



硕士学位论文

(2021届)

扩展立方体网络的容错性质研究

Research on the Fault-tolerant Properties of Augmented Cube Networks

研究生姓名 阚双祥

指导教师姓名 樊建席

专业名称 计算机技术

研究方向 并行与分布式系统

论文提交日期 2021年3月

苏州大学学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

论文作者签名：_____ 日 期：_____

苏州大学学位论文使用授权声明

本人完全了解苏州大学关于收集、保存和使用学位论文的规定，即：学位论文著作权归属苏州大学。本学位论文电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。苏州大学有权向国家图书馆、中国社科院文献信息情报中心、中国科学技术信息研究所（含万方数据电子出版社）、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社送交本学位论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存和汇编学位论文，可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索。

涉密论文□

本学位论文属 在 年 月解密后使用本规定。

非涉密论文□

论文作者签名: _____ 日 期: _____

导 师 签 名: _____ 日 期: _____

扩展立方体网络的容错性质研究

摘 要

决定互连网络性能的因素有很多，容错性是衡量一个互连网络性能的重要参考标准。一个具有好的容错性质的互连网络，即使网络中的一些顶点发生故障，也不会对整个网络的性能产生太大的影响。连通度是衡量一个网络容错性能的重要指标之一。但是传统的连通度往往假设网络中的顶点发生故障时，其对周围的顶点没有影响。然而在实际的运行环境中，当一个顶点发生故障时，其周围的顶点发生故障的概率也大大增加。为了弥补这种缺陷，结构连通度和子结构连通度从故障结构而非单个故障顶点的角度更加实际的反映了互连网络的容错能力。此外，当网络中顶点发生故障时，如何尽可能的将故障顶点准确地诊断出来以保证网络的正常运行，也是提高网络容错能力需要考虑的重要方面。一个互连网络所能确定的最大的故障顶点数叫做这个网络的诊断度。它是衡量互连网络容错性能的另一个关键指标。

扩展立方体是著名互连网络超立方体拓扑结构的一种重要变体。它不仅保留了超立方体的许多优秀的性质，同时拥有超立方体和它的其他变体所不具备的优点，比如， n -维扩展立方体的连通度是 $2n - 1$ ，几乎是超立方体的两倍，这也意味着扩展立方体的容错性能在一些方面优于超立方体。

本文主要研究了扩展立方体容错方面的性质，主要包括其结构连通度，子结构连通度以及额外诊断度。同时，根据不同的容错性质，我们分别提出了相应的算法以验证其有效性。具体研究内容如下：

(1) 从故障结构的角度，本文研究了扩展立方体的结构连通度和子结构连通度，这些结构包括二分图，路径和圈。研究表明，随着维数的增加，在保证扩展立方体可靠通信的情况下，扩展立方体在某些故障结构下可以容许的故障顶点数几乎是传统连通度的2倍。

(2) 在子结构连通度的条件下，本文给出了两个无故障顶点之间的容错路由算法，算法分析和实验表明，该算法可以在较短的时间内构造长度接近于最优的无故障路径。

(3) 从故障诊断的角度，本文研究了扩展立方体在 MM^* 模型下的2-额外诊断度，其结果大约是经典诊断度的3倍。此外，本文也给出了扩展立方体在 MM^* 模型下的2-额外诊断算法，算法分析和模拟实验表明该算法可以正确诊断出所有的故障顶点。

关键词： 高性能计算，扩展立方体，结构连通度，子结构连通度，额外诊断度，容错路由算法，诊断算法

作 者： 阚双祥

指导教师： 樊建席

Research on the Fault-tolerant Properties of Augmented Cube Networks

Abstract

There are many factors that determine the performance of interconnection network. Fault tolerance is an important reference standard to measure the performance of interconnect network. An interconnection network with good fault tolerance will not affect the performance of the whole network even if some vertices in the network fail. Connectivity is one of the important indicators to measure the fault tolerance of a network. But the traditional connectivity often assumes that when a vertex in the network fails, it has no effect on the surrounding vertices. However, in the actual running environment, when a vertex fails, the probability of the failure of its surrounding vertices is also greatly increased. In order to make up for this kind of defect, the structure connectivity and substructure connectivity reflect the fault tolerance of the interconnection network more practically from the point of view of fault structure rather than single fault vertex. In addition, when the vertex in the network fails, how to diagnose the fault vertex accurately to ensure the normal operation of the network is also the key aspect to improve the fault tolerance ability of the network. The maximum number of fault vertices that an interconnection network can determine is called the diagnosability. Diagnosability is another key index to measure the fault tolerance performance of interconnection network.

The augmented cube is an important variant of the famous interconnection network hypercube. The augmented cube not only retains many of the great properties of the hypercube, but also has advantages that the hypercube and its other variants do not have, for example, the connectivity of the augmented cube is $2n - 1$, almost twice that of the hypercube, this also means that the fault tolerance of the augmented cube is in some ways much better than that of the hypercube.

In this paper, we mainly study the properties of fault tolerance of augmented cube, including structure connectivity, substructure connectivity and extra diagnosability. At the same time, according to different fault-tolerant properties, we propose corresponding algorithms to verify their effectiveness. The specific research contents are as follows,

(1) From the perspective of fault structure, this paper studies the structure connectivity and substructure connectivity of augmented cube. These structures include bipartite graphs, paths, and cycles. The research results show that with the increase of the dimensionality, the number of fault vertices that the augmented cube can tolerate under certain fault structures is almost twice that of the traditional connectivity.

(2) Under the condition of substructure connectivity, this paper presents a fault-tolerant routing algorithm between two fault-free vertices. The algorithm analysis and experiments show that the algorithm can construct a fault-free path that is nearly optimal in length in a relatively short time.

(3) From the perspective of fault diagnosis, this paper studies the 2-extra diagnosability of augmented cube, and the result is about 3 times that of the traditional diagnosability. In addition, this paper also gives the 2-extra diagnosis algorithm of the augmented cube under the MM^* model. Algorithm analysis and simulation experiments show that the algorithm can correctly diagnose all fault vertices.

Keywords: High performance computing, Augmented cube, Structure connectivity, Substructure connectivity, Extra diagnosability, Fault-tolerant routing algorithm, Diagnosis algorithm

Written by Shuangxiang Kan

Supervised by Janxi Fan

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究现状及研究意义	2
1.2.1 连通度	3
1.2.2 诊断	4
1.3 研究内容	6
1.4 文章组织结构	6
第二章 相关知识	7
2.1 基本定义和符号表示	7
2.2 扩展立方体的定义及其性质	8
2.2.1 扩展立方体的定义	8
2.2.2 扩展立方体的性质	9
2.3 本章小结	10
第三章 扩展立方体的结构连通度和子结构连通度	11
3.1 预备知识	11
3.2 扩展立方体的 $K_{1,M}$ -结构连通度和子结构连通度	13
3.3 扩展立方体的 P_L -结构连通度和子结构连通度	20
3.4 扩展立方体的 C_N -结构连通度和子结构连通度	21
3.5 扩展立方体的容错能力分析	27
3.6 $K_{1,M}$ -子结构连通度下的容错路由算法	28
3.7 模拟实验	32
3.8 本章小结	35
第四章 扩展立方体的2-额外诊断度和诊断算法	37
4.1 预备知识	37
4.2 扩展立方体在MM*模型下的2-额外诊断度	39
4.3 扩展立方体在MM*模型下的诊断算法	42
4.4 模拟实验	50
4.5 本章小结	53

第五章 总结与展望	55
5.1 总结	55
5.2 展望	56
参考文献	57
攻读硕士学位期间发表的论文和参与的科研项目	63
致谢	64

第一章 绪论

1.1 研究背景

随着我国社会信息化的不断发展，数据规模的不断扩大，对海量数据处理的要求也越来越高，这直接或间接地促进了我国高性能计算的发展。高性能计算主要是指从体系结构、并行算法和软件开发等方面研究开发高性能计算机的技术^[1]。从一般意义上来说，现在人们常说的并行计算、超级计算和高性能计算是同义词。从战略意义上讲，高性能计算已经是一个国家综合国力的重要体现，在国防安全、科技发展和国民经济建设中具有重要的战略地位，是支撑国力的关键技术之一^[2]。

20世纪末，随着“曙光”、“银河”、“神威”等一系列国产超级计算机的出现，我国高性能计算能力与美国、日本等发达国家的差距逐渐缩小。进入21世纪，我国的高性能计算得到进一步发展，国防科技大学的“天河二号”超级计算机和无锡的“神威·太湖之光”超级计算机长期位于世界超级计算机TOP 500 冠军位置。而且在2016年的全球超级计算机大会上，中国获得了国际高性能计算应用领域的最高奖：戈登·贝尔奖^[3]。这表明中国的高性能计算的计算能力已经跻身世界一流国家行列。中国科学院计算技术研究所所长李国杰曾经说过，高性能计算机是真正的先进生产力，是最典型的第一生产力^[4]。高性能计算不仅应用于如飞机制造、地震预测和能源勘探等重要的国防工业，而且在民用和商用领域，如金融、服务和生活等也发挥着越来越重要的作用。此外，人工智能特别是深度学习的快速发展，正在改变各行各业的面貌，从健康医疗到交通运输再到自动驾驶汽车，无不受其变革性的影响，而高性能计算的超强算力正在加速这一变革。

并行计算作为高性能计算的基础，对于高性能计算的表现至关重要。并行计算的基础互连网络为处理器（顶点）之间进行数据通信提供了物理基础，其拓扑结构决定了顶点间的通信效率，是影响并行计算机性能的主要因素之一，因而成为并行计算领域的重要研究方向^[5]。为了进一步提高并行计算的性能，各种各样的互连网络拓扑结构被相继提出。这些拓扑结构在很大程度上影响着网络的性能，如构造成本、延迟、路由以及可靠性等。最早提出的互连网络拓扑结构包括树、环、总线和完全图等。虽然树、环和总线的结构简单且易于构造，但由于其稳定性不高，当网络中的一些资源（如顶点，链路等）发生故障时，很容易造成整个网络的瘫痪。完

全图虽然稳定性较好, 因为其每个顶点都和剩余的所有顶点相连, 但是在顶点数量规模很大的情况下, 链路数量会急剧增大, 导致其构造成本过高, 不适宜大规模的互连网络。因此, 后来许多学者提出了一些成本较低、易于构造且稳定性较好的互连网络拓扑结构, 包括超立方体 (Hypercube)^[6]、网格 (Mesh)^[7]、交叉立方体 (Crossed cube)^[8]、星图 (Star graph)^[9]和广义超立方体 (Generalized hypercube)^[10]等。其中超立方体是这些拓扑结构中比较具有代表性的一类网络, 因其具有很多优良的性质如边对称、顶点对称、低顶点度数和正则性等而受到广泛的关注。后来的很多拓扑结构都是基于超立方体改造而提出的。

本文研究的互连网络拓扑结构是由Choudum等人^[11]提出的扩展立方体 (Augmented cube), 该结构是在超立方体的基础上按照一定的规则增加一些边得到的, 它不仅保留了超立方体的许多优良的性质, 如递归构造性和高对称性等, 同时也拥有着超立方体和它的其他变体所不具备的优点, 比如, n -维扩展立方体的连通度是 $2n - 1$, 几乎是超立方体的两倍, 这意味着扩展立方体的容错性能在某些方面远胜过超立方体。同时, 扩展立方体还具备超立方体所没有的某些嵌入性质^[12-15]。本文主要对于扩展立方体的容错性和可靠性进行研究, 在这之前其他学者对扩展立方体的容错性已经进行了大量的研究工作。Ma等人^[16]证明了 n -维扩展立方体的超连通度 (Super connectivity) 和超边连通度 (Super edge-connectivity) 分别为 $4n - 8$ 和 $4n - 4$, 将扩展立方体传统的连通度和边连通度^[11] ($2n - 2$) 几乎提高了2倍。接着Ma等人^[17]又证明了 n -维扩展立方体的2-额外连通度和2-额外边连通度分别为 $6n - 17$ 和 $6n - 9$ 。Chang等人^[18]证明了 n -维扩展立方体在PMC诊断模型下的条件诊断度为 $8n - 27$ 。Hong等人^[19]证明了 n -维扩展立方体在MM*诊断模型下的条件诊断度为 $6n - 17$ 。这些研究结果再次证明了扩展立方体是可靠性较好的互连网络。我们将在本文中继续研究扩展立方体的容错性质, 其中包括结构连通度, 子结构连通度和额外诊断度等性质, 并给出容错路由算法和诊断算法。

1.2 研究现状及研究意义

随着互连网络规模的不断扩大, 网络中的资源如顶点和链路等会不可避免地发生故障。因此一个互连网络的容错能力是一个网络能正常运行的关键。我们希望通过一些指标来评估一个互连网络的容错能力, 其中连通度是评价一个网络容错能力最常用的指标之一。此外, 如何将故障资源诊断出来, 并将其替换为可以正常

工作的资源，也是互连网络容错能力的重要体现。接下来，我们将对连通度和诊断这两个方面进行详细阐述。

1.2.1 连通度

为了更好地研究互连网络的性质，我们通常将一个互连网络抽象为一个简单无向图，其中的每个顶点表示一个处理器，每条边表示两个处理器之间的链路。连通度是衡量一个互连网络容错能力的重要指标之一。一个拥有 n 个顶点的图 G ，在删除任意不超过 $k-1$ ($n > k$) 个顶点之后仍然是连通的，且存在 k 个顶点，将这 k 个顶点删除后得到的图是不连通的或者平凡的（指仅有一个顶点的图），那么整数 k 称为图 G 的连通度，用 $\kappa(G) = k$ 表示。通常，一个图的连通度越大，这个图所代表的互连网络就越稳定。尽管传统连通度可以在某种程度上反映一个网络的容错能力，但是它有一个明显的缺陷，那就是连通度往往假设一个顶点的所有邻居顶点可能会同时发生故障而导致整个网络变为不连通的或者平凡的，但是，这种情形在现实中发生的概率往往是非常低的。因此，传统的连通度往往不能真实地反映出大规模互连网络在实际运行环境中出现故障的情形。

为了弥补这种缺陷，Harary等人^[20]提出了条件连通度。条件连通度是指将图 G 变为不连通时，其剩余的所有连通分支仍然具有某种图的性质所需要删除的最少的顶点数。基于条件连通度的概念，Latifi等人^[21]提出了 g -限制连通度的概念。给定一个图 G 和一个非负整数 g ，如果 G 中存在一个顶点集合，当 G 删除这个顶点集合后，该图变为不连通的，剩余的每个连通分支中的每个顶点至少有 g 个邻居顶点，那么我们就称这个集合为图 G 的 g -限制顶点割。图 G 的 g -限制连通度指的是图 G 的所有 g -限制顶点割的最小基数，记为 $\kappa^g(G)$ 。接着，Fàbrega等人^[22]又提出了 g -额外连通度的概念。给定一个图 G 和一个非负整数 g ，如果 G 中存在一个顶点集合，当 G 删除这个顶点集合后，该图变为不连通的，且每个连通分支所包含的顶点个数大于等于 $g+1$ ，那么我们就称这个集合为图 G 的 g -额外顶点割。图 G 的 g -额外连通度指的是图 G 的所有 g -额外顶点割的最小基数，记为 $\kappa_g(G)$ 。 g -额外连通度是超连通度^[23]的一般化，一个图的超连通度实际上对应的是 $\kappa_1(G)$ 。关于条件连通度的更多信息可以参考论文 [23–38]。

但是，无论是传统的连通度还是条件连通度，它们都基于这样一种假设：单个顶点发生故障是一个独立的事件。在这种情况下，当网络中的一个顶点发生故障时，这个故障顶点对它周围的顶点是没有任何影响的。然而在实际的运行环

境中, 当一个顶点发生故障时, 它周围的邻接顶点发生故障的概率大大增加, 这样就可能在网络中产生一个故障结构。正是基于这样的考虑, Lin等人^[39]提出了结构连通度和子结构连通度的概念, 并对超立方体的 H -结构连通度和 H -子结构连通度进行了研究, 其中 $H \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}, C_4\}$ (相关定义见第二章)。接着Lin等人^[40]又证明了类超立方体 (Hypercube-like) 的 H -结构连通度和 H -子结构连通度, 其中 $H \in \{K_{1,m}, C_4\}, m \geq 1$, 使得结构连通度和子结构连通度的结论适用于一类网络, 而不是某种具体的网络。Sabir和Meng^[41]推广了超立方体中的结果, 并进一步研究了折叠超立方体 (Folded hypercube) 中的结构连通度和子结构连通度。Lv等人^[42]研究了 k -元 n -立方体 (k -ary n -cube network) 的 H -结构连通度和 H -子结构连通度, 其中 $H \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}\}$ 。显然, 结构连通度实际上是把故障元素从单个故障顶点扩展到故障结构的形式, 其更能反映互连网络中资源发生故障的情形。更多关于结构连通度和子结构连通度的研究可以参考论文 [43–45]。

1.2.2 诊断

随着互连网络规模的扩大, 因为运行环境或者人为干扰等其他的原因, 网络中的一些顶点会不可避免地发生故障。因此网络的稳定性是保证网络正常工作的关键之一。为了保证互连网络的正常运行, 互连网络应该能够确定这些故障顶点并以无故障顶点来替换这些故障顶点。系统利用自身资源寻找互连网络中故障顶点的过程叫做系统级诊断。在系统级的诊断中, PMC模型和MM*模型是使用最广泛的两种。

Preparata, Metze和Chien^[46]提出的PMC模型是基于测试的。PMC模型假设一个顶点可以测试与它相邻的顶点的状态 (故障或者无故障)。测试顶点是无故障的, 则测试结果才是可靠的, 否则是不可靠的。下面的表格1-1说明不同状态的顶点的测试结果。我们用 u 表示测试顶点, v 表示被测试顶点, 测试的所有结果的集合叫做症状 (Syndrome)。我们用0表示 u 测试 v 是无故障的, 反之则用1表示 u 测试 v 是故障的。

表 1-1 PMC模型下不同状态顶点的测试结果

测试顶点 u	被测试顶点 v	测试结果
正常	正常	0
正常	故障	1
故障	正常	0或1
故障	故障	0或1

Maeng和Malek^[47]提出的MM模型是基于比较的。MM模型下的一个测试顶点 w 向

其两个不同的被测试的邻居顶点 u 和 v 各发送一个测试任务，然后比较它们的返回信息。不同的测试顶点可以测试相同的两个被测试顶点。比较的结果分为一致的和不一致的。和PMC模型一样，只有在测试顶点是无故障顶点的情况下，测试结果才是可靠的。当测试顶点和两个被测试顶点都是无故障顶点时，测试结果是一致的，记为0，否则记为1。Sengupta和Dahbura^[48]提出的MM*模型是对MM模型的进一步改进，在这个模型中，每个顶点必须测试另外两个相邻的顶点。下面的表格1-2说明了MM*模型下在不同状态的顶点的测试结果。

表 1-2 MM*模型下不同状态顶点的测试结果

测试顶点 w 的状态	被测试顶点 u 和 v 的状态	测试结果
正常	都正常	0
正常	至少有一个故障	1
故障	任意	0或1

如果一个网络中发生故障的顶点个数不超过 t ，并且所有故障顶点都能在不更换的情况下被网络识别，那么这个网络就是 t -可诊断的。一个网络的诊断度是网络可诊断出的最多的故障顶点数。但是这种传统的诊断度往往假设某个顶点的所有相邻顶点会同时发生故障。但如前所述，在现实的场景中，这种情况发生的概率是非常小的，而且这种情况下网络的诊断度往往受限于网络的最小顶点度数。为了更真实地反映网络运行的真实场景，Lai 等人^[49]提出了一种改进的诊断度，称为条件诊断度，它假定任何一个顶点的所有相邻顶点都不会同时发生故障。条件诊断度从更实际的角度反映了网络中顶点发生故障的情形。接着，Peng等人^[50]提出了 g -好邻居条件诊断度。 g -好邻居条件诊断度定义为在网络中的每个无故障顶点都至少有 g 个无故障的相邻顶点的条件下，网络可诊断出的故障顶点的最大数目，他们给出了 n -维超立方体在PMC模型下的 g -好邻居条件诊断度，其中 $0 \leq g \leq n-3$ 。后来，Zhang和Yang^[51]又提出了 g -额外条件诊断度（也称额外诊断度）的概念。额外条件诊断度是网络在每个无故障分支都有大于等于 $g+1$ 个无故障顶点的情况下所能诊断出的最大故障顶点数，他们确定了 n -维超立方体在PMC模型下的 g -额外条件诊断度，其中 $0 \leq g \leq n-4$ 。接着，Wang等人^[52]证明了在PMC和MM*模型下排列群图（Alternating group graph networks）的2-额外条件诊断度。Lv等人^[53]给出了 (n, k) -星图（ (n, k) -star network）在MM*模型下的 g -额外条件诊断度，其中 $1 \leq g \leq \min\{\frac{n+k-1}{4}, k-2\}$ 。根据以上的研究结果可以发现，条件诊断度可以诊断的故障顶点数比传统的诊断度要大得多。

1.3 研究内容

本文的研究内容分为以下两个部分：

一、扩展立方体的结构连通度和子结构连通度

在第三章中，我们求出了扩展立方体的结构连通度和子结构连通度，这里的结构包括二分图，路径和圈。进一步，我们给出了扩展立方体在故障顶点数小于 $K_{1,6}$ -子结构连通度下的容错路由算法，分析了算法的时间复杂度并且给出了该算法所构造的最大无故障路径长度。最后，我们给出了该容错路由算法与其他算法的模拟实验的结果。

二、扩展立方体的额外诊断度及其诊断算法

在第四章中，我们求出了扩展立方体在 MM^* 诊断模型下的2-额外诊断度。进一步，我们给出了当扩展立方体的故障顶点数等于2-额外诊断度时的诊断算法，分析了算法的时间复杂度并给出了模拟实验的结果来验证算法的有效性。

1.4 文章组织结构

全文的组织结构如下：

第一章介绍了本课题的研究背景，研究现状，研究内容以及文章的组织结构。

第二章首先介绍了基本定义和符号表示，然后介绍了扩展立方体的基本定义和后面要用到的一些性质。

第三章证明了扩展立方体的结构连通度及子结构连通度，并给出了扩展立方体在故障顶点数小于 $K_{1,6}$ -子结构连通度下的容错路由算法及模拟实验。

第四章证明了扩展立方体在 MM^* 诊断模型下的2-额外诊断度，并给出了当扩展立方体的故障顶点数为2-额外诊断度时的诊断算法及模拟实验。

第五章对本论文所做的工作进行了总结，并对未来的研究工作进行了展望。

第二章 相关知识

本章节主要介绍后面所需要用到的关于图论的相关定义和符号，以及扩展立方体的定义及相关性质。

2.1 基本定义和符号表示

在不同的文献中，对图论中符号的表示和定义的描述往往存在一些差异。在本文中关于图论的符号和定义主要参考孙惠泉的《图论及其应用》一书^[54]。

为了更好地研究互连网络的性质，我们通常将一个互连网络抽象成一个无向图。图中的每个顶点代表一个处理器，每条边代表两个处理器之间的通信链路。一个无向图通常可以定义为一个二元组 $G = (V(G), E(G))$ ，其中 $V(G)$ 表示一个有限且非空的顶点集合， $E(G)$ 表示连接 $V(G)$ 中两个不同顶点的边的集合。

我们把由顶点 u 和 v 的无序对组成的边 e ，记为 $e = (u, v)$ 或 $e = (v, u)$ 。并称 u 和 v 为 e 的端点；称 e 连接 u 和 v 。我们也称边 e 和顶点 u （及 v ）相关联。我们还称 u 和 v 相邻。如果两条边有相同的两 endpoint，则称它们为重边。如果一条边的两 endpoint 相同，就称它为环。称不包含环和重边的图为简单图。在本论文中，所有的图都是简单图。仅有一个顶点的图称为平凡图，本文中用 K_1 表示。

图 G 的一个顶点 u 的所有邻居顶点定义为 $N_G(u) = \{v \mid (u, v) \in E(G)\}$ ，同时我们定义 $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$ 。类似地，对于一个顶点集合 $S \subset V(G)$ ，我们设 $N_G(S) = \bigcup_{u \in V(G)} N_G(u) - S$ ， $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ 。在不会引起混淆的情况下，我们也会使用 $N(u)$ 来代替 $N_G(u)$ （其他表示方法类似）。如果图 G 中的每个顶点的度数（邻居顶点数）都是相同的且度数为 n ，则称图 G 是 n -正则图或 n -正则的。

设 $F \subset V(G)$ ， $G - F$ 表示通过从 G 中删除 F 中的所有顶点及与 F 中顶点相关联的所有边而得到的图。设 M 和 N 是 $V(G)$ 中的两个不同的顶点子集， $M \Delta N = (M - N) \cup (N - M)$ 。同时，我们用 $E[M, N]$ 表示两个顶点分别分布在 M 和 N 中的所有边的集合。

如果一个图 G 的顶点集合可以被分成两个不相交的非空子集 X 和 Y ，其中 $|X| = m$ 和 $|Y| = n$ ，而且 X 中的任意一个顶点和 Y 中的每个顶点都相邻，并且不存在一条边的两个顶点属于同一个顶点子集（ X 或 Y ）。则 G 被称为一个完全二分图，记作 $K_{m,n}$ 。

一条路径 $P = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ 是一个由不同顶点组成的有限非空序列，其中 $(u_i, u_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leq i \leq k-1$ 。我们也用 $(u_1, \dots, u_i, Q, u_j, \dots, u_k)$ 来表示 (u_1, u_2, \dots, u_k) ，

其中 $Q = (u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-2}, u_{j-1})$ 。路径 P 的逆路径 $(u_k, u_{k-1}, \dots, u_1)$ ，记为 P^{-1} 。以路径 P 中的顶点 u_i 为起始顶点， u_j 为结尾顶点的子路径记为 $Path(P, u_i, u_j)$ 。此外，我们用 $P[i]$ 来表示路径 P 的第 i 个顶点 u_i ，其中 $1 \leq i \leq k$ ，并且我们用 $P[-j]$ 来表示 P 的倒数第 j 个顶点。类似地，我们用 $V(P)$ 和 $E(P)$ 来分别表示路径 P 的顶点集合和边集合。圈 $C = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ 是一种特殊的路径，其中 $k \geq 3$ 且 $(u_1, u_k) \in E(G)$ 。我们也用 P_l 来表示路径长度为 l 的路径，其中 l 为 P 的总边数。类似的，我们用 C_k 来表示长度为 k 的圈，其中 k 为圈 C 的总边数。

对于图 G 和 H ，如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$ ，那么 H 称为 G 的子图， G 称为 H 的母图。如果 H 是 G 的子图且 $V(H) = V(G)$ ，那么 H 称为 G 的生成子图， G 称为 H 的生成母图。对于 G 的一个非空顶点集合 $V' \subseteq V(G)$ ，如果 G 的子图 H 以 V' 为它的顶点集合，并且 H 的每条边的两个端点都在 V' 中，那么 H 叫做 G 的导出子图，记为 $G[V']$ 。

图 G 和 H 是同构的，记为 $G \cong H$ ，当且仅当在 $V(G)$ 和 $V(H)$ ，以及 $E(G)$ 和 $E(H)$ 之间，各存在一一映射 $\Psi: V(G) \rightarrow V(H)$ 以及 $\Phi: E(G) \rightarrow E(H)$ ，且这两个映射保持关联关系，即它们满足关系： $\Phi(e) = \Psi(u)\Psi(v)$ ， $\forall e = uv \in E(G)$ 。

设 H 是图 G 的一个子图， F 是一个元素的集合，且集合中的元素是 G 中的顶点子集。设 $W(F) = \bigcup_{s \in F} s$ ，如果集合 F 满足 $G - W(F)$ 是一个不连通图或者是一个平凡图，且 F 中的每个元素的导出子图和 H 的生成母图之一同构，那么 F 就叫做图 G 的一个 H -结构割。图 G 的 H -结构连通度，记为 $\kappa(G, H)$ ，是 G 的所有结构割的最小基数。如果 F 中的每个元素的导出子图和 H 的子图的生成母图之一同构，那么 F 就叫做图 G 的一个 H -子结构割。图 G 的 H -子结构连通度，记为 $\kappa^s(G, H)$ ，是 G 的所有 H -子结构割的最小基数。如果 H 是孤立的顶点，那么 H -结构连通度和 H -子结构连通度就是传统的连通度。

2.2 扩展立方体的定义及其性质

扩展立方体因为具有对称性，递归性，低直径和可扩展性等优点而受到学者们的广泛关注。下面我们给出扩展立方体的定义及相关性质。

2.2.1 扩展立方体的定义

定义 2.1. ^[11] 对于一个任意的正整数 $n \geq 1$ ，一个 n -维的扩展立方体 AQ_n 包含 2^n 个顶点，每个顶点被标记为一个唯一的二进制串 $u_n u_{n-1} \dots u_2 u_1$ ，其中 $u_i \in \{0, 1\}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

对于 $n = 1$, AQ_1 是一个包含两个顶点 0 和 1 的完全图 K_2 。对于 $n \geq 2$, AQ_n 根据以下方式由两个不相交的 AQ_{n-1} 构建而来: $0AQ_{n-1}$ 是将 AQ_{n-1} 中每个顶点的二进制字符串前面加上 0 得到的图, $1AQ_{n-1}$ 是将 AQ_{n-1} 中每个顶点的二进制字符串前面加上 1 得到的图。 $0AQ_{n-1}$ 中的顶点 $u = 0a_{n-1} \dots a_2a_1$ 邻接于 $1AQ_{n-1}$ 中的顶点 $v = 1b_{n-1} \dots b_2b_1$ 当且仅当, 对于 $i = 1, \dots, n-1$, (1) $a_i = b_i$, 在这种情况下, (u, v) 被称为一条超立方体边; (2) $a_i = \bar{b}_i$, 在这种情况下, (u, v) 被称为一条补边。

对于扩展立方体的任意一个顶点 $u = a_na_{n-1} \dots a_1$, 我们用 u^i (\bar{u}^i) 来代表一个二进制串 $a_n \dots a_{i+1} \bar{a}_i a_{i-1} \dots a_1$ ($a_n \dots a_{i+1} \bar{a}_i \bar{a}_{i-1} \dots \bar{a}_1$)。显然 $u^1 = \bar{u}^1$, 有些时候我们会交替使用这两种表示方式。比如, 如果 $u = 011001$, 那么 $u^1 = \bar{u}^1 = 011000$, $u^2 = 011011$, $u^4 = 010001$, $\bar{u}^4 = 010110$, $(u^4)^2 = 010011$, $(\bar{u}^4)^3 = 010010$, $(\bar{u}^4)^2 = 010010$, 和 $(\bar{u}^4)^2 = 010101$ 。

上面关于扩展立方体的定义是从递归的角度进行定义的。类似于超立方体, 扩展立方体也有其他等价定义, 下面是扩展立方体的非递归定义:

定义 2.2. ^[11] 当 $n \geq 1$ 时, 一个 n -维的扩展立方体包含 2^n 个顶点, 每个顶点由一个唯一的 n -维二进制串 $u_n u_{n-1} \dots u_2 u_1$ 标记。两个顶点 $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ 和 $b = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$ 之间存在一条边, 当且仅当存在一个整数 k , $1 \leq k \leq n$, (1) 对于 $1 \leq i \leq n$, $i \neq k$, 有 $a_k = \bar{b}_k$ 且 $a_i = b_i$; 或者 (2) 对于 $1 \leq i \leq k$, 有 $a_i = \bar{b}_i$, 且对于 $k+1 \leq i \leq n$, 有 $a_i = b_i$ 。

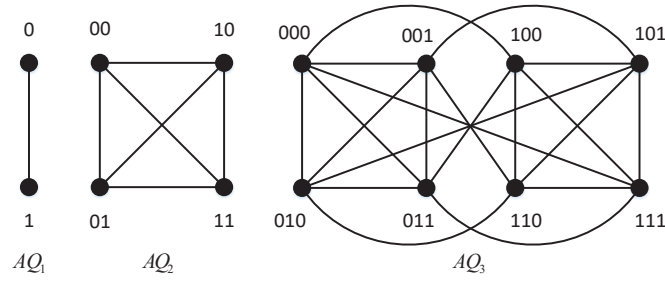
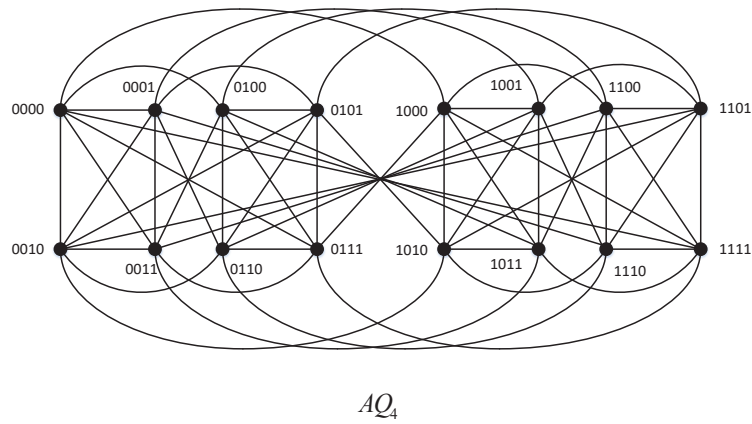
图 2-1 和图 2-2 分别是 1-维, 2-维, 3-维和 4-维的扩展立方体。

2.2.2 扩展立方体的性质

n -维的扩展立方体的 AQ_n 的主要性质如下 ^[11]:

- (1) AQ_n 共有 2^n 个顶点, $(2n-1)2^{n-1}$ 条边;
- (2) AQ_n 的直径为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$;
- (3) AQ_n 是 $(2n-1)$ -正则的;
- (4) AQ_n 的连通度为: 当 $n \geq 1$ 且 $n \neq 3$ 时, 有 $\kappa(AQ_n) = 2n-1$; $\kappa(AQ_3) = 4$ 。
- (5) AQ_n 是顶点对称的。

在后面的第三和第四章的证明中, 我们要用到下面的三个引理。

图 2-1 扩展立方体 AQ_1 , AQ_2 和 AQ_3 图 2-2 扩展立方体 AQ_4

引理 2.1. ^[18] 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y 是 AQ_n 中任意2个不同顶点, 则 $|N_{AQ_n}(x, y)| \geq 4n - 8$ 。

引理 2.2. ^[18] 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, z 是 AQ_n 中任意3个不同顶点, 则 $|N_{AQ_n}(x, y, z)| \geq 6n - 17$ 。

引理 2.3. ^[18] 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, s, t 是 AQ_n 中任意4个不同顶点, 则 $|N_{AQ_n}(x, y, s, t)| \geq 8n - 28$ 。

2.3 本章小结

本章首先介绍了后面要用到的概念和符号表示, 然后介绍了扩展立方体的定义和相关性质。

第三章 扩展立方体的结构连通度和子结构连通度

连通度是衡量互连网络稳定性的一个重要指标。相对于传统连通度只将顶点发生故障当做单一事件而言，互连网络中的结构发生故障更能反映真实运行环境中网络的故障情况。在这一章中，我们研究了扩展立方体的 H -结构连通度和 H -子结构连通度，其中 $H \in \{K_{1,M}, P_L, C_N\}$ ，且 $1 \leq M \leq 6, 1 \leq L \leq 2n-1, 3 \leq N \leq 2n-1$ 。同时我们给出了在扩展立方体中寻找两个无故障顶点的容错路由算法AQFRouting，当网络中的故障顶点数量在一定范围之内，该算法可以实现两个无故障顶点之间的正常通信。

3.1 预备知识

在给出扩展立方体结构连通度和子结构连通度的证明之前，我们先给出在本节需要用到的扩展立方体的一些定义和性质：

设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点。为了简化证明，我们引入符号 $v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[2n-1]}$ ，其中 $v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[2n-1]}$ 和 u 的所有邻居顶点 $u^1, u^2, \bar{u}^2, \dots, u^n, \bar{u}^n$ 形成一一对应的关系。 u^j 和 $v^{[j]}$ 的对应关系为：（1）如果 i 是偶数，则 $j = \frac{i}{2} + 1$ 且 $u^j = v^{[i]}$ ；（2）如果 i 是奇数，则 $j = \lceil \frac{i}{2} \rceil$ 且 $\bar{u}^j = v^{[i]}$ 。 $(v^{[i]})'$ 和 $(\bar{v}^{[i]})'$ 的定义类似于 u' 和 \bar{u}' 的定义。例如，如果 $u = 000000$ 是 AQ_6 的一个顶点，那么 $u^4 = v^{[6]} = 001000$ ， $\bar{u}^5 = v^{[9]} = 011111$ ， $(v^{[6]})^2 = 001010$ 和 $(\bar{v}^{[9]})^3 = 011000$ 。在本章中，我们对这两种表示方法不加以区分。

根据2.2.2的性质（5），我们可以得到下面的定理。

定理 3.1. 对于 $n \geq 4$ ，有 $\kappa(AQ_n, K_1) = \kappa^s(AQ_n, K_1) = 2n - 1$ 。

下面我们给出本章要用到的一些定理和引理。

定理 3.2. ^[23] 对于 $n \geq 6$ ，有 $\kappa_1(AQ_n) = 4n - 8$ 。

引理 3.1. ^[23] 如果 (u, u^i) 是 AQ_n 的一条 i -维的超立方体边($1 \leq i \leq n$)，那么

$$N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(u^i) = \begin{cases} \{\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}\} & 2 \leq i \leq n, \\ \{\bar{u}^2, u^2\} & i = 1. \end{cases}$$

也就是说， u 和 u^i 在 AQ_n 中有2个共同的邻居顶点且 $|N_{AQ_n}(\{u, u^i\})| = 4n - 6$ 。

引理 3.2. ^[23] 如果 (u, \bar{u}^i) 是 AQ_n 的一条 i -维的补边 ($2 \leq i \leq n$), 那么

$$N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^i) = \begin{cases} \{\bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} & 2 \leq i \leq n-1, \\ \{\bar{u}^{n-1}, u^n\} & i = n. \end{cases}$$

也就是说, u 和 \bar{u}^i 在 AQ_n 中有 4 个共同的邻居顶点, 对于 $2 \leq i \leq n-1$, 有 $|N_{AQ_n}(\{u, \bar{u}^i\})| = 4n - 8$ 。类似地, u 和 \bar{u}^n 在 AQ_n 中有 2 个共同的邻居顶点且 $|N_{AQ_n}(\{u, \bar{u}^n\})| = 4n - 6$ 。

引理 3.3. ^[23] 对于 $n \geq 3$, AQ_n 中的任意两个顶点最多有 4 个共同的邻居顶点。

根据定义 2.1, 我们可以很容易地得到下面的关于扩展立方体的性质:

引理 3.4. 如果 (u, u^i) 和 (u, u^j) 是 AQ_n 的两条 i -维和 j -维的超立方体边 ($1 \leq i \neq j \leq n$)。不失一般性, 设 $i < j$, 有

$$N_{AQ_n}(u^i) \cap N_{AQ_n}(u^j) = \begin{cases} \{u, (u^i)^j, \bar{u}^i, (\bar{u}^j)^i\} & j = i+1 \text{ 且 } i > 1, \\ \{u, (u^i)^j\} & j > i+1, \\ \{u, (u^1)^2\} & i = 1 \text{ 且 } j = 2. \end{cases}$$

引理 3.5. 如果 (u, \bar{u}^i) 和 (u, \bar{u}^j) 是 AQ_n 的两条 i -维和 j -维的补边 ($1 \leq i \neq j \leq n$)。不失一般性, 设 $i < j$, 有

$$N_{AQ_n}(\bar{u}^i) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^j) = \begin{cases} \{u, \bar{u}^{i+1}, (u^j)^{j-1}, (\bar{u}^j)^{j-1}\} & j = i+2, \\ \{u, (\bar{u}^j)^i\} & j = i+1 \text{ 或 } j > i+2. \end{cases}$$

引理 3.6. 如果 (u, u^i) 是 AQ_n 的一条 i -维的超立方体边, (u, \bar{u}^j) 是 AQ_n 的一条 j -维的补边 ($1 \leq i, j \leq n$), 那么

$$N_{AQ_n}(u^i) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^j) = \begin{cases} \{u, (u^i)^{i-1}, (\bar{u}^i)^{i-1}, \bar{u}^{i-1}\} & i = j \text{ 且 } i > 1, \\ \{u, \bar{u}^i, (\bar{u}^j)^{i+1}, (u^i)^{i+1}\} & i = j+1 \text{ 且 } i < n, \\ \{u, \bar{u}^i\} & i = n \text{ 且 } j = n-1, \\ \{u, (u^i)^{i-1}, (\bar{u}^i)^{i-1}, \bar{u}^{i-1}\} & i = j+2, \\ \{u, (\bar{u}^j)^i\} & |i-j| > 2, \\ \{u, (u^j)^i, (\bar{u}^j)^i, \bar{u}^i\} & j = i+1 \text{ 且 } i > 1, \\ \{u, (u^1)^2\} & i = 1 \text{ 且 } j = 2, \\ \{u, (\bar{u}^j)^i\} & j = i+2 \text{ 且 } i > 1, \\ \{u, \bar{u}^2, (\bar{u}^3)^1, (u^1)^3\} & i = 1 \text{ 且 } j = 3. \end{cases}$$

3.2 扩展立方体的 $K_{1,M}$ -结构连通度和子结构连通度

根据扩展立方体的定义、引理3.1和引理3.2, 如果 u 是 AQ_n 的任意一个顶点且 (u, \bar{u}^i) 是 AQ_n 的 i -维($2 \leq i \leq n-1$)的补边, 那么 $N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^i) = \{\bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\}$ 且 $\{\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\}$ ($2 \leq i \leq n-1$)的导出子图与 $K_{1,4}$ 同构。如果 (u, \bar{u}^n) 是 AQ_n 的 n -维的补边, 那么 $N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^n) = \{\bar{u}^{n-1}, u^n\}$ 且 $\{\bar{u}^n, \bar{u}^{n-1}, u^n\}$ 的导出子图与 $K_{1,2}$ 同构。类似地, 如果 (u, u^i) 是 AQ_n 的 i -维($1 \leq i \leq n$)的超立方体边, 那么 $N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(u^i) = \{\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}\}$ ($2 \leq i \leq n$)且 $N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(u^1) = \{u^2, \bar{u}^2\}$ 。显然 $\{u^i, \bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}\}$ ($2 \leq i \leq n$)的导出子图与 $K_{1,2}$ 同构。接下来, 我们将讨论 $\kappa(AQ_n, K_{1,M})$ 和 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M})$, 其中 $1 \leq M \leq 3$, $4 \leq M \leq 6$ 。

我们首先证明当 $1 \leq M \leq 3$ 时, AQ_n 的结构连通度 $\kappa(AQ_n, K_{1,M})$ 和子结构连通度 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M})$ 。

引理 3.7. 当 $n \geq 4$ 且 $1 \leq M \leq 3$ 时, $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 的任意一个顶点。接下来, 我们将根据 M 和 n 的值来分为下面几种情况:

情形1. $M = 1$ 。设

$$S_1 = \{\{v^{[(M+1)i+1]}, v^{[(M+1)i+2]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor\},$$

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1\}。$$

情形2. $M = 2$ 。

情形2.1. $n(\text{模}3) = 0$ 。设

$$S_1 = \{\{v^{[(M+1)i+1]}, v^{[(M+1)i+2]}, v^{[(M+1)i+3]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor\}。$$

情形2.2. $n(\text{模}3) = 1$ 。设

$$S_1 = \{\{v^{[(M+1)i+1]}, v^{[(M+1)i+2]}, v^{[(M+1)i+3]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor\},$$

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2\}。$$

情形2.3. $n(\text{模}3) = 2$ 。设

$$S_1 = \{\{v^{[(M+1)i+1]}, v^{[(M+1)i+2]}, v^{[(M+1)i+3]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor\},$$

$$S_2 = \{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1\}。$$

情形3. $M = 3$ 。

情形3.1. $n(\text{模}4) = 1$ 。设

$$S_1 = \{\{v^{[(M+1)i+1]}, v^{[(M+1)i+2]}, v^{[(M+1)i+3]}, v^{[(M+1)i+4]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor\},$$

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3\}.$$

情形3.2. $n(\text{模}4) = 3$ 。设

$$S_1 = \{\{v^{[(M+1)i+1]}, v^{[(M+1)i+2]}, v^{[(M+1)i+3]}, v^{[(M+1)i+4]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor\},$$

$$S_2 = \{v^{[2n-3]}, v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1\}.$$

当 $M = 2$ 且 $n = 0(\text{模}3)$ 时, 设 $S = S_1$, 否则设 $S = S_1 \cup S_2$ 。显然, 如果 $M = 1$, 那么 $S_1 \cup S_2$ 中的每个元素的导出子图与 $K_{1,1}$ 同构; 如果 $M = 2$, 当 $0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor$ 时, 顶点 $v^{[(M+1)i+2]}$ 邻接于顶点 $v^{[(M+1)i+1]}$ 和 $v^{[(M+1)i+3]}$ 。此外, 顶点 $v^{[2n-1]}$ 邻接于顶点 $v^{[2n-2]}$, $(v^{[2n-1]})^1$ 和 $(v^{[2n-1]})^2$ 。因此, S 中的每个元素的导出子图和 $K_{1,2}$ 同构。如果 $M = 3$, 当 $0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{M+1} \rfloor$ 时, 顶点 $v^{[(M+1)i+3]}$ 邻接于顶点 $v^{[(M+1)i+1]}$, $v^{[(M+1)i+2]}$ 和 $v^{[(M+1)i+4]}$ 。此外, 顶点 $v^{[2n-1]}$ 邻接于 $v^{[2n-3]}$, $v^{[2n-2]}$, $(v^{[2n-1]})^1$, $(v^{[2n-1]})^2$ 和 $(v^{[2n-1]})^3$ 。这样, S 中每个元素的导出子图都与 $K_{1,3}$ 同构。显然, $|S| = \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。设 $Y(S) = \bigcup_{f \in S} f$, 因为 $AQ_n - Y(S)$ 是不连通的且其中一个连通分支是一个平凡图, 所以 $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 和 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。□

图 3-1 显示了 AQ_5 的 $K_{1,1}$ -结构割和 AQ_6 的 $K_{1,2}$ -结构割。

引理 3.8. 当 $n \geq 4$ 且 $1 \leq M \leq 3$ 时, 有 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。

证明. 设 F_n^* 是 AQ_n 中的一个连通子图的集合, 这个集合中的每个元素都同构于 $K_{1,M}$ 且 $|F_n^*| \leq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil - 1$ 。因为 $|V(F_n^*)| \leq (1+M) \times (\lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil - 1) < 2n-1$ 且 $\kappa(AQ_n) = 2n-1$, 所以 $AQ_n - F_n^*$ 是连通的。引理成立。□

因为 $\kappa(Q_n, K_{1,M}) \geq \kappa^s(Q_n, K_{1,M})$, 可得 $\kappa(Q_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。根据引理 3.7 和引理 3.8, 我们有下面的定理。

定理 3.3. 当 $n \geq 4$ 且 $1 \leq M \leq 3$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。

下面我们证明当 $4 \leq M \leq 6$ 时, AQ_n 的结构连通度 $\kappa(AQ_n, K_{1,M})$ 和子结构连通度 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M})$ 。

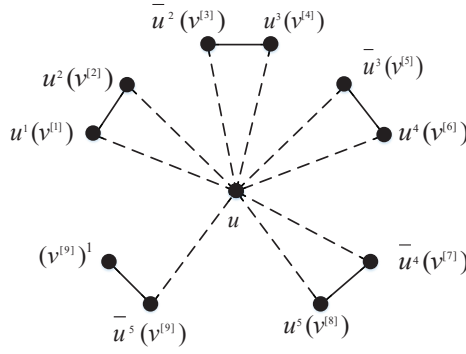
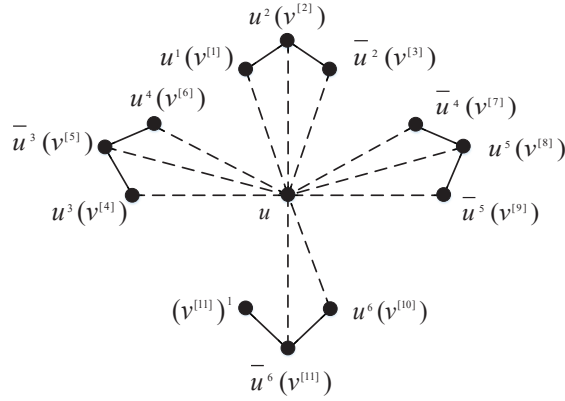

 (a) AQ_5 的一个 $K_{1,1}$ -结构割

 (b) AQ_6 的一个 $K_{1,2}$ -结构割

 图 3-1 AQ_5 的 $K_{1,1}$ -结构割和 AQ_6 的 $K_{1,2}$ -结构割

引理 3.9. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq M \leq 6$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点。接下来, 我们将根据 M 和 n 的值来分为下面几种情况:

情形1. $M = 4$ 。

情形1.1. n 是奇数。设

$$S_1 = \{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}.$$

情形1.2. n 是偶数。设

$$S_1 = \{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\} \text{ 和}$$

$$S_3 = \{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3\}.$$

情形2. $M = 5$ 。

情形2.1. n 是奇数。设

$$S_1 = \{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}.$$

情形2.2. n 是偶数。设

$$S_1 = \{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\} \text{ 和}$$

$$S_3 = \{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3, (v^{[2n-1]})^4\}.$$

情形3. $M = 6$ 。

情形3.1. n 是奇数。设

$$S_1 = \{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n, (\overline{v^{[3]}})^n\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2, (v^{[5+4i+2]})^3\} \mid 0 \leq i <$$

$$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}.$$

情形3.2. n 是偶数。设

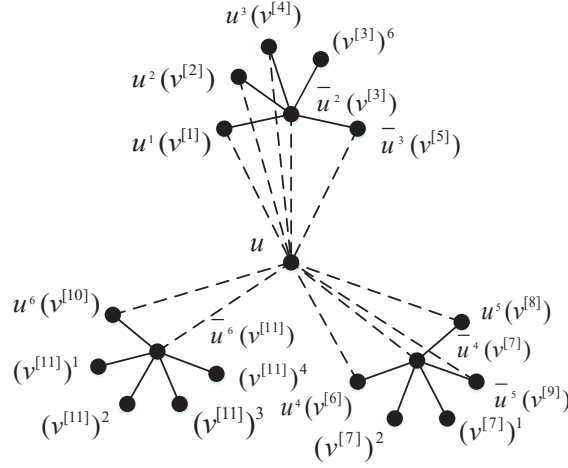
$$S_1 = \{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n, (\overline{v^{[3]}})^n\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2, (v^{[5+4i+2]})^3\} \mid 0 \leq i <$$

$$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\} \text{ 和}$$

$$S_3 = \{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3, (v^{[2n-1]})^4, (v^{[2n-1]})^5\}.$$

显然, S_1 中的每个元素的导出子图与 $K_{1,M}$ 同构。对于 $0 \leq i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$, 顶点 $v^{[5+4i+2]}$ 邻接于顶点 $v^{[5+4i+j]}$ 和 $(v^{[5+4i+2]})^p$, 其中 $j = 1, 3$ 和 4 , $1 \leq p \leq 1 + M - 4$ 。所以 S_2 中的每个元素的导出子图和 $K_{1,M}$ 同构。顶点 $v^{[2n-1]}$ 邻接于顶点 $v^{[2n-2]}$ 和 $(v^{[2n-1]})^q$, 其中 $1 \leq q \leq 1 + M - (2n - 2 - 4 \times \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$ 。这样, S_3 中的每个元素的导出子图与 $K_{1,M}$ 同构。假设当 n 为奇数时, $S = S_1 \cup S_2$, 否则设 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 并且 $|S| = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

图 3-2 AQ_6 的一个 $K_{1,5}$ -结构割

设 $Y(S) = \bigcup_{f \in S} f$, 因为 $AQ_n - Y(S)$ 是不连通的且它的一个连通分支是一个平凡图, 那么 $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 和 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. \square

图 3-2 显示了 AQ_6 的一个 $K_{1,5}$ -结构割。

引理 3.10. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq M \leq 6$ 时, 设 F_n 是 AQ_n 中的一个 $K_{1,M}$ -子结构集, 如果在 $AQ_n - V(F_n)$ 中存在一个孤立的顶点, 那么 $|F_n| \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

证明. 设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点。我们设 $W = \{x \mid (x, u) \text{ 是一条超立方体边}, x \in V(G)\}$ 且 $Z = \{y \mid (y, u) \text{ 是一条补边}, y \in V(G)\}$ 。显然, $|W| = n$ 且 $|Z| = n - 1$ 。根据引理 3.2 和引理 3.3, F_n 中的每个元素最多包含 $N(u)$ 中的 5 个顶点, 即 $\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}$ 和 \bar{u}^{i+1} , 其中 $2 \leq i \leq n - 1$ 。因为 $\{(\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}), (\bar{u}^i, u^i), (\bar{u}^i, u^{i+1}), (\bar{u}^i, \bar{u}^{i+1})\} \subseteq E(AQ_n)$, 所以 $\{\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\}$ 的导出子图与 $K_{1,4}$ 同构。我们设 $B = \{b_i \mid b_i \in F_n \text{ 且 } \{\bar{u}^{i-1}, u^i, \bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i) \cap N(u)\}$ 。因为每个 $V(b_i)$ 包含 Z 中的 3 个顶点和 W 中的 2 个顶点, 所以 $|B| < \lfloor \frac{2n-1}{5} \rfloor$ 。接下来, 我们将根据 $|B|$ 的值来分为下面几种情况:

情形 1. $|B| = 0$ 。因为 F_n 中的每个元素最多包含 $N(u)$ 中的 4 个顶点, 所以 $|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{4} \rceil$ 。

情形 2. $|B| = 1$ 。假设 $\{\bar{u}^{i-1}, u^i, \bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$, 其中 $2 \leq i \leq n - 1$ 。因为 $F_n - B$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B)$ 中的 4 个顶点, 所以 $|F_n| \geq 1 + \lceil \frac{2n-6}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

情形 3. $|B| = 2$ 。假设 $\{\bar{u}^{i-1}, u^i, \bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$, $\{\bar{u}^{j-1}, u^j, \bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} \subseteq V(b_j)$, 其中 $2 \leq i, j \leq n - 1$, 且 $|i - j| \geq 3$ 。不失一般性, 我们设 $j > i$ 。

情形3.1. $j - i = 3$ 。那么 $\{\bar{u}^{j-1}, u^j, \bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} = \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}, \bar{u}^{i+3}, u^{i+4}, \bar{u}^{i+4}\}$ 。假设 $w_1, w_2 \in N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}$ 且 $w_1 \neq w_2$ 。根据引理3.4、3.5和3.6, $N(u^{i+2}) \cap N(w_1) \cap N(w_2) = \emptyset$ 。此外, 顶点 u^{i+2} 不与 $N(u) - V(B)$ 中的任意一个顶点相邻。因此, 存在一个元素 $a \in F_n - B$ 使得 $u^{i+2} \in V(a)$ 且 $|V(a) \cap \{N(u) - V(B)\}| \leq 2$ 。因为 $F_n - B - \{a\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a)$ 中的四个顶点, 所以 $|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-13}{4} \rceil = \lceil \frac{2n-1}{4} \rceil$ 。

情形3.2. $j - i = 4$ 。那么 $\{\bar{u}^{j-1}, u^j, \bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} = \{\bar{u}^{i+3}, u^{i+4}, \bar{u}^{i+4}, u^{i+5}, \bar{u}^{i+5}\}$ 。下面, 我们将根据 $F_n - B$ 中包含三个顶点 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 的元素个数来讨论下面几种情况。我们用 t 来表示这样的元素个数。

情形3.2.1. $t = 3$ 。那么在 $N(u) - V(B)$ 中有3个不同的元素分别包含着三个顶点 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 中的一个。假设 $w_1, w_2 \in N(u) - V(B) - \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}$ 且 $w_1 \neq w_2$, 根据引理3.4、3.5 和3.6, $N(u^{i+2}) \cap N(w_1) \cap N(w_2) = \emptyset$ 。顶点 u^{i+2} 不与 $N(u) - V(B) - \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}$ 中的任一顶点相连。因此, 存在一个元素 $a_1 \in F_n - B$, 使得 $u^{i+2} \in V(a_1)$ 且 $|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}\}| \leq 2$ 。对于顶点 \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 的情况, 证明与顶点 u^{i+2} 的情形类似, 进一步, 我们设 $\bar{u}^{i+2} \in a_2$, $u^{i+3} \in a_3$ 。因为 $F_n - B - \{a_1, a_2, a_3\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2) - V(a_3)$ 中的四个顶点, 所以 $|F_n| \geq 2 + 3 + \lceil \frac{2n-17}{4} \rceil = \lceil \frac{2n+3}{4} \rceil$ 。

情形3.2.2. $t = 2$ 。那么 $N(u) - V(B)$ 中存在2个元素, 其中一个元素包含 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 中的1个顶点, 另一个元素包含另外2个顶点。我们假设 a_1 包含 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 中的1个顶点, a_2 包含另外2个顶点。

情形3.2.2.1. $u^{i+2} \in V(a_1)$ 和 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$ 。类似于情形3.2.1中的讨论, 我们有 $|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}\}| \leq 2$ 。因为 $N(\bar{u}^{i+2}) \cap N(u^{i+3}) - \{u, \bar{u}^{i+3}\} = \{(\bar{u}^{i+2})^{i+4}, (u^{i+3})^{i+4}\}$, 且 $\{(\bar{u}^{i+2})^{i+4}, (u^{i+3})^{i+4}\}$ 中的每个顶点不与 $N(u) - V(B) - \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}$ 中的顶点相连, 此外 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}$ 中的每个顶点也不与 $N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}$ 中的顶点相连, 且 $|V(a_2) \cap \{N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}\}| = 2$ 和 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$ 。因为 $F_n - B - \{a_1, a_2\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2)$ 中的4个顶点, 所以 $|F_n| \geq 2 + 1 + 1 + \lceil \frac{2n-15}{4} \rceil = \lceil \frac{2n+1}{4} \rceil$ 。对于 $u^{i+3} \in V(a_1)$ 和 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+2}\} \subseteq V(a_2)$ 这种情况, 证明类似, 在此不再赘述。

情形3.2.2.2. $\bar{u}^{i+2} \in V(a_1)$ 和 $\{u^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$ 。类似于情形3.2.1中的讨论, 我们有 $|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{u^{i+2}, u^{i+3}\}\}| \leq 2$ 。因为 $N(u^{i+2}) \cap N(u^{i+3}) - \{u, \bar{u}^{i+2}\} = \{(u^{i+2})^{i+3}, (\bar{u}^{i+3})^{i+2}\}$, $\{(u^{i+2})^{i+3}, (\bar{u}^{i+3})^{i+2}\}$ 中的每个顶点不与 $N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}\}$ 中的顶点相连且 $(u^{i+2}, u^{i+3}) \notin E(AQ_n)$, $|V(a_2) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}\}\}| = 2$ 以及 $\{u^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$ 。

因为 $F_n - B - \{a_1, a_2\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2)$ 中的4个顶点, 所以 $|F_n| \geq 2 + 1 + 1 + \lceil \frac{2n-15}{4} \rceil = \lceil \frac{2n+1}{4} \rceil$ 。

情形3.2.3. $t = 1$ 。根据情形3.2.1和情形3.2.2中的讨论, 存在一个元素 $a \in F_n - B$ 使得 $|V(a) \cap \{N(u) - V(B)\}| = 3$ 且 $\{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a)$ 。因为 $F_n - B - \{a\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a)$ 中的四个顶点, 所以 $|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-14}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

情形3.3. $j-i \geq 5$ 。我们设 $U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \dots, u^{j-1}\}$ 。接下来, 我们将计算 $F_n - B$ 中包含 U_{ij} 的元素的数量。因为 $5 \leq |U_{ij}| \leq 2n - 11$ 且每个元素最多包含 $N(u) - V(B)$ 中的4个顶点, 我们将根据 $|U_{ij}|$ 的值进行讨论。

情形3.3.1. $|U_{ij}| \pmod{4} = 1$ 。类似于情形3.1中的讨论, 我们有 $|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-13}{4} \rceil = \lceil \frac{2n-1}{4} \rceil$ 。

情形3.3.2. $|U_{ij}| \pmod{4} = 3$ 。类似于情形3.2中的讨论, 我们有 $|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-14}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

情形4. $|B| \geq 3$ 。如果 $b_i, b_j \in B$ 且 B 中不存在 $b_k (i < k < j)$, 我们设 $U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \dots, u^{j-1}\}$ 。根据情形3中讨论, 如果 $|U_{ij}| \equiv 3 \pmod{4}$, 那么 F_n 的值将会是最小的。这样, $|F_n| \geq |B| + (|B| - 1) + \lceil \frac{2n-1-5 \times |B| - 3 \times (|B|-1)}{4} \rceil \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

所以, 定理成立。 \square

引理 3.11. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq M \leq 6$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

证明. 我们将会用反证法来证明这个引理。设 F_n^* 是 AQ_n 的一个 $K_{1,M}$ -子结构集且 $|F_n^*| \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$ 。如果 $AQ_n - V(F_n^*)$ 是不连通的, 那么我们设 R 是 $AQ_n - V(F_n^*)$ 中最小的一个连通分支。注意到 $|V(F_n^*)| \leq (1+M) \times (\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1) \leq 7 \times (\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1)$ 。根据引理3.2, 对于 $n \geq 6$, 我们有 $7 \times (\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1) < 4n - 8$, 因此 $|V(R)| = 1$ 。此外, 我们假设顶点 $u \in V(R)$ 。根据引理3.10, 我们有 $|N(u) \cap V(F_n^*)| \leq 2n - 2 < 2n - 1$, 这意味着在 $AQ_n - V(F_n^*)$ 中 u 存在至少一个邻居顶点。因此, 我们有 $|V(R)| \geq 2$, 矛盾。所以 $AQ_n - V(F_n^*)$ 是连通的。引理成立。 \square

结合引理3.9, 我们有 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。因为 $\kappa(Q_n, K_{1,M}) \geq \kappa^s(Q_n, K_{1,M})$, 所以 $\kappa(Q_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$ 。根据引理3.9和引理3.11, 我们有下面的定理。

定理 3.4. 当 $n \geq 6$ 和 $4 \leq M \leq 6$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

3.3 扩展立方体的 P_L -结构连通度和子结构连通度

设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点, 根据扩展立方体的定义, $(\bar{u}^{i-1}, u^i) \in E(AQ)$ 和 $(u^i, \bar{u}^i) \in E(AQ)$ ($2 \leq i \leq n$)。这样 $(u^1, u^2, \bar{u}^2, \dots, u^n, \bar{u}^n)$ 可以形成一条长度为 $2n - 2$ 的路径。

因为 $P_2(P_3)$ 同构于 $K_{1,1}(K_{1,2})$, 并且我们已经在3.2中给出了 $\kappa(AQ_n, K_{1,1})$ ($\kappa(AQ_n, K_{1,2})$) 和 $\kappa^s(AQ_n, K_{1,1})$ ($\kappa^s(AQ_n, K_{1,2})$) 的证明, 所以下面我们只研究当 $L \geq 4$ 时, AQ_n 的 P_L -结构连通度和子结构连通度的情况。

引理 3.12. 当 $n \geq 3$ 且 $4 \leq L \leq 2n - 1$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, P_L) \leq \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, P_L) \leq \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点。设

$$S_1 = \{\{v^{[i \times L + 1]}, v^{[i \times L + 2]}, \dots, v^{[i \times L + L]}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor\}.$$

如果 $(2n - 1)(\text{模} L) = 0$, 设 $S_2 = \emptyset$, 否则, 根据 L 和 $\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1$ 的值, 我们有下列的讨论:

情形1. L 是奇数且 $L \leq 2n - 3$ 。

情形1.1. $\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1$ 是偶数。设

$$S_2 = \{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor \times L + 1]}, \dots, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \dots, (v^{[2n-1]})^{\frac{\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1}{2} + 1}\}.$$

情形1.2. $\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1$ 是奇数。设

$$S_2 = \{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor \times L + 1]}, \dots, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \dots, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\frac{\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n}{2} + 1}\}.$$

情形2. L 是偶数且 $L \leq 2n - 4$ 。设

$$S_2 = \{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor \times L + 1]}, \dots, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \dots, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\frac{\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n}{2} + 1}\}.$$

情形3. $L = 2n - 2$ 。设

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \dots, (v^{[2n-1]})^{n-1}, ((v^{[2n-1]})^{n-1})^1\}.$$

假设当 $(2n-1)(\text{模}L)=0$ 时, $S=S_1$, 否则设 $S=S_1 \cup S_2$ 。显然, S 中每个元素的导出子图都与 P_L 同构且 $|S|=\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$ 。设 $Y(S)=\cup_{f \in S} f$ 。因为 $AQ_n - Y(S)$ 是不连通的, 且它的一个连通分支是一个平凡图, 所以 $\kappa(AQ_n, P_L) \leq \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$, $\kappa^s(AQ_n, P_L) \leq \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$ 。 \square

引理 3.13. 当 $n \geq 3$ 和 $4 \leq L \leq 2n-1$ 时, 有 $\kappa^s(AQ_n, P_L) \geq \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$ 。

证明. 设 F_n^* 是 AQ_n 中一个连通子图的集合, 这个集合中的每个元素都同构于 P_L 中的一个连通子图且 $|F_n^*| \leq \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil - 1$ 。因为 $|V(F_n^*)| \leq L \times (\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil - 1) < 2n-1$ 且 $\kappa(AQ_n) = 2n-1$, 所以 $AQ_n - F_n^*$ 是连通的。引理成立。 \square

根据引理3.12和引理3.13, 我们下面的定理。

定理 3.5. 当 $n \geq 3$ 且 $4 \leq L \leq 2n-1$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, P_L) = \kappa^s(AQ_n, P_L) = \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$ 。

3.4 扩展立方体的 C_N -结构连通度和子结构连通度

我们首先证明 $\kappa^s(AQ_n, C_N)$, 然后再证明 $\kappa(AQ_n, C_N)$ 。

因为 P_N 是 C_N 的一个连通子图, 所以我们下面的引理。

引理 3.14. 当 $n \geq 3$ 且 $3 \leq N \leq 2n-1$ 时, 有 $\kappa^s(AQ_n, C_N) \leq \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil$ 。

引理 3.15. 当 $n \geq 3$ 且 $3 \leq N \leq 2n-1$ 时, 有 $\kappa^s(AQ_n, C_N) \geq \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil$ 。

证明. 设 F_n^* 是 AQ_n 中一个连通子图的集合, 这个集合中的每个元素和 C_N 的一个连通子图同构且 $|F_n^*| \leq \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil - 1$ 。因为 $|V(F_n^*)| \leq N \times (\lceil \frac{2n-1}{N} \rceil - 1) < 2n-1$ 且 $\kappa(AQ_n) = 2n-1$, 所以 $AQ_n - F_n^*$ 是连通的。引理成立。 \square

根据引理3.14和引理3.15, 我们下面的定理。

定理 3.6. 当 $n \geq 3$ 且 $3 \leq N \leq 2n-1$ 时, 有 $\kappa^s(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil$ 。

下面, 我们将讨论故障结构为 C_3 时, AQ_n 的结构连通度 $\kappa(AQ_n, C_3)$ 。

引理 3.16. 当 $n \geq 6$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, C_3) \leq n-1$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 中的任意一个元素。我们设

$$S_1 = \{u^1, u^2, \bar{u}^2\},$$

$$S_2 = \{\{u^i, \bar{u}^i, (u^i)^{i-1}\} \mid 3 \leq i \leq n\}.$$

显然, S_1 中的每个元素的导出子图和 C_3 同构。当 $3 \leq i \leq n$ 时, $\{\{u^i, \bar{u}^i\}, \{\bar{u}^i, (u^i)^{i-1}\}, \{(u^i)^{i-1}, u^i\}\} \subset E(AQ_n)$ 。因此, $S = S_1 \cup S_2$ 中每个元素的导出子图与 C_3 同构且 $|S| = n - 1$ 。设 $Y(S) = \cup_{f \in S} f$, 因为 $AQ_n - Y(S)$ 是不连通的且它的一个连通分支是 $\{u\}$, 所以 $\kappa(AQ_n, C_3) \leq n - 1$ 。 \square

引理 3.17. 当 $n \geq 6$ 时, 设 F_n 是 AQ_n 的一个 C_3 -结构集。如果 $AQ_n - V(F_n)$ 中存在一个孤立的顶点, 那么 $|F_n| \geq n - 1$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点。我们设 $W = \{x \mid (x, u) \text{ 是一条超立方体边}, x \in V(G)\}$ 且 $Z = \{y \mid (y, u) \text{ 是一条补边}, y \in V(G)\}$ 。显然, $|W| = n$ 且 $|Z| = n - 1$ 。根据引理 3.1 和引理 3.2, F_n 中的每个元素最多包含 $N(u)$ 中的三个顶点, 即 \bar{u}^i, u^{i+1} 和 \bar{u}^{i+1} , 其中 $1 \leq i \leq n - 1$ 。因为 $\{(\bar{u}^i, u^{i+1}), (\bar{u}^i, \bar{u}^{i+1}), (u^{i+1}, \bar{u}^{i+1})\} \subseteq E(AQ_n)$, 所以 $\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\}$ 的导出子图与 C_3 同构。我们设 $B = \{b_i \mid b_i \in F_n \text{ 且 } \{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i) \cap N(u)\}$ 。因为每个 $V(b_i)$ 包含 Z 中的两个顶点和 W 中的一个顶点, 所以 $|B| < \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ 。下面, 我们将根据 $|B|$ 的值讨论下面几种情况:

情形 1. $|B| = 0$ 。因为 F_n 中的每个元素最多包含 $N(u)$ 中的 4 个顶点, 所以 $|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil$ 。

情形 2. $|B| = 1$ 。设 $\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$, 其中 $1 \leq i \leq n - 1$ 。因为 $F_n - B$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B)$ 中的四个顶点, 所以 $|F_n| \geq 1 + \lceil \frac{2n-4}{2} \rceil = n - 1$ 。

情形 3. $|B| = 2$ 。设 $\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$, $\{\bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} \subseteq V(b_j)$, 其中 $1 \leq i, j \leq n - 1$ 且 $|i - j| \geq 2$ 。不失一般性, 我们设 $j > i$ 。

情形 3.1. $j - i = 2$ 。那么 $\{\bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} = \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}, \bar{u}^{i+3}\}$ 。根据扩展立方体的定义, 顶点 u^{i+2} 不与 $N(u) - V(B)$ 中的任一顶点邻接。因此, 存在一个元素 $a \in F_n - B$ 使得 $u^{i+2} \in V(a)$ 且 $|V(a) \cap \{N(u) - V(B)\}| = 1$ 。因为 $F - B - \{a\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a)$ 中的 2 个顶点, 所以 $|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-8}{2} \rceil = n - 1$ 。

情形 3.2. $j - i = 3$ 。那么 $\{\bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} = \{\bar{u}^{i+3}, u^{i+4}, \bar{u}^{i+4}\}$ 。接下来, 我们将根据 $F_n - B$ 中包含三个顶点 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 的元素个数来讨论下面几种情况。我们用 t 来表示这样的元素个数。

情形3.2.1. $t = 3$ 。那么在 $N(u) - V(B)$ 中有3个元素分别包含顶点 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 中的各一个。根据扩展立方体的定义, 顶点 u^{i+2} 不与 $N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}$ 中的顶点相邻, 所以存在一个元素 $a_1 \in F_n - B$, 使得 $u^{i+2} \in V(a_1)$ 且 $|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}\}| = 1$ 。对于 \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 的情况, 证明与顶点 u^{i+2} 的情形类似。进一步, 我们设 $\bar{u}^{i+2} \in a_2$, $u^{i+3} \in a_3$ 。因为 $F_n - B - \{a_1, a_2, a_3\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2) - V(a_3)$ 中的2个元素, 所以 $|F_n| \geq 2 + 3 + \lceil \frac{2n-10}{2} \rceil = n$ 。

情形3.2.2. $t = 2$ 。那么在 $N(u) - V(B)$ 中存在2个元素, 其中一个元素包含 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 中的一个顶点, 另一个元素包含另外2个顶点。我们假设 a_1 包含 u^{i+2} , \bar{u}^{i+2} 和 u^{i+3} 中的一个顶点, a_2 包含另外2个顶点。

情形3.2.2.1. $u^{i+2} \in V(a_1)$ 和 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$ 。类似于情形3.2.1中的讨论, 我们有 $|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}\}| = 1$ 。顶点 \bar{u}^{i+2} 或 u^{i+3} 不与 $N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}$ 和 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \in E(AQ_n)$ 中的顶点相邻, 且 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq a_2$ 和 $|V(a_2) \cap \{N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}\}| = 2$ 。因为 $F_n - B - \{a_1, a_2\}$ 中的每个元素最多包含 $N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2)$ 中的2个顶点, 那么 $|F_n| \geq 2 + 1 + 1 + \lceil \frac{2n-10}{2} \rceil = n-1$ 。对于 $u^{i+3} \in V(a_1)$ 和 $\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+2}\} \subseteq V(a_2)$ 的情形, 证明类似, 在此不再赘述。

情形3.2.2.2. $\bar{u}^{i+2} \in V(a_1)$ 和 $\{u^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$ 。因为 $(u^{i+2}, u^{i+3}) \notin E(AQ_n)$, 所以这种情形不存在。

情形3.2.3. $t = 1$ 。因为 $(u^{i+2}, u^{i+3}) \notin E(AQ_n)$ 。所以这种情形不存在。

情形3.3. $j-i \geq 4$ 。我们设 $U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \dots, u^{j-1}\}$ 。我们将计算在 $F_n - B$ 中包含 U_{ij} 元素的个数。显然, $5 \leq |U| \leq 2n-7$ 。因为每个元素最多包含 $F_n - B$ 中 $N(u) - V(B)$ 的2个顶点且 $U \pmod{2} = 1$, 类似于情形3.2.1中的讨论, 我们有 $|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-8}{2} \rceil = n-1$ 。

情形4. $|B| \geq 3$ 。如果 $b_i, b_j \in B$ 且不存在 $b_k \in B (i < k < j)$, 我们设 $U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \dots, u^{j-1}\}$ 。根据情形3的讨论, $F_n - B$ 中包含 U_{ij} 中所有顶点的最少的元素个数是 $\lceil \frac{|U_{ij}|}{2} \rceil$ 。因此, $|F_n| \geq |B| + (|B| - 1) + \lceil \frac{2n-1-3 \times |B| - (|B|-1)}{2} \rceil \geq n-1$ 。

所以引理成立。 \square

引理 3.18. 当 $n \geq 6$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, C_3) \geq n-1$ 。

证明. 我们将用反证法来证明这个引理。设 F_n^* 是 AQ_n 中的一个 C_3 -结构集且 $|F_n^*| \leq n-2$ 。如果 $AQ_n - V(F_n^*)$ 是不连通的, 那么我们设 R 是 $AQ_n - V(F_n^*)$ 中的一个最小

的连通分支且 $|V(F_n^*)| \leq 3 \times (n-2) = 3n-6$ 。根据引理3.2, 对于 $n \geq 6$, 我们有 $3n-6 < 4n-8$, 因此 $|V(R)| = 1$ 。此外, 我们假设顶点 $u \in V(R)$, 根据引理3.17, $|N(u) \cap V(F_n^*)| \leq 2n-2 < 2n-1$, 这意味着在 $AQ_n - V(F_n^*)$ 中的 u 至少存在一个邻居顶点。因此, 我们有 $|V(R)| \geq 2$, 矛盾。所以 $AQ_n - V(F_n^*)$ 是连通的。引理成立。 \square

根据引理3.16和引理3.18, 我们有下面的定理。

定理 3.7. 当 $n \geq 6$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, C_3) = n-1$ 。

下面我们证明当 $4 \leq N \leq 2n-1$ 时, AQ_n 的结构连通度 $\kappa(AQ_n, C_N)$ 。

引理 3.19. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq N \leq 2n-1$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, C_N) \leq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 中的任意一个顶点。根据 N 的值, 我们将讨论下面的情形:

情形1. N 是奇数。设

$$S_1 = \{v^{[(N-1)i+1]}, v^{[(N-1)i+2]}, \dots, v^{[(i+1)(N-1)]}, \overline{(v^{[(i+1)(N-1)]})}^{\lfloor \frac{(N-1)i+1}{2} \rfloor + 1} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor\}.$$

情形1.1. $(2n-1)(\text{模}(N-1)) = 1$ 。

情形1.1.1. $N \leq 2n-3$ 。设

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, \overline{(v^{[2n-1]})}^2, \dots, (v^{[2n-1]})^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}, \overline{(v^{[2n-1]})}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}, (v^{[2n-1]})^{\lceil \frac{N}{2} \rceil}\}.$$

情形1.1.2. $N = 2n-1$ 。设

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, \overline{(v^{[2n-1]})}^2, \dots, (v^{[2n-1]})^{n-3}, \overline{(v^{[2n-1]})}^{n-3}, \overline{(v^{[2n-1]})}^{n-2}, ((v^{[2n-1]})^{n-2})^{n-4}, \overline{((v^{[2n-1]})^{n-2})}^{n-4}, ((v^{[2n-1]})^{n-2})^{n-3}, \overline{((v^{[2n-1]})^{n-2})}^{n-3}\}.$$

情形1.2. $(2n-1)(\text{模}(N-1)) = 3$ 。设

$$S_2 = \{v^{[2n-1]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^{n-1-\frac{N-3}{2}}, \overline{(v^{[2n-2]})}^{n-1-\frac{N-3}{2}}, (v^{[2n-2]})^{n-\frac{N-3}{2}}, \dots, (v^{[2n-2]})^{n-2}, \overline{(v^{[2n-2]})}^{n-2}\}.$$

情形1.3. $(2n-1)(\text{模}(N-1)) > 3$ 。设

$$S_2 = \{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \dots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 2 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}}, \overline{(v^{[2n-2]})}^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 2 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}}, (v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 3 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}}, \overline{(v^{[2n-2]})}^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 3 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}}, \dots, \overline{(v^{[2n-2]})}^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 1}\}.$$

情形2. N 是偶数。设

$$S_1 = \begin{cases} \{\{v^{[3i+1]}, v^{[3i+3]}, v^{[3i+2]}, (v^{[3i+1]})^{\lfloor \frac{3i+1}{2} \rfloor + 3}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor \text{ 和 } i(\bmod 2) = 0 \text{ 和 } N = 4\}, \\ \{\{v^{[(N-1)i+1]}, v^{[(N-1)i+2]}, \dots, v^{[(i+1)(N-1)]}, (\overline{v^{[(i+1)(N-1)]}})^{\lfloor \frac{(N-1)i+1}{2} \rfloor + 1}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor \text{ 和} \\ i(\bmod 2) = 0 \text{ 和 } N \neq 4\}. \end{cases}$$

$$S_2 = \{\{v^{[(N-1)i+1]}, v^{[(N-1)i+2]}, \dots, v^{[(i+1)(N-1)]}, (\overline{v^{[(i+1)(N-1)]}})^{\lfloor \frac{(N-1)i+1}{2} \rfloor + 1}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor \text{ 和 } i(\bmod 2) = 1\}.$$

如果 $(2n-1)(\bmod(N-1)) = 0$, 那么 $S_3 = \emptyset$; 否则, 我们将讨论下面几种情形:

情形2.1. $(2n-1)(\bmod(N-1)) = 1$. 设

$$S_3 = \{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \dots, (v^{[2n-1]})^{\frac{N}{2}}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\frac{N}{2}}\}.$$

情形2.2. $(2n-1)(\bmod(N-1)) = 2$.

情形2.2.1. $N < n$. 设

$$S_3 = \{v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^{n-1}, ((v^{[2n-2]})^{n-1})^{n-2}, \dots, (((v^{[2n-2]})^{n-1}) \dots)^{n-(N-2)}\}.$$

情形2.2.2. $N = 2n - 2$. 设

$$S_3 = \{v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^1, (v^{[2n-2]})^2, (\overline{v^{[2n-2]}})^2, (v^{[2n-2]})^3, (\overline{v^{[2n-2]}})^3, \dots, (v^{[2n-2]})^{n-2}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{n-2}, (v^{[2n-2]})^{n-1}\}.$$

情形2.3. $(2n-1)(\bmod(N-1)) = 3$. 设

$$S_3 = \{v^{[2n-2]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{2+n-N}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{3+n-N}, \dots, (\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2}\}.$$

情形2.4. $(2n-1)(\bmod(N-1)) = 4$. 设

情形2.4.1. $N < n$. 设

$$S_3 = \{v^{[2n-4]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^{4+n-N}, (v^{[2n-2]})^{5+n-N}, \dots, (v^{[2n-2]})^{n-1}\}.$$

情形2.4.2. $N = 2n - 4$. 设

$$S_3 = \{v^{[2n-4]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^3, (v^{[2n-2]})^4, (\overline{v^{[2n-2]}})^4, (v^{[2n-2]})^5, (\overline{v^{[2n-2]}})^5, \dots, (\overline{v^{[2n-2]}})^{n-2}, (v^{[2n-2]})^{n-1}\}.$$

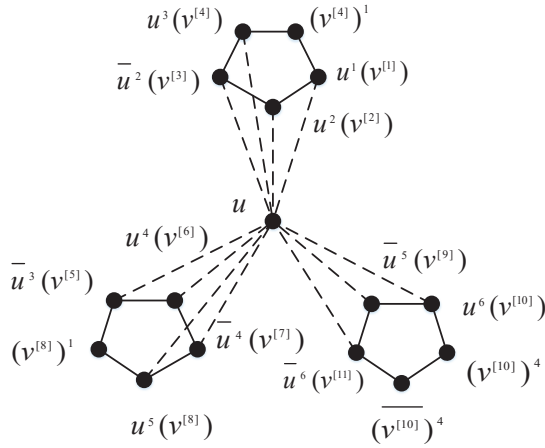
情形2.5. $(2n-1)(\bmod(N-1))$ 是奇数(除了1和3). 设

$$S_3 = \{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \dots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N + 2n - \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N + 2n - \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2}, \dots, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 1}\}.$$

情形2.6. $(2n-1)(\bmod(N-1))$ 是偶数(除了0, 2和4). 设

情形2.6.1. $N < n$. 设

$$S_3 = \{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \dots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]},$$

图 3-3 AQ_6 中的一个 C_5 结构割

$$\begin{aligned} & \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \\ & \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \dots, \\ & \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}} \}. \end{aligned}$$

情形2.6.2. $n \leq N \leq 2n - 6$.

情形2.6.2.1. $n = N - 1$. 设

$$\begin{aligned} S_3 = \{ & v^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}, v^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2}, \dots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \\ & \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}} \}. \end{aligned}$$

情形2.6.2.2. $n \neq N - 1$. 设

$$\begin{aligned} S_3 = \{ & v^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}, v^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2}, \dots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, \\ & \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \\ & \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \\ & \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \\ & \dots, \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \overline{((v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}}, \\ & \overline{(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}} \}. \end{aligned}$$

当 N 是奇数或者 $(2n - 1) \bmod (N - 1) = 0$ 时, 我们设 $S = S_1 \cup S_2$, 否则设 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. 根据扩展立方体的定义, S 中每个元素的导出子图和 C_N 同构且 $|S| = \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$. 设 $Y(S) = \cup_{f \in S} f$. 因为 $AQ_n - Y(S)$ 是不连通的且它的一个连通分支是一个平凡图, 所以 $\kappa(AQ_n, C_N) \leq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$. \square

图 3-3 展示了 AQ_6 中的一个 C_5 结构割。

引理 3.20. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq N \leq 2n - 1$ 时, 设 F_n 是 AQ_n 中的一个 C_N -结构集。如果 $AQ_n - V(F_n)$ 中存在一个孤立顶点, 那么 $|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$ 。

证明. 设 u 是 AQ_n 中任意一个顶点。根据扩展立方体的定义, 引理3.1和引理3.2, u 的任意 N 个邻居顶点都不能形成一个 C_N 并且 F 中的每个元素最多包含 $N - 1$ 个 $N(u)$ 中的顶点。因此, $|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$ 。 \square

引理 3.21. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq N \leq 2n - 1$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, C_N) \geq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$ 。

证明. 我们将通过反证法来证明这个引理。设 F_n^* 是 AQ_n 中的一个 C_N -结构集且 $|F_n^*| \leq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil - 1$ 。如果 $AQ_n - V(F_n^*)$ 是不连通的, 那么我们设 R 是 $AQ_n - V(F_n^*)$ 中的最小的一个连通分支。此外 $|V(F_n^*)| \leq N \times (\lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil - 1)$ 。根据引理3.2, 当 $n \geq 6$ 时, 我们有 $N \times (\lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil - 1) < 4n - 8$, 因此 $|V(R)| = 1$ 。进一步, 我们假设顶点 $u \in V(R)$ 。根据引理3.20, $|N(u) \cap V(F_n^*)| \leq 2n - 2 < 2n - 1$, 这意味着 $AQ_n - V(F_n^*)$ 中的顶点 u 至少存在一个邻居顶点。因此, 我们有 $|V(R)| \geq 2$, 矛盾。所以 $AQ_n - V(F_n^*)$ 是连通的, 引理成立。 \square

根据引理3.19和引理3.21, 我们下面的定理。

定理 3.8. 当 $n \geq 6$ 且 $4 \leq N \leq 2n - 1$ 时, 有 $\kappa(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$ 。

3.5 扩展立方体的容错能力分析

接下来, 我们将比较扩展立方体在传统连通度和结构连通度下所能容忍的故障顶点数, 以此来分析扩展立方体在结构连通度下的容错能力。

表 3-1 传统连通度和结构连通度所能容忍的故障顶点数

n	$\kappa(AQ_n)$	$\kappa(AQ_n, K_{1,3})$	$\kappa(AQ_n, K_{1,6})$	$\kappa(AQ_n, P_7)$	$\kappa(AQ_n, C_5)$
6	11	12	21	14	15
8	15	16	28	21	20
10	19	20	35	21	25
20	39	40	70	42	50
50	99	100	175	105	125

从表3-1可以看出, 结构 H 发生故障对扩展立方体的影响相比于传统连通度要大得多。尤其当结构 $H = K_{1,6}$ 时, 随着维数 n 的变大, 故障结构 $K_{1,6}$ 影响的顶点数接近于传统连通度的2倍。

3.6 $K_{1,M}$ -子结构连通度下的容错路由算法

相对于结构 P_L 和 C_N ， $K_{1,M}$ 的直径较小，从而 $K_{1,M}$ 的结构更具有实际意义。因此在本节中，我们将给出扩展立方体在 $K_{1,M}$ -子结构连通度下的容错路由算法。同时我们将给出相应的算法分析。

Choudum等人在 [11]中给出了扩展立方体中的任意两个顶点间的路由算法，因为我们要在后面的容错路由算法中调用该算法，所以在给出容错路由算法之前，我们先给出两个顶点间的路由算法，并且我们将这个算法命名为AQRouting。

算法 1 AQRouting

输入：一个 n -维的扩展立方体 AQ_n ，两个顶点 $u, v \in V(AQ_n)$ 。

输出：一条 AQ_n 中从 u 到 v 的路径。

```

1:  $P \leftarrow \{u\}$ ;
2:  $tag = u \oplus_2 v$ ;
3: while  $tag \neq 0$  do
4:   从左向右扫描 $tag$ ，找到 $tag$ 中第一个为1的二进制位，设为 $tag_i = 1$ ;
5:   if  $tag_{i+1} = 0$  then
6:      $u \leftarrow u^i$ ;
7:      $P \leftarrow P \cup \{u\}$ ;
8:   else
9:      $u \leftarrow \bar{u}^i$ ;
10:     $P \leftarrow P \cup \{u\}$ ;
11:  end if
12:   $tag = u \oplus_2 v$ ;
13: end while
14:  $P \leftarrow P \cup \{v\}$ ;
15: return  $P$ ;
```

这里的 $tag = u \oplus_2 v$ 表示 u 和 v 的每一个二进制位相加，然后对2取模， tag 是一个 n 位的二进制串。例如， $u = 01001$ ， $v = 11010$ ，则 $tag = u \oplus_2 v = 10011$ 。

因为算法AQRouting通过循环对顶点 u 和顶点 v 的每个二进制位进行运算然后进行相应操作，因此算法AQRouting的时间复杂度是 $O(n)$ 。

在给出扩展立方体两个无故障顶点之间的容错路由算法AQFRouting之前，我们先给出两个子算法AQMapping和AQBinding。算法AQMapping主要基于扩展立方体的构造方式，引理2.1和引理2.2。根据定义2.1，子图 H 中的顶点 u 在子图 S 中只有2个邻接顶点 u^i 和 \bar{u}^i 。因此算法AQMapping的第2 ~ 3行的时间复杂度为 $O(n)$ ；而 u 在 H 中的顶点个数为 $2n - 3$ ，我们可以很容易地得到算法5 ~ 9行的时间复杂度为 $O(n)$ ；10 ~ 16行的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。所以，算法AQMapping的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

算法 2 AQMapping

输入: 一个 n -维的扩展立方体 AQ_n 的两个 $(n-1)$ -维子图 H 和 S ; 一个故障集合 $F \subset V(AQ_n)$, 满足对于任意一个元素 $x \in F$, $x \cong K_{1,M}$, 其中 $1 \leq K \leq 6$, 且 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$; 一个无故障顶点 $u \in V(H-F)$ 。

输出: 一条 AQ_n 中从顶点 u 到子图 S 的无故障路径。

```

1: function AQMapping( $u, H, S, F$ )
2:   for  $v \in N_{S-F}(u)$  do
3:     return ( $u, v$ );
4:   end for
5:   for  $v \in N_{H-F}(u)$  do
6:     if  $x \in N_{S-F}(v)$  then
7:       return ( $u, v, x$ );
8:     end if
9:   end for
10:  for  $v \in N_{H-F}(u)$  do
11:    for  $x \in N_{H-F}(v)$  do
12:      if  $y \in N_{S-F}(x)$  then
13:        return ( $u, v, x, y$ );
14:      end if
15:    end for
16:  end for
17:  for  $v \in N_{H-F}(u)$  do
18:    for  $x \in N_{H-F}(v)$  do
19:      for  $y \in N_{H-F}(x)$  do
20:        if  $z \in N_{S-F}(y)$  then
21:          return ( $u, v, x, y, z$ );
22:        end if
23:      end for
24:    end for
25:  end for
26: end function

```

在算法AQBinding中, 给定一个子图 $G \subset AQ_n$, 两条无故障路径 P 和 Q , 其中 $u = P[1]$, $v = Q[1]$, 一个故障集合 $F \subset V(AQ_n)$, 满足对于任意一个元素 $x \in F$, $x \cong K_{1,M}$, 其中 $1 \leq K \leq 6$, 且 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$, 以及2个无故障的顶点 $u, v \in V(AQ_n)$ 。我们将会在 $AQ_n - F$ 中构造一条从 u 到 v 的路径。因为该算法将会在算法AQFRouting中被调用, 所以我们将会在给出算法AQFRouting之后再来分析算法AQBinding中的第2 ~ 5、13和19行的时间复杂度。在算法AQBinding的第6和第7行, 选择两条路径 P 和 Q 中的公共顶点的时间复杂度是 $O(n)$, 连接 P 和 Q 两条路径的子路径花费的时间是 $O(1)$ 。在算法的10 ~ 12和16 ~ 18行, 返回一条直接由 P (或 Q) 构成的路径的时间复杂度为 $O(1)$ 。

算法 3 AQBinding

输入: 一个子图 $G \subset AQ_n$; 两条无故障路径 P 和 Q , 其中 $u = P[1]$, $v = Q[1]$; 一个故障集合 $F \subset V(AQ_n)$, 满足对于任意一个元素 $x \in F$, $x \cong K_{1,M}$, 其中 $1 \leq K \leq 6$, 且 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$; 2个无故障的顶点 $u, v \in V(AQ_n)$ 。

输出: 一条 $AQ_n - F$ 中的从 u 到 v 的路径。

```

1: function AQBINDING1( $G, F, u, v, P, Q$ )
2:   if  $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$  then
3:      $S \leftarrow \text{AQFRouting}(G, F, P[-1], Q[-1]);$ 
4:     return ( $P, \text{Path}(S, S[2], S[-2]), Q^{-1}$ );
5:   end if
6:   找到  $P$  和  $Q$  中第一个公共顶点  $x$ ;
7:   return ( $\text{Path}(P, u, x), \text{Path}(Q^{-1}, x \text{ 的后一个顶点}, v)$ );
8: end function
9: function AQBINDING2( $G, F, u, v, Q$ )
10:  if  $u \in V(Q)$  then
11:    return  $\text{Path}(Q, u, v)$ ;
12:  end if
13:  return ( $\text{AQFRouting}(G, F, u, Q[-1]), \text{Path}(Q^{-1}, Q^{-1}[2], Q^{-1}[-1])$ );
14: end function
15: function AQBINDING3( $G, F, u, v, P$ )
16:  if  $v \in V(P)$  then
17:    return  $\text{Path}(P, u, v)$ ;
18:  end if
19:  return ( $\text{Path}(P, P[1], P[-2]), \text{AQFRouting}(G, F, P[-1], v)$ );
20: end function

```

接下来, 我们将给出主算法AQFRouting。

算法 4 AQFRouting

输入: 一个 n -维的扩展立方体 AQ_n ; 一个故障集合 $F \subset V(AQ_n)$, 满足对于任意一个元素 $x \in F$, $x \cong K_{1,M}$, 其中 $1 \leq K \leq 6$, 且 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$; 2个无故障的顶点 $u, v \in V(AQ_n)$ 。

输出: 一条 $AQ_n - F$ 中的从 u 到 v 的路径。

```

1: function AQFRouting( $AQ_n, F, u, v$ )
2:  if  $(u, v) \in E(AQ_n)$  then
3:    return  $(u, v)$ ;
4:  else if  $n = 2$  then
5:    return ( $AQ_n - F$  中  $u$  到  $v$  的一条无故障路径);
6:  else if  $|F| = 0$  then
7:    return  $\text{AQRouting}(AQ_n, u, v)$ ;
8:  end if
9:   $F_0 \leftarrow F \cap V(AQ_{n-1}^0), F_1 \leftarrow F \cap V(AQ_{n-1}^1);$ 
10:   $m \leftarrow \min\{|F_0|, |F_1|\};$ 
11:  for  $i \in \{0, 1\}$  do
12:     $B_0 \leftarrow AQ_{n-1}^i, B_1 \leftarrow AQ_{n-1}^{1-i};$ 
13:    if  $u, v \in V(B_0)$  and  $|F_i| = m$  then
14:      return  $\text{AQFRouting}(B_0, F_i, u, v)$ ;
15:    else if  $u, v \in V(B_0)$  and  $|F_{1-i}| = m$  then
16:       $P \leftarrow \text{AQMapping}(u, B_0, B_1, F);$ 
17:       $Q \leftarrow \text{AQMapping}(v, B_0, B_1, F);$ 
18:      return  $\text{AQBinding1}(B_1, F_{1-i}, u, v, P, Q)$ ;

```

```

19:     else if  $u \in V(B_0)$  and  $v \in V(B_1)$  and  $|F_{1-i}| = m$  then
20:          $P \leftarrow \text{AQMapping}(u, B_0, B_1, F)$ ;
21:         return  $\text{AQBinding3}(B_1, F_{1-i}, u, v, P)$ ;
22:     else if  $u \in V(B_0)$  and  $v \in V(B_1)$  and  $|F_i| = m$  then
23:          $P \leftarrow \text{AQMapping}(v, B_1, B_0, F)$ ;
24:         return  $\text{AQBinding2}(B_0, F_i, u, v, P)$ ;
25:     end if
26: end for
27: end function

```

下面，我们将分析算法AQFRouting和算法AQBinding的时间复杂度。

在算法AQFRouting的第2 ~ 5行，构造一条无故障路径的时间复杂度是 $O(1)$ 。在算法AQFRouting的第6 ~ 7行，因为其调用算法AQRouting，所以构造一条无故障路径的时间复杂度是 $O(n)$ 。而在第9、10和12行，构建 F_0 、 F_1 、 m 、 B_0 和 B_1 的时间复杂度是 $O(1)$ 。

我们用 $U(u, v, n)$ 来表示在 $B_n - F$ 中找到顶点 u 到 v 的一条无故障路径的时间复杂度。进一步，设

$$T(n) = \max\{U(u, v, n) | u, v \in V(AQ_n) \setminus F \text{ 且 } u \neq v\}. \quad (3.1)$$

显然，我们有 $T(2) = O(1)$ 。在算法AQFRouting的第13和14行，我们有

$$T(n) \leq T(n-1) + O(1). \quad (3.2)$$

在算法AQFRouting的第15 ~ 24行，我们有

$$T(n) \leq T(n-1) + O(n^3). \quad (3.3)$$

因此，基于不等式3.2，3.3和定义2.1，我们有

$$T(n) \leq O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3). \quad (3.4)$$

所以，根据不等式3.4，在最坏情况下和故障顶点数为 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$ 时，算法AQFRouting的时间复杂度为 $T(n) \leq O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3)$ 。根据前面对AQBinding算法的分析，我们也可以得到算法AQBinding的时间复杂度为 $O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3)$ 。

为了分析由算法AQFRouting所构建的容错路径的最大长度，我们给出了以下的定理：

定理 3.9. 当故障顶点集 F 满足 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$ 时，设 $m = \lceil \log_2 |F| \rceil$ ，则算法AQFRouting所构建的容错路径的最大长度不超过 $8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1$ 。

证明. 我们用 $M(n)$ 来表示由算法AQFRouting在 AQ_n 中所构建的在两个无故障顶点 u 和 v 之间的无故障路径的长度。显然，如果 $|F| = 0$ ，我们有 $M(n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ 。如果 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$ ，在算法的13 ~ 14行，我们有 $M(n) \leq M(n-1)$ ；在算法的15 ~ 18行，我们有 $M(n) \leq M(n-1) + 8$ ；在算法的19 ~ 24行，我们有 $M(n) \leq M(n-1) + 4$ ；设 $m = \lceil \log_2 |F| \rceil$ ，则

$$\begin{aligned} M(n) &\leq \max\left\{\sum_{i=1}^m 8 + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right\} \\ &\leq \max\left\{8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right\} \\ &\leq 8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

因此，在最坏情况下，根据不等式3.5，当 $|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$ 且 $m = \lceil \log_2 |F| \rceil$ 时，由算法AQFRouting所构建的在两个无故障顶点 u 和 v 之间的容错路径的长度为 $M(n) \leq 8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1$ 。 \square

3.7 模拟实验

在本节中，我们将通过模拟实验来比较算法AQFRouting和传统的深度优先算法DFS以及广度优先算法BFS 的性能，我们将通过Python语言来实现，版本为3.6，实验环境是一台处理器为Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz 2.40，内存8GB的计算机。我们将通过这台计算机模拟不同的算法并给出实验结果。

我们研究了扩展立方体中多种不同的故障结构，其中包括二分图、路径和圈。在实验中我们将对顶点数最多的二分图 $K_{1,6}$ 进行实验， $K_{1,6}$ 结构涉及的顶点较多，且也是实际中最容易发生故障的结构。我们将在实验中找到两个无故障顶点之间的无故障路径，根据我们的证明结果，我们设置故障顶点个数小于等于 $7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$ ，这样可以保证每个无故障顶点至少含有一个无故障邻居顶点。因为故障是以故障结构的形式存在，所以我们在实验中不使用简单的随机函数random来生成故障顶点，因

为这样生成的故障顶点可能不以故障结构的形式存在，而是以单独的故障顶点形式存在，这样不符合子结构连通度的定义。所以我们在生成随机故障顶点的过程中控制生成故障顶点的形式，使其都是 $K_{1,6}$ 或者 $K_{1,6}$ 的子结构。

在实验中，我们将比较算法AQFRouting与DFS和BFS在扩展立方体上的实验效果，主要考查生成一条无故障路径的时间和长度。这里的深度优先算法在找到一条无故障路径的时候即停止，不会找到所有符合条件的无故障路径，然后比较无故障路径的长度大小，取其中最短路径来和算法AQFRouting及BFS的结果比较。在实验过程中，我们将会有5个实验参数，分别是：

- 扩展立方体的维数 n ；
- 无故障源顶点 u ；
- 无故障目的顶点 v ；
- 故障顶点个数 f ；
- 故障顶点集合 F 。

为了保证实验的准确性，每次实验对于三个算法都输入相同的参数，然后比较运算结果。

实验中我们一共进行了5组实验，我们用 $E(i, n, u, v, f)$ 来表示实验数据，其中 i 表示实验的组数， n 表示维数， u 表示无故障源顶点， v 表示无故障目的顶点， f 表示故障顶点个数。我们所采用的5组实验数据分别如下：

- $E(1, 5, 0, 17, 6)$
- $E(2, 7, 0, 20, 14)$
- $E(3, 9, 0, 332, 27)$
- $E(4, 10, 0, 712, 30)$
- $E(5, 13, 8, 987, 40)$

实验结果如图3-4和3-5所示。

从图 3-4我们可以看到，算法AQFRouting、DFS和BFS在维数较小的情况下找到一条无故障路径所花费的时间相似（如图中的5维和7维）。但是随着维数和故障顶点数的增加，DFS和BFS所花费的时间远比算法AQFRouting多，比如当维数 $n = 13$ 时，算法DFS所花费的时间是算法AQFRouting的10倍左右，而算法BFS所花费的时间也

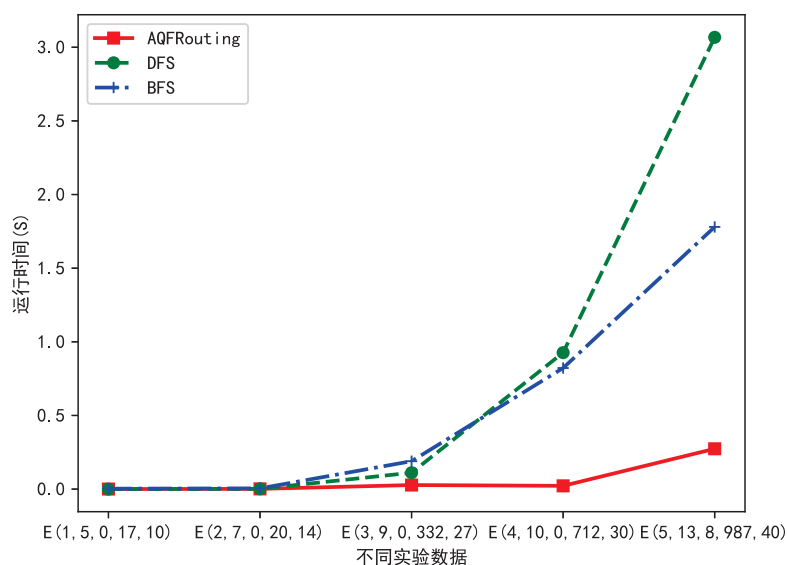


图 3-4 算法AQFRouting、DFS和BFS构造一条无故障路径所花费的时间

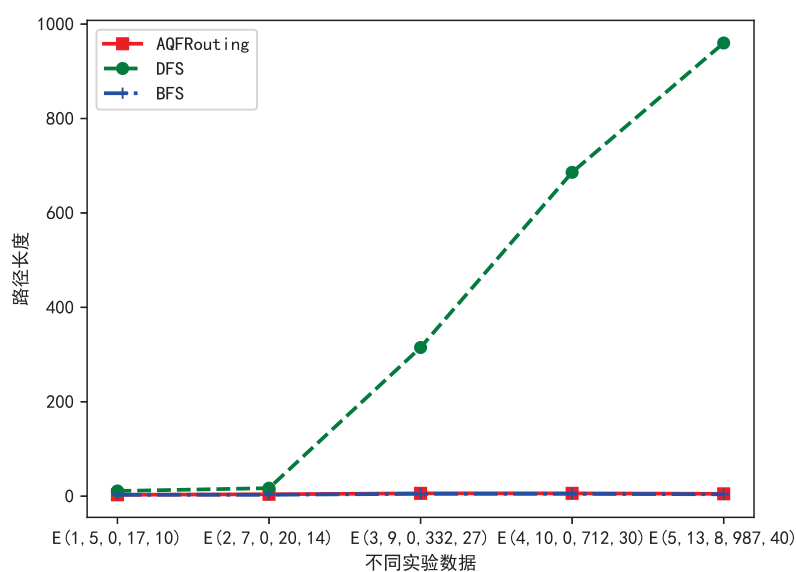


图 3-5 算法AQFRouting、DFS和BFS构造一条无故障路径长度

是算法AQFRouting的5倍左右。原因在于维数为 n 的扩展立方体所包含的顶点个数为 2^n 。DFS和BFS会逐个顶点去检查其是否是无故障顶点，因为维数越大，顶点个数越多，所以算法DFS和BFS的深度会越深，所花费的时间也越多。

根据广度优先算法的特点，BFS可以找到最短的无故障路径，从图 3-5可以看出，BFS和AQFRouting所构造的最短路径长度相近。对于DFS，只有在维数和故障

顶点数很小的时候，DFS构造的路径长度才会与AQFRouting 和BFS两个算法相近，比如维数等于5的时候。然而随着维数的扩大，算法AQFRouting所构造的无故障路径长度并没有产生太大的变化，但是算法DFS所构造的路径长度却急剧增长。我们认为原因和构造无故障路径所花费的时间增长类似，也是由于维数越大，顶点个数越多，所以算法DFS的深度会越深，所构造的路径也就越长。

综上所述，我们设计的算法AQFRouting所构造的无故障路径的长度接近于BFS构造的最短的无故障路径，但是算法的时间要远小于BFS，而无论是构造时间还是构造长度算法AQFRouting都远远优越于深度优先算法DFS。

3.8 本章小结

本章研究了 n -维扩展立方体 AQ_n 的 H -结构连通度 $\kappa(AQ_n, H)$ 和 H -子结构连通度 $\kappa^s(AQ_n, H)$ ，其中 $H \in \{K_{1,M}P_L, C_N\}$ ，且 $1 \leq M \leq 6, 1 \leq L \leq 2n-1, 3 \leq N \leq 2n-1$ 。结果总结如下：

$$(1) \kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \begin{cases} 2n-1 & \text{其中 } n \geq 4, K_{1,M} = K_1, \\ \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil & \text{其中 } n \geq 4, 1 \leq M \leq 3, \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil & \text{其中 } n \geq 6, 4 \leq M \leq 6. \end{cases}$$

$$(2) \kappa(AQ_n, P_L) = \kappa^s(AQ_n, P_L) = \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \quad \text{其中 } n \geq 3, 1 \leq L \leq 2n-1.$$

$$(3) \kappa^s(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil \quad \text{其中 } n \geq 3, 3 \leq N \leq 2n-1.$$

$$(4) \kappa(AQ_n, C_N) = \begin{cases} n-1 & \text{其中 } n \geq 6, N=3, \\ \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil & \text{其中 } n \geq 6, 4 \leq N \leq 2n-1. \end{cases}$$

从结果中我们可以看出，结构 H 发生故障对扩展立方体的影响相比于传统连通度要大得多。尤其当结构 $H = K_{1,6}$ 时，随着维数 n 的变大，在保证扩展立方体可靠通信的情况下，扩展立方体可以容许的故障顶点数在理想情况下几乎是传统连通度的两倍。同时我们给出了在 AQ_n 中寻找两个无故障顶点之间的无故障路径的容错路由算法AQFRouting，该算法的时间复杂度为 $O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3)$ ，且该算法所构造的最大无故障路径长度不超过 $8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1$ ，其中 $m = \lceil \log_2 |F| \rceil$ ， F 为故障顶点集合。模拟实验结果表明，算法AQFRouting可以实现两个无故障顶点之间的正常通信。

相关成果发表在SCI源期刊《Journal of Internet Technology》上（第一作者，2020年发表）。

第四章 扩展立方体的2-额外诊断度和诊断算法

在互连网络的容错性研究中, 诊断度是衡量网络可靠性的一个重要指标, 诊断度是指当网络中的顶点发生故障时, 最多可以被诊断出来的故障顶点数目。文献 [55]和 [56]给出了两类网络的额外连通度和额外诊断度之间的关系, 但是扩展立方体不满足这两篇文献中给出的前提条件, 因此不能由文献 [55]和 [56]根据额外连通度直接得到扩展立方体的额外诊断度。在本章中, 我们证明了 n -维扩展立方体在 MM^* 模型下的2-额外诊断度是 $6n - 17$, 并给出了相应的诊断算法, 该算法可以帮助我们正确定位故障顶点来保障网络的正常运行。

4.1 预备知识

在给出扩展立方体在 MM^* 模型下的2-额外诊断度的证明和算法之前, 我们先给出扩展立方体的一些性质。

n -维扩展立方体 AQ_n 中的一对顶点 (u, v) 被称为 AQ_n 中的一个补对如果 $u = \bar{u}_n$ 。显然 AQ_n 中包含 2^{n-1} 个两两不相交的补对。

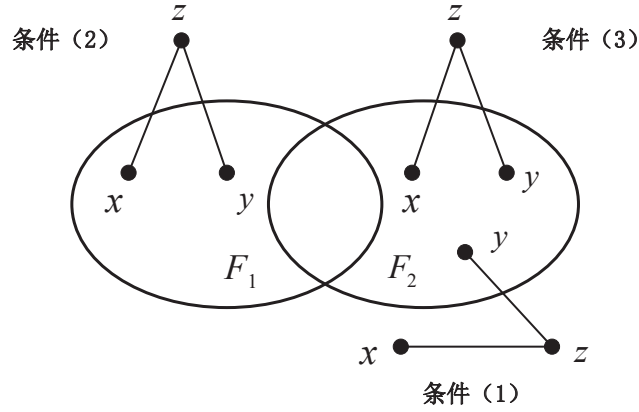
引理 4.1. ^[16] 设 $AQ_n = L \odot R$, 其中 $L \cong AQ_{n-1}^0$, $R \cong AQ_{n-1}^1$ 。如果 u 和 v 是 L (或 R)中的2个顶点且 (u, v) (即, $v = \bar{u}_{n-1}$)是 L (或 R)中的一个补对, 那么 (u, v) 在 R (或 L)中有两个相同的邻居顶点。否则, 如果 (u, v) 不是 L (或 R)中的一个补对, 则 (u, v) 在 R (或 L)中没有相同的邻居顶点。

引理 4.2. ^[18] 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, s, t, u 是 AQ_n 中的5个顶点, 如果 AQ_n 在 x, y, s, t, u 包含一个补对, 那么 $|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10n - 39$ 。

引理 4.3. ^[18] 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, s, t, u 是 AQ_n 中的5个顶点, 如果 AQ_n 在 x, y, s, t, u 包含两个补对, 那么 $|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10n - 35$ 。

引理 4.4. ^[18] 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, s, t, u, v 是 AQ_n 中的6个顶点, 如果 AQ_n 在 x, y, s, t, u, v 包含三个补对, 那么 $|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v\})| \geq 12n - 46$ 。

引理 4.5. ^[57] 对于顶点集合 $X \subset V(AQ_n)$, 其中 $|X| = k$, $0 \leq k \leq 2n - 1$, 那么 $|N_{AQ_n}(X)| \geq 2kn - \frac{3k(k+1)}{2} + 1$ 。

图 4-1 MM*模型下两个可区分的顶点集合 F_1 和 F_2

定理 4.1. ^[18] 设 S 是 AQ_n 的一个顶点子集, 其中 $|S| \leq 4n - 9$, $n \geq 4$ 。那么 $AQ_n - S$ 满足以下两个条件之一:

- (1) $AQ_n - S$ 是连通的;
- (2) $AQ_n - S$ 有两个分支, 其中一个为 K_1 , 另一个包含 $2^n - |S| - 1$ 个顶点。

定理 4.2. ^[18] 设 S 是 AQ_n 的一个顶点子集, 其中 $|S| \leq 6n - 18$, $n \geq 6$ 。那么, $AQ_n - S$ 满足以下四个条件之一:

- (1) $AQ_n - S$ 是连通的;
- (2) $AQ_n - S$ 有两个连通分支, 其中一个为 K_1 , 另一个包含 $2^n - |S| - 1$ 个顶点;
- (3) $AQ_n - S$ 有两个连通分支, 其中一个为 K_2 , 另一个包含 $2^n - |S| - 2$ 个顶点;
- (4) $AQ_n - S$ 有三个连通分支, 其中有两个是 K_1 , 且第三个包含 $2^n - |S| - 2$ 个顶点。

定义 4.1. ^[22] (1) 图 G 的一个 g -额外集是一个顶点的集合, 当从 G 中删除这个集合后, 每个连通分支所包含的顶点个数大于等于 $g + 1$ 。

(2) 图 G 的一个 g -额外割是 G 的一个 g -额外集, 将其删除将会导致 G 变为不连通的。

(3) 图 G 的 g -额外连通度, 记为 $\kappa_g(G)$, 是 g -额外割的最小基数。

文献 [58]和 [17]分别给出了扩展立方体的2-额外连通度 $\kappa_2(AQ_n)$ 和在MM*模型下的诊断度 $d(AQ_n)$ 。

定理 4.3. 当 $n \geq 9$ 时, $\kappa_2(AQ_n) = 6n - 17$ 。

定理 4.4. 当 $n \geq 5$ 时, $d(AQ_n) = 2n - 1$ 。

4.2 扩展立方体在MM*模型下的2-额外诊断度

引理 4.6. ^[49,59] 对于图 G 中的两个不同的顶点子集 $F_1, F_2 \subset V(G)$ 。 (F_1, F_2) 在MM*模型下是可区分的当且仅当下面三个条件中的一个成立 (见图4-1):

- (1) 存在 $x, z \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$ 和 $y \in (F_1 - F_2) \cup (F_2 - F_1)$, 使得 $xz, yz \in E(G)$;
- (2) 存在 $x, y \in F_1 - F_2$ 和 $z \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$, 使得 $xz, yz \in E(G)$;
- (3) 存在 $x, y \in F_2 - F_1$ 和 $z \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$, 使得 $xz, yz \in E(G)$ 。

定义 4.2. ^[51] (1) 在MM*模型下, 一个图 G 是 g -额外 t -可诊断的, 当且仅当对任意两个不同的 g -额外集 $F_1 \subseteq V(G), F_2 \subseteq V(G)$, 其中 $|F_1| \leq t, |F_2| \leq t$, 且 F_1 和 F_2 是可区分的。

(2) G 在MM*下的 g -额外诊断度, 记为 $t_M^g(G)$, 是 G 在 g -额外 t -可诊断下 t 的最大值。

引理 4.7. 对于 $n \geq 6$, $t_M^2(AQ_n) \leq 6n - 15$ 。

证明. 设 $S = \{u, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_{n-3}\}$, $F_1 = N(V(S))$ 且 $F_2 = N[(V(S))]$ 。根据引理2.2, 我们有 $|F_1| = 6n - 17$ 且 $|F_2| = N(V(S)) + |V(S)| = 6n - 14$ 。可得 $AQ_n[S]$ 是一个连通子图, $AQ_n - F_1(AQ_n - F_2)$ 中的任意一个连通分支的顶点数都大于等于3。于是, 我们有

$$|F_1| \leq 6n - 14, |F_2| \leq 6n - 14.$$

并且 F_1 和 F_2 都是 AQ_n 的2-额外集 (见图4-2)。

因为 $F_1 \Delta F_2 = V(S)$, 所以 $E[F_1 \Delta F_2, V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2)] = \emptyset$ 。根据引理4-1, (F_1, F_2) 在MM*下是不可区分的。由定义4.2, AQ_n 不是MM*下2-额外, $(6n - 14)$ -可诊断的, 因此 $t_M^2(AQ_n) \leq 6n - 15$ 。 \square

接下来, 我们证明 $t_M^2(AQ_n) \geq 6n - 15$ 。

引理 4.8. 对于 $n \geq 8$, $t_M^2(AQ_n) \geq 6n - 15$ 。

证明. 我们将用反证法来证明 $t_M^2(AQ_n) \geq 6n - 15$ 。假设 $t_M^2(AQ_n) \leq 6n - 16$ 。设 F_1 和 F_2 是两个不同的2-额外集且 $|F_1| = |F_2| = 6n - 15$ 。那么在 MM^* 模型下, F_1 和 F_2 是不可区分的。另外, 当 $n \geq 8$ 时, 有

$$\begin{aligned} |V(AQ_n)| - |F_1 \cup F_2| &\geq |V(AQ_n)| - |F_1| - |F_2| \\ &\geq |V(AQ_n)| - 2(6n - 15) \\ &\geq 2^n - 2(6n - 15) \\ &> 0. \end{aligned}$$

因此, $V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$ 。

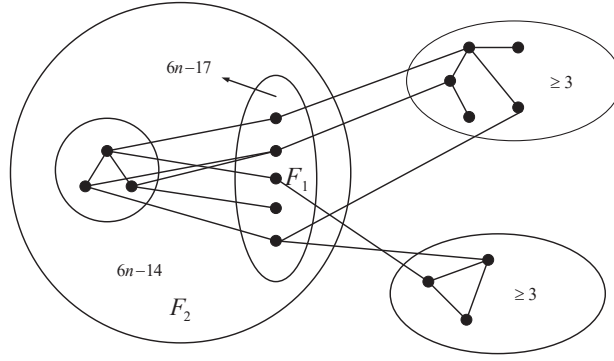
断言: $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 不包含孤立顶点。

假设在 $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 存在一个孤立顶点 w 。设 W 是 $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 中孤立顶点的集合, 并且 H 是 $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 的导出子图。因为 F_1 是 AQ_n 的一个2-额外集且 (F_1, F_2) 在 MM^* 模型下是不可区分的, 那么在 $F_2 - F_1$ 中存在唯一一个顶点 u 使得 $uw \in E(AQ_n)$ 。类似地, 因为 F_2 是 AQ_n 的一个2-额外集且 (F_1, F_2) 在 MM^* 模型下是不可区分的, 所以在 $F_1 - F_2$ 中存在唯一一个顶点 v 使得 $vw \in E(AQ_n)$ 。因为 AQ_n 是 $(2n-1)$ -正则图, 则 w 剩下的 $2n-3$ 个邻居顶点都在 $F_1 \cap F_2$ 中。此外, 因为还有其他边把 $F_1 \cap F_2$ 中的顶点与 W 外的其他顶点连接起来, 所以我们有下面的不等式:

$$\begin{aligned} (2n-3)|W| &\leq \sum_{s \in F_1 \cap F_2} |N(s)| \\ &= |F_1 \cap F_2| \times (2n-1) \\ &\leq (6n-16) \times (2n-1). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |W| &\leq \frac{(6n-16) \times (2n-1)}{2n-3} \\ &= \frac{(6n-16) \times (2n-3) + (6n-16) \times 2}{2n-3} \\ &= 6n-10 - \frac{14}{2n-3} \\ &\leq 6n-10. \end{aligned}$$

图 4-2 G 的两个2-额外集

假设 $V(H) = \emptyset$ ，我们有

$$\begin{aligned}
 |V(AQ_n)| &= |F_1 \cup F_2| + |W| \\
 &= |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| + |W| \\
 &\leq 2 \times (6n - 15) - (2n - 3) + 6n - 10 \\
 &= 16n - 37.
 \end{aligned}$$

当 $n \geq 8$ 时， $2^n > 16n - 37$ 。因此， $V(H) \neq \emptyset$ 。

因为 W 是 $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 中所有孤立顶点的集合，并且 H 是 $V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2)$ 的导出子图，所以 $N(V(H)) \cap W = \emptyset$ 。

假设 $N(V(H)) \cap (F_1 \Delta F_2) \neq \emptyset$ ，那么在 $V(H)$ 中存在一个顶点 z ，使得 z 在 $F_1 \Delta F_2$ 中至少有1个邻居顶点 y 。因为在 $V(H)$ 中的任意一个顶点在 $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 中都不是一个孤立的顶点，所以 z 在 $V(H)$ 中也存在一个邻居顶点 x 。因此， $x, z \in V(G) - (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$ ， $y \in F_1 \Delta F_2$ 且 $xz, yz \in E(AQ_n)$ 。根据引理4.6， F_1 和 F_2 是可区分的，这与 (F_1, F_2) 在 MM^* 模型下是不可区分的相矛盾。因此 $N(V(H)) \cap (F_1 \Delta F_2) = \emptyset$ 。

如果 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ，那么 $F_1 \Delta F_2 = F_1 \cup F_2$ 。所以， $N(V(H)) \cap F_1 = \emptyset$ 且 $N(V(H)) \cap F_2 = \emptyset$ 。进一步， $N(V(H)) \cap (F_1 \cup F_2 \cup W) = \emptyset$ 。因此 $V(AQ_n) = N(V(H)) \cup F_1 \cup F_2 \cup W$ ，这意味着 AQ_n 是不连通的，这与 AQ_n 是连通图相矛盾。因此， $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ 。

因为 $F_1 \neq F_2$ ，不失一般性，设 $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 。因为 F_2 是 AQ_n 的一个额外集，因此存在一个顶点 $u \in F_1 - F_2$ 使得 $uw \in E(AQ_n)$ 。因为 (F_1, F_2) 不满足引理4.6中的条件，所以 u 是 $F_1 - F_2$ 中使得 $uw \in E(AQ_n)$ 的唯一顶点。如果 $F_1 - F_2 = \emptyset$ ，那么 $F_2 \subseteq F_1$ ，所

以 $AQ_n - (F_1 \cup F_2) = AQ_n - F_1$ ，并且 w 是 $AQ_n - F_1$ 中的一个孤立顶点。这与 F_1 是 AQ_n 中的一个2-额外集相矛盾。因此， $F_2 - F_1 \neq \emptyset$ 。类似地，存在一个顶点 $v \in F_2 - F_1$ 使得 $vw \in E(AQ_n)$ 。当从 AQ_n 中删除 $F_2 \cap F_1$ 时，因为 $N(V(H)) \cap W = \emptyset$ 和 $N(V(H)) \cap (F_1 \Delta F_2) = \emptyset$ ，所以 $AQ_n - F_1 \cap F_2$ 是不连通的。显然 $AQ_n - (F_1 \cap F_2)$ 包含一个非 H 的连通分支 Y 且 $|V(Y)| \geq 4$ (如图4-3)。根据 $|V(Y)|$ 的大小，我们有以下两种情况：

情形1. $4 \leq |V(Y)| \leq 6$ 。因为 $N(V(Y)) \subseteq F_1 \cap F_2$ ，根据引理4.5，有 $|F_1 \cap F_2| \geq |N(V(Y))| \geq 6n - 15$ 。因为 $F_2 \cap F_1 \neq \emptyset$ ，我们有 $|F_2| = |F_1 \cap F_2| + |F_2 - F_1| \geq 6n - 15 + 1$ ，这与 $|F_2| \leq 6n - 15$ 相矛盾。因此， $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 不包含孤立顶点。

情形2. $|V(Y)| \geq 7$ 。因为 W 中的顶点在 F_1 和 F_2 中各仅有一个邻居顶点，所以 $|F_1 - F_2| \geq 3$ 或者 $|F_2 - F_1| \geq 3$ 。不失一般性，我们设 $|F_1 - F_2| \geq 3$ 。因为 $|F_1| = 6n - 15$ ，所以 $|F_1 \cap F_2| = |F_1| - |F_1 - F_2| \leq 6n - 18$ 。根据定理4.2， $AQ_n - F_1 \cap F_2$ 只包含一个顶点个数大于2的连通分支。但是当 $n \geq 8$ 时， $|H| > 2^n - 2(6n - 15) > 2$ ，且 $|V(Y)| > 2$ 。这意味着 $AQ_n - F_1 \cap F_2$ 中包含两个顶点个数大于2的连通分支，与定理4.2矛盾。因此， $AQ_n - (F_1 \cup F_2)$ 不包含孤立顶点。

对于顶点 $x \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$ ，根据断言， $N(x) \cap (V(G) - (F_1 \cup F_2)) \neq \emptyset$ 。因为 (F_1, F_2) 不满足引理4-1 中的条件，也就是说 x 在 $F_1 \Delta F_2$ 中没有邻居顶点。因为 x 是任意选取的，所以 $E[V(G) - (F_1 \cap F_2), F_1 \Delta F_2] = \emptyset$ 。因为 $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 和 F_2 是 AQ_n 的一个2-额外集，所以 $|F_1 - F_2| \geq 3$ 。因为 F_1 和 F_2 是两个不同的2-额外集，所以 $AQ_n - F_1$ 和 $AQ_n - F_2$ 的任意分量的顶点数都大于3。当从 AQ_n 中删除 $F_1 \cap F_2$ 时， $AQ_n - (F_1 \cap F_2)$ 是不连通的且其中的每个连通分支的顶点数都大于等于3。根据定义4.1(2)， $F_1 \cap F_2$ 是 AQ_n 的一个2-额外割。根据定义4.1(3)， $|F_1 \cap F_2| \geq 6n - 17$ 。那么， $|F_1| = |F_1 \cap F_2| + |F_1 - F_2| \geq 6n - 17 + 3 = 6n - 14 > 6n - 15$ ，矛盾。

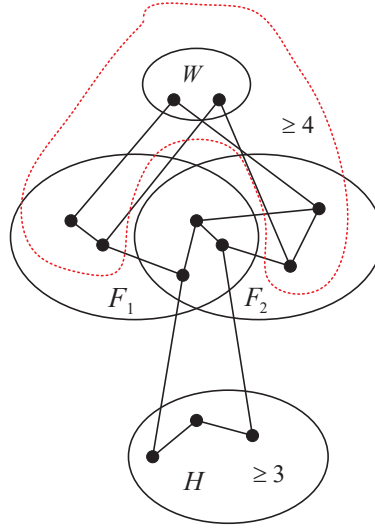
因此， $t_M^2(AQ_n) \geq 6n - 15$ 。 □

根据引理4.7和引理4.8，我们可以得到以下的定理：

定理 4.5. 对于 $n \geq 8$ ， $t_M^2(AQ_n) = 6n - 15$ 。

4.3 扩展立方体在MM*模型下的诊断算法

引理 4.9. 当 $n \geq 4$ 时，设 x, y, s, t, u, v 是 AQ_n 中的6个不同顶点，如果 AQ_n 在 x, y, s, t, u, v 中包含2个补对，那么 $|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v\})| \geq 12n - 48$ 。


 图 4-3 $G - F_1 \cap F_2$ 包含一个顶点个数大于等于4的连通分支

证明. 设 $(x, y), (s, t)$ 是 $AQ_n = L \odot R$ 中的2个补对, 其中 $L \cong AQ_{n-1}^0, R \cong AQ_{n-1}^1$ 。不失一般性, 我们设 $x, s \in V(L), y, t \in V(R)$ 。我们有下面几种情况:

情形1: $u, v \in L$ 或 $u, v \in R$ 中。不失一般性, 我们假设 $u, v \in L$, 根据引理2.1和引理2.3, 我们有 $|N_L(\{x, s, u, m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$ 且 $|N_L(\{y, t\})| = 4(n-1) - 8$ 。因此

$$\begin{aligned} |AQ_n(\{x, y, s, t, u, v\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, v\})| + |N_R(\{y, t\})| \\ &\geq (8n - 36) + (4n - 12) = 12n - 48. \end{aligned}$$

情形2: u, v 其中一个在 L 中, 另一个在 R 中。不失一般性, 我们假设 $u \in L, v \in R$ 。根据引理2.2, 我们有 $|N_L(\{x, s, u\})| = |N_R(\{y, t, v\})| \geq 6(n-1) - 17 = 6n - 23$, 因此

$$\begin{aligned} |AQ_n(\{x, y, s, t, u, v\})| &\geq |N_L(\{x, s, u\})| + |N_R(\{y, t, v\})| \\ &\geq 2(6n - 23) = 12n - 46. \end{aligned}$$

□

引理 4.10. 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, s, t, u, v, m 是 AQ_n 中的7个顶点, 如果 AQ_n 在 x, y, s, t, u, v, m 包含3个补对, 那么 $|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v, m\})| \geq 14n - 59$ 。

证明. 设 $(x, y), (s, t)$ 和 (u, v) 是 $AQ_n = L \odot R$ 中的3个补对, 其中 $L \cong AQ_{n-1}^0, R \cong AQ_{n-1}^1$ 。不失一般性, 我们设 $x, s, u \in V(L), y, t, v \in V(R)$ 。 m 属于 L 和 R 中的一个, 不失一般

性, 我们设 $m \in V(L)$ 。根据引理2.2和引理2.3, 我们有 $|N_L(\{x, s, u, m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$, $|N_L(\{y, t, v\})| = 6(n-1) - 17 = 6n - 23$ 。因此

$$\begin{aligned} |AQ_n(\{x, y, s, t, u, v, m\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, m\})| + |N_R(\{y, t, v\})| \\ &\geq (8n - 36) + (6n - 23) = 14n - 59. \end{aligned}$$

□

引理 4.11. 当 $n \geq 4$ 时, 设 x, y, s, t, u, v, m, n 是 AQ_n 中的8个顶点, 如果 AQ_n 在 x, y, s, t, u, v, m, n 中包含4个补对, 则 $|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v, m, n\})| \geq 16n - 72$ 。

证明. 设 (x, y) , (s, t) , (u, v) 和 (m, n) 是 $AQ_n = L \odot R$ 中的4个补对, 其中 $L \cong AQ_{n-1}^0$, $R \cong AQ_{n-1}^1$ 。不失一般性, 我们设 $x, s, u, m \in V(L)$, $y, t, v, n \in V(R)$ 。根据引理2.3, 我们有 $|N_L(\{x, s, u, m\})| = |N_R(\{y, t, v, n\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$, 因此

$$\begin{aligned} |AQ_n(\{x, y, s, t, u, v, m, n\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, m\})| + |N_R(\{y, t, v, n\})| \\ &\geq 2(8n - 36) = 16n - 72. \end{aligned}$$

□

对于 AQ_n 中的一个顶点集合 S , 设 $AQ_n = L \odot R$, 其中 $L \cong AQ_{n-1}^0$, $R \cong AQ_{n-1}^1$ 。设 $S_L = S \cap V(L)$ 且 $S_R = S \cap V(R)$ 。 $L - S_L$ 中的一个顶点 u 被称为是**孤单顶点**, 如果 S_R 包含 u 的两个在 R 中的邻居顶点。否则称 u 为**非孤单顶点**。

引理 4.12. 设 S 是 AQ_n 的一个顶点集合, 其中 $|S| \leq 6n - 15$, $n \geq 8$, 则 $AQ_n - S$ 包含一个顶点个数至少为 $2^n - 6n + 12$ 的连通分支。

证明. 设 $AQ_n = L \odot R$, 其中 $L \cong AQ_{n-1}^0$, $R \cong AQ_{n-1}^1$ 。设 $S_L = S \cap V(L)$, $S_R = S \cap V(R)$ 。对于 $L - S_L$ 和 $R - S_R$ 是否连通, 我们有下面几种情况:

情形1. $L - S_L$ 和 $R - S_R$ 都是不连通的。我们有 $2n - 3 \leq |S_L| \leq 4n - 12$ 且 $2n - 3 \leq |S_R| \leq 4n - 12$ 。根据定理4.1, 我们有以下几种情形。

情形1.1. $L - S_L(R - S_R)$ 包含两个分量, 其中一个孤立顶点, 另一个是包含顶

点个数为 $2^{n-1} - |S_L| - 1$ 的连通分支, 记为 $C_0(C_1)$ 。因为对于 $n \geq 8$, 所以

$$\begin{aligned}
 |V(C_0)| - (|S_R| + 1) &= 2^{n-1} - |S_L| - 1 - |S_R| - 1 \\
 &= 2^{n-1} - |S| - 2 \\
 &\geq 2^{n-1} - (6n - 15) - 2 \\
 &= 2^{n-1} - 6n + 13 > 0.
 \end{aligned}$$

那么 C_0 与 C_1 连通。因此, $AQ_n - S$ 有一个连通分支, 其顶点个数至少为:

$$(2^{n-1} - |S_L| - 1) + (2^{n-1} - |S_R| - 1) = 2^n - |S| - 2 = 2^n - 6n + 13.$$

情形2. $L - S_L$ 和 $R - S_R$ 都是连通的。设 $C_0 = L - S_L$ 且 $C_1 = R - S_R$ 。在 L 和 R 的 2^n 条边中, 最多有 $2|S|$ 条边与 S 中的顶点关联。因为 $2^n \geq 2(6n - 15)$, 所以 C_0 和 C_1 连通。于是, $AQ_n - S$ 是连通的, 且其顶点个数为 $2^n - 6n + 15$ 。

情形3. 在 $L - S_L$ 和 $R - S_R$ 中, 其中一个是连通的, 另一个是不连通的。不失一般性, 我们假设 $L - S_L$ 是不连通的, $R - S_R$ 是连通的。根据 S_L 中的故障顶点个数, 我们有下面几种情况。

情形3.1. $2n - 3 \leq |S_L| \leq 6n - 24$ 。根据定理4.2, $|S_L| \leq 6n - 24 = 6(n - 1) - 18$, 从而 $L - S_L$ 中存在一个顶点个数不少于 $2^{n-1} - |S_L| - 2$ 的连通分支, 记为 C_0 。又因为对于 $n \geq 6$,

$$\begin{aligned}
 |V(C_0)| - (|S_R|) &= 2^{n-1} - |S_L| - 2 - |S_R| \\
 &= 2^{n-1} - |S| - 2 \\
 &\geq 2^{n-1} - (6n - 15) - 2 \\
 &= 2^{n-1} - 6n + 13 > 0.
 \end{aligned}$$

则 C_0 与 $R - S_R$ 连通, 因此 $AQ_n - S$ 有一个连通分支, 其顶点个数至少为:

$$(2^{n-1} - |S_L| - 2) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 2 = 2^n - 6n + 13.$$

情形3.2. $6n - 23 \leq |S_L| \leq 6n - 15$ 。那么 $|S_R| \leq 8$ 。根据引理4.1, $L - S_L$ 中最多

有8个孤单顶点。根据孤单顶点的个数，我们有下面几种情况：

情形3.2.1. $L - S_L$ 中包含最多3个孤单顶点。显然， $L - S_L$ 含有至少 $2^{n-1} - |S_L| - 3$ 个非孤单顶点。因此， $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 3) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 2 = 2^n - 6n + 13.$$

情形3.2.2. $L - S_L$ 中包含4个孤单顶点。设 x, y, s, t 为 $L - S_L$ 中的4个孤单顶点。显然， $L - S_L$ 中含有 $2^{n-1} - |S_L| - 4$ 个非孤单顶点。根据引理2.3， $4 \leq |S_R| \leq 8$ ，对于 $n \geq 8$ ，有 $|N_L(\{x, y, s, t\})| \geq 8(n-1) - 24 = 8n - 32 > 6n - 15 - 4$ 。从而 x, y, s, t 中至少存在一个顶点，使得该顶点在 $L - S_L - \{x, y, s, t\}$ 中存在一个邻居顶点。因此， $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 3) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 3 = 2^n - 6n + 12.$$

情形3.2.3. $L - S_L$ 中包含5个孤单顶点，设 x, y, s, t, u 为 $L - S_L$ 中的5个孤单顶点。显然， $L - S_L$ 含有 $2^{n-1} - |S_L| - 5$ 个非孤单顶点。因为 $R - S_R$ 是连通的，所以 $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 5) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 5 = 2^n - 6n + 10.$$

根据引理4.1， x, y, s, t, u 包含一个或两个补边。根据引理4.3和引理4.2，对于 $n \geq 8$ ，有 $|N_L(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10(n-1) - 39 = 10n - 49 > 6n - 15 - 6$ ，于是 x, y, s, t, u 中至少存在一个顶点，使得该顶点在 $L - S_L - \{x, y, s, t, u\}$ 中存在一个邻居顶点。则 $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为 $2^n - 6n + 10 + 1 = 2^n - 6n + 11$ 。

不失一般性，假设顶点 u 存在一个邻居顶点，该邻居顶点属于 $L - S_L - \{x, y, s, t, u\}$ 。另外，根据引理2.3，因为 $4 \leq |S_R| \leq 8$ ，对于 $n \geq 8$ ，有 $|N_L(\{x, y, s, t\})| \geq 8(n-1) - 24 = 8n - 32 > 6n - 15 - 4$ ，从而 x, y, s, t 中至少存在一个顶点，使得该顶点也在 $L - S_L - \{x, y, s, t\}$ 中存在一个邻居顶点。因此， $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为 $2^n - 6n + 11 + 1 = 2^n - 6n + 12$ 。

情形3.2.4. $L - S_L$ 中包含6个孤单顶点，设 x, y, s, t, u, v 为 $L - S_L$ 中的6个孤单顶点。显然， $L - S_L$ 含有 $2^{n-1} - |S_L| - 6$ 个非孤单顶点。因为 $R - S_R$ 是连通的，所以 $AQ_n - S$ 中

存在一个连通分支，其顶点个数为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 6) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 5 = 2^n - 6n + 9.$$

根据引理4.1， x, y, s, t, u, v 包含2个或3个补边。根据引理4.4和引理4.9，对于 $n \geq 8$ ，有 $|N_L(\{x, y, s, t, u\})| \geq 12(n-1) - 48 = 12n - 60 > 6n - 15 - 6$ ，从而在 x, y, s, t, u, v 中至少存在一个顶点，使得该顶点在 $L - S_L - \{x, y, s, t, u, v\}$ 中存在一个邻居顶点。于是 $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为 $2^n - 6n + 9 + 1 = 2^n - 6n + 10$ 。

不失一般性，假设顶点 v 存在一个邻居顶点，使得该邻居顶点属于 $L - S_L - \{x, y, s, t, u, v\}$ 。另外，根据引理4.3和引理4.2，对于 $n \geq 8$ ，有 $|N_L(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10(n-1) - 39 = 10n - 49 > 6n - 15 - 6$ ，则在 x, y, s, t, u 中至少存在一个顶点，使得该顶点在 $L - S_L - \{x, y, s, t, u\}$ 中存在一个邻居顶点。于是 $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为 $2^n - 6n + 10 + 1 = 2^n - 6n + 11$ 。

不失一般性，假设顶点 u 存在一个邻居顶点，使得该邻居顶点属于 $L - S_L - \{x, y, s, t, u\}$ 。另外，根据引理2.3，因为 $4 \leq |S_R| \leq 8$ ，对于 $n \geq 8$ ，有 $|N_L(\{x, y, s, t\})| \geq 8(n-1) - 24 = 8n - 32 > 6n - 15 - 4$ ，则在 x, y, s, t 中至少存在一个顶点，使得该顶点也在 $L - S_L - \{x, y, s, t\}$ 中存在一个邻居顶点。因此， $AQ_n - S$ 中存在一个连通分支，其顶点个数为 $2^n - 6n + 11 + 1 = 2^n - 6n + 12$ 。

对于 $L - S_L$ 中包含7个或者8个孤单顶点的情况，证明方法与情形3.2.3和3.2.4类似，在此不再赘述。 \square

引理4.13可以由引理4.12直接得到。

引理 4.13. 设 S 是 AQ_n 的一个顶点子集，其中 $|S| \leq 6n - 15$ ， $n \geq 6$ 。那么， $AQ_n - S$ 满足以下7个条件之一：

- (1) $AQ_n - S$ 是连通的；
- (2) $AQ_n - S$ 有两个连通分支，其中一个为 K_1 ，另一个包含 $2^n - |S| - 1$ 个顶点；
- (3) $AQ_n - S$ 有两个连通分支，其中一个为 K_2 ，另一个包含 $2^n - |S| - 2$ 个顶点；
- (4) $AQ_n - S$ 有两个连通分支，其中一个包含3个顶点，另一个包含 $2^n - |S| - 3$ 个顶点；

(5) $AQ_n - S$ 有三个连通分支, 其中有两个是 K_1 , 且第三个包含 $2^n - |S| - 2$ 个顶点。

(6) $AQ_n - S$ 有三个连通分支, 其中一个是 K_1 , 另一个是 K_2 , 且第三个包含 $2^n - |S| - 3$ 个顶点。

(7) $AQ_n - S$ 有四个连通分支, 其中有三个是 K_1 , 且第三个包含 $2^n - |S| - 3$ 个顶点。

根据引理4.13, 我们可以得到下面的定理:

引理 4.14. 设 F 是 AQ_n 的一个额外集, 其中 $|F| \leq 6n - 15, n \geq 6$ 。那么, $AQ_n - S$ 满足以下2个条件之一:

(1) $AQ_n - F$ 是连通的;

(2) $AQ_n - F$ 包含两个连通分支, 其中一个包含一个顶点个数为3的连通分支, 另一个是包含顶点个数为 $2^n - |F| - 3$ 的连通分支。

定义 4.3. ^[60] 一个系统 $G = (V, E)$ 和由一个故障顶点集在 G 上产生的症状 σ 。设 $u \subseteq V$, u 的0-比较集 $C_0(u)$ 定义为 $C_0(u) = \{k \in V \mid \exists v \in V \text{ 使得 } \sigma(u, v)_k = 0\}$ 。 G 的0-比较子图, 记为 $T_0(G)$, 是 G 的一个子图, 定义为 $V(T_0(G)) \subseteq V$ 和 $E(T_0(G)) = \{(u, v) \in E \mid v \in C_0(u), u \in C_0(v)\}$ 。

引理 4.15. ^[60] 给定一个最多有 t 个故障顶点的系统 $G = (V, E)$ 和一个在 MM^* 模型下的 G 上的症状 σ 。

(1) 对于任意两个顶点 $u, v \in V, (u, v) \in E$, 其中 $v \in C_0(u), u \in C_0(v)$, 那么 u 和 v 有相同的状态 (故障或无故障)。

(2) 对于任意一个连通分支 $R \subseteq T_0(G)$, 那么在 R 中的所有顶点, 要么都是故障顶点, 要么都是无故障顶点。

(3) 如果 $T_0(G)$ 的连通分支 R 的顶点个数 $|V(R)| \geq t + 1$, 那么 R 中的所有顶点都是无故障的。

在参考文献 [60] 中的诊断算法后, 我们提出了扩展立方体在 MM^* 模型下 AQ_n 的2-额外, $(6n - 15)$ -可诊断算法。该算法主要基于引理4.14和引理4.15, 并且这个算法可以正确地诊断出 AQ_n 中的所有的故障顶点。对于一个扩展立方体, 我

们使用邻接矩阵去存储扩展立方体的结构。首先，我们给出一个深度优先的算法AQ-DFS-MM*来确定 AQ_n 中具有同一症状（顶点都为故障或者无故障）的连通分支。

算法 5 AQ-DFS-MM*

输入： 一个 n -维的扩展立方体 AQ_n 和故障顶点集 F 在 AQ_n 上生成的症状 σ ，其中 $|F| \leq 6n - 15, n \geq 8$ ，以及两个无故障的顶点 $u, v \in V(AQ_n)$ ，其中 $(u, v) \in E(AQ_n)$ 。

输出： 集合 T 。

```

1:  $T \leftarrow \{u, v\}$ ;
2: function DFS-MM*( $AQ_n, u, v$ )
3:   for  $j \in N_{AQ_n}(v) - T$  do
4:     if  $\sigma(u, j)_v = 0$  then
5:        $T \leftarrow T \cup \{j\}$ ;
6:       AQ-DFS-MM*( $AQ_n, v, j$ );
7:     end if
8:   end for
9: return  $T$ ;
10: end function
  
```

算法AQ-DFS-MM*的输入是两个无故障顶点 u, v 且 $(u, v) \in E(AQ_n)$ ，然后根据引理4.15来得到 $T_0(G)$ 。因为算法是通过递归的深度优先算法来实现，所以算法AQ-DFS-MM*的时间复杂度为 $O(N^2)$ ，其中 N 为扩展立方体的顶点个数。

算法 6 AQ-EXTRA-DIAG

输入： 一个 n -维的扩展立方体 AQ_n 和故障顶点集 F 在 AQ_n 上生成的症状 σ ，其中 $|F| \leq 6n - 15, n \geq 8$ 。

输出： 集合 T, F', H 。

```

1:  $T \leftarrow \emptyset, F' \leftarrow \emptyset, R \leftarrow V(AQ_n)$ ;
2: 在 $R$ 中选择2个无故障顶点 $u, v$ ，其中 $u, v \in E(AQ_n)$ ;
3:  $T \leftarrow \text{AQ-DFS-MM}^*(AQ_n, u, v)$ ;
4: if  $|T| \leq 3$  then
5:   重新选择2个无故障顶点 $m, n$ ，其中 $m, n \in E(AQ_n)$ ;
6:    $T \leftarrow T \cup \text{AQ-DFS-MM}^*(AQ_n, m, n)$ ;
7:    $F' \leftarrow R - T$ ;
8: return  $T, F'$ ;
9: end if
10:
11:  $R \leftarrow R - T$ ;
12: for 对于顶点 $x \in N_{AQ_n}(T) \cap R$ ,  $y, r \in T$ ，其中 $(x, r) \in E(AQ_n)$ 和 $(y, r) \in E(AQ_n)$  do
13:   if  $\sigma(x, y)_r = 1$  then
14:      $F' = F' \cup \{x\}$ ;
15:   end if
16: end for
17:  $R = R - F'$ ;
18:  $T \leftarrow T \cup R$ ;
19: return  $T, F'$ ;
  
```

因为算法AQ-EXTRA-DIAG主要以引理4.14为基础，因此该算法主要分为2种情况：（1） $AQ_n - F$ 是不连通的，根据引理4.14，且在第一次调用算法AQ-DFS-MM*时，选取的是小的无故障连通分支 C 且 $|C| = 3$ ，调用算法AQ-DFS-MM*可以将 C 的所有无故障顶点都诊断出来，然后再次调用算法AQ-DFS-MM*，这次可以得到另一个更大的无故障连通分支 H ，且 $|H| = 2^n - |F| - 3$ 。这样我们就可以得到所有的无故障顶点，因此剩下的就都是故障顶点；（2）我们通过调用算法AQ-DFS-MM*得到一个连通分支 H ，其顶点个数大于3，根据引理4.14， $AQ_n - F$ 只存在1个无故障顶点个数大于3的连通分支，因此剩下最多只有3个无故障顶点。我们通过与 H 相邻的顶点来判断其是否是故障顶点，如果该顶点不是故障顶点，则它属于无故障顶点。这样我们可以将所有故障顶点和无故障顶点诊断出来。

因为算法AQ-EXTRA-DIAG的时间复杂度主要消耗在调用算法AQ-DFS-MM*上，且算法AQ-EXTRA-DIAG的第12 – 16行的最大时间复杂度为 $O(n^2)$ 。所以算法AQ-EXTRA-DIAG的时间复杂度是 $O(N^2)$ ，其中 N 为扩展立方体的顶点个数。

4.4 模拟实验

在本节中，我们将通过模拟实验验证算法AQ-EXTRA-DIAG是否能够正确地找到所有故障顶点，我们将通过Python语言来实现，版本为3.6，实验环境是一台处理器为Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz 2.40，内存8GB的计算机。我们将通过这台计算机模拟不同的算法并给出实验结果。

在实验中，我们将通过随机生成故障顶点，且保证生成的故障顶点的集合是2-额外集。我们将有5组实验数据，实验参数包括

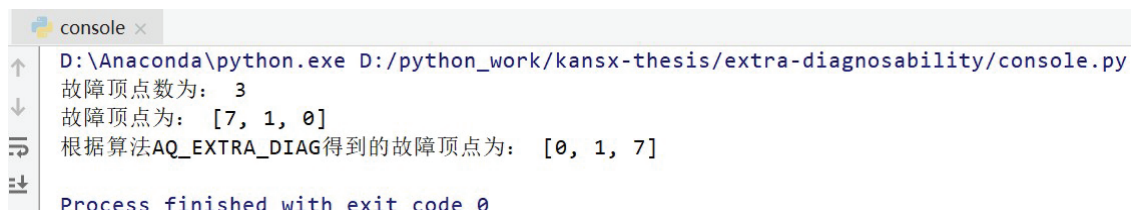
- AQ_n 的维数 n ;
- 故障顶点个数 f ;
- 随机生成故障顶点的集合 F （用十进制表示）;
- 实验运行时间的平均值 avg_t 。

具体的实验结果如下：

1. 第一组测试数据和结果 $E(3,3)$

- $n = 3$
- $f = 3$

- $F = [7, 1, 0]$
- $avg_t = 0.00020$



```

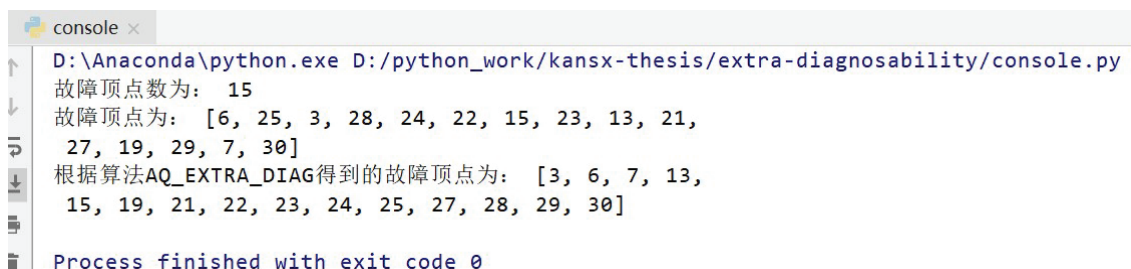
console x
D:\Anaconda\python.exe D:/python_work/kansx-thesis/extra-diagnosability/console.py
故障顶点数为: 3
故障顶点为: [7, 1, 0]
根据算法AQ_EXTRA_DIAG得到的故障顶点为: [0, 1, 7]
Process finished with exit code 0

```

图 4-4 第一组测试数据和结果

2. 第二组测试数据和结果 $E(5, 15)$

- $n = 5$
- $f = 15$
- $F = [6, 25, 3, 28, 24, 22, 15, 23, 13, 21, 27, 19, 29, 7, 30]$
- $avg_t = 0.00099$



```

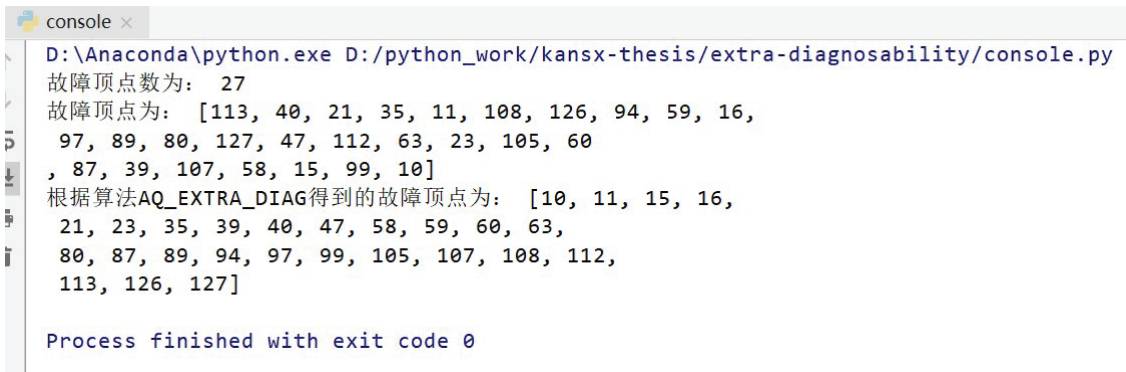
console x
D:\Anaconda\python.exe D:/python_work/kansx-thesis/extra-diagnosability/console.py
故障顶点数为: 15
故障顶点为: [6, 25, 3, 28, 24, 22, 15, 23, 13, 21,
27, 19, 29, 7, 30]
根据算法AQ_EXTRA_DIAG得到的故障顶点为: [3, 6, 7, 13,
15, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30]
Process finished with exit code 0

```

图 4-5 第二组测试数据和结果

3. 第三组测试数据和结果 $E(7, 27)$

- $n = 7$
- $f = 27$
- $F = [113, 40, 21, 35, 11, 108, 126, 94, 59, 16, 97, 89, 80, 127, 47, 112, 63, 23, 105, 60, 87, 39, 107, 58, 15, 99, 10]$
- $avg_t = 0.00320$



```

D:\Anaconda\python.exe D:/python_work/kansx-thesis/extra-diagnosability/console.py
故障顶点数为: 27
故障顶点为: [113, 40, 21, 35, 11, 108, 126, 94, 59, 16,
 97, 89, 80, 127, 47, 112, 63, 23, 105, 60
, 87, 39, 107, 58, 15, 99, 10]
根据算法AQ_EXTRA_DIAG得到的故障顶点为: [10, 11, 15, 16,
21, 23, 35, 39, 40, 47, 58, 59, 60, 63,
80, 87, 89, 94, 97, 99, 105, 107, 108, 112,
113, 126, 127]

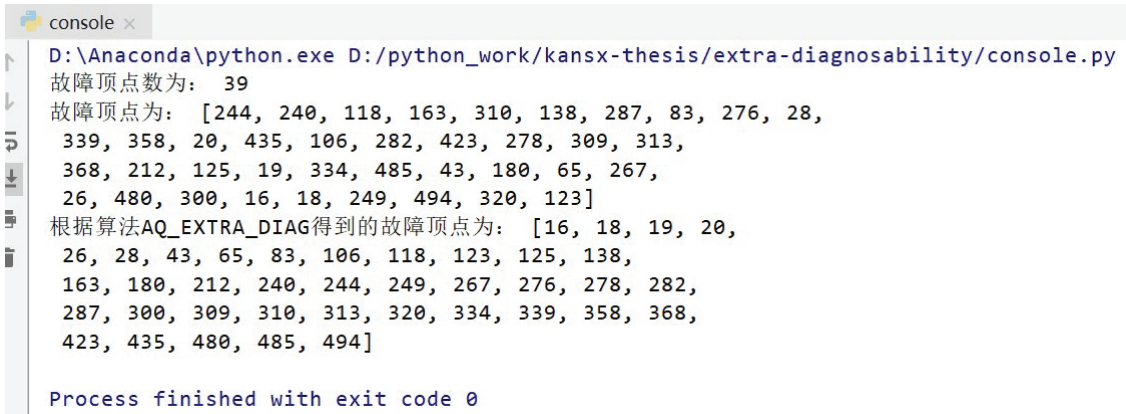
Process finished with exit code 0

```

图 4-6 第三组测试数据和结果

4. 第四组测试数据和结果 $E(9, 39)$

- $n = 9$
- $f = 39$
- $F = [244, 240, 118, 163, 310, 138, 287, 83, 276, 28, 339, 358, 20, 435, 106, 282, 423, 278, 309, 313, 368, 212, 125, 19, 334, 485, 43, 180, 65, 267, 26, 480, 300, 16, 18, 249, 494, 320, 123]$
- $avg_t = 0.02415$



```

D:\Anaconda\python.exe D:/python_work/kansx-thesis/extra-diagnosability/console.py
故障顶点数为: 39
故障顶点为: [244, 240, 118, 163, 310, 138, 287, 83, 276, 28,
339, 358, 20, 435, 106, 282, 423, 278, 309, 313,
368, 212, 125, 19, 334, 485, 43, 180, 65, 267,
26, 480, 300, 16, 18, 249, 494, 320, 123]
根据算法AQ_EXTRA_DIAG得到的故障顶点为: [16, 18, 19, 20,
26, 28, 43, 65, 83, 106, 118, 123, 125, 138,
163, 180, 212, 240, 244, 249, 267, 276, 278, 282,
287, 300, 309, 310, 313, 320, 334, 339, 358, 368,
423, 435, 480, 485, 494]

Process finished with exit code 0

```

图 4-7 第四组测试数据和结果

5. 第五组测试数据和结果 $E(10, 45)$

- $n = 10$
- $f = 45$
- $F = [977, 74, 445, 408, 313, 603, 639, 126, 426, 721, 709, 127, 928, 976, 862, 939, 788, 785, 235, 847, 907, 27, 829, 14, 13, 693, 25, 646, 529, 122,$

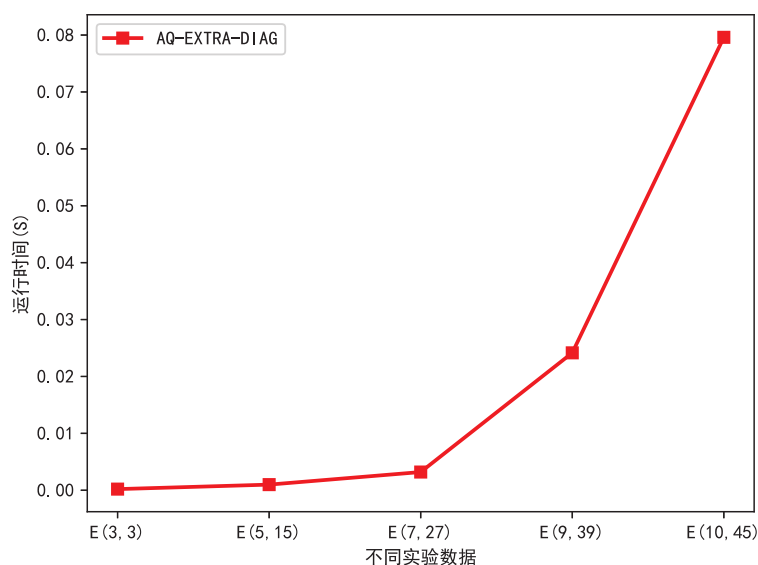


图 4-9 算法AQ-EXTRA-DIAG找到所有无故障顶点所花费的时间

913, 146, 1023, 509, 217, 730, 180, 109, 660, 657, 317, 532, 344, 583, 821]

- $avg_t = 0.07960$

```

console x
D:\Anaconda\python.exe D:/python_work/kansx-thesis/extra-diagnosability/console.py
故障顶点数为: 45
故障顶点为: [977, 74, 445, 408, 313, 603, 639, 126, 426, 721,
709, 127, 928, 976, 862, 939, 788, 785, 235, 847,
907, 27, 829, 14, 13, 693, 25, 646, 529, 122,
913, 146, 1023, 509, 217, 730, 180, 109, 660, 657,
317, 532, 344, 583, 821]
根据算法AQ_EXTRA_DIAG得到的故障顶点为: [13, 14, 25, 27,
74, 109, 122, 126, 127, 146, 180, 217, 235, 313,
317, 344, 408, 426, 445, 509, 529, 532, 583, 603,
639, 646, 657, 660, 693, 709, 721, 730, 785, 788,
821, 829, 847, 862, 907, 913, 928, 939, 976, 977,
1023]
Process finished with exit code 0
  
```

图 4-8 第五组测试数据和结果

五组实验数据的运行时间如图 4-9。

从实验结果可以看出，算法AQ-EXTRA-DIAG可以有效诊断出所有的故障顶点。而且图 4-9显示，时间的变化趋势也和我们在前面分析的算法时间复杂度类似。

4.5 本章小结

在本章中，我们证明了 n -维扩展立方体 AQ_n 的2-额外诊断度为 $6n-15$ ，其中 $n \geq 8$ ，

其结果大约是经典诊断度的3倍。同时，我们给出了扩展立方体在MM*模型下的2-额外诊断算法AQ-EXTRA-DIAG，该算法的复杂度为 $O(N^2)$ ，其中 N 为扩展立方体的顶点个数。理论分析和实验结果表明，该诊断算法可以正确地诊断出所有的故障顶点。

第五章 总结与展望

5.1 总结

互连网络作为高性能计算系统的重要组成部分，其容错性能的好坏对网络的运行至关重要。扩展立方体作为超立方体的一种变体，拥有许多优秀的性质。我们在本文中重点研究了扩展立方体的容错性能，其中包括结构连通度、子结构连通度和额外诊断度。取得的具体成果如下：

一、扩展立方体的结构连通度和子结构连通度

我们研究了 n -维扩展立方体 AQ_n 的 H -结构连通度 $\kappa(AQ_n, H)$ 和 H -子结构连通度 $\kappa^s(AQ_n, H)$ ，其中 $H \in \{K_{1,M}, P_L, C_N\}$ ，且 $1 \leq M \leq 6, 1 \leq L \leq 2n-1, 3 \leq N \leq 2n-1$ ，研究成果如下：

$$(1) \kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \begin{cases} 2n-1 & \text{其中 } n \geq 4, K_{1,M} = K_1, \\ \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil & \text{其中 } n \geq 4, 1 \leq M \leq 3, \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil & \text{其中 } n \geq 6, 4 \leq M \leq 6. \end{cases}$$

$$(2) \kappa(AQ_n, P_L) = \kappa^s(AQ_n, P_L) = \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \quad \text{其中 } n \geq 3, 1 \leq L \leq 2n-1.$$

$$(3) \kappa^s(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil \quad \text{其中 } n \geq 3, 3 \leq N \leq 2n-1.$$

$$(4) \kappa(AQ_n, C_N) = \begin{cases} n-1 & \text{其中 } n \geq 6, N=3, \\ \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil & \text{其中 } n \geq 6, 4 \leq N \leq 2n-1. \end{cases}$$

同时，我们给出了扩展立方体在故障顶点数小于 $K_{1,6}$ -子结构连通度下的容错路由算法AQFRouting，该算法的时间复杂度为 $O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3)$ ，且该算法的所构造的最大无故障路径长度不超过 $8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1$ ，其中 $m = \lceil \log_2 |F| \rceil$ ， F 为故障顶点集合。此外，我们通过模拟实验验证了算法的有效性。

二、扩展立方体的额外诊断度和诊断算法

基于额外诊断度的定义，我们证明了 n -维扩展立方体 AQ_n 在 MM^* 模型下的2-额外诊断度为 $6n-15$ ，其中 $n \geq 8$ ，大约是经典诊断度的3倍。同时，我们给出了扩展立方体在 MM^* 模型下的2-额外诊断算法AQ-EXTRA-DIAG，该算法的时间复杂度为 $O(N^2)$ ，其中 N 为扩展立方体的顶点个数。此外，我们通过模拟实验验证了算法的

有效性。

5.2 展望

本文在扩展立方体的结构连通度和诊断度的研究上取得了一些创新性进展。但是总结下来，仍存在许多问题值得我们进一步研究，希望今后努力作出进一步的成果，主要包括以下几方面：

（1）进一步将故障结构扩展到更具通用性的结构上面，而不是仅仅局限于一些小的特殊的故障结构，同时希望将结论一般化，使其可以应用到更多的互连网络拓扑结构上面。

（2）借助于扩展立方体的结构连通度及子结构连通度研究，希望将其应用于扩展立方体的其他结构容错性质，比如哈密顿性质等^[61,62]。

（3）进一步探究扩展立方体的 g -额外诊断度，希望可以扩大 g 的适用范围，而不是局限于一个较小的范围。

参考文献

- [1] 张晓峰, 李昭, 陈鹏. 高性能计算的发展现状分析[J]. 信息通信, 2019, 193(01): 41–43.
- [2] 陈国良, 毛睿, 蔡晔. 高性能计算及其相关新兴技术[J]. 深圳大学学报(理工版), 2015, 32(1): 25–31.
- [3] Rico-Gallego J A, Díaz-Martín J C, Manumachu R R and Lastovetsky A L. A survey of communication performance models for high-performance computing[J]. ACM Computing Surveys(CSUR), 2019, 51(6): 126.
- [4] 郑晓鸣. 浅析高性能计算的现状与发展[J]. 福建电脑, 2007, 2: 211+190.
- [5] 王喜, 樊建席, 韩月娟, 周吴军, 张书奎. 超级局部扭立方体互连网络及其性质[J]. 计算机学报, 2012, 35(2): 315–324.
- [6] Harary F, Hayes J P and Wu H J. A survey of the theory of hypercube graphs[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1988, 15(4): 277–289.
- [7] Chen S, Shen H and Topor R. An efficient algorithm for constructing hamiltonian paths in meshes[J]. Parallel Computing, 1997, 28(9): 25–32.
- [8] Efe K. The crossed cube architecture for parallel computation[J]. IEEE Transactions on Parallel Distributed Systems, 1992, 3(5): 513–524.
- [9] Day K and Tripathi A. Unidirectional star graphs[J]. Information Processing Letters, 1993, 45(3): 123–129.
- [10] Bhuyan L N and Agrawal D P. Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network[J]. IEEE Transactions on Computers, 2006, C-33(4): 323–333.
- [11] Choudum S A and Sunitha V. Augmented cubes[J]. Networks, 2002, 40(2): 71–84.
- [12] Lee C-M, Teng Y-H, Tan J and Hsu L-H. Embedding hamiltonian paths in augmented cubes with a required vertex in a fixed position[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 58(9): 1762–1768.

- [13] Hsu H-C, Lai P-L, Tsai C-H and Li T-K. Efficient algorithms for embedding cycles in augmented cubes[C]. The 10th International Symposium on Pervasive Systems, Algorithms, and Networks, 2009: 596–600.
- [14] Hsu H-C, Chiang L-C, Tan J and Hsu L-H. Ring embedding in faulty augmented cubes[C]. The 7th International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms, and Networks, 2004: 155–161.
- [15] Hsieh S-Y and Shiu J-Y. Cycle embedding of augmented cubes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 2(191): 314–319.
- [16] Ma M, Liu G and Xu J-M. The super connectivity of augmented cubes[J]. Information Processing Letters, 2008, 106(2): 59–63.
- [17] Ma M, Song Y and Xu J-M. Fault-tolerant analysis of augmented cubes[J]. Mathematics, 2012.
- [18] Chang N-W and Hsieh S-Y. Conditional diagnosability of augmented cubes under the PMC model[J]. IEEE Transactions on Dependable & Secure Computing, 2011, 9(1): 46–60.
- [19] Hong W-S and Heish S-Y. Strong diagnosability and conditional diagnosability of augmented cubes under the comparison diagnosis[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(1): 140–148.
- [20] Harary F. Conditional connectivity[J]. Networks, 1983, 13(3): 347–357.
- [21] Latifi S, Hegde M and Naraghi-Pour M. Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1994, 43(2): 218–222.
- [22] Fàbrega J and Fiol M A. On the extraconnectivity of graphs[J]. Discrete Mathematics, 1996, 155(1-3): 49–57.
- [23] Ma M, Liu G and Xu J-M. The super connectivity of augmented cubes[J]. Information Processing Letters, 2008, 106(2): 59–63.
- [24] Yang W and Meng J. Extraconnectivity of hypercubes[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(6): 887–891.

- [25] Guo L and Guo X. A new kind of parameter for fault tolerance of graphs[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2019, 31(10).
- [26] Hsieh S-Y and Chang Y-H. Extraconnectivity of k -ary n -cube networks[J]. Theoretical Computer Science, 2012, 443: 63–69.
- [27] Yu X, Huang X and Zhang Z. A kind of conditional connectivity of Cayley graphs generated by unicyclic graphs[J]. Information Sciences, 2013, 243: 86–94.
- [28] Chen Y-C and Tan J J M. Restricted connectivity for three families of interconnection networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(2): 1848–1855.
- [29] Guo L and Lee C-W. Reliability analysis of the bijective connection networks for components[J]. Mathematics, 2019, 7(6): 546.
- [30] Ning W. The h -connectivity of exchanged crossed cube[J]. Theoretical Computer Science, 2017, 696: 65–68.
- [31] Wan M and Zhang Z. A kind of conditional vertex connectivity of star graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(2): 264–267.
- [32] Guo L, Qin C and Xu L. Subgraph fault tolerance of distance optimally edge connected hypercubes and folded hypercubes[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2020, 138: 190–198.
- [33] Lin L, Xu L, Zhou S and Hsieh S-Y. The extra, restricted connectivity and conditional diagnosability of split-star networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2015, 27(2): 533–545.
- [34] Yang W and Lin H. Reliability evaluation of BC networks in terms of the extra vertex- and edge-connectivity[J]. IEEE transactions on Computers, 2013, 63(10): 2540–2548.
- [35] Zhang M, Meng J, Yang W and Tian Y. Reliability analysis of bijective connection networks in terms of the extra edge-connectivity[J]. Information Sciences, 2014, 279: 374–382.
- [36] Wang S and Ma X. The g -extra connectivity and diagnosability of crossed cubes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 336: 60–66.

- [37] Boesch F T. Synthesis of reliable networks: a survey[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1986, 35(3): 240–246.
- [38] Wang S and Wang M. The strong connectivity of bubble-sort star graphs[J]. The Computer Journal, 1984, 62(5): 487–499.
- [39] Lin C-K, Zhang L, Fan J and Wang D. Structure connectivity and substructure connectivity of hypercube[J]. Theoretical Computer Science, 2016, 634: 97–107.
- [40] Lin C-K, Cheng E and Lipták L. Structure and substructure connectivity of hypercube-like networks[J]. Parallel Processing Letters, 2020, 30(3).
- [41] Sabir E and Meng J. Structure fault tolerance of hypercubes and folded hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 711: 44–55.
- [42] Lv Y, Fan J, Hsu D F and Lin C-K. Structure connectivity and substructure connectivity of k -ary n -cube networks[J]. Information Sciences, 2018, 433: 115–124.
- [43] Lü H and Wu T. Structure and substructure connectivity of balanced hypercubes[J]. The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society Series, 2020, 43(3): 2659–2672.
- [44] Li D, Hu X and Liu H. Structure connectivity and substructure connectivity of twisted hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 796: 169–179.
- [45] Wang G, Lin C-K, Cheng B, Fan J and Fan W. Structure fault-tolerance of the generalized hypercube[J]. The Computer Journal, 2019, 62(10): 1463–1476.
- [46] Preparata F P, Metze G and Chien R T. On the connection assignment problem of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Electronic Computers, 2006, 16(6): 848–854.
- [47] Maeng J and Malek M. A comparison connection assignment for self-diagnosis of multiprocessors systems[C]. Proceedings of the 7th Annual Symposium on Computer Architecture, 1981: 173–175.
- [48] Sengupta A and Dahbura A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386–1396.

- [49] Lai P-L, Tan J J M, Chang C-P and Hsu L-H. Diagnosability measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 165–175.
- [50] Peng S-L, Lin C-K, Tan J J M and Hsu L-H. The g -good-neighbor conditional diagnosability of hypercube under PMC model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(21): 10406–10412.
- [51] Zhang S and Yang W. The g -extra conditional diagnosability and sequential t/k - diagnosability of hypercubes[J]. 2015, 93(3): 1–20.
- [52] Wang S and Yang Y. The 2-good-neighbor(2-extra) diagnosability of alternating group graph networks under the PMC model and MM^* model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 305: 241–250.
- [53] Lv M, Zhou S, Sun X, Lian G and Liu J. Reliability of (n, k) -star network based on g -extra conditional fault[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 757: 44–55.
- [54] 孙惠泉. 图论及其应用[M]. 科学出版社, 2004.
- [55] Lv M, Fan J, Zhou J and Jia X. The extra connectivity and extra diagnosability of regular interconnection networks[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 809: 88–102.
- [56] Huang Y, Lin L and Xu L. A new proof for exact relationship between extra connectivity and extra diagnosability of regular connected graphs under MM^* model[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 828-829: 70–80.
- [57] Liang J, Chen F, Zhang Q and Xie M. t/t -diagnosability and t/k -diagnosability for augmented cube networks[J]. IEEE Access, 2018, 6: 35029–35041.
- [58] Hsieh S-Y and Lee C-W. Diagnosability of two-matching composition networks under the MM^* Model[J]. IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing, 2011, 2(8): 246–255.
- [59] Sengupta A and Dahbura A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386–1396.

- [60] Li X, Jia X, Fan J and Lin C. Reliability analysis of data center networks based on precise and imprecise diagnosis strategies[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 809: 189–203.
- [61] Lv Y, Lin C-K, Fan J and Jiang X. Hamiltonian cycle and path embeddings in 3-ary n -cubes based on $K_{1,3}$ -structure faults[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2018, 120: 148–158.
- [62] Lv Y, Lin C-K and Fan J. Hamiltonian cycle and path embeddings in k -ary n -cubes based on structure faults[J]. The Computer Journal, 2017, 60(2): 159–179.

攻读硕士学位期间发表的论文和参与的科研项目

作者在攻读硕士学位期间发表的论文

[1] **Kan S**, Fan J, Cheng B, Wang X and Zhou J. Structure fault-tolerance of the augmented cube, Journal of Internet Technology, 2020, 21(6): 1733–1746(SCI已收录).

[2] **Kan S**, Fan J, Cheng B and Wang X. The communication performance of BCDC data center network, 2020 12th International Conference on Communication Software and Networks (ICCSN), Chongqing, China, 2020, 51–57(EI已收录).

[3] Wang G, Fan J, Lv Y, Cheng B and **Kan S**. The constructive algorithm of vertex-disjoint paths in the generalized hypercube under restricted connectivity. Journal of Internet Technology, 2019, 20(1): 1995–2006(SCI已收录).

作者在攻读硕士学位期间参与的科研项目

[1] 参与国家自然科学基金项目“基于拓扑图可靠性的闽台区域移动社会网络安全可控理论研究”，项目编号：U1905211。

[2] 参与国家自然科学基金项目“基于一类BC图的数据中心网络及其性质的研究”，项目编号：61572337。

[3] 参与江苏省高校自然科学研究重大项目“基于LCG的数据中心网络上高可靠通信树的构造研究”，项目编号：18KJA520009。

作者在攻读硕士学位期间的获奖情况

[1] 2018–2019学年，获苏州大学“学业优秀二等奖学金”。

[2] 2019–2020学年，获苏州大学“学业优秀三等奖学金”。

[3] 2020–2021学年，获苏州大学“学业优秀一等奖学金”。

致 谢

光阴如梭，岁月如歌，三年的研究生生活即将结束。这三年的时光既短暂又漫长，其中充满了酸甜苦辣，但更多的是收获和成长。值此硕士毕业论文成文之际，我要向我的老师、同学、亲人以及所有帮助过我的人表达我最真挚的谢意。

首先我要由衷地感谢我的导师樊建席教授。本文是在樊老师悉心指导下完成的，从选题的确定、资料的收集以及最后的撰写无不倾注着樊老师的心血和汗水。三年来，樊老师在学习和生活方面给予我无微不至的关怀。同时樊老师高尚的品格、崇高的敬业精神以及严谨的治学态度，深深地感染和激励着我，我从樊老师的身上不仅学到了扎实的专业知识，也学到了很多做人的道理。在此谨向樊老师致以崇高的敬意和衷心的感谢。

感谢程宝雷老师、王岩老师、林政宽老师、韩月娟老师和刘钊老师等，感谢你们在学习、生活和工作方面对我的关心和帮助。

感谢师姐王桂娟、吕梦婕、孙雪丽、李小燕和王丽丹，师兄樊卫北、叶栋和刘宁宁，师妹董辉、易怡、吴素英、过汝燕、舒畅和张还文，师弟卞庆荣和潘志勇，以及我的同门伙伴陈果和夏京京，他们在生活和学习中给予了我许多的鼓励和帮助，谢谢你们的温馨陪伴。

最后我要特别感谢我的父母，他们是我多年求学路上的坚强后盾，他们对我无私的照顾与爱是我不断前进的动力。

最后，感谢评审本论文的专家，感谢您抽出宝贵时间来阅读本文，并提出宝贵意见和建议。

阚双祥

二〇二一年三月十三日