

## 7.3 比奥-萨伐尔定律

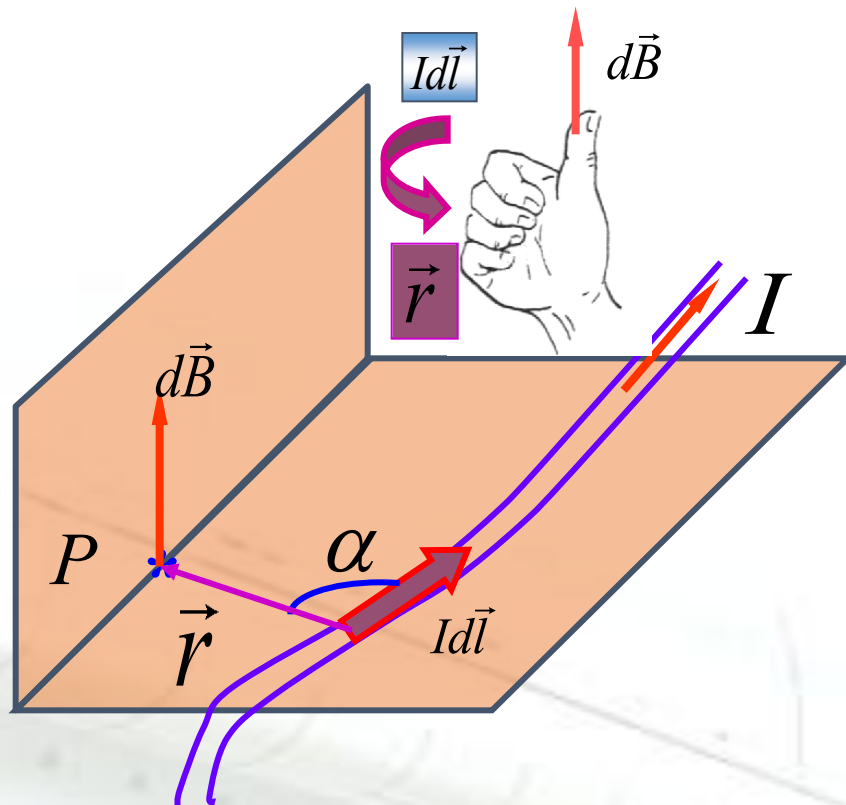
### 7.3.1 比奥-萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

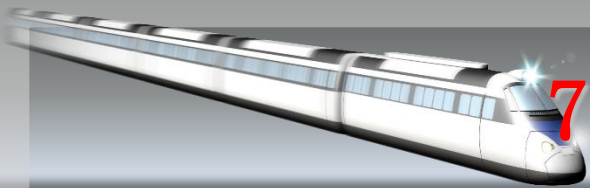
式中真空的磁导率

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$$

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

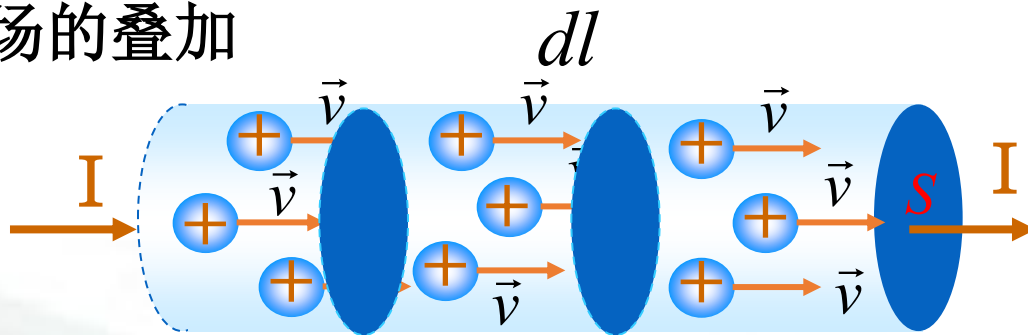


虽然比奥-萨伐尔定律不能直接由实验验证，但是由定律计算处的通电导线在场点产生的磁场和实验测量的结果符合得很好，间接地证实了比奥-萨伐尔定律的正确性



## 7.3 比奥-萨伐尔定律

电流源于电荷的定向运动，所以电流的磁场实质上是运动电荷产生磁场的叠加

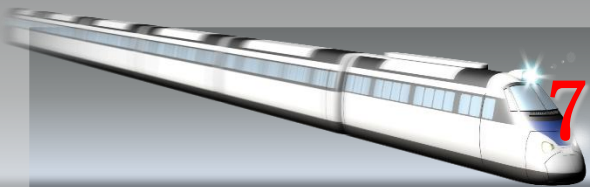


$$Id\vec{l} = JSd\vec{l} = nq\vec{v}Sdl = Nq\vec{v}$$

$$d\vec{B} = N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

对于一个运动带电粒子激发的磁场的磁感应强度为

$$d\vec{B}_1 = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$



## 7.3 比奥-萨伐尔定律

### 7.3.2 三种典型载流导体的磁场

#### 1 载流直导线的磁场

$$B = \int_{A_1}^{A_2} dB = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

$$r = r_0 / \sin(\pi - \theta) = r_0 / \sin \theta$$

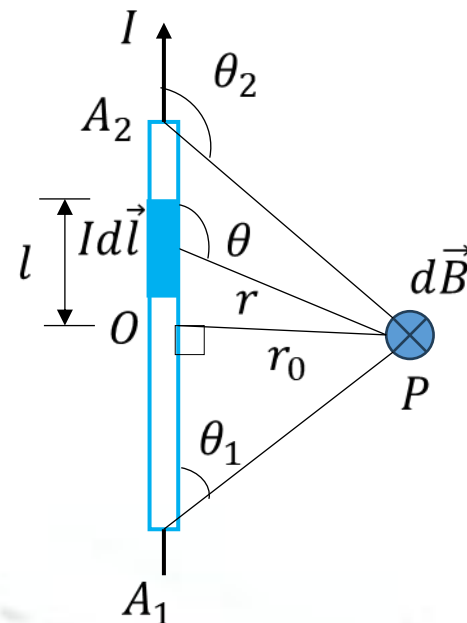
$$l = r_0 \cot(\pi - \theta) = -r_0 \cot \theta$$

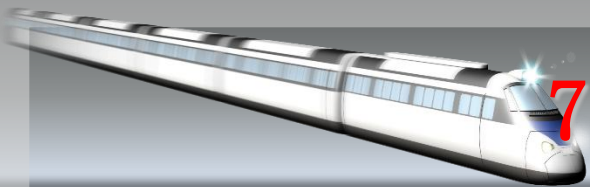
$$dl = r_0 \sin^{-2} \theta d\theta$$

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{r_0} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

如果导线为“无限长” ( $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$ )

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$





## 7.3 比奥-萨伐尔定律

### 7.3.2 三种典型载流导体的磁场

#### 2 载流圆线圈

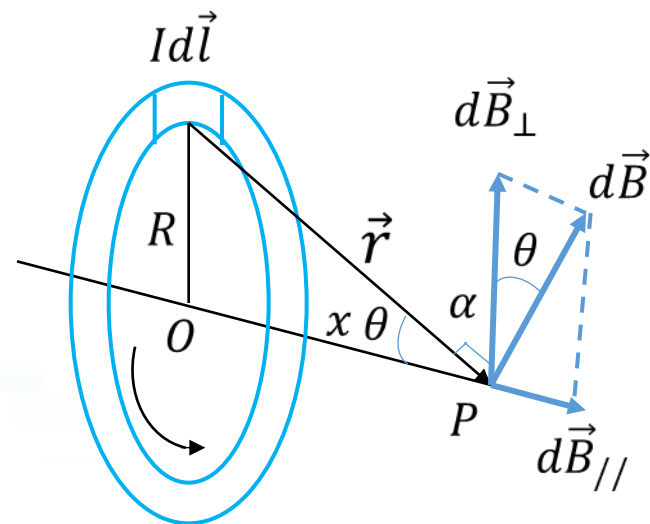
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

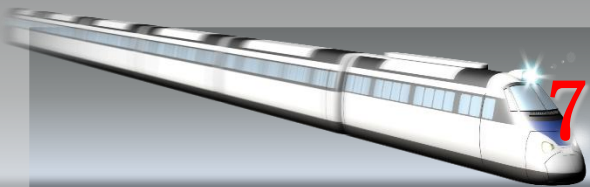
$$\begin{aligned} B &= \int_L dB_{//} = \int_L dB \sin \theta = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta \\ &= \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} 2\pi R \end{aligned}$$

利用  $r^2 = R^2 + x^2$ ,  $\sin \theta = \frac{R}{r}$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

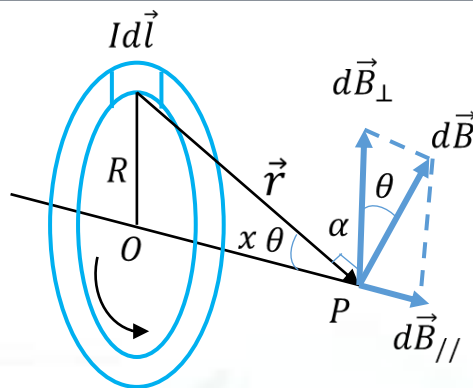
$\vec{B}$  的方向沿  $x$  轴的正方向





## 7.3 比奥-萨伐尔定律

考虑两种特殊的情况：



(a) 在圆线圈中心处0点，即 $x=0$ 处，0点磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

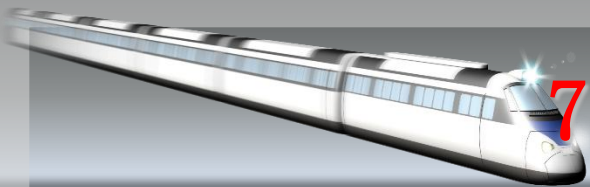
如果圆线圈由N匝导线组成，通过每匝的电流均为I，则圆心处

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

(b) 在远离0点处，即 $x \gg R$ 时，磁感应强度大小

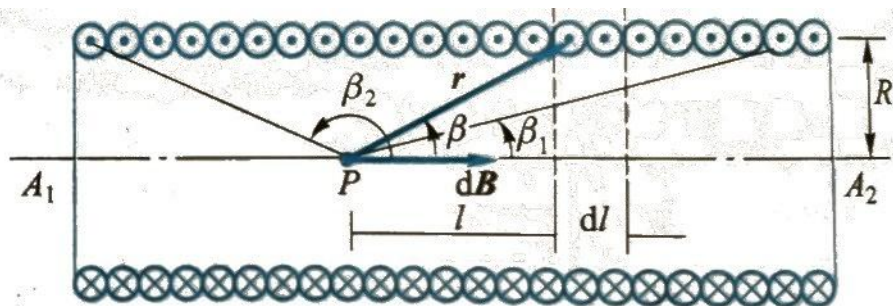
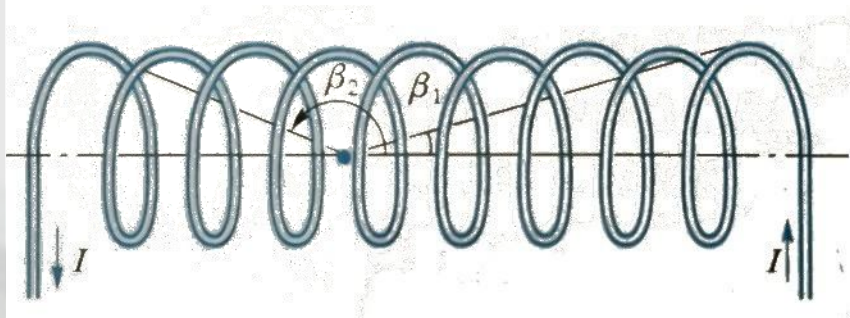
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2x^3}$$





## 7.3 比奥-萨伐尔定律

### 3 载流直螺线管内部的磁场

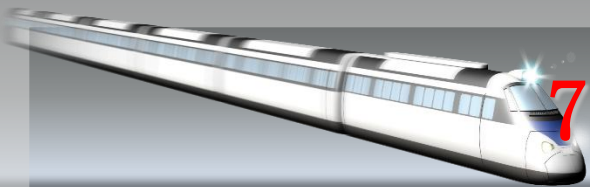


$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I n dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

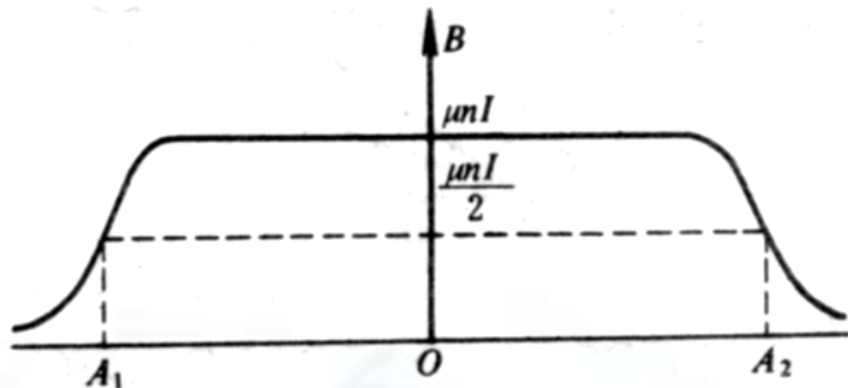
$$\Rightarrow B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I n dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

利用  $l = R \cot \beta$ ,  $dl = -R \csc^2 \beta d\beta$ ,  $R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta$

$$\begin{aligned} B &= \int -\frac{\mu_0}{2} n I \sin \beta d\beta \\ &= \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \end{aligned}$$



## 7.3 比奥-萨伐尔定律



(a) 对于无限长载流直螺线管,  $\beta_1 \rightarrow \pi$ ,  $\beta_2 \rightarrow 0$ , 管内轴线

$$B = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) = \mu_0 nI$$

(b) 对于半无限长螺线管端点,  $\beta_1 \rightarrow \pi/2$ ,  $\beta_2 \rightarrow 0$

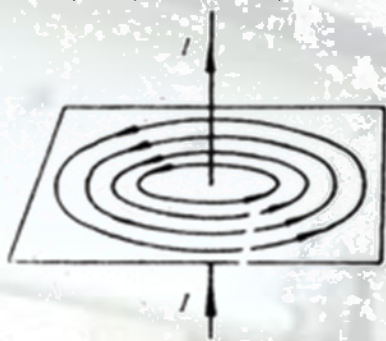
$$B = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) = \mu_0 nI / 2$$

## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

### 7.4.1 磁感应线

类似电场线，引入磁感应线：

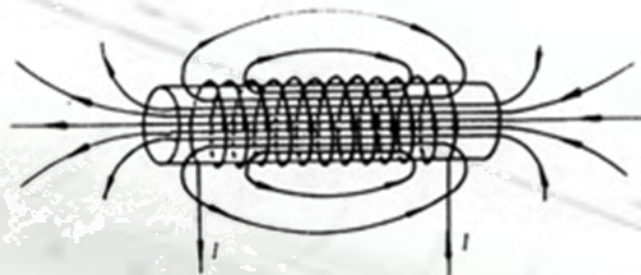
- (1) 曲线上每一点的**切线**方向就是该点的磁感应强度 $\vec{B}$ 的**方向**
- (2) 通过磁场中某点处**垂直**于磁感应强度 $\vec{B}$ 的**方向的单位面积**的磁感线条数，等于该点的磁感应强度 $\vec{B}$ 的**大小**



(a) 直电流



(b) 圆电流流



(c) 螺线管电流

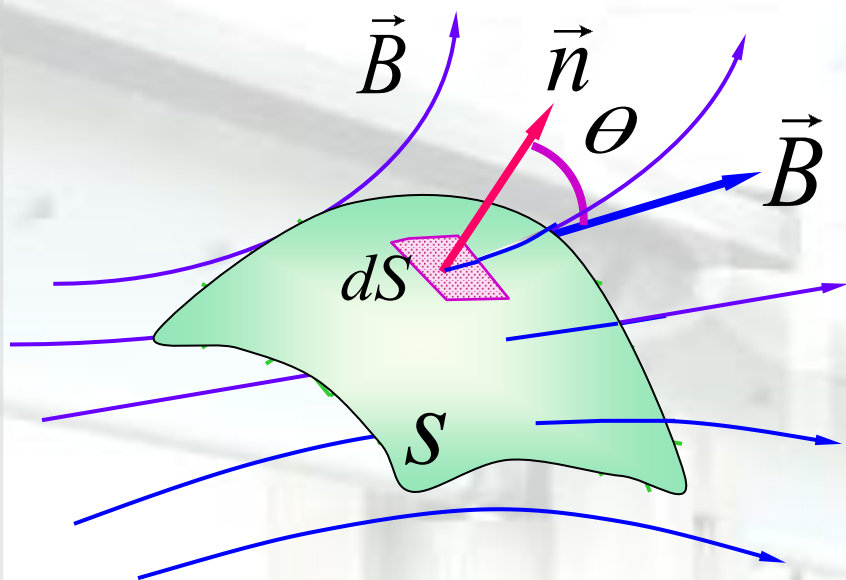
- (1) 任意两条磁感应线不会相交
- (2) 磁感应线是闭合曲线，磁场的旋度不为零



## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

### 7.4.2 磁通量与磁场的高斯定理

**磁通量**：穿过磁场中某一曲面的磁感线总数，称为穿过该曲面的磁通量，用符号 $\Phi$ 表示



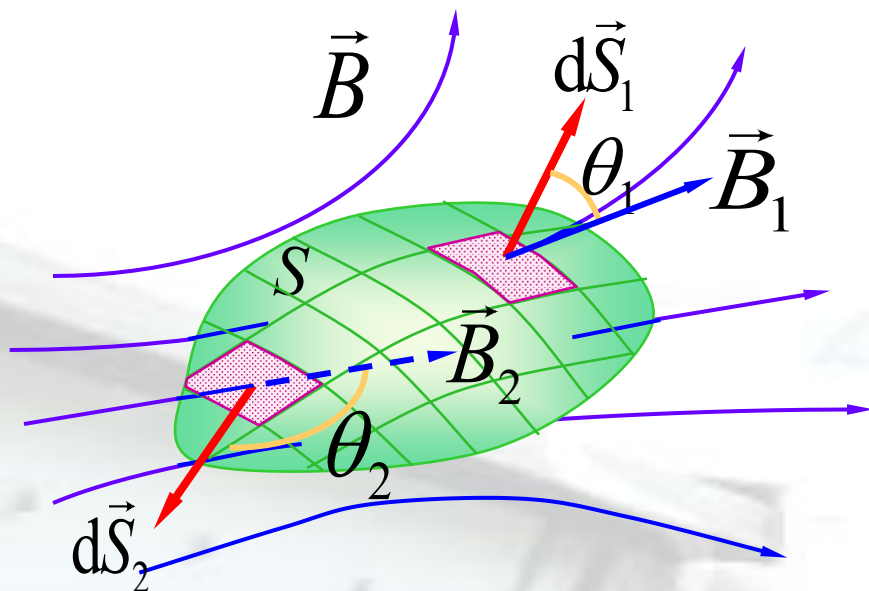
$$d\Phi = B \cos \theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

单位：韦伯 (**Wb**)

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$

## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理



$$d\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 > 0$$

$$d\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 < 0$$

磁感应线是闭合的，通过闭合曲面的过程中有多少磁感线穿入，就有多少穿出。

$$\oint_S B \cos \theta dS = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

**磁场中的高斯定理：** 穿过任意闭合曲面的总磁通量必为零

## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

### 7.4.3 安培环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$$

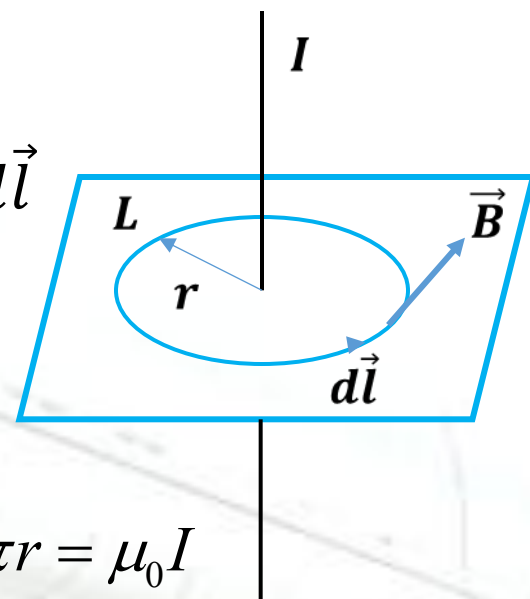
无限长直导线在圆周上点 $P$ 的磁感应强度为 $d\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 的方向相同

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

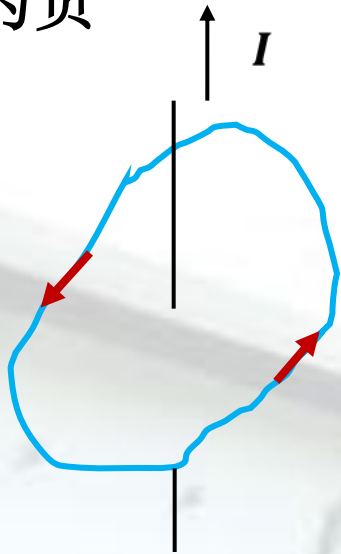
如果 $d\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 的方向相反

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl \cos \pi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = -\mu_0 I$$

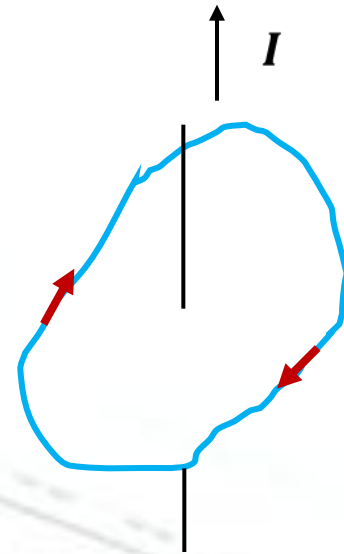


## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

根据右手螺旋定则，与螺旋前进方向相同的电流为正，相反的为负



电流方向为正



电流方向为负

推广至任意回路的情况

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

### 7.4.4 安培环路定理的应用

#### 1 无限长直螺旋管内的磁场

均匀密绕无限长直螺线管，单位长度 $n$ 匝线圈，通有电流 $I$

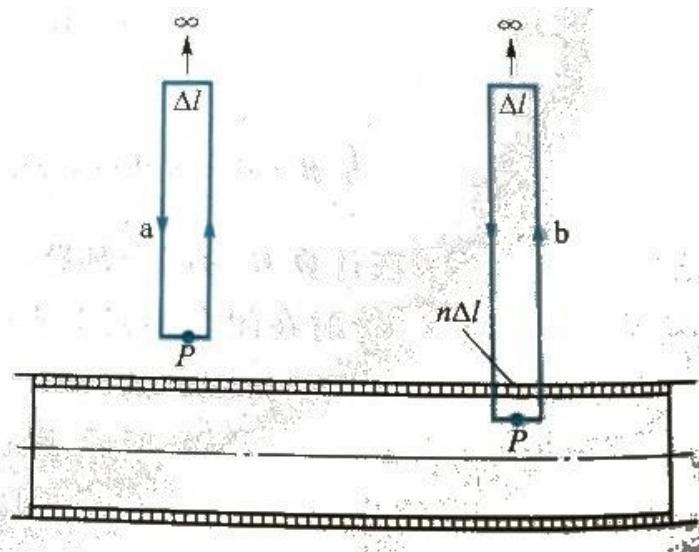
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(P)\Delta l$$

(a) P点在螺线管外，通过闭合环路电流为0，即

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow B(P) = 0$$

(b) P点在螺线管内，通过闭合环路电流为 $nI\Delta l$ ，即

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I \Delta l \Rightarrow B(P) = \mu_0 n I$$





## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

### 2 环形螺线管内的磁场

环形螺线管共有 $N$ 匝线圈，通过的电流为 $I$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

(a) 与螺线管共轴的圆在螺线管内

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

(b) 与螺线管共轴的圆在螺线管外

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow B = 0$$

若环形螺线管的横截面积很小，管内各点的磁感应强度可看成均匀的。若圆环的平均长度为 $l$ ，则环内各点的磁感应强度可表示为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$$

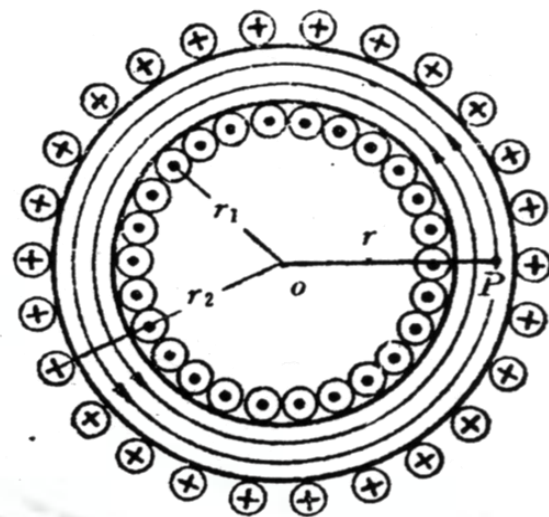


图 7.19 环形螺线管内的磁场

## 7.4 磁场的高斯定理和安培环路定理

### 3 “无限长”载流圆柱形导体内外的磁场

一圆柱形导体，半径为 $R$ ，电流 $I$ 沿其轴线方向均匀分布在导体横截面上。当 $P$ 点在圆柱体外时

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当 $P$ 点在圆柱体内时

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

