

第12章 光的衍射

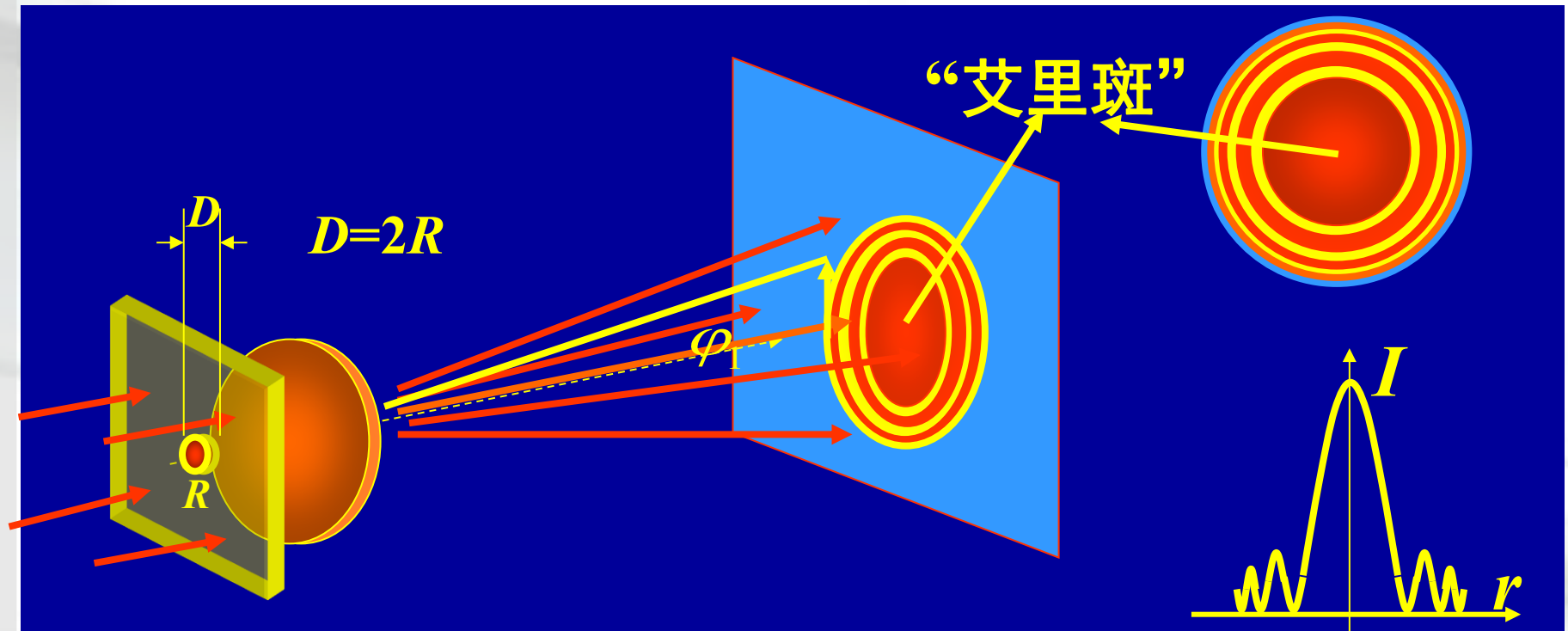
光の干渉と回折

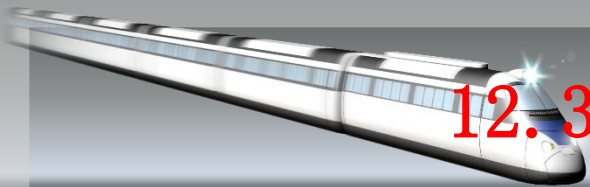


12.3 夫琅禾费圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

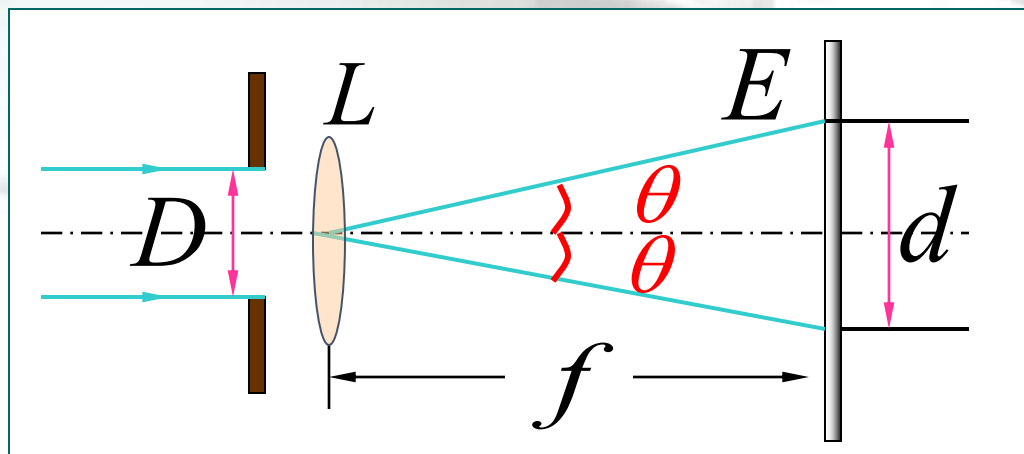
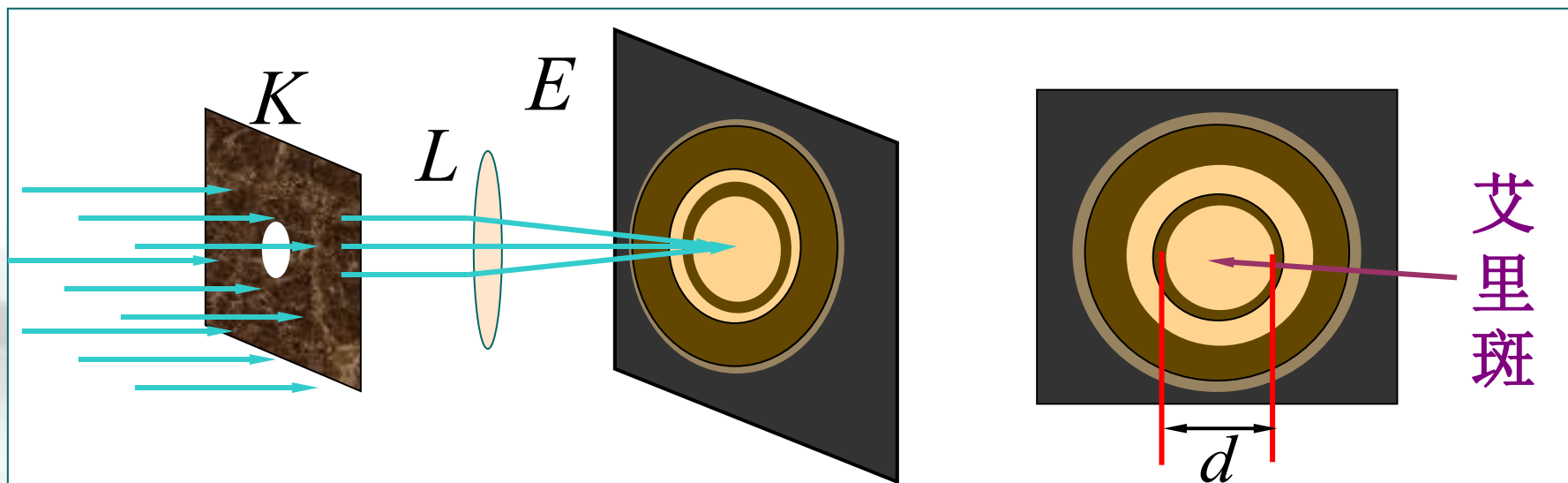
12.3.1 夫琅禾费圆孔衍射

装置与现象





12.3.1 夫琅禾费圆孔衍射

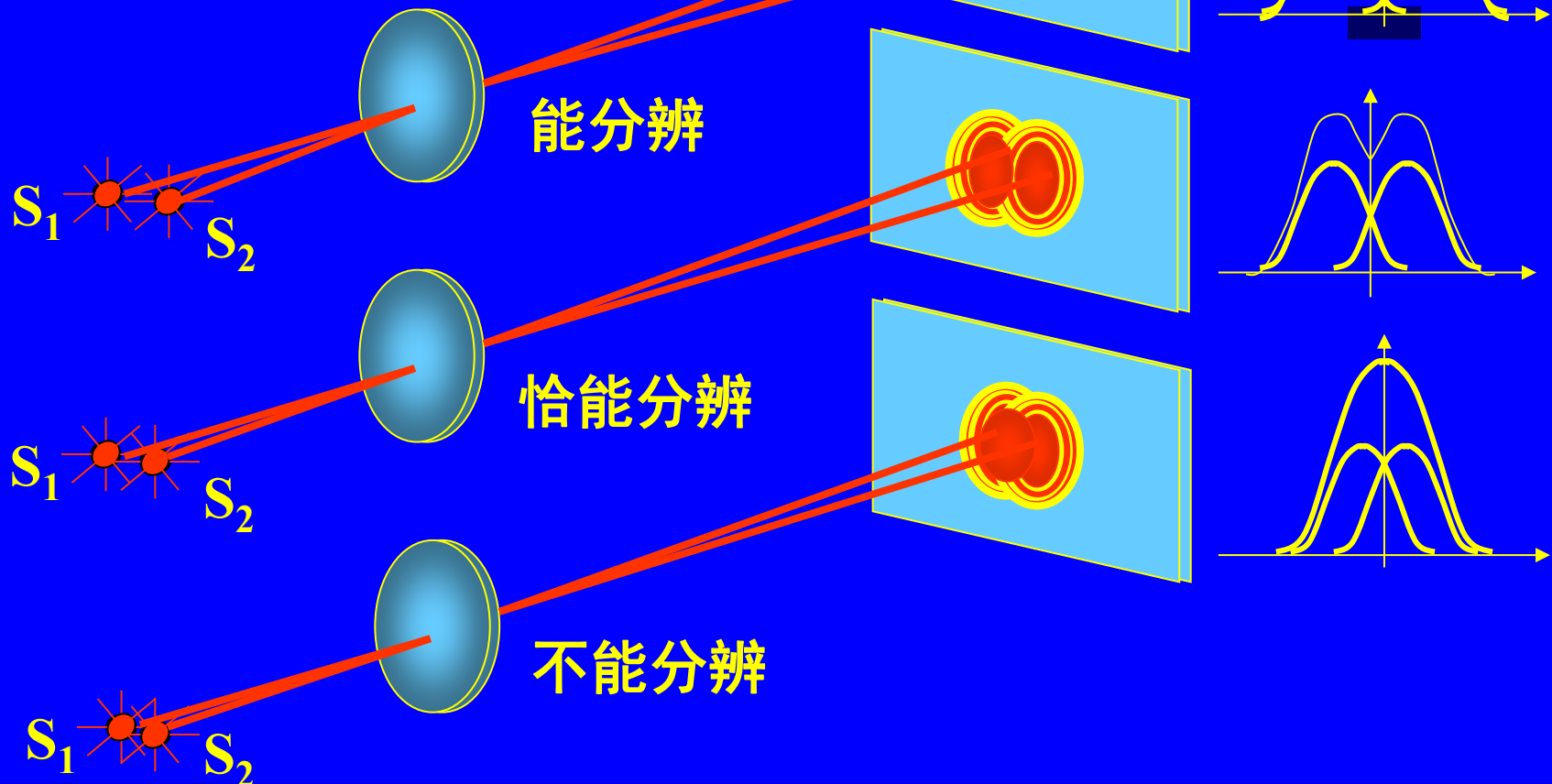


d : 艾里斑直径

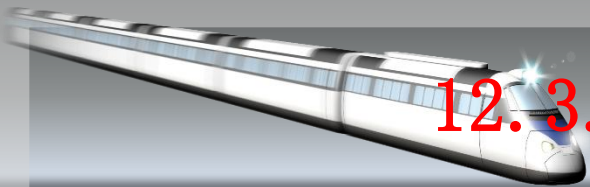
$$\theta \approx \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{d}{2f}$$

圆孔的直径 D 越小，或 λ 越大，则衍射现象越明显

光的衍射限制了光学仪器的分辨本领



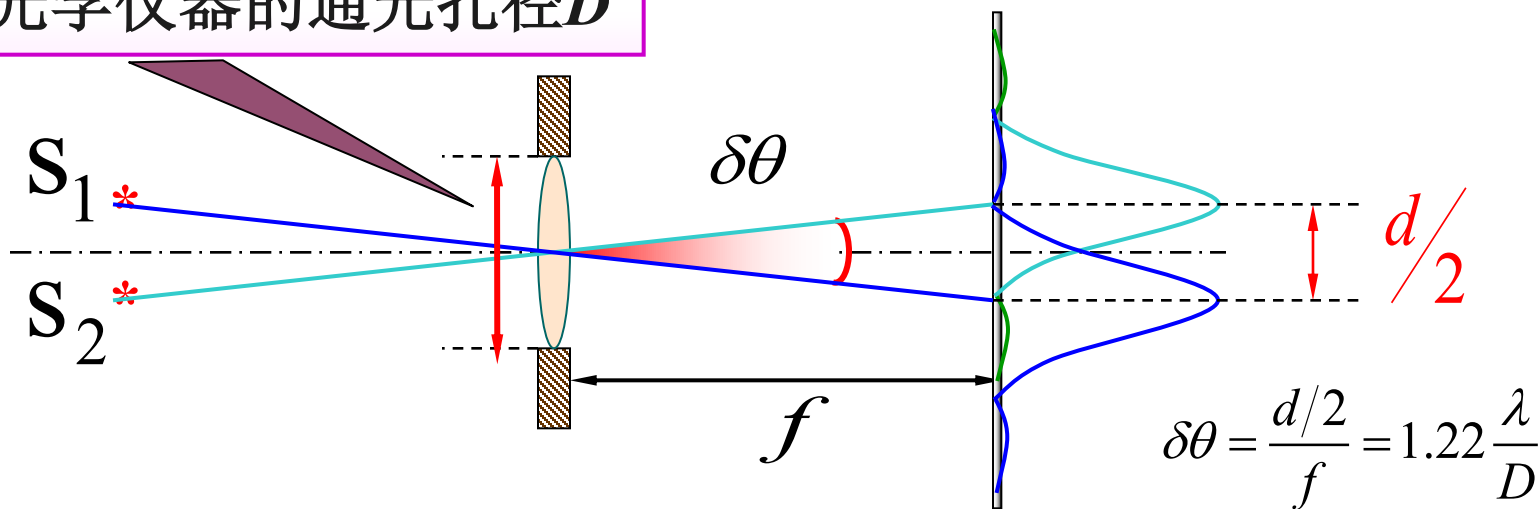
瑞利指出：对于任何一个光学仪器，如果一个物点衍射图样的艾里斑中央最亮处恰好与另一个物点衍射图样的第一个最暗处相重合，则认为这两个物点恰好可以被光学仪器所分辨。



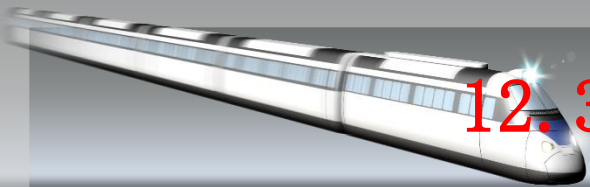
12.3.2 光学仪器的分辨本领

两物点对透镜光心的张角称为光学仪器的**最小分辨角**，用 $\delta\theta$ 表示，它正好等于每个艾里斑的半角宽度，即 $\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

光学仪器的通光孔径 D



最小分辨角的倒数 $1/\delta\theta$ 称为光学仪器的分辨率



12.3.2 光学仪器的分辨本领

由艾里斑半角公式，得光学仪器的分辨率

$$\text{光学仪器分辨率 } R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda} \propto D, \frac{1}{\lambda}$$

因此，为提高仪器分辨率，或说为提高成像质量

方法之一 使透镜镜头直径加大。

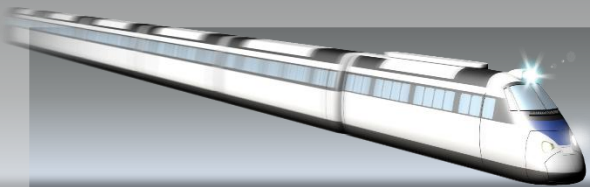
方法之二 降低入射光的波长。

望远镜： λ 不可选择，可使 $D \uparrow$ ；

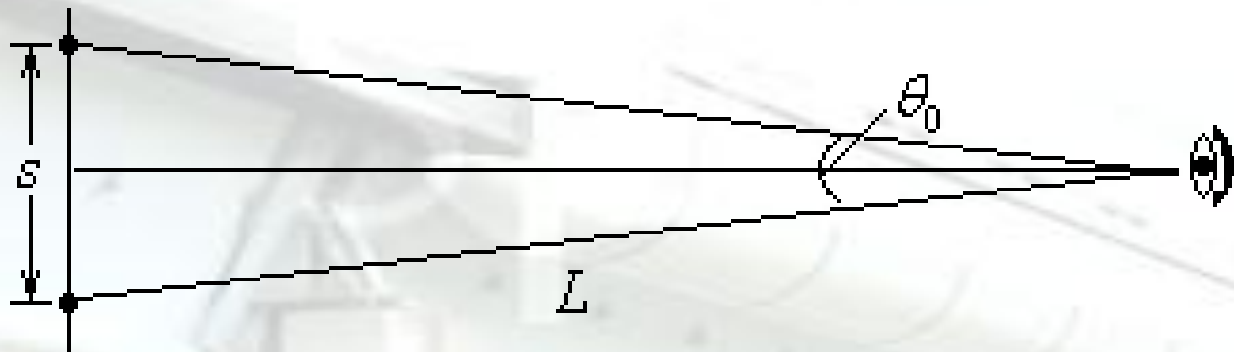
显微镜： D 不会很大，可使 $\lambda \downarrow$ 。

电子 λ ： $0.1\text{\AA} \sim 1\text{\AA}$ ，

因为电子显微镜分辨本领很高，所以可观察物质结构。



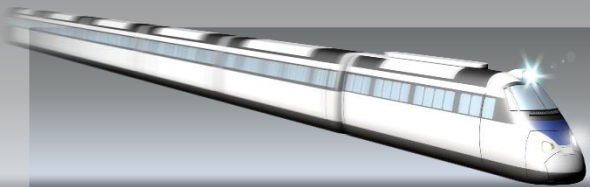
例 通常人眼瞳孔直径约为3mm，在可见光中，人眼最敏感的波长为550nm的黄绿光，(1)人眼的最小分辨角多大？(2)若教室黑板上写有一等号“=”，两条线的间距为2mm，则等号距离人多远处，人眼恰能分辨出该符号，而不致因衍射效应，将其看成减号“-”？



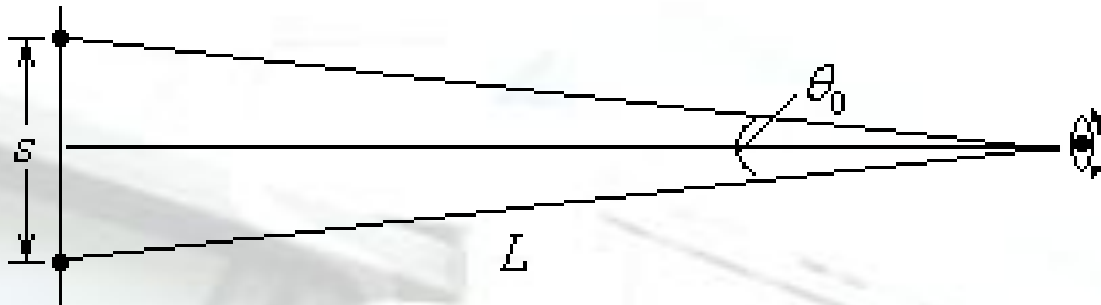
解 人眼的最小分辨角

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}} = 2.24 \times 10^{-4} (\text{rad})$$

[上一页](#)[下一页](#)[返回目录](#)

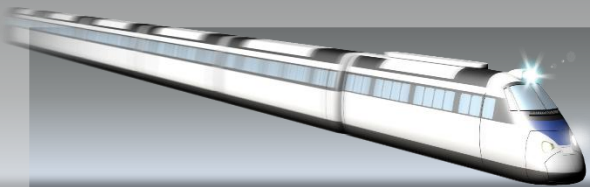


(2) 设等号间距为 s ，距离人眼为 L 。等号对人眼的张角为 $\theta = s/L$ ，当 L 太大时导致它对人眼的张角小于最小分辨角 θ_0 ，两横杠不可分辨，就可能将“=”看成“-”，所以要能分辨，应有



$$\theta = s / L \geq \theta_0 \Rightarrow L \leq \frac{s}{\theta_0} = \frac{2.0 \times 10^{-3}}{2.24 \times 10^{-4}} = 8.9(\text{m})$$

人眼恰能分辨出等号时， $L = 8.9\text{m}$



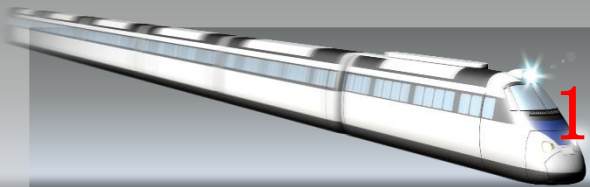
12.4 衍射光栅

想要分辨出衍射条纹，条纹**既细且明亮**。然而对单缝衍射来说，这两个要求难以同时达到。

$$l_0 = \frac{2f\lambda}{a}$$

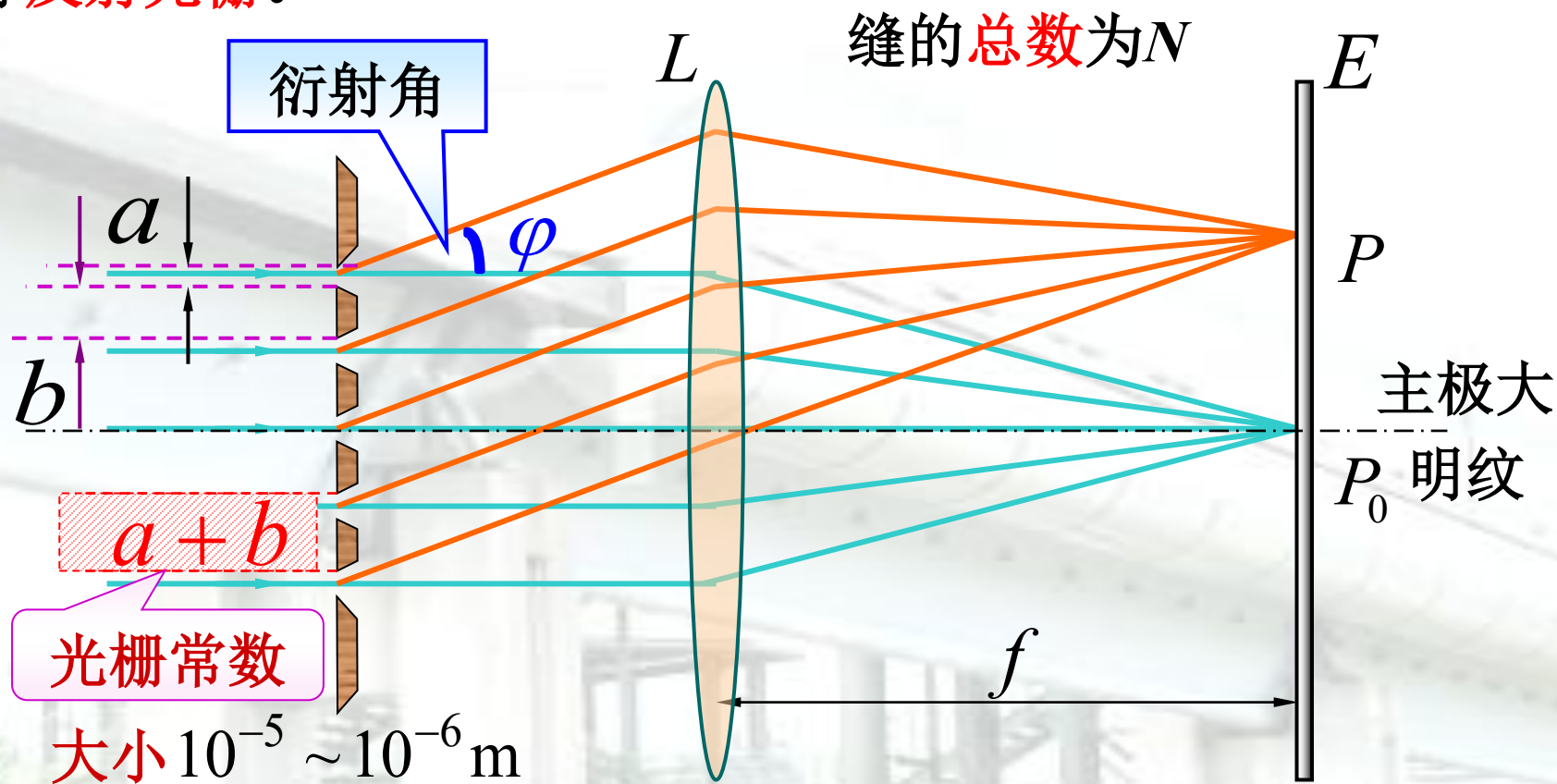
因为若要条纹分得开，单缝的宽度 a 就要很小，这样通过单缝的光能量就少，以致条纹不够明亮且难以看清楚；反之，若加大缝宽 a ，虽然观察到的条纹较明亮，但条纹间距变小，不容易分辨。

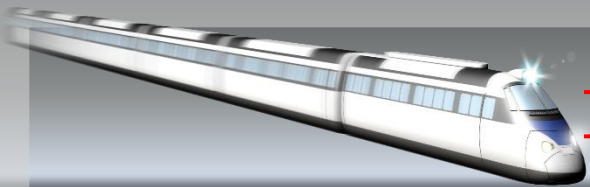
所以实际上测定光波波长时，往往不是使用单缝，而是采用能满足上述测量要求的**衍射光栅**。



12.4.1 光栅衍射现象

大量等间距、等宽度的平行狭缝组成的光学元件称之为**光栅**。利用透射光衍射的光栅称**透射光栅**。利用反射光衍射的光栅称**反射光栅**。

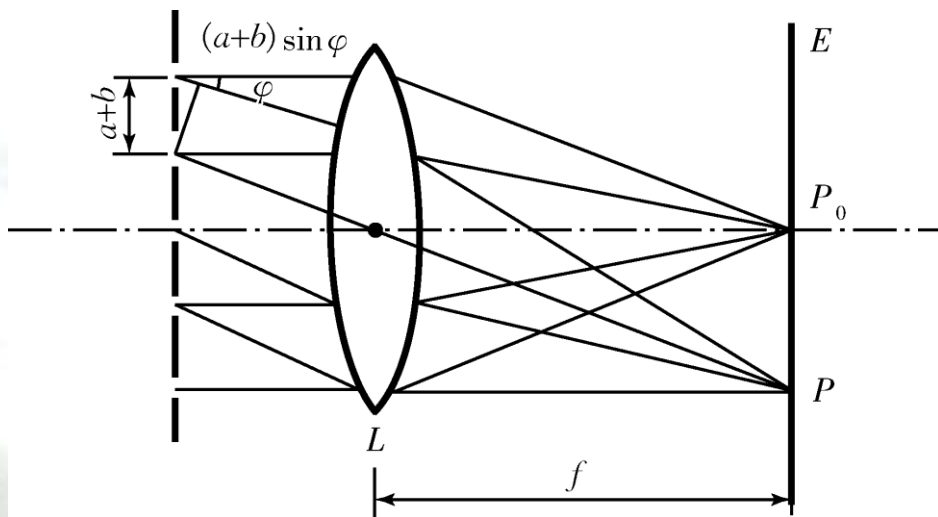


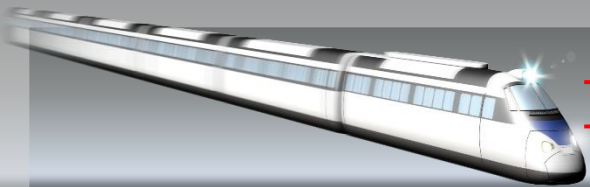


12.4.1 光栅衍射现象

平行单色光垂直照射到光栅上，由光栅射出的光线经透镜 L 后，会聚于屏幕 E 上，因而在屏幕上出现平行于狭缝的明暗相间的光栅衍射条纹。

这些条纹的特点是：明条纹很亮**很窄**，相邻明纹间的暗区**很宽**，衍射图样**十分清晰**。





12.4.2 光栅衍射规律

光栅的衍射条纹是单缝衍射和多缝干涉的总效果

1. 光栅方程

相邻两缝间的光程差:

$$\delta = (a+b) \sin \varphi$$

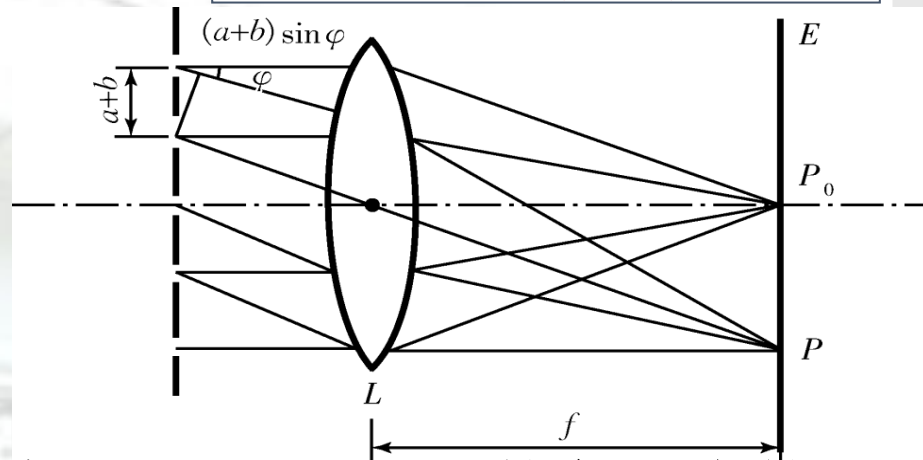
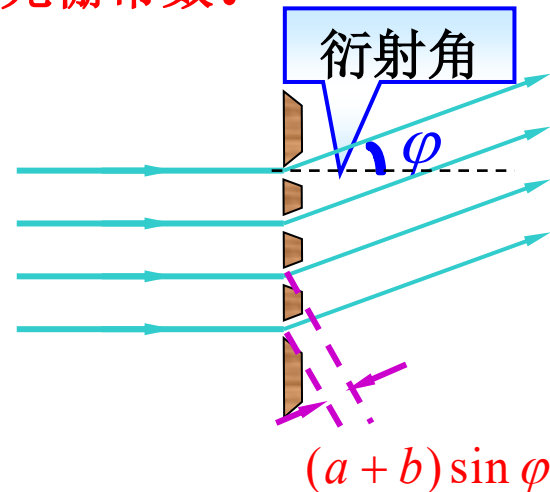
明条纹位置满足:

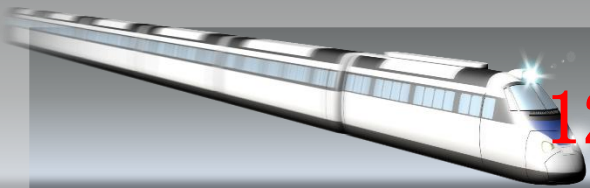
$$(a+b) \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

k 为衍射级数, $k=0$ 的条纹为中央明纹, $k=1, 2, \dots$ 的条纹为第一主极大明纹、第二主极大明纹....

光栅常数: $10^{-5} \sim 10^{-6} \text{ m}$





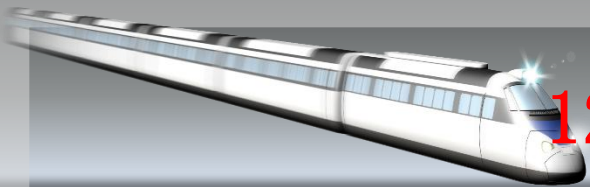
12.4.2 光栅衍射规律

2 明条纹

相邻两明纹中心的角距离

$$\sin\varphi_{k+1} - \sin\varphi_k = \frac{(k+1)\lambda}{d} - \frac{k\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d}$$

在 λ 一定的情况下， d 越小，各级明纹的衍射角正弦值差值越大，条纹越**稀疏**



12.4.2 光栅衍射规律

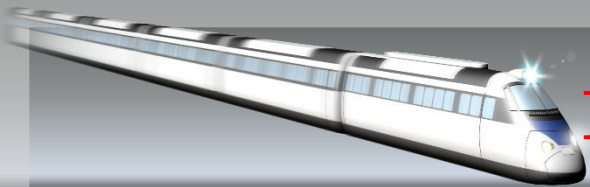
2 明条纹

主极大明纹的宽度

N 越大，主极大明纹则越窄。以中央明纹为例，它出现在 $\theta = 0$ 处。在稍微偏过一点的 $\Delta\theta$ 方向，如果光栅的最上一条缝和最下一条缝发出的光的光程差等于波长 λ ，即

$$Nd\sin\Delta\theta = \pm\lambda$$

由于 N 一般都很大，所以 $\Delta\theta \approx \sin\Delta\theta = \lambda/(Nd)$ ，中央明纹的角宽度为 $2\Delta\theta = 2\lambda/(Nd)$ 。而中央明纹到第一级明纹的角距离 $\theta_1 > \sin\theta_1 = \lambda/d$ ，所以中央明条纹宽度要比它和第一级明条纹的间距小得多。

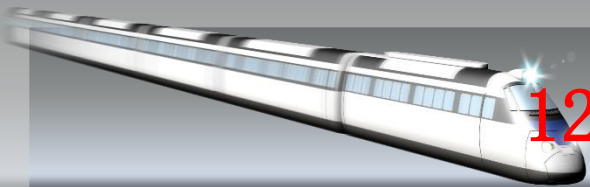


12.4.2 光栅衍射规律

3 暗纹条件

$$\text{暗条纹位置满足: } (a+b)\sin\varphi = \left(k + \frac{n}{N}\right)\lambda$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

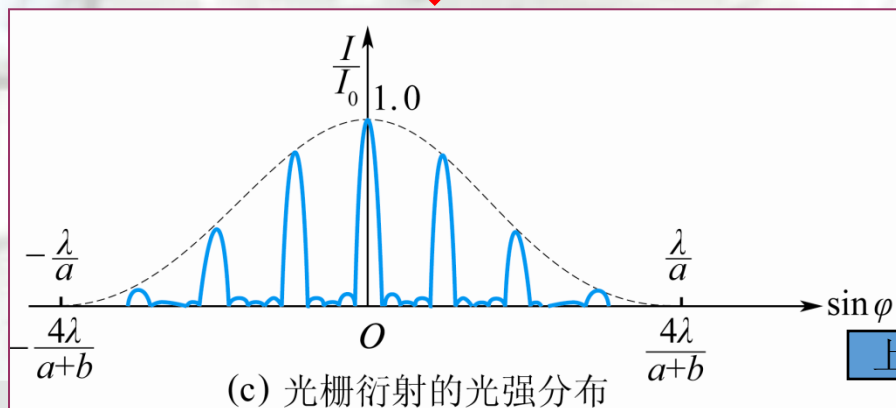
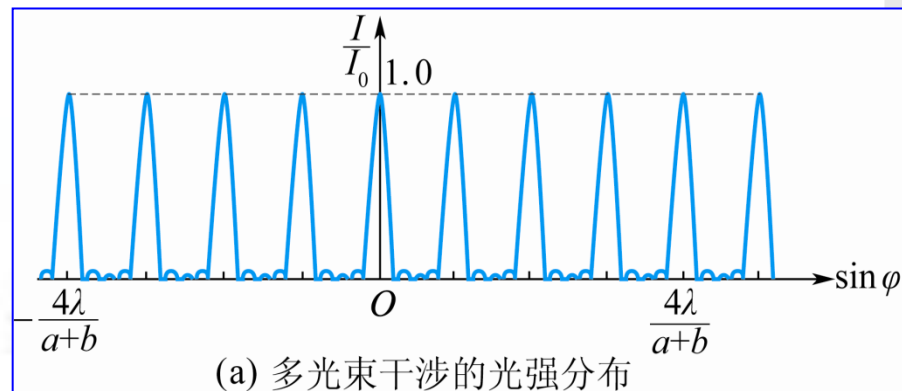
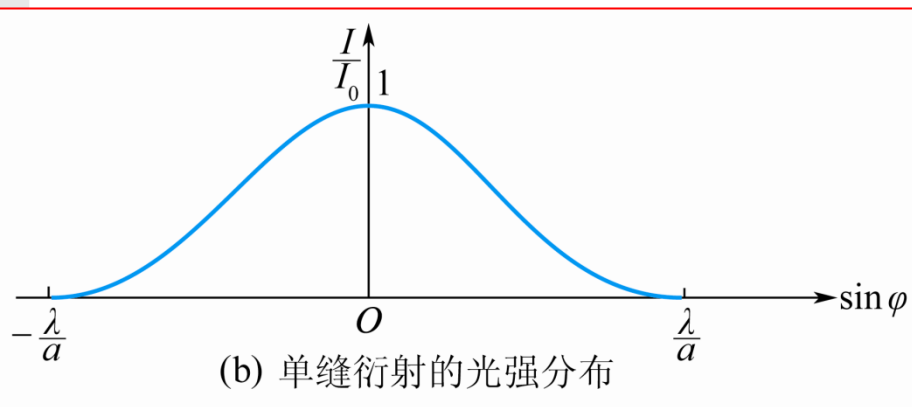
在相邻两主极大之间分布有 $(N-1)$ 个暗条纹和 $(N-2)$ 个光强极弱的次级明条纹，这些明条纹几乎是观察不到的，因此实际上在两个主极大之间是一片连续的暗区。缝数 N 愈多，暗条纹也愈多，因而暗区愈宽，明条纹愈细窄。

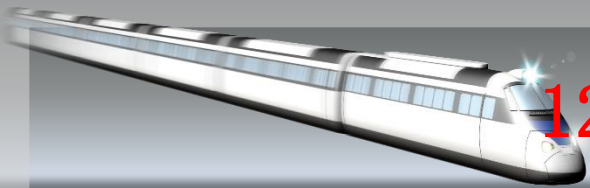


12.4.2 光栅衍射规律

4 单缝衍射对光强分布的影响

光栅衍射图样的光强分布为多束干涉和单缝衍射共同决定的





12.4.2 光栅衍射规律

5 缺级现象

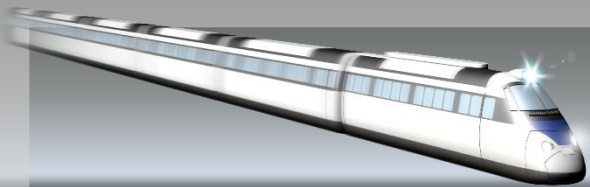
同时
满足

$$\begin{cases} (a+b)\sin\varphi = k\lambda, & \text{光栅方程} \\ a\sin\varphi = k'\lambda, & \text{单缝衍射暗纹条件} \end{cases}$$

由于所有光强为零的叠加必为零，所以第 k 级主极大明条纹不再出现，即缺级现象

$$\text{缺级条件} \quad k = k' \frac{a+b}{a} \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

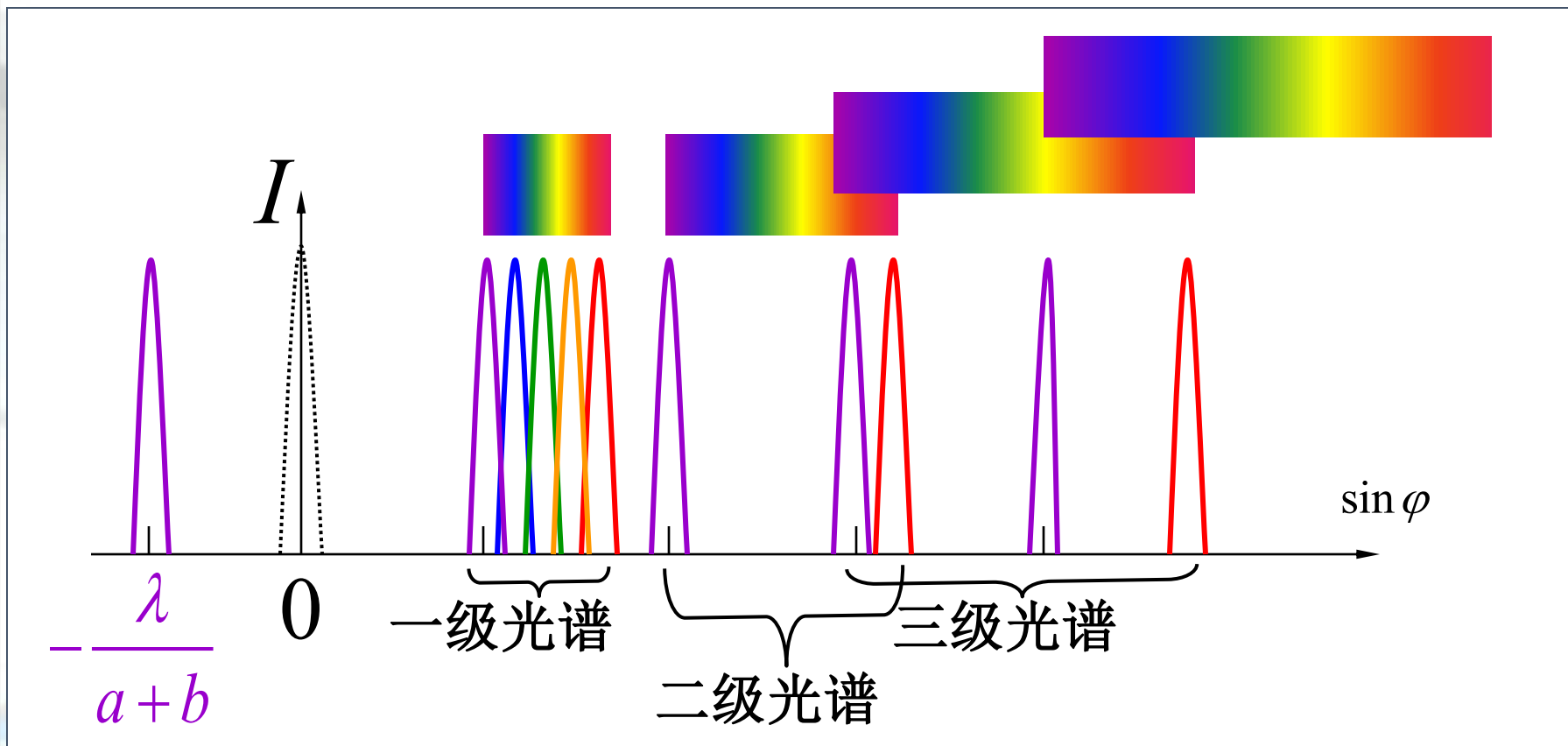
一般只要 $\frac{a+b}{a}$ 为整数比时，对应的 k 级明条纹位置一定出现缺级现象。

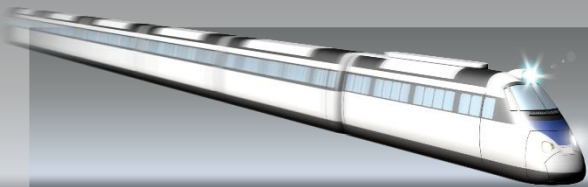


12.4.3 光栅光谱

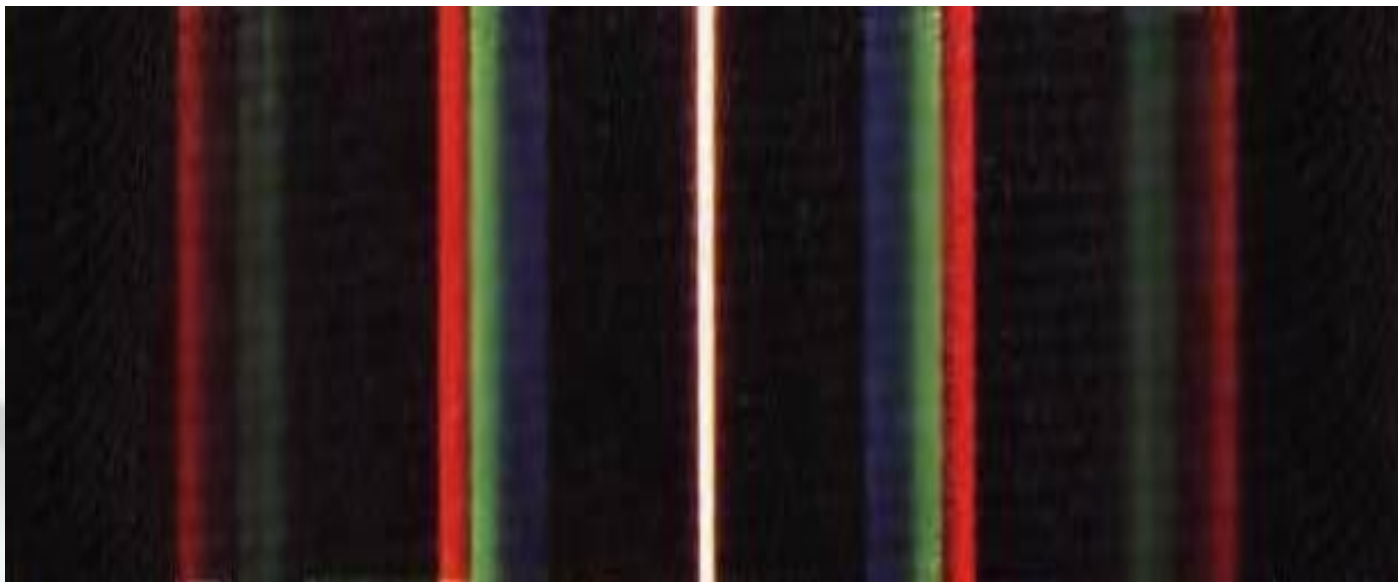
$$(a + b) \sin \varphi = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

入射光为白光时， λ 不同，按波长各分开形成光谱。

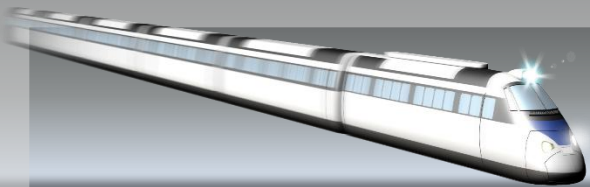




12.4.3 光栅光谱



由光栅公式可知，在光栅常数一定的情况下，衍射角 φ 的大小与入射光波的波长有关。因此当白光通过光栅后，各种不同波长的光将产生各自分开的主极大明条纹。屏幕上除零级主极大明条纹由各种波长的光混合仍为白色外，其两侧将形成各级由紫到红对称排列的彩色光带，这些光带的整体称为衍射光谱



例 使波长为480nm的单色光垂直入射到每毫米有250条狭缝的光栅上，光栅常数为一条缝宽的3倍。(1) 求第一级谱线的角位置；(2) 总共可以观察到几条光谱线？

解 (1) 由光栅方程，第一级谱线的角位置为

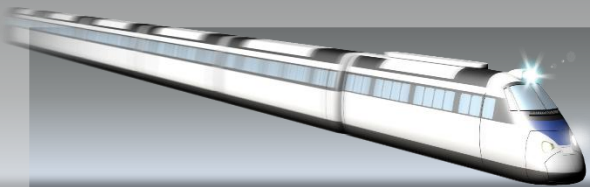
$$\theta_1 = \arcsin(\lambda/d) = \arcsin\left(\frac{480 \times 10^{-9}}{10^{-3}/250}\right) = \arcsin(0.12) \approx 0.12(\text{rad}) = 6.32^\circ$$

(2) 谱线的最大角位置为 $\pi/2$ ，由光栅方程得级次的最大值为

$$k_{\max} = \frac{d \sin(\pi/2)}{\lambda} = \frac{(10^{-3}/250) \times 1}{480 \times 10^{-9}} = 8.3$$

由于 k 只能取整数，所以 $k_{\max}=8$

由于 $d=3a$ ，所以 $k=3,6$ 的级次为缺级，故可能观察到的谱线数为 $k_{\max} \times 2 + 1 - 2 \times 2 = 13$



例 用白光垂直照射在每厘米中有6500条刻线的平面光栅上，求第三级光谱张角（白光的波长范围为4000Å~7600Å）

解 光栅常数 $d = \frac{1}{6500} \text{ cm} = 1.54 \times 10^4 \text{ Å}$ 。由光栅方程，第3级

光谱中

$$\theta_{\min} = \arcsin \frac{3\lambda_{\min}}{d} = \arcsin \frac{3 \times 4000}{1.54 \times 10^4} = 51.25^\circ$$

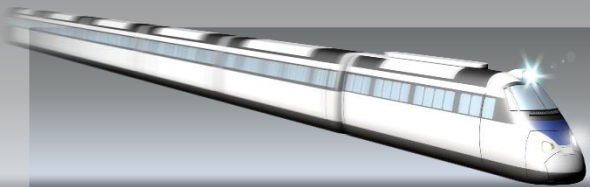
$$\theta_{\max} = \arcsin \frac{3\lambda_{\max}}{d} = \arcsin \frac{3 \times 7600}{1.54 \times 10^4} = \arcsin 1.48$$

说明不存在第三级完整光谱，即第三级光谱只能出现一部分光谱，这一部分光谱的张角为 $\Delta\theta = 90^\circ - \theta_{\min} = 38.74^\circ$

设第3级光谱中所能出现的最大波长为 λ'

$$\lambda' = \frac{d \sin 90^\circ}{3} = \frac{1/6500 \times 10^8}{3} = 5130(\text{Å})$$

即第3级光谱中只能出现紫、蓝、青、绿等颜色的光，波长大于5130Å的黄、橙、红等光看不到。



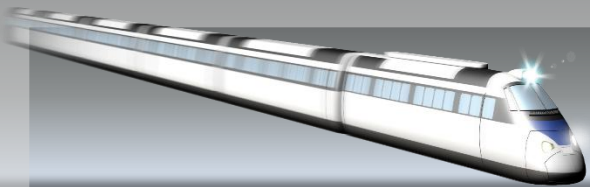
例 在垂直入射于光栅的平行光中，有 λ_1 和 λ_2 两种波长，已知 λ_1 的第3级光谱线与 λ_2 的第4级光谱线恰好重合在离中央明条纹为5mm处，而 $\lambda_2=486.1\text{nm}$ ，并发现 λ_1 的第5级光谱线缺级，透镜的焦距为 $f=50\text{cm}$ ，试求(1) λ_1 为多少，光栅常数 $(a+b)$ 为多少？(2)光栅的最小缝宽 a 为多少？

解 (1) 由光栅方程和题意得

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{k_2}{k_1}\lambda_2 = \frac{4}{3} \times 486.1 = 648.1\text{nm}$$

$$\therefore \frac{x}{f} = \tan\varphi \approx \sin\varphi$$

$$\therefore a+b = \frac{k_2\lambda_2}{\sin\varphi} = \frac{f}{x} k_2\lambda_2 = \frac{0.5 \times 4 \times 486.1 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-3}} = 1.94 \times 10^{-4} \text{m}$$

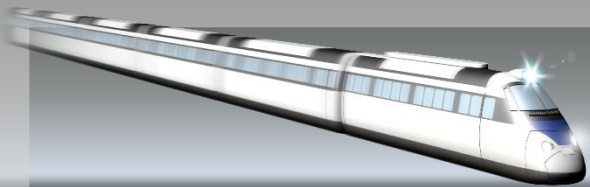


(2) 当第 k 级缺级时满足

$$(a + b) \sin \varphi = k \lambda$$

$$a \sin \varphi = k' \lambda \quad a = \frac{k'}{k} (a + b)$$

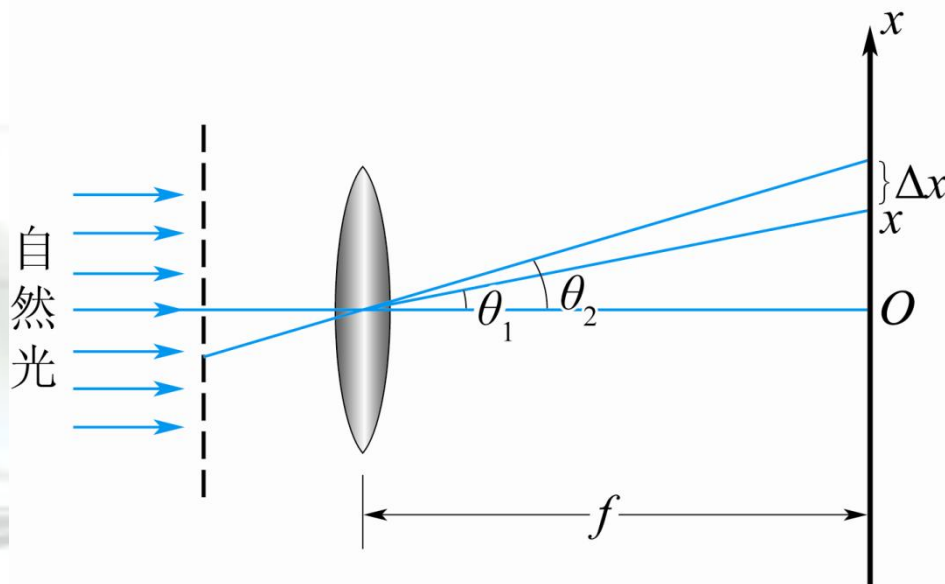
$$a_{\min} = \frac{1 \times 1.94 \times 10^{-4}}{5} = 3.88 \times 10^{-5} m$$

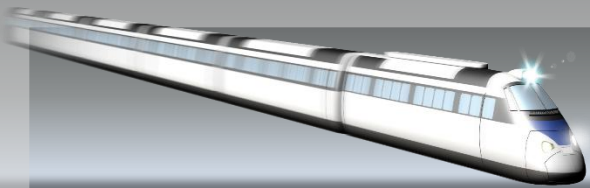


例 一个每毫米均匀刻有200条刻线的光栅，用白光照射，在光栅后放一焦距为 $f=500\text{cm}$ 的透镜，在透镜的焦平面处有一个屏幕，如果在屏幕上开一个 $\Delta x=1\text{mm}$ 宽的细缝，细缝的内侧边缘离中央极大中心 5.0mm ，如图所示.试求什么波长范围的可见光可通过细缝？

解 光栅常数为

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{1 \times 10^{-3}}{200} \\ &= 5.0 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$





θ_1 和 θ_2 都很小，所以 $\sin\theta \approx \tan\theta$ ，根据光栅方程

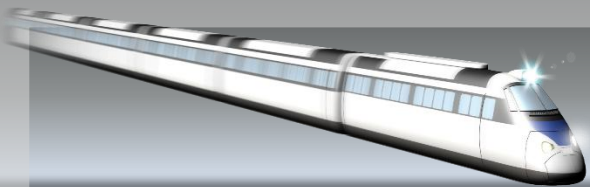
$$\sin\theta_1 = \frac{k_1\lambda_1}{a+b} \approx \frac{x}{f} \quad \sin\theta_2 = \frac{k_2\lambda_2}{a+b} \approx \frac{x+\Delta x}{f}$$

$$k_1\lambda_1 = \frac{x}{f}(a+b) = \frac{5.0 \times 10^{-3} \times 5.0 \times 10^{-6}}{5} = 5.0 \times 10^{-9} \text{ m} = 500 \text{ nm}$$

$$k_2\lambda_2 = \frac{x+\Delta x}{f}(a+b) = \frac{(5.0+0.1) \times 10^{-3} \times 5.0 \times 10^{-6}}{5} = 5.1 \times 10^{-9} \text{ m} = 510 \text{ nm}$$

可通过细缝的可见光波波长范围为

$$500 \text{ nm} \leq \lambda \leq 510 \text{ nm}$$



作业

课后习题:

12.6 12.7 12.10 12.13