2$使得$\eta=\eta_1+\eta_2$，则称$V_1+V_2$是直和.记为$V_1 \oplus V_2$

定理5

设$V_1,V_2 \le V$,则下述条件是等价的:

1.V_1+V_2直和;

2.θ的表示方式是唯一的;

3.$V_1 \cap V_2=\{\theta\}$;

4.$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$;

5.将V_1,V_2的基合在一起就是V_1+V_2的基.

例8

已知$F^{n\times n}$的子空间

$$V_1=\left\{A \mid A^T=A\right\}, V_2=\left\{A \mid A^T=-A\right\}$$

证明$F^{n\times n}=V_1\oplus V_2$

例9

设 $A \in F^{n\times n}$, 且$A^2 = A$.

$V_1 = \left\{x \in F^n \mid Ax = \theta\right\}, V_2 = \left\{x \in F^n \mid Ax = x\right\}$

证明$F^n = V_1 \oplus V_2$

多个子空间的直和

定义.设$V_1,V_2,\cdots,V_s \le V$.若$\forall \eta \in V_1+V_2+\cdots+V_s$，

$\exists$惟一的$\eta_i \in V_i, i=1,2,\cdots,s$,使得$\eta=\sum_{i=1}^{s}\eta_i$，则称

$V_1+V_2+\cdots+V_s$是直和.记为$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$

定理6

设$V_1, V_2, \cdots V_s \le V$,则下述条件是等价的：

$1. V_1 + V_2 + \cdots + V_s$直和;

$2. \theta$的表示方式是唯一的;

$$3. V_j \cap \sum_{i \ne j} V_i = \{\theta\};$$

$$4. \dim \sum_{i=1}^{s} V_i = \sum_{i=1}^{s} \dim V_i$$

$5.$将$V_1, V_2, \cdots, V_s$的基合在一起就是 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$的基.

问题：

1. 当$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \{\theta\}$时，是否

$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$是直和？

2. 当$V_i \cap V_{js} = \{\theta\}, \forall i \neq j$时，是否

$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$是直和？

第四节　线性映射

称集合 S 到自身的映射 $f: \quad S \to S$ 为 S 上的变换。

称集合 S 到自身的映射 $\begin{array}{l} I: \quad S \to S \\ \quad\; x \mapsto x \end{array}$ 为 S 上的恒等变换。

定义.设有映射$f: S \to T$.若$x \in S, y = f(x)$,则称y为的x在f下的像，称x为y在f下的原像.

定义.假设映射$f: S \to T$.

若$f(S)=\{y \in T \mid \exists x \in S$,使得$y=f(x)\}=T$,则称$f$是满射;

若由"$f(a)=f(b)$"必能推得"$a=b$",则称f是单射;

若f既是满射，又是单射，则称f是双射。

定理1: $f: S \to T$是双射$\Leftrightarrow$ f是可逆映射(存在映射$g: T \to S$，使得$gf=I_S, fg=I_T$).

定义：

设V,U均是数域F上的线性空间若映射$f:V\to U$满足条件：

1. $\forall x\in V, k\in F, f(kx)=kf(x)$;
2. $\forall x,y\in V, f(x+y)=f(x)+f(y)$.

则称f是从V到U的线性映射。

从V到U的线性映射全体记为$Hom(V,U)$.

V到自身的线性映射称为V上的线性变换。

例1

1.假设$A \in F^{s \times n}$,映射$f: F^n \to F^s$定义为

$\forall x \in F^n, f(x) = Ax.$

2.映射$f: F_n[x] \to F_n[x]$定义为:

$\forall p(x) \in F_n[x], f(p(x)) = p'(x).$

例1

3.假设$A \in F^{n\times n}$,映射$f : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$定义为:

$\forall X \in F^{n\times n}, f(x) = XA.$

4. $$f : R / R \to (R^{+}, \oplus, \square\ ) / R$$

$$x \mapsto 2^{x}$$

例2

假设V是数域F上的线性空间，$\eta_0 \in V$是一给定向量。

考虑下列变换是否为线性变换：

$$1.\forall x \in V,\ f(x) = \eta_0.$$

$$2.\forall x \in V,\ f(x) = x + \eta_0.$$

注

下述变换肯定是线性变换：

$$O:V\to V,\forall x\in V,O(x)=\theta;$$

$$I:V\to V,\forall x\in V,I(x)=x.$$

线性映射的性质：

假设$f:V\to U$是线性映射。则：

1. $f(\theta)=\theta$;

2. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\in V,k_1,k_2,\cdots k_s\in F$,则$f(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}k_i f(\alpha_i)$;

3. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\in V$线性相关，则$f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots f(\alpha_s)\in U$线性相关；

4. 若$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$,则$f$的值域$R(f)=f(V)=L(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots f(\alpha_s))$;

5. $K(f)=f^{-1}(\theta)=\{x\in V\mid f(x)=\theta\}$是$V$的子空间，称为$f$的核子空间。

例3

求线性映射f的值域及核子空间的基和维数：

其中：$f: F_3[x] \to F_3[x]$定义为：$f(p(x)) = p'(x)$

例4

设$A\in F^{s\times n}$.求线性映射f的值域及核子空间的基和维数，

其中：$f:F^{n}\rightarrow F^{s}$定义为：

$f(x)=Ax,\forall x\in F^{s}$

(f的值域及核子空间分别记为$R(A),K(A)$.)

线性变换的运算

假设$f, f' \in Hom(V,U), g \in Hom(U,W), k \in F$,
定义$kf, f+f', gf$如下：

$$kf : V \to U \qquad (kf)(x) = kf(x)$$

$$f+g : V \to U \qquad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$gf : V \to W \qquad (gf)(x) = g(f(x))$$

它们都是线性变换。

线性变换的运算的性质：

假设$f, g, h \in Hom(V, V)$.则：

$1.(fg)h = f(gh);$

$2. f(g+h) = fg + fh;$

$3.(f+g)h = fh + gh;$

证明：

线性映射（变换）的矩阵：

设$f \in Hom(V,U)$.选定基偶：

$$V:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s; \qquad U:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$$

若$(f(\alpha_1), f(\alpha_2),\cdots, f(\alpha_s)) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A$

则称A是f在选定基偶下的矩阵。

如$U=V$,且

$$(f(\alpha_1), f(\alpha_2),\cdots, f(\alpha_s)) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$$

则称A是线性变换f在所选基下的矩阵。

例

1. 假设 $A \in C^{s\times n}$，定义 $f: F^n \to F^s$ 为

$$f(x) = Ax$$。

2. 定义 $f: R_3[x] \to R_3[x]$ 为

$$f(\varphi(x)) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$。

例5

$f \in Hom(F^{2\times 2}, F^{2\times 2})$定义为：

$$f(X)=\begin{pmatrix} a-3b & b+2c \\ a-b-c & a+b-3c+4d \end{pmatrix}, \text{其中，} X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in F^{2\times 2}.$$

求f在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵.

定理2

若$f \in Hom(V,U)$在基偶$V:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;U:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵是$A$,$\eta \in V$在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的坐标是$X$,则$f(\eta)$在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标是$AX$.

定理3

设$f \in Hom(V,U)$在选定基偶：

$$V:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\quad U:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$$

下的矩阵是A。 则f在新的基偶

$$(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s')=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)P \qquad (\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n')=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)Q$$

下的矩阵是

$$B=Q^{-1}AP$$

特别是,若$f \in Hom(V,V)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$下的矩阵是$A$,则, f在新的基

$$(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s')=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)P$$

下的矩阵是

$$B=P^{-1}AP.$$

例6

求线性变换$f:F_3[x]\to F_3[x]$，$f(p(x))=p'(x)$，$\forall p(x)\in F_3[x]$

在基$p_1(x)=1+x+3x^2, p_2(x)=1+x, p_3(x)=1+2x-x^2$下的矩阵。

定理4

假设$f, g \in Hom(V,V)$在V的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$下的矩阵分别是$A, B$,
设$k \in F$,则在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$下，

1.kf的矩阵是kA;

2.$f+g$的矩阵是$A+B$;

3.fg的矩阵是AB;

4.f可逆$\Leftrightarrow$矩阵A可逆，并且，f^{-1}的矩阵是A^{-1}。

其实，对线性映射的矩阵有类似的性质。

第五节 线性映射的值域及核子空间

假设$f \in Hom(V,U)$, f的值域$f(V)$及核子空间$f^{-1}(\theta)$常被记为$R(f)$和$K(f)$.

定理1.假设$f \in Hom(V,U)$.则

$$f\text{是满射} \Leftrightarrow R(f)=U;$$

$$f\text{是单射} \Leftrightarrow K(f)=\{\theta\}.$$

值域的计算

若$f \in Hom(V,U)$在基偶$V:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;U:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵是$A$,即

$$(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_s))=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A$$

于是$f(V)=L(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots f(\alpha_s))$

从而,$\dim R(f)=r(A)$.

核子空间的计算

若$f \in Hom(V,U)$在基偶$V:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;U:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵是$A$,$\eta \in V$在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的坐标是$X$,则$f(\eta)$在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标是$AX$.

因此，$\eta \in K(f) \Leftrightarrow AX=\theta;$

从而，若$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$是$AX=\theta$的基础解系， η_j是以X_j为坐标的V中的向量，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$K(f)$的基。

特别,$\dim K(f)=s-r(A)$.

定理2（线性变换的维数定理）

假设$f \in Hom(V,U)$.则

$$\dim R(f) + \dim K(f) = \dim V$$

推论：设$\dim V < \infty, f \in Hom(V,V)$.则

$$f\text{可逆} \Leftrightarrow f\text{是单射} \Leftrightarrow f\text{是满射}$$

注：对无限维空间，推论不成立。（反例）

例1

设$f \in Hom(F^{2\times 2}, F^{2\times 2})$定义为:

对$\forall X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, f(X) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$

求$R(f)$及$K(f)$的一组基及维数。

定义（不变子空间）：

设$f \in Hom(V,V), W \le V$.若$\forall \eta \in W$,有$f(\eta) \in W$,则称W是f的不变子空间。

例.设$f \in Hom(V,V)$.则$R(f), K(F)$均是f的不变子空间。

为何要讨论不变子空间？

1. 如果W是关于f的不变子空间，则$f|_W$可以看成是W上的线性变换；

2. 如果W是关于f的不变子空间，取W的一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，再将其扩充成V的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots\alpha_n$，则$f$在这组基下的矩阵是分块对角阵$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$；

为何要讨论不变子空间？

如果$V=V_1\oplus V_2$，其中，V_1,V_2都是关于f的不变子空间，则取V_1的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，取V_2的基$\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，$\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$是$V$的基，这组基下，$f$的矩阵为$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$。

例2

设$f \in Hom(V,V)$,且$f^2 = f$.证明：f在V的任意基下的矩阵均相似于$\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

线性空间的同构

定义：假设U,V都是数域F上的线性空间。

如果 $f \in Hom(V,U)$ 是双射，则称 f 是线性空间U,V之间的同构。

如果U,V之间存在同构映射，则称U,V是同构的，记为$V \cong U$。

定理 1 假设 $f:V\to U$ 是线性空间 U,V 之间的同构，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$。则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关当且仅当

$f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_s)\in U$ 线性相关。

定理 2 假设U,V都是数域F上的线性空间，则

$$V \cong U \text{ 当且仅当 } \dim V = \dim U$$

例 假设V,U分别是数域F上s维和n

维线性空间，求$\dim Hom(V,U)$。

第二章

内积空间、等距变换

第一节 基本概念

本章的目的：将内积推广到抽象的线性空间

约定：数域F指实数域R或复数域C

定义：假设V是数域F上的线性空间,在V上定义了一个二元函数$<\alpha,\beta>$,若

1.$\forall\theta\neq\alpha\in V,<\alpha,\alpha>>0$;

2.$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$;

3.$\forall\alpha,\beta\in V,k\in F,<k\alpha,\beta>=k<\alpha,\beta>$;

4.$<\alpha,\beta>=\overline{<\beta,\alpha>}$

则称$<\alpha,\beta>$是α,β的内积。定义了内积的线性空间称为内积空间。

当$F=R$时称V是欧基里德空间，当$F=C$时称V是酉空间。

例1

$$1. V = R^n, <\alpha, \beta> = \beta^T \alpha.$$

$$2. V = R^{n\times n}, <A, B> = trB^T A.$$

$$3. V = R_3[x], <f(x), g(x)> = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

$$4. V = C^n, <\alpha, \beta> = \beta^H \alpha.$$

内积的性质

$1. <\alpha, \beta+\gamma> = <\alpha, \beta> + <\alpha, \gamma>;$

$2. <\alpha, k\beta> = \bar{k} <\alpha, \beta>;$

$3. <\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{t} l_j\beta_j> = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_i\bar{l}_j <\alpha_i, \beta_j>;$

4.对任意$\alpha \in V, <\alpha, \theta> = <\theta, \alpha> = 0$

度量矩阵

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的基， $\alpha,\beta\in V$的坐标是

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T,$$

则$<\alpha,\beta>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\overline{y_j}<\varepsilon_i,\varepsilon_j>$

$$=X^TA\overline{Y}$$

其中，$A=(<\varepsilon_i,\varepsilon_j>)_{n\times n}$,称$A$是$V$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵。

若$F=R$,则$A=A^T$;

若$F=C$,则$A=A^H$

向量的模（长度）

定义：设$\alpha \in V, \alpha$的模（长度）定义为 $\|\alpha\| = \sqrt{<\alpha, \alpha>}$

若$\|\alpha\| = 1$，则称α是单位向量。

性质：

$1. \forall \alpha \in V, \|\alpha\| \geq 0,$ 且$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta;$

$2. \|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|;$

故若$\alpha \neq \theta,$则$\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是单位向量.

C-B不等式

$$\forall \alpha, \beta \in V, |<\alpha, \beta>| \le \|\alpha\| \|\beta\|$$

而且，等号成立$\Leftrightarrow \alpha$，β线性相关。

三角不等式

$$\forall \alpha, \beta \in V, \|\alpha\| + \|\beta\| \geq \|\alpha + \beta\|$$

定义：向量α，β间的距离定义为

$$d(\alpha，\beta) = \|\alpha - \beta\|$$

三角不等式的距离形式：

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$$

正交性

定义：若向量α，β的内积为零，则称α，β是正交的。

记$\alpha \perp \beta$。

勾股定理：若$\alpha \perp \beta$，则$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$

标准正交基

定义：

由两两正交的非零向量组成的向量组称为正交向量组。

由两两正交的单位向量组成的向量组称为标准正交向量组。

作为正交向量组的基称为是正交基。

作为标准正交向量组的基称为是标准正交基。

标准正交基下的内积

明显地， V 的一组基是标准正交基当且仅当相应的度量矩阵是单位阵。

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的标准正交基， $\alpha,\beta\in V$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是$X,Y$,则,$<\alpha,\beta>=Y^H X$

$$=<X,Y>_{C^n}$$

Schmidt正交化方法

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$是线性无关的。

正交化：

令：$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2-\frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{<\alpha_s,\beta_{s-1}>}{<\beta_{s-1},\beta_{s-1}>}\beta_{s-1}-\cdots\cdots-\frac{<\alpha_s,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1$$

单位化：

$$\gamma_i=\frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i$$

$$i=1,2,\cdots,s$$

例2

假设V在基ε_1，ε_2下的度量矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$。

求V的一组标准正交基。

例3

在$V=R_3[x]$中定义内积：

$$<f(x),g(x)>=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

求V的一组标准正交基.

酉矩阵

定义：n阶复矩阵A称为是酉矩阵，若$A^H A = I$.

命题：A是酉矩阵$\Leftrightarrow A^{-1} = A^H$

$\Leftrightarrow A$的行（列）向量组是C^n的标准正交基。

定理1

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的标准正交基，

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)U$$

则，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$是标准正交基 $\Leftrightarrow U$是酉矩阵。

Schmidt正交化方法的应用

性质 1. 若 A, B 是同阶酉矩阵，则 A^{-1}， AB 都是酉矩阵。

性质 2. 假设 A 是上（下）三角矩阵，若 A 是酉矩阵，则 A 是对角阵，且其主对角元的模均等于 1。

注

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的基，则有标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$使得

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T$$

其中，T是上三角矩阵，且其主对角元均大于零。

矩阵的UT分解

假设A是n阶可逆矩阵，则存在酉矩阵U及主对角元均大于零的上三角矩阵T，使得$A=UT$，而且，满足上述条件的矩阵U、T是唯一的。

例

假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的 UT 分解。

定理2

假设W是V的子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$是$W$的标准正交基，则存在$\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots\alpha_n$使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots\alpha_n$是$V$的标准正交基。

第二节 正交补空间

定义：设$W \leq V, \alpha \in V$.若$\forall \beta \in W$，$\alpha \perp \beta$，称$\alpha \perp W$.

若$W_1, W_2 \leq V$,对$\forall \alpha_1 \in W_1$，$\alpha_2 \in W_2$，$\alpha_1 \perp \alpha_2$，称$W_1 \perp W_2$。

定理1：设$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), \eta \in V$.则$\eta \perp W \Leftrightarrow \forall j, \eta \perp \alpha_j$.

正交补空间

定义：设$W \le V$,记

$$W^{\perp} = \{\alpha \in V \mid \alpha \perp W\}$$

易证这是V的子空间，称是W的正交补空间。

定理2：若$W \le V$,则$V = W \oplus W^{\perp}$.

而且，若$V = W + U$,且$W \perp U$,则$U = W^{\perp}$.

推论：若$W \le V$,则$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

正交补空间的计算

假设$A\in C^{s\times n}$.定义线性映射$f:C^n\to C^s$为：

$$f(x)=Ax,\forall x\in C^n$$

f 的值域和核空间分别记为$R(A),K(A)$。

问题：如何计算 $R(A)^{\perp}$和$K(A)^{\perp}$?

正交补空间的计算

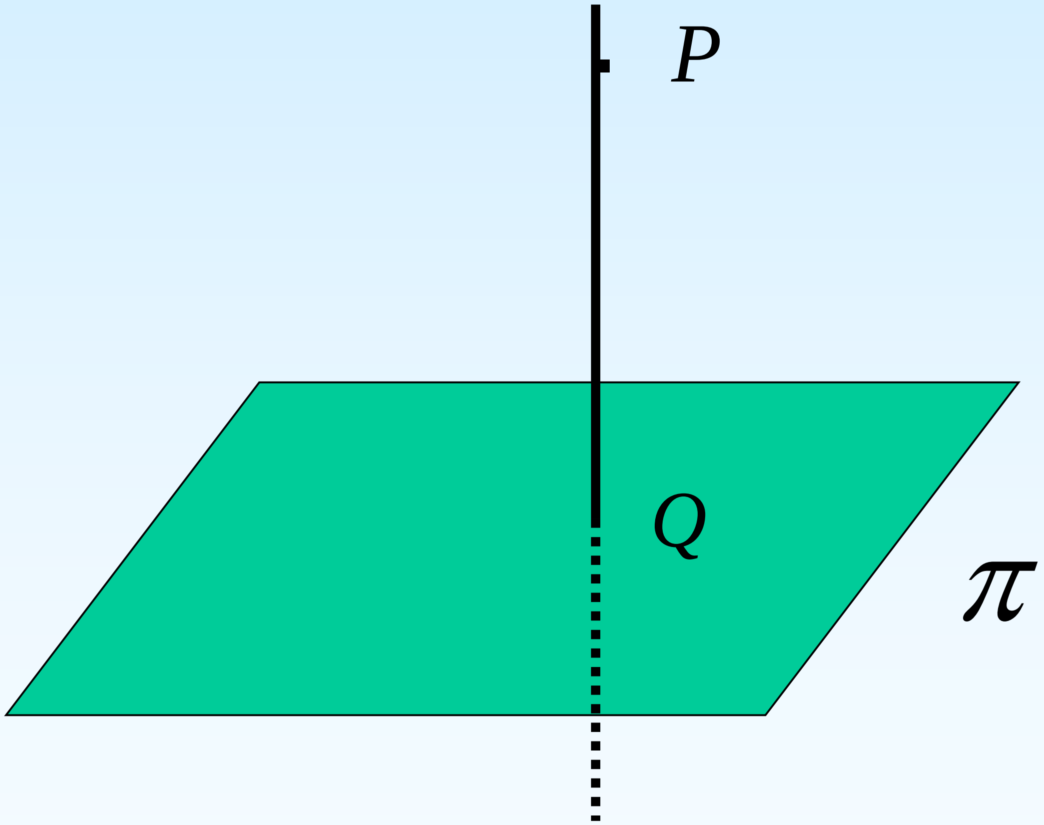
定理： $R^{\perp}(A)=K(A^{H})$ ， $K^{\perp}(A)=R(A^{H})$

例1

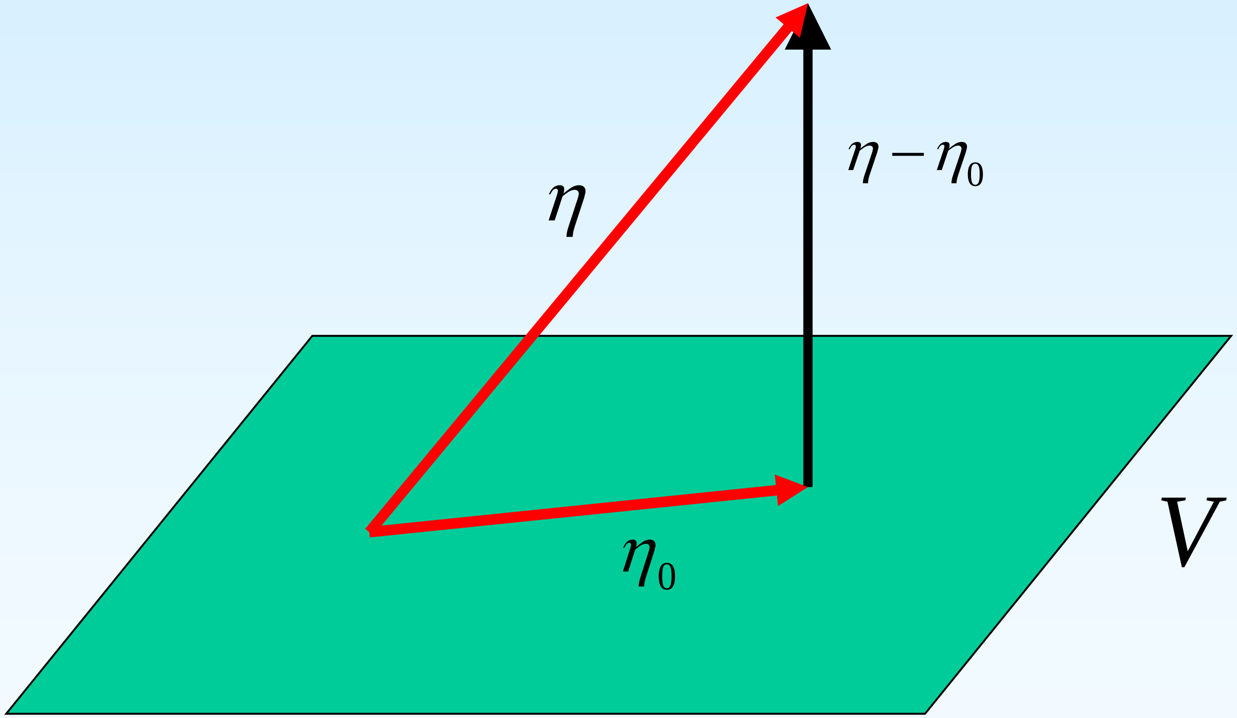
设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, W=\{x \mid Ax=\theta\}$.求$W^{\perp}$的一标准正交基。

一个几何问题

空间中点到直线的距离：



空间中向量到子空间的距离：



已知$W \leq V, \alpha \in V$.求$\eta \in W$,使得

$$d(\alpha,\eta)=\min_{\xi\in W} d(\alpha,\xi)$$

定理3: 假设$W \leq V, \alpha \in V$.则

$$d(\alpha,\eta)=\min_{\xi\in W} d(\alpha,\xi) \Leftrightarrow \alpha-\eta \perp W$$

（称η是α在W中的正投影）。

例2

在R^3中，已知$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-1,3),\alpha=(2,1,2).$
假设$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$.求α在W中的正投影。

例3

假设$V=R_3[x]$中的内积定义为

$$<f(x),g(x)>=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

求$\eta=x^2$在$W=L(1,x)$中的正投影。

最小二乘解

设$A \in C^{s \times n}$,求线性方程组$Ax = b$的最佳近似解。

第三节 等距变换

定义：设V是内积空间，$f \in Hom(V,V)$.若

$$< f(\alpha), f(\beta) >=< \alpha, \beta >, \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

称f是等距变换。

若$F = R$,称f是正交变换; 若$F = C$,称f是酉变换.

例1

设A是酉矩阵。$f: C^n \to C^n$定义为:

$$f(x) = Ax, \forall x \in C^n$$

定理1

设V是内积空间，$f \in Hom(V,V)$.下述条件等价：

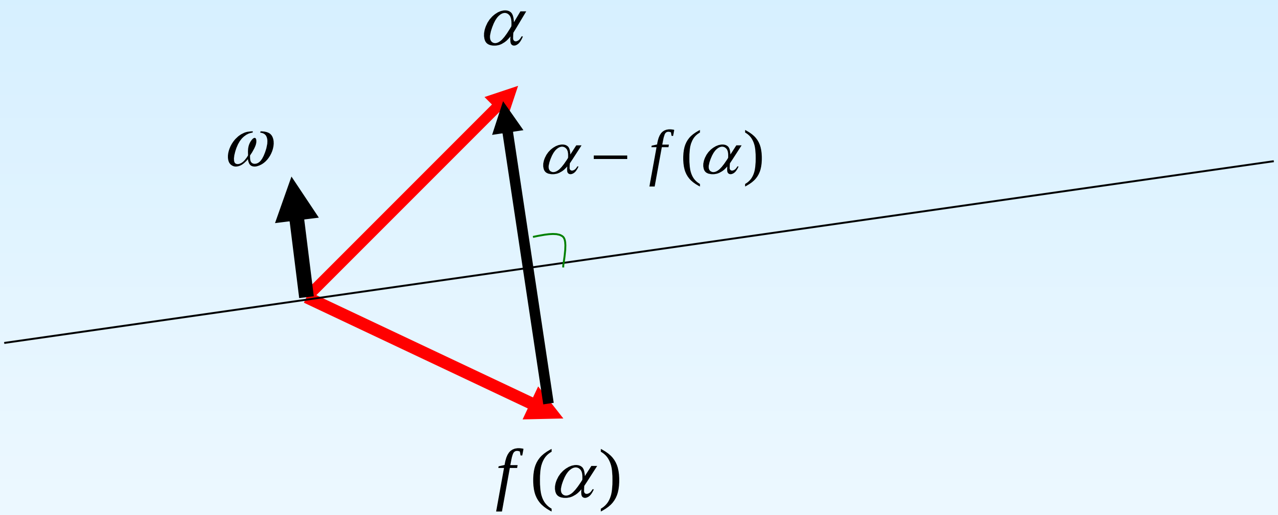
(1). f保持长度不变；

(2). f保持内积不变；

(3). f将标准正交基变为标准正交基；

(4). f在标准正交基下的矩阵是酉矩阵。

关于直线的反射



欧氏空间中的反射

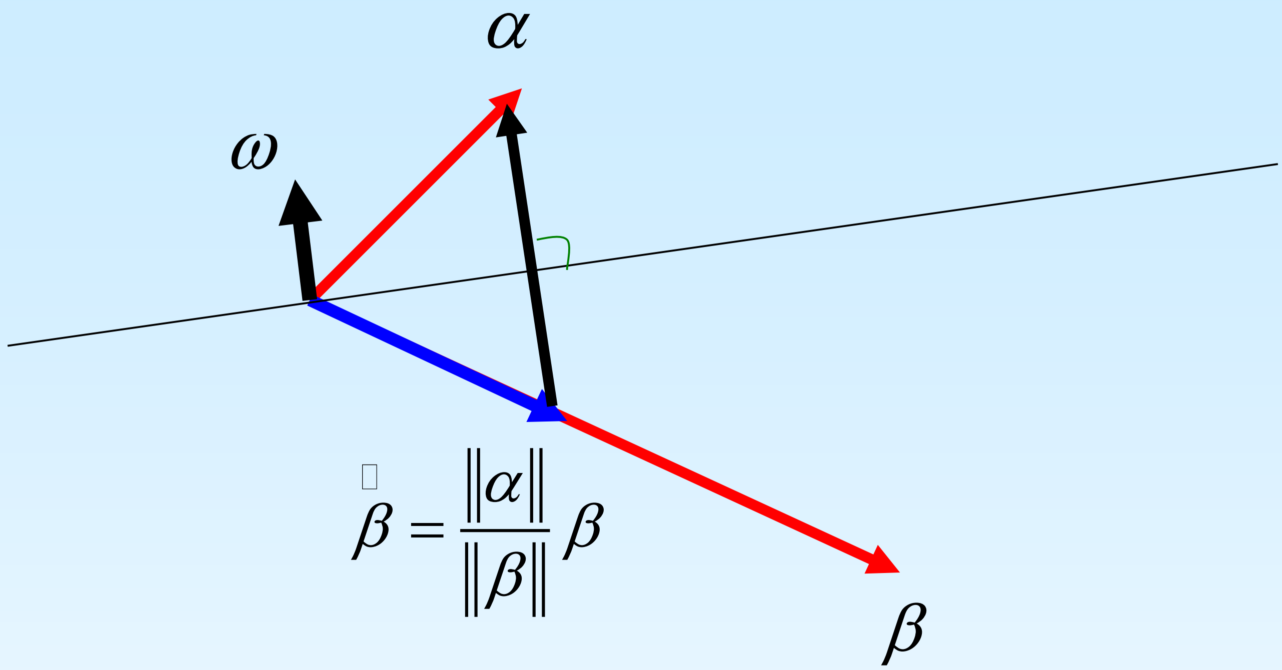
假设V是一个欧氏空间，$\omega \in V$是一个单位向量。映射

$$f : V \to V$$
$$\alpha \to \alpha - 2 < \alpha, \omega > \omega$$

证明：f是V上的等距变换（正交变换）

镜像变换

问题：假设在欧氏空间V 中有两个向量α, β，是否有正交变换 f，使得 f 将α 变到β 上？



$$\tilde{\beta} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta$$

$$\omega = \frac{1}{\left\|\alpha - \tilde{\beta}\right\|}\left(\alpha - \tilde{\beta}\right) = \frac{1}{\left\|\alpha - \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta\right\|}\left(\alpha - \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta\right)$$

第三章

矩阵的相似标准形

矩阵与线性变换

本章的目的：

- 对给定的矩阵，找一最简单的矩阵与之相似。
- 对给定的线性空间上的线性变换，找线性空间的一组基，使得线性变换的矩阵最简单。

第一节 特征值与特征向量

假设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是数，若存在 n 维列向量 η，使得

$$\eta \neq \theta, \qquad \text{且} \quad A\eta = \lambda_0 \eta$$

则称 λ_0 是 A 的特征值，

η 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

矩阵的相似对角化

假设 A 是 n 阶方阵，则 A 相似于对角阵的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量特征向量。

线性变换的特征值、特征向量

设 f 是线性空间 V 上的线性变换，假设 $\lambda_0 \in F$，$\theta \neq \eta \in V$。若

$$f(\eta) = \lambda_0 \eta$$

则称 λ_0 是 f 的特征值，

η 是相应于特征值 λ_0 的特征向量。

线性变换的可对角化问题

设V 是n 维线性空间， f 是线性空间V 上的线性变换，则存在V 的基使得 f 的矩阵式对角阵当且仅当 f 有 n 个线性无关的特征向量。

例1

$f \in Hom(C^3, C^3)$定义为： $\forall X = (x, y, z)^T$， $f(X) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 2z \end{pmatrix}$

求f的特征值、特征向量。

线性变换的特征值、特征向量的计算

设 f 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是 A，若 $\lambda_0\in F$，$\eta\in V$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是 x_0，则 $f(\eta)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是 Ax_0。故 $f(\eta)=\lambda_0\eta\Leftrightarrow Ax_0=\lambda_0x_0$，

即： η 是 f 的属于特征值 λ_0 的特征向量

当且仅当 x_0 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

例2

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$定义为：$\forall X \in C^{2\times 2}$，$f(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}X$

求f的特征值、特征向量。

定理1

若$A, B \in C^{n\times n}$是相似的，则$|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$.

注：1.定理的逆命题不成立；

2.可定义线性变换的特征多项式。

特征多项式的计算

定义：假设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，第 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ 行，则 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行，第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列交叉处的元素构成的 k 阶子式称为 A 的一个 k 阶主子式。

主子式与子式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

主子式与子式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

特征多项式的计算

定理：设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$,则

$$\left|\lambda I-A\right|=\lambda^{n}+b_{1}\lambda^{n-1}+b_{2}\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_{n}$$

其中，$b_{j}=(-1)^{j}\sum$（A的j阶主子式）

特别地，$b_{1}=-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，$\quad b_{n}=(-1)^{n}\left|A\right|.$

矩阵的迹

定义：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，称$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$为A的迹，记为$tr(A)$.

命题：若$A=(a_{ij})_{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \qquad |A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

推论：若A,B相似，则$tr(A)=tr(B),|A|=|B|$.

例3

设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},A=\alpha\beta^H$.求$A$的特征值。

化零多项式

设$f(x)$是多项式。若$f(A)=O$, 则A的特征值均是$f(x)=0$的根.

例：已知$A^2=A$.证明：A的特征值只能是0或1。

第二节 Hamilton-Cayley定理

定理：设$A\in F^{n\times n}, C(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|$.则$C(A)=O.$

定理：设$f\in Hom(V,V), C(\lambda)$是$f$的特征多项式，则$C(f)=O.$

$Schur$引理：对$\forall A\in C^{n\times n}$,存在酉矩阵$U$使得$U^{H}AU$是上三角矩阵。

例1

设$A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.求$A^{1000}$.

$$C(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$$

例2

已知$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，求$A^{100}$。

$$C(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

最小多项式

定义：矩阵A的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为A的最小多项式.

性质1：若$m(x),\varphi(x)$分别是矩阵A的最小多项式、化零多项式，则$m(x)\mid\varphi(x)$.

性质2：任意矩阵的最小多项式是唯一的

性质3：如果矩阵A, B相似，则A, B有相同的最小多项式。

定义：（线性变换的最小多项式）

定理1

设$m(x),C(x)$分别是矩阵A的最小多项式和特征多项式，

则$m(x)\,|\,C(x)$，并且，对$\lambda_0 \in C, m(\lambda_0)=0 \Leftrightarrow C(\lambda_0)=0$。

例1

求下列矩阵的最小多项式：

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 0 \\ & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$$

例2

设$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},A=\alpha\beta^H$.求$A$的最小多项式。

例3

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$定义为：$\forall X \in C^{2\times 2}$,

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$$

求f的最小多项式。

第三节 可对角化的条件

目的：

对给定的矩阵，判断其是否相似于对角阵；

对给定的线性空间上的线性变换，判断是否存在空间的一组基，使得其矩阵是对角阵。

已知的判别方法

定理1：$n \times n$矩阵A相似于对角阵$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量。

定理2：矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关。

定理3：若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的互不相同的特征值，

$\eta_{1i,} \eta_{2i}, \cdots, \eta_{t_i i}$是$A$的属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量，则

$\eta_{11,} \eta_{21}, \cdots, \eta_{t_1 1} \eta_{12,} \eta_{22}, \cdots, \eta_{t_2 2} \cdots\cdots\cdots \eta_{1s,} \eta_{2s}, \cdots, \eta_{t_s s}$

线性无关。

线性变换的可对角化问题

假设V是n维线性空间，$f \in Hom(V,V)$.

定理1：f可对角化$\Leftrightarrow$ f有n个线性无关的特征向量。

定理2 : f的属于不同特征值的特征向量线性无关。

定理3：若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是线性变换$f$的互不相同的特征值，$\eta_{1i,}\eta_{2i},\cdots,\eta_{t_i i}$是$f$的属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量，则

$\eta_{11,}\eta_{21},\cdots,\eta_{t_1 1}\eta_{12,}\eta_{22},\cdots,\eta_{t_2 2}\cdots\cdots\cdots\eta_{1s,}\eta_{2s},\cdots,\eta_{t_s s}$

线性无关。

特征子空间

定义：设$f \in Hom(V,V), \lambda_0$是$f$的特征值。称

$$V_{\lambda_0} = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0 \eta\}$$

为f的相应于特征值 λ_0的特征子空间。

$\dim V_{\lambda_0}$ =线性变换 f 的属于特征值 λ_0 的

线性无关特征向量的个数。

可对角化的条件

假设$\dim V = n$， $f \in Hom(V,V)$的特征多项式为

$$C(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{c_1}(\lambda - \lambda_2)^{c_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{c_s}$$

则存在V 的基使得 f 的矩阵式对角阵的充分必要条件是

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = n$$

例1

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$定义为：$\forall X \in C^{2\times 2}$，$f(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}X$

求f的特征值及相应的特征子空间的基。

定理1

设$f \in Hom(V)$的特征多项式是$C(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$，

则$\dim V_{\lambda_i} \le r_i$.

定理2

设$f \in Hom(V,V)$的特征多项式是$C(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，则下述条件是等价的：

1. f是可对角化的；

2. $\forall i, \dim V_{\lambda_i}=r_i$;

3. $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

例2

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$定义为：$\forall X \in C^{2\times 2}$， $f(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$

1.求f在基$E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$下的矩阵；

2.求f的特征值及相应的特征子空间的基;

3.问：是否存在$C^{2\times 2}$的基，使得f的矩阵为对角阵？为什么？

定理3

$n\times n$矩阵A相似于对角阵$\Leftrightarrow$ A的最小多项式无重根。

引理：若n阶矩阵M_i满足$M_1M_2\cdots M_s=O$,

则$\sum_{i=1}^{s}r(M_i)\le(s-1)n.$

例3

若n阶矩阵A满足$A^2 = A$,则A相似于对角阵。

例4

已知$A\in C^{n\times n}$满足$A^2=3A+10I$,并且，$r(A-5I)=r$.

求行列式$|A+3I|$.

第四节 Jordan标准形

问题：

如果给定的矩阵不与任何对角阵相似，如何找一最简单的矩阵与之相似。

等价的问题：

若线性空间上给定的线性变换不可对角化，如何找线性空间的一组基，使得线性变换的矩阵最简单。

Jordan形矩阵

定义：形如$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}_{k\times k}$的矩阵称为*Jordan*块。

形如$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$（其中，$J_i$均是*Jordan*块）的矩阵称为*Jordan*形矩阵。

若矩阵A与*Jordan*形矩阵J相似，则称J是A的标准形。

例1

下列矩阵是否为$Jordan$形矩阵?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Jordan标准形的存在性、唯一性

若$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的*Jordan*标准形，而$K=\begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_s} \end{pmatrix}$,

其中，$J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_s}$是$J_1, J_2, \cdots, J_s$的一个排列，则$K$也是$A$的*Jordan*标准形。

除了相差*Jordan*块的次序外，

矩阵的*Jordan*标准形是存在的、唯一的。

唯一性的证明思路

1.若A与J相似，λ_0是数，则对一切正整数$k, r(A-\lambda_0 I)^k = r(J-\lambda_0 I)^k$;

2.若$n\times n$矩阵$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$,则$r(N^{k-1})-r(N^k)=\begin{cases} 1, 若k\le n \\ 0, 若k>n \end{cases}$

3.若J是$Jordan$矩阵，则$r(J-\lambda_0 I)^{k-1}-r(J-\lambda_0 I)^k$等于

J中阶数$\ge k$的，以λ_0为主对角元的$Jordan$块的块数。

定理1

设λ_0是矩阵A的特征值。则A的$Jordan$标准形中以λ_0为主对角元的k阶$Jordan$块的块数为：

$$r(B^{k-1})-2r(B^k)+r(B^{k+1})$$

其中，$B=A-\lambda_0 I$

例2

已知矩阵A的特征多项式是

$$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4,$$

且$r(A-2I)=4$,

求A的$Jordan$标准形。

例3

已知矩阵A的特征多项式是

$$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4,$$

且$r(A-2I)=4, r(A-2I)^2=3,$

求A的$Jordan$标准形。

例4

求下列矩阵的*Jordan*标准形：

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad C_A(x)=(x-1)^3.$$

$$B=\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix},\quad C_B(x)=(x+3)(x-1)^2$$

分块矩阵的最小多项式

定理2：若$M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，则矩阵$M, A, B$的最小多项式间有关系：

$$m_M(\lambda)=[m_A(\lambda), m_B(\lambda)].$$

Jordan标准形与最小多项式

定理3: 假设矩阵A的最小多项式是$m(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{r_i}$,

则A的$Jordan$标准形中以λ_i为主对角元的$Jordan$块的最高阶数为r_i.

特别地,A相似于对角阵$\Leftrightarrow A$的最小多项式无重根。

例5

已知A的特征多项式和最小多项式分别是

$$C(x)=(x-1)^2(x-2)^5, m(x)=(x-1)(x-2)^2$$

求A的可能的$Jordan$形。

例6

已知A的特征多项式和最小多项式均是

$$C(x)=m(x)=x^4$$

求A及A^2的*Jordan*标准形。

例7

设$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A=\alpha\beta^H$.求$A$的$Jordan$标准形。

例8

已知 $tr(A)=r(A)=1$, 证明： $A^2=A$.

例9

求相似变换矩阵P,将下列

矩阵变成其$Jordan$标准形：

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix},$$

$$C_A(x)=(x-1)^3.\qquad C_B(x)=(x+3)(x-1)^2$$

存在性的证明思路

假设V是复数域上n维线性空间，$f \in Hom(V,V)$

的特征多项式为

$$C(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{c_i}$$

存在性的证明思路

记 $$V_i = K(f - \lambda_i I)^{c_i}$$

可以证明： $$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

存在性的证明思路

于是，取适当的基，可以使 f 得矩阵为

$$\text{分块对角阵}\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

并且，A_i 只有一个特征值。

存在性的证明思路

于是，只需处理只有一个特征值的线性变换。

如果 $f \in Hom(V, V)$ 的特征值全为 a，

$g = f - aI$，则 g 的特征值全为零。

并且，在 V 的一组基下，f 的矩阵是 Jordan 形矩阵，当且仅当 g 的矩阵是 Jordan 形矩阵。

存在性的证明思路

于是，只需处理特征值全为零的线性变换。

如果 $g \in Hom(W,W)$ 的特征值全为 0 。

现在只需证明：W 可以分解成关于 g 的不变

子空间的直和：$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$

存在性的证明思路

并且，存在W_i的基，使得g在这组基下的矩阵可以写成形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

存在性的证明思路

存在W_i的基，使得g在这组基下的矩阵可以写成N

W_i有一组基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$，使得

$$g(\xi_1)=\theta, g(\xi_2)=\xi_1, g(\xi_3)=\xi_2,\cdots, g(\xi_t)=\xi_{t-1}$$

特别地，

$$W_i=L(g^{t-1}(\xi_t), g^{t-2}(\xi_t),\cdots, g(\xi_t),\xi_t)$$

存在性的证明思路

定理：假设 $g \in Hom(W,W)$ 是幂零线性变换，$\alpha \in W$ 。

则 $W_i = L(g^{t-1}(\alpha), g^{t-2}(\alpha), \cdots, g(\alpha), \alpha)$

是关于 g 的不变子空间当且仅当 $g^{t-1}(\alpha) = \theta$ 。

称形如 W_i 的不变子空间为循环不变子空间。

存在性的证明思路

定理：假设 $g \in Hom(W,W)$ 是幂零线性变换，

则 W 可以分解成循环不变子空间的直和。

第五节 特征值的分布

设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. 称$A$的特征值的集合为$A$的谱；

称A的特征值的模的最大值为A的谱半径，记为$\rho(A)$。

记：$R_i=\left|a_{i1}\right|+\cdots+\left|a_{ii-1}\right|+\left|a_{ii+1}\right|+\cdots+\left|a_{in}\right|$

$C_i=\left\{z\,\middle|\,\left|z-a_{ii}\right|\le R_i\right\}$，称之为$A$的第$i$个盖尔园；

称$G=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$为A的盖尔园系。

定理1

矩阵A的特征值必定在A的盖尔园系中。

例1

设$A=\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

C_1中有两个特征值，但C_2中没有特征值。

K-区

定义：设$A\in C^{n\times n}$,在A的n个盖尔园中，有k个园构成一连通区域，但与其余$n-k$个园不相交，则称这个连通区域为一 $k-$区。

例2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理2

A的盖尔园的$k-$区中有且仅有A的k个特征值。

推论：如果A的n个盖尔园互不相交，

则A有n个互不相等的特征值。

例3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$$

A^T的盖尔园均是1区。

谱半径的估计

定理：设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，

$$\rho_1=\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right\},\rho_2=\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right\},$$

则，$\rho(A)\le\rho_1,\rho_2.$

例4

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$$

例5

设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.证明：$\rho(A)<6.$

应　　用

推论 1. 如果 $A \in C^{n\times n}$ 的 n 个盖尔园互不相交，

则 A 一定与对角阵相似。

推论 2. 如果 $A \in R^{n\times n}$ 的 n 个盖尔园互不相交，

则 A 的特征值全是实数。

对角占优矩阵

定义. 假设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 。若对 $1\le i\le n$

$$\left|a_{ii}\right|>\left|a_{i1}\right|+\cdots+\left|a_{ii-1}\right|+\left|a_{ii+1}\right|+\cdots\left|a_{in}\right|$$

则称 A 是行对角占优的。

如果对 $1\le i\le n$

$$\left|a_{ii}\right|>\left|a_{1i}\right|+\cdots+\left|a_{i-1i}\right|+\left|a_{i+1i}\right|+\cdots\left|a_{ni}\right|$$

则称 A 是列对角占优的。

对角占优矩阵

推论 3. 假设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是对角占优矩阵，则

1 A 是可逆矩阵；

2 $\rho(A)\le\max\limits_{1\le i\le n}\left\{2\left|a_{ii}\right|\right\}$；

3 若 $a_{ii}>0$，则 A 的特征值的实部全都大于零。

第四章

Hermite二次型

第一节 H阵、正规阵

- Hermite二次型与Hermite矩阵
- 标准形
- 惯性定理（唯一性）
- 正定性

Hermite矩阵、 Hermite二次型

设$A \in C^{n \times n}$,定义一复变量、复值函 数

$$f(X) = X^H AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{x_i} x_j,$$

其中，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

可以证明：

$$\forall x_j \in C, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R \Leftrightarrow A^H = A$$

Hermite矩阵、 Hermite二次型

若$A^H = A$,称A是*Hermite*矩阵，简称*H*阵。

这时的$f(X)$称为是*Hermite*二次型。

实对称矩阵的性质

定理 1 实对称矩阵的特征值都是实数。

定理 2 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交。

定理 3 对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ$ 是对角阵。

H阵的性质

定理1: H阵的特征值均是实数。

定理2:H阵的属于不同特征值的特征向量相互正交。

定理3:若A是H阵，则一定存在酉矩阵U,使得$U^H AU$是对角阵。

正规阵

定义：设$A \in C^{n\times n}$.若$A^H A = AA^H$,则称A是正规阵。

例：H阵，酉矩阵，反H阵均是正规阵。

上三角的正规阵

定理：

若A既是上三角的，又是正规的，则A必是对角阵。

定理

$A \in C^{n\times n}$是正规阵$\Leftrightarrow A$酉相似于对角阵。

推 论

$A \in C^{n \times n}$是正规阵.

$\Leftrightarrow A$有n个两两正交的单位特征向量.

例1

证明：正规阵A, B相似的充要条件是它们有相同的特征多项式。

例2

设A是正规阵。证明：

1.$A^2 = A \Leftrightarrow A$的特征值是0或1；

2.A是幂零阵$\Leftrightarrow A = O$.

第二节 Hermite二次型

可以证明：若A, B都是H阵，且对$\forall X \in C^n$,

$$X^H AX = X^H BX$$

则$A = B.$

设$f(X) = X^H AX, g(Y) = Y^H BY, C$是可逆矩阵，

若在$X = CY$下，$f(X) = g(Y)$，则，$B = C^H AC.$

定义：设A, B是H阵，若有可逆阵C,

使得$B = C^H AC$，则称

A与B是共轭合同的。

可以证明：共轭合同关系满足：

反身性，对称性，传递性。

标准形

定义：假设 Hermite 二次型 $f(X)$ 在可逆线性变换下

$X=CY$ 变成只含“平方”项的形式

$$g(Y)=d_1y_1\overline{y_1}+d_2y_2\overline{y_2}+\cdots+d_ny_n\overline{y_n}$$

$$=d_1\left|y_1\right|^2+d_2\left|y_2\right|^2+\cdots+d_n\left|y_n\right|^2$$

则称 $g(Y)$ 是 $f(X)$ 的标准型。

标准形

- 配方法（初等变换法）
- 酉变换法：

假设 Hermite 二次型 $f(X)=X^H AX$ ，A 是相应的

Hermite 矩阵，酉矩阵 U 满足

$$U^H AU=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

令 $Y=UY$ ，则

$$f(X)=a_1\left|y_1\right|^2+a_2\left|y_2\right|^2+\cdots+a_n\left|y_n\right|^2$$

惯性定理

若 $f(X)$ 在可逆线性变换 $X=CY$ 下变成标准形

$$g(Y)=d_1\left|y_1\right|^2+\cdots+d_p\left|y_p\right|^2-d_{p+1}\left|y_{p+1}\right|^2\cdots-d_r\left|y_r\right|^2$$

可逆线性变换 $X=DZ$ 下变成标准形：

$$h(Y)=k_1\left|z_1\right|^2+\cdots+k_q\left|z_q\right|^2-k_{q+1}\left|z_{q+1}\right|^2\cdots-k_r\left|z_r\right|^2$$

其中，d_i,k_i 均大于零。

则 $p=q$。

惯性定理

*Hermite*二次型的标准形中的正项个数、负项个数与所用的可逆线性变换无关。

标准形中的正项个数称为其**正惯性指数**，负项个数称为其**负惯性指数**。

惯性定理

惯性定理的矩阵形式：

若H阵A与

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},\Lambda_2=\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

共轭合同，则$a_1,a_2,\cdots,a_n$与$b_1,b_2,\cdots,b_n$中正、负项个数相同。分别称为矩阵A的正、负惯性指数。

规范形

如果 $n\times n$ Hermite 矩阵 A 的正、负惯性指数

分别是 p,q， 则 A 必定与矩阵

$$\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

共轭合同。称此矩阵为 A 的规范形。

共轭合同的充分必要条件

定理：$n \times n$ $Hermite$矩阵A, B共轭合同

$\Leftrightarrow A, B$有相同的正、负惯性指数。

例1

问：按共轭合同关系，n阶*Hermite*矩阵共可分成多少个共轭合同类？

正定性

定义：设A是H阵，$f(X) = X^H AX$,

若对$\forall X_0 \neq \theta$，$f(X_0) > 0$,

则称f是正定的，A是正定的H阵。

如何建立判别方法

1.设$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$,则$D$是正定的$\Leftrightarrow \forall d_i > 0$;

2.若H阵A, B共轭合同，则A正定$\Leftrightarrow B$正定；

3.若H阵A与$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$共轭合同，则$A$正定$\Leftrightarrow \forall d_i > 0$。

定理

设 A 是 $n\times nH$ 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的；
2. A 的特征值均大于零；
3. A 与 I 共轭合同；
4. 存在可逆阵 P 使得 $A=P^H P$;
5. A 的各顺序主子式均大于零。

例2

假设α是n维列向量，且$\|\alpha\|=1$。

问：当k取何值时，矩阵

$$A=I-k\alpha\alpha^H$$

是正定的。

例3

设A是正定的$Hermite$矩阵，

证明：存在正定的$Hermite$矩阵S使得$A=S^2$.

例4

证明：若酉矩阵A是正定的，则$A=I$.

其它有定性

定义：设A是H阵，$f(X)=X^H AX$，

若对$\forall X_0\neq\theta$，$f(X_0)<0$，

则称f是负定的，A是负定的H阵；

若对$\forall X_0\neq\theta$，$f(X_0)\geq 0$，

则称f是半正定的，A是半正定的H阵；

若对$\forall X_0\neq\theta$，$f(X_0)\leq 0$，

则称f是半负定的，A是半负定的H阵。

如何建立判别方法

1.设$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$,则$D$是半正定的$\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0$;

2.若H阵A, B共轭合同，则A半正定$\Leftrightarrow B$半正定；

3.若H阵A与$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$共轭合同，则$A$半正定$\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0$。

定理

设 A是$n\times nH$阵，则下述条件等价：

1.A是半正定的；

2.A的特征值均大于或等于零；

3.A与$\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$共轭合同；

4.存在矩阵P使得$A=P^H P$;

5.A的各主子式均大于或等于零。

例5

证明：正定矩阵与半正定矩阵的和一定是正定矩阵。

奇值分解

假设 A 是秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵, 则 $A^H A$ 是秩为 r 的半正定矩阵。设其非零特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，令 $d_i=\sqrt{\lambda_i}$，$D=diag\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$，则一定存在 s 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得

$$A=U\begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}V$$

奇值分解定理的证明

假设 $A^H A$ 特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，$\lambda_{r+1}=0, \cdots$，$\lambda_n=0$，

相应的标准正交特征向量组是 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$，

即 $A^H A x_j = \lambda_j x_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$，所以，

$$< Ax_i, Ax_j >= x_j^H A^H A x_i$$

$$= \lambda_i x_j^H x_i = \begin{cases} \lambda_i, & 1 \le i = j \le r \\ 0, & i \ne j \text{或} i = j > r \end{cases}$$

奇值分解定理的证明

因此， $Ax_1,\cdots,Ax_r$ 是一正交向量组，并且，

$$\|Ax_i\|=\sqrt{\lambda_i},\ \ i=1,2,\cdots,r$$

$$Ax_{r+1}=\cdots=Ax_n=\theta$$

令 $y_i=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Ax_i,\ i=1,2,\cdots,r$ ，

则 $y_1,\cdots,y_r$ 是 C^s 中的一标准正交向量组，

奇值分解定理的证明

将之扩充成 C^s 的标准正交基： $y_1,\cdots,y_r,y_{r+1},\cdots,y_s$ ，则

$$A(x_1,\cdots,x_n)=(\sqrt{\lambda_1}y_1,\sqrt{\lambda_2}y_2,\cdots,\sqrt{\lambda_r}y_r,\theta,\cdots,\theta)$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_s)\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & O & & O \end{pmatrix}$$

奇值分解定理的证明

于是，若令

$$D = diag\left\{d_1, d_2, \cdots, d_r\right\},$$

$$U = (y_1, y_2, \cdots, y_s),$$

$$V = (x_1, y_2, \cdots, x_n)^H$$

则

$$A = U\begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}V$$

第三节 Rayleigh商

设A是n阶H阵，则$\forall X \in C^n, X^H AX \in R.$

于是，可以定义一复变量的实值函数

$$R(X) = \frac{X^H AX}{X^H X}, \quad \forall \theta \neq X \in C^n$$

称此函数为A的*Rayleigh*商。

定理1

假设H阵$A\in C^{n\times n}$，A的特征值$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$,则

$$\lambda_1=\min_{\theta\ne X\in C^n}R(X)$$

$$\lambda_n=\max_{\theta\ne X\in C^n}R(X)$$

例

假设A是酉矩阵，证明：

$$\max_{\theta \neq X \in C^n} \frac{|X^H A X|}{X^H X} = 1.$$

定理2

假设H阵$A\in C^{n\times n}$，A的特征值$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$,
相应的标准正交特征向量组是$x_1,x_2,\cdots,x_n$,
令

$$S_i=L(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}),\ \ T_i=L(x_i,x_{i+1},\cdots,x_n),$$

则

$$\lambda_i=\min_{\theta\neq x\in S_i^{\perp}}R(X)=\max_{\theta\neq x\in T_{i+1}^{\perp}}R(X)$$

定理3（Courant极大极小原理）

假设H阵$A \in C^{n\times n}$的特征值是$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，

则

$$\lambda_i = \max_{\dim S = i}\left\{\min_{\theta \neq x \in S} R(x)\right\}$$

$$= \min_{\dim S = n-i+1}\left\{\max_{\theta \neq x \in S} R(x)\right\}$$

第五章

范数和矩阵函数

本章的目的

- 矩阵函数
- 范数
- 矩阵函数的应用

第一节 范数的概念和例子

定义：设V是数域F上的线性空间，

v是定义在V上的实值函数。若v满足：

$$1.\forall \theta \neq \alpha \in V, v(\alpha) > 0;$$

$$2.\forall \alpha \in V, k \in F, v(k\alpha) = |k| v(\alpha);$$

$$3.\forall \alpha, \beta \in V, v(\alpha+\beta) \leq v(\alpha) + v(\beta)$$

则称v是定义在V上的范数，定义了范数的线性空间称为是赋范线性空间。

内积与范数

例1.设V是内积空间。则V上的内积下的长度$\|\bullet\|$就是一范数。

因此，任意线性空间V上的范数常记为$\|\bullet\|$。

C^n中范数的例子

$$\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$$

1.1−范数:$\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$;

2.2−范数:$\|X\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}=(X^HX)^{\frac{1}{2}}$;

3.∞−范数:$\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$.

更多的例子

$$1.\ p-\text{范数}:\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};\forall p\geq 1.$$

2.如果$\|\bullet\|$是C^n上的一种范数，A是一可逆矩阵，则

$\|X\|_A=\|AX\|$也是C^n上的一种范数。

更多的例子

3.设V是复数域上的线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V的基，$\|\bullet\|_{C^n}$ 是C^n上的范数。定义V上的范数：假设$\eta \in V$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标是$X$,规定

$$\|\eta\| = \|X\|_{C^n}$$

范数与极限

假设$\|\bullet\|$是线性空间V上的一个范数，

$\{\eta_i\}$是V上的一个向量序列， $\eta_0 \in V$,若

$$\lim_{i\to\infty}\|\eta_i - \eta_0\| = 0,$$

则称$\{\eta_i\}$在范数$\|\bullet\|$下趋向于η_0,

记为$\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i = \eta_0$.

范数的可比较性

定义：对线性空间V上的两个范数$\|\bullet\|$及$\|\bullet\|'$，

若有正实数$k_1 \le k_2$，使得

$$\forall \alpha \in V, k_1\|\alpha\|' \le \|\alpha\| \le k_2\|\alpha\|'$$

则称这两个范数是可比较的。

定理：有限维线性空间V上任意两个范数均是可比较的。

第二节 矩阵范数

矩阵$p-$范数：$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|;$$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}=\left(trA^H A\right)^{1/2}=\left(trAA^H\right)^{1/2}$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\}$$

$\|A\|_{m_2}$ 又记为$\|A\|_F$，称为*Frobenius*范数。

若U,V是酉矩阵，则$\|A\|_F = \|UAV\|_F$.

范数的相容性

定义：设$C^{s\times m}, C^{m\times n}, C^{s\times n}$中定义了范数$\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b, \|\bullet\|_c$，

若对$\forall A\in C^{s\times m}, B\in C^{m\times n}$,

$$\|AB\|_c \le \|A\|_a \|B\|_b$$

则称范数$\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b, \|\bullet\|_c$是相容的。

定理1

$\|\bullet\|_{m_1},\|\bullet\|_{m_2}$ 是相容的，$\|\bullet\|_{m_\infty}$ 是不相容的。

算子范数

设$\|\bullet\|_{v_n}$，$\|\bullet\|_{v_m}$ 分别是 C^n, C^m上的范数，

定义$C^{m\times n}$上的实值函数$\|\bullet\|$：

$$\|A\| = \max_{\theta \neq X \in C^n} \frac{\|AX\|_{v_m}}{\|X\|_{v_n}}$$

称$\|\bullet\|$是由$\|\bullet\|_{v_n}$，$\|\bullet\|_{v_m}$ 诱导的算子范数。

算子范数

问题：

1. $\|A\|$是否有意义？

2. $\|A\|$是否满足范数公理？

定理2

算子范数一定是相容的。

$\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2, \|\bullet\|_\infty$ 诱导的A的算子范数分别被称为A的

算子1-范数，算子2-范数，算子∞-范数，

分别记为$\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$.

定理3

设$A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}$，则：

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{s}\left|a_{ij}\right|\right\},$$ 列模和范数；

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^H A)},$$ 谱范数；

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le s}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right\},$$ 行模和范数。

例1

设A是酉矩阵，证明：$\|A\|_2 = 1$.

例2

若A是正规阵，证明：$\|A\|_2 = \rho(A)$.

例3

设$\|A\|_F = a, \|B\|_F = b, \|A\|_2 = c, \|B\|_2 = d$,

$M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$。求$\|M\|_F$ 及$\|M\|_2$.

第三节 收敛定理

定义：设矩阵序列$\{A_k\}_{1\le k\le +\infty}$, $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$.

如果$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, 且

$$\forall i, j, \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij},$$

则称$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A.$

矩阵序列的收敛性

可以证明：若$\|\bullet\|$是一矩阵范数，则

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0$$

幂序列

对给定的方阵 A, 考虑方阵列 $\left\{A^k\right\}$

定理1: 若有相容矩阵范数 $\|\bullet\|$，使得 $\|A\|<1$,

则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$.

定理2: $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O \Leftrightarrow \rho(A)<1$.

谱半径与范数

定理3：若$\|\bullet\|$是相容矩阵范数，则$\rho(A) \le \|A\|$。

定理4：对任意矩阵$A \in C^{n\times n}$，若$\varepsilon > 0$, 则一定存在$C^{n\times n}$上相容矩阵范数$\|\bullet\|$，使得

$$\|A\| < \rho(A) + \varepsilon.$$

矩阵幂级数

设A是方阵，对于幂级数

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i,\ f_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

若矩阵序列$\{f_n(A)\}$收敛于矩阵M，

则称矩阵幂级数$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$收敛于$M$.

矩阵幂级数

定理4: 若幂级数$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$的收敛半径为$r$,则

当$\rho(A) < r$时，矩阵幂级数$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$收敛；

当$\rho(A) > r$时，矩阵幂级数$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$发散。

第四节 矩阵函数

设函数$f(x)$可以展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i x^i, |x|<R,$$

设$A\in C^{n\times n}$，且$\rho(A)<R$，

定义 $$f(A)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i A^i=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}a_i A^i$$

几个重要的矩阵函数

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!};$$

$$\sin x = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!};$$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

利用定义计算

例1: 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,求$e^A$.

例2

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\text{求}\sin A.$$

Jordan形矩阵的函数

假设 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

其中，$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$

Jordan形矩阵的函数

$$f_n(J)=\begin{pmatrix} f_n(J_1) & & & \\ & f_n(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(J_s) \end{pmatrix},$$

令 $n\to\infty$，得

$$f(J)=\begin{pmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{pmatrix}$$

Jordan块的函数

设$n\times n$若当块$J_0=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$

Jordan块的函数

$$
f_n(J_0)=\begin{pmatrix}
f_n(\lambda_0) & \dfrac{f_n'(\lambda_0)}{1!} & \dfrac{f_n''(\lambda_0)}{2!} & \cdots & \dfrac{f_n^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} & \dfrac{f_n^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\
0 & f_n(\lambda_0) & \dfrac{f_n'(\lambda_0)}{1!} & \ddots & \cdots & \dfrac{f_n^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} \\
0 & 0 & f_n(\lambda_0) & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dfrac{f_n''(\lambda_0)}{2!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \dfrac{f_n'(\lambda_0)}{1!} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & f_n(\lambda_0)
\end{pmatrix}
$$

Jordan块的函数

$$f(J_0)=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda_0)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} & \ddots & \cdots & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dfrac{f''(\lambda_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & f(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

例3

设$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，求$e^A, \sin A, \sin At$.

利用Jordan标准形计算

定理：设$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵

A的$Jordan$标准形，则

$$f(A) = Pf(J)P^{-1}$$

例4

$$已知 A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, 求 \sin A, \sin At.$$

$$可以求得：J=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理1

已知$n \times n$矩阵A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

则$f(A)$的特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n).$$

例5

设A是$n\times n$矩阵，证明:$\det e^{A}=e^{trA}$.

待定系数法

设$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的$Jordan$标准形， 则：$f(A)=Pf(J)P^{-1}$,

其中，$f(J)=\begin{pmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{pmatrix}$.

定理：若A的最小多项式为：$m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{t_i}$,则

$$
\begin{aligned}
f(A)=g(A)\Leftrightarrow & f(\lambda_i)=g(\lambda_i),\\
& f'(\lambda_i)=g'(\lambda_i),\\
& \cdots\cdots,\\
& f^{(t_i-1)}(\lambda_i)=g^{(t_i-1)}(\lambda_i)
\end{aligned}
$$

例6

已知$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,求$e^{A}$及$e^{At}$.

例7

设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$\sin At$.

矩阵函数的性质

定理：设$A, B \in C^{n\times n}$, O是$n\times n$零矩阵，则：

$$(1). e^{O} = I;$$

$$(2).若AB = BA,则e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A} = e^{A+B};$$

$$(3). (e^{A})^{-1} = e^{-A}.$$

例8

$$假设A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},求e^{A}.$$

例9

假设A是$Hermite$阵, 证明：

e^{iA}是酉矩阵。

注

并非对任意矩阵 A, B, 均有 $e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}$.

第四节 线性微分方程组

设矩阵$A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$,其中，$a_{ij}(t)$是关于$t$的可微函数，

定义：

$$\frac{dA(t)}{dt}=\left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right);$$

$$\int_a^b A(t)dt=\left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)$$

性质

$$1.\ \frac{d}{dt}(A(t)+B(t))=\frac{d}{dt}A(t)+\frac{d}{dt}B(t);$$

$$2.\ \frac{d}{dt}(A(t)B(t))=(\frac{d}{dt}A(t))B(t)+A(t)(\frac{d}{dt}B(t));$$

$$3.\ \frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A.$$

常系数线性微分方程

微分方程的初值问题：

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

$$x(o) = b$$

有唯一解： $x(t) = be^{at}.$

常系数线性微分方程组

设a_{ij}均是常数，考虑关于未定函数

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$的微分方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\
\dfrac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{d}{dt}x_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{cases}
$$

如果记：

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\ X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

则，这个方程组可以写成矩阵方程的形式：

$$\frac{d}{dt}X(t)=AX(t)$$

定理

假设$A, X(t)$如前，X_0是已知的n维列向量，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

有唯一解

$$X(t) = e^{At}X_0$$

第六章

矩阵的广义逆

本章目的

- 将“逆矩阵”推广到一般情形
- 广义逆矩阵的计算
- 广义逆矩阵的性质
- 应用：不相容线性方程组的求解

第一节 广义逆矩阵的概念

- 1903年，Fredholm，积分算子的广义逆
- 1920年，Moore，矩阵的广义逆
- 1955年，Penrose，证明了唯一性

所以，在下面的矩阵的广义逆的定义中的四个方程也称为Moore- Penrose方程，简称M-P方程。

广义逆矩阵的定义

设$A\in C^{s\times n}$.若$G\in C^{n\times s}$满足下述四个条件，

则称G是A的广义逆矩阵：

$$1.AGA=A;$$

$$2.GAG=G;$$

$$3.(AG)^H=AG;$$

$$4.(GA)^H=GA$$

这四个方程也称为$M-P$方程。

例1

1.若A是可逆阵，则A^{-1}就是A的广义逆；

2.$A = O_{s\times n}$， $G = O_{n\times s}$；

定理1

设$A \in C^{s\times n}$.则A的广义逆矩阵是存在的，且是唯一的。

A的广义逆记为A^{+}.

例2

设$m\times n$矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{+}$.

例3

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，求$A^{+}$.

例4

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{+}$.

例5

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^{+}$.

例6

1. $O_{s\times n}{}^{+} = O_{n\times s}$

2. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} & O \\ O & B^{+} \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} O & B^{+} \\ A^{+} & O \end{pmatrix}$

例6

$$3.\ \begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} \\ O \end{pmatrix}$$

$$4.\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{+} & & & \\ & \lambda_2^{+} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{+} \end{pmatrix},$$

其中，$\lambda_j^{+} = \begin{cases} \lambda_j^{-1}, 若\lambda_j \neq 0 \\ 0,\ 若\lambda_j = 0 \end{cases}$

例7

设3×2矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^{+}$.

第二节 广义逆矩阵的性质

注:$(AB)^+$ 与 B^+A^+ 一般不相等!

例: $A = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^+ = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理1

设$A \in C^{s\times n}$,则:

1.$(A^+)^+ = A$;

2.$(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3.$(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4.若k实数，则$(kA)^+ = k^+ A^+$,其中，$k^+ = \begin{cases} k^{-1}, 若\ k \neq 0 \\ 0, 若\ k = 0 \end{cases}$;

5.$A^H = A^H AA^+ = A^+ AA^H$;

定理1（续）

$$6.(A^H A)^+ = A^+(A^H)^+;(AA^H)^+ = (A^H)^+ A^+;$$

$$7.A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (AA^H)^+;$$

8.若U,V是酉矩阵，则$(UAV)^+ = V^H A^+ U^H$;

$$9.A^+ AB = A^+ AC \Leftrightarrow AB = AC$$

例1

证明：若A是*Hermite*矩阵，

则A^+也是*Hermite*矩阵。

例2

设A是正规矩阵，证明：$(A^2)^+ = (A^+)^2$.

定理2

$$1.AA^{+}x=\begin{cases} x, 若 x\in R(A) \\ \theta, 若 x\in K(A^{H}) \end{cases};$$

$$2.A^{+}Ax=\begin{cases} x, 若 x\in R(A^{H}) \\ \theta, 若 x\in K(A) \end{cases};$$

$$3.R(A^{+})=R(A^{H})=R(A^{H}A)=R(A^{+}A)=K(I-A^{+}A);$$

$$4.R(A)^{\perp}=K(A^{H})=K(A^{+})=R(I-AA^{+});$$

$$5.R(A^{+})^{\perp}=K(A)=K(A^{H}A)=R(I-A^{+}A)$$

第三节 广义逆矩阵的应用

当线性方程组$Ax=b$无解时，

如何求最好的近似解，

即求x使得 $\|Ax-b\|_2$ 最小？

最小二乘解

定义：设$A\in C^{s\times n}, x_0\in C^n$,若

$$\|b-Ax_0\|=\min_{x\in C^n}\|b-Ax\|$$

则称x_0是线性方程组$Ax=b$的最小二乘解。

长度最小的最小二乘解称为极小最小二乘解。

定理1

η是$Ax=b$的最小二乘解

$\Leftrightarrow \eta$是$A^H Ax = A^H b$的解。

定理2

$Ax=b$的最小二乘解的通解，

即$A^H Ax = A^H b$的通解为：

$$x = A^+ b + (I - A^+ A)y, \qquad \forall y \in C^n$$

其中，$A^+ b$是唯一的极小最小二乘解。