

# 报告1：手机相机校正与标定

徐爽

数学与统计学院, 统计学

邮箱: shuangxu@stu.xjtu.edu.cn

## 摘要

本文首先对针孔相机模型、畸变校正模型和相机标定模型进行了回顾。然后，通过Matlab对iPhone7前置摄像头进行标定，并对实验结果进行了简单的分析。本文涉及的代码、材料等见[https://github.com/xsxjtu/XJTU\\_CVPR\\_HOMEWORK\\_XuShuang](https://github.com/xsxjtu/XJTU_CVPR_HOMEWORK_XuShuang)。

## 1 相机模型

在本节中，将介绍针孔相机模型、畸变校正模型和相机标定模型。

### 1.1 针孔相机模型

相机模型是指将真实世界中的点映射至二维平面的模型。通常，相机模型可以通过几何学进行描述。针孔相机模型是一种最简单的相机模型。它描述了光线通过针孔，在物理成像平面上投影的过程。

假设 $O - x - y - z$ 为相机坐标系， $O$ 为相机的光心（即针孔）， $x, y$ 分别表示水平和垂直方向， $z$ 指向相机的前方。假设 $O' - x' - y'$ 为物理成像平面。给定真实世界中一点 $P$ ，其坐标为 $(X, Y, Z)^T$ ；假设物理成像点为 $P'$ ，其坐标为 $(X', Y', Z')^T$ 。记相机的焦距为 $f$ ，则我们有如下关系：

$$\frac{Z}{f} = -\frac{X}{X'} = -\frac{Y}{Y'}. \quad (1)$$

这里的负号是因为相机坐标系的 $z$ 轴指向前方。不失一般性，我们可以把物理成像平面关于相机平面进行对称，从而把负号移除，即

$$\frac{Z}{f} = \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}. \quad (2)$$

接下来，我们把物理成像平面转变至像素坐标系下 $o - u - v$ 。这个变换即原点平移和尺度变换，可以由如下方程描述

$$\begin{cases} u = \alpha X' + b_x, \\ v = \beta Y' + b_y. \end{cases} \quad (3)$$

进一步，我们可以得到真实坐标系和像素坐标系的关系，

$$\begin{cases} u = \frac{\alpha f X}{Z} + b_x, \\ v = \frac{\beta f Y}{Z} + b_y. \end{cases} \quad (4)$$

记 $\alpha f$ 为 $f_x$ ,  $\beta f$ 为 $f_y$ , 可以将上式改写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} f_x & \gamma & b_x \\ 0 & f_y & b_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中,  $\gamma$ 是为了描述像素坐标系的夹角 ( $u$ 轴和 $v$ 不是正交的). 为了方便, 我们把 $Z$ 移到左边, 并把上式记作

$$Z\mathbf{P}' = \mathbf{K}\mathbf{P}. \quad (6)$$

矩阵 $\mathbf{K}$ 称为相机的内参数.

考虑到相机在真实世界中的位置和姿态, 我们应该在模型中加入相机的旋转和平移等因素. 当前的模型可以由如下方程描述,

$$Z\mathbf{P}' = \mathbf{K}(\mathbf{R}\mathbf{P} + \mathbf{t}), \quad (7)$$

其中 $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ 表示相机的旋转和平移, 称为相机的外参数, 它们会随着相机的运动而发生改变. 为了后续叙述的方便, 上式可以改写为

$$Z\mathbf{P}' = \mathbf{K}[\mathbf{R}, \mathbf{t}]\mathbf{M}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{M} = (X, Y, Z, 1)^T$ .

## 1.2 相机畸变模型

相机通常会放置一个透镜, 以此提高成像效果. 但是透镜会对光线的传播造成影响.

在一方面, 透镜自身的形状对光线传播造成影响. 使得 (真实世界的) 直线变为 (像素平面的) 曲线. 一般而言, 这种畸变称为径向畸变, 这个现象越靠近图像边缘越明显. 在另一方面, 透镜的姿态也会影响光线的传播. 透镜与成像平面不严格平行会产生切向畸变.

记 $(x_u, y_u)$ 为未畸变校正的坐标,  $(x_d, y_d)$ 为畸变校正的坐标,  $(x_c, y_c)$ 为畸变中心. 则Brown的畸变校正模型可以表示为

$$\begin{aligned} x_u &= x_d + (x_d - x_c)(K_1 r^2 + K_2 r^4 + \dots) + (P_1(r^2 + 2(x_d - x_c)^2) + \\ &\quad 2P_2(x_d - x_c)(y_d - y_c))(1 + P_3 r^2 + P_4 r^4 \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y_u &= y_d + (y_d - y_c)(K_1 r^2 + K_2 r^4 + \dots) + (2P_1(x_d - x_c)(y_d - y_c) + \\ &\quad P_2(r^2 + 2(y_d - y_c)^2))(1 + P_3 r^2 + P_4 r^4 \dots), \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $K_n, P_n$ 分别表示 $n$ 阶径向和切向校正系数,  $r = \sqrt{(x_d - x_c)^2 + (y_d - y_c)^2}$ 表示校正坐标到中心的距离.

## 1.3 相机标定

相机标定是指求解相机内参数和外参数的过程. 在本节中介绍, Zhang在1999年ICCV中提出的相机标定方法. Zhang考虑了如下相机模型:

$$s \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{R}, \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

不失一般性, 令  $Z = 0$ , 记  $\mathbf{r}_i$  为  $\mathbf{R}$  的第  $i$  列, 则我们有

$$\begin{aligned} s \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \mathbf{K}[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \mathbf{H} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

我们称  $\mathbf{H}$  为单映射矩阵. 根据拍摄的照片, 利用非线性最小二乘算法, 可以估计  $\mathbf{H}$ .

记  $\mathbf{h}_i$  为  $\mathbf{H}$  的第  $i$  列, 则我们有

$$[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{K}[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{t}], \quad (13)$$

其中  $\lambda$  为一任意标量. 注意:  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  是标准正交的, 即

$$\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 = 1, \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 = 0. \quad (14)$$

根据公式(13), 可得

$$\mathbf{h}_1 \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{h}_1 \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2, \quad (16)$$

令  $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}$ . 由于  $\mathbf{B}$  是对称矩阵, 所以  $\mathbf{B}$  可以由 6 维向量决定, 记为  $\mathbf{b} = (B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33})^T$ .  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{b}$  的关系可以由如下方程表示

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{B} \mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{b}, \quad (17)$$

其中  $\mathbf{v}_{ij} = (h_{i1}h_{j1}, h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1}, h_{i2}h_{j2}, h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3}, h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3}, h_{i3}h_{j3})^T$ . 公式(15),(16)可以用  $\mathbf{b}$  表示, 即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{12}^T \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^T \end{pmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

若有  $n$  张照片, 则可以得到  $2n$  个方程组, 我们用

$$\mathbf{V} \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (19)$$

表示. 上式的解  $\mathbf{b}^*$  为  $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$  的最小特征值对应的特征向量. 得到  $\mathbf{b}$  的解后, 就可以计算相机的内参数矩阵  $\mathbf{K}$ . 具体公式如下

$$v_0 = (B_{12}B_{13} \cdot B_{11}B_{23}) / (B_{11}B_{22} \cdot B_{12}^2)$$

$$\lambda = B_{33} \cdot [B_{13}^2 + v_0(B_{12}B_{13} \cdot B_{11}B_{23})] / B_{11}$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda / B_{11}}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\lambda B_{11}/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)} \\ \gamma &= -B_{12}\alpha^2\beta/\lambda \\ u_0 &= \gamma v_0/\beta - B_{13}\alpha^2/\lambda.\end{aligned}$$

得到内参数 $\mathbf{K}$ 后, 我们可以计算外参数

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1\|} \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2\|} \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_3}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_3\|}.\end{aligned}$$

上述过程给出了相机标定的解析解. 然而在真实实验中, 照片的拍摄存在噪声. 为了防止噪声对结果的影响, 我们使用非线性最小二乘对结果进行微调. 假设给定了 $n$ 张照片, 每张照片有 $m$ 个点, 则我们需求解如下优化问题,

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\mathbf{m}_{ij} - \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{K}, \mathbf{R}_i), \mathbf{t}_i, \mathbf{P}_j\|, \quad (20)$$

其中,  $\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{K}, \mathbf{R}_i), \mathbf{t}_i, \mathbf{P}$  表示第 $i$ 张照片中点 $\mathbf{P}_j$ 的(理论的)投影.

## 2 相机标定实验

### 2.1 实验流程

在本节中, 我们将进行相机标定实验. 实验的主要步骤如下:

1. 生成并打印棋盘模板 (checkboard pattern)
2. 对棋盘模板拍摄12张照片
3. 通过Matlab对相机进行标定
  - (a) 读取照片
  - (b) 提取每张照片的网格的交点 (grid corner)
  - (c) 根据1.3节的内容, 进行标定, 获取参数

### 2.2 实验设置和材料

在本次实验中, 棋盘模板来源于[http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/htmls/own\\_calib.html](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/htmls/own_calib.html). 模板中有 $9 \times 7$ 的方块, 每个方块大小为 $30\text{mm} \times 30\text{mm}$ . 通过惠普LaserJet Pro M203dw打印机把模板打印至A4纸. 经过实际测量, 我们发现最外围的方块大小并不是 $30\text{mm} \times 30\text{mm}$ , 其余方块的大小正常. 所以, 我们对纸张进行裁剪, 仅保留 $7 \times 5$ 的内部方块.

我们使用iPhone7前置摄像头对模板进行拍摄. 在拍摄过程中, 保持手机基本不移动, 改变模板的位置和姿态, 拍摄了12张照片, 分辨率为 $2320 \times 2320$ , 样图如Figure 1所示. 在后续实验中, 有1张照片无法进行网格交点提取, 所以又补拍一张照片. 我们认为这个原因在于: 打印纸的背面并不是干净的, 而是很多文字, 提取失败的那张照片受到了文字的干扰.



图 1: 用于标定的图像示例. 从左到右的编号分别为: img04, img10, img03\_fail. 最右的图像网格交点提取失败.

### 2.3 实验结果

相机内参数如Table 1所示. 焦距为 $f_x = 2827.718$ ,  $f_y = 2823.48$ ; 针孔坐标(principal point)为 $(u_0, v_0) = (1172.591, 1184.086)$ ; 像素坐标系的斜度(skew)为 $\gamma = -0.3516$ . 为了展示相机畸变校正的效果, 我们根据估计得到的畸变系数, 画出了未进行校正的照片. 如Figure 2所示, 左侧照片为原始照片, 右侧为未校正照片. 在未校正照片中, 桌子的纹理以及模板的边缘有比较明显的畸变, 可以判断本相机的径向畸变为桶形畸变.

Figure 3绘制了外参数, 上为以相机为中心的可视化, 下为以模板为中心的可视化. 我们在实验过程中保持相机位置和姿态基本不变, 所以以相机为中心的可视化更具有参考价值. 我们对比了Figure 3和实际照片中模板的位置和姿态, 发现基本吻合, 从侧面印证了标定结果的准确性.

表 1: 相机内参数

内参数	估计值	标准差
$f_x$	2827.718	20.5745
$f_y$	2823.48	18.7025
$u_0$	1172.591	4.882
$v_0$	1184.086	10.5583
$\gamma$	-0.3516	3.3956
径向畸变系数	0.0405	0.0308
	0.1348	0.2724
切向畸变系数	-0.0029	0.0019
	0.0089	0.0028

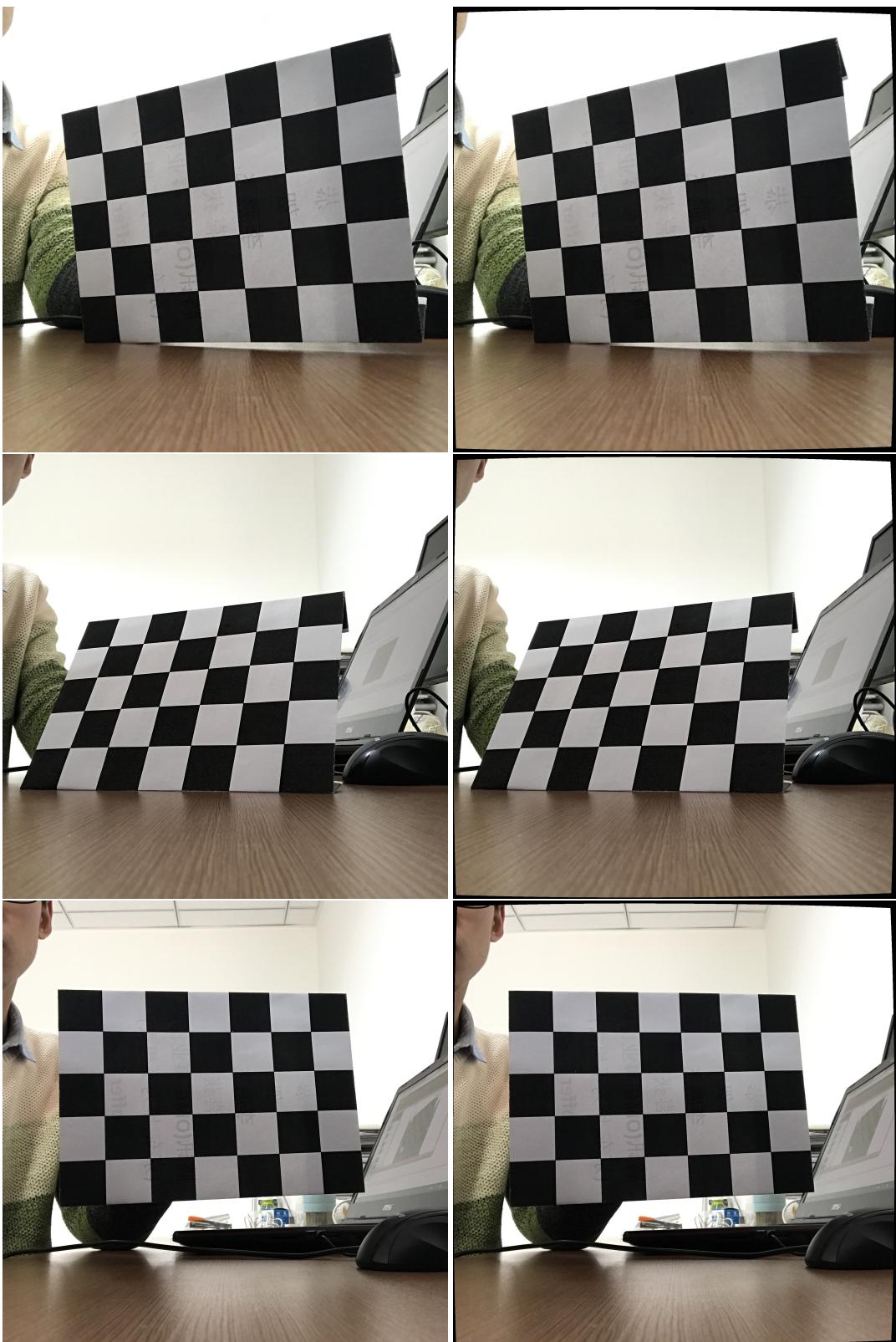


图 2: 左: 从上到下依次为img01,img02,img03; 右: 未进行畸变校正的img01,img02,img03

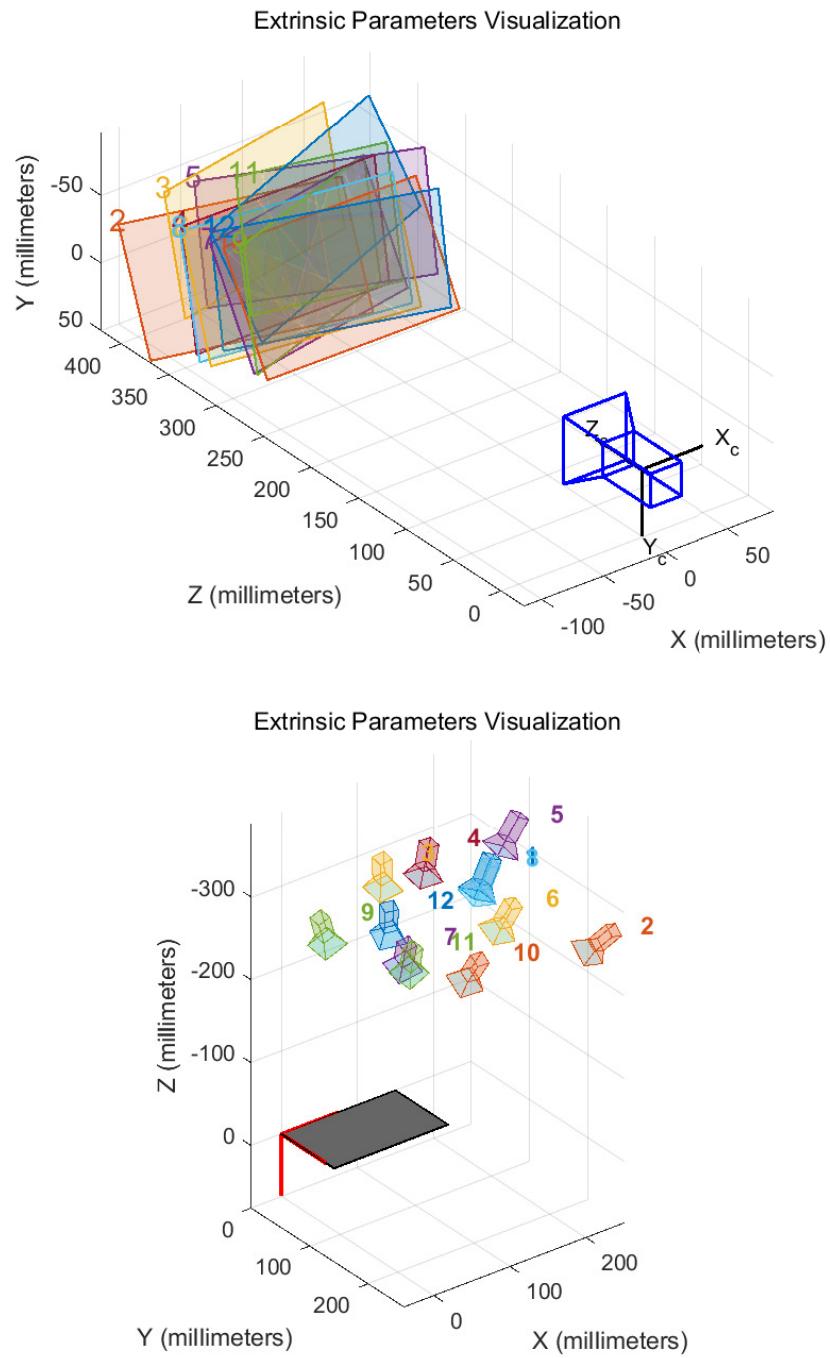


图 3: 相机外参数. 上: 以相机为中心; 下: 以模板为中心.