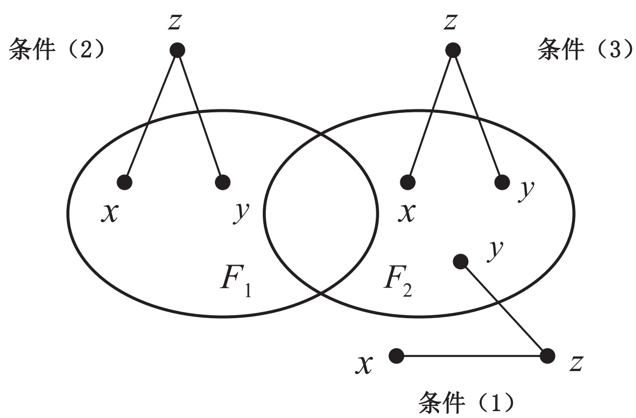


Figure 1: $MM^*$模型下两个可区分的顶点集合$F_1$和$F_2$

**Lemma 1.** *[2, 3]* 对于图$G$中的两个不同的顶点子集$F_1 \neq F_2 \subseteq V(G)$。$(F_1, F_2)$在$MM^*$模型下是可区分的当且仅当下面三个条件中的一个成立（见图*1*）：

*(1)* $\exists x, z \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$和$y \in (F_1 - F_2) \cup (F_2 - F_1)$，且$xz, yz \in E(G)$；

*(2)* $\exists x, y \in F_1 - F_2$和$z \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$，且$xz, yz \in E(G)$；

*(3)* $\exists x, y \in F_2 - F_1$和$z \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$，且$xz, yz \in E(G)$。

在传统的诊断度的测算时，如果一个顶点$u$的所有邻居顶点同时发生故障，则不可能判断顶点$u$是否是一个故障顶点。比如，在一个$n$为的扩展立方体中，包含$2n-1$个顶点的子集个数是$\binom{2^n}{2n-1}$。在这其中只有$2^n$的顶点子集包含某个顶点的所有邻居节点。因为$\frac{2^n}{\binom{2^n}{2n-1}}$这个概率对于比较大的$n$来说是非常小的，这也就意味着一个顶点的所有邻居顶点发生故障的概率是非常小的。基于这个原因，Lai [2] 等人提出了一种新的限制性诊断度，叫做条件连通度。他们考虑了这样一种情况：任意的一个故障集合不能包含某个顶点的所有邻居顶点。更精确的定义为：一个故障集合$F \subseteq V(G)$叫做条件故障集合，如果对于一个顶点$u \in V(G)$，有$N_G(u) \subseteq F$。

接着，我们给出条件$t$可诊断系统的定义：

**Definition 1.** 一个系统$G$是条件$t$-可诊断的，当且仅当两个不同的条件故障集合$F_1, F_2 \subseteq V(G)$ 是可区分的，且$|F_1|, |F_2| \leq t$。

$G$的条件诊断度，记为$t_c(G)$，定义为$t$的最大值，使得$G$是条件$t$诊断的。

**Lemma 2.** 对于$n \geq 6$，$t_c(AQ_n) = 6n - 17$。

接下来，我们给出$g$-额外连通度的定义：

**Definition 2.** *[4]*

*(1)* 图$G$的一个$h$-额外集是一个顶点的集合，当从$G$中删除这个集合后，$G$ 变为不连通的，且每个连通分量所包含的顶点个数大于等于$h+1$。

*(2)* 图$G$的一个$h$-额外割是$G$的一个$h$-额外集，将其删除将会导致$G$变为不连通的。

*(3)* 图$G$的$h$-额外连通度，记为$\kappa_h(G)$, 是$h$-额外割的最小基数。

因为条件诊断度和2-额外连通诊断度具有密切的联系，在得到条件诊断度或者2-额外连通诊断度的条件下，如果满足某些条件，另一个诊断度可以直接得到。Hao [7]等人给出了的充分条件。

**Theorem 1.** *[7]* 设$G$为$n$正则图，其中$t = min\{|N(T)| : T$ 是$G$中一条长度为3的路径或者长度为3的圈$\}$。 如果$G$满足下面的条件：

*(1)* 对于一个顶点集合$F \subset V(G)$，$|F| \leq t-1$，$G-F$有一个大的连通分量和小的连通分量，且这些小的连通分量的所有顶点个数最多为2个；

*(2)* $n \geq 2\gamma(G)+2$ 如果$G$中不包含长度为5的圈；或者$n \geq 3\gamma(G)+2$；

*(3)*$|V(G)| > (n+1)(t-1)+4$；

则$t_c(G) = t = \kappa_2(G)$。

其中$\gamma(G)$的定义为：对于$G$中两个不想交的顶点$x$和$y$，$\gamma(x,y) = |N(x) \cap N(y)|$，$\gamma(G) = \max\{\gamma(x,y) : x, y \in V(G)$ and $xy \notin E(G)\}$。

因为$AQ_n$满足定理1的条件，所以我们可以直接得到$AQ_n$的2-额外连通度。

**Theorem 2.** 对于$n \geq 6$，$\kappa_2(AQ_n) = 6n-17$。

**Theorem 3.** *[1]* 设$S$是$AQ_n$的一个顶点子集，其中$|S| \leq 4n-9$, $n \geq 4$。那么, $AQ_n - S$满足以下四个条件之一*:*

*(1)* $AQ_n - S$是连通的；

*(2)* $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是$K_1$，另一个包含$2^n - |S| - 1$个顶点；

**Property 1.** *[11]* 设$AQ_n = L \bigodot R$，其中$L \cong AQ_{n-1}^0, R \cong AQ_{n-1}^1$。$u$和$v$是$L$中的两个顶点。$(u,v)$(即，$v = \bar{u}_{n-1}$)是$L$中的一条补边，如果$(u,v)$在$R$中有两个相同的邻居顶点。此外，如果$(u,v)$不是$L$中的一条补边，则$(u,v)$在$R$中没有相同的邻居顶点。

**Theorem 4.** *[1]* 设$S$是$AQ_n$的一个顶点子集，其中$|S| \leq 6n-18$, $n \geq 6$。那么, $AQ_n - S$满足以下四个条件之一*:*

*(1)* $AQ_n - S$是连通的；

*(2)* $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是$K_1$，另一个包含$2^n - |S| - 1$个顶点；

*(3)* $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是$K_2$，另一个包含$2^n - |S| - 2$个顶点；

*(4)* $AQ_n - S$有三个分支，其中有两个是$K_1$，且第三个包含$2^n - |S| - 2$个顶点。

**Definition 3.** *[4]*

*(1)* 图$G$的一个$h$-额外集是一个顶点的集合，当从$G$中删除这个集合后，$G$ 变为不连通的，且每个连通分量所包含的顶点个数大于等于$h+1$。

*(2)* 图$G$的一个$h$-额外割是$G$的一个$h$-额外集，将其删除将会导致$G$变为不连通的。

*(3)* 图$G$的$h$-额外连通度，记为$\kappa_h(G)$, 是$h$-额外割的最小基数。

**Definition 4.** *[4]*

*(1)* 在$MM^*$模型下，一个图$G$是$h$-额外，$t$-可诊断的，当且仅当对任意两个不同的$h$-额外集$F_1 \subseteq V(G)$，$F_2 \subseteq V(G)$，其中$|F_1| \leq t$，$|F_2| \leq t$且$F_1$和$F_2$是可区分的。

*(2)* $G$在$MM^*$下的$h$-额外诊断度记为$t_h^{\tilde{m}}(G)$，其中$t$是$G$ 在$h$-额外，$t$-可诊断下的最大值。

**Lemma 3.** *[1]* 设$x, y$是$AQ_n(n \geq 4)$中任意两个顶点，则$|N_{AQ_n}(x,y)| \geq 4n-8$。

**Lemma 4.** *[1]* 设$x, y, z$是$AQ_n(n \geq 4)$中任意三个顶点，则$|N_{AQ_n}(x,y,z)| \geq 6n-17$。

**Lemma 5.** *[1]* 设$x, y, s, t$是$AQ_n(n \geq 4)$中任意四个顶点，则$|N_{AQ_n}(x,y,s,t)| \geq 8n-28$。

在写这部分内容的时候，已经有两篇文章 [8, 9] 在某些条件下将额外连通度和额外条件诊断度联系了起来。但是扩展立方体并不满足这两篇文章的条件。下面我们将对这两篇文章的条件进行逐一说明:

(1) [8]针对的是$n$-连接的网络来建立$MM^*$模型下额外连通度和额外诊断度的的联系。但是扩展立方体的$2n-1$连接的网络，因此不符合该论文的适用条件。

(2) [9]的定理1对于$MM^*$模型下将额外连通度和额外诊断度的联系起来有三个条件，其中扩展立方体满足其中的第一和第二个条件，但是对于第三个条件，并没有已知的定理满足，因此也无法将这三个条件适用于扩展立方体，以此来根据额外连通度来直接得到扩展立方体的额外诊断度。

因为没有已知的条件将2-额外连通度和2-额外连通诊断度联系起来，所以下面我们将自己来证明扩展立方体的2-额外连通诊断度。

**Lemma 6.** *[1]* 设$x, y, s, t$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*4*个顶点，那么$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t\})| \geq 8n - 28$.

**Lemma 7.** *[1]* 是$x, y, s, t, u$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*5*个顶点，如果$AQ_n$在$x, y, s, t, u$包含两条补边，则$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10n - 35$。

**Lemma 8.** *[1]* 是$x, y, s, t, u$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*5*个顶点，如果$AQ_n$在$x, y, s, t, u$包含一条补边，则$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10n - 39$。

**Lemma 9.** 是$x, y, s, t, u, v$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*6*个顶点，如果$AQ_n$在$x, y, s, t, u, v$包含*2*条补边，则$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v\})| \geq 12n - 48$。

**Proof.** 设$(x, y), (s, t)$是$AQ_n = L \bigodot R$中的*2*条补边，其中$L \cong AQ^0_{n-1}, R \cong AQ^1_{n-1}$。不是一般性，我们设$x, s \in V(L), y, t \in V(R)$。然后我们有下面几种情况：

**情形*1*：** $u, v \in L$或$u, v \in R$中。不失一般性，我们假设$u, v \in L$，根据引理*6*和引理*3*，我们有$|N_L(\{x, s, u, m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36, |N_L(\{y, t\})| = 4(n-1) - 8$。因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x, y, s, t, u, v\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, v\})| + |N_R(\{y, t\})| \\ &\geq (8n - 36) + (4n - 12) = 12n - 48.\end{aligned}$$

**情形*2*：** $u, v$其中一个在$L$中，另一个在$R$中。 根据引理*4*，我们有$|N_L(\{x, s, u\})| \geq 6(n-1) - 17 = 6n - 23, |N_R(\{y, t, v\})| \geq 6(n-1) - 17 = 6n - 23$，因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x, y, s, t, u, v\})| &\geq |N_L(\{x, s, u\})| + |N_R(\{y, t, v\})| \\ &\geq 2(6n - 23) = 12n - 46.\end{aligned}$$

**Lemma 10.** *[1]* 是$x, y, s, t, u, v$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*6*个顶点，如果$AQ_n$在$x, y, s, t, u, v$包含*3*条补边，则$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v\})| \geq 12n - 46$。

**Lemma 11.** *[1]* 是$x, y, s, t, u, v, m$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*7*个顶点，如果$AQ_n$在$x, y, s, t, u, v, m$包含*3*条补边，则$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v, m\})| \geq 14n - 59$。

**Proof.** 设$(x, y), (s, t), (u, v)$是$AQ_n = L \bigodot R$中的*3*条补边，其中$L \cong AQ^0_{n-1}, R \cong AQ^1_{n-1}$。不是一般性，我们设$x, s, u \in V(L), y, t, v \in V(R)$。$m$属于$L$和$R$ 中的一个，不失一般性，我们设$m \in V(L)$。根据引理*5*和引理*4*，我们有$|N_L(\{x, s, u, m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36, |N_L(\{y, t, v\})| = 6(n-1) - 17 = 6n - 23$。因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x, y, s, t, u, v\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, v\})| + |N_R(\{y, t, v\})| \\ &\geq (8n - 36) + (6n - 23) = 14n - 59.\end{aligned}$$

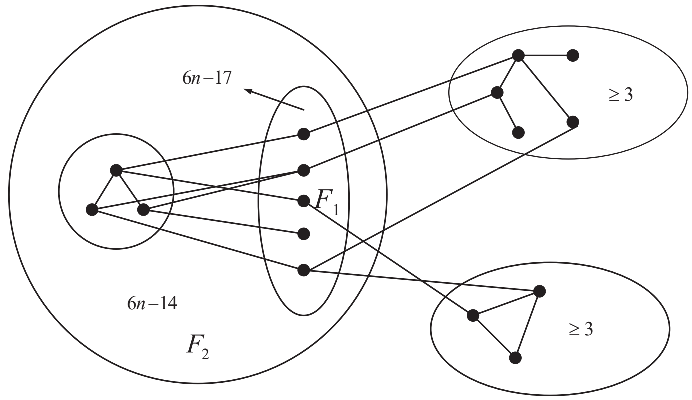


Figure 2: $G$的两个2-额外集

**Lemma 12.** 是$x, y, s, t, u, v, m, n$是$AQ_n(n \geq 4)$中的*8*个顶点，如果$AQ_n$在$x, y, s, t, u, v, m, n$包含*4*条补边，则$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v, m, n\})| \geq 16n - 72$。

**Proof.** 设$(x, y), (s, t), (u, v), (m, n)$是$AQ_n = L \bigodot R$中的*4*条补边，其中$L \cong AQ^0_{n-1}, R \cong AQ^1_{n-1}$。不是一般性，我们设$x, s, u, m \in V(L), y, t, v, n \in V(R)$。根据引理*6*，我们有$|N_L(\{x, s, u, m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36, |N_R(\{y, t, v, n\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$，因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x, y, s, t, u, v, m, n\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, m\})| + |N_R(\{y, t, v, n\})| \\ &\geq 2(8n - 36) = 16n - 72.\end{aligned}$$

**Lemma 13.** *[5]* 对于顶点集合$X \subset V(AQ_n)$，其中$|X| = k, 0 \leq k \leq 2n - 1$，那么$|N_{AQ_n}(X)| \geq 2kn - \frac{3k(k+1)}{2}$*+1*。

**Lemma 14.** 对于$n \geq 6$，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \leq 6n - 15$。

**Proof.** 设$S = \{u, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_{n-3}\}$，设$F_1 = N(V(S))$和$F_2 = N[(V(S))]$。根据定义，我们有$|F_1| = 6n - 17$和$|F_2| = N(V(S)) + |V(S)| = 6n - 14$。$AQ_n[S]$是一个连通子图且$AQ_n - F_1$中的任意一个连通分量的顶点数都大于等于*3*。显然，我们有

$F_1 \leq 6n - 14,\ F_2 \leq 6n - 14$。

并且$F_1$和$F_2$都是$AQ_n$的2-额外集（见图*2*）。

因为$F_1 \Delta F_2 = V(S)$，$E[F_1 \Delta F_2, V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2)] = \emptyset$。根据引理*1*，$(F_1, F_2)$在$MM^*$下是不可区分的。由定义*4*，$AQ_n$不是$MM^*$下2-额外，$6n - 14$ 可诊断的，因此$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \leq 6n - 15$。

接下来，我们证明$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \geq 6n - 15$。

**Lemma 15.** 对于$n \geq 8$，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \geq 6n - 15$。

**Proof.** 我们将通过反证法来证明$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \geq 6n - 15$。假设$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \leq 6n - 16$。设$F_1$和$F_2$是两个不同的2- 额外集且$|F_1| = |F_2| = 6n - 15$。则在$MM^*$模型下，$F_1$ 和$F_2$ 是不可区分的。另外，对

于$n \geq 8$

$$\begin{aligned}|V(AQ_n)| - |F_1 \cup F_2| &\geq |V(AQ_n)| - |F_1| - |F_2| \\ &\geq |V(AQ_n)| - 2(6n-15) \\ &\geq 2^n - 2(6n-15) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

因此，$V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$。

断言：$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$不包含孤立顶点。

假设在$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$存在一个孤立顶点$w$。设$W$是$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$中孤立顶点的集合，并且$H$是$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$的导出子图。因为$F_1$是$AQ_n$的一个2-额外集且$(F_1, F_2)$在$MM^*$ 下是不可区分的。则在$F_2 - F_1$存在唯一一个顶点$u$且$uw \in E(AQ_n)$。 类似的，因为$F_2$是$AQ_n$的一个2-额外集且$(F_1, F_2)$ 在$MM^*$ 下是不可区分的。则在$F_1 - F_2$存在唯一一个顶点$v$且$vw \in E(AQ_n)$。 因为$AQ_n$是$2n-1$连通图，则$w$剩下的$2n-3$个邻居顶点都在$F_1 \cap F_2$ 中。此外，因为还有其他边把$F_1 \cap F_2$ 中的顶点与$W$外的其他顶点连接起来。因此我们有下面的不等式：

$$\begin{aligned}(2n-3)|W| &\leq \sum_{s \in F_1 \cap F_2} |N(s)| \\ &= |F_1 \cap F_2| \times (2n-1) \\ &\leq (6n-16) \times (2n-1)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}|W| &\leq \frac{(6n-16) \times (2n-1)}{2n-3} \\ &= \frac{(6n-16) \times (2n-3+2)}{2n-3} \\ &= \frac{(6n-16) \times (2n-3) + (6n-16) \times 2}{2n-3} \\ &= 6n-16 + \frac{6(2n-3)-14}{2n-3} \\ &= 6n-10 - \frac{14}{2n-3} \\ &\leq 6n-10\end{aligned}$$

假设$V(H) = \emptyset$，我们有

$$\begin{aligned}|V(AQ_n)| &= |F_1 \cup F_2| + |W| \\ &= |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| + |W| \\ &\leq 2 \times (6n-15) - (2n-3) + 6n-10 \\ &= 16n-37\end{aligned}$$

当$n \geq 8$时，$2^n > 16n-37$。因此，$V(H) \neq \emptyset$。

因为$W$是$AQ_n-(F_1\cup F_2)$中所有孤立顶点的集合，并且$H$ 是$V(AQ_n)-(F_1\cup F_2)$的导出子图，我们有$N(V(H))\cap W=\emptyset$.

假设$N(V(H))\cap(F_1\triangle F_2)\neq\emptyset$, 那么在$V(H)$中存在一个顶点$z$使得$z$在$F_1\triangle F_2$中至少有*1* 个邻居顶点。因为在$V(H)$中的任意一个顶点在$AQ_n-(F_1\cup F_2)$]都不是一个孤立的顶点, $z$在$V(H)$中存在一个邻居顶点$x$。因此, $x,z\in V(G)-(F_1\cup F_2)\neq\emptyset$，$y\in F_1\triangle F_2$ 且$xz,yz\in E(AQ_n)$。根据引理*1*, $F_1$和$F_2$是可区分的，这与$(F_1,F_2)$在$MM^*$模型下是不可区分的相矛盾。因此$N(V(H))\cap(F_1\triangle F_2)=\emptyset$。

如果$F_1\cap F_2=\emptyset$，那么$F_1\triangle F_2=F_1\cup F_2$。所以，$N(V(H))\cap F_1=\emptyset$ 和$N(V(H))\cap F_2=\emptyset$。进一步的，$N(V(H))\cap(F_1\cup F_2\cup W)=\emptyset$。因为，$V(AQ_n)=N(V(H))\cup F_1\cup F_2\cup W$，这意味着$AQ_n$ 是不连通的，这与$AQ_n$是连通图相矛盾。因此，$F_1\cap F_2\neq\emptyset$。

因为$F_1\neq F_2$，不失一般性，$F_1-F_2\neq\emptyset$。 因为$F_2$是$AQ_n$的一个额外集，因此存在一个顶点$u\in F_1-F_2$使得$uw\in E(AQ_n)$。因为$(F_1,F_2)$并不满足引理*1*中的条件，$u$是$F_1-F_2$中唯一顶点使得$uw\in E(AQ_n)$。如果$F_1-F_2=\emptyset$，那么$F_2\subseteq F_1$, 所以$AQ_n-(F_1\cup F_2)=AQ_n-F_1$，并且$w$是$AQ_n-F_1$ 中的一个孤立顶点。这与$F_1$是$AQ_n$中的一个2-额外集相矛盾。因此，$F_2-F_1\neq\emptyset$。类似的，我们可以得到存在一个顶点$v\in F_2-F_1$ 使得$vw_1\in E(AQ_n)$。 当从$AQ_n$中删除$F_2\cap F_1$时，因为$N(V(H))\cap W=\emptyset$和$N(V(H))\cap(F_1\cap F_2)=\emptyset$，$AQ_n-F_1\cap F_2$是不连通的。而且，我们还可以知道$AQ_n-(F_1\cap F_2)$ 包含一个连通分量$Y$且$|V(Y)|\geq 4$，如图 *[?]*。根据$|V(Y)|$ 的大小，我们有以下两种情况：

情形*1*：$4\leq|V(Y)|\leq 6$。因为$N(V(Y))\subseteq F_1\cap F_2$，根据引理*13*，有$|F_1\cap F_2|\geq|N(V(Y))|\geq 6n-15$。 因为$F_2\cap F_1\neq\emptyset$，我们有$|F_2|=|F_1\cap F_2|+|F_2\cap F_1|\geq 6n-15+1$，这与$|F_2|\leq 6n-15$。因此，$AQ_n-(F_1\cup F_2)$不包含孤立顶点。

情形*2*：$|V(Y)|\geq 7$。因为$W$中的顶点在$F_1$和$F_2$中各仅有一个邻居顶点，那么$|F_1-F_2|\geq 3$或者$|F_2-F_1|\geq 3$。 不失一般性，我们设$|F_1-F_2|\geq 3$。因为$|F_1|=6n-15$，那么$|F_1\cap F_2|=|F_1|-|F_1-F_2|\leq 6n-18$。 根据定理*4*，$AQ_n-F_1\cap F_2$只包含一个顶点个数大于*2*的连通分量。但是当$n\geq 8$ 时，$|H|>2^n-(16-37)>2$，且$|Y|>2$。 这意味着$AQ_n-F_1\cap F_2$中包含两个顶点个数大于*2* 的连通分量，与定理*4*矛盾。因此，$AQ_n-(F_1\cup F_2)$ 不包含孤立顶点。

对于顶点$p\in V(G)-(F_1\cup F_2)$, 根据断言，$N(p)\cap(V(G)-(F_1\cup F_2))$。因为$(F_1,F_2)$并不满足引理*1* 中的条件，也就是说$p$在$F_1\triangle F_2$中没有邻居顶点。因为$p$ 是任意选取的，则$E[V(G)-(F_1\cap F_2),F_1\triangle F_2]=\emptyset$. 因为$F_1-F_2\neq\emptyset$ 和$F_2$是$AQ_n$的一个2-额外集，则$|F_1-F_2|\geq 3$。因为$F_1$ 和$F_2$是两个不同的2- 额外集，$AQ_n-F_1$和$AQ_n-F_2$的任意分量的顶点数都大于3。当从$AQ_n$中删除$F_1\cap F_2$时，$AQ_n-(F_1\cap F_2)$ 是不连通的且其中的每个连通分量的顶点数都大于等于3。根据定义*3(2)*，$F_1\cap F_2$是$AQ_n$ 的一个*2*-额外割。根据定义*3(3)*，$|F_1\cap F_2|\geq 6n-18$。那么, $|F_1|=|F_1\cap F_2|+|F_1-F_2|\geq 6n-14>6n-15$，矛盾。

因此，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n)\geq 6n-15$。

根据引理14和引理15，我们可以得到以下的定理:

**Theorem 5.** 对于$n\geq 6$，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n)=6n-15$。

**Definition 5.** *[10]* 一个系统$G=(V,E)$和由一个故障顶点集在$G$上产生的症状$\sigma$。设$i\subseteq V$，0-比较集$C_0(i)$定义为$C_0(i)=\{k\in V\mid\exists j\in V$使得$\sigma(i,j)_k=0\}$。$G$的0-比较子图，记为$T_0(G)$，是$G$的一个子图，定义为$V(T_0(G))\subseteq V$和$E(T_0(G))=\{(i,j)\in E\mid j\in C_0(i),i\in C_0(j)\}$。

**Lemma 16.** *[10]* 给定一个最多有$t$故障顶点的系统$G=(V,E)$，和一个在$MM^*$模型下的$G$上的症状$\sigma$。

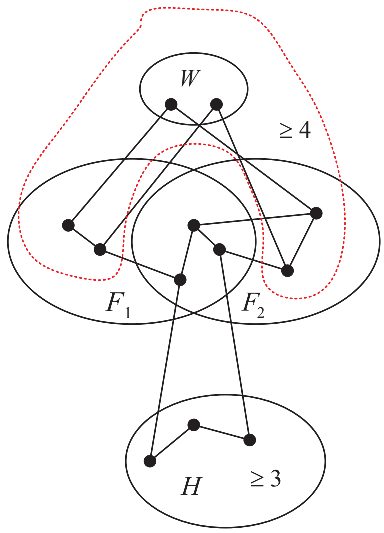


Figure 3: $G - F_1 \cap F_2$包含一个顶点个数大于等于4的连通分支

*(1)* 对于任意两个顶点$i, j \in V, (i, j) \in E$，其中$j \in C_0(i), i \in C_0(j)$，那么$i$和$j$有相同的状态（故障或无故障）。

*(2)* 对于任意一个连通分支$R \subseteq T_0(G)$，那么在$R$中的所有顶点，要么都是故障定的，要么都是无故障顶点。

*(3)* 如果$T_0(G)$的连通分支$R$的顶点个数$|V(R) \geq t+1|$，那么$R$中的所有顶点都是无故障的。

对于$AQ_n$中的一个顶点集合$S$，设$AQ_n = L \bigodot R$，其中$L \cong AQ^0_{n-1}, R \cong AQ^1_{n-1}$。设$S_L = S \cap V(L), S_R = S \cap V(R)$。一个在$L - S_L$中的顶点$u$被称为是**孤单顶点**，如果$S_R$包含$u$的两个在$R$中的邻居顶点。否则称$u$为**非孤单顶点**。

**Lemma 17.** 设$S$是$AQ_n$的一个顶点集合且$|S| \leq 6n - 15$，则$AQ_n - S$包含一个顶点个数至少为$2^n - 6n + 18$ 的连通分量。

**Proof.** 我们用数学归纳法来证明这个引理。当$n = 6$时，该引理成立。假设当$n \geq 7$时，该引理对于$AQ_{n-1}$成立。现在，我们考虑$AQ_n = L \bigodot R$，其中$L \cong AQ^0_{n-1}, R \cong AQ^1_{n-1}$。设$S_L = S \cap V(L), S_R = S \cap V(R)$。对于$L - S_L$和$R - S_R$是否是连通的，我们有下面几种情况*:*

**情形*1***: $L - S_L$和$R - S_R$都是不连通的。我们有$2n - 3 \leq |S_L| \leq 4n - 12$和$2n - 3 \leq |S_R| \leq 4n - 12$。根据定理*3*，我们有以下几种情形。

**情形*1.1***: 那么$L - S_L(R - S_R)$包含两个分量，其中一个是孤立的顶点，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1} - |S_L| - 1$ 的连通分量，记为$C_0(C_1)$。因为对于$n \geq 5$，有

$$\begin{aligned}
|V(C_0)| - (|S_R + 1|) &= 2^{n-1} - |S_L| - 1 - |S_R| - 1 \\
&= 2^{n-1} - |S| - 2 \\
&\geq 2^{n-1} - (6n - 18) - 2 \\
&= 2^{n-1} - 6n + 16 > 0
\end{aligned}$$

那么$C_0$连接于$C_1$。因此，$AQ_n-S$有一个连通分量，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1}-|S_L|-1)+(2^{n-1}-|S_R|-1)=2^n-|S|-2=2^n-6n-17$$

**情形*1.2*：** $L-S_L$包含两个分量，其中一个是孤立的顶点，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1}-|S_L|-1$ 的连通分量$C_0$；$R-S_R$包含两个分量，其中一个是$K_2$，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1}-|S_R|-2$ 的连通分量$C_1$。因为对于$n\geq 5$，有

$$\begin{aligned}|V(C_0)|-(|S_R+1|)&=2^{n-1}-|S_L|-1-|S_R|-2\\&=2^{n-1}-|S|-3\\&\geq 2^{n-1}-(6n-18)-3\\&=2^{n-1}-6n+15>0\end{aligned}$$

那么$C_0$连接于$C_1$。因此，$AQ_n-S$有一个连通分量，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1}-|S_L|-1)+(2^{n-1}-|S_R|-2)=2^n-|S|-2=2^n-6n-18$$

$R-S_R$包含两个分量，其中一个是孤立的顶点，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1}-|S_R|-1$ 的连通分量$C_1$；$L-S_L$包含两个分量，其中一个是$K_2$，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1}-|S_L|-2$ 的连通分量$C_L$，这种情形的证明过程与上面一样。

**情形*1.3*：** 那么$L-S_L(R-S_R)$包含两个分量，其中一个是$K_2$，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1}-|S_L|-2$ 的连通分量，记为$C_0(C_1)$。这种情形不存在，如果存在这种情形的话，有$|S_L|=|S_R|\geq 4(n-1)-8=4n-12$，也就是$S=|S_L|+|S_R|\geq(4n-12)+(4n-12)=8n-24>6n-15$，对于$n\geq 6$。矛盾。

**情形*2*：** $L-S_L$和$R-S_R$都是连通的。设$C_0=L-S_L,C_1=L-S_R$。在$L$和$R$之间有$2^n$条边，而最多只有$2|S|$条边其至少有一个顶点属于这些边。因为$2^n\geq 2(6n-15)$，则$C_0$ 和$C_1$是相连的。因此，$AQ_n-S$是连通的，其顶点个数为$2^n-6n+15$。

**情形*3*：** 在$L-S_L$和$R-S_R$中，其中一个是连通的，另一个是不连通的。不失一般性，我们假设$L-S_L$是不连通的，$R-S_R$是连通的。根据$S_L$中的顶点个数，我们有下面几种情况。

**情形*3.1*：** $2n-3\leq|S_L|\leq 6n-24$。根据定理*4*，$|S_L|\leq 6n-24=6(n-1)-18$，$L-S_L$有一个顶点个数不少于$2^{n-1}-|S_L|-2$的连通分量，记为$C_0$。又因为对于$n\geq 6$，

$$\begin{aligned}|V(C_0)|-(|S_R|)&=2^{n-1}-|S_L|-2-|S_R|\\&=2^{n-1}-|S|-2\\&\geq 2^{n-1}-(6n-18)-2\\&=2^{n-1}-6n+16>0\end{aligned}$$

，则$C_0$连接于$R-S_R$，因此$AQ_n-S$有一个连通分量，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1}-|S_L|-2)+(2^{n-1}-|S_R|)=2^n-|S|-2=2^n-6n-17$$

**情形*3.2*：** $6n-23 \leq |S_L| \leq 6n-15$。那么$|S_R| \leq 8$。根据性质*1*，$L-S_L$中最多有*8*个孤单顶点。根据孤单顶点的个数，我们有下面几种情况：

**情形*3.2.1*：** $L-S_L$中包含最多*3*个孤单顶点。显然，$L-S_L$含有至少$2^{n-1}-|S_L|-3$个非孤单顶点。因此，$AQ_n-S$中存在一个连通分量，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1}-|S_L|-3)+(2^{n-1}-|S_R|)=2^n-|S|-2=2^n-6n-18.$$

**情形*3.2.2*：** $L-S_L$中包含*4*个孤单节点。设$x,y,s,t$为$L-S_L$中的*4*个孤单节点。显然，$L-S_L$含有$2^{n-1}-|S_L|-4$个非孤单节点。根据引理*6*，$4 \leq |S_R| \leq 8$，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x,y,s,t\}) \geq 8(n-1)-24=8n-32>6n-15-4$，则在$x,y,s,t$中至少存在一个顶点不是非孤单顶点。因此，$AQ_n-S$中存在一个连通分量，其顶点个数为：

$$(2^{n-1}-|S_L|-3)+(2^{n-1}-|S_R|)=2^n-|S|-2=2^n-6n-18.$$

**情形*3.2.3*：** $L-S_L$中包含*5*个孤单顶点，设$x,y,s,t,u$为$L-S_L$中的*5*个孤单节点。显然，$L-S_L$含有$2^{n-1}-|S_L|-5$个非孤单节点。根据引理 *1*，$x,y,s,t,u$包含一个或两个补边。根据引理*7*和引理*8*，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x,y,s,t,u\}) \geq 10(n-1)-39=10n-49>6n-15-6$，则在$x,y,s,t$中至少存在一个顶点不是非孤单顶点。因此，$L-S_L$中包含*4*个孤单顶点，此时该情形变为情形*3.2.2*。下面的证明与情形*3.2.2*相似。

**情形*3.2.4*：** $L-S_L$中包含*6*个孤单顶点，设$x,y,s,t,u,v$为$L-S_L$中的*6*个孤单节点。显然，$L-S_L$含有$2^{n-1}-|S_L|-6$个非孤单节点。根据引理 *1*，$x,y,s,t,u,v$包含2个或3个补边。根据引理*9*和引理*10*。对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x,y,s,t,u\}) \geq 12(n-1)-48=12n-60>6n-15-6$，则在$x,y,s,t,u$中至少存在一个顶点不是非孤单顶点。因此，$L-S_L$中包含*5*个孤单顶点，此时该情形变为情形*3.2.3*。下面的证明与情形*3.2.3*相似。

对于$L-S_L$中包含*7*个或者*8*个孤单顶点的情况，证明方法与情形*3.2.3*和*3.2.2*类似，在此不再赘述。

引理18可以由引理17直接得到。

**Lemma 18.** *[1]* 设$S$是$AQ_n$的一个顶点子集，其中$|S| \leq 6n-15$, $n \geq 6$。那么*,* $AQ_n-S$满足以下四个条件之一*:*

*(1)* $AQ_n-S$是连通的；
*(2)* $AQ_n-S$有两个分支，其中一个是$K_1$，另一个包含$2^n-|S|-1$个顶点；
*(3)* $AQ_n-S$有两个分支，其中一个是$K_2$，另一个包含$2^n-|S|-2$个顶点；
*(4)* $AQ_n-S$有两个分支，其中一个包含3个顶点，另一个包含$2^n-|S|-3$个顶点；
*(5)* $AQ_n-S$有三个分支，其中有两个是$K_1$，且第三个包含$2^n-|S|-2$个顶点。
*(6)* $AQ_n-S$有三个分支，其中一个是$K_1$，另一个是$K_2$，且第三个包含$2^n-|S|-3$个顶点。
*(7)* $AQ_n-S$有四个分支，其中有三个是$K_1$，且第三个包含$2^n-|S|-3$个顶点。

根据引理18，我么可以得到下面的定理：

**Lemma 19.** 设$F$是$AQ_n$的一个额外集，其中$|F| \leq 6n-15$, $n \geq 6$。那么*,* $AQ_n-S$满足以下四个条件之一*:*

*(1)* $AQ_n-F$是连通的；
*(2)* $AQ_n-F$包含两个连通分量，其中一个包含一个顶点个数为3的连通分量，另一个是包含顶点个数为$2^n-|F|-3$的连通分量。

接下来，我们将提出一个$MM^*$模型下$AQ_n$的2-额外，$6n-15$诊断算法。该算法基于$AQ_n$ 的两个性质：(1) 对于$AQ_n$中的故障顶点集$|F| \leq 6n-15$，$AQ_n-F$只包含一个顶点个数至少为$2^n-$

$6n-18$的连通分量；(2) $AQ_n$在$MM^*$模型下$AQ_n$的2-额外，$6n-15$可诊断的。这个算法可以正确的诊断出$AQ_n$中的所有的故障顶点。首先，我们先给出一个通过深度优先可以确定$AQ_n$中具有同一症状（顶点都为故障或者无故障）的连通分量。

**Algorithm 1** `AQn-DFS-MM*`

**Input:** 故障顶点集$F$在$G$上生成的症状$\sigma$，其中$|F| \leq 6n-15, n \geq 8$，以及两个无故障的顶点$i, k \in V(AQ_n), (i,k) \in E(AQ_n)$。
**Output:** 集合$T$。

$T \leftarrow \{i, k\}$;
**function** `DFS-MM*`$(AQ_n, i, k)$
    **for** $j \in N_{AQ_n}(k) - T$ **do**
        **if** $\sigma(i,j)_k = 0$ **then**
            $T \leftarrow T \cup \{j\}$;
            `DFS-MM*`$(AQ_n, k, j)$;
        **end if**
    **end for**
**return** $T$
**end function**

**Algorithm 2** `AQn-2-extra-diagnosability`

**Input:** 故障顶点集$F$在$G$上生成的症状$\sigma$，其中$|F| \leq 6n-15, n \geq 8$。
**Output:** 集合$T, F', H$。

$T \leftarrow \emptyset, F' \leftarrow \emptyset, R \leftarrow V(AQ_n)$;
在$R$中选择2个无故障顶点$i, k$;
$T \leftarrow$ `DFS-MM*`$(AQ_n, i, k)$;
**if** $|T| \leq 3$ **then**
    重新选择2个无故障顶点$u, v$;
    $T \leftarrow T \cup$ `DFS-MM*`$(AQ_n, u, v)$;
    $F' \leftarrow R - T$;
**return** $T, F'$;
**end if**

**for** 对于顶点$x \in N_{AQ_n}(T), y, r \in T$，有$(x,r) \in E(AQ_n)$和$(y,r)$ **do**
    **if** $\sigma(x,y)_r = 1$ **then**
        $F' = F' \cup \{x\}$;
    **end if**
**end for**
$T \leftarrow F'$;
**return** $T, F'$;

# References


[1] Chang N W and Hsieh S Y. Conditional Diagnosability of Augmented Cubes under the PMC Model[J]. IEEE Transactions on Dependable & Secure Computing, 2011, 9(1):46-60.

[2] Lai P L, Tan J J M, Chang C P, and Hsu L H. Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2):165-175.

[3] Sengupta A and Dahbura A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11):1386-1396.

[4] Zhang S and Yang W. The $g$-extra conditional diagnosability and sequential $t/k$ -diagnosability of hypercubes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 93(3):1-20.

[5] Jiarong L, Fang C , Qian Z and Min X. $t/t$-Diagnosability and $t/k$-Diagnosability for Augmented Cube Networks[J]. IEEE Access, 2018, PP:1-1.

[6] Hong W S and Hsieh S Y. Strong Diagnosability and Conditional Diagnosability of Augmented Cubes Under the Comparison Diagnosis Model[J]. Reliability, IEEE Transactions on, 2012, 61(1):p.140-148.

[7] Hao R X , Tian Z X , Xu J M . Relationship between Conditional Diagnosability and 2-extra Connectivity of Symmetric Graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2016:36-53.

[8] Lv M , Fan J , Zhou J , et al. The extra connectivity and extra diagnosability of regular interconnection networks[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 809.

[9] Huang Y , Lin L , Xu L. A New Proof for Exact Relationship between Extra Connectivity and Extra Diagnosability of Regular Connected Graphs under MM* Model[J]. Theoretical Computer Science, 2020.

[10] Li X, Jia X, Fan J, Lin C. Reliability analysis of data center networks based on precise and imprecise diagnosis strategies[J]. Theoretical Computer Science, (2020), 809: 189-203.

[11] Ma M, Liu G and Xu J M . The super connectivity of augmented cubes[J].Information Processing Letters, (2008), 106(2):59-63.