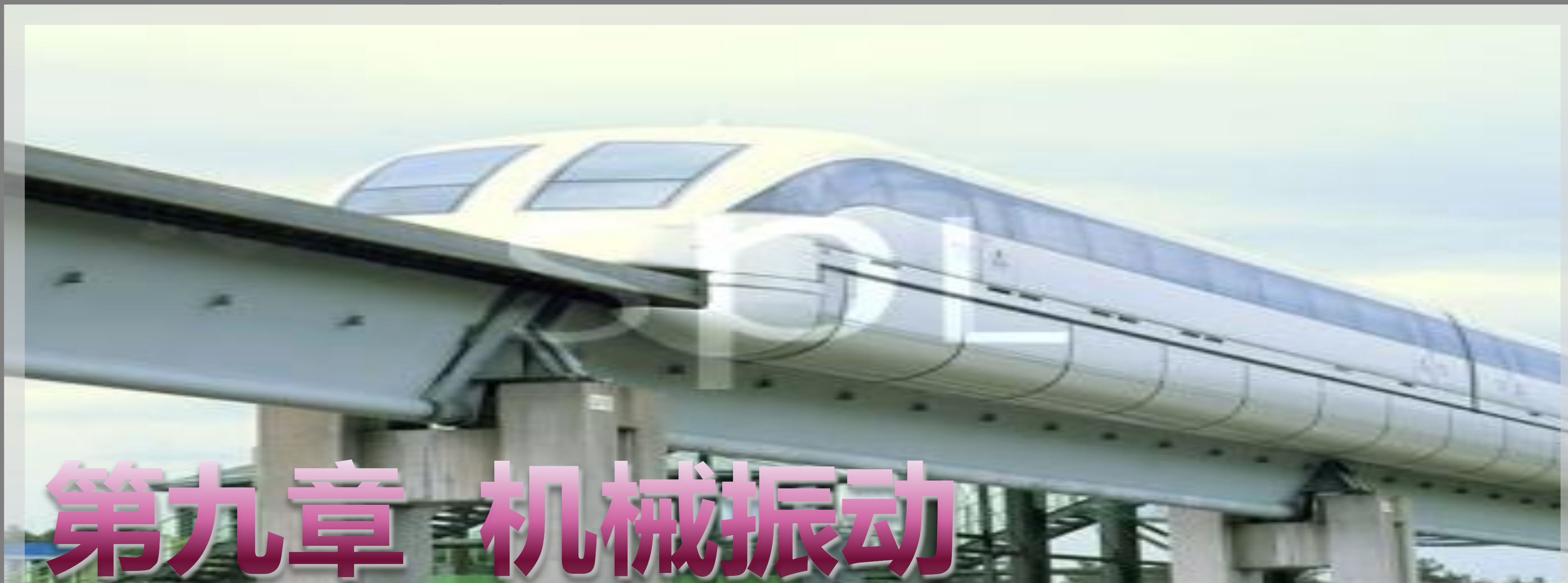


第九章 机械振动

前　　言

1 什么是振动：

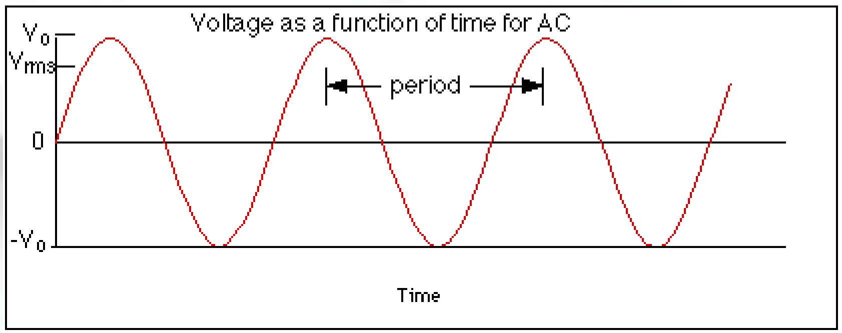
物体在一固定位置附近作来回的往复运动，称为机械振动。物体在发生摇摆、颠簸、打击、发声之处均有振动。任何一个具有质量和弹性的系统在其运动状态发生突变时，都会发生振动。

广义地，凡是描述物质运动状态的物理量，在某一固定值附近作周期性变化，都可称该物理量作振动。

前　　言

2 振动的特征

（在时间上）具有某种重复性。任何一个物理量在某一量值附近随时间作周期性变化都可以叫做**振动**。例如交流电路中的电流、电压，振荡电路中的电场强度和磁场强度等。



振动分为**周期**和**非周期**振动。**简谐振动**最简单、最基本的振动，例如，**弹簧谐振子**。

简谐运动 ⇄ 复杂振动

合成

分解

上一页 下一页 返回目录

简谐振动的动力学特征

任何一个振动都可看成若干不同频率的简谐振动的合成。

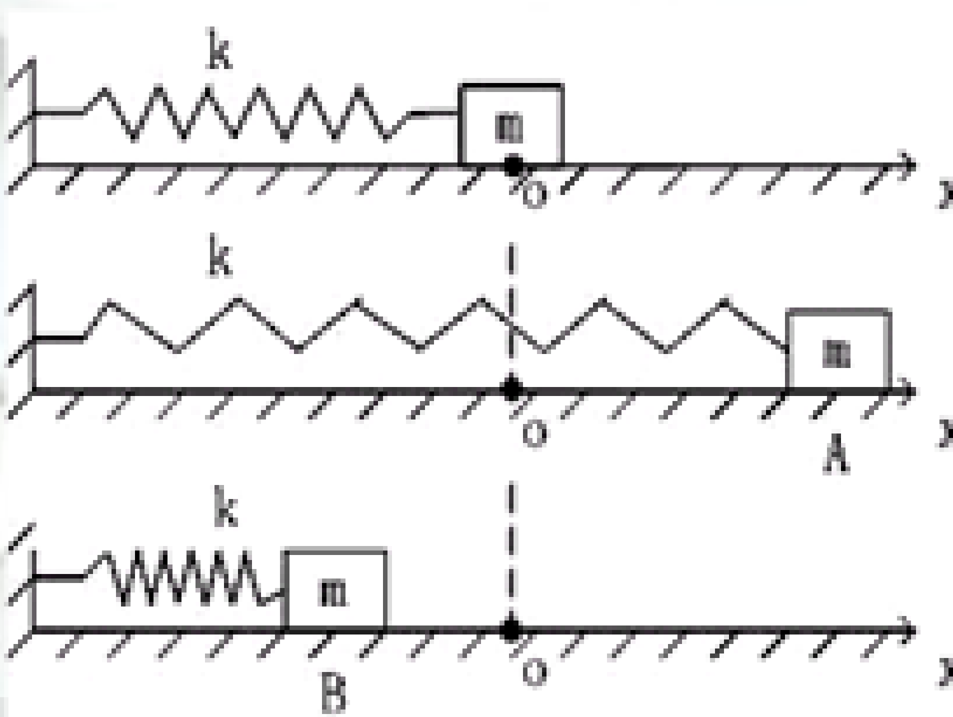
简谐运动

合成

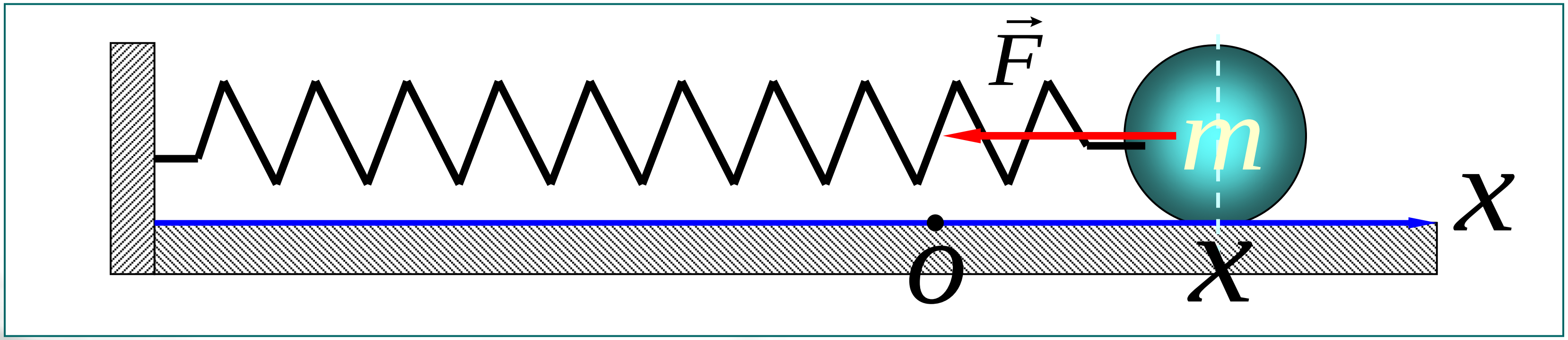
分解

复杂振动

弹簧振子模型



弹簧振子模型



***a* 与 *x* 方向相反**

$$\begin{cases} F=-kx=ma \\ a=\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

$$\omega^2=k/m$$

简谐振动的运动学

弹簧振子的位移

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \quad \rightarrow \quad x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\because \cos(\omega t+\varphi_0)=\sin(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$令 \quad \varphi'=\varphi_0+\frac{\pi}{2}$$

$\therefore x=A\sin(\omega t+\varphi')$ 位移也可用正弦函数表示。

作简谐振动的质点在任意时刻的速度和加速度表达式分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\phi_0)=A\omega\cos(\omega t+\phi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0+\pi)$$

描述简谐振动的三个重要参量

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

1 振幅A

$$A = \left| x_{\max} \right|$$

初始条件：$t=0$，$x=x_0$，$v=v_0$

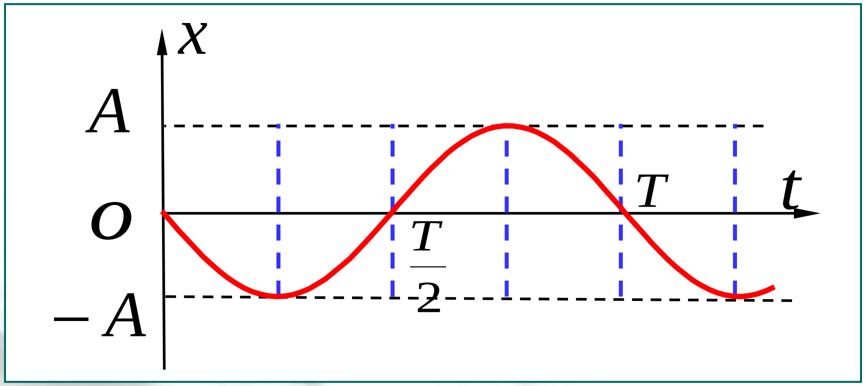
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，振幅和初相由初始条件决定。

描述简谐振动的三个重要参量

2 周期、频率、圆频率

物体作一次完全振动所经历的时间叫做振动的周期T



◈ 周期s

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A\cos[\omega(t+T)+\varphi_0] = A\cos[\omega t+\varphi_0+2\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$T = 2\pi/\omega$$

对给定的振动系统，其周期仅与振动系统本身的物理性质有关

例如弹簧振子周期 $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$

描述简谐振动的三个重要参量

2 周期、频率、圆频率

- 频率*Hz*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

单位时间内物体所作的完全振动次数叫做频率，用ν表示。

- 圆频率*rad/s*

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

ω表示在秒内，物体所做的完全振动（全振动）次数。

简谐振动还可以表示为

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

描述简谐振动的三个重要参量

3 相位和初相

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$(\omega t + \varphi_0)$ 称为相位，相位是决定振动物体运动状态的物理量。

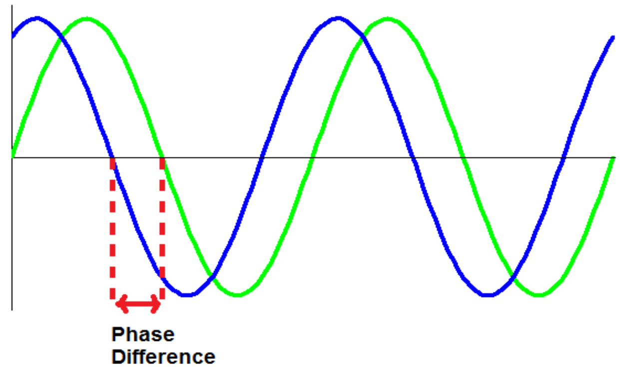
① 存在一一对应的关系

$$\omega t + \varphi_0 = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = A, v = 0 \Rightarrow \text{物体在位移最大处速度为零} \\ \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, v = -\omega A \Rightarrow \text{物体在平衡位置以最大速率向}x\text{轴负方向运动} \\ -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, v = \omega A \Rightarrow \text{物体在平衡位置以最大速率向}x\text{轴正方向运动} \end{cases}$$

描述简谐振动的三个重要参量

② 相位在0~2π内变化，质点无相同的运动状态；相差$2n\pi$(n为整数)，质点运动状态全同（周期性）

③ 初相位φ_0，即t=0时的相位，描述质点初始时刻的运动状态



两振动相位之差$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$，称为相位差。若$\Delta\varphi = 2n\pi$，则称两振动相位相同（或同相），若两振动振幅和频率也相同，则表明此时它们的振动状态相同；若$\Delta\varphi = (2n+1)\pi$，则称两振动相位相反（或反相），表明此时它们的振动状态相反；若$0 < \Delta\varphi < \pi$，则称φ_2超前于φ_1，或说 φ_1滞后于φ_2。总之，相位差的不同反映了两个振动的不同。

上一页 下一页 返回目录

例 如图所示的弹簧振子，已知弹簧的劲度系数k=1.60N/m，物体的质量M=0.40kg, 试就下列两种情况求谐振动表达式。

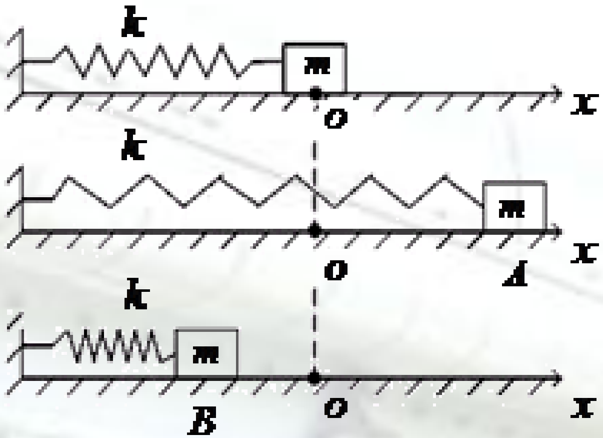
(2)将物体从平衡位置向右移到x=0.1m处释放；

(1)将物体从平衡位置向右移到x=0.1m处后并给物体以向左的速度0.20m/s。

解：（1）设振动表达式为$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

则由题意知角频率

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{1.4}{0.6}} = 2rad/s$$



当t=0时，$x_0 = 0.1m$，$v_0 = 0m/s$

上一页 下一页 返回目录

（2）当$t=0$时， $x_0=0.1m$，$v_0=-0.2m/s$

$$\text{振幅}A=\sqrt{x_0^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{0.10^2+\left(\frac{-0.20}{2}\right)^2}=0.10\sqrt{2}=0.1414(m)$$

$$x_0=0.1\sqrt{2}\cos\varphi_0=0.1\Rightarrow\cos\varphi_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_0=-0.1\sqrt{2}\omega\sin\phi_0=-0.2<0$$

$$\therefore\phi_0=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{振子的振动表达式为}x=0.1414\cos(2t+\frac{\pi}{4})\ m$$

上一页 下一页 返回目录

简谐振动的矢量表示法

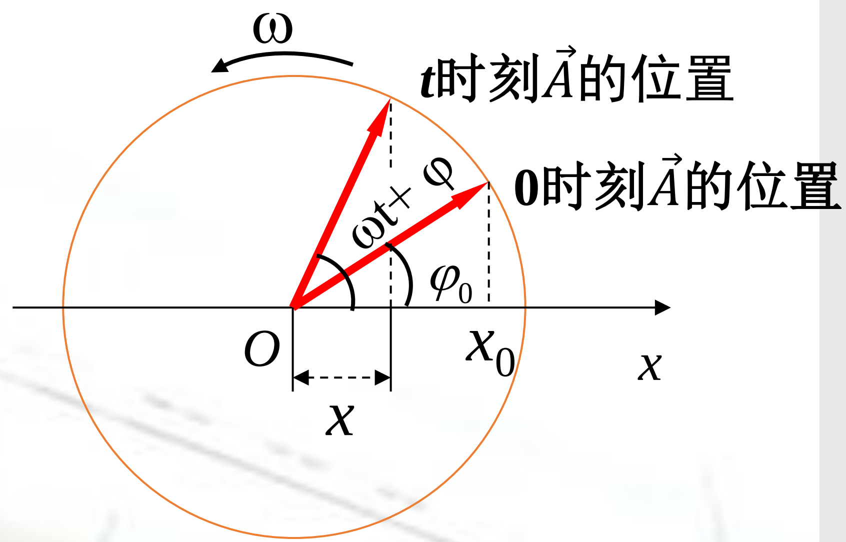
1 旋转矢量

(1) 旋转矢量的制作

若已知一个谐振动

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

相应的旋转矢量如图所示。



(2) 旋转矢量的作用

使描述简谐振动的三个重要参数A,ω,φ形象化

(3) 旋转矢量本身不是谐振动

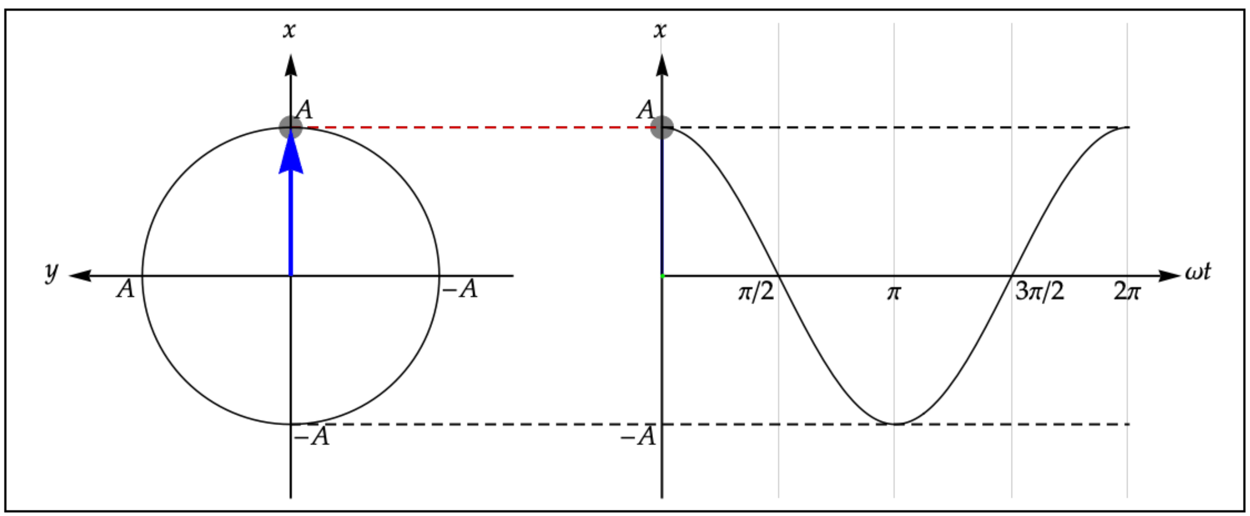
习惯上用$\vec{A}$在x轴上的投影描述振动

上一页 下一页 返回目录

简谐振动的矢量表示法

2 旋转矢量与简谐振动的关系

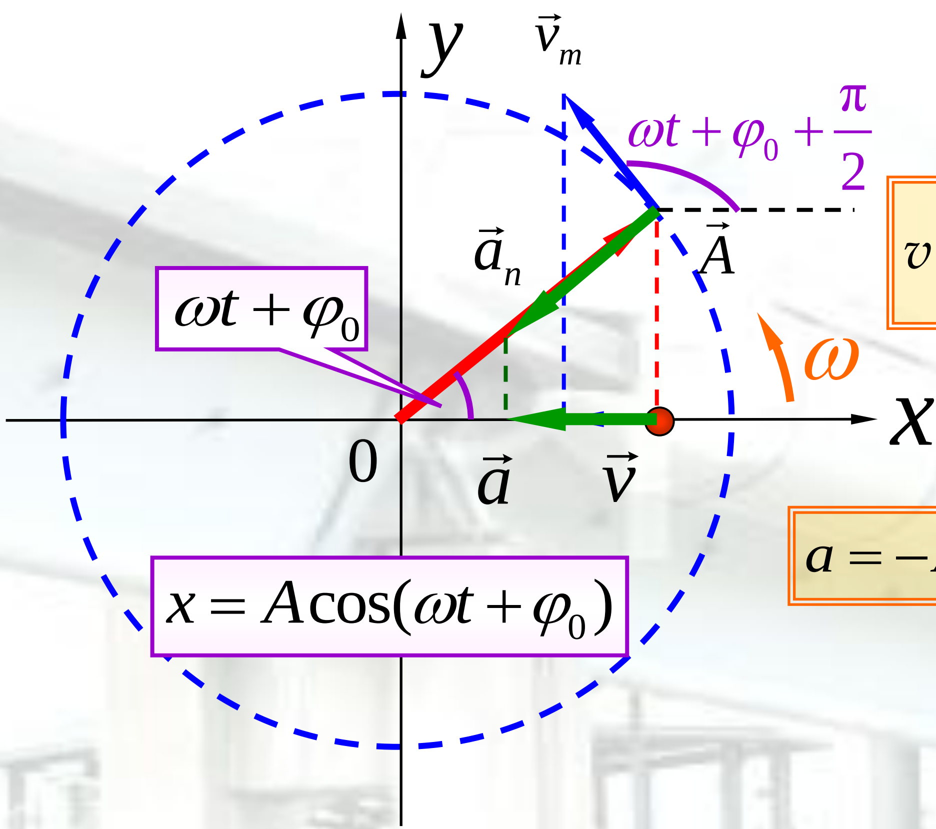
(1)$\vec{A}$的模等于振幅A；$\vec{A}$旋转的角速度等于简谐振动的角频率，$\vec{A}$转动一周相当于物体在x轴上做一次全振动；t=0时，$\vec{A}$与x轴的夹角为初相位φ_0；$\vec{A}$的端点在x轴上的投影为简谐振动



简谐振动的矢量表示法

2 旋转矢量与简谐振动的关系

(2)可以借助旋转矢量图求出简谐振动的速度和加速度。



$$v_m = A\omega$$

$$a_n = A\omega^2$$

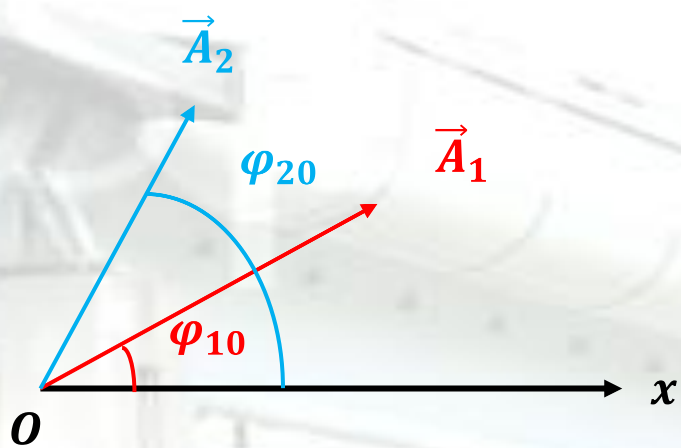
$$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

简谐振动的矢量表示法

(3)利用旋转矢量图，可以方便地比较两个同频率ω简谐振动的“步调”。

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$$

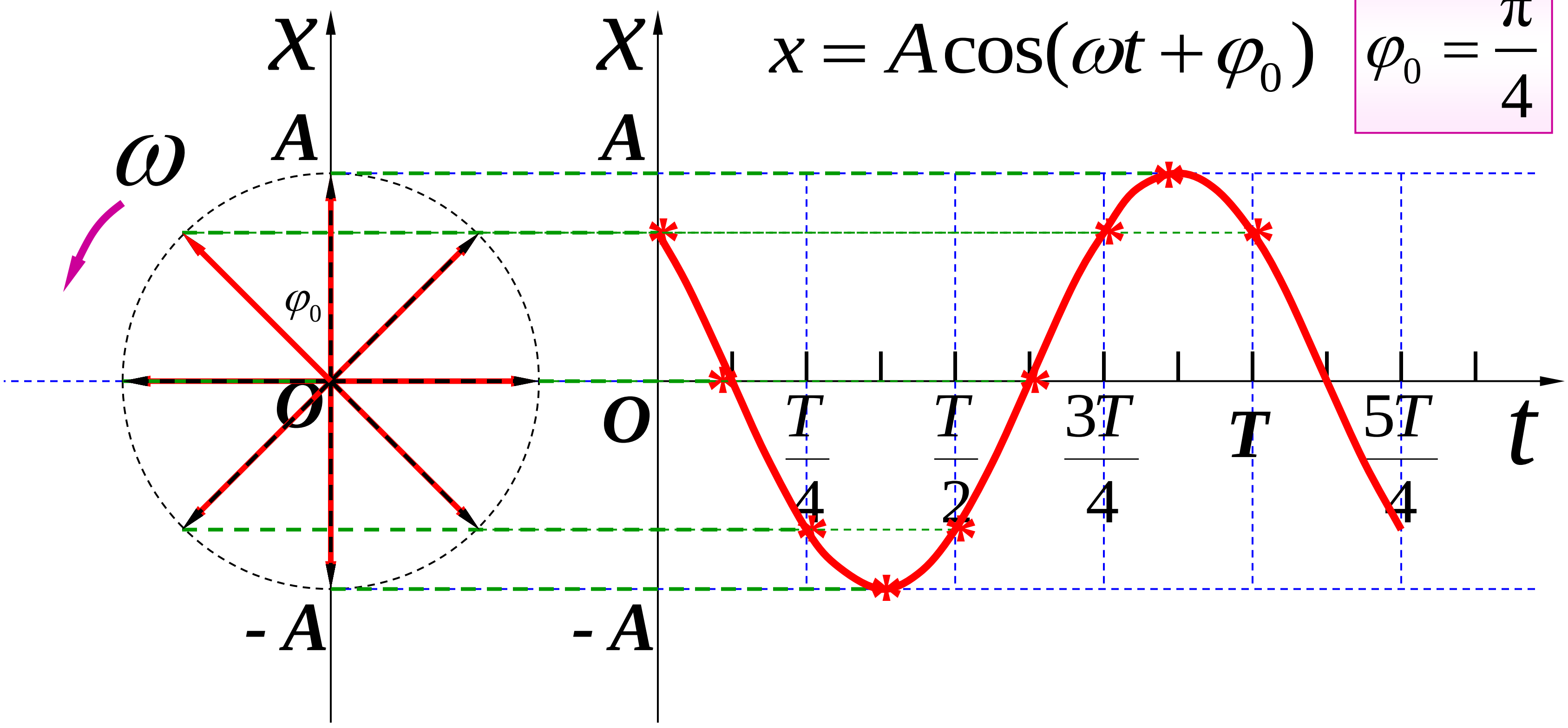


简谐振动的矢量表示法

用旋转矢量图画简谐运动的x-t图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$



$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

简谐振动的合成

同方向同频率谐振动的合成

$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_{10})$, $x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_{20})$，求：$x = x_1 + x_2$

1 计算法

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$= \cos\omega t(A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}) - \sin\omega t(A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20})$$

令 $\begin{cases} A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20} = A\cos\varphi_0 \\ A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20} = A\sin\varphi_0 \end{cases}$

$$x = A\cos\omega t\cdot\cos\varphi_0 - A\sin\omega t\cdot\sin\varphi_0 = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

合振幅：$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$

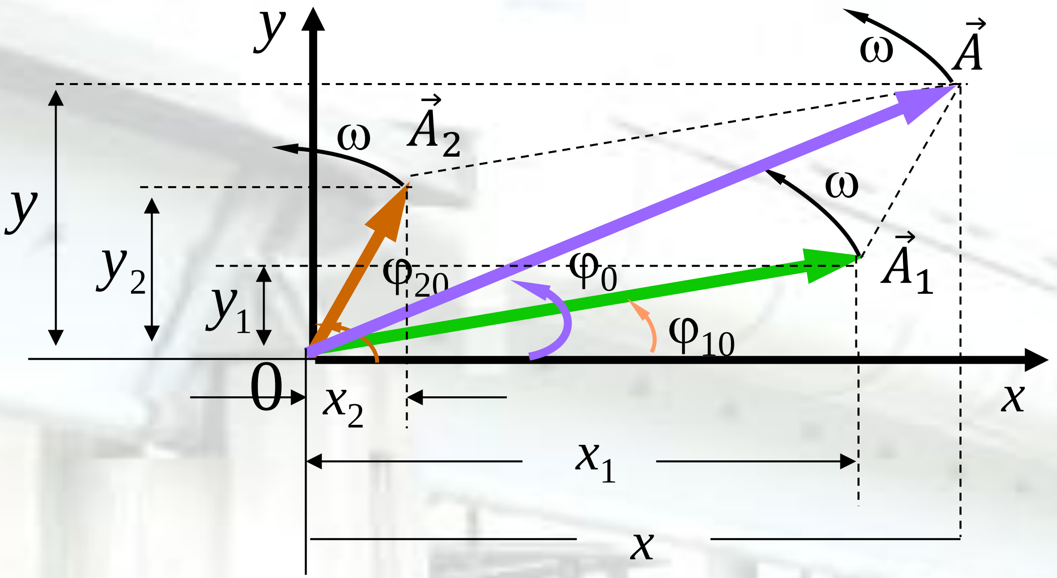
初相位：$\varphi_0 = \tan^{-1}\dfrac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$

两个同方向、同频率的谐振动的合振动仍是同频率的谐振动

同方向同频率谐振动的合成

2 矢量合成法

两振动频率相同，则它们的旋转矢量以相同的角速度ω旋转，故形成稳定的平形四边形。利用矢量加法的平行四边形法则，合振动的旋转矢量为$\vec{A}$。



利用正切函数求得合振动的初位相

上一页 下一页 返回目录

同方向同频率谐振动的合成

讨论 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}$$

① 位相差$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2)$

$A=A_1+A_2$相互加强，振幅最大 $\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi_0)}$

② 位相差$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2)$

$A=|A_2-A_1|$相互削弱，振幅最小 $\boxed{x=|A_2-A_1|\cos(\omega t+\pi)}$

③ 位相差$\Delta\varphi$=任意值

$$|A_2-A_1|<A<A_2+A_1$$

同方向不同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

$$\boxed{x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)}$$

当$|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_2 + \omega_1$时

$$x = \underbrace{2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)}_{\text{振幅部分}}\cos(\underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}_{\text{合振动频率}}t + \varphi)$$

振幅部分　合振动频率

$$\text{振幅}: A = \left|2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right| \Rightarrow \begin{cases} A_{max} = 2A \\ A_{min} = 0 \end{cases}$$

同方向不同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} \text{振动频率：} \quad \omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \\ \text{振幅：} \quad A = \left| 2A\cos\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \right| \Rightarrow \begin{cases} A_{max} = 2A \\ A_{min} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

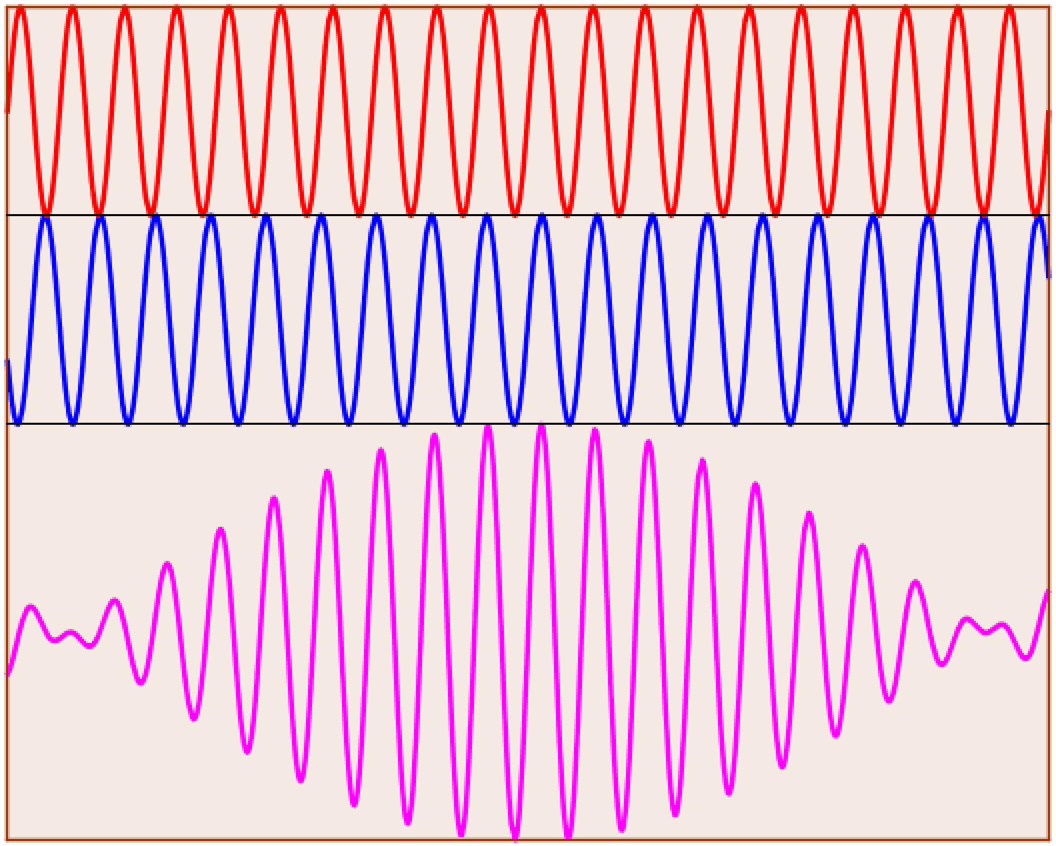
振幅时大时小的现象叫做“拍”。合振幅每变化一个周期称为一拍，单位时间内拍出现的次数(合振幅变化的频率)叫做拍频。

$$\nu_{拍} = \frac{\omega_{拍}}{2\pi} = \left| \frac{\omega_2}{2\pi} - \frac{\omega_1}{2\pi} \right| = | \nu_2 - \nu_1 |$$

拍频等于两个分振动频率之差

$$T_{拍} = \left| \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \right|$$

同方向不同频率简谐振动的合成



拍频演示视频

上一页 下一页 返回目录