# 第九章 机械振动

# 前 言

## 1、什么是振动：

物体在一固定位置附近作来回的往复运动，称为机械振动。

物体在发生摇摆、颠簸、打击、发声之处均有振动。

任何一个具有质量和弹性的系统在其运动状态发生突变时，都会发生振动。

广义地，凡是描述物质运动状态的物理量，在某一固定值附近作周期性变化，都可称该物理量作振动。

## 2、振动的特征

（在时间上）具有某种重复性。

- 任何一个物理量在某一量值附近随时间作周期性变化都可以叫做振动.

# 前　　言

例如交流电路中的电流、电压，振荡电路中的电场强度和磁场强度等.

- 周期和非周期振动
- 简谐振动　最简单、最基本的振动.

简谐运动 ⟷ 复杂振动

合成

分解

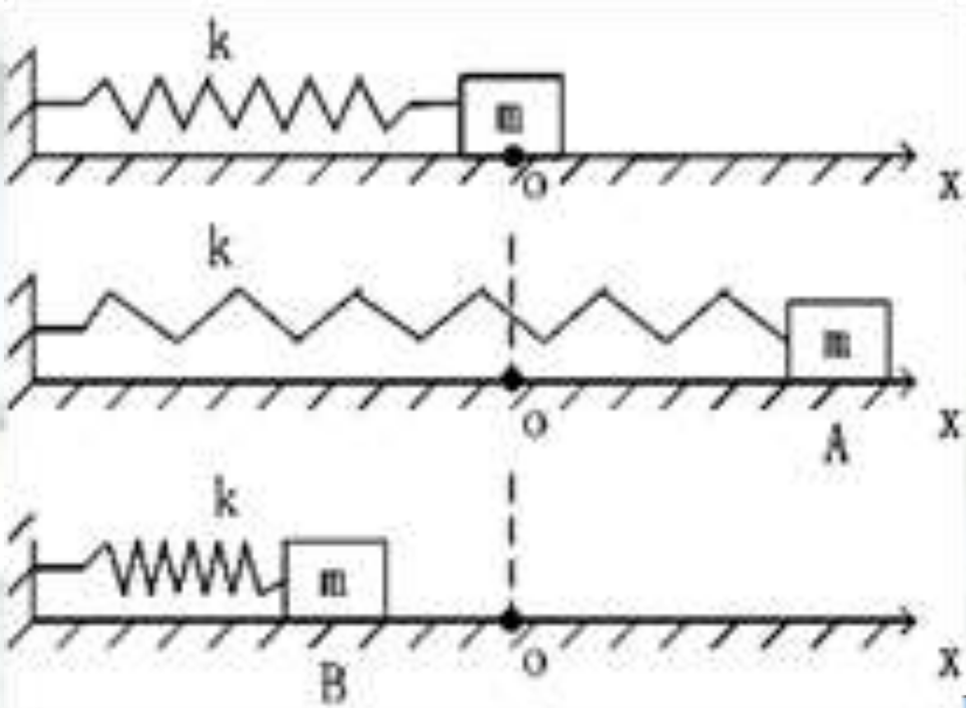
- 谐振子：作简谐运动的物体.

# 简谐振动的动力学特征

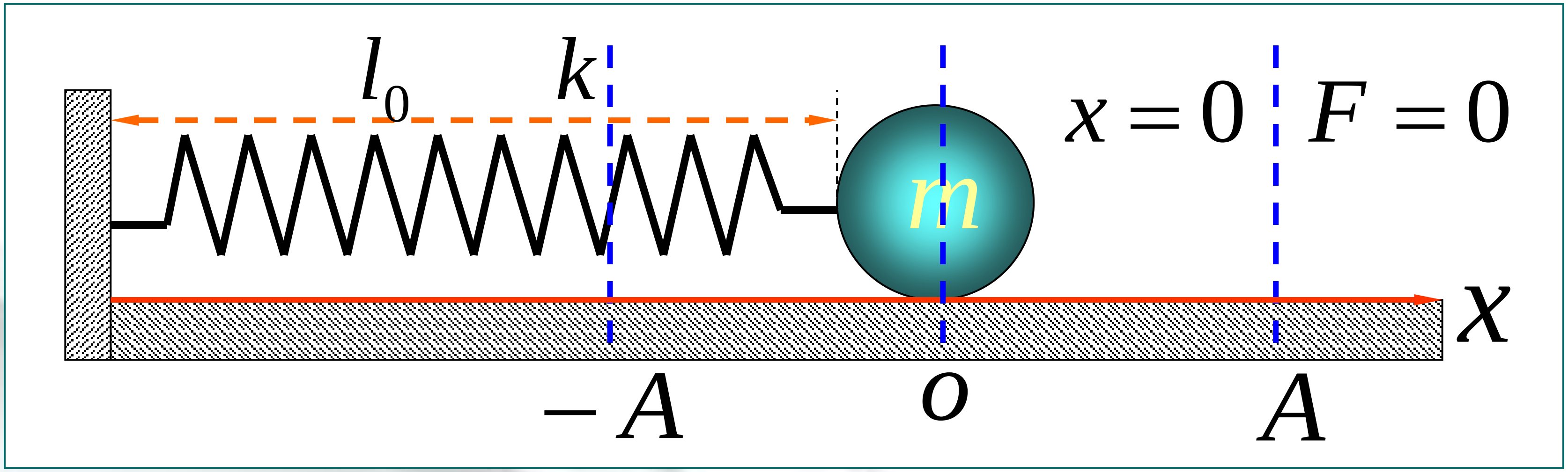
振动中最简单最基本的是简谐振动。$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

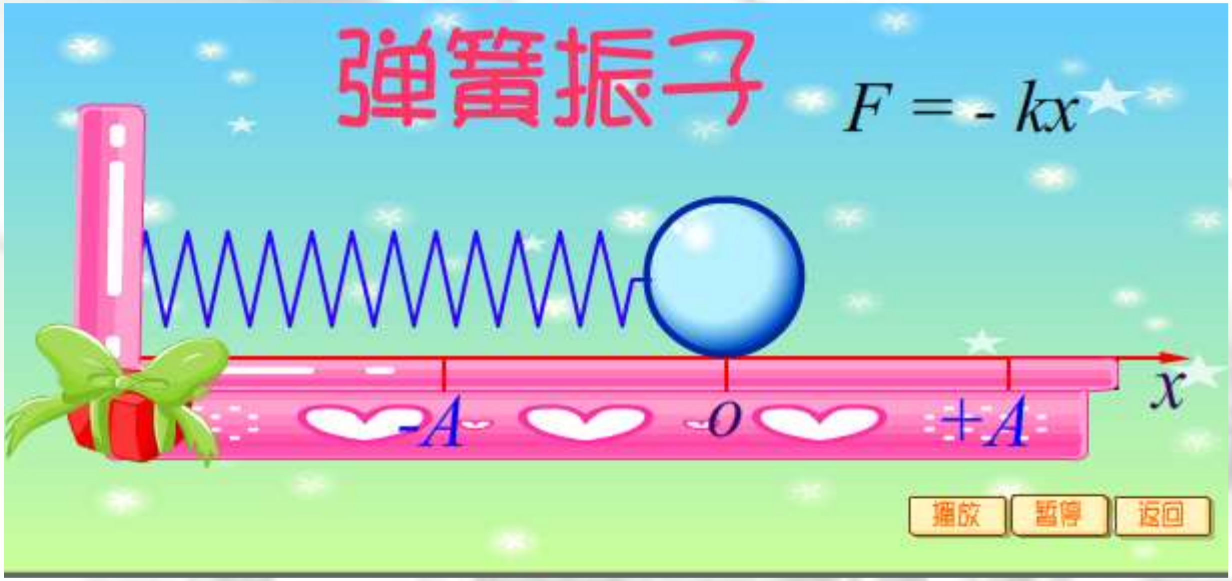
任何一个振动都可看成若干不同频率的简谐振动的合成。

## 弹簧振子模型

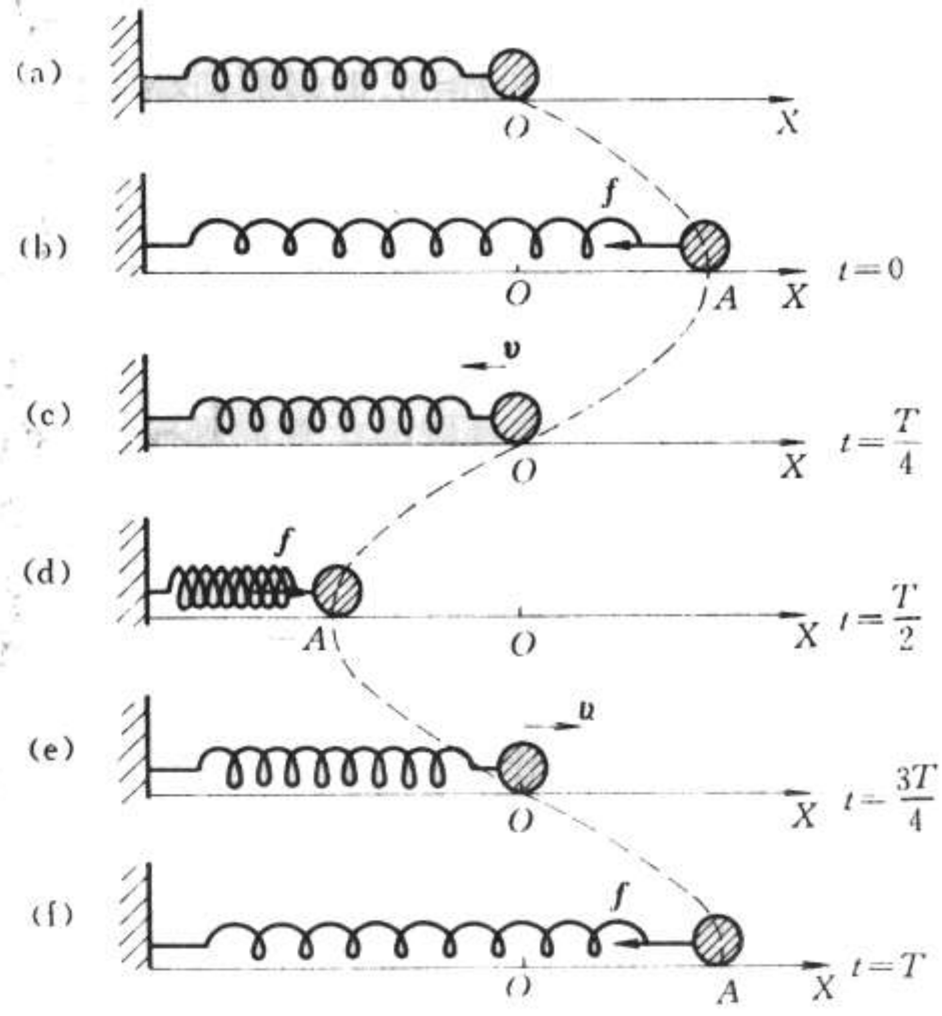


# 弹簧振子模型



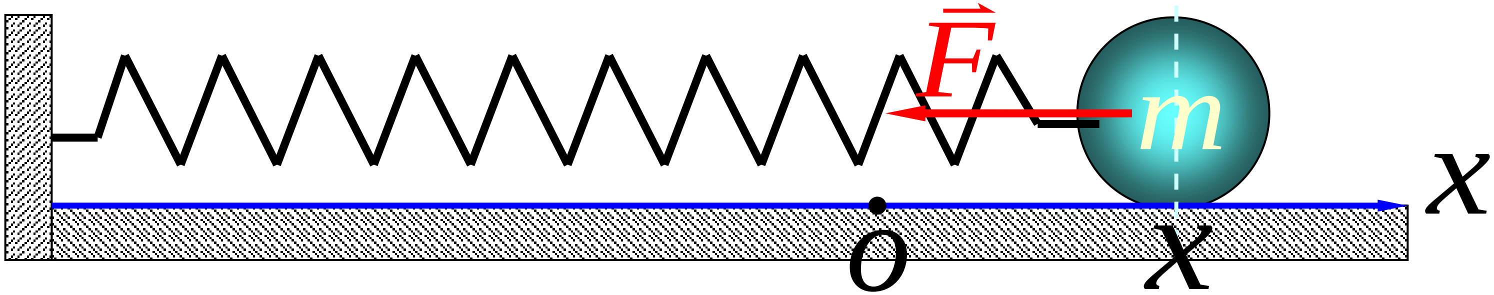



# 弹簧振子模型




弹簧振子的振动

# 弹簧振子模型




$F = -kx = ma$

令 $\omega^2 = k/m$

$a = \boxed{-}\omega^2 x$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

**a 与 x 方向相反**

判断一个振动是否为简谐振动的步骤

1 确定振动系统的平衡位置，并以平衡位置为坐标原点，建立坐标系。

2 让振动系统离开平衡位置，分析系统所受的合外力，看是否受形式如式$f = -kx$的线性回复力的作用，或由牛顿第二定律列运动微分方程，看是否与式$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$一致。

# 简谐振动的运动学方程

**以弹簧振子为例，其动力学方程为**

微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \rightarrow x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\because \cos(\omega t+\varphi_0)=\sin(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

令 $\varphi'=\varphi_0+\frac{\pi}{2}$

$$x=A\sin(\omega t+\varphi')$$

简谐振动的运动规律也可用正弦函数表示.

# 简谐振动的运动学方程

作简谐振动的质点在任意时刻的速度和加速度表达式分别为

$$\upsilon=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\phi_0)$$

$$=A\omega\cos(\omega t+\phi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$=A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0+\pi)$$

# 描述简谐振动的三个重要参量

1、振幅A

$$A = |x_{max}|$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

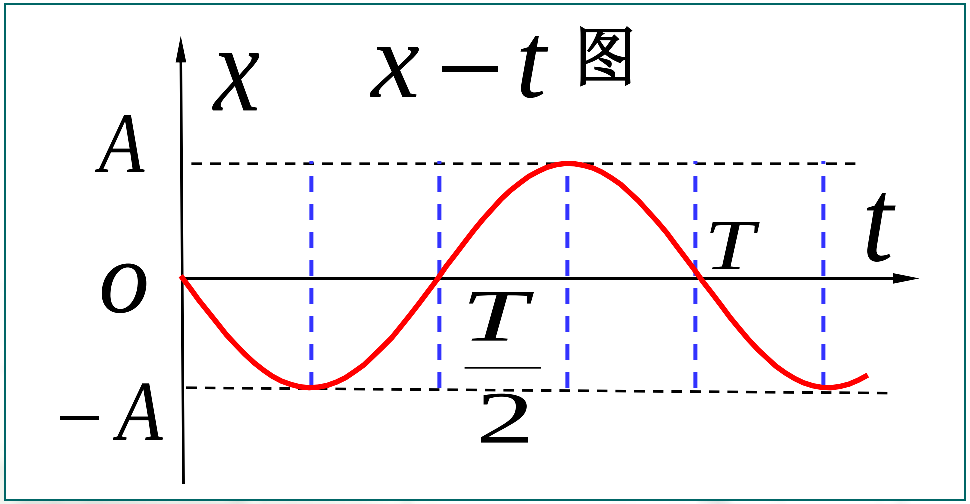
对给定振动系统，振幅和初相由初始条件决定.

# 描述简谐振动的三个重要参量

## 2 周期、频率、圆频率

物体作一次完全振动所经历的时间叫做振动的**周期**，用 $T$表示。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$= A\cos[\omega(t + T) + \varphi_0]$$




- **周期** $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

单位时间内物体所作的完全振动次数叫做**频率**，用 $\nu$ 表示。

- **频率** $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$
- **圆频率** $\omega = 2\pi\,\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

# 描述简谐振动的三个重要参量

$\omega$表示在 $2\pi$秒内物体所做的完全振动（简称全振动）次数，称为振动的圆频率（角频率）。

简谐振动表达式还可以写成

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right) = A\cos(2\pi\nu t + \phi_0)$$

$\omega$、$T$和$\nu$都表示简谐振动动的周期性。$T$的单位是秒(s)，$\nu$的单位是赫兹(Hz, $1/s$)，$\omega$的单位是弧度每秒(rad/s)。

# 描述简谐振动的三个重要参量

注意

弹簧振子周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

单摆

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

对给定振动系统，周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关.

# 描述简谐振动的三个重要参量

## 3、相位和初相 $\boxed{\omega t+\varphi_0}$

$(\omega t+\phi_0)$称为相位,相位是决定振动物体运动状态的物理量。

1） $\omega t+\varphi_0 \rightarrow (x,\upsilon)$ 存在一一对应的关系;

若某时刻$(\omega t+\phi_0)$=0,即相位为零,则可决定该时刻$x=A,\upsilon=0$，表示物体在正位移最大处而速度为零；当$(\omega t+\phi_0)=\dfrac{\pi}{2}$，则$x=0,\upsilon=-\omega A$，表示物体在平衡位置并以最大速率向 x 轴负方向运动；当$(\omega t+\phi_0)=-\dfrac{\pi}{2}$，则$x=0,\upsilon=\omega A$，表示物体也在平衡位置，但以最大速率向 x 轴正方向运动。

# 描述简谐振动的三个重要参量

2）相位在 $0 \sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2n\pi\,(n$ 为整数$)$质点运动状态全同.（周期性）

3）初相位 $\varphi_0(t=0)$ 描述质点初始时刻的运动状态.

# 描述简谐振动的三个重要参量

两振动相位之差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ ，称为相位差。若相位差等于零或 $2\pi$ 的整数倍，则称两振动相位相同（或同相），如果两振动的振幅和频率也相同，则表明此时它们的振动状态相同；若 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$ ，则称两振动相位相反（或反相），表明此时它们的振动状态相反；若 $0<\Delta\varphi<\pi$ ，则称 $\varphi_2$ 超前于 $\varphi_1$，或说 $\varphi_1$ 滞后于 $\varphi_2$ 。总之，相位差的不同，反映了两个振动不同程度的参差错落。

# 描述简谐振动的三个重要参量

例 如图所示的弹簧振子，已知弹簧的劲度系数k=1.60 N/m,物体的质量M=0.40 kg,试就下列两种情况求谐振动表达式。

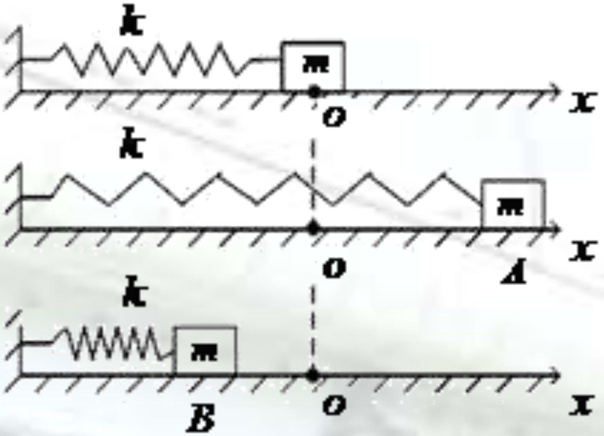
（1）将物体从平衡位置向右移到x=0.10m处释放；

（2）将物体从平衡位置向右移到x=0.10m处后并给物体以向左的速度0.20 m/s。

解 取如图5-1的坐标系，平衡位置为坐标原点，向右为正向

（1）设振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$




则由题意知角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.60}{0.40}} = 2(\text{rad/s})$$

当$t = 0$时，$x_0 = 0.10\text{m}$，　$\upsilon_0 = 0$

# 描述简谐振动的三个重要参量

振幅 $$A=\sqrt{x_0^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{0.10^2+0}=0.10\,(\mathrm{m})$$

$x_0=0.1\cos\phi_0=0.1$，$\cos\phi_0=1$ 所以 $\phi_0=0$

振子的振动表达式为 $x=0.10\cos 2t\ \mathrm{m}$

（2）当 $t=0$ 时，$x_0=0.10\ \mathrm{m}$，$\upsilon_0=-0.20\ \mathrm{m/s}$

振幅 $$A=\sqrt{x_0^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{0.10^2+\left(\frac{-0.20}{2}\right)^2}=0.10\sqrt{2}=0.1414(\mathrm{m})$$

$$x_0=0.1\sqrt{2}\cos\phi_0=0.1$$

# 描述简谐振动的三个重要参量

$$\cos\phi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \upsilon_0 = -0.1\sqrt{2}\omega\sin\phi_0 = -0.2 < 0$$

所以初相位 $\phi_0 = \dfrac{\pi}{4}$

振子的振动表达式为

$$x = 0.1414\cos(2t + \frac{\pi}{4})\ \mathrm{m}$$

# 简谐振动的矢量表示法

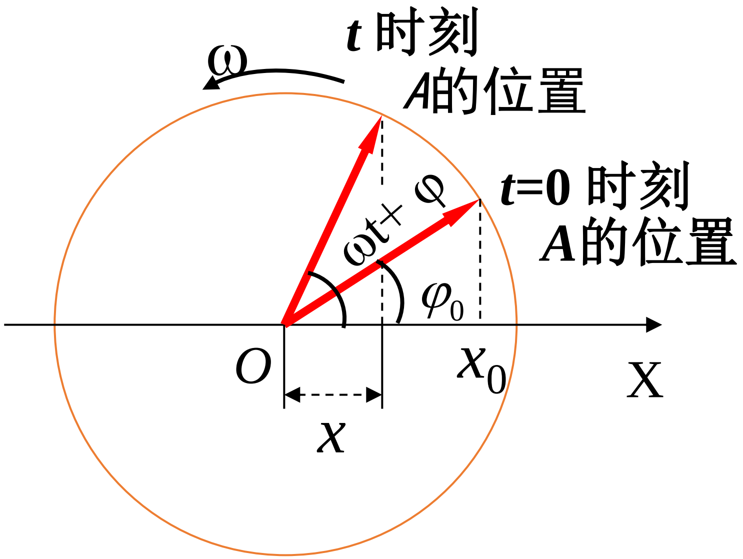
## 1 旋转矢量

### (1) 旋转矢量的制作

若已知一个谐振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

相应的旋转矢量如图所示。




### (2) 旋转矢量的作用：

**使描述谐振动的三个重要参量 A、ω、φ 形象化**

### (3) 旋转矢量本身不是谐振动

习惯上用 $\vec{A}$ 在x轴上的投影描述振动

# 简谐振动的矢量表示法

## 2 旋转矢量与简谐振动的关系

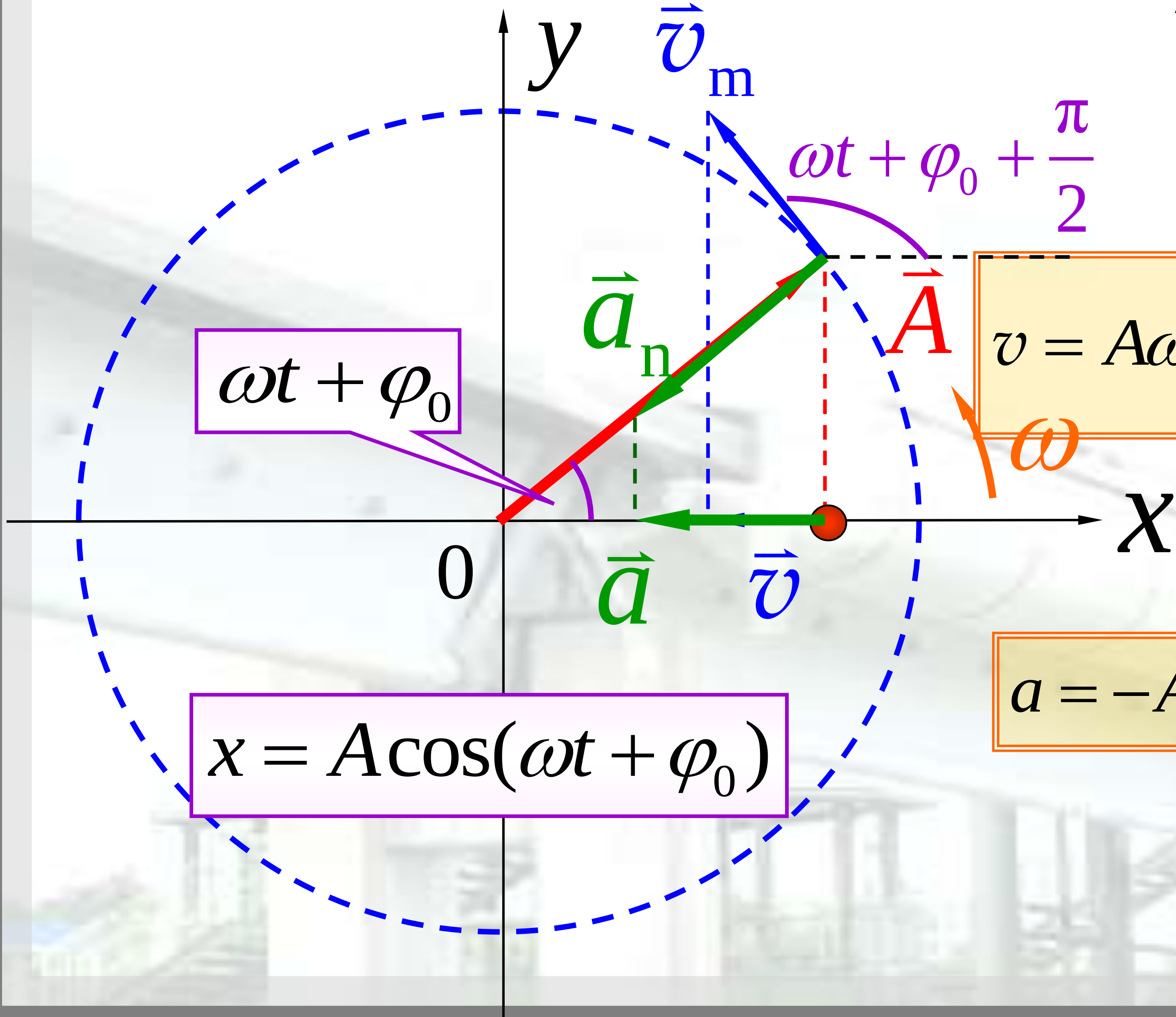
（1） $\vec{A}$的长度等于振幅$A$；$\vec{A}$旋转的角速度等于简谐振动的角频率$\omega$，$\vec{A}$转动一周，相当于物体在 $x$ 轴上作一次全振动；$t=0$时，$\vec{A}$与 $x$ 轴的夹角为初相位$\phi_0$；$\vec{A}$的端点$M$ 在 $x$ 轴上的投影为简谐振动。

（2）可以借助旋转矢量图求出简谐振动的速度和加速度。

# 简谐振动的矢量表示法

$$v_{\mathrm{m}} = A\omega$$

$$a_{\mathrm{n}} = A\omega^2$$




$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

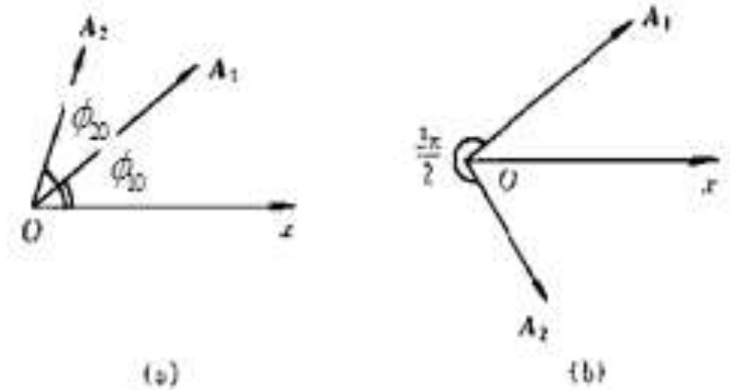
$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

# 简谐振动的矢量表示法

（3）利用旋转矢量图，可以方便地比较两个同频率简谐振动的“步调”。

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$$




两个简谐振动的相位差

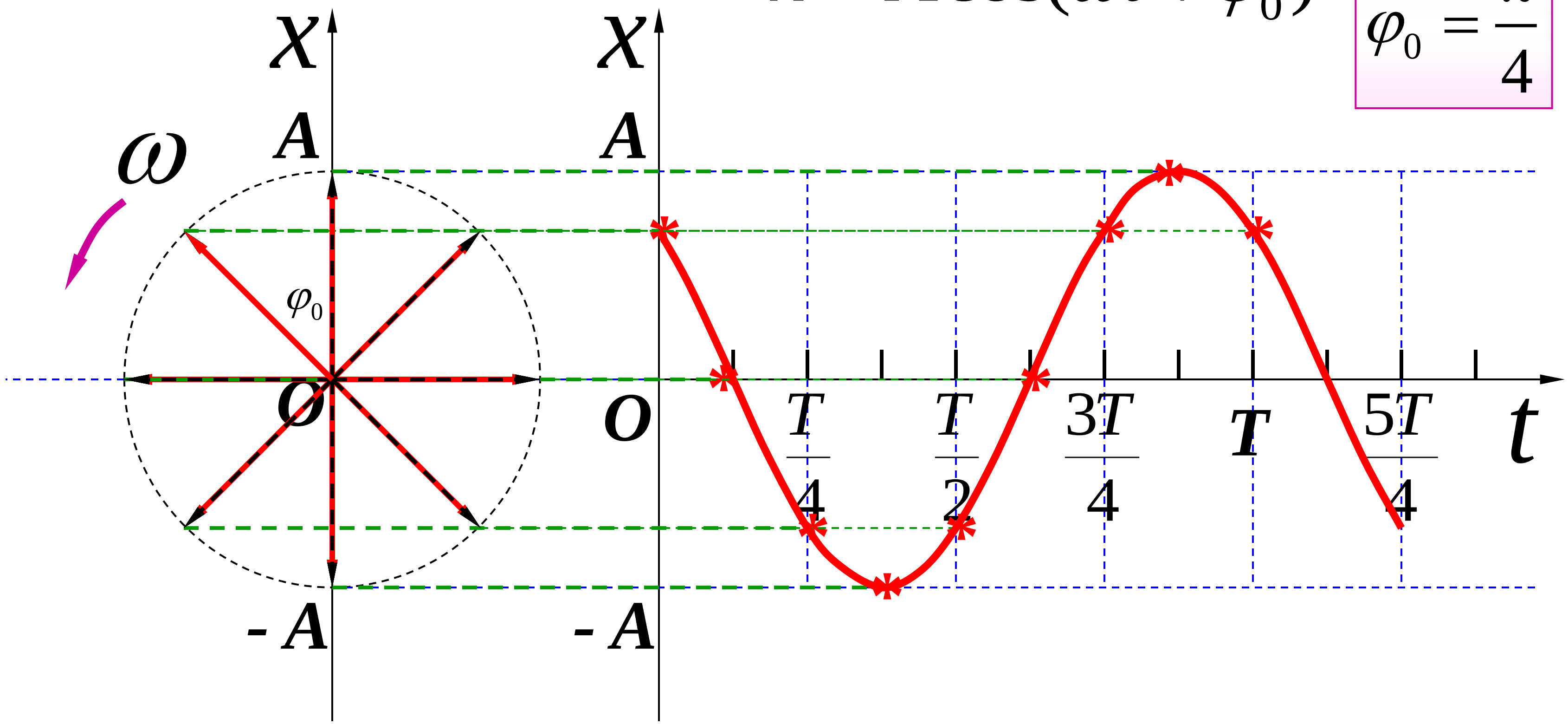
上一页 下一页 返回目录

# 简谐振动的矢量表示法

## 用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$




$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

# 同方向同频率谐振动的合成

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_{10}) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_{20})$$

求： $x = x_1 + x_2$

## 1 计算法

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\phi_{10}) + A_2\cos(\omega t+\phi_{20})$$

$$= A_1\cos\omega t\cdot\cos\varphi_{10} - A_1\sin\omega t\cdot\sin\varphi_{10}$$

$$+A_2\cos\omega t\cdot\cos\varphi_{20} - A_2\sin\omega t\cdot\sin\varphi_{20}$$

$$= \cos\omega t(A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20})$$

$$-\sin\omega t(A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20})$$

令
$$\begin{cases} A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20} = A\cos\varphi_0 \\ A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20} = A\sin\varphi_0 \end{cases}$$

# 同方向同频率谐振动的合成

上式 $x = A\cos\omega t \cdot \cos\varphi_0 - A\sin\omega t \cdot \sin\varphi_0$

$= A\cos(\omega t + \varphi_0)$

两个同方向、同频率的谐振动的合振动仍然是一个同频率的谐振动。

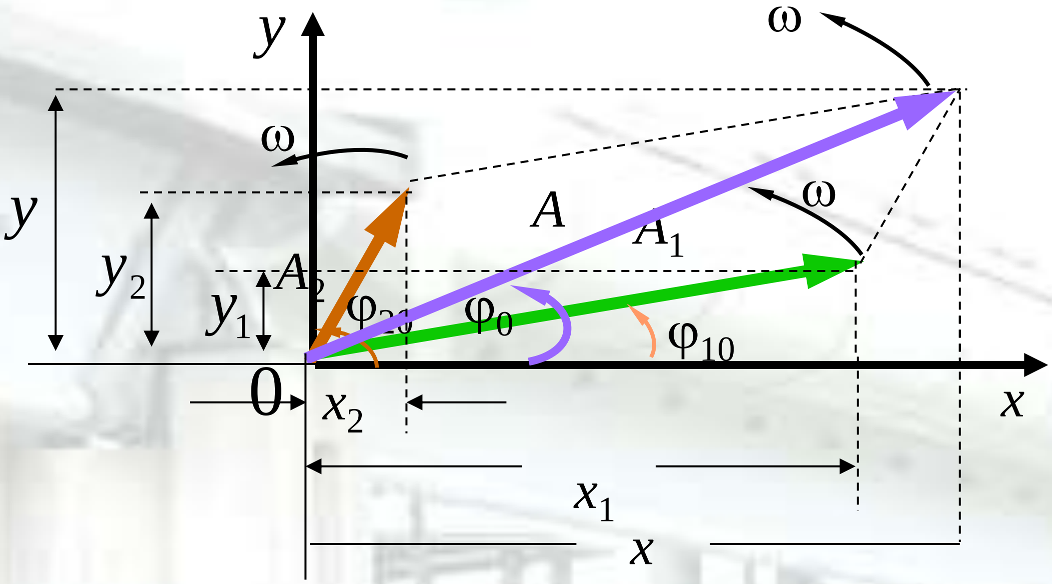
其中 合振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$

初位相 $\varphi_0 = \tan^{-1}\dfrac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$

# 同方向同频率谐振动的合成

两振动频率相同，则它们的旋转矢量以相同的角速度ω旋转，故形成稳定的平形四边形。

利用矢量加法的平行四边形法则，合振动的旋转矢量为A，




利用正切函数求得合振动的初位相。

上一页 下一页 返回目录

# 同方向同频率谐振动的合成

讨论 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}$

1）位相差 $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$A=A_1+A_2$

$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

2）位相差 $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$

$A=|A_2-A_1|$

$$\boxed{x=|A_2-A_1|\cos(\omega t+\pi)}$$

# 同方向同频率谐振动的合成

一般情形下，相位差（$\varphi_{20}-\varphi_{10}$）可取任意值，

而$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$。

1）相位差 $\Delta\varphi = 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$

相互加强，振幅最大

2）相位差 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = |A_1 - A_2|$$

相互削弱，振幅最小

3）若位相差

$\Delta\phi = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ 为其它任意值时

振幅A $\quad A_{min} < A < A_{max}$

# 同方向不同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

$$\boxed{x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)}$$

讨论 $|\omega_2 - \omega_1| << \omega_1 + \omega_2$ 的情况

$$x = \underbrace{2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)}_{\text{振幅部分}}\cos(\underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}_{\text{合振动频率}}t + \varphi)$$

# 同方向不同频率简谐振动的合成

振动频率 $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$

振幅 $A=\left|2A\cos\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$

$$\begin{cases} A_{\max}=2A \\ A_{\min}=0 \end{cases}$$

振幅时大时小的现象叫做"拍". 合振幅每变化一个周期称为一拍，单位时间内拍出现的次数(合振幅变化的频率)叫做拍频.

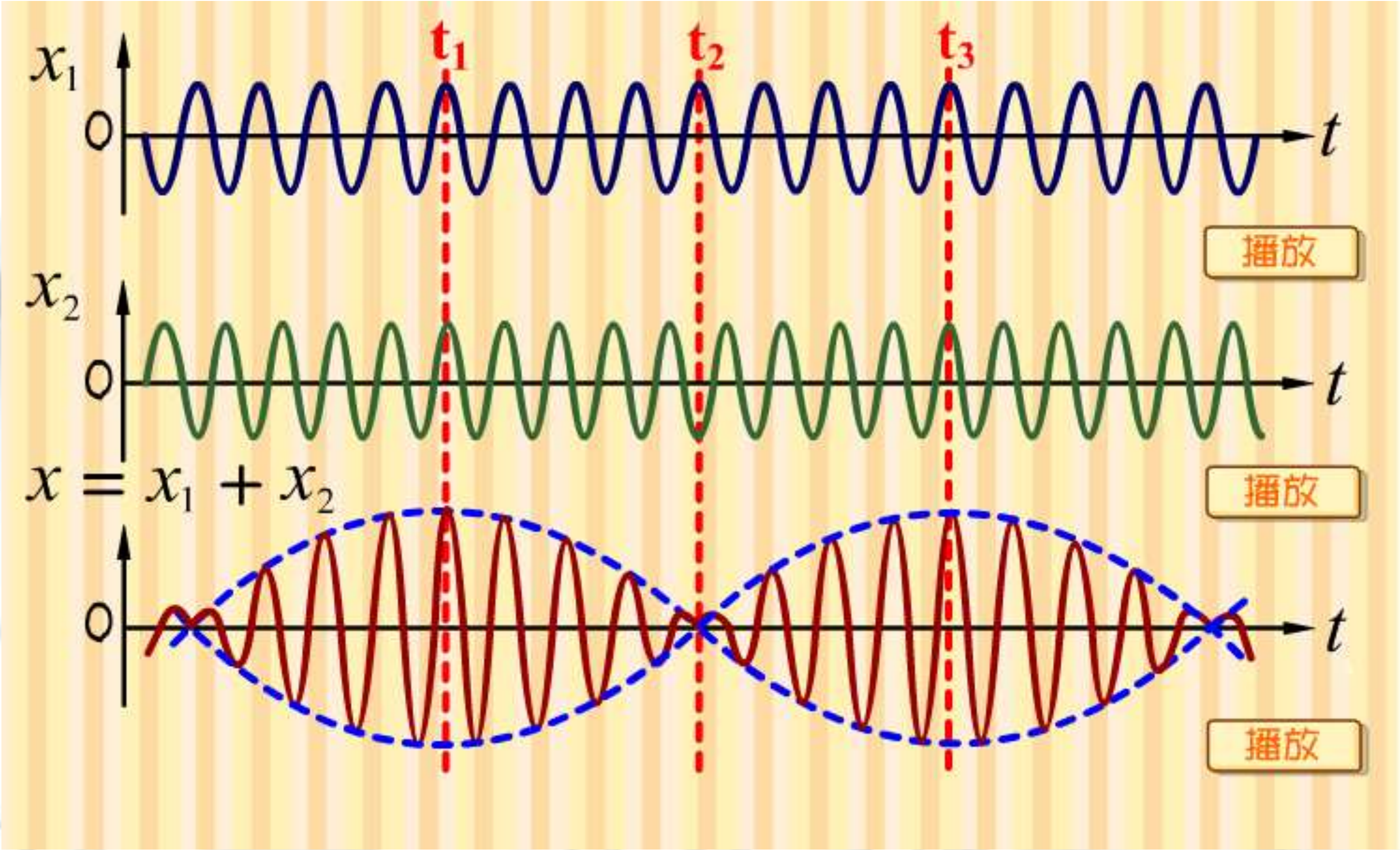
$$\omega_{拍}=|\omega_2-\omega_1|$$

$$T=\left|\frac{1}{\nu_2-\nu_1}\right|$$

$$\boxed{\nu_{拍}=\frac{\omega_{拍}}{2\pi}=\left|\frac{\omega_2}{2\pi}-\frac{\omega_1}{2\pi}\right|=|\nu_2-\nu_1|}$$

拍频等于两个分振动频率之差

# 同方向不同频率简谐振动的合成




拍频演示视频