1.2.5 加速度

加速度描述速度在某一时刻速度大小和方向的变化

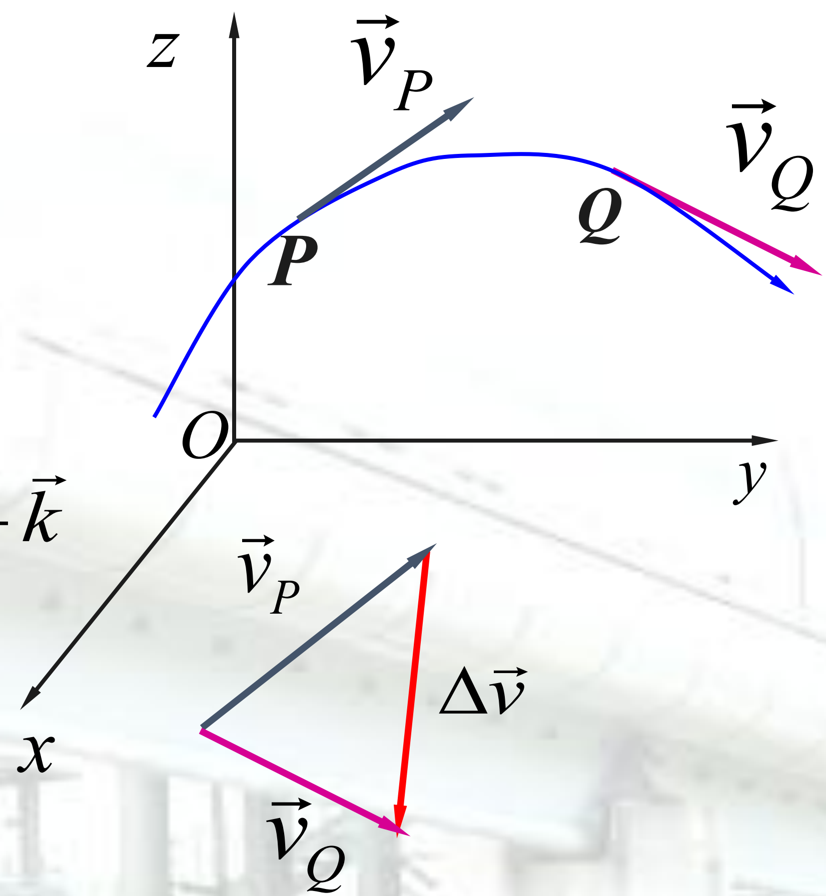
1 平均加速度

单位时间内的速度增量

即平均加速度

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k}$$



$\vec{a}$与$\vec{v}$同方向

上一页 下一页 返回目录

1.2.5 加速度

2 瞬时加速度

当$\Delta t\to 0$时，平均速度的极限值为瞬时加速度，简称加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

加速度的大小为

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

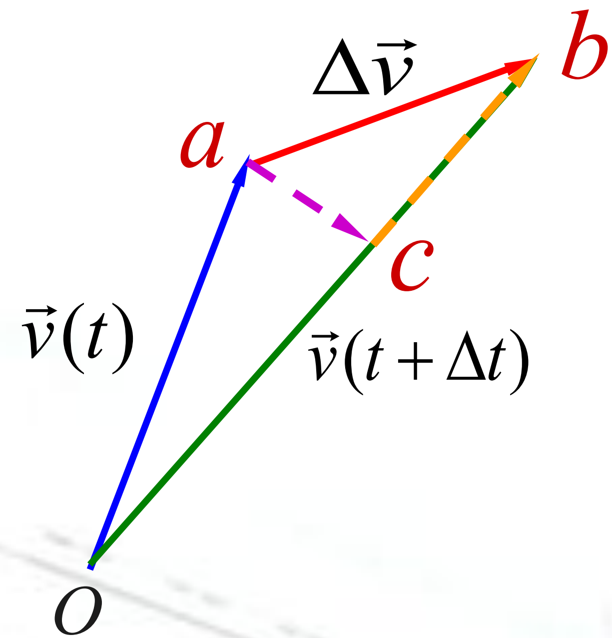
上一页 下一页 返回目录

1. 2. 5 加速度

讨论 $|\Delta\vec{v}| \neq \Delta v$?

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)|$$



在 Ob 上截取 $\overline{Oc} = \overline{Oa}$，有

$$\Delta v = cb$$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb}$$

$$= \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{v}_n = \overrightarrow{ac} \\ \Delta\vec{v}_t = \overrightarrow{cb} \end{cases}$$

速度方向变化

速度大小变化

1.2.5 加速度

讨论 $|\vec{a}| = a?$

例 匀速率圆周运动

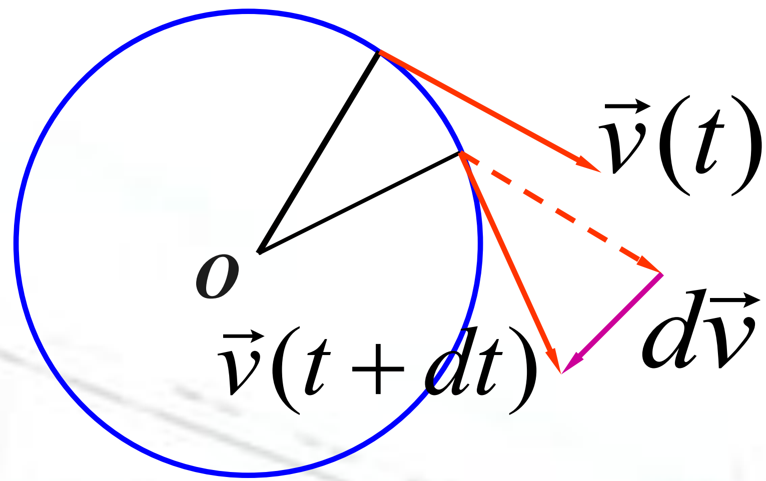
因为$v(t)=v(t+dt)$

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} \equiv 0$$

而

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} \neq 0$$

$$\therefore |\vec{a}| \neq a$$



1.3 直线运动

当质点沿一条直线运动时，其运动为直线运动

质点直线运动的运动方程

$$x = x(t)$$

质点在直线运动中的速度

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

质点在直线运动中的加速度

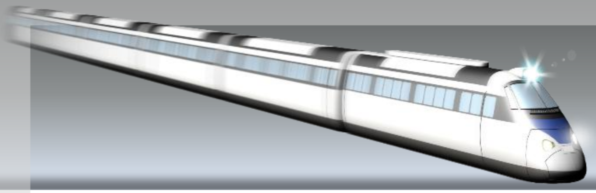
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 v_x}{dt^2}$$

若已知质点的速度，则它的位置坐标为

$$x = \int v_x dt = x(t) + C_1$$

若已知质点的加速度，则它的速度为

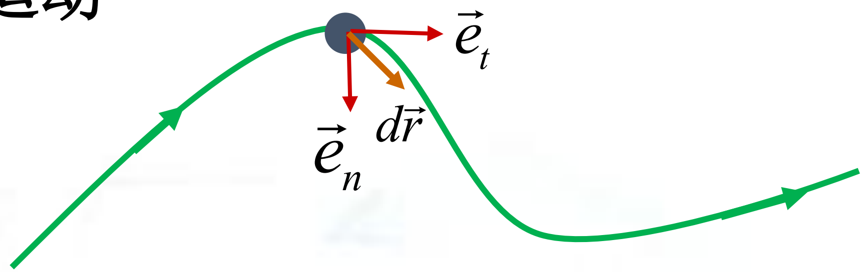
$$v_x = \int a_x dt = v_x(t) + C_2$$



1.4 曲线运动

1.4.1 自然坐标系

质点做如图曲线运动



建立自然坐标系，其两个基矢（模为1）分别为：

$\vec{e}_t$:通常指向速度方向，即运动方向一侧的切线方向

$\vec{e}_n$:与$\vec{e}_t$垂直，指向运动曲线凹侧

质点的速度为

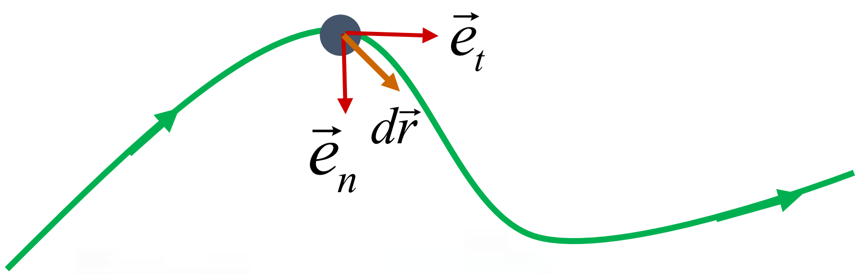
$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

质点的加速度为

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

上一页 下一页 返回目录

1.4.1 自然坐标系



$$\vec{a}=\frac{d(v\vec{e}_t)}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

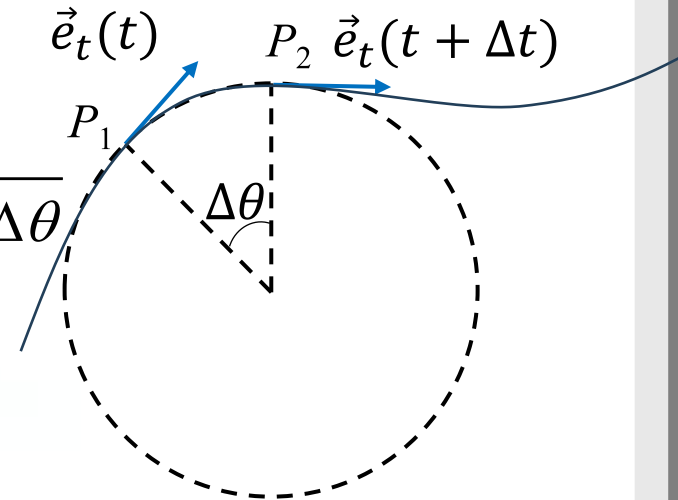
切向加速度，反映速率随时间的变化率$\vec{a}_t=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{e}_t$

法向线加速度，反映速度方向随时间的变化率$\vec{a}_n$，指向轨道内侧

1.4.1 自然坐标系

根据余弦定理得

$$
\begin{aligned}
&|\Delta\vec{e}_t(t)| \\
&= \sqrt{|\vec{e}_t(t)|^2 + |\vec{e}_t(t+\Delta t)|^2 - 2|\vec{e}_t(t)||\vec{e}_t(t+\Delta t)|\cos\Delta\theta} \\
&= \sqrt{1+1-2\cos\Delta\theta}
\end{aligned}
$$



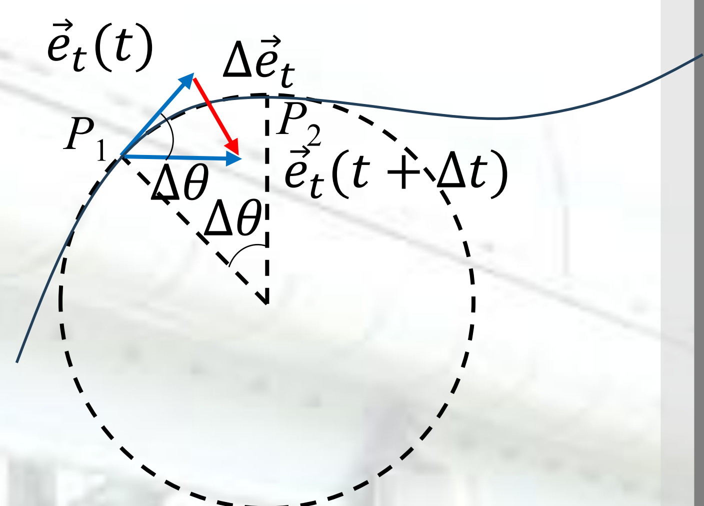
当$\Delta\theta \to 0$时，

$$\cos\Delta\theta \approx 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2}$$

则

$$|\Delta\vec{e}_t(t)| \approx \sqrt{\Delta\theta^2} = \Delta\theta$$

$$\Delta\vec{e}_t(t) = \vec{e}_n(t)\Delta\theta$$



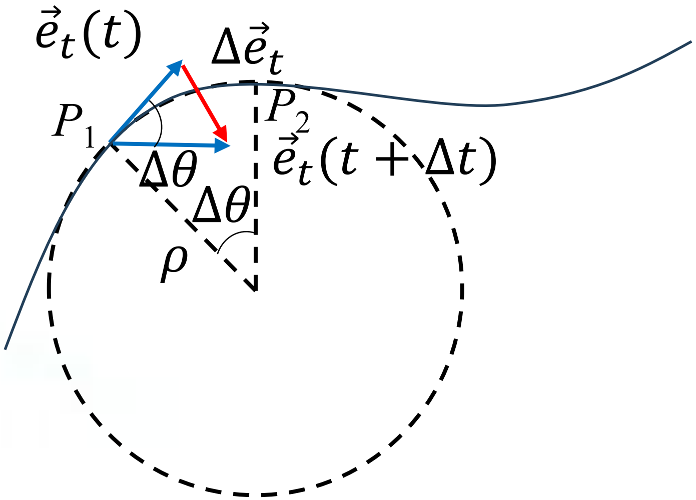
所以

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e}_n = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n$$

上一页 下一页 返回目录

1.4.1 自然坐标系

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n = ?$$



设P_1处曲率半径为ρ，则$ds = \rho d\theta$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{e}_n = \frac{1}{\rho}v\vec{e}_n$$

则

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

所以质点加速度为

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

加速度大小为

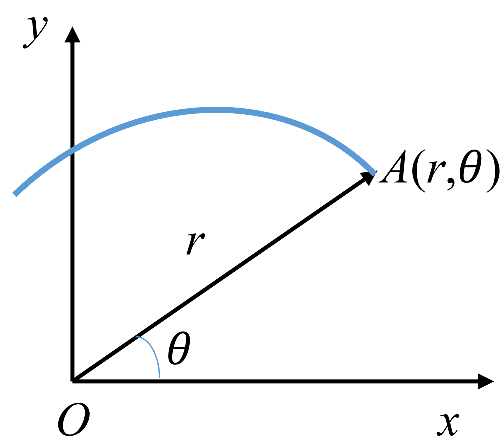
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$与$\vec{\boldsymbol{v}}$（即$\vec{e}_t$）之间的夹角φ

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_t}$$

1.4.2 平面极坐标系

质点在Oxy平面上运动，运动到点A时，可以用坐标(r,θ)描述点A的位置，其中r为矢径$\vec{r}$的大小，θ为$\vec{r}$与x轴之间的夹角。此参考系为平面极坐标系。



当$\Delta t\to 0$时，质点的瞬时角速度，简称角速度，为

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$$

国际制单位为rad/s

瞬时角加速度，简称角加速度，为

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

国际制单位为rad/s^2

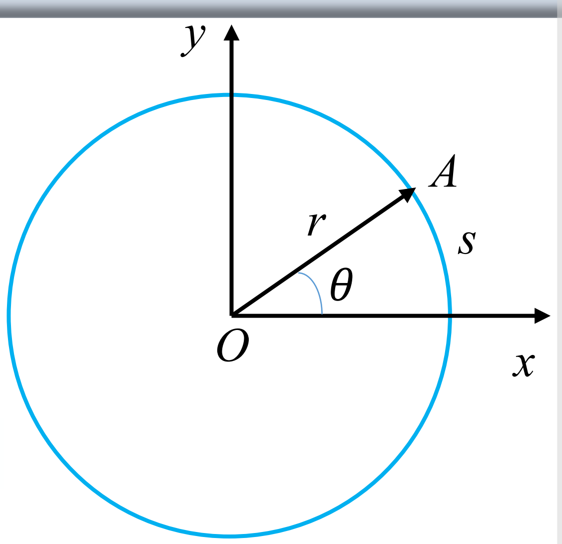
上一页 下一页 返回目录

1.4.3 线量与角量的关系

线量：位矢、速度、加速度

角量：角位置、角速度、角加速度

圆周运动根据弧长与角度的关系$s=r\theta$，



$$\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}$$

则

$$v=r\omega$$

将上式对t求导得

$$\frac{dv}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}$$

即

$$a_t=r\alpha$$

法向加速度$a_n=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$