蘇州大學

硕 士 学 位 论 文

(2 0 2 1 届)

扩展立方体网络的容错性质研究

Research on Fault-tolerant Properties of Augmented Cubes

研 究 生 姓 名　阚双祥

指导教师姓名　樊建席

专　业　名　称　计算机技术

研　究　方　向　并行与分布式系统

论文提交日期　2020 年 5 月

苏州大学学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

论文作者签名：________________ 日　　期：________________

苏州大学学位论文使用授权声明

本人完全了解苏州大学关于收集、保存和使用学位论文的规定，即：学位论文著作权归属苏州大学。本学位论文电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。苏州大学有权向国家图书馆、中国社科院文献信息情报中心、中国科学技术信息研究所（含万方数据电子出版社）、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社送交本学位论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存和汇编学位论文，可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索。

涉密论文□

本学位论文属　　　　　　在______年___月解密后使用本规定。

非涉密论文□

论文作者签名：________________ 日　　期：________________

导 师 签 名：________________ 日　　期：________________

扩展立方体网络的容错性质研究

摘　要

随着社会信息化的发展，计算机应用深入到了各个行业，与此同时，网络资源和数据规模也不断扩大，对海量数据处理的要求也越来越高。在这样的背景下，云计算（Cloud Computing）迅速兴起。作为云计算的基础设施和下一代网络技术的创新平台，数据中心网络的研究成为了近年来学术界和工业界关注的热点。数据中心网络的性能在很大程度上决定云计算的性能，因此，可以通过构建性能良好的数据中心网络来提升云计算的性能。但是随着数据中心网络规模的扩大和复杂性的提高，数据中心网络中的服务器数量变得越来越庞大。比如，腾讯在2019 年底的服务器的数量就已经达到100 万台 [1]。

在拥有如此庞大数量服务器的数据中心网络中，如何将这些服务器连接起来，使其构成一个性能良好的数据中心网络，是提升云计算性能所面临的重要挑战之一。迄今为止，人们已经提出了多种网络拓扑结构，如传统的树型结构、Fat-Tree、DCell、BCube、VL2、CamCube和Ficonn等。

决定网络性能的因素有很多，主要包括如下几个方面：

- 可扩展性和成本：可扩展性是指网络应能够根据数据处理要求的提高而可以比较容易地增加服务器的数量；
- 通信性能：数据通信是指服务器之间的数据传输能力；
- 容错性能：容错是指当网络中的某些资源发生故障时，网络是否可以正常运行。

扩展立方体，是著名互联网络超立方体拓扑结构的一种重要变体。扩展立方体不仅保留了超立方体的许多优秀的性质，同时拥有超立方体和它的其他变体所不具备的优点。比如，扩展立方体的连通度是$2n-1$，几乎是超立方体的两倍。这也意味着扩展立方体的容错性能在一些方面远胜过超立方体。

本文主要研究了扩展立方体的容错方面的性质，主要包括结构连通度，额外连通度以及额外诊断度。同时提出了容错路由算法和诊断算法。具体成果如下：

（1）本文从故障结构而非故障顶点的角度研究了扩展立方体的结构连通度和子结构连通度，同时提出了在$K_{1,6}$子结构连通度下的容错路由算法，同时通过模拟实验验证了算法的有效性和准确性。

（2）在额外连通度和额外诊断度的定义下，我们分别研究了扩展立方体的2-额外连通度和2-额外诊断度，并给出了详细的证明。同时我们基于2-额外诊断度提出了额外诊断算法。该算法可以帮助我们正确定位故障顶点来保证网络的的正常运行。

关键词： 云计算，高性能计算，扩展立方体，结构连通度，子结构连通度，额外连通度，额外诊断度，容错路由算法，诊断算法

作　　者： 阚双祥

指导教师： 樊建席

Research on Fault-tolerant Properties of Augmented Cubes

Abstract

With the development of social information, the application of computer has penetrated into every industry. At the same time, the scale of network resources and data are also expanding, and the requirements for massive data processing are getting higher and higher. In this context, Cloud Computing is rising rapidly. As the infrastructure of cloud computing and the innovation platform of the next generation network technology, the research of data center network has become the focus of academic and industrial circles in recent years. The performance of the data center network largely determines the performance of cloud computing, so you can improve the performance of cloud computing by building a well-performing data center network. However, with the increase of the scale and complexity of the data center network, the number of servers in the data center network becomes more and more huge. Tencent, for example, had 1 million servers at the end of 2019 [1].

In a data center network with such a large number of servers, how to connect these servers to form a well-performing data center network is one of the important challenges to improve the performance of cloud computing. So far, many kinds of network topologies have been proposed, such as traditional Tree structure, Fat Tree, DCell, BCube, VL2, CamCube and Ficonn, etc.

There are many factors that determine network performance, including the following aspects:

- Scalability and Cost: Scalability means that the network should be able to increase the number of servers relatively easily according to the improvement of data processing requirements;
- Communication performance: Data communication refers to the ability of data transmission between servers;
- Fault-tolerant performance: Fault-tolerant refers to whether the network can operate normally when some resources in the network fail.

The augmented cube is an important variant of the famous interconnection network hypercube. The augmented cube not only retains many of the great properties of the hypercube, but also has advantages that the hypercube and its other variants do not have. For example, the connectivity of the augmented cube is $2n-1$, almost twice that of the hypercube. This also means that the fault tolerance of the augmented cube is in some ways much better than that of the hypercube.

In this paper, we mainly study the properties of fault tolerance of augmented cube, including structure connectivity, extra connectivity and extra diagnosability. At the same time, the fault-tolerant routing algorithm and diagnosis algorithm are proposed. Specific achievements are as follows:

(1) In this paper, the structure connectivity and substructure connectivity of the augmented cube are studied from the point of view of the fault structure rather than the fault vertex. At the same time, a fault-tolerant routing algorithm is proposed under $K_{1,6}$-substructure connectivity. At the same time, the validity and accuracy of the algorithm are verified by simulation experiments.

(2) Under the definition of extra connectivity and extra diagnosability, we study the 2-extra connectivity and 2-extra diagnosability of the augmented cube respectively, and give detailed proof. At the same time, we proposed an additional diagnosis algorithm based on 2-extra diagnosability. This algorithm can help us locate the fault vertex correctly to ensure the normal operation of the network.

Keywords: Cloud computing, High performance computing, Augmented cube, Structure connectivity, Substructure connectivity, Extra connectivity, Extra diagnosability, Fault-tolerant routing algorithm, Diagnosis algorithm

Written by Shuangxiang Kan

Supervised by Janxi Fan

目　录

第一章 绪论

1.1 研究背景

随着大数据和人工智能时代的来临，数据的规模也呈爆炸式的增长。对数据的有效处理也成为了能否有效利用海量数据的关键之一。在这样的需求和背景下，云计算应运而生。云计算（Cloud Computing）是分布式计算的一种，指的是通过网络“云”将巨大的数据计算处理程序分解成无数个小程序，然后，通过多部服务器组成的系统进行处理和分析这些小程序得到结果并返回给用户。云计算的发展将会改变我们的生活、学习和生产方式，而且改变将是颠覆性的，就像当年的工业大革命一样，完全使人们进入了一个数据化和自动化的世界。云计算激发了技术大变革，行业技术竞争的焦点转向了数据中心计算、新型人机交互和智能算法等方面。在这些技术领域，国内的工业界尤其是大型的互联网公司，凭借积累的技术经验和丰厚的资金支持，与国际科技巨头的差距并不是特别大。技术的开源和开放性，为我国迎头赶上乃至实现超越提供了机会。从国家战略层面来说，我们应该建立自己的云计算平台，充分利用云计算这一先进生产力来帮助提升我国的科技和创新能力，并确保国家安全。因此，为了进一步提升我国云计算发展与应用水平，积极抢占信息技术发展的制高点。中国工业和信息化部提出了《云计算发展三年行动计划》，并制定到2019年云计算产业规模达到4300亿元的发展目标 [2]。

云计算的发展和应用受到多方面的影响，而数据中心网络的性能则是影响云计算能否有效处理海量数据的重要因素之一。随着数据规模的不断扩大，数据中心网络的规模也呈现出指数级的增长。腾讯在2019年底的服务器的数量就已经达到100万台 [1]。截止到2020年7月，阿里云在全球22个地域部署了上百个数据中心，服务器的总规模数已经接近200万台。如果把这些服务器堆叠起来，整体高度会超过20个珠穆朗玛峰 [3]。面对规模如此巨大的服务器数量，如何将它们有效地连接起来，使其成为一个性能优良的数据中心网络。是各个企业以及国家所急需解决的问题。

为了构建能够连接规模巨大的服务器网络，各种各样的互联网络被相继提出。这些拓扑结构在很大程度上影响着数据中心网络的性能，如构造成本、延迟、路由以及可靠性等。最早提出的互联网络拓扑结构包括树、环、总线和完全图等。虽然树、环和总线的结构简单且易于构造，但由于其稳定性不高，当网络中的一些资源

（如服务器，链路等）发生故障，很容易造成整个网络的瘫痪。完全图虽然稳定性较好，因为其每个服务器都和剩余的所有服务器相连，但是在服务器数量规模很大的情况下，链路数量会急剧增大，导致其构造成本过高，不适宜大规模的互联网络。因此，后来许多学者提出了一些成本较低、易于构造且稳定性较好的互联网络拓扑结构。包括超立方体（Hypercube） [4]、网格（Mesh） [5]、交叉立方体（Crossed Cube） [6]、星图（Star） [7]和广义超立方体（Generalized Hypercube） [8]等。其中超立方体是这些拓扑结构中比较具有代表性的一个，因其具有很多优良的性质如边对称、点对称、低度数和正则性等，而受到广泛的关注。后来的很多拓扑结构都是基于超立方体的结构进行改造而提出的。

本文研究的互联网络拓扑结构是由Choudum等人 [9]提出的扩展立方体（Augmented Cube）。该结构也是基于超立方体而提出的。扩展立方体不仅保留了超立方体的许多优秀的性质，同时也拥有着超立方体和它的其他变体所不具备的优点。比如，扩展立方体的连通度是$2n-1$，几乎是超立方体的两倍。这也意味着扩展立方体的容错性能在一些方面远胜过超立方体。同时，扩展立方体还具备超立方体所没有的嵌入的性质。我们将在本文中研究扩展立方体的容错性质，其中包括结构连通度、子结构连通度、额外连通度以及额外诊断度等性质，并提供容错路由算法和诊断算法。

1.2 研究现状及研究意义

随着网络规模的不断扩大，网络中的资源如服务器和链路等资源会不可避免地发生故障。因此一个网络的容错能力是一个网络能正常运行的关键。我们希望可以通过一些指标来评估一个互联网络的容错能力，而连通度是评价一个网络容错能力最常用的指标之一。此外，如何将故障资源诊断出来，并将其替换为可以正常工作的资源，也是互联网络的重要功能。接下来，我们将对连通度和诊断这两个方面进行详细阐述。

1.2.1 连通度

为了更好地研究互联网络的性质，我们通常将一个互联网络抽象为一个无向图。图中的每个顶点表示一个服务器，图中的每条边表示两个顶点之间的链路。连通度是衡量一个互联网络容错能力的重要指标之一。一个拥有n个顶点的图G，在删

除$k-1$个顶点之后仍然是连通的。在删除k个顶点之后变为不连通的或者平凡的（指仅有一个顶点的图），那么图G称为n-连接图，并且k称为图G的连通度，记为$\kappa(G)$。通常，一个图的连通度越大，这个图所代表的互联网络就越稳定。尽管这种传统连通度可以正确地反映一个网络的容错能力，但是它有一个明显的缺陷。那就是，传统的连通度往往假设一个顶点的所有邻居顶点可能会同时发生故障而导致整个网络变为不连通的或者平凡的，但是，这种情形在现实中发生的概率往往是非常低的。因此，传统的连通度往往不能真实地反映出大规模互联网络在实际运行环境中出现故障的情形。*Harary*等人 [10]提出的条件连通度，他们通过对网络因为某些顶点发生故障而变为不连通时，对该不连通图中的每个连通分支增加一些限制条件在某种程度上弥补了这种缺陷。接着，*Fàbrega*等人 [11]提出了g-额外连通度的概念。给定一个图G和一个非负整数g，如果G中存在一个顶点集合，当G删除这个顶点集合后，该图变为不连通的，且每个连通分支所包含的顶点个数大于等于$g+1$，那么我们就称这个集合为g-顶点割。图G的g-额外连通度指的是图G的所有g-顶点割的最小基数，记为$\kappa_g(G)$。g-额外连通度是超连通度 [12]的一般化，一个图的超连通度实际上对应的是$\kappa_1(G)$。关于条件连通度的更多信息可以参考论文 [12–28]。

但是，无论是传统的连通度还是条件连通度，它们都基于这样一种假设：单个顶点发生故障是一个独立的事件。在这种情况下，当网络中的一个顶点发生故障时，这个故障顶点对它周围的顶点是没有任何影响的。然而在实际的运行环境中，当一个顶点发生故障时，它周围的邻接顶点发生故障的概率大大增加，这样就可能在网络中产生一个故障结构。正是基于这样的考虑，Lin等人 [29]提出了条件连通度和子结构连通度的概念，并对超立方体的连通度和子结构连通度进行了研究。结构连通度实际上是把故障元素从单个故障顶点扩展到故障结构的形式。更多关于结构连通度和子结构连通度的研究可以参考论文 [30–34]。

1.2.2 诊断

随着互联网络规模的扩大，因为运行环境或者其他的问题，网络中的一些顶点会不可避免地发生故障。因此网络的稳定性是保证系统正常工作的关键之一。为了保证系统的正常运行，系统应该能够确定这些故障顶点并以无故障顶点来替换这些故障顶点。寻找网络中故障顶点的过程叫做诊断。而一个系统所能确定的最大的故障顶点数叫做这个系统的诊断度。有几种不同的诊断模型已经被提出来，其中，

PMC模型和MM*模型是使用最广泛的两种，下面我们对这两种诊断模型进行说明。

1.2.2.1 PMC模型

Preparata、Metze和Chien [35]提出的PMC模型模型是基于测试的。PMC模型假设一个顶点可以测试与它相邻的顶点的状态（故障或者无故障）。当且仅当测试顶点是无故障的，测试结果才是可靠的。下面的表格1-2说明不同状态的顶点的测试结果。我们用u表示测试顶点，v表示被测试顶点，测试的所有结果的集合叫做症状。我们用0表示u测试v是无故障的，反之则用1表示u测试v是故障的。

表 1-1 PMC模型下不同状态顶点的测试结果

测试顶点u	被测试顶点v	测试结果
正常	正常	0
正常	故障	1
故障	正常	0或1
故障	故障	0或1

.

1.2.2.2 MM*模型

Maeng和Malek [36]提出的MM模型模型是基于比较的。在这种模型下，故障顶点的数量是有限制的，且所有的故障顶点都是永久的。MM模型下的一个测试顶点w向其两个不同的被测试的邻居顶点u 和v各发送一个测试任务，然后比较他们的返回信息。不同的测试顶点可以测试相同的两个被测试顶点。比较的结果分为一致的和不一致的。和PMC模型一样，只有当测试顶点是无故障顶点的情况下，测试结果才是可靠的。当测试顶点和两个被测试顶点都是无故障顶点时，测试结果一致，记为0，否则记为1。Sengupta和Dahbura [37]提出的MM*模型是对MM模型的进一步改进，在这个模型中，每个顶点必须测试另外两个相邻的顶点。下面的表格4-1说明了MM*模型下在不同状态的顶点的测试结果。

表 1-2 MM*模型下不同状态顶点的测试结果

测试顶点w的状态	被测试顶点u和v的状态	测试结果
正常	都正常	0
正常	至少有一个故障	1
故障	任意	0或1

.

1.3 研究内容

本文的研究内容分为以下两个部分：

一、扩展立方体的结构连通度和子结构连通度

在第三章中，基于结构连通度和子结构连通度的定义，我们求出了扩展立方体的结构连通度和子结构连通度，并给出了相关证明。同时，我们给出了扩展立方体在小于$K_{1,6}$-子结构连通度下的容错路由算法，并给出模拟实验的结果。

第三章的研究成果如下：

$$(1)\ \kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \begin{cases} 2n-1 & \text{for } n \geq 4 \text{ and } K_{1,M} = K_1, \\ \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil & \text{for } n \geq 4 \text{ and } 1 \leq M \leq 3, \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil & \text{for } n \geq 6 \text{ and } 4 \leq M \leq 6. \end{cases}$$

$$(2)\ \kappa(AQ_n, P_L) = \kappa^s(AQ_n, P_L) = \lceil \tfrac{2n-1}{L} \rceil \qquad \text{for } n \geq 3 \text{ and } 1 \leq L \leq 2n-1.$$

$$(3)\ \kappa^s(AQ_n, C_N) = \lceil \tfrac{2n-1}{N} \rceil \qquad \text{for } n \geq 3 \text{ and } 3 \leq N \leq 2n-1.$$

$$(4)\ \kappa(AQ_n, C_N) = \begin{cases} n-1 & \text{for } n \geq 6 \text{ and } N = 3, \\ \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil & \text{for } n \geq 6 \text{ and } 4 \leq N \leq 2n-1. \end{cases}$$

二、扩展立方体的额外连通度和额外诊断度

在第四章中，基于额外连通度和额外诊断度的定义，我们求出了扩展立方体的2-额外连通度和2-额外诊断度，并给出了相关证明。同时，我们给出了当扩展立方体的故障顶点数小于其2-额外诊断度时的诊断算法。并给出模拟实验的结果。

第四章的研究成果如下：

1. n-维扩展立方体AQ_n的2-额外连通度为$6n-17$，其中$n \geq 9$。

2. n-维扩展立方体AQ_n的2-额外诊断度为$6n-15$，其中$n \geq 9$。

1.4 文章组织结构

全文的组织结构如下：

第一章介绍了本文的研究背景、研究现状、研究内容以及文章的组织结构。

第二章首先介绍了本文中需要使用的关于图论中的基本定义和符号表示，然后介绍了扩展立方体的基本定义和后面要用到的一些性质。

第三章给出了扩展立方体的结构连通度及子结构连通度，扩展立方体在故障顶点数小于$K_{1,6}$-子结构连通度下的容错路由算法。

第四章给出了扩展立方体的2-额外连通度和2-额外诊断度，并给出了当扩展立方体的故障顶点数小于2-额外诊断度时的诊断算法。

第五章对本论文所做的工作进行了总结，并对未来的研究工作进行了展望。

第二章 相关知识

本章节主要介绍后面所需要用到的关于图论的相关定义和符号，以及扩展立方体的定义及相关性质。

2.1 基本定义和符号表示

为了更好地研究互联网络的性质，我们通常将一个互联网络抽象成一个无向图。图中的每个顶点代表一个服务器，图中的每条边代表两个服务器之间的通信链接。一个无向图通常可以定义为一个二元组$G = (V(G), E(G))$，其中：（1）$V(G)$表示一个有限且非空的顶点集合；（2）$E(G)$表示连接$V(G)$ 中两个不同顶点的边的集合。在本论文中，所有的图都是简单图。

图G的一个顶点u的所有邻居顶点定义为$N_G(u) = \{v \mid (u, v) \in E(G)\}$，同时我们定义$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$。类似的，对于一个顶点集合$S \subset V(G)$，我们设$N_G(S) = \bigcup_{u\in V(G)} N_G(u) - S$，$N_G[S] = N_G(S) \cup S$。在不会引起混淆的情况下，我们也会使用$N(u)$来代替$N_G(u)$(其他表示方法类似)。如果图$G$中的每个顶点的度数（邻居顶点数）都是相同的且度数为n，则称图G是n-正则图或n-正则的。

设$F \subset V(G)$，$G - F$表示通过从G中删除F中的所有顶点和至少包含一个F中的顶点的边而得到的图。设M和N是$V(G)$中的两个不同的顶点子集，$M\Delta N = (M - N) \cup (N - M)$。同时，我们用$E[M, N]$表示所有连接$M$和$N$的边。

如果一个图G的顶点集合可以被分成两个不想交的子集X和Y，其中$|X| = m$和$|Y| = n$，使得X中的任意一个顶点和Y中的每个顶点都分别存在唯一一条的边与之相连，并且不存在一条边的两个顶点属于同一个顶点子集（X或Y）。则G被称为一个完全二分图，记作$K_{m,n}$。我们用K_1来代替一个孤立的顶点。

一条路径$P_k = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$是一个由不同顶点组成的有限非空序列，其中$(u_i, u_{i+1}) \in E(G), 1 \le i \le k-1$。我们也用$(u_1, \ldots, u_i, Q, u_j, \ldots, u_k)$ 来表示$(u_1, u_2, \ldots, u_k)$，其中$Q = (u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{j-2}, u_{j-1})$。路径$P$的转置$(u_k, u_{k-1}, \ldots, u_1)$，记为$P^{-1}$。以路径$P$中的顶点$u_i$为起始顶点，$u_j$为结尾顶点的部分路径记为$Path(P, u_i, u_j)$。路径$P$的长度$l(P)$，其值为$P$的总边数。此外，我们用$P[i]$来表示路径$P$的第$i$个顶点$u_i$，其中$1 \le i \le k$，并且我们用$P[-j]$来表示$P$的倒数第$j$个顶点。类似的，我们用$V(P)$和$E(P)$来分别

表示路径P的顶点集合和边集合。圈$C_k = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$是一种特殊的路径，其中$k \geq 3$且$(u_1, u_k) \in E(G)$。

对于图G和H，如果$V(H) \subseteq V(G)$且$E(H) \subseteq E(G)$，那么H被称为G的子图，G被称为H的母图。如果H是G的子图且$V(H) = V(G)$，那么H被称为G的生成子图，G被称为H的生成母图。对于G的一个非空顶点集合$V' \subseteq V(G)$，如果G的子图H以V'为它的顶点集合，并且H的每条边的两个顶点都在V'中，那么H叫做G的导出子图，记为$G[V']$。

图G和H是同构的，如果存在一个映射：$f : V(G) \to V(H)$，使得对于$(u, v) \in E(G)$，有$(f(u), f(v)) \in E(H)$。

设H是图G的一个子图，F是一个元素的集合，且集合中的元素是G中的顶点子集。设$W(F) = \bigcup_{s \in F} s$，如果集合$F$满足$G - W(F)$是一个不连通图或者是一个平凡图，且$F$中的每个元素的导出子图和$H$的生成母图之一同构，那么$F$就叫做图$G$ 的一个H-结构割。图G的H-结构连通度，记为$\kappa(G, H)$，是G的所有结构割的最小基数。如果F 中的每个元素的导出子图和H的子图的生成母图之一同构，那么F就叫做图G 的一个H-子结构割。图G 的H-子结构连通度，记为$\kappa^s(G, H)$，是G的所有H-子结构割的最小基数。如果H是孤立的顶点。那么H-结构连通度和H-子结构连通度就是传统的连通度。

2.2 扩展立方体的定义及其性质

扩展立方体由Choudum和Sunitha [9]提出，是超立方体的重要变体之一。扩展立方体不仅保留了超立方体的很多优良的性质，同时具备超立方体和它的其他一些变体所不具备的优点，比如，扩展立方体的连通度是$2n - 1$，几乎是超立方体连通度的两倍（超立方体的连通度为n），这意味着扩展立方体在某些方面的容错性能远高于超立方体。下面我们将给出扩展立方体的定义以及后面要用到的一些性质。

2.2.1 扩展立方体的定义

定义 2.1. [9] 对于一个整数$n \geq 1$，一个n-维的扩展立方体AQ_n包含2^n个顶点，每个顶点被标记为一个唯一的二进制串$u_n u_{n-1} \ldots u_2 u_1$，其中$u_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n$。一维的扩展立方体$AQ_1$是一个包含两个顶点0和1的完全图$K_2$。对于$n \geq 2$，$AQ_n$根据以下的方式由两个不相交的$AQ_{n-1}$构建而来：设$0AQ_{n-1}$表示从$AQ_{n-1}$的一个副本中通过在每

个顶点的二进制串前面加上0得到的图，设$1AQ_{n-1}$表示从AQ_{n-1}的一个副本中通过在每个顶点的二进制串前面加上1得到的图。一个$0AQ_{n-1}$中的顶点$u = 0a_{n-1}\ldots a_2a_1$邻接于$1AQ_{n-1}$ 中的顶点$v = 1b_{n-1}\ldots b_2b_1$当且仅当，对于$i = 1,\ldots,n-1$，（1）$a_i = b_i$，在这种情况下，$(u,v)$被称为一条超立方体边；（2）$a_i = \bar{b}_i$，在这种情况下，$(u,v)$被称为一条补边。

对于扩展立方体的任意一个顶点$u = a_na_{n-1}\ldots a_1$，我们用$u^i(\bar{u}^i)$来代表一个二进制串$a_n\ldots a_{i+1}\bar{a}_ia_{i-1}\ldots a_1(a_n\ldots a_{i+1}\bar{a}_i\bar{a}_{i-1}\ldots\bar{a}_1)$。显然$u^1 = \bar{u}^1$，有些时候我们会交替使用这两种表示方式。比如，如果$u = 011001$，那么$u^1 = \bar{u}^1 = 011000$，$u^2 = 011011$，$u^4 = 010001$，$\bar{u}^4 = 010110$，$(u^4)^2 = 010011$，$(\bar{u}^4)^3 = 010010$，$(\overline{u^4})^2 = 010010$，和$(\overline{u^4})^2 = 010101$。

上面关于扩展立方体的定义是从递归的角度进行定义的。类似于超立方体和其他的图，扩展立方体也有其他的定义，关于扩展立方体的另外一种定义如下：

定义 2.2. [9] 当$n \geq 1$时，一个n-维的扩展立方体包含2^n个顶点，每个顶点由一个唯一的n-维二进制串$u_nu_{n-1}\ldots u_2u_1$ 标记。如果两个顶点$a = a_na_{n-1}\ldots a_2a_1$和$b = b_nb_{n-1}\ldots b_2b_1$之间存在一条边，当且仅当存在一个整数$k$，$1 \leq k \leq n$，（1）对于$1 \leq i \leq n, i \neq k$，有$a_k = \bar{b}_k$，$a_i = b_i$；或者（2）对于$1 \leq i \leq k$，有$a_i = \bar{b}_i$，对于$k+1 \leq i \leq n$，有$a_i = b_i$。

图 2-1是1-维、2-维和3-维的扩展立方体。

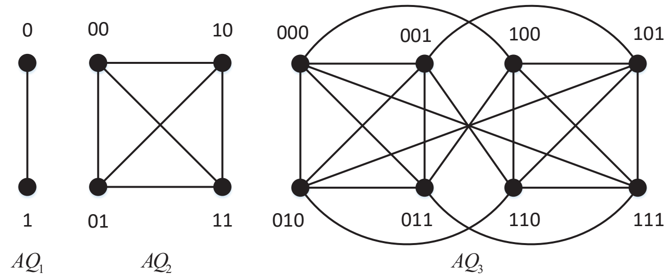


图 2-1 扩展立方体AQ_1，AQ_2和AQ_3

2.2.2 扩展立方体的性质

n-维的扩展立方体的AQ_n的主要性质如下：

（1）共有2^n个顶点；

（2）共有$(2n-1)2^{n-1}$条边；

（3）直径为$\lceil \frac{n}{2} \rceil$；

（4）是$(2n-1)$-正则的；

（5）顶点连通度为：$\kappa(AQ_1)=1, \kappa(AQ_2)=3, \kappa(AQ_3)=4$，对于$n \geq 4, \kappa(AQ_n)=2n-1$；

（6）AQ_n是点对称的。

引理 2.1. *[38]* 当$n \geq 4$时，设x, y是AQ_n中任意2个顶点，$|N_{AQ_n}(x, y)| \geq 4n-8$。

引理 2.2. *[38]* 当$n \geq 4$时，设x, y, z是AQ_n中任意3个顶点，$|N_{AQ_n}(x, y, z)| \geq 6n-17$。

引理 2.3. *[38]* 当$n \geq 4$时，设x, y, s, t是AQ_n中任意4个顶点，$|N_{AQ_n}(x, y, s, t)| \geq 8n-28$。

2.3　本章小结

本章首先介绍了后面要用到的关于图论方面的定义，然后介绍了扩展立方体的定义和相关性质。

第三章　扩展立方体的结构连通度和子结构连通度

连通度是衡量互联网络稳定性的一个重要指标之一。相对于传统连通度只将顶点发生故障当做单一事件相比，互联网络中的结构发生故障更能反映真实运行环境中网络的故障情况。在这一章中，我们研究了扩展立方体的H-结构连通度和H-子结构连通度，其中$H \in \{K_{1,M} P_L, C_N\}$，且$1 \leq M \leq 6, 1 \leq L \leq 2n-1, 3 \leq N \leq 2n-1$。同时我们给出了在扩展立方体中寻找两个无故障顶点的容错路由算法AQFRouting，当网络中的故障顶点数量在一定范围之内，该算法可以帮助我们实现两个无故障顶点之间的正常通信。

3.1　预备知识

在给出扩展立方体结构连通度和子结构连通度的证明之前，我们先给出在本节需要用到的扩展立方体的一些定义和性质：

设u 是AQ_n中的任意一个顶点。为了使我们的证明更加的简便，我们引入了一些符号$v^{[1]}, v^{[2]}, \ldots, v^{[2n-1]}$，其中$v^{[1]}, v^{[2]}, \ldots, v^{[2n-1]}$和$u$的所有邻居顶点$u^1, u^2, \bar{u}^2, \ldots, u^n, \bar{u}^n$形成一一对应的关系。$u^j$和$v^{[i]}$ 的对应关系为：（1）如果i是偶数，则$j = \frac{i}{2}+1$和$u^j = v^{[i]}$；（2）如果i是奇数，则$j = \lceil \frac{i}{2} \rceil$和$\bar{u}^j = v^{[i]}$。$(v^{[i]})^l$ 和$(\overline{v^{[i]}})^l$的定义类似于u^l和$\bar{u}^l$的定义。例如，如果$u = 000000$ 是AQ_6的一个顶点，那么$u^4 = v^{[6]} = 001000, \bar{u}^5 = v^{[9]} = 011111, (v^{[6]})^2 = 001010$和$(\overline{v^{[9]}})^3 = 011000$。在这篇文章中，我们对这两种表示方法不加以区分。

定理 3.1. *[9]* $\kappa(AQ_1) = 1, \kappa(AQ_2) = 3, \kappa(AQ_3) = 4$，对于$n \geq 4, \kappa(AQ_n) = 2n-1$。

根据定理3.1，我们可以得到下面的定理。

定理 3.2. 对于$n \geq 4, \kappa(AQ_n, K_1) = \kappa^s(AQ_n, K_1) = 2n-1$。

定理 3.3. *[12]* 对于$n \geq 6, \kappa_1(AQ_n) = 4n-8$。

引理 3.1. *[12]* 如果(u, u^i)是AQ_n的i-维的一条超立方体边$(1 \leq i \leq n)$，那么

$$N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(u^i) = \begin{cases} \{\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}\} & 2 \leq i \leq n, \\ \{\bar{u}^2, u^2\} & i = 1. \end{cases}$$

也就是是u和u^i在AQ_n中有2个共同的邻居顶点并且$|N_{AQ_n}(\{u, u^i\})| = 4n-6$。

引理 3.2. *[12]* 如果$(u, \bar{u}^i)$是AQ_n的i-维的一条补边$(2 \le i \le n)$，那么

$$N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^i) = \begin{cases} \{\bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} & 2 \le i \le n-1, \\ \{\bar{u}^{n-1}, u^n\} & i = n. \end{cases}$$

也就是u和$\bar{u}^i$在AQ_n中有4个共同的邻居顶点，对于$2 \le i \le n-1$，$|N_{AQ_n}(\{u, \bar{u}^i\})| = 4n-8$。类似的，$u$和$\bar{u}^n$在$AQ_n$中有2个共同的邻居顶点，且$|N_{AQ_n}(\{u, \bar{u}^n\})| = 4n-6$。

引理 3.3. *[12]* 对于$n \ge 3$，AQ_n中的任意两个顶点最多有4个共同的邻居顶点。

根据定义2.1，我们可以很容易地得到下面的关于扩展立方体的性质：

引理 3.4. 如果(u, u^i)和(u, u^j)是AQ_n的i-维和j-维的两条超立方体边$(1 \le i \ne j \le n)$。不失一般性，设$i < j$，有

$$N_{AQ_n}(u^i) \cap N_{AQ_n}(u^j) = \begin{cases} \{u, (u^i)^j, \bar{u}^i, (\bar{u}^j)^i\} & j = i+1 \text{ and } i > 1, \\ \{u, (u^i)^j\} & j > i+1, \\ \{u, (u^1)^2\} & i = 1 \text{ and } j = 2. \end{cases}$$

引理 3.5. 如果$(u, \bar{u}^i)$和$(u, \bar{u}^j)$是AQ_n的i-维和j-维的两条补边$(1 \le i \ne j \le n)$。不失一般性，设$i < j$，有

$$N_{AQ_n}(\bar{u}^i) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^j) = \begin{cases} \{u, \bar{u}^{i+1}, (u^j)^{j-1}, (\bar{u}^j)^{j-1}\} & j = i+2, \\ \{u, (\overline{\bar{u}^j})^i\} & j = i+1 \quad \text{or} \quad j > i+2. \end{cases}$$

引理 3.6. 如果(u, u^i)是AQ_n的一条i-维的超立方体边，$(u, \bar{u}^j)$是AQ_n的一条j-维的补边$(1 \le i, j \le n)$，那么

$$N_{AQ_n}(u^i) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}^j) = \begin{cases} \{u, (u^i)^{i-1}, (\bar{u}^i)^{i-1}, \bar{u}^{i-1}\} & i = j \text{ and } i > 1, \\ \{u, \bar{u}^i, (\bar{u}^j)^{i+1}, (u^i)^{i+1}\} & i = j+1 \text{ and } i < n, \\ \{u, \bar{u}^i\} & i = n \text{ and } j = n-1, \\ \{u, (u^i)^{i-1}, (\bar{u}^i)^{i-1}, \bar{u}^{i-1}\} & i = j+2, \\ \{u, (\bar{u}^j)^i\} & |i-j| > 2, \\ \{u, (u^j)^i, (\bar{u}^j)^i, \bar{u}^i\} & j = i+1 \text{ and } i > 1, \\ \{u, (u)^2\} & i = 1 \text{ and } j = 2, \\ \{u, (\bar{u}^j)^i\} & j = i+2 \text{ and } i > 1, \\ \{u, \bar{u}^2, (\bar{u}^3)^1, (u^1)^3\} & i = 1 \text{ and } j = 3. \end{cases}$$

3.2 扩展立方体的$K_{1,M}$−结构连通度和子结构连通度

根据扩展立方体的定义、性质3.1和性质3.2，如果u是AQ_n的任意一个顶点且$(u,\bar{u}^i)$是AQ_n的i-维$(2\le i\le n-1)$的补边，那么$N_{AQ_n}(u)\cap N_{AQ_n}(\bar{u}^i)=\{\bar{u}^{i-1},u^i,u^{i+1},\bar{u}^{i+1}\}$。$\{\bar{u}^i,\bar{u}^{i-1},u^i,u^{i+1},\bar{u}^{i+1}\}$ $(2\le i\le n-1)$的导出子图与$K_{1,4}$同构。如果$(u,\bar{u}^n)$是AQ_n的n-维的补边，那么$N_{AQ_n}(u)\cap N_{AQ_n}(\bar{u}^n)=\{\bar{u}^{n-1},u^n\}$ 且$\{\bar{u}^n,\bar{u}^{n-1},u^n\}$的导出子图与$K_{1,2}$同构。类似的，如果$(u,u^i)$是$AQ_n$ 的i-维$(1\le i\le n)$的超立方体边，那么$N_{AQ_n}(u)\cap N_{AQ_n}(u^i)=\{\bar{u}^i,\bar{u}^{i-1}\}(2\le i\le n)$ 和$N_{AQ_n}(u)\cap N_{AQ_n}(u^1)=\{u^2,\bar{u}^2\}$。$\{u^i,\bar{u}^i,\bar{u}^{i-1}\}(2\le i\le n)$ 的导出子图与$K_{1,2}$同构。接下来，我们将讨论$\kappa(AQ_n,K_{1,M})$和$\kappa^s(AQ_n,K_{1,M})$，其中$1\le M\le 3, 4\le M\le 6$。

3.2.1 $1\le M\le 3$

引理 3.7. 当$n\ge 4$和$1\le M\le 3$时，$\kappa(AQ_n,K_{1,M})\le\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$，$\kappa^s(AQ_n,K_{1,M})\le\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$。

证明. 设u是AQ_n的任意一个顶点，接下来，我们将根据M和n的值来分为下面几种情况：

情形1. $M=1$。设

$S_1=\{\{v^{[(M+1)i+1]},v^{[(M+1)i+2]}\}\mid 0\le i<\lfloor\frac{2n-1}{M+1}\rfloor\}$,
$S_2=\{\{v^{[2n-1]},(v^{[2n-1]})^1\}\}$。

情形2. $M=2$。

情形2.1. $n\equiv 0$(模3)。设

$S_1=\{\{v^{[(M+1)i+1]},v^{[(M+1)i+2]},v^{[(M+1)i+3]}\}\mid 0\le i<\lfloor\frac{2n-1}{M+1}\rfloor\}$。

情形2.2. $n\equiv 1$(模3)。设

$S_1=\{\{v^{[(M+1)i+1]},v^{[(M+1)i+2]},v^{[(M+1)i+3]}\}\mid 0\le i<\lfloor\frac{2n-1}{M+1}\rfloor\}$,
$S_2=\{\{v^{[2n-1]},(v^{[2n-1]})^1,(v^{[2n-1]})^2\}\}$。

情形2.3. $n\equiv 2$(模3)。设

$S_1=\{\{v^{[(M+1)i+1]},v^{[(M+1)i+2]},v^{[(M+1)i+3]}\}\mid 0\le i<\lfloor\frac{2n-1}{M+1}\rfloor\}$,
$S_2=\{\{v^{[2n-2]},v^{[2n-1]},(v^{[2n-1]})^1\}\}$。

情形3. $M=3$。

情形3.1. $n\equiv 1(\text{模}4)$。设

$$S_1=\{\{v^{[(M+1)i+1]},v^{[(M+1)i+2]},v^{[(M+1)i+3]},v^{[(M+1)i+4]}\}\mid 0\le i<\lfloor\tfrac{2n-1}{M+1}\rfloor\},$$
$$S_2=\{\{v^{[2n-1]},(v^{[2n-1]})^1,(v^{[2n-1]})^2,(v^{[2n-1]})^3\}\}。$$

情形3.2. $n\equiv 3(\text{模}4)$。设

$$S_1=\{\{v^{[(M+1)i+1]},v^{[(M+1)i+2]},v^{[(M+1)i+3]},v^{[(M+1)i+4]}\}\mid 0\le i<\lfloor\tfrac{2n-1}{M+1}\rfloor\},$$
$$S_2=\{\{v^{[2n-3]},v^{[2n-2]},v^{[2n-1]},(v^{[2n-1]})^1\}\}。$$

当$M=2$且$n\equiv 0(\text{模}3)$时，设$S=S_1$，否则$S=S_1\cup S_2$。显然，如果$M=1$，$S_1\cup S_2$中的每个元素的导出子图和$K_{1,1}$同构；如果$M=2$，当$0\le i<\lfloor\frac{2n-1}{M+1}\rfloor$时，顶点$v^{[(M+1)i+2]}$邻接于顶点$v^{[(M+1)i+1]}$和$v^{[(M+1)i+3]}$。此外，顶点$v^{[2n-1]}$邻接于顶点$v^{[2n-2]}$，$(v^{[2n-1]})^1$和$(v^{[2n-1]})^2$。因此，$S$中的每个元素的导出子图和$K_{1,2}$同构；如果$M=3$，当$0\le i<\lfloor\frac{2n-1}{M+1}\rfloor$时，顶点$v^{[(M+1)i+3]}$邻接于顶点$v^{[(M+1)i+1]}$, $v^{[(M+1)i+2]}$和$v^{[(M+1)i+4]}$。此外，顶点$v^{[2n-1]}$邻接于$v^{[2n-3]}$, $v^{[2n-2]}$, $(v^{[2n-1]})^1$, $(v^{[2n-1]})^2$和$(v^{[2n-1]})^3$。这样，S中每个元素的导出子图和$K_{1,3}$同构。显然，$|S|=\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$。设$Y(S)=\bigcup_{f\in S}f$，因为$AQ_n-Y(S)$是不连通的且其中一个连通分支是$\{u\}$，所以$\kappa(AQ_n,K_{1,M})\le\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$和$\kappa^s(AQ_n,K_{1,M})\le\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$。 □

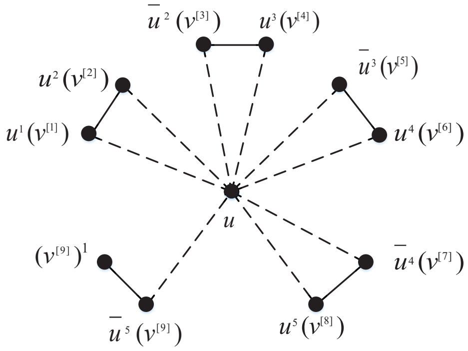
图 3-1显示了AQ_5的$K_{1,1}$-结构割和AQ_6的$K_{1,2}$-结构割。

引理 3.8. 当$n\ge 4$和$1\le M\le 3$时，$\kappa^s(AQ_n,K_{1,M})\ge\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$。

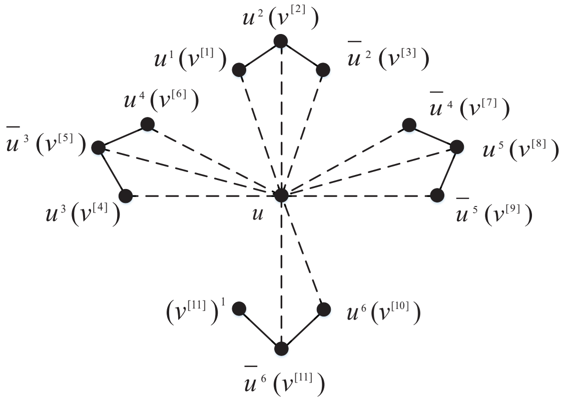
证明. 设F_n^*是AQ_n中的一个连通子图的集合，这个集合中的每个元素都同构于$K_{1,M}$且$|F_n^*|\le\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil-1$。因为$|V(F_n^*)|\le(1+M)\times(\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil-1)<2n-1$且$\kappa(AQ_n)=2n-1$，所以$AQ_n-F_n^*$是连通的。引理成立。 □

因为$\kappa(Q_n,K_{1,M})\ge\kappa^s(Q_n,K_{1,M})$，可得$\kappa(Q_n,K_{1,M})\ge\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$。根据引理3.7和引理3.8，我们有下面的定理。

定理 3.4. 当$n\ge 4$和$1\le M\le 3$时，$\kappa(AQ_n,K_{1,M})=\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$，$\kappa^s(AQ_n,K_{1,M})=\lceil\frac{2n-1}{1+M}\rceil$。



(a) AQ_5的一个$K_{1,1}$-结构割



(b) AQ_6的一个$K_{1,2}$-结构割

图 3-1　AQ_5的$K_{1,1}$-结构割和AQ_6的$K_{1,2}$-结构割

3.2.2　$4 \leq M \leq 6$

引理 3.9. 当$n \geq 6$和$4 \leq M \leq 6$时，$\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$，$\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

证明. 设u是AQ_n中的任意一个顶点。接下来，我们将根据M和n的值来分为下面几种情况：

情形1. $M = 4$。

情形1.1. n是奇数。设

$$S_1 = \{\{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}\}\},$$

$$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}。$$

情形1.2. n是偶数。设

$S_1 = \{\{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}\}\}$，

$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}$和

$S_3 = \{\{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3\}\}$。

情形2. $M = 5$。

情形2.1. n是奇数。设

$S_1 = \{\{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n\}\}$，

$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}$。

情形2.2. n是偶数。设

$S_1 = \{\{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n\}\}$，

$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}$和

$S_3 = \{\{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3, (v^{[2n-1]})^4\}\}$。

情形3. $M = 6$。

情形3.1. n是奇数。设

$S_1 = \{\{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n, (\overline{v^{[3]}})^n\}\}$，

$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2, (v^{[5+4i+2]})^3\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}$。

情形3.2. n是偶数。设

$S_1 = \{\{v^{[1]}, v^{[2]}, v^{[3]}, v^{[4]}, v^{[5]}, (v^{[3]})^n, (\overline{v^{[3]}})^n\}\}$，

$S_2 = \{\{v^{[5+4i+1]}, v^{[5+4i+2]}, v^{[5+4i+3]}, v^{[5+4i+4]}, (v^{[5+4i+2]})^1, (v^{[5+4i+2]})^2, (v^{[5+4i+2]})^3\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}$和

$S_3 = \{\{v^{[2n-2]}, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (v^{[2n-1]})^3, (v^{[2n-1]})^4, (v^{[2n-1]})^5\}\}$。

显然，S_1中的每个元素的导出子图和$K_{1,M}$同构。对于$0 \le i < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$, 顶点$v^{[5+4i+2]}$邻接于顶点$v^{[5+4i+j]}$和$(v^{[5+4i+2]})^p$，其中$j = 1, 3$和4，$1 \le p \le 1 + M - 4$。所以$S_2$中的每个元素的导出子图和$K_{1,M}$同构。顶点$v^{[2n-1]}$邻接于顶点$v^{[2n-2]}$和$(v^{([2n-1]})^q$，其中$1 \le q \le 1 + M - (2n - 2 - 4 \times \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$。这样，$S_3$中的每个元素的导出子图和$K_{1,M}$同

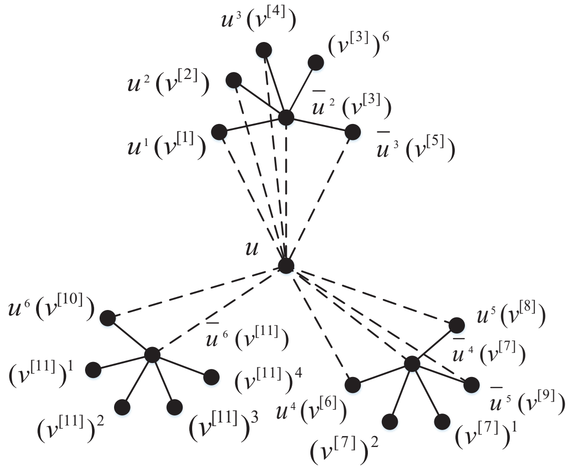


图 3-2　AQ_6的一个$K_{1,5}$-结构割

构。假设当n为奇数时，$S = S_1 \cup S_2$，否则$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$，并且$|S| = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。设$Y(S) = \bigcup_{f \in S} f$。因为$AQ_n - Y(S)$是不连通的且它的一个连通分支是$\{u\}$，那么$\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$和$\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。 □

图 3-2显示了AQ_6的一个$K_{1,5}$-结构割。

引理 3.10. 当$n \geq 6$和$4 \leq M \leq 6$时，设F_n是AQ_n中的一个$K_{1,M}$-子结构集，如果在$AQ_n - V(F_n)$存在一个孤立的顶点，那么$|F_n| \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

证明. 设u是AQ_n中的任意一个顶点。我们设$W = \{x \mid (x, u)$是一条超立方体边，$x \in V(G)\}$和$Z = \{y \mid (y, u)$是一条补边，$y \in V(G)\}$。显然，$|W| = n, |Z| = n - 1$。根据性质3.2和性质3.3，F_n中的每个元素最多包含$N(u)$中的5个顶点，即$\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}$和$\bar{u}^{i+1}$，其中$2 \leq i \leq n-1$。因为$\{(\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}), (\bar{u}^i, u^i), (\bar{u}^i, u^{i+1}), (\bar{u}^i, \bar{u}^{i+1})\} \subseteq E(AQ_n)$，所以$\{\bar{u}^i, \bar{u}^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\}$的导出子图和$K_{1,4}$同构。我们设$B = \{b_i \mid b_i \in F_n$且$\{\bar{u}^{i-1}, u^i, \bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i) \cap N(u)\}$。因为每个$V(b_i)$包含$Z$中的3个顶点和$W$中的2个顶点，所以$|B| < \lfloor \frac{2n-1}{5} \rfloor$。接下来，我们将根据$|B|$的值来分为下面几种情况：

情形1.　$|B| = 0$。因为F_n中的每个元素最多包含$N(u)$中的4个顶点，所以$|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{4} \rceil$。

情形2.　$|B| = 1$。假设$\{\bar{u}^{i-1}, u^i, \bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$，其中$2 \leq i \leq n-1$。因为$F_n - B$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B)$中的4个顶点，所以$|F_n| \geq 1 + \lceil \frac{2n-6}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

情形3.　$|B| = 2$。假设$\{\bar{u}^{i-1}, u^i, \bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$，$\{\bar{u}^{j-1}, u^j, \bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} \subseteq V(b_j)$，其中$2 \leq i, j \leq n-1$，且$|i - j| \geq 3$。不失一般性，我们设$j > i$。

情形3.1. $j-i=3$。那么$\{\bar{u}^{j-1},u^j,\bar{u}^j,u^{j+1},\bar{u}^{j+1}\}=\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3},\bar{u}^{i+3},u^{i+4},\bar{u}^{i+4}\}$。假设$w_1,w_2\in N(u)-V(B)-\{u^{i+2}\}$且$w_1\neq w_2$。根据引理3.4, 3.5和3.6, $N(u^{i+2})\cap N(w_1)\cap N(w_2)=\emptyset$。此外，顶点$u^{i+2}$不与$N(u)-V(B)$中的顶点相连。因此，存在一个元素$a\in F_n-B$使得$u^{i+2}\in V(a)$且$V(a)\cap\{N(u)-V(B)\}\leq 2$。因为$F_n-B-\{a\}$中的每个元素最多包含$N(u)-V(B)-V(a)$中的四个顶点，所以$|F_n|\geq 2+1+\lceil\frac{2n-13}{4}\rceil=\lceil\frac{2n-1}{4}\rceil$。

情形3.2. $j-i=4$。那么$\{\bar{u}^{j-1},u^j,\bar{u}^j,u^{j+1},\bar{u}^{j+1}\}=\{\bar{u}^{i+3},u^{i+4},\bar{u}^{i+4},u^{i+5},\bar{u}^{i+5}\}$。下面，我们将根据$F_n-B$中包含三个顶点$u^{i+2},\bar{u}^{i+2}$和$u^{i+3}$的元素个数来讨论下面几种情况。我们用$S$来表示这样的元素个数。

情形3.2.1. $S=3$。那么在$N(u)-V(B)$中有3个不同的元素分别包含着三个顶点$u^{i+2},\bar{u}^{i+2}$和u^{i+3}中的一个。假设$w_1,w_2\in N(u)-V(B)-\{u^{i+2},\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}$且$w_1\neq w_2$。根据引理3.4，3.5和3.6, $N(u^{i+2})\cap N(w_1)\cap N(w_2)=\emptyset$。顶点$u^{i+2}$不与$N(u)-V(B)-\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}$中的顶点相连。因此，存在一个元素$a_1\in F_n-B$使得$u^{i+2}\in V(a_1)$且$|V(a_1)\cap\{N(u)-V(B)-\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}\}|\leq 2$。对于顶点$\bar{u}^{i+2}$和$u^{i+3}$ 的情况，证明和顶点u^{i+2}类似且我们设$\bar{u}^{i+2}\in a_2$, $u^{i+3}\in a_3$。因为$F_n-B-\{a_1,a_2,a_3\}$中的每个元素最多包含$N(u)-V(B)-V(a_1)-V(a_2)-V(a_3)$中的四个顶点，所以$|F_n|\geq 2+3+\lceil\frac{2n-17}{4}\rceil=\lceil\frac{2n+3}{4}\rceil$。

情形3.2.2. $S=2$。那么$N(u)-V(B)$中存在2个元素，其中一个元素包含u^{i+2}，$\bar{u}^{i+2}$和u^{i+3}中的1个顶点，另一个元素包含另外2个顶点。我们假设a_1包含u^{i+2}，$\bar{u}^{i+2}$和u^{i+3}中的1个顶点，a_2包含另外2个顶点。

情形3.2.2.1. $u^{i+2}\in V(a_1)$和$\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}\subseteq V(a_2)$。类似于情形3.2.1中的讨论，我们有$|V(a_1)\cap\{N(u)-V(B)-\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}\}|\leq 2$。因为$N(\bar{u}^{i+2})\cap N(u^{i+3})-\{u,\bar{u}^{i+3}\}=\{(\bar{u}^{i+2})^{i+4},(u^{i+3})^{i+4}\}$，且$\{(\bar{u}^{i+2})^{i+4},(u^{i+3})^{i+4}\}$中的每个顶点不与$N(u)-V(B)-\{u^{i+2},\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}$中的顶点相连，此外$\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}$ 中的每个顶点也不与$N(u)-V(B)-\{u^{i+2}\}$中的顶点相连，其中$|V(a_2)\cap\{N(u)-V(B)-\{u^{i+2}\}\}|=2$和$\{\bar{u}^{i+2},u^{i+3}\}\subseteq V(a_2)$。因为$F_n-B-\{a_1,a_2\}$中的每个元素最多包含$N(u)-V(B)-V(a_1)-V(a_2)$中的4个顶点，所以$|F_n|\geq 2+1+1+\lceil\frac{2n-15}{4}\rceil=\lceil\frac{2n+1}{4}\rceil$。对于$u^{i+3}\in V(a_1)$和$\{\bar{u}^{i+2}\ u^{i+2}\}\subseteq V(a_2)$这种情况，证明类似，在此不再赘述。

情形3.2.2.2. $\bar{u}^{i+2}\in V(a_1)$和$\{u^{i+2},u^{i+3}\}\subseteq V(a_2)$。类似于情形3.2.1中的讨论，我们有$|V(a_1)\cap\{N(u)-V(B)-\{u^{i+2},u^{i+3}\}\}|\leq 2$。因为$N(u^{i+2})\cap N(u^{i+3})-\{u,\bar{u}^{i+2}\}=\{(u^{i+2})^{i+3},(\bar{u}^{i+3})^{i+2}\}$，$\{(u^{i+2})^{i+3},(\bar{u}^{i+3})^{i+2}\}$ 中的每个顶点不与$N(u)-V(B)-\{\bar{u}^{i+2}\}$ 中的顶点相连且$(u^{i+2},u^{i+3})\notin E(AQ_n)$，$|V(a_2)\cap\{N(u)-V(B)-\{\bar{u}^{i+2}\}\}|=2$以及$\{u^{i+2},u^{i+3}\}\subseteq V(a_2)$。

因为$F_n - B - \{a_1, a_2\}$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2)$中的4个顶点，所以$|F_n| \geq 2 + 1 + 1 + \lceil \frac{2n-15}{4} \rceil = \lceil \frac{2n+1}{4} \rceil$。

情形3.2.3. $S = 1$。根据情形3.2.1和情形3.2.2中的讨论，存在一个元素$a \in F_n - B$使得$|V(a) \cap \{N(u) - V(B)\}| = 3$且$\{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a)$。因为$F_n - B - \{a\}$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B) - V(a)$中的四个顶点，所以$|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-14}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

情形3.3. $j - i \geq 5$。我们设$U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \ldots, u^{j-1}\}$。接下来，我们将计算$F_n - B$中包含$U_{ij}$的元素的数量。因为$5 \leq |U_{ij}| \leq 2n - 11$且每个元素最多包含$N(u) - V(B)$中的4个顶点，我们将根据$|U_{ij}|$的值进行讨论。

情形3.3.1. $|U_{ij}| \equiv 1$(模4)。类似于情形3.1中的讨论，我们有$|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-13}{4} \rceil = \lceil \frac{2n-1}{4} \rceil$。

情形3.3.2. $|U_{ij}| \equiv 3$(模4)。类似于情形3.2中的讨论，我们有$|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-14}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

情形4. $|B| \geq 3$。If $b_i, b_j \in B$且B中不存在$b_k (i < k < j)$，我们设$U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \ldots, u^{j-1}\}$。根据情形3中讨论，如果$|U_{ij}| \equiv 3$(模4)，那么$F_n$的值将会是最小的。这样，$|F_n| \geq |B| + (|B| - 1) + \lceil \frac{2n-1-5\times|B|-3\times(|B|-1)}{4} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

所以，定理成立。 □

引理 3.11. 当$n \geq 6$且$4 \leq M \leq 6$时，$\kappa(AQ_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$，$\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

证明. 我们将会用反证法来证明这个引理。设F_n^*是AQ_n的一个$K_{1,M}$-子结构集且$|F_n^*| \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$。如果$AQ_n - V(F_n^*)$是不连通的，那么我们设$R$是$AQ_n - V(F_n^*)$中最小的一个连通分支。注意到$|V(F_n^*)| \leq (1+M)\times(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1) \leq 7\times(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1)$。根据引理3.3，对于$n \geq 6$，我们有$7 \times (\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1) < 4n - 8$，因此$|V(R)| = 1$。此外，我们假设顶点$u \in V(R)$。根据引理3.10，我们有$|N(u) \cap V(F_n^*)| \leq 2n - 2 < 2n - 1$，这意味着在$AQ_n - V(F_n^*)$中$u$存在至少一个邻居顶点。因此，我们有$|V(R)| \geq 2$，矛盾。因此，$AQ_n - V(F_n^*)$是连通的。引理成立。 □

结合引理3.9，我们有$\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。因为$\kappa(Q_n, K_{1,M}) \geq \kappa^s(Q_n, K_{1,M})$，所以$\kappa(Q_n, K_{1,M}) \geq \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil$。根据引理3.9和引理3.11，我们有下面的定理。

定理 3.5. 当$n \geq 6$和$4 \leq M \leq 6$时，$\kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$，$\kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$。

3.3 扩展立方体的P_L–结构连通度和子结构连通度

设u是AQ_n中的任意一个顶点，根据扩展立方体的定义，$(\bar{u}^{i-1}, u^i) \in E(AQ)$和$(u^i, \bar{u}^i) \in E(AQ)$ $(2 \le i \le n)$。这样$\langle u^1, u^2, \bar{u}^2, \ldots, u^n, \bar{u}^n \rangle$可以形成一条长度为$2n-2$的路径。

因为$P_2(P_3)$同构于$K_{1,1}(K_{1,2})$并且我们已经在3.2.1中给出了$\kappa(AQ_n, K_{1,1})(\kappa(AQ_n, K_{1,2}))$和$\kappa^s(AQ_n, K_{1,1})(\kappa^s(AQ_n, K_{1,2}))$的证明，所以下面我们假设$L \ge 4$。

引理 3.12. 当$n \ge 3$和$4 \le L \le 2n-1$时，$\kappa(AQ_n, P_L) \le \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$，$\kappa^s(AQ_n, P_L) \le \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$。

证明. 设u是AQ_n中的任意一个顶点。设

$S_1 = \{\{v^{[i\times L+1)]}, v^{[i\times L+2]}, \ldots, v^{[i\times L+L]}\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor\}$。

如果$(2n-1) \equiv 0(\text{模}L)$，设$S_2 = \emptyset$。否则，根据$L$和$\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1$的值，我们有下面的讨论：

情形1. L是奇数且$L \le 2n-3$。

情形1.1. $\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1$是偶数。设

$S_2 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor \times L+1]}, \ldots, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \ldots, (v^{[2n-1]})^{\frac{\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n+1}{2}+1}\}\}$。

情形1.2. $\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n + 1$是奇数。设

$S_2 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor \times L+1]}, \ldots, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \ldots, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\frac{\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n}{2}+1}\}\}$。

情形2. L是偶数且$L \le 2n-4$。设

$S_2 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{L} \rfloor \times L+1]}, \ldots, v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \ldots, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\frac{\lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \times L - 2n}{2}+1}\}\}$。

情形3. $L = 2n-2$。设

$S_2 =$
$\{\{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \ldots, (v^{[2n-1]})^{n-1}, ((v^{[2n-1]})^{n-1})^1\}\}$。

假设当$(2n-1)\equiv 0$ (模L)时，$S=S_1$，否则$S=S_1\cup S_2$。显然，S中每个元素的导出子图和P_L同构且$|S|=\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil$。设$Y(S)=\cup_{f\in S}f$。因为$AQ_n-Y(S)$是不连通的，且它的一个连通分支是$\{u\}$，那么$\kappa(AQ_n,P_L)\le\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil$，$\kappa^s(AQ_n,P_L)\le\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil$。 □

引理 3.13. 当$n\ge 3$和$4\le L\le 2n-1$时，$\kappa^s(AQ_n,P_L)\ge\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil$。

证明. 设F_n^*是AQ_n中一个连通子图的集合，这个集合中的每个元素都同构于P_L中的一个连通子图且$|F_n^*|\le\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil-1$。因为$|V(F_n^*)|\le L\times(\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil-1)<2n-1$且$\kappa(AQ_n)=2n-1$，所以$AQ_n-F_n^*$是连通的。引理成立。 □

根据引理3.12和引理3.13，我们有下面的定理。

定理 3.6. 当$n\ge 3$和$4\le L\le 2n-1$时，$\kappa(AQ_n,P_L)=\kappa^s(AQ_n,P_L)=\lceil\frac{2n-1}{L}\rceil$。

3.4 扩展立方体的C_N–结构连通度和子结构连通度

我们首先证明$\kappa^s(AQ_n,C_N)$，然后再证明$\kappa(AQ_n,C_N)$。

3.4.1 $3\le N\le 2n-1$

因为P_N是C_N的一个连通子图，所以我们有下面的引理。

引理 3.14. 当$n\ge 3$和$3\le N\le 2n-1$时，$\kappa^s(AQ_n,C_N)\le\lceil\frac{2n-1}{N}\rceil$。

引理 3.15. 当$n\ge 3$和$3\le N\le 2n-1$时，$\kappa^s(AQ_n,C_N)\ge\lceil\frac{2n-1}{N}\rceil$。

证明. 设F_n^*是AQ_n中一个连通子图的集合，这个集合中的每个元素和C_N的一个连通子图同构且$|F_n^*|\le\lceil\frac{2n-1}{N}\rceil-1$。因为$V(F_n^*)\le N\times(\lceil\frac{2n-1}{N}\rceil-1)<2n-1$且$\kappa(AQ_n)=2n-1$，所以$AQ_n-F_n^*$是连通的。引理成立。 □

根据引理3.14和引理3.15，我们有下面的定理。

定理 3.7. 当$n\ge 3$和$3\le N\le 2n-1$时，$\kappa^s(AQ_n,C_N)=\lceil\frac{2n-1}{N}\rceil$。

下面，我们将讨论$\kappa(AQ_n,C_3)$和$\kappa(AQ_n,C_N)$，其中$4\le N\le 2n-1$。

3.4.2　$N = 3$

引理 3.16. 当$n \geq 6$时，$\kappa(AQ_n, C_3) \leq n-1$。

证明. 设u是AQ_n中的任意一个元素。我们设

$S_1 = \{\{u^1, u^2, \bar{u}^2\}\}$,

$S_2 = \{\{u^i, \bar{u}^i, (u^i)^{i-1}\} \mid 3 \leq i \leq n\}$。

显然，S_1中的每个元素的导出子图和C_3同构。当$3 \leq i \leq n$时，$\{\{u^i, \bar{u}^i\}, \{\bar{u}^i, (u^i)^{i-1}\}, \{(u^i)^{i-1}, u^i\}\} \subseteq E(AQ_n)$。因此，$S = S_1 \cup S_2$中每个元素的导出子图和$C_3$ 同构且$|S| = n-1$。设$Y(S) = \cup_{f \in S} f$。因为$AQ_n - Y(S)$是不连通的且它的一个连通分支是$\{u\}$，所以$\kappa(AQ_n, C_3) \leq n-1$。 □

引理 3.17. 当$n \geq 6$时，设F_n是AQ_n的一个C_3-结构集。如果$AQ_n - V(F_n)$存在一个孤立的顶点，那么$|F_n| \geq n-1$。

证明. 设u是AQ_n中的任意一个顶点。我们设$W = \{x \mid (x, u)$是一个超立方体边$, x \in V(G)\}$和$Z = \{y \mid (y, u)$是一个补边$, y \in V(G)\}$。显然，$|W| = n$，$|Z| = n-1$。根据性质3.1和性质3.2，F_n中的每个元素最多包含$N(u)$中的三个顶点，即$\bar{u}^i, u^{i+1}$和$\bar{u}^{i+1}$，其中$1 \leq i \leq n-1$。因为$\{(\bar{u}^i, u^{i+1}), (\bar{u}^i, \bar{u}^{i+1}), (u^{i+1}, \bar{u}^{i+1})\} \subseteq E(AQ_n)$，所以$\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\}$的导出子图和$C_3$同构. 我们设$B = \{b_i \mid b_i \in F_n$且$\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i) \cap N(u)\}$。因为每个$V(b_i)$包含$Z$中的两个顶点和$W$中的一个顶点，所以$|B| < \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$。下面，我们将根据$|B|$的值讨论下面几种情况：

情形1. $|B| = 0$。因为F_n中的每个元素最多包含$N(u)$中的4个顶点，所以$|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil$。

情形2. $|B| = 1$。设$\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$其中$1 \leq i \leq n-1$。因为$F_n - B$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B)$中的四个顶点，所以$|F_n| \geq 1 + \lceil \frac{2n-4}{2} \rceil = n-1$。

情形3. $|B| = 2$。设$\{\bar{u}^i, u^{i+1}, \bar{u}^{i+1}\} \subseteq V(b_i)$，$\{\bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} \subseteq V(b_j)$，其中$1 \leq i, j \leq n-1$且$|i-j| \geq 2$。不失一般性，我们设$j > i$。

情形3.1. $j - i = 2$。那么$\{\bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} = \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}, \bar{u}^{i+3}\}$。根据扩展立方体的定义，顶点$u^{i+2}$不和$N(u) - V(B)$中的顶点邻接。因此，存在一个元素$a \in F_n - B$使

得$u^{i+2} \in V(a)$且$|V(a) \cap \{N(u) - V(B)\}| = 1$。因为$F - B - \{a\}$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B) - V(a)$中的2个顶点，所以$|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-8}{2} \rceil = n - 1$。

情形3.2. $j - i = 3$。那么$\{\bar{u}^j, u^{j+1}, \bar{u}^{j+1}\} = \{\bar{u}^{i+3}, u^{i+4}, \bar{u}^{i+4}\}$。接下来，我们将根据$F_n - B$中包含三个顶点$u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}$和$u^{i+3}$的元素个数来讨论下面几种情况。我们用$S$来表示这样的元素个数。

情形3.2.1. $S = 3$。那么在$N(u) - V(B)$中有3个元素分别包含3个顶点$u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}$，和u^{i+3}中的一个。根据扩展立方体的定义，顶点u^{i+2}不与$N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}$中的顶点相连，所以存在一个元素$a_1 \in F_n - B$ 使得$u^{i+2} \in V(a_1)$且$|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}\}| = 1$。对于$\bar{u}^{i+2}$和$u^{i+3}$的情况，证明和顶点$u^{i+2}$的情形类似且我们设$\bar{u}^{i+2} \in a_2$，$u^{i+3} \in a_3$。因为$F_n - B - \{a_1, a_2, a_3\}$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2) - V(a_3)$中的2个元素，所以$|F_n| \geq 2 + 3 + \lceil \frac{2n-10}{2} \rceil = n$。

情形3.2.2. $S = 2$。那么在$N(u) - V(B)$中存在2 个元素，其中一个元素包含$u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}$和u^{i+3}中的一个顶点，另一个元素包含另外2个顶点。我们假设a_1 包含$u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}$和u^{i+3}中的一个顶点，a_2包含另外2个顶点。

情形3.2.2.1. $u^{i+2} \in V(a_1)$和$\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$。类似于情形3.2.1中的讨论，我们有$|V(a_1) \cap \{N(u) - V(B) - \{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\}\}| = 1$。顶点$\bar{u}^{i+2}$或$u^{i+3}$不与$N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}$和$\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \in E(AQ_n)$中的顶点相连接，那么$\{\bar{u}^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq a_2$且$|V(a_2) \cap \{N(u) - V(B) - \{u^{i+2}\}\}| = 2$。因为$F_n - B - \{a_1, a_2\}$中的每个元素最多包含$N(u) - V(B) - V(a_1) - V(a_2)$中的2个顶点，那么$|F_n| \geq 2 + 1 + 1 + \lceil \frac{2n-10}{2} \rceil = n - 1$。对于$u^{i+3} \in V(a_1)$和$\{\bar{u}^{i+2}$ $u^{i+2}\} \subseteq V(a_2)$情形，证明类似，在此不再赘述。

情形3.2.2.2. $\bar{u}^{i+2} \in V(a_1)$和$\{u^{i+2}, u^{i+3}\} \subseteq V(a_2)$。因为$\{u^{i+2}, u^{i+3}\} \notin E(AQ_n)$，所以这种情形不存在。

情形3.2.3. $S = 1$。因为$\{u^{i+2}, u^{i+3}\} \notin E(AQ_n)$。所以这种情形不存在。

情形3.3. $j - i \geq 4$。我们设$U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \ldots, u^{j-1}\}$。我们将计算在$F_n - B$中包含$U_{ij}$元素的个数。显然，$5 \leq |U| \leq 2n - 7$。因为每个元素最多包含$F_n - B$中$N(u) - V(B)$的2个顶点且$U \equiv 1$(模2)，类似于情形3.2.1中的讨论，我们有$|F_n| \geq 2 + 1 + \lceil \frac{2n-8}{2} \rceil = n - 1$。

情形4. $|B| \geq 3$。如果$b_i, b_j \in B$且不存在$b_k \in B (i < k < j)$，我们设$U_{ij} = \{u^{i+2}, \bar{u}^{i+2}, \ldots, u^{j-1}\}$。根据情形3的讨论，包含$F_n - B$中的$U_{ij}$所有顶点的最少的元

素个数是$\lceil \frac{|U_{ij}|}{2} \rceil$。因此，$|F_n| \geq |B| + (|B| - 1) + \lceil \frac{2n-1-3\times|B|-(|B|-1)}{2} \rceil = n - 1$。

所以引理成立。□

引理 3.18. 当$n \geq 6$时，$\kappa(AQ_n, C_3) \geq n - 1$。

证明. 我们将用反证法来证明这个引理。设F_n^*是AQ_n中的一个C_3-结构集且$|F_n^*| \leq n - 2$。如果$AQ_n - V(F_n^*)$是不连通的，那么我们设R是$AQ_n - V(F_n^*)$中的一个最小的连通分支且$|V(F_n^*)| \leq 3 \times (n - 2) = 3n - 6$。根据引理3.3，对于$n \geq 6$，我们有$3n - 6 < 4n - 8$。因此$|V(R)| = 1$。此外，我们假设顶点$u \in V(R)$，根据引理3.17，$|N(u) \cap V(F_n^*)| \leq 2n - 2 < 2n - 1$，这意味着在$AQ_n - V(F_n^*)$中的$u$至少存在一个邻居顶点。因此，我们有$|V(R)| \geq 2$，矛盾。所以$AQ_n - V(F_n^*)$是连通的。引理成立。□

根据引理3.16和引理3.18，我们有下面的定理。

定理 3.8. 当$n \geq 6$时，$\kappa(AQ_n, C_3) = n - 1$。

3.4.2.1 $\kappa(AQ_n, C_N)$ 和 $4 \leq N \leq 2n - 1$

引理 3.19. 当$n \geq 6$和$4 \leq N \leq 2n - 1$时，$\kappa(AQ_n, C_N) \leq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。

证明. 设u是AQ_n中的任意一个顶点。根据N的值，我们将讨论下面的情形：

情形1. N是奇数。设

$S_1 = \{\{v^{[(N-1)i+1]}, v^{[(N-1)i+2]}, \ldots, v^{[(i+1)(N-1)]}, (\overline{v^{[(i+1)(N-1)]}})^{\lfloor \frac{(N-1)i+1}{2} \rfloor + 1}\} \mid 0 \leq i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor\}$。

情形1.1. $(2n - 1) \equiv 1(模(N - 1))$。

情形1.1.1. $N \leq 2n - 3$。设

$S_2 = \{\{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, \ldots, (v^{[2n-1]})^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}, (v^{[2n-1]})^{\lceil \frac{N}{2} \rceil}\}\}$。

情形1.1.2. $N = 2n - 1$。设

$S_2 = \{\{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, \ldots, (v^{[2n-1]})^{n-3}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{n-3}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2}, ((\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2})^{n-4}, (\overline{(\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2}})^{n-4}, ((\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2})^{n-3}, (\overline{(\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2}})^{n-3}\}\}$。

情形1.2. $(2n - 1) \equiv 3(模(N - 1))$。设

$S_2 = \{\{v^{[2n-1]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^{n-1-\frac{N-3}{2}}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{n-1-\frac{N-3}{2}}, (v^{[2n-2]})^{n-\frac{N-3}{2}}, \ldots, (v^{[2n-2]})^{n-2}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{n-2}\}\}$。

情形1.3. $(2n-1) > 3$(模$(N-1)$)。设

$S_2 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \ldots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]},$
$(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 2 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 2 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}},$
$(v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 3 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 3 - \frac{N-(2n-1-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1))}{2}},$
$\ldots, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor + 1}\}\}$。

情形2. N是偶数。设

$$S_1 = \begin{cases} \{\{v^{[3i+1]}, v^{[3i+3]}, v^{[3i+2]}, (v^{[3i+1]})^{\lfloor \frac{3i+1}{2} \rfloor + 3}\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor \text{和} i \equiv 0(\text{模}2)\text{和} N = 4\}, \\ \{\{v^{[(N-1)i+1]}, v^{[(N-1)i+2]}, \ldots, v^{[(i+1)(N-1)]}, (\overline{v^{[(i+1)(N-1)]}})^{\lfloor \frac{(N-1)i+1}{2} \rfloor + 1}\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor \text{和} \\ i = 0(\text{模}2)\text{和} N \ne 4\}. \end{cases}$$

$S_2 = \{\{v^{[(N-1)i+1]}, v^{[(N-1)i+2]}, \ldots, v^{[(i+1)(N-1)]}, (v^{[(i+1)(N-1)]})^{\lfloor \frac{(N-1)i+1}{2} \rfloor + 1}\} \mid 0 \le i < \lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor$和$i = 1$(模2)$\}$。

如果$(2n-1) \equiv 0$ (模$(N-1)$)，那么$S_3 = \emptyset$；否则的话，我们将讨论下面几种情形：

情形2.1. $(2n-1) \equiv 1$(模$(N-1)$)。设

$S_3 = \{\{v^{[2n-1]}, (v^{[2n-1]})^1, (v^{[2n-1]})^2, (\overline{v^{[2n-1]}})^2, (v^{[2n-1]})^3, (\overline{v^{[2n-1]}})^3, \ldots, (v^{[2n-1]})^{\frac{N}{2}}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{\frac{N}{2}}\}\}$。

情形2.2. $(2n-1) \equiv 2$(模$(N-1)$)。

情形2.2.1. $N < n$。设

$S_3 = \{\{v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^{n-1}, ((v^{[2n-2]})^{n-1})^{n-2}, \ldots, (((v^{[2n-2]})^{n-1}) \ldots)^{n-(N-2)}\}\}$。

情形2.2.2. $N = 2n-2$。设

$S_3 = \{\{v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2]})^1, (v^{[2n-2]})^2, (\overline{(v^{[2n-2]}})^2, (v^{[2n-2]})^3, (\overline{(v^{[2n-2]}})^3, \ldots, (v^{[2n-2]})^{n-2},$
$(\overline{(v^{[2n-2]}})^{n-2}, (v^{[2n-2]})^{n-1}\}\}$。

情形2.3. $(2n-1) \equiv 3$(模$(N-1)$)。设

$S_3 = \{\{v^{[2n-2)]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{2+n-N}, (\overline{v^{[2n-1]}})^{3+n-N}, \ldots, (\overline{v^{[2n-1]}})^{n-2}\}\}$。

情形2.4. $(2n-1) \equiv 4$(模$(N-1)$)。设

情形2.4.1. $N < n$。设

$S_3 = \{\{v^{[2n-4]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (v^{[2n-2)]})^{4+n-N}, (v^{[2n-2]})^{5+n-N}, \ldots, (v^{[2n-2]})^{n-1}\}\}$。

情形2.4.2. $N = 2n-4$。设

$S_3 = \{\{v^{[2n-4]}, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^3, (v^{[2n-2]})^4, (\overline{v^{[2n-2]}})^4, (v^{[2n-2]})^5, (\overline{v^{[2n-2]}})^5, \ldots,$

$(\overline{v^{[2n-2]}})^{n-2}, (v^{[2n-2]})^{n-1}\}\}$。

情形2.5. $(2n-1)$是奇数(模$(N-1)$)(除了1和3)。设

$$S_3 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \ldots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+2n-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+2n-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2}, \ldots, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}\}\}$$。

情形2.6. $(2n-1)$是偶数(模$(N-1)$)(除了0，2和4)。设

情形2.6.1. $N < n$。设

$$S_3 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \ldots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}, (\overline{(\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+2n-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}, (\overline{(\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+2n-\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2}, \ldots, (\overline{(\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor}\}\}$$。

情形2.6.2. $n \leq N \leq 2n-6$。

情形2.6.2.1. $n = N-1$。设

$$S_3 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \ldots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}, (v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}\}\}$$。

情形2.6.2.2. $n \neq N-1$。设

$$S_3 = \{\{v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1]}, v^{[\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+2]}, \ldots, v^{[2n-3]}, v^{[2n-1]}, v^{[2n-2]}, (\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}, ((\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+n+1}, (\overline{(\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+n+1}, ((\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+n+2}, (\overline{(\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor - N+n+2}, \ldots, ((\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor -1}, (\overline{(\overline{v^{[2n-2]}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor -1}, (v^{[2n-2]})^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{2n-1}{N-1} \rfloor (N-1)+1}{2} \rfloor +1}\}\}$$。

当N是奇数或者$(2n-1) \equiv 0$(模$(N-1)$)时，我们设$S = S_1 \cup S_2$，否则$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$。根据扩展立方体的定义，$S$中每个元素的导出子图和$C_N$同构且$|S| = \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。设$Y(S) = \cup_{f \in S} f$。因为$AQ_n - Y(S)$是不连通的且它的一个连通分支是$\{u\}$，那么$\kappa(AQ_n, C_N) \leq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。 □

图 3-3展示了AQ_6中的一个C_5结构割。

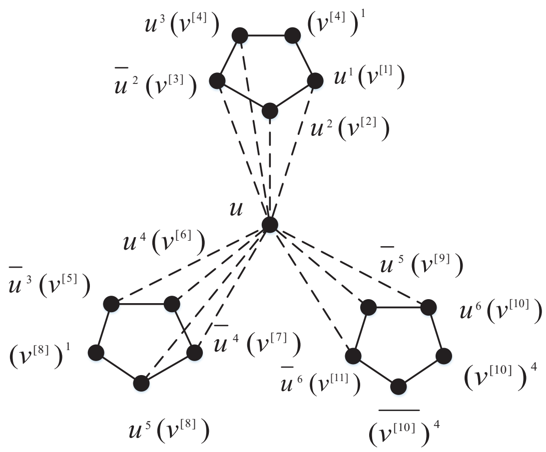


图 3-3　AQ_6中的一个C_5结构割

引理 3.20. 当$n \geq 6$和$4 \leq N \leq 2n-1$时，设F_n是AQ_n中的一个C_N-结构集。如果$AQ_n - V(F_n)$中存在一个孤立顶点，那么$|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。

证明. 设u是AQ_n中任意一个顶点。根据扩展立方体的定义，性质3.1和性质3.2，u的任意N个邻居顶点都不能形成一个C_N并且F中的每个元素最多包含$N-1$个$N(u)$中的顶点。因此，$|F_n| \geq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。 □

引理 3.21. 当$n \geq 6$和$4 \leq N \leq 2n-1$时，$\kappa(AQ_n, C_N) \geq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。

证明. 我们将通过反证法来证明这个引理。设F_n^*是AQ_n中的一个C_N-结构集且$|F_n|^* \leq \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil - 1$。如果$AQ_n - V(F_n^*)$是不连通的，那么我们设$R$ 是$AQ_n - V(F_n^*)$中的最小的一个连通分支。此外$|V(F_n^*)| \leq N \times (\lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil - 1)$。根据引理3.3，当$n \geq 6$时，我们有$N \times (\lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil - 1) < 4n-8$。因此$|V(R)| = 1$。进一步的，我们假设顶点$u \in V(R)$。根据引理3.20，$|N(u) \cap V(F_n^*)| \leq 2n-2 < 2n-1$，这意味着$AQ_n - V(F_n^*)$中的顶点$u$至少存在一个邻居顶点。因此，我们有$|V(R)| \geq 2$，矛盾。所以$AQ_n - V(F_n^*)$是连通的，引理成立。 □

根据引理3.19和引理3.21，我们有下面的定理。

定理 3.9. 当$n \geq 6$和$4 \leq N \leq 2n-1$时，$\kappa(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil$。

3.5　扩展立方体的容错能力分析

接下来，我们将比较扩展立方体在传统连通度和结构连通度下所能容忍的故障顶点数，以此来分析扩展立方体在结构连通度下的容错能力。

表 3-1　传统连通度和结构连通度所能容忍的故障顶点数

n	$\kappa(AQ_n)$	$\kappa(AQ_n, K_{1,3})$	$\kappa(AQ_n, K_{1,6})$	$\kappa(AQ_n, P_7)$	$\kappa(AQ_n, C_5)$
6	11	12	21	14	15
8	15	16	28	21	20
10	19	20	35	21	25
20	39	40	70	42	50
50	99	100	175	105	125

从表3-1可以看出，结构H发生故障对扩展立方体的影响相比于传统连通度要大得多。尤其当结构$H = K_{1,6}$时，随着维数n的变大，故障结构$K_{1,6}$影响的顶点数接近于传统连通度的2倍。

3.6　$K_{1,M}$-结构连通度下的容错路由

在本节中，我们将给出$K_{1,M}$-结构连通度下的容错路由算法。相对于结构P_L和C_N，$K_{1,M}$的结构更具有普遍性和实际意义，因此，在这里我们将给出$K_{1,6}$-子结构连通度下的容错路由算法。同时我们将给出相应的算法分析以及模拟实验。

3.6.1　$K_{1,M}$-结构连通度下的容错路由算法

Choudum等人在 [9]中给出了扩展立方体中的任意两个顶点间的路由算法，因为我们要在后面的容错路由算法中调用该算法，所以在给出容错路由算法之前，我们先给出两个顶点间的路由算法，并且我们将这个算法命名为AQRouting。

算法 1 AQRouting

输入: n-维的扩展立方体AQ_n，两个顶点$u, v \in V(AQ_n)$。

输出: 一条AQ_n中从u到v的路径。

$P \leftarrow \{u\}$;
$tag = u \bigoplus_2 v$;
while $tag \neq 0$ **do**
　　从左向右扫描tag，找到tag中第一个为1的二进制位，设为$tag_i = 1$;
　　if $tag_{i+1} = 0$ **then**
　　　　$u \leftarrow u^i$;
　　　　$P \leftarrow P \cup \{u\}$;
　　else
　　　　$u \leftarrow \bar{u}^i$;
　　　　$P \leftarrow P \cup \{u\}$;
　　end if
　　$tag = u \bigoplus_2 v$;
end while
$P \leftarrow P \cup \{v\}$;
return P;

这里的$tag = u \bigoplus_2 v$表示u和v的每一个二进制位相加，然后对2取模，tag是一个n位的二进制串。例如，$u = 01001$，$v = 11010$，则$tag = 10011$。

因为算法AQRouting通过循环对顶点u和顶点v的每个二进制位进行运算然后进行相应操作，因此算法AQRouting的时间复杂度是$O(n)$。

在给出扩展立方体两个无故障顶点之间的容错路由算法AQFRouting之前，我们先给出两个子算法AQMapping和AQBinding。算法AQMapping主要基于扩展立方体的构造方式，引理2.1和引理2.2。根据定义2.1，子图H中的顶点u在子图S中只有2个邻接顶点u^i和$\bar{u}^i$。因此算法AQMapping的第2 ~ 3行的时间复杂度为$O(1)$；而u在H中的顶点个数为$2n-3$，我们可以很容易地得到算法5 ~ 9行的时间复杂度为$O(n)$；10 ~ 16行的时间复杂度为$O(n^2)$。所以，算法AQMapping的时间复杂度为$O(n^2)$。

算法 2 `AQMapping`

输入: 一个n-维的扩展立方体AQ_n的两个$(n-1)$-维子图H和S，一个无故障顶点$u \in V(H)$，一个故障顶点集$F \subset V(AQ_n)$且$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$。

输出: 一条从顶点u到子图S的无故障路径。

1: **function** AQMAPPING(u, H, S)
2: 　**for** $v \in N_{S-F}(u)$ **do**
3: 　　**return** (u, v);
4: 　**end for**
5: 　**for** $v \in N_{H-F}(u)$ **do**
6: 　　**if** $x \in N_{S-F}(v)$ **then**
7: 　　　**return** (u, v, x);
8: 　　**end if**
9: 　**end for**
10: 　**for** $v \in N_{H-F}(u)$ **do**
11: 　　**for** $x \in N_{H-F}(v)$ **do**
12: 　　　**if** $y \in N_{S-F}(x)$ **then**
13: 　　　　**return** (u, v, x, y);
14: 　　　**end if**
15: 　　**end for**
16: 　**end for**
17: 　**for** $v \in N_{H-F}(u)$ **do**
18: 　　**for** $x \in N_{H-F}(v)$ **do**
19: 　　　**for** $y \in N_{H-F}(x)$ **do**
20: 　　　　**if** $z \in N_{S-F}(y)$ **then**
21: 　　　　　**return** (u, v, x, y, z);
22: 　　　　**end if**
23: 　　　**end for**
24: 　　**end for**
25: 　**end for**

```
end function
```

在算法AQBinding中，给定2个无故障的顶点$u, v \in V(AQ_n)$，一个子图$G \subset AQ_n$，两条路径P和Q，其中$u = P[1]$，$v = Q[1]$，以及一个故障顶点集$F \subset V(AQ_n)$且$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$。我们将在$AQ_n - F$中构造一条从$u$到$v$的路径。因为该算法将会在算法AQFRouting中被调用，所以我们将会在给出算法AQFRouting之后再来分析算法AQBinding中的第2 ~ 5，13和19 行的时间复杂度。在算法AQBinding的第6和第7行，选择两条路径P和Q的共同顶点的时间复杂度是$O(n)$，连接P和Q两条路径的子路径花费的时间是$O(1)$。在算法的10 ~ 12和16 ~ 18行，返回一条由直接P（或Q）构成的路径的时间复杂度为$O(1)$。

算法 3 AQBinding

输入: 2个无故障的顶点$u, v \in V(AQ_n)$，一个子图$G \subset AQ_n$，两条路径P和Q，其中$u = P[1]$，$v = Q[1]$，以及一个故障顶点集$F \subset V(AQ_n)$且$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$。

输出: 一条$AQ_n - F$中的从u到v的路径。

```
1: function AQBINDING1(G, F, u, v, P, Q)
2:     if V(P) ∩ V(Q) = ∅ then
3:         S ← AQFRouting(G, F, P[−1], Q[−1]);
4:         return (P, Path(S, S[2], S[−2]), Q^{−1});
5:     end if
6:     找到P和Q中第一个公共顶点x;
7:     return (Path(P, u, x), Path(Q^{−1}, x的后一个顶点, v));
8: end function
9: function AQBINDING2(G, F, u, v, Q)
10:    if u ∈ V(Q) then
11:        return Path(Q, u, v);
12:    end if
13:    return (AQFRouting(G, F, u, Q[−1]), Path(Q^{−1}, Q^{−1}[2], Q^{−1}[−1]));
14: end function
15: function AQBINDING3(G, F, u, v, P)
16:    if v ∈ V(P) then
17:        return Path(P, u, v);
18:    end if
19:    return (Path(P, P[1], P[−2])), AQFRouting(G, F, P[−1], v));
20: end function
```

接下来，我们将给出主算法AQFRouting。

算法 4 AQFRouting

输入: 一个n-维的扩展立方体AQ_n，两个无故障顶点$u, v \in V(AQ_n)$，一个故障顶点集$F \subset V(AQ_n)$，其中$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$。

输出: 一条$AQ_n - F$中的从u到v的路径。

```
function AQFROUTING(AQ_n, F, u, v)
```

2: **if** $(u, v) \in E(AQ_n)$ **then**
3: **return** (u, v);
4: **else if** $n = 2$ **then**
5: **return** (返回$AQ_n - F$中u到v的一条无故障路径);
6: **else if** $|F| = 0$ **then**
7: **return** `AQRouting`(AQ_n, u, v);
8: **end if**
9: $F_0 \leftarrow F \cap V(AQ^0_{n-1})$, $F_1 \leftarrow F \cap V(AQ^1_{n-1})$;
10: $m \leftarrow \min\{|F_0|, |F_1|\}$;
11: **for** $i \in \{0, 1\}$ **do**
12: $B_0 \leftarrow AQ^i_{n-1}$, $B_1 \leftarrow AQ^{1-i}_{n-1}$;
13: **if** $u, v \in V(B_0)$ **and** $|F_i| = m$ **then**
14: **return** `AQFRouting`(B_0, F_i, u, v);
15: **else if** $u, v \in V(B_0)$ **and** $|F_{1-i}| = m$ **then**
16: $P \leftarrow$`AQMapping`(u, B_0, B_1, F);
17: $Q \leftarrow$`AQMapping`(v, B_0, B_1, F);
18: **return** `AQBinding1`$(B_1, F_{1-i}, u, v, P, Q)$;
19: **else if** $u \in V(B_0)$ **and** $v \in V(B_1)$ **and** $|F_{1-i}| = m$ **then**
20: $P \leftarrow$`AQMapping`(u, B_0, B_1, F);
21: **return** `AQBinding3`(B_1, F_{1-i}, u, v, P);
22: **else if** $u \in V(B_0)$ **and** $v \in V(B_1)$ **and** $|F_i| = m$ **then**
23: $P \leftarrow$`AQMapping`(v, B_1, B_0, F);
24: **return** `AQBinding2`(B_0, F_i, u, v, P);
25: **end if**
26: **end for**
27: **end function**

下面，我们将分析算法AQBinding和算法AQFRouting的时间复杂度。

在算法AQFRouting的第$2 \sim 5$行，构造一条无故障路径的时间复杂度是$O(1)$。在算法AQFRouting的第$6 \sim 7$行，其调用算法AQRouting，所以构造一条无故障路径的时间复杂度是$O(n)$。而在第9，10和12行，构建F_0，F_1，m，B_0和B_1的时间复杂度是$O(1)$。

我们用$U(u, v, n)$来表示在$B_n - F$中找到顶点u到v的一条无故障路径的时间复杂度。进一步的，我们设n足够大，设

$$T(n) = \max\{U(u, v, n) | u, v \in V(AQ_n) \setminus F \text{ 且 } u \neq v\}. \tag{3.1}$$

显然，我们有$T(2) = O(1)$。在算法AQFRouting的第13和14行，我们有

$$T(n) \leq T(n-1) + O(1). \tag{3.2}$$

在算法AQFRouting的第15 ~ 24行，我们有

$$T(n) \leq T(n-1) + O(n^3). \tag{3.3}$$

因此，基于不等式3.2，3.3和定义2.1，我们有

$$T(n) \leq O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3). \tag{3.4}$$

所以，根据不等式3.4，在最坏情况下和故障顶点数为$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$时，算法AQFRouting的时间复杂度为$T(n) \leq O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3)$。根据前面对AQBinding算法的分析，我们也可以得到算法AQBinding 的时间复杂度为$O(\lceil \log_2 |F| \rceil n^3)$。

为了分析由算法AQFRouting所构建的容错路径的最大长度，我们给出了以下的定理：

定理 3.10. *当故障顶点集F满足$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$时，设$m = \lceil log_2 |F| \rceil$，算法$AQFRouting$所构建的容错路径的最大长度不超过$8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1$。*

证明. 我们用$M(n)$来表示由算法AQFRouting在AQ_n中所构建的在两个无故障顶点u和v之间的容错路径的长度。显然，如果$|F| = 0$，我们有$M(n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$。如果$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$，在算法的13 ~ 14行，我们有$M(n) \leq M(n-1)$；在算法的15 ~ 18行，我们有$M(n) \leq M(n-1) + 8$；在算法的19 ~ 24行，我们有$M(n) \leq M(n-1) + 4$；设$m = \lceil \log_2 |F| \rceil$，我们有

$$\begin{aligned} M(n) &\leq \max\{\sum_{i=1}^{m} 8 + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\} \\ &\leq \max\{8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\} \\ &\leq 8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，根据不等式3.5，在最坏情况下，当$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$且$m = \lceil \log_2 |F| \rceil$时，由算法AQFRouting所构建的在两个无故障顶点u和v之间的容错路径的长度为$M(n) \leq 8m + \lceil \frac{n-m}{2} \rceil + 1$。 □

3.6.2 模拟实验

在本节中，我们将通过模拟实验来比较算法AQFRouting和传统的深度优先算法BFS的性能，我们将通过Python语言来实现，版本为3.7，实验环境是一台处理器为Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz 2.40，内存8GB的计算机。我们将通过这台计算法模拟不同的算法并给出实验结果。

我们研究了扩展立方体中多种不同的故障结构，其中包括二分图，路径和圈。在实验中我们将对其中最复杂的一种结构$K_{1,6}$进行实验，$K_{1,6}$结构涉及的顶点较多，且也是实际中最容易发生故障的结构。我们将在实验中找到两个无故障顶点之间的无故障路径，根据我们的证明结果，我们设置故障顶点个数为$|F| \leq 7 \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$，这样可以保证每个无故障顶点至少含有一个无故障邻居顶点。因为故障的形式是以故障结构的形式存在，所以我们在实验中不使用简单的随机函数random来生成故障顶点，因为这样生成的故障顶点数大多数不是以故障结构的形式存在，而是以单独的故障顶点形式存在，这样就不太能达到想要的实验效果。所以我们在生成随机故障顶点的过程中控制生成故障顶点的形式，使其都是$K_{1,6}$或者$K_{1,6}$的子结构。

在实验中，我们将比较算法AQFRouting和深度优先算法BFS在扩展立方体上的实验效果，主要考察生成一条无故障路径的时间和长度。这里的深度优先算法在找到一条无故障路径的时候即停止，不会找到所有符合条件的无故障路径，然后比较大小，取其最短路径。在实验过程中，我们将会有5个实验参数，分别是：

- 扩展立方体的维数n；
- 无故障源顶点u；
- 无故障目的顶点v；
- 故障顶点个数；
- 故障顶点集合。

为了保证实验的准确性，每次实验对于两个算法都输入相同的参数，然后比较运算结果。

实验中我们一共采用了5组实验数据，我们用$E(i, n, u, v, f)$来表示实验数据，其中i表示第i组实验，n表示维数，u表示无故障源顶点u，v表示无故障目的顶点v，f表示故障顶点个数。我们所采用的5组实验数据分别如下：

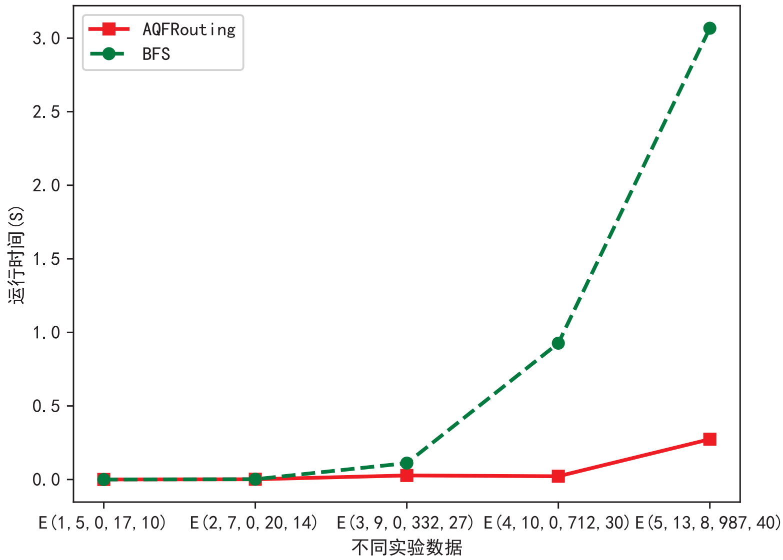


图 3-4　算法AQFRouting和BFS构造一条无故障路径所花费的时间

- $E(1, 5, 0, 17, 10)$
- $E(2, 7, 0, 20, 14)$
- $E(3, 9, 0, 332, 27)$
- $E(4, 10, 0, 712, 30)$
- $E(5, 13, 8, 987, 40)$

实验结果如图3-4和3-5所示。

从图 3-4我们可以看到，算法AQFRouting和算法BFS在维数较小的情况下找到一条无故障路径所花费的时间差不多（如图中的5维和7维）。但是随着维数和故障顶点数的增加，算法BFS所花费的时间远比算法AQFRouting多，比如当维数$n = 13$时，算法BFS所花费的时间是算法AQFRouting的10倍以上。原因在于，维数为n的扩展立方体所包含的顶点个数为2^n。深度优先会逐个顶点去查看是否是无故障顶点，因为维数越大，顶点个数越多，所以算法BFS的深度会越深，所花费的时间也越多。

从图 3-5可以看出，只有在维数和故障顶点数很小的时候算法AQFRouting和算法BFS 在两个无故障顶点之间的无故障路径长度才会差不多，比如维数等于5的时候。然后随着维数的扩大，算法AQFRouting所构造的无故障路径长度并没有产生太大的变化，但是算法BFS所构造的路径长度却急剧增长。我们认为原因和构造

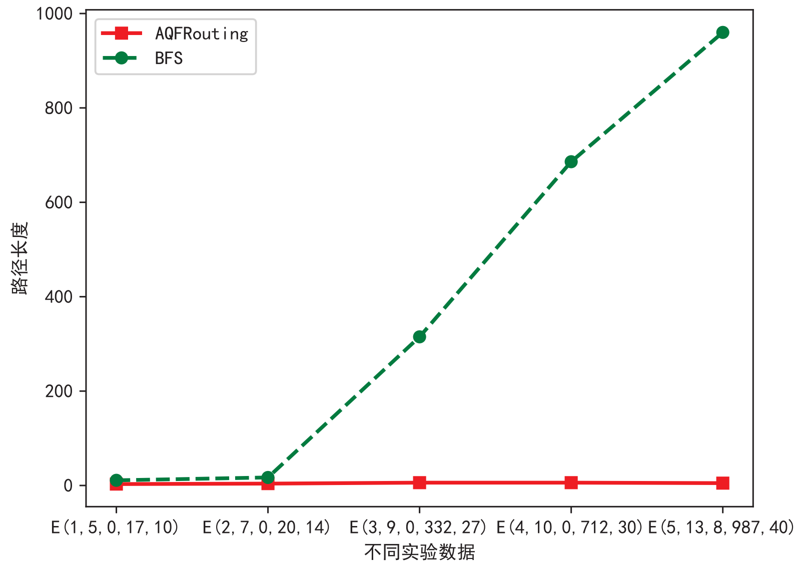


图 3-5　算法AQFRouting和BFS构造构造一条无故障路径长度

无故障路径所花费的时间增长类似，也是由于维数越大，顶点个数越多，所以算法BFS的深度会越深，所构造的路径也就越长。

综上所述，我们设计的算法AQFRouting在构造两个无故障顶点之间的一条无故障路径时，无论是构造时间还是构造长度都远远优越于传统的深度优先算法BFS。

3.7　本章小结

本章研究了扩展立方体的H-结构连通度和H-子结构连通度，结果总结如下：

$$(1)\ \kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \begin{cases} 2n-1 & \text{for } n \geq 4 \text{ and } K_{1,M} = K_1, \\ \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil & \text{for } n \geq 4 \text{ and } 1 \leq M \leq 3, \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil & \text{for } n \geq 6 \text{ and } 4 \leq M \leq 6. \end{cases}$$

$$(2)\ \kappa(AQ_n, P_L) = \kappa^s(AQ_n, P_L) = \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil \qquad \text{for } n \geq 3 \text{ and } 1 \leq L \leq 2n-1.$$

$$(3)\ \kappa^s(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil \qquad \text{for } n \geq 3 \text{ and } 3 \leq N \leq 2n-1.$$

$$(4)\ \kappa(AQ_n, C_N) = \begin{cases} n-1 & \text{for } n \geq 6 \text{ and } N = 3, \\ \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil & \text{for } n \geq 6 \text{ and } 4 \leq N \leq 2n-1. \end{cases}$$

当M比较小时（$1 \leq M \leq 6$），我们研究了$K_{1,M}$，在确保稳定通信和理想的情况

下，扩展立方体可以容忍的故障顶点数几乎是传统连通度的2倍。在以后的工作中，我们可能会关注$M \geq 7$的情形，这将使我们更加全面地了解扩展立方体的容错能力。同时我们给出了在AQ_n中寻找两个无故障顶点的容错路由算法AQFRouting，并通过分析和实验证明了该算法的优良性质。另一方面，将来我们可能会关注扩展立方体的其他结构容错性质，比如哈密顿性质等 [39,40]。

相关成果发表在SCI源期刊《Journal of Internet Technology》上(第一作者，2020年发表)。

第四章　扩展立方体的额外连通度和额外诊断度

在互联网络的容错性研究中，额外连通度是衡量网络稳定性和容错性的一个重要指标，额外连通度从更实际的角度考察了网络中可能发生故障的情形，对实际网络的性能评估提供了重要的依据。在本章中，我们重点考察了扩展立方体的2-额外连通度和MM^*模型下的2-额外诊断度，以及相应的诊断算法，该算法可以帮助我们快速地定位故障顶点来保障网络的正常运行。

本章针对扩展立方体所得到的相关结论如下：

（1）扩展立方体的2-额外连通度是$6n-17$，其中$n \geq 6$；

（2）扩展立方体在MM^*模型下的2-额外诊断度是$6n-5$，其中$n \geq 6$。

4.1　预备知识

在给出扩展立方体的2-额外连通度和MM^*模型下的2-额外诊断度的证明和算法之前，我们先给出证明要用到的扩展立方体的一些性质。

一对AQ_n中的顶点(u, v)被称为AQ_n中的一个补对如果$u = \bar{u}_n$。因为AQ_n中的任意两个补对都是两两不相交的，所以AQ_n中包含2^{n-1}个补对。

引理 4.1. *[41]* 设$AQ_n = L \odot R$，其中$L \cong AQ_{n-1}^0$，$R \cong AQ_{n-1}^1$。如果u和v是$L(R)$中的2个顶点且(u, v)(即，$v = \bar{u}_{n-1}$)是$L(R)$中的一个补对，那么(u, v)在$R(L)$中有两个相同的邻居顶点。否则，如果(u, v)不是$L(R)$中的一个补对，则(u, v)在$R(L)$中没有相同的邻居顶点。

引理 4.2. *[38]* 当$n \geq 4$时，设x, y, s, t, u是AQ_n中的5个顶点，如果AQ_n在x, y, s, t, u包含两个补对，那么$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10n - 35$。

引理 4.3. *[38]* 当$n \geq 4$时，设x, y, s, t, u是AQ_n中的5个顶点，如果AQ_n在x, y, s, t, u包含一个补对，那么$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u\})| \geq 10n - 39$。

引理 4.4. *[38]* 当$n \geq 4$时，设x, y, s, t, u, v是AQ_n中的6个顶点，如果AQ_n在x, y, s, t, u, v包含三个补对，那么$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v\})| \geq 12n - 46$。

引理 4.5. *[42]* 对于顶点集合$X \subset V(AQ_n)$，其中$|X| = k$，$0 \leq k \leq 2n-1$，那么$|N_{AQ_n}(X)| \geq 2kn - \frac{3k(k+1)}{2} + 1$。

定理 4.1. *[38] 设S是AQ_n的一个顶点子集，其中$|S| \leq 4n-9$，$n \geq 4$。那么$AQ_n - S$满足以下两个条件之一:*

(1) $AQ_n - S$是连通的；

(2) $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是K_1，另一个包含$2^n - |S| - 1$个顶点。

定理 4.2. *[38] 设S是AQ_n的一个顶点子集，其中$|S| \leq 6n-18, n \geq 6$。那么, $AQ_n - S$满足以下四个条件之一:*

(1) $AQ_n - S$是连通的；

(2) $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是K_1，另一个包含$2^n - |S| - 1$个顶点；

(3) $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是K_2，另一个包含$2^n - |S| - 2$个顶点；

(4) $AQ_n - S$有三个分支，其中有两个是K_1，且第三个包含$2^n - |S| - 2$个顶点。

4.2　扩展立方体的2-额外连通度

我们首先给出额外连通度的定义：

定义 4.1. [11] (1) 图G的一个g-额外集是一个顶点的集合，当从G中删除这个集合后，每个连通分支所包含的顶点个数大于等于$g+1$。

(2) 图G的一个g-额外割是G的一个g-额外集，将其删除将会导致G变为不连通的。

(3) 图G的g-额外连通度，记为$\kappa_g(G)$, 是g-额外割的最小基数。

因为条件诊断度和2-额外连通度具有密切的联系，在得到条件诊断度或者2-额外连通度的情况下，如果满足某些条件，另一个诊断度可以直接得到。Hao [43]等人给出了的充分条件。

定义 4.2. [44] 一个系统G是条件t-可诊断的，当且仅当两个不同的条件故障集合F_1，$F_2 \subseteq V(G)$ 是可区分的，且$|F_1|$，$|F_2| \leq t$。

G的条件诊断度，记为$t_c(G)$，其中t为上述定义的最大值，使得G是条件t-诊断的。

引理 4.6. *[45] $t_c(AQ_3) = 3$，$t_c(AQ_4) = 7$，$t_c(AQ_5) = 12$；当$n \geq 6$时，$t_c(AQ_n) = 6n-17$。*

定理 4.3. *[43]* 设G为n-正则图，其中$t = min\{|N(T)| : T$ 是G中一条长度为3的路径或者长度为3 的圈$\}$。如果G满足下面的条件：

(1) 对于一个顶点集合$F \subset V(G)$且$|F| \leq t-1$，$G-F$有一个大的连通分支和小的连通分量，且这些小的连通分支的所有顶点个数最多为2个；

(2) 如果G中不包含长度为5的圈，$n \geq 2\gamma(G)+2$；否则$n \geq 3\gamma(G)+2$；

(3) $|V(G)| > (n+1)(t-1)+4$；

那么$t_c(G) = t = \kappa_2(G)$。

其中$\gamma(G)$的定义为：对于G中两个不相邻的顶点x和y，$\gamma(x,y) = |N(x) \cap N(y)|$，$\gamma(G) = \max\{\gamma(x,y) : x, y \in V(G)$且$xy \notin E(G)\}$。

下面我们将根据扩展立方体的性质来逐一验证这3个条件。

AQ_n是$(2n-1)$-正则图。设u是AQ_n中的任意一个顶点，$T = \{u, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_{n-3}\}$，根据扩展立方体的定义，$T$是一条长度为3的路径且$t = N(T) = 6n-17$。根据引理4.2，可知$AQ_n$符合条件（1）；根据扩展立方体的定义，$AQ_n$ 包含长度为5 的圈。根据引理3.3，$\gamma(AQ_n) = 4$。当$n \geq 8$时，$2n-1 \geq 3\gamma(G)+2$，条件（2）成立；当$n \geq 9$时，$|V(G)| = 2^n > (n+1)(t-1)+4 = (n+1)(6n-18)+4$。条件（3）成立。

因为AQ_n满足定理4.3的条件，所以我们可以直接得到AQ_n的2-额外连通度。

定理 4.4. 当$n \geq 9$时，$\kappa_2(AQ_n) = 6n-17$。

4.3 扩展立方体在MM^*模型下的2-额外诊断度

引理 4.7. *[44,46]* 对于图G中的两个不同的顶点子集$F_1 \neq F_2 \subseteq V(G)$。$(F_1, F_2)$在$MM^*$模型下是可区分的当且仅当下面三个条件中的一个成立（见图*4-1*）：

(1) $\exists x, z \in V(G)-(F_1 \cup F_2)$和$y \in (F_1-F_2) \cup (F_2-F_1)$，且$xz, yz \in E(G)$；

(2) $\exists x, y \in F_1-F_2$和$z \in V(G)-(F_1 \cup F_2)$，且$xz, yz \in E(G)$；

(3) $\exists x, y \in F_2-F_1$和$z \in V(G)-(F_1 \cup F_2)$，且$xz, yz \in E(G)$。

定义 4.3. [47] (1) 在MM^*模型下，一个图G是g-额外，t-可诊断的，当且仅当对任意两个不同的g-额外集$F_1 \subseteq V(G)$，$F_2 \subseteq V(G)$，其中$|F_1| \leq t$，$|F_2| \leq t$，且F_1和F_2是可区分的。

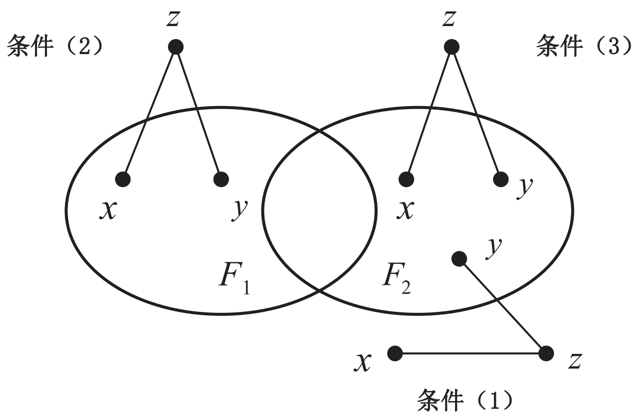


图 4-1　MM^*模型下两个可区分的顶点集合F_1和F_2

(2) G在MM^*下的g-额外诊断度记为$t_h^{\tilde{m}}(G)$，其中t是G 在g-额外，t-可诊断下的最大值。

在写这部分内容的时候，已经有两篇文章 [48, 49] 在某些条件下将额外连通度和额外诊断度联系了起来。但是扩展立方体并不满足这两篇文章的条件。下面我们将对这两篇文章的条件进行逐一说明:

(1) [48]针对的是n-正则的网络来建立MM^*模型下额外连通度和额外诊断度的联系。但是扩展立方体的$(2n-1)$-正则的网络，因此不符合该论文的适用条件。

(2) [49]中的定理1对于MM^*模型下将额外连通度和额外诊断度的联系起来有3个条件，其中扩展立方体满足其中的第1和第2个条件，但是对于第3个条件，并没有已知的定理满足，因此也无法将这三个条件适用于扩展立方体，以此来根据额外连通度直接得到扩展立方体的额外诊断度。

因为没有已知的条件将2-额外连通度和2-额外诊断度联系起来，所以下面我们将自己来证明扩展立方体的2-额外诊断度。

引理 4.8. 对于$n \geq 6$，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \leq 6n-15$。

证明. 设$S = \{u, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_{n-3}\}$，$F_1 = N(V(S))$和$F_2 = N[(V(S))]$。根据定义，我们有$|F_1| = 6n-17$和$|F_2| = N(V(S))+|V(S)| = 6n-14$。$AQ_n[S]$是一个连通子图，$AQ_n-F_1(AQ_n-F_2)$中的任意一个连通分支的顶点数都大于等于3。显然，我们有

$|F_1| \leq 6n-14, |F_2| \leq 6n-14$。

并且F_1和F_2都是AQ_n的2-额外集（见图4-2）。

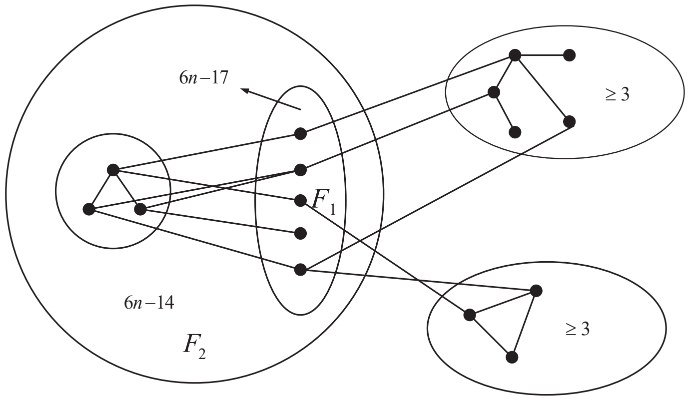


图 4-2　G的两个2-额外集

因为$F_1 \Delta F_2 = V(S)$，$E[F_1\Delta F_2, V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2)] = \emptyset$。根据引理4-1，$(F_1, F_2)$在$MM^*$下是不可区分的。由定义4.3，$AQ_n$不是$MM^*$下2-额外，$(6n-14)$-可诊断的，因此$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \le 6n-15$。 □

接下来，我们证明$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \ge 6n-15$。

引理 4.9. 对于$n \ge 8$，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \ge 6n-15$。

证明. 我们将通过反证法来证明$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \ge 6n{-}15$。假设$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \le 6n{-}16$。设$F_1$和$F_2$是两个不同的2-额外集且$|F_1| = |F_2| = 6n-15$。那么在$MM^*$ 模型下，F_1 和F_2 是不可区分的。另外，对于$n \ge 8$

$$
\begin{aligned}
|V(AQ_n)| - |F_1 \cup F_2| &\ge |V(AQ_n)| - |F_1| - |F_2| \\
&\ge |V(AQ_n)| - 2(6n-15) \\
&\ge 2^n - 2(6n-15) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

因此，$V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2) \ne \emptyset$。

断言：$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$不包含孤立顶点。

假设在$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$存在一个孤立顶点w。设W是$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$中孤立顶点的集合，并且H是$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$的导出子图。因为F_1是AQ_n的一个2-额外集且(F_1, F_2)在MM^*模型下是不可区分的。那么在$F_2 - F_1$存在唯一一个顶点u且$uw \in E(AQ_n)$。类似的，因为F_2是AQ_n的一个2-额外集且(F_1, F_2) 在MM^*模型下是不可区分

的。那么在$F_1 - F_2$存在唯一一个顶点v且$vw \in E(AQ_n)$。因为AQ_n是$(2n-1)$-正则图，则w 剩下的$2n-3$个邻居顶点都在$F_1 \cap F_2$ 中。此外，因为还有其他边把$F_1 \cap F_2$ 中的顶点与W外的其他顶点连接起来，所以我们有下面的不等式：

$$\begin{aligned}(2n-3)|W| &\le \sum_{s\in F_1\cap F_2} |N(s)| \\ &= |F_1 \cap F_2| \times (2n-1) \\ &\le (6n-16) \times (2n-1)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}|W| &\le \frac{(6n-16)\times(2n-1)}{2n-3} \\ &= \frac{(6n-16)\times(2n-3)+(6n-16)\times 2}{2n-3} \\ &= 6n-16+\frac{6(2n-3)-14}{2n-3} \\ &\le 6n-10\end{aligned}$$

假设$V(H) = \emptyset$，我们有

$$\begin{aligned}|V(AQ_n)| &= |F_1 \cup F_2| + |W| \\ &= |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| + |W| \\ &\le 2\times(6n-15)-(2n-3)+6n-10 \\ &= 16n-37\end{aligned}$$

当$n \ge 8$时，$2^n > 16n-37$。因此，$V(H) \ne \emptyset$。

因为W是$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$中所有孤立顶点的集合，并且H 是$V(AQ_n) - (F_1 \cup F_2)$的导出子图，我们有$N(V(H)) \cap W = \emptyset$。

假设$N(V(H)) \cap (F_1 \Delta F_2) \ne \emptyset$，那么在$V(H)$中存在一个顶点$z$使得$z$ 在$F_1\Delta F_2$中至少有1 个邻居顶点y。因为在$V(H)$中的任意一个顶点在$AQ_n - (F_1 \cup F_2)]$都不是一个孤立的顶点，所以z在$V(H)$中也存在一个邻居顶点x。因此, $x, z \in V(G) - (F_1 \cup F_2) \ne \emptyset$，$y \in F_1\Delta F_2$ 且$xz, yz \in E(AQ_n)$。根据引理4.7，F_1 和F_2是可区分的，这与(F_1, F_2) 在MM^*模型下是不可区分的相矛盾。因此$N(V(H)) \cap (F_1\Delta F_2) = \emptyset$。

如果$F_1 \cap F_2 = \emptyset$，那么$F_1 \Delta F_2 = F_1 \cup F_2$。所以，$N(V(H)) \cap F_1 = \emptyset$和$N(V(H)) \cap F_2 = \emptyset$。进一步的，$N(V(H)) \cap (F_1 \cup F_2 \cup W) = \emptyset$。因此$V(AQ_n) = N(V(H)) \cup F_1 \cup F_2 \cup W$，这意味着$AQ_n$是不连通的，这与$AQ_n$是连通图相矛盾。因此，$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$。

因为$F_1 \neq F_2$，不失一般性，设$F_1 - F_2 \neq \emptyset$。因为F_2是AQ_n的一个额外集，因此存在一个顶点$u \in F_1 - F_2$使得$uw \in E(AQ_n)$。因为(F_1, F_2)并不满足引理4.7中的条件，所以u是$F_1 - F_2$中唯一顶点使得$uw \in E(AQ_n)$。如果$F_1 - F_2 = \emptyset$，那么$F_2 \subseteq F_1$, 所以$AQ_n - (F_1 \cup F_2) = AQ_n - F_1$，并且$w$是$AQ_n - F_1$中的一个孤立顶点。这与$F_1$是$AQ_n$中的一个2-额外集相矛盾。因此，$F_2 - F_1 \neq \emptyset$。类似的，我们可以得到存在一个顶点$v \in F_2 - F_1$使得$vw \in E(AQ_n)$。当从$AQ_n$中删除$F_2 \cap F_1$时，因为$N(V(H)) \cap W = \emptyset$和$N(V(H)) \cap (F_1 \triangle F_2) = \emptyset$，$AQ_n - F_1 \cap F_2$是不连通的。而且，我们还可以知道$AQ_n - (F_1 \cap F_2)$包含一个非$H$的连通分支$Y$且$|V(Y)| \geq 4$（如图4-3）。根据$|V(Y)|$的大小，我们有以下两种情况：

情形1. $4 \leq |V(Y)| \leq 6$。因为$N(V(Y)) \subseteq F_1 \cap F_2$，根据引理4.5，有$|F_1 \cap F_2| \geq |N(V(Y))| \geq 6n - 15$。因为$F_2 \cap F_1 \neq \emptyset$，我们有$|F_2| = |F_1 \cap F_2| + |F_2 - F_1| \geq 6n - 15 + 1$，这与$|F_2| \leq 6n - 15$相矛盾。因此，$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$不包含孤立顶点。

情形2. $|V(Y)| \geq 7$。因为W中的顶点在F_1和F_2中各仅有一个邻居顶点，所以$|F_1 - F_2| \geq 3$或者$|F_2 - F_1| \geq 3$。不失一般性，我们设$|F_1 - F_2| \geq 3$。因为$|F_1| = 6n - 15$，那么$|F_1 \cap F_2| = |F_1| - |F_1 - F_2| \leq 6n - 18$。根据定理4.2，$AQ_n - F_1 \cap F_2$只包含一个顶点个数大于2的连通分支。但是当$n \geq 8$时，$|H| > 2^n - 2(6n - 15) > 2$，且$|V(Y)| > 2$。这意味着$AQ_n - F_1 \cap F_2$中包含两个顶点个数大于2的连通分支，与定理4.2矛盾。因此，$AQ_n - (F_1 \cup F_2)$不包含孤立顶点。

对于顶点$p \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$，根据断言，$N(p) \cap (V(G) - (F_1 \cup F_2)) \neq \emptyset$。因为$(F_1, F_2)$并不满足引理4-1中的条件，也就是说$p$在$F_1 \Delta F_2$中没有邻居顶点。因为$p$是任意选取的，所以$E[V(G) - (F_1 \cap F_2), F_1 \Delta F_2] = \emptyset$。因为$F_1 - F_2 \neq \emptyset$和$F_2$是$AQ_n$的一个2-额外集，则$|F_1 - F_2| \geq 3$。因为$F_1$和$F_2$是两个不同的2-额外集，所以$AQ_n - F_1$和$AQ_n - F_2$的任意分量的顶点数都大于3。当从$AQ_n$中删除$F_1 \cap F_2$时，$AQ_n - (F_1 \cap F_2)$是不连通的且其中的每个连通分支的顶点数都大于等于3。根据定义4.1(2)，$F_1 \cap F_2$是AQ_n的一个2-额外割。根据定义4.1(3)，$|F_1 \cap F_2| \geq 6n - 17$。那么，$|F_1| = |F_1 \cap F_2| + |F_1 - F_2| \geq 6n - 17 + 3 = 6n - 14 > 6n - 15$，矛盾。

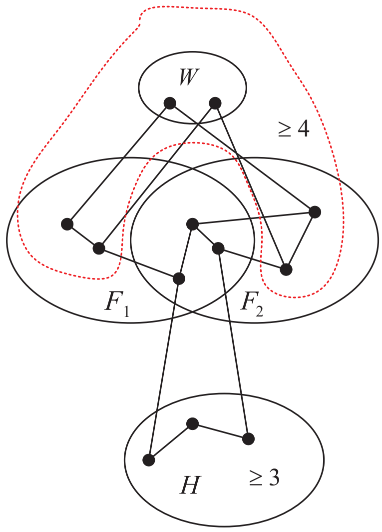


图 4-3　$G - F_1 \cap F_2$包含一个顶点个数大于等于4的连通分支

因此，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) \geq 6n - 15$。 □

根据引理4.8和引理4.9，我们可以得到以下的定理:

定理 4.5. 对于$n \geq 8$，$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) = 6n - 15$。

4.4　扩展立方体在MM^*模型下的诊断算法

引理 4.10. 当$n \geq 4$时，设x, y, s, t, u, v是AQ_n中的6个顶点，如果AQ_n在x, y, s, t, u, v包含2个补对，那么$|N_{AQ_n}(\{x, y, s, t, u, v\})| \geq 12n - 48$。

证明. 设(x, y)，(s, t)是$AQ_n = L \odot R$中的2个补对，其中$L \cong AQ_{n-1}^0$，$R \cong AQ_{n-1}^1$。不失一般性，我们设$x, s \in V(L)$，$y, t \in V(R)$。我们有下面几种情况:

情形1：$u, v \in L$或$u, v \in R$中。不失一般性，我们假设$u, v \in L$，根据引理2.1和引理2.3，我们有$|N_L(\{x, s, u, m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$，$|N_L(\{y, t\})| = 4(n-1) - 8$。因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x, y, s, t, u, v\})| &\geq |N_L(\{x, s, u, v\})| + |N_R(\{y, t\})| \\ &\geq (8n - 36) + (4n - 12) = 12n - 48.\end{aligned}$$

情形2：u, v其中一个在L中，另一个在R中。不失一般性，我们假设$u \in L$，$v \in R$。

根据引理2.2，我们有$|N_L(\{x,s,u\})| = |N_R(\{y,t,v\})| \geq 6(n-1) - 17 = 6n - 23$，因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x,y,s,t,u,v\})| &\geq |N_L(\{x,s,u\})| + |N_R(\{y,t,v\})|\\ &\geq 2(6n-23) = 12n-46.\end{aligned}$$

□

引理 4.11. 当$n \geq 4$时，设x,y,s,t,u,v,m是AQ_n中的7个顶点，如果AQ_n在x,y,s,t,u,v,m包含3个补对，那么$|N_{AQ_n}(\{x,y,s,t,u,v,m\})| \geq 14n-59$。

证明. 设$(x,y),(s,t),(u,v)$是$AQ_n = L \bigodot R$中的3个补对，其中$L \cong AQ_{n-1}^0$，$R \cong AQ_{n-1}^1$。不是一般性，我们设$x,s,u \in V(L)$，$y,t,v \in V(R)$。m属于L和R中的一个，不失一般性，我们设$m \in V(L)$。根据引理2.2和引理2.3，我们有$|N_L(\{x,s,u,m\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$，$|N_L(\{y,t,v\})| = 6(n-1) - 17 = 6n - 23$。因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x,y,s,t,u,v,m\})| &\geq |N_L(\{x,s,u,m\})| + |N_R(\{y,t,v\})|\\ &\geq (8n-36) + (6n-23) = 14n-59.\end{aligned}$$

□

引理 4.12. 当$n \geq 4$时，设x,y,s,t,u,v,m,n是AQ_n中的8个顶点，如果AQ_n在x,y,s,t,u,v,m,n包含4个补对，则$|N_{AQ_n}(\{x,y,s,t,u,v,m,n\})| \geq 16n-72$。

证明. 设$(x,y),(s,t),(u,v),(m,n)$是$AQ_n = L \bigodot R$中的4个补对，其中$L \cong AQ_{n-1}^0$，$R \cong AQ_{n-1}^1$。不是一般性，我们设$x,s,u,m \in V(L)$，$y,t,v,n \in V(R)$。根据引理2.3，我们有$|N_L(\{x,s,u,m\})| = |N_R(\{y,t,v,n\})| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$，因此

$$\begin{aligned}|AQ_n(\{x,y,s,t,u,v,m,n\})| &\geq |N_L(\{x,s,u,m\})| + |N_R(\{y,t,v,n\})|\\ &\geq 2(8n-36) = 16n-72.\end{aligned}$$

□

对于AQ_n中的一个顶点集合S，设$AQ_n = L \bigodot R$，其中$L \cong AQ_{n-1}^0$，$R \cong AQ_{n-1}^1$。设$S_L = S \cap V(L)$，$S_R = S \cap V(R)$。一个在$L - S_L$中的顶点u被称为是**孤单顶点**，如

果S_R包含u的两个在R中的邻居顶点。否则称u为**非孤单顶点**。

引理 4.13. 设S是AQ_n的一个顶点集合，其中$|S| \leq 6n-15$，$n \geq 8$，则$AQ_n - S$包含一个顶点个数至少为$2^n - 6n + 12$ 的连通分支。

证明. 设$AQ_n = L \bigodot R$，其中$L \cong AQ^0_{n-1}$，$R \cong AQ^1_{n-1}$。设$S_L = S \cap V(L)$，$S_R = S \cap V(R)$。对于$L - S_L$和$R - S_R$是否连通，我们有下面几种情况:

情形1. $L - S_L$和$R - S_R$都是不连通的。我们有$2n-3 \leq |S_L| \leq 4n-12$和$2n-3 \leq |S_R| \leq 4n-12$。根据定理4.1，我们有以下几种情形。

情形1.1. $L - S_L(R - S_R)$包含两个分量，其中一个是孤立的顶点，另一个是包含顶点个数为$2^{n-1} - |S_L| - 1$ 的连通分支，记为$C_0(C_1)$。因为对于$n \geq 8$，有

$$\begin{aligned}|V(C_0)| - (|S_R + 1|) &= 2^{n-1} - |S_L| - 1 - |S_R| - 1\\ &= 2^{n-1} - |S| - 2\\ &\geq 2^{n-1} - (6n-15) - 2\\ &= 2^{n-1} - 6n + 13 > 0\end{aligned}$$

那么C_0连接于C_1。因此，$AQ_n - S$有一个连通分支，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 1) + (2^{n-1} - |S_R| - 1) = 2^n - |S| - 2 = 2^n - 6n + 13$$

情形2. $L - S_L$和$R - S_R$都是连通的。设$C_0 = L - S_L$，$C_1 = R - S_R$。在L和R之间有2^n条边，而最多只有$2|S|$条边其至少有一个顶点属于这些边。因为$2^n \geq 2(6n-15)$，则C_0 和C_1是相连的。因此，$AQ_n - S$是连通的，其顶点个数为$2^n - 6n + 15$。

情形3. 在$L - S_L$和$R - S_R$中，其中一个是连通的，另一个是不连通的。不失一般性，我们假设$L - S_L$是不连通的，$R - S_R$是连通的。根据S_L中的故障顶点个数，我们有下面几种情况。

情形3.1. $2n-3 \leq |S_L| \leq 6n-24$。根据定理4.2，$|S_L| \leq 6n-24 = 6(n-1)-18$，则$L - S_L$中存在一个顶点个数不少于$2^{n-1} - |S_L| - 2$的连通分支，记为$C_0$。又因为对

于$n \geq 6$，

$$\begin{aligned}|V(C_0)| - (|S_R|) &= 2^{n-1} - |S_L| - 2 - |S_R| \\ &= 2^{n-1} - |S| - 2 \\ &\geq 2^{n-1} - (6n - 15) - 2 \\ &= 2^{n-1} - 6n + 13 > 0\end{aligned}$$

则C_0连接于$R - S_R$，因此$AQ_n - S$有一个连通分支，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 2) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 2 = 2^n - 6n + 13$$

情形3.2. $6n - 23 \leq |S_L| \leq 6n - 15$。那么$|S_R| \leq 8$。根据引理4.1，$L - S_L$中最多有8个孤单顶点。根据孤单顶点的个数，我们有下面几种情况：

情形3.2.1. $L - S_L$中包含最多3个孤单顶点。显然，$L - S_L$含有至少$2^{n-1} - |S_L| - 3$个非孤单顶点。因此，$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数至少为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 3) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 2 = 2^n - 6n + 13$$

情形3.2.2. $L - S_L$中包含4个孤单顶点。设x, y, s, t为$L - S_L$中的4个孤单顶点。显然，$L - S_L$中含有$2^{n-1} - |S_L| - 4$个非孤单顶点。根据引理2.3，$4 \leq |S_R| \leq 8$，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x, y, s, t\}) \geq 8(n-1) - 24 = 8n - 32 > 6n - 15 - 4$，则在$x, y, s, t$中至少存在一个顶点，该顶点在$L - S_L - \{x, y, s, t\}$中存在一个邻居顶点。因此，$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 3) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 3 = 2^n - 6n + 12$$

情形3.2.3. $L - S_L$中包含5个孤单顶点，设x, y, s, t, u为$L - S_L$中的5个孤单顶点。显然，$L - S_L$含有$2^{n-1} - |S_L| - 5$个非孤单顶点。因为$R - S_R$是连通的，所以$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 5) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 5 = 2^n - 6n + 10$$

根据引理4.1，x, y, s, t, u包含一个或两个补边。根据引理4.2和引理4.3，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x, y, s, t, u\}) \geq 10(n-1) - 39 = 10n - 49 > 6n - 15 - 6$，则在$x, y, s, t, u$中至少存在一个顶点，该顶点在$L - S_L - \{x, y, s, t, u\}$中存在一个邻居顶点。则$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为$2^n - 6n + 10 + 1 = 2^n - 6n + 11$。

不失一般性，假设顶点u存在一个邻居顶点，该邻居顶点属于$L-S_L-\{x, y, s, t, u\}$。另外，根据引理2.3，因为$4 \leq |S_R| \leq 8$，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x, y, s, t\}) \geq 8(n-1) - 24 = 8n-32 > 6n-15-4$，则在$x, y, s, t$中至少存在一个顶点，该顶点也在$L-S_L-\{x, y, s, t\}$中存在一个邻居顶点。因此，$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为$2^n - 6n + 11 + 1 = 2^n - 6n + 12$。

情形3.2.4. $L - S_L$中包含6个孤单顶点，设x, y, s, t, u, v为$L - S_L$中的6个孤单顶点。显然，$L - S_L$含有$2^{n-1} - |S_L| - 6$个非孤单顶点。因为$R - S_R$是连通的，所以$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为：

$$(2^{n-1} - |S_L| - 6) + (2^{n-1} - |S_R|) = 2^n - |S| - 5 = 2^n - 6n + 9$$

根据引理4.1，x, y, s, t, u, v包含2个或3个补边。根据引理4.4和引理4.10。对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x, y, s, t, u\}) \geq 12(n-1) - 48 = 12n - 60 > 6n - 15 - 6$，则在$x, y, s, t, u, v$中至少存在一个顶点，该顶点在$L - S_L - \{x, y, s, t, u, v\}$中存在一个邻居顶点。则$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为$2^n - 6n + 9 + 1 = 2^n - 6n + 10$。

不失一般性，假设顶点v存在一个邻居顶点，该邻居顶点属于$L-S_L-\{x, y, s, t, u, v\}$。另外，根据引理4.2和引理4.3，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x, y, s, t, u\}) \geq 10(n-1) - 39 = 10n - 49 > 6n - 15 - 6$，则在$x, y, s, t, u$中至少存在一个顶点，该顶点在$L - S_L - \{x, y, s, t, u\}$中存在一个邻居顶点。则$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为$2^n - 6n + 10 + 1 = 2^n - 6n + 11$。

不失一般性，假设顶点u存在一个邻居顶点，该邻居顶点属于$L-S_L-\{x, y, s, t, u\}$。另外，根据引理2.3，因为$4 \leq |S_R| \leq 8$，对于$n \geq 8$，有$N_L(\{x, y, s, t\}) \geq 8(n-1) - 24 = 8n-32 > 6n-15-4$，则在$x, y, s, t$中至少存在一个顶点，该顶点也在$L-S_L-\{x, y, s, t\}$中存在一个邻居顶点。因此，$AQ_n - S$中存在一个连通分支，其顶点个数为$2^n - 6n + 11 + 1 = 2^n - 6n + 12$。

对于$L - S_L$中包含7个或者8个孤单顶点的情况，证明方法与情形3.2.3和3.2.4类

似，在此不再赘述。 □

引理4.14可以由引理4.13直接得到。

引理 4.14. *设S是AQ_n的一个顶点子集，其中$|S| \leq 6n-15, n \geq 6$。那么，$AQ_n - S$满足以下7个条件之一:*

(1) $AQ_n - S$是连通的；

(2) $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是K_1，另一个包含$2^n - |S| - 1$个顶点；

(3) $AQ_n - S$有两个分支，其中一个是K_2，另一个包含$2^n - |S| - 2$个顶点；

(4) $AQ_n - S$有两个分支，其中一个包含3个顶点，另一个包含$2^n - |S| - 3$个顶点；

(5) $AQ_n - S$有三个分支，其中有两个是K_1，且第三个包含$2^n - |S| - 2$个顶点。

(6) $AQ_n - S$有三个分支，其中一个是K_1，另一个是K_2，且第三个包含$2^n - |S| - 3$个顶点。

(7) $AQ_n - S$有四个分支，其中有三个是K_1，且第三个包含$2^n - |S| - 3$个顶点。

根据引理4.14，我么可以得到下面的定理:

引理 4.15. *设F是AQ_n的一个额外集，其中$|F| \leq 6n-15, n \geq 6$。那么，$AQ_n - S$满足以下2个条件之一:*

(1) $AQ_n - F$是连通的；

(2) $AQ_n - F$包含两个连通分支，其中一个包含一个顶点个数为3的连通分支，另一个是包含顶点个数为$2^n - |F| - 3$的连通分支。

定义 4.4. [50] 一个系统$G = (V, E)$和由一个故障顶点集在G上产生的症状σ。设$i \subseteq V$，i的0-比较集$C_0(i)$定义为$C_0(i) = \{k \in V \mid \exists j \in V$使得$\sigma(i, j)_k = 0\}$。$G$的0-比较子图，记为$T_0(G)$，是$G$的一个子图，定义为$V(T_0(G)) \subseteq V$和$E(T_0(G)) = \{(i, j) \in E \mid j \in C_0(i), i \in C_0(j)\}$。

引理 4.16. *[50] 给定一个最多有t个故障顶点的系统$G = (V, E)$和一个在MM^*模型下的G上的症状σ。*

(1) 对于任意两个顶点$i, j \in V, (i, j) \in E$，其中$j \in C_0(i), i \in C_0(j)$，那么$i$和$j$有相同的状态（故障或无故障）。

(2) 对于任意一个连通分支$R \subseteq T_0(G)$，那么在R中的所有顶点，要么都是故障顶点，要么都是无故障顶点。

(3) 如果$T_0(G)$的连通分支R的顶点个数$|V(R)| \geq t+1$，那么R中的所有顶点都是无故障的。

接下来，我们将提出一个MM^*模型下AQ_n的2-额外，$(6n-15)$-可诊断算法。该算法主要基于引理4.15和引理4.16，并且这个算法可以正确地诊断出AQ_n中的所有的故障顶点。对于一个扩展立方体，我们使用邻接矩阵去存储扩展立方体的结构。首先，我们先给出一个深度优先的算法AQ-DFS-MM*来确定AQ_n中具有同一症状（顶点都为故障或者无故障）的连通分支。

算法 5 AQ-DFS-MM*

输入： 故障顶点集F在G上生成的症状σ，其中$|F| \leq 6n-15, n \geq 8$，以及两个无故障的顶点$i,k \in V(AQ_n)$，其中$(i,k) \in E(AQ_n)$。

输出： 集合T。

$T \leftarrow \{i,k\}$;
function DFS-MM*(AQ_n, i, k)
    for $j \in N_{AQ_n}(k) - T$ **do**
        if $\sigma(i,j)_k = 0$ **then**
            $T \leftarrow T \cup \{j\}$;
            AQ-DFS-MM*(AQ_n, k, j);
        end if
    end for
return T
end function

算法AQ-DFS-MM*的输入是两个无故障顶点i,k且$(i,k) \in E(AQ_n)$，然后根据引理4.16来得到$T_0(G)$。主要通过递归的深度优先算法来实现，因此算法AQ-DFS-MM*的时间复杂度为$O(N^2)$，其中N为扩展立方体的顶点个数。

算法 6 AQ-EXTRA-DIAG

输入： 故障顶点集F在G上生成的症状σ，其中$|F| \leq 6n-15, n \geq 8$。

输出： 集合T, F', H。

$T \leftarrow \emptyset, F' \leftarrow \emptyset, R \leftarrow V(AQ_n)$;
在R中选择2个无故障顶点i,k，其中$i,k \in E(AQ_n)$;
$T \leftarrow$ AQ-DFS-MM*(AQ_n, i, k);
if $|T| \leq 3$ **then**
    重新选择2个无故障顶点u,v，其中$u,v \in E(AQ_n)$;
    $T \leftarrow T \cup$ AQ-DFS-MM*(AQ_n, u, v);
    $F' \leftarrow R - T$;
return T, F';

```
9: end if
10:
11: R ← R − T;
12: for 对于顶点x ∈ N_{AQ_n}(T) ∩ R,， y, r ∈ T， 其中(x, r) ∈ E(AQ_n)和(y, r) ∈ E(AQ_n) do
13:     if σ(x, y)_r = 1 then
14:         F′ = F′ ∪ {x};
15:     end if
16: end for
17: R = R − F′;
18: T ← T ∪ R;
19: return T, F′;
```

因为算法AQ-EXTRA-DIAG主要以引理4.15为基础，因此该算法主要分为2种情况：（1）$AQ_n - F$是不连通的，根据引理4.15，且在第一次调用算法AQ-DFS-MM*时，选取的是小的无故障连通分支C且$|C| = 3$，调用算法AQ-DFS-MM*可以将C的所有无故障顶点都诊断出来，然后再次调用算法AQ-DFS-MM*，这次可以得到另一个更大的无故障连通分量H，且$H = 2^n - |F| - 3$。这样我们就可以得到所有的无故障顶点，因此剩下的就全部都是故障顶点；（2）我们通过调用算法AQ-DFS-MM*得到一个连通分支H，其顶点个数大于3，根据引理4.15，$AQ_n - F$只存在1个无故障顶点个数大于3的连通分支，因此剩下最多只有3个无故障顶点。我们通过与H相邻的顶点来判断其是否是故障顶点，如果不是故障顶点，则该顶点属于无故障顶点。这样我们可以将所有故障顶点和无故障顶点诊断出来。

因为算法AQ-EXTRA-DIAG的时间复杂度主要消耗在调用算法AQ-DFS-MM*上，且算法AQ-EXTRA-DIAG 的第12 − 16行的最大时间复杂度为$O(n^2)$。所以算法AQ-EXTRA-DIAG的时间复杂度是$O(N^2)$，其中N为扩展立方体的顶点个数。

4.5　模拟实验

在本节中，我们将通过模拟实验验证算法AQ-EXTRA-DIAG是否能够正确地找到所有故障顶点，我们将通过Python语言来实现，版本为3.7，实验环境是一台处理器为Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz 2.40，内存8GB的计算机。我们将通过这台计算法模拟不同的算法并给出实验结果。

在实验中，我们将通过随机生成故障顶点，且保证生成的故障顶点的集合是2-额外集。我们将有5组实验数据，其中的参数包括

- AQ_n的维数n；

- 故障顶点个数f；
- 随机生成故障顶点的集合F（用十进制表示）；
- 算法找到的故障顶点集合ST（用十进制表示）；
- 实验运行时间的平均值avg_t。

具体的实验结果如下：

1. 第一组测试数据和结果$E(3,3)$

- $n = 3$
- $f = 3$
- $F = [0,2,1]$
- $SF = [0,1,2]$
- $avg_t = 0.00020$

2. 第二组测试数据和结果$E(5,15)$

- $n = 5$
- $f = 15$
- $F = [6,25,3,28,24,22,15,23,13,21,27,19,29,7,30]$
- $SF = [3,6,7,13,15,19,21,22,23,24,25,27,28,29,30]$
- $avg_t = 0.00099$

3. 第三组测试数据和结果$E(7,27)$

- $n = 7$
- $f = 27$
- $F = [113,40,21,35,11,108,126,94,59,16,97,89,80,127,47,112,63,23,105,60,87,39,107,58,15,99,10]$
- $SF = [10,11,15,16,21,23,35,39,40,47,58,59,60,63,80,87,89,94,97,99,105,107,108,112,113,126,127]$
- $avg_t = 0.00320$

4. 第四组测试数据和结果$E(9,39)$

- $n = 9$

- $f = 39$
- $F = [244, 240, 118, 163, 310, 138, 287, 83, 276, 28, 339, 358, 20, 435, 106, 282, 423, 278, 309, 313, 368, 212, 125, 19, 334, 485, 43, 180, 65, 267, 26, 480, 300, 16, 18, 249, 494, 320, 123]$
- $SF = [16, 18, 19, 20, 26, 28, 43, 65, 83, 106, 118, 123, 125, 138, 163, 180, 212, 240, 244, 249, 267, 276, 278, 282, 287, 300, 309, 310, 313, 320, 334, 339, 358, 368, 423, 435, 480, 485, 494]$
- $avg_t = 0.02415$

5. 第五组测试数据和结果$E(10, 45)$

- $n = 10$
- $f = 45$
- $F = [977, 74, 445, 408, 313, 603, 639, 126, 426, 721, 709, 127, 928, 976, 862, 939, 788, 785, 235, 847, 907, 27, 829, 14, 13, 693, 25, 646, 529, 122, 913, 146, 1023, 509, 217, 730, 180, 109, 660, 657, 317, 532, 344, 583, 821]$
- $SF = [13, 14, 25, 27, 74, 109, 122, 126, 127, 146, 180, 217, 235, 313, 317, 344, 408, 426, 445, 509, 529, 532, 583, 603, 639, 646, 657, 660, 693, 709, 721, 730, 785, 788, 821, 829, 847, 862, 907, 913, 928, 939, 976, 977, 1023]$
- $avg_t = 0.07960$

五组实验数据的运行时间如图 4-4。

从实验结果可以看出，算法AQ-EXTRA-DIAG可以有效诊断出所有的故障顶点。而且从图 4-4显示，时间的变化趋势也和我们在前面分析的算法时间复杂度类似。

4.6 本章小结

在本章中，我们研究了扩展立方体的2-额外连通度和2-额外诊断度。我们得到的结果为：（1）扩展立方体的2-额外连通度为$\kappa_2(AQ_2) = 6n - 17$；（2）扩展立方体的的2-额外诊断度为$t_2^{\tilde{m}}(AQ_n) = 6n - 15$。同时，我们提出了2-额外诊断度下的诊断算法AQ-EXTRA-DIAG，实验结果表明，该诊断算法可以正确地诊断出所有的故障顶点。此外，该算法具有通用性，其并不局限于具体的网络拓扑结构，因此算法AQ-EXTRA-DIAG具有一定的应用意义。

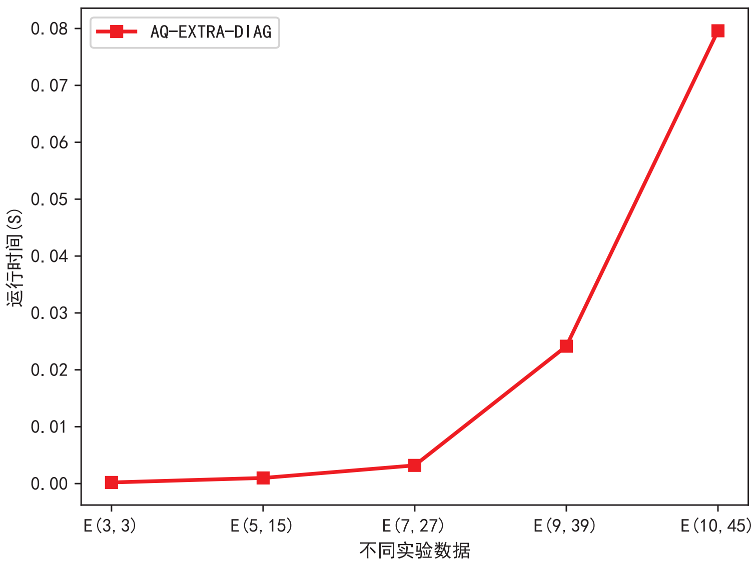


图 4-4　算法AQ-EXTRA-DIAG找到所有无故障顶点所花费的时间

第五章　总结与展望

5.1　总结

互连网络作为高性能计算和云计算的重要组成部分，其容错性能的好坏对网络的运行至关重要。扩展立方体作为超立方体的一种变体，拥有许多优秀的性质。我们在本文中重点研究了扩展立方体的容错性能，其中包括结构连通度和子结构连通度、额外连通度以及额外诊断度。取得的具体成果如下：

一、扩展立方体的结构连通度及子结构连通度

我们求出了扩展立方体的结构连通度和子结构连通度，并给出了其相关证明。同时，我们给出了扩展立方体在小于$K_{1,6}$-子结构连通度下的容错路由算法，并给出模拟实验的结果。研究成果如下：

(1) $\kappa(AQ_n, K_{1,M}) = \kappa^s(AQ_n, K_{1,M}) = \begin{cases} 2n-1 & \text{for } n \geq 4 \text{ and } K_{1,M} = K_1, \\ \lceil \frac{2n-1}{1+M} \rceil & \text{for } n \geq 4 \text{ and } 1 \leq M \leq 3, \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil & \text{for } n \geq 6 \text{ and } 4 \leq M \leq 6. \end{cases}$

(2) $\kappa(AQ_n, P_L) = \kappa^s(AQ_n, P_L) = \lceil \frac{2n-1}{L} \rceil$ 　　for $n \geq 3$ and $1 \leq L \leq 2n-1$.

(3) $\kappa^s(AQ_n, C_N) = \lceil \frac{2n-1}{N} \rceil$ 　　for $n \geq 3$ and $3 \leq N \leq 2n-1$.

(4) $\kappa(AQ_n, C_N) = \begin{cases} n-1 & \text{for } n \geq 6 \text{ and } N = 3, \\ \lceil \frac{2n-1}{N-1} \rceil & \text{for } n \geq 6 \text{ and } 4 \leq N \leq 2n-1. \end{cases}$

二、扩展立方体的额外连通度及额外诊断度

基于额外连通度和额外诊断度的定义，我们求出了扩展立方体的2-额外连通度和2-额外诊断度，并给出了其相关证明。同时，我们给出了当扩展立方体的故障顶点数小于其2-额外诊断度时的容错路由算法。并给出模拟实验的结果。

研究成果如下：

1. n-维扩展立方体AQ_n的2-额外连通度为$6n-17$，其中$n \geq 9$。

2. n-维扩展立方体AQ_n的2-额外诊断度为$6n-15$，其中$n \geq 9$。

5.2　展望

本文在扩展立方体的结构连通度及子结构连通度研究上取得了一些创新性进展。

但是总结下来，我们的结果仍有许多不足之处，希望今后作出进一步的成果，主要包括以下几方面：

1. 进一步将故障结构扩展到更具通用性的结构上面，而不是仅仅局限于一些小的特殊的故障结构，同时希望将结论一般化，使其可以应用到更多的互联网络拓扑结构上面。

2. 借助于扩展立方体的结构连通度及子结构连通度研究，希望将其应用于扩展立方体的其他结构容错性质，比如哈密顿性质等。

3. 进一步探究扩展立方体的g-额外连通度，希望可以将g一般化，而不是局限于某些特定的整数值。

参考文献

[1] 腾讯全网服务器数量超过100万台[EB/OL]. http://www.bianews.com/news/details?id=36468, 2019.

[2] 工业和信息化部关于印发《云计算发展三年行动计划（2017—2019年）》的通知[EB/OL]. https://www.miit.gov.cn/jgsj/xxjsfzs/zlgh/art/2020/art_fb1e14b54f234fc7b4f52c062b9d3d08.html, 2017.

[3] 阿里云：在全国已建成5大超级数据中心，新增百万台服务器[EB/OL]. https://baijiahao.baidu.com/s?id=1673704660936721085, 2020.

[4] Harary F, Hayes J P and Wu H J. A survey of the theory of hypercube graphs[J]. Computers Mathematics with Applications, 1988, 15(4): 277–289.

[5] Shao D C, Hong S and Topor R. An efficient algorithm for constructing hamiltonian paths in meshes[J]. Parallel Computing, 1997, 28(9): 25–32.

[6] Efe K. The crossed cube architecture for parallel computation[J]. IEEE Transactions on Parallel Distributed Systems, 1992, 3(5): 513–524.

[7] Day K and Tripathi A. Unidirectional star graphs[J]. Information Processing Letters, 1993, 45(3): 123–129.

[8] Bhuyan L N and Agrawal D P. Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network[J]. IEEE Transactions on Computers, 2006, C-33(4): 323–333.

[9] Choudum S A and Sunitha V. Augmented Cubes[J]. Networks, 2002, 40(2): 71–84.

[10] Harary F. Conditional connectivity[J]. Networks, 1983, 13(3): 347–357.

[11] Fàbrega J and Fiol M A. On the extraconnectivity of graphs[J]. Discrete Mathematics, 1996, 155(1-3): 49–57.

[12] Ma M, Liu G and Xu J-M. The super connectivity of augmented cubes[J]. Information Processing Letters, 2008, 106(2): 59–63.

[13] Latifi S, Hegde M and Naraghi-Pour M. Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1994, 43(2): 218–222.

[14] Yang W and Meng J. Extraconnectivity of hypercubes[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(6): 887–891.

[15] Guo L and Guo X. A new kind of parameter for fault tolerance of graphs[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2019, 31(10): e4787.

[16] Hsieh S-Y and Chang Y-H. Extraconnectivity of k-ary n-cube networks[J]. Theoretical Computer Science, 2012, 443: 63–69.

[17] Yu X, Huang X and Zhang Z. A kind of conditional connectivity of Cayley graphs generated by unicyclic graphs[J]. Information Sciences, 2013, 243: 86–94.

[18] Chen Y-C and Tan J J M. Restricted connectivity for three families of interconnection networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(2): 1848–1855.

[19] Guo L and Lee C W. Reliability analysis of the bijective connection networks for components[J]. Mathematics, 2019, 7(6): 546.

[20] Ning W. The h-connectivity of exchanged crossed cube[J]. Theoretical Computer Science, 2017, 696: 65–68.

[21] Wan M and Zhang Z. A kind of conditional vertex connectivity of star graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(2): 264–267.

[22] Guo L, Qin C and Xu L. Subgraph fault tolerance of distance optimally edge connected hypercubes and folded hypercubes[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2020, 138: 190–198.

[23] Lin L, Xu L, Zhou S and Hsieh S-Y. The extra, restricted connectivity and conditional diagnosability of split-star networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2015, 27(2): 533–545.

[24] Yang W and Lin H. Reliability evaluation of BC networks in terms of the extra vertex- and edge-connectivity[J]. IEEE transactions on computers, 2013, 63(10): 2540–2548.

[25] Zhang M, Meng J, Yang W and Tian Y. Reliability analysis of bijective connection networks in terms of the extra edge-connectivity[J]. Information Sciences, 2014, 279: 374–382.

[26] Wang S and Ma X. The g-extra connectivity and diagnosability of crossed cubes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 336: 60–66.

[27] Boesch F T. Synthesis of reliable networks: a survey[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1986, 35(3): 240–246.

[28] Wang S and Wang M. The strong connectivity of bubble-sort star graphs[J]. The Computer Journal, 1984, 62(5): 487–499.

[29] Lin C-K, Zhang L, Fan J and Wang D. Structure connectivity and substructure connectivity of hypercube[J]. Theoretical Computer Science, 2016, 634: 97–107.

[30] Sabir E and Meng J. Structure fault tolerance of hypercubes and folded hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 711: 44–55.

[31] Lv Y, Fan J, Hsu D F and Lin C-K. Structure connectivity and substructure connectivity of k-ary n-cube networks[J]. Information Sciences, 2018, 433: 115–124.

[32] Lü H and Wu T. Structure and substructure connectivity of balanced hypercubes[J]. The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society Series, 2018, abs/1808.02375.

[33] Li D, Hu X and Liu H. Structure connectivity and substructure connectivity of twisted hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 796: 169–179.

[34] Wang G, Lin C-K, Cheng B, Fan J and Fan W. Structure fault-tolerance of the generalized hypercube[J]. The Computer Journal, 2019, 62(10): 1463–1476.

[35] Preparata F P, Metze G and Chien R T. On the connection assignment problem of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Electronic Computers, 2006, EC-16(6): 848–854.

[36] Maeng J and Malek M. A comparison connection assignment for self-diagnosis of multiprocessors systems[J]. Proceedings of IFTC, 1981, : 173–175.

[37] Sengupta A and Dahbura A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosasis by the comparison Approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386–1396.

[38] Chang N W and Hsieh S Y. Conditional diagnosability of augmented cubes under the PMC model[J]. IEEE Transactions on Dependable & Secure Computing, 2011, 9(1): 46–60.

[39] Lv Y, Lin C-K, Fan J and Jiang X. Hamiltonian cycle and path embeddings in 3-ary n-cubes based on $K_{1,3}$-structure faults[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2018, 120: 148–158.

[40] Lv Y, Lin C.K and Fan J. Hamiltonian cycle and path embeddings in k-ary n-cubes based on structure faults[J]. The Computer Journal, 2017, 60(2): 159–179.

[41] Ma M, Liu G and Xu J M. The super connectivity of augmented cubes[J]. Information Processing Letters, 2008, 106(2): 59–63.

[42] Jiarong L, Fang C, Qian Z and Min X. t/t-diagnosability and t/k-diagnosability for augmented cube networks[J]. IEEE Access, 2018, : 1–1.

[43] Hao R X, Tian Z X and Xu J M. Relationship between conditional diagnosability and 2-extra connectivity of symmetric graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2016, 627: 36–53.

[44] Lai P L, Tan J J M, Chang C P and Hsu L H. Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 165–175.

[45] Hong W S and Hsieh S Y. Strong diagnosability and conditional diagnosability of augmented cubes under the comparison diagnosis model[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(1): 140–148.

[46] Sengupta A and Dahbura A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386–1396.

[47] Zhang S and Yang W. The g-extra conditional diagnosability and sequential t/k -diagnosability of hypercubes[J]. 2015, 93(3): 1–20.

[48] Lv M, Fan J, Zhou J and Jia X. The extra connectivity and extra diagnosability of regular interconnection networks[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 809: 88–102.

[49] Huang Y, Lin L and Xu L. A new proof for exact relationship between extra connectivity and extra diagnosability of regular connected graphs under MM* model[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 828-829: 70–80.

[50] Li X, Jia X, Fan J and Lin C. Reliability analysis of data center networks based on precise and imprecise diagnosis strategies[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 809: 189–203.

攻读硕士学位期间发表的论文和参与的科研项目

作者在攻读硕士学位期间发表的论文

[1] **Kan S**, Fan J, Cheng B, Wang X and Zhou J, Structure fault-tolerance of the augmented cube, Journal of Internet Technology, 2020, 21(6):1733-1746(SCI已收录).

[2] **Kan S**, Fan J, Cheng B and Wang X, The communication performance of BCDC data center network, 2020 12th International Conference on Communication Software and Networks (ICCSN), Chongqing, China, 2020, 51-57.

[3] Wang G, Fan J, Lv Y, Cheng B and **Kan S**, The constructive algorithm of vertex-disjoint paths in the generalized hypercube under restricted connectivity. Journal of Internet Technology, 2019, 20(1):1995-2006.

作者在攻读硕士学位期间参与的科研项目

[1] 参与国家自然科学基金面上项目“基于一类BC图的数据中心网络及其性质的研究”，项目编号：61572337。

[2] 参与国家自然科学基金青年项目“类超立方体网络上的容错通信性能研究”，项目编号：61602333。

[3] 参与国家自然科学基金青年项目“递归型数据中心网络上的条件容错通信性能研究”，项目编号：61702351。

[4] 参与国家自然科学基金面上项目“多变化环境监测系统的系统诊断结构与高效诊断算法分析与研究”，项目编号：61572340。

作者在攻读硕士学位期间的获奖情况

[1] 2018–2019学年，获苏州大学“学业优秀二等奖学金”。

[2] 2019–2020学年，获苏州大学“学业优秀三等奖学金”。

[3] 2020–2021学年，获苏州大学“学业优秀一等奖学金”。

致 谢

光阴如梭，岁月如歌，三年的研究生生活即将结束。这三年的时光既短暂又漫长，其中充满了酸甜苦辣，但更多的是收获和成长。值此硕士毕业论文成文之际，我要向我的老师、同学、亲人以及所有帮助过我的人表达我最真挚的谢意。

首先我要由衷地感谢我的导师樊建席教授。本文是在樊老师悉心指导下完成的，从选题的确定、资料的收集以及最后的撰写无不倾注着樊老师的心血和汗水。三年来，樊老师在学习和生活方面给与我无微不至的关怀。同时樊老师高尚的品格、崇高的敬业精神以及严谨的治学态度，深深地感染和激励着我，我从樊老师的身上不仅学到了扎实的专业知识，也学到了很多做人的道理。在此谨向樊老师致以崇高的敬意和衷心的感谢。

感谢程宝雷老师、王岩老师、林政宽老师、韩月娟老师、刘钊老师和周经亚老师等，感谢你们在学习、生活和工作方面对我的关心和帮助。

感谢师姐王桂娟、吕梦婕、孙雪莉、李小燕和王丽丹，师兄樊卫北和叶栋，师妹董辉、易怡、吴素英、过汝燕、舒畅和张还文以及师弟卞庆荣和潘志勇，他们在生活和学习中给予了我许多的鼓励和帮助。谢谢你们的温馨陪伴。

最后我要特别感谢我的父母，他们是我多年求学路上的坚强后盾，他们对我无私的照顾与爱是我不断前进的动力。

最后，感谢评审本论文的专家，感谢您抽出宝贵时间来阅读本文，并提出宝贵意见和建议。

阚双祥

二〇二一年五月十三日