To Solve

2011年3月2日　　11:34

求$\int \frac{1}{x} dx$

用计算机程序求出π

这是很早以前用C语言写的一个计算圆周率的程序，算法是用泰勒公式计算反正切值。在命令行不跟参数执行该程序则使用Gauss公式计算前1000位圆周率的值，如果带一个命令行参数，则该值为要计算的位数。如果还有第二个命令行参数，则使用Stomer公式计算，可作为验算。因为该程序只涉及到纯数学计算，可以在Linux、Unix、Windows等操作系统下编译并运行。当时写这个程序时，int是2个字节的，现在大多数的C编译器int都是4个字节，不过这不影响程序的正确性。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
main(int argc, char * argv[])
{
  long * pi, * t, m, n, r, s;
  int t0[][3] = {48, 32, 20, 24, 8, 4}, k0[][3] = {1, 1, 0, 1, 1, 1};
  int n0[][3] = {18, 57, 239, 8, 57, 239}, d, i, j, k, p, q;
  d = (argc > 1) ? (((i = atoi(argv[1])) < 0) ? 0 : i) : 1000;
  q = (argc > 2) ? 1 : 0;
  printf("%s\n\n", "Nature (R) Pi value compute Program  (C) Tue 1999.11.30");
  printf("pi= %s%d * arctg(1/%d) %s %d * arctg(1/%d) %s %d * arctg(1/%d) [%s]\n",
    k0[q][0] ? "" : "-", t0[q][0], n0[q][0], k0[q][1] ? "+" : "-", t0[q][1],
    n0[q][1], k0[q][2] ? "+" : "-", t0[q][2], n0[q][2], q ? "Stomer" : "Gauss");
  if ((t = (long *)calloc((d += 5) + 1, sizeof(long))) == NULL) return 1;
  if ((pi = (long *)calloc(d + 1, sizeof(long))) == NULL) return 2;
  for (i = d; i >= 0; i--) pi[i] = 0;
  for (p = 0; p < 3; p++) {
    for (k=k0[q][p], n=n0[q][p], t[i=j=d]=t0[q][p], i--; i >= 0; i--) t[i] = 0;
    for (r = 0, i = j; i >= 0; i--) {
      r = (m = 10 * r + t[i]) % n;
      t[i] = m / n;
      k ? (pi[i] += t[i]) : (pi[i] -= t[i]);
    }
    while (j > 0 && t[j] == 0) j--;
    for (k = !k, s = 3, n *= n; j > 0; k = !k, s += 2) {
      for (r = 0, i = j; i >= 0; i--) {
        r = (m = 10 * r + t[i]) % n;
        t[i] = m / n;
      }
      while (j > 0 && t[j] == 0) j--;
      for (r = 0, i = j; i >= 0; i--) {
        r = (m = 10 * r + t[i]) % s;
        m /= s;
       k ? (pi[i] += m) : (pi[i] -= m);
      }
    }
  }
  for (n = i = 0; i <= d; pi[i++] = r) {
    n = (m = pi[i] + n) / 10;
    if ((r = m % 10) < 0) r += 10, n--;
  }
  printf("pi= %ld.", pi[d]);
  for (i = d - 1; i >= 5; i--)
    printf("%ld%s", pi[i], ((m = d - i + 5) % 65) ? ((m % 5) ? "" : " ") : "\n");
  printf("%sDIGITS: %d\n", (m % 65) ? "\n" : "", d - 5);
  return 0;
}
```

下面是程序运行结果：

Nature (R) Pi value compute Program (C) Tue 1999.11.30

pi= 48 * arctg(1/18) + 32 * arctg(1/57) - 20 * arctg(1/239) [Gauss]

pi= 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384
46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489
54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648
56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817
48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841
46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065
66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523
84674 81846 76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637
17872 14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611
21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837 29780
49951 05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035

26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303 59825
34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066
13001 92787 66111 95909 21642 01989
DIGITS: 1000

Overview

2011年7月4日 9:49

高数研究的对象是函数，研究的方法是极限，思想是“以不变代替变”→这样会产生误差，故用极限消除误差，如用矩形求曲边梯形面积。
高数研究的内容是微积分：一元函数微积分、多元函数微积分（以及各自的应用，微分学与积分学结合起来的应用有无穷级数与常微分方程），二者之间的桥梁是空间解析几何。

- 一元函数微积分
  - 微分学
    - 函数、极限、连续性
    - 导数与微分及其应用
    - 微分中值定理
  - 积分学
    - 不定积分
    - 定积分；反常积分
    - 定积分的应用

罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理及泰勒公式，这4个微分中值定理，把导数与微分及其应用联系起来。

空间解析几何，维数增加

- 多元函数微积分
  - 微分学
    - 函数、极限、连续性
    - 偏导数和全微分
    - 多元函数泰勒公式，有要求，但从未考过
  - 积分学
    - 无与不定积分对应项
    - 重积分；无穷区域上的二重积分
    - 重积分的应用

Equations

2014年11月16日　　9:36

不等式

$a^2 + b^2 \geq 2ab, a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Limit

2011年3月9日 13:35

极限存在准则

极限不存在时，也可以说成极限是无穷大∞.
左、右极限的记法，以右极限为例，可记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$
函数$f(x)$当$x \to x_0$时极限存在的充要条件是左极限及右极限都存在且相等，即$f(x_0^-) = f(x_0^+)$，与此处的函数值无关。
在自变量的同一变化过程$x \to x_0$（或$x \to \infty$）中，函数$f(x)$具有极限A的充要条件是$f(x) = A + \alpha$，其中α是无穷小。
夹逼准则中，不取 <= 而取 < 也是成立的。
单调有界数列必有极限。这是有极限的充分条件而不是必要条件，因为也可以摆动着收敛、而不是单调地收敛。
证明单调：两项相减、两项相除、数学归纳法、导数恒正或恒负。证明有界：常用不等式（如 a^2+b^2 >= 2ab）、数学归纳法。
柯西极限存在准则（亦名柯西审敛原理）给出了数列收敛的充要条件，大意是说两项之差的绝对值趋于 0.

求极限

有限个无穷小的和、差、积都是无穷小，而商不确定。
有界函数与无穷小的积也是无穷小→常数与无穷小的积也是无穷小。
设$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，且$\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$。这表明求两个无穷小之比的极限时，分子分母都可用等价无穷小代替。故若用以代替的无穷小选择得当，可使计算简化。
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 这是不是说，sinx 和 x 在 x->0 时是等价无穷小?
若$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则：

- $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
- $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
- 若又有$B \neq 0$，则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$

求有理整函数（多项式）或有理分式函数当$x \to x_0$的极限时，只要把$x_0 = x$代入表达式中就行了；但是对于有理分式函数，代入后若分母为0则无意义。
当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时, 有:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}\text{, 当}n = m\text{时} \\ 0\text{, 当}n > m\text{时} \\ \infty\text{, 当}n < m\text{时} \end{cases}$$

复合函数求极限：内层函数的极限落在处层函数的定义域内，先求内层函数的极限，再逐层求外函数的极限。

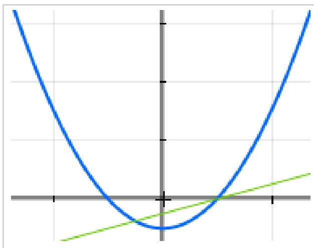
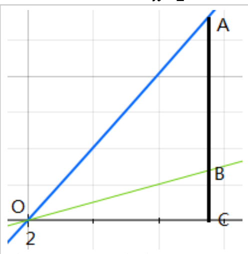
两个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 后者又可推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

洛必达（L'Hospital）法则：

七种未定式：$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$
函数之比的极限等于导数之比的极限：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$ ($x \to \infty$时亦然) 可以对分子、分母求不止一次导数，直至不为未定式为止，再求极限

未定式的极限可能存在也可能不存在，即使存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一规则。用洛必达法则可直接求出$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$这两种基本未定式的极限，也可间接求出$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型的未定式。
若不是未定式，就不能应用洛必达法则。
为什么可以用导数来计算极限呢？以$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$为例：

	 在x=2附近放大 蓝色为y=x^2-4, 绿色为 y=x-2	$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$就是在问，当$x \to 2$时，函数$f = x^2 - 4$与$g = x - 2$的比值是什么。 在x=2处把图像放大，设C为从右侧无限接近x=2的一点，则$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$就是线段AC与BC的长度之比。 洛必达法则是把线段AC与BC的长度之比，转化为曲线OA与曲线OB倾斜程度之比。 $\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}{\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}$

极限的运算

两个函数（或数列），其中一个或两个在某点的极限不存在，则它们作四则运算后在该点的极限可能存在。

Exercises

1. $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ (说明：无穷小与有界函数之积)
2. 数列x_n, y_n满足$= \lim_{x\to\infty} x_n y_n = 0$. 则（D）

A. 若x_n发散，则y_n必发散。举反例，令$x_n = 1,0,2,0,3,0,\cdots$；$y_n = 0,0,0,\cdots$
B. 若x_n无界，则y_n必有界。举反例，令$x_n = 1,0,2,0,3,0,\cdots$；$y_n = 0,1,0,2,0,3,\cdots$
C. 若x_n有界，则y_n必为无穷小。举反例，令$x_n = 0,0,0,\cdots$；$y_n = 1,0,2,0,3,0,\cdots$
D. 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小。$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

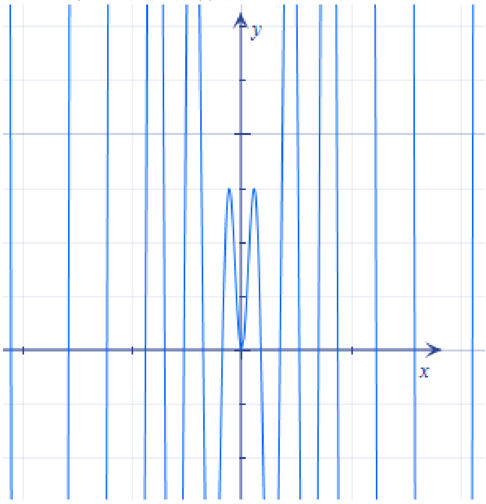
无穷大、无穷小

2011年3月9日　　17:22

∞只是一个记号，并不表示某一具体的值
两个无穷小之比的极限，反映了不同无穷小趋于0的“快慢”程度：
若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$
若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小
若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小
若$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$，就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小
若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\beta \sim \alpha$.

定理：β与α是等价无穷小的充要条件是$\beta = \alpha + o(\alpha)$
定理：若$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$存在, 则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$. 也可只替换分子或分母，因为自己和自己也是等价无穷小。

无穷大一定是无界函数，但无界函数不一定是无穷大。如$f(x) = x \sin x$在$(0, +\infty)$上无界，但$\lim_{x \to \infty} x \sin x \neq \infty$. 请看 y = xsinx 的图像，它在 x 轴上下摆动着增大：



Function

2011年3月1日　　21:49

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在R内，因此构成函数的要素是定义域D_f及对应法则f。
函数极限的性质（之一）：若$\lim\limits_{x\to x0} f(x)$存在，那么此极限唯一。
函数极限的局部保号性：若$\lim\limits_{x\to x0} f(x) = A$, 且$A > 0$(或$A < 0$), 那么存在常数$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$)
其更强的结论是若$\lim\limits_{x\to x0} f(x) = A(A \neq 0)$, 那么就存在着$x_0$的某一去心邻域$\mathring{U}(x0)$, 当$x \epsilon \mathring{U}(x0)$时, 就有$|f(x)| > \frac{|A|}{2}$
若$x \to +\infty$及$x \to -\infty$时, 函数$f(x)$的极限都存在且都等于A，则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

基本初等函数共5类

幂函数$y = x^{\mu}(\mu \in R$是常数$)$
指数函数$y = a^x(a > 0$且$a \neq 1)$
对数函数$y = \log_a x\,(a > 0$且$a \neq 1$，特别当$a = e$时$y = \ln x)$
三角函数、反三角函数
也有人说常量函数$y = C$也是基本初等函数
由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。
一切初等函数在其定义域内是连续的。
双曲函数（属于初等函数）：
双曲正弦函数$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$　　双曲余弦函数$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$　　双曲正切函数$thx = \frac{shx}{chx}$
以上函数与三角函数有类似性质，但双曲函数无周期性。

反函数（逆映射）

一般而言，当f(x)为一任意函数，且g为其反函数，则g(f(x)) = x且f(g(x)) = x。换句话说，一反函数会取消原函数的作用。

- 互为反函数的两个函数的图象关于直线y＝x对称；（相互垂直的两直线，其斜率之积为-1）
- 函数存在反函数的充要条件是，函数的定义域与值域是一一映射；
- 一个函数与它的反函数在相应区间上单调性一致；
- 大部分偶函数不存在反函数（唯一有反函数的偶函数是f(x)=a,x∈{0}）。奇函数不一定存在反函数。被与y轴垂直的直线截时能过2个及以上点即没有反函数。若一个奇函数存在反函数，则它的反函数也是奇函数。
- 一切隐函数具有反函数；
- 一段连续的函数的单调性在对应区间内具有一致性；
- 严格增（减）的函数一定有严格增（减）的反函数【反函数存在定理】
- 反函数是相互的
- 定义域、值域相反对应法则互逆（三反）
- 原函数一旦确定，反函数即确定（三定）

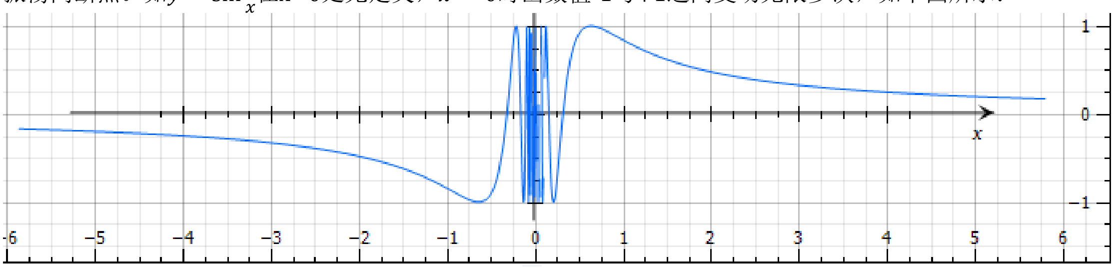
连续性与间断点

定義 設函數y=f(x)在點x_0的某一鄰域內有定義，若$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，那麼就稱函數$y=f(x)$在點$x_0$連續。這個定義又可表述為：設函數$y=f(x)$在點$x_0$的某一鄰域內有定義，若$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，則稱函數$f(x)$在點$x_0$連續。
還有左連續和右連續。
两个连续函数的和、差、积、商（除法分母不为0）仍连续。
连续函数与不连续函数作四则运算后的连续性不确定。
两个不连续函数作四则运算后的连续性也不确定。
第一类间断点，左右极限都存在：

- 若左右极限相等（之所以间断，可能因为函数在此处无定义），则称为可去间断点（可去者，若补充定义使函数在此处有定义并函数值等于左右极限，则函数就可连续）
- 若左右极限不等，则称为跳跃间断点

第二类间断点，非第一类间断点者（左右极限至少有一个不存在）：

- 无穷间断点，该点处极限为∞
- 振荡间断点。如$y = \sin\frac{1}{x}$在x=0处无定义，$x \to 0$时函数值-1与+1之间变动无限多次，如下图所示：



单调性

若函数在定义区间上连续，除去有限个导数不存在的点外，导数存在且连续，那么只要用方程$f'(x) = 0$的根及$f'(x)$不存在的点来划分函数$f(x)$的定义区间，就能保证$f'(x)$在各个部分区间内保持固定符号，因而$f(x)$在各部分区间上单调。
一般地，若$f'(x)$在某区间内的有限个点处为0，在其余各点处均为正（或负）时，函数$f(x)$在该区间上仍旧是单调增加（或减少）的。如$y = x^3$虽在原点处有水平切线，但在其整个定义域$(-\infty, +\infty)$内仍旧是单调增加的。

极值

定义 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内（极值概念是局部的）有定义，若对去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内的任一x，有$f(x) < f(x_0)$(或$f(x) > f(x_0)$)，则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值（或极小值）。

极值点处导数为0（驻点）（前提是在这一点可导），但驻点不一定是极值点。此外，函数在其导数不存在的点处也可能取得极值（如$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导，但在该点处有极小值）。

两个判定极值的充分条件：

第一充分条件：设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内可导。1、若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值；2、若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值；3、若$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在$x_0$处没有极值。

x向正向经过x_0时，若$f'(x)$的符号由正变负，则在x_0处取得极大值；若由负变正则取得极小值；若符号不就则在x_0处没有极值。

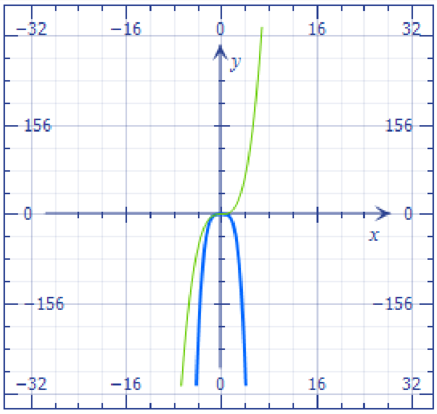
求$f(x)$极值点的步骤：

1. 求出导数$f'(x)$
2. 求出$f(x)$的全部驻点和不可导点
3. 考察$f'(x)$的符号在每个驻点或不可导点的左右邻近的情形，以确定该点是否为极值点

第二充分条件：设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，那么：1、当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在$x_0$处取得极大值；2、当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在$x_0$处取得极小值。

二阶导数描述了曲线的凹凸性，参看Derivative这一页

驻点x_0处的二阶导数$f''(x_0)\neq 0$的话，该驻点x_0必为极值点，且可用$f''(x_0)$的符号来判定是极大值点还是极小值点。而$f''(x_0)=0$时，$f(x)$在x_0处可能有极大值，也可能有极小值，也可能没有极值。如$f_1(x)=-x^4$, $f_2(x)=x^4$, $f_3(x)=x^3$这三个函数在$x=0$处就分别属于这三种情况，见右图。



蓝色为$f_1(x)=-x^4$，绿色为$f_3(x)=x^3$

最值

求函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最值：

1. 求出$f(x)$在(a,b)内的驻点及不可导点
2. 计算驻点及不可导点处的函数值，以及端点a,b处的函数值
3. 比较上一步中的诸函数值，得出最值

奇偶性

两个偶函数的和、差、积仍为偶函数。

两个奇函数的积为偶函数。

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

函数奇偶性在求导、积分中的应用。若函数有奇偶性，则要充分利用，使求导、积分得以简化。

周期性

奇偶性和周期性的判定，只能靠定义。

增减性

一般说的是严格增、严格减。

一般不用定义判定增减性，而是用其一阶导数的符号。

复合函数

一个函数的值域与另一个函数的定义域有交集。

Trigonometric Function

2011年3月7日 16:06

trigonometric [ˈtrigənəˈmetrik] 三角学的；三角法的 trigonometry /ˌtrɪɡəˈnɒmətri/ 三角学

$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1, 1 + tan^2\,x = sec^2\,x, 1 + cot^2\,\alpha = \csc^2\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{\sec\alpha}{\csc\alpha}, \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \frac{\csc\alpha}{\sec\alpha}$

正割$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$，余割$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

根据函数的奇偶性，有$sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$，$cos(-\alpha) = cos\,\alpha$，$tan(-\alpha) = -tan\,\alpha$，$cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

两角和差：

- $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$， $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

二倍角公式（可认为是二角和的特例）：

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$， $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

半角公式：

- $sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}, cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}$
- $tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}} = \frac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha}$， $cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}} = \frac{1+cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{1-cos\,\alpha}$

三倍角公式：$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$，$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$，$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

降幂公式：$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

万能公式：$\sin\alpha = \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan^2(\frac{\alpha}{2})}, \cos\alpha = \frac{1-\tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan^2(\frac{\alpha}{2})}, \tan\alpha = \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1-tan^2(\frac{\alpha}{2})}$

积化和差（证明方法是把等式右端展开）（可用于降幂）：

- $sin\,A\,sin\,B = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$， $cos\,A\,cos\,B = \frac{1}{2}[cos(A-B) + cos(A+B)]$
- 助记：两角和差的余弦展开式中两角函数名相同$\mathbf{cos}(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$，是以以上两式右边是余弦
- 助记：两角和差的正弦展开式中两角函数名不同$\mathbf{sin}(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$，是以以下两式右边是正弦。以下两式实际相当于一个，只是变量名变了而已。$cos\,A\,sin\,B = \frac{1}{2}[sin(A+B) - sin(A-B)]$不也可以写为$cos\,A\,sin\,B = \frac{1}{2}[sin(A+B) + sin(B-A)]$吗？
- $sin\,A\,cos\,B = \frac{1}{2}[sin(A+B) + sin(A-B)]$， $cos\,A\,sin\,B = \frac{1}{2}[sin(A+B) - sin(A-B)]$

和差化积：

- $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$， $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$， $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

化$a\,sin\,\alpha \pm b\cos\alpha$为一个角的一个三角函数的形式（辅助角的三角函数的公式）：

$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$，其中$\varphi$角所在象限由$a, b$的符号确定，$\varphi$角的值由$\tan\varphi = \frac{b}{a}$确定

反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数（但需要注意定义域和值域）。

$\arcsin x + arc\cos x = \frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$， $arc\tan x + arx\cot x = \frac{\pi}{2}$

在一定定义域内，$arc\sin x$表示一个正弦值为x的角，把这个角再求正弦，就得到了x，即$y = arc\sin x \overset{推出}{\Longrightarrow} x = \sin y \overset{推出}{\Longrightarrow} \sin(arc\sin x) = x$

Derivative

2011年3月4日 14:19

derivative /dɪˈrɪvətɪv/导数

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx（点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内）时，相应的函数取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；当$\Delta x\to 0$时，若$\Delta y$与$\Delta x$之比的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称此极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}，\text{也可记为}\ y'\Big|_{x=x_0},\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}\ \text{或}\ \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

求函数在某点处的导数时，有时用定义会更简单。

函数$f(x)$在点x_0处可导的充要条件是左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等。但还要注意，可导必连续，这是一个隐含条件。

根据函数在$f(x)$在点x_0处的导数 $f'(x_0)$的定义，导数$f'(x_0)=lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$是一个极限，而极限存在的充要条件是左右极限都存在且相等。因此，$f'(x_0)$存在、即$f(x)$在点x_0处可导的充要条件是$f(x)$在点x_0处的左右导数都存在且相等。

与极限存在性的对比：函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充要条件是左极限及右极限都存在且相等，即$f(x_0^-)=f(x_0^+)$

若函数在一区间上是一个常数，则在此区间上其导数恒为0. 它的逆命题也成立：若函数在某区间上的导数恒为0，则它在此区间上是一个常数。

幂函数与根号函数相对，指数函数与对数函数相对。

可导时切线必存在，不可导时切线也可能存在，比如尖点处切线垂直于x轴。

函数可导则必定连续，而连续不一定可导。如$y=\sqrt[3]{x}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在原点处的导数为无穷大（注意，导数不存在），在图形中的表现是在原点处具有垂直于x轴的切线$x=0$；再如，$y=\sqrt{x^2}$（即$y=|x|$）在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在原点处不可导，没有切线。

幂函数的导数公式 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$（μ为常数）

指数函数的导数公式 $(a^x)'=a^x\ln a$ 。特殊地，当$a=e$时，因$\ln e=1$，故 $(e^x)'=e^x$

对数函数的导数公式 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ 。当然也有$a=e$这个特殊式子。

$(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x,\quad (\tan x)'=\sec^2 x,(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$$(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},(arc\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (arc\tan x)'=\frac{1}{1+x^2},(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

函数的和差求导法则：$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

函数的积求导法则：$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

商的求导法则: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$简写为$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

反函数求导

$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}$（反函数的导数等于直接函数导数的倒数），这里的反函数与原函数没有作记号变换（保持x、y各自含义的一致性），一个对y求导，一个对x求导。

例：求$y=arc\sin x$的导数。此函数的反函数为$x=\sin y$，故$x'=\cos y$则$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

例：求$y=arc\tan x$的导数。此函数的反函数为$x=\tan y$，故$x'=\sec^2 y$则$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

复合函数求导

若$u=g(x)$在点x可导，而$y=f(u)$在点$u=g(x)$可导，则复合函数$y=f[g(x)]$在点x可导，且其导数为$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$或$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$（可推广到多个中间变量的情形）。

高阶导数

二阶导及以上统称为高阶导数。考研时，按定义求导数最高3阶。

若某函数在x_0处n阶可导，则它在x_0某邻域内必有一切低于n阶的导数。

表达式右上方的小数字不加括号时表示指数，加括号时表示n阶导数。

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

两个函数乘积$u(x)\cdot v(x)$的n阶导数可用数学归纳法求出，比照着二项式定理$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k$记忆：把$k$次幂换成$k$阶导数（零阶导数理解为函数本身），再把左端的$u+v$换成$uv$，就得到了**莱布尼茨公式**$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

例：$y=x^2e^{2x}$，求$y^{(20)}$

解：设$u=e^{2x},v=x^2$，则$u^{(k)}=2^ke^{2x}\ (k=1,2,3,\dots,20);v'=2x,v''=2,v^{(k)}=0(k=3,4,5,\dots,20)$

$$\therefore y^{(20)}=(x^2e^{2x})^{(20)}=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot 2=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$$

二阶导数

用二阶导数能求函数的凹凸性和拐点。

二阶导数的意义是 斜线斜率变化的速度和函数曲线的凹凸性。物理意义是加速度a。

二阶导数是比较理论的、比较抽象的一个量，它不像一阶导数那样有明显的几何意义，因为它表示的是一阶导数的变化率。在图形上，它主要表现函数的凹凸性，直观的说，函数是向上突起的，还是向下突起的。

反函数的二阶导数

设y是x的函数，则其反函数的关系是：x是y的函数。

反函数的一阶导数$x'=\frac{1}{y'}$

! 如果两边分别求导得到$x''=\frac{-y''}{y'^2}$是错误的！因为x''是把y作为自变量，对y求导；而右侧$\frac{-y''}{y'^2}$则是把x作为自变量，对x求导。
正确的解法是两边都把y作为自变量，对y求导。右边把x看作中间变量，按照复合函数的求导法则先对x求导、再对y求导：

$$x''=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}=\frac{-y''}{y'^3}$$

参数方程的二阶导数

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

! 若两边分别求导得到二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}$是错误的！因为$\frac{d^2y}{dx^2}$是对x求二阶导数，而右边则是对t求导。
正确的解法是右边部分求导时，把t看作中间变量，即x的函数，再按复合函数求导法则求导：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=arc\tan t\end{cases}\to\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2t}\to\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{1}{2t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{2t}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{-\frac{1}{2}t^{-2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

隐函数求导

若方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数不能明确地解出y，则求导时可以把方程中的y看成是x的函数$y=y(x)$，于是方程可看成是关于x的恒等式$F(x,y(x))\equiv0$，两端分别对x求导（$y=y(x)$是中间变量），解出y'即可。

例：求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点$\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$处的切线方程

解：椭圆方程两边分别对x求导得$\frac{x}{8}+\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}=0$，从而$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}$，把点$\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$代入上式得$\frac{dy}{dx}|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，故此点切线方程为$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

对指数函数、幂函数、幂指函数求导，可用**取对数求导法**

例：求$y=x^{\sin x}(x>0)$的导数

解：因是幂指函数，故先对两边求对数，得$\ln y=\sin x\cdot\ln x$，此式对x求导（注意$y=y(x)$）得$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$，于是$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

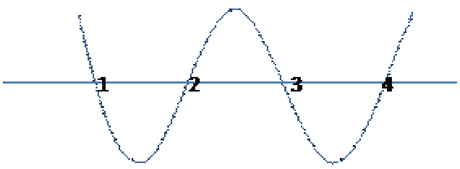
例: 求$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$的导数

解：先假定$x>4$，在两边取对数，得$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$，此式对$x$求导（注意$y=y(x)$）得$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$，于是$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$

当$x<1$时,$y=\sqrt{\frac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$；当$2<x<3$时,$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}}$,用同样的方法可得与上面相同的结果。

例：求$y=x^{\frac{1}{x}}\,(x>0)$的导数。解：两边取对数得$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$，两边分别对x求导得$\frac{1}{y}y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，于是$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

插播广告：怎样判断$y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$这样的函数（是积是商无所谓）在哪个区间大于0、哪个区间小于0？
容易知道此函数的图像与x轴的交点是1, 2, 3, 4，故画出其大致图像就判断出哪个区间大于0、哪个区间小于0了：



容易看出相乘后x^4这一项肯定是正的，故从左边第一个0点起，应从x轴上方画起；
若是x最高次项为负，则应从x轴下方画起。
应该是这样吧……

變限積分求導

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt\right)=f[a(x)]a'(x)-f[b(x)]b'(x).$$ Please notice the distribution of the variables x and t.

$$\text{e.g.},\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{\sin x}\cos t^2\,dt=\cos(\sin^2x)\,(\sin x)'-\cos(\cos^2x)\,(\cos x)'=\cos(\sin^2x)\cos x+\cos(\cos^2x)\sin x$$

Curves

2011年3月15日　　20:40

Curves (of a woman's body)
本页按曲线来分类是不合理的。
驻点是一阶导为0的点，可划分单调区间。
驻点是极值点还要满足两侧一阶异号。导数不存在的点也可能取得极值。
拐点是二 阶导为0点三阶导不为0的点，两侧凹凸性可能改变。

曲线的凹凸性与拐点

定义 设$f(x)$在区间I上连续，若对I上任意两点x_1,x_2恒有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,则称$f(x)$在$I$上的图形是（向上）凹的（或凹弧）；若恒有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,则称$f(x)$在$I$上的图形是（向上）凸的（或凸弧）。
若函数在I内具有二阶导数，则可利用二阶导数的符号判定曲线的凹凸性，即**曲线凹凸性判定定理**（I不是闭区间时定理类同）：
设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么

- 1、若在(a,b)内$f''(x)>0$则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的；
- 2、若在(a,b)内$f''(x)<0$则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的。

$f''(x)$就相当于加速度，加速度>0时为加速运动，<0时为减速运动。这样就好记多了。

曲线经过其上某一点后，凹凸性改变的话，则称此点为此曲线的**拐点**（对比驻点，驻点是一阶导数为0的点）。拐点处的二阶导数为0且三阶导不为0（但其逆命题不成立，即二阶导数为0的点不一定是拐点，如$y=x^4$在原点处的二阶导数为0，但它并无拐点，因为在原点左右两侧都有$y''>0$。其曲线在$(-\infty,+\infty)$内是凹的）或二阶导数不存在。判定区间I上连续曲线$y=f(x)$的拐点的步骤：

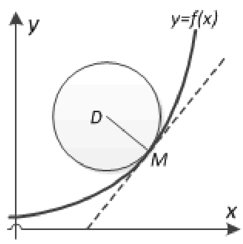
1. 求$f''(x)$并令$f''(x)=0$，解出此方程在区间I内的实根，并求出在区间I内$f''(x)$不存在的点；
2. 对上一步中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点，检查$f''(x)$在该点左右邻近两侧的符号。若符号相反，则该点为拐点；若符号相同，则该点不是拐点。

可见，判定拐点的依据是某点左右两侧二阶导数的符号相反，而不是该点处二阶导数是否为0.

曲率

弧微分公式 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$，其中ds为曲线上弧长度的微分，y'为曲线一阶导数，dx为自变量的微分。
用比值$\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$，即<u>单位弧段上切线转过的角度的大小</u>来表达弧段$\widehat{MM'}$的平均弯曲程度，把这个比值叫做该弧段的平均曲率，即$\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$
类似于从平均速度引入瞬时速度，当$\Delta s\to 0$时，平均曲率的极限叫做曲线在点M（起始点）处的曲率，即：
$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$。在$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}$存在的条件下，$K$也可表示为$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$
直线的曲率恒为0（直线不弯曲嘛）；圆上各点的弯曲程度一样，曲率都为$\frac{1}{r}$（r为圆的半径）
一般情况下，根据$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$可导出便于**实际计算曲率的公式**$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$。当$|y'|\ll 1$时，$K\approx|y''|$

设曲线$y=f(x)$在点$M(x,y)$处的曲率$K\neq 0$。在点M处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点D，使$|DM|=\frac{1}{K}=\rho$。以D为圆心、ρ为半径作圆。这个圆叫做曲线在点M处的曲率圆，曲率圆的圆心D叫做曲线在点M处的曲率中心，曲率圆的半径ρ叫做曲线在点M处的曲率半径。
在实际问题中，常常用曲率圆在点M邻近的一段圆弧近似代替曲线弧，以使问题简化。



要求渐近线，就是求极限，水平、垂直和斜的，思考要全面。三种渐近线：
若limf(x)=C ，x 趋于无穷，则有水平渐近线 y= C;
若limf(x)= 无穷， x 趋于x，则有垂直渐近线x=x
若limf(x) /x= k不等于 0，x 趋于无穷， lim(f(x)-kx)=b, x趋于无穷, 则有些渐近线y=kx+b 。

Differentiation

2011年3月9日 16:59

differentiation [ˌdifəˌrenʃiˈeiʃən] 微分

微分中值定理是导数应用的理论基础。导数的应用主要是用一阶、二阶导数研究函数曲线的特性，如单调性、极值、最值、凹凸性、拐点及作图等。

定义 函数$y=f(x)$在任意点x的微分，称为函数的微分，记为dy或$df(x)$，即$dy=f'(x)\Delta x$。如$y=\cos x$的微分为$dy=-\sin x\,\Delta x$

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分，记作dx，即$dx=\Delta x$

函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数，故导数也叫做微商。

函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0可导，且在点x_0可微时其微分一定是$dy=f'(x_0)\Delta x$。当$f'(x_0)\neq 0$时，有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{dy}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

从而，当$\Delta x\to 0$时，Δy与dy是等价无穷小，于是由“β与α是等价无穷小的充要条件是$\beta=\alpha+o(\alpha)$”这一定理可知，有$\Delta y=dy+o(dy)$，dy是Δy的线性主部。于是可得以下结论：在$f'(x_0)\neq 0$的条件下，以微分$dy=f'(x_0)\Delta x$近似代替增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$时，其误差为$o(dy)$。因此在$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx dy$

近似计算：

x_0处的导数$f'(x_0)\neq 0$且$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$，也可以写为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$或$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$。

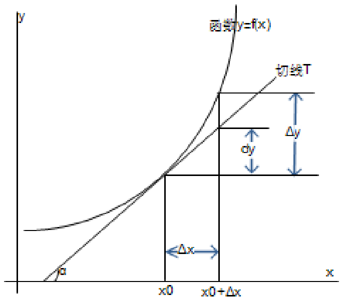
令$x=x_0+\Delta x$，则又可以写为$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

一言以蔽之：$f(x)=f(x_0)+\Delta y\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$|x|$是较小的数值时，可近似计算（其中三角函数以弧度为单位）：

$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x,\quad \sin x\approx x,\quad \tan x\approx x,\quad e^x\approx 1+x,\quad \ln(1+x)\approx x$

以$e^x\approx 1+x$为例，$f(x)\approx f(0)+f'(0)(x-0)=e^0+e^0\cdot(x-0)=1+x$



微分的几何意义

Δy是曲线$y=f(x)$上的点的纵坐标的增量时，dy就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量。

$|\Delta x|$很小时，$|\Delta y-dy|$比$|\Delta x|$小得多，因此在切点附近，可用切线段近似代替曲线段。

在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数，在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段。这在数学上称为非线性函数的局部线性化，这是微分学的基本思想方法之一。

是不是Δy总是大于dy呢？我觉得不一定。应考察直线和凸起时的情形。

一阶微分形式的不变性$y=f(u), dy=f'(u)du$. 这里u可以是自变量，也可以是中间变量。此性质常用于求隐函数的导数。

例如对$e^{xy}+\sin(x+y)=e^2$求导数.

$de^{xy}+d\sin(x+y)=0\quad\rightarrow\quad e^{xy}d(xy)+\cos(x+y)\,d(x+y)=0\quad\rightarrow\quad e^{xy}(ydx+xdy)+\cos(x+y)\,(dx+dy)=0$

$\therefore dy=\blacksquare dx$, 其中方块即为$y'$.

弧微分：弧长很短时（见上图），$\mathrm{dl}=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\quad(dx=\Delta x)$

分段函数在段点处的可导性问题，只能用定义了。

微分中值定理

费马（Fermat）引理：设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，且在x_0处可导，若对任意的$x\in U(x_0)$有$f(x)\le f(x_0)$(或$f(x)\ge f(x_0)$) 那么$f'(x_0)=0$

邻域内所有的函数值都比某点的函数值小（或大），则此点为一驻点。

通常称导数等于0的点为函数的**驻点**（或稳定点，临界点）。

罗尔（Rolle）定理：若函数$f(x)$满足：1、在闭区间$[a,b]$上连续；2、在开区间(a,b)内可导；3、在区间端点处的函数值相等即$f(a)=f(b)$。那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$使得$f'(\xi)=0$

必有一平行于x轴的切线。这是拉格朗日中值定理的特殊情形。

拉格朗日（Lagrange）中值定理（也叫**微分中值定理**）：若函数$f(x)$满足：1、在闭区间$[a,b]$上连续；2、在开区间(a,b)内可导。那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$(写成$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$会更容易理解些）。此式称为拉格朗日中值公式，它对$b<a$也成立。

必有一平行于端点连线的切线。

有限增量公式：设x为区间$[a,b]$内一点，$x+\Delta x$为此区间内另一点（$\Delta x>0$或$\Delta x<0$），则拉格朗日中值公式在区间$[x,x+\Delta x](\Delta x>0$时)上就成为$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\ (0<\theta<1)$。函数的微分$dy=f'(x)\cdot\Delta x$是函数的增量$\Delta y$的近似表达式，一般说来，以$dy$近似代替$\Delta y$时所产生的误差只有当$\Delta x\to 0$时才趋于0，而有限增量公式式则给出了自变量取得有限增量$\Delta x(|\Delta x|$不一定很小)时，函数增量Δy的准确表达式。此有限增量定理也。

虽可以准确地给出Δy的表达式，但$x+\theta\Delta x$这个点容易确定吗？

柯西（Cauchy）中值定理：若函数$f(x)$及$F(x)$满足：1、在闭区间$[a,b]$上连续；2、在开区间(a,b)内可导；3、对任一$x\in(a,b), F'(x)\neq 0$。则在(a,b)内至少有一点ξ使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\text{成立。}$$

柯西中值定理用参数的形式表达微分中值定理的精神。若取$F(x)=x$, 那么$F(b)-F(a)=b-a, F'(x)=1$,因而柯西中值定理就可以写成$f(b)-f(a)==f'(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$，这就变成拉格朗日中值公式了。故拉格朗日中值定理是柯西中值定理中，函数$F(x)$的表达式为$F(x)=x$的特殊情形。

柯西中值定理的几何意义与拉格朗日中值定理的几何意义一样：某一点切线的斜率与弦的斜率相等，只不过柯西中值定理是用参数方程的形式表示的。

泰勒（Taylor）**中值定理**：若函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则对任一$x\in(a,b)$，有：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$,

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ是介于x_0与x间的某个值

此式称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式，$R_n(x)$的表达式称为拉格朗日型余项，

$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$称为函数$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的$n$次泰勒多项式。

当$n=0$时泰勒公式变成拉格朗日中值公式$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$($\xi$在$x_0$与$x$之间)。故泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广。

不需要余项的精确表达式时, n阶泰勒公式也可以写成$f(x)=p_n(x)+o[(x-x_0)^n]$，此式称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的带有佩亚诺（Peano）型余项的n阶泰勒公式，$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$称为佩亚诺型余项。

泰勒公式中，若取$x_0=0$，则ξ在0与x之间，故可令$\xi=\theta x\ (0<\theta<1)$，从而泰勒公式变成较简单的形式，即所谓带有拉格朗日型（或佩亚诺型）余项的麦克劳林（Maclaurin）公式：

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$, 其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}\ (0<\theta<1)$或$R_n(x)=o(x^n)$

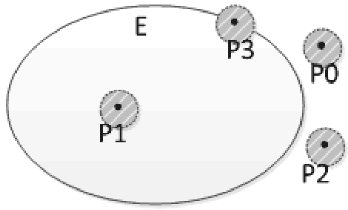
多元函數微分學

2011年5月12日　　19:03

平面點集

設右圖中的橢圓表示一個平面點集E。任意一點$P \in R^2$與任意一個點集$E \in R^2$之间必有以下3種關係中的一種：

內點：若存在點P的某個鄰域U(P)，使$U(P) \subset E$，則稱P為E的內點。例如圖中的點P1。
外點：若存在點P的某個鄰域U(P)，使$U(P) \cap E = \emptyset$，則稱點P為E的外點。例如圖中的點P2。
邊界點：若點P的任一鄰域內既含有屬於E的點，又含有不屬於E的點，則稱P為E的邊界點。例如圖中的點P3.
E的邊界點的全體，稱為E的**邊界**，記作∂E.
E的內點必屬於E，E的外點必不屬於E，E的邊界點可能屬於E、也可能不屬於E.
任意一點P與一個點集E之間除了上述三種關係外，還有一種關係，即**聚點**：若對於任意給定的$\delta > 0$，點P的去心鄰域$\dot{U}(P, \delta)$內（不就是點P的任一去心鄰域嘛）總有E中的點，則稱點P為E的聚點。
點集E的聚點P本身，可以屬於E、也可以不屬於E.
內點和外點的定義中，強調的是存在性，而邊界點和聚點則強調了全部性。



平面點集

不要認為 聚點 = 邊界點 + 內點。內點必為聚點，而邊界點可能是聚點、也可能不是聚點。比如上面圖中，若設點集E是由橢圓與點P0相并而成的，則根據定義，點P0是E的邊界點、卻不是其聚點。

多元函數

多元函數的概念、極限和連續性的學習要求低於一元函數。二元函數的極限和連續性原則上只需要概念理解。
一元函數是二元函數的特殊情形，讓一個自變量不動，另一個自變量動；或讓(x, y)沿某一曲線變動（相當於與原二元函數構成了二元一次方程組），二元函數就轉化成了一元函數。
二元函數 z =f(x,y)的幾何圖形為空間一塊曲面，它在xy平面上的投影区域就是定义域D。
若要討論三元函數的幾何圖形，則需要四維空間。線性代數里有n維空間和n維向量。真實生活中只有三維空間，四維及以上都是數學模型，不再討論其幾何意義。
設$z = f(x, y)$在平面有界閉區域D上連續，則f(x, y)在D上存在最大值和最小值，且它們或在D的邊界點上達到，或在D上滿足$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$的點（即駐點）處達到，或在偏導數不存在的點達到。
多元函数在某点的偏导数存在，不能推出函数在此点连续。然而若函数在某点可微分，则在此点必连续；可微时此点的偏导数也必定存在。
例：讨论$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$的存在性。
思路：先考察(x, y)沿不同直线趋于(0 ,0)时f(x, y)的极限，若不同则说明极限不存在；若相同再考察(x, y)沿其他特殊路径趋于(0, 0)时f(x, y)的极限。
令$y = kx$, 而(x, y)没不同的直线趋于(0, 0), 则

$$原式 = \lim_{y=kx, x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+k^2)x^2}{[1+k^2+(1-k)^2]x^2} = \frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}$$

上式原k值而变，如k = 0时极限为1/2, k=1时极限为1. 故原极限不存在。

空间曲线的切线和法平面

设空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

设t_0对应的点$M(x_0, y_0, z_0)$是曲线Γ上的一点。由向量值函数的导向量的几何意义知，向量$T = f'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$就是曲线Γ在点M处的一个切向量，从而得出曲线Γ在M处的点向式切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

过点M且与M处的切线垂直的平面称为曲线Γ在点M处的**法平面**。点M处的法平面的点法式方程为$(x-x_0)\varphi'(t_0) + (y-y_0)\psi'(t_0) + (z-z_0)\omega'(t_0) = 0$ 点法式方程的依据是过点M的法平面内任一向量总与点M处的切线垂直

空间曲面的切平面和法线

设空间曲面Σ的方程由F(x, y, z)隐式给出，则曲面Σ上任一点$M(x_0, y_0, z_0)$处的一个法向量为$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$.
这样一来就容易求出点M处的点向式法线方程和点法式切平面方程了。

Partial Derivative

例：设$f(x, y) = x^2 + (y-1)arc\sin\sqrt{\frac{y}{x}}$. 求$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}$

先令$y = 1$, 再对x求导。$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \left.\frac{d}{dx} f(x, 1)\right|_{x=2} = \left.\frac{dx^2}{dx}\right|_{x=2} = 4$

方向导数

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率，而方向导数反映的是函数沿任一指定方向上的变化率。

Exercises

1. 設$f(x+y, xy) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$，求$f(x, y)$
   解：$\because x^2 + 3xy + y^2 + 5 = (x^2 + 2xy + y^2) + xy + 5 = (x+y)^2 + xy + 5, \therefore f(x, y) = x^2 + y + 5$（對應法則f不變）
2. 討論$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
   沿y=lx，原式= $\lim_{x\to 0} \frac{lx^3}{x^4 + l^2x^2} = 0$，但沿$y = lx^2$，原式= $\lim_{x\to 0} \frac{lx^4}{x^4 + l^2x^2} = \frac{l}{1+l^2}$。是以原式的極限不存在。

趨近于(0,0)點時所沿的這兩條直線，是如何選取出來的？

Integral

2011年12月13日　　22:24

Green公式：平面上一个封闭曲线所围成的区域的面积（乘以权值）与这个封闭曲线有关。Green公式是Stokes的特殊情形。
在平面閉區域D上的二重積分可通過沿閉區域D的邊界曲線L上的曲線積分來表達。設閉區域D由分段光滑的曲線L圍成，函數P(x, y)及Q(x, y)在D上具有一階連續偏導數，則

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy\text{，其中}L\text{是}D\text{的正向邊界曲線.}$$

高斯公式：一个封闭曲面所围成的体的体积与这个封闭曲面有关。

Stokes公式：空间一个封闭曲线所围成的平滑区域的面积（乘以权值）与这个封闭曲线有关。

Indefinite Integral

2011年3月16日　20:03

integral /ˈɪntɪɡrəl/ adj. 必需的；不可或缺的；作为组成部份的；完整的，完备的。

原函数存在定理：若函数$f(x)$在区间I上连续，那么在区间I上存在可导函数$F(x)$，使对任一$x\in I$都有$F'(x)=f(x)$

连续函数一定有原函数。

定义 在区间I上，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$（或$f(x)\,dx$）在区间I上的不定积分，记作$\int f(x)\,dx$，其中$\int$记号称为积分号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\,dx$称被积表达式，x称为积分变量。

不定积分的本质是某函数的全体原函数。

初等函數的原函數不一定是初等函數，但不是不存在，而是積不出來。

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C \text{ 或 } \int dF(x)=F(x)+C$$

微分运算（以记号d表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号$\int$表示）是互逆的。当记号$\int$与记号d连在一起时，或者抵消，或者抵消后相差一个常数。

一個函數的導數為x，則這它的原函數是什麼？答案不是$\frac{1}{2}x^2+C$，而是$\int(\frac{1}{2}x^2+C)\mathrm{d}x$。這個問題問得有一定蠱惑性。

基本初等函数的积分表（部分；其他的，只要知道导数公式就不难知道积分公式）：

$$\int x^\mu\,dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)\quad \text{when } \mu=-1, \text{it'll be:}\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

除了基本积分表中的几个公式外，还有一些常用的公式（其中常数$a>0$）：

$$\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,\qquad \int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+C$$

(把正余切写成正余弦之商的形式也可求出)

$$\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C,\qquad \int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arc\tan\frac{x}{a}+C,\qquad \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\sin\frac{x}{a}+C,\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C=$$

$$\int\sqrt{a-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}arc\sin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C,\qquad \int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+C$$

部分公式求解过程：

1. cscx和secx

$$\int\boldsymbol{\csc x\,dx}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\because \tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x,\qquad \therefore \text{上述不定积分又可写为}\int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\text{利用}\int\csc x\,dx\text{的结果，有}\int\boldsymbol{\sec x\,dx}=\int\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$\int\sec x\,dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=$$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

$$\text{利用欧拉代换式}\sqrt{x^2\pm a^2}=u-x\xrightarrow{\text{两边平方}}\pm a^2=u^2-2ux\xrightarrow{\text{两边微分}}0=2udu-2udx-2xdu\text{或}udx=(u-x)du,\text{即}\frac{dx}{u-x}=\frac{du}{u}$$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int\frac{dx}{u-x}=\int\frac{du}{u}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

也可用三角变换解，但较麻烦

换元积分法

第一类换元法

$$\text{设}f(u)\text{具有原函数},u=\varphi(x)\text{可导,则有换元公式}\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=F[\varphi(x)]+C=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

虽然$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$是一个整体记号，但从形式上看，被积表达式中的$dx$也可当作变量$x$的微分来对待，从而微分等式$\varphi'(x)\,dx=du$可以方便地应用到被积表达式中来。如何用此公式求不定积分呢？设要求$\int g(x)\,dx$，若函数$g(x)$可化为$g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，那么

$$\int g(x)\,dx=\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\left[\int f(u)\,du\right]_{u=\varphi(x)}$$

这样函数$g(x)$的积分即转化为函数$f(u)$的积分。若能求得$f(u)$的原函数，也就得到了$g(x)$的原函数。

第一类换元法又称“凑微分”法，是复合函数求导数的逆运算，但比复合函数求导困难，因为此方法中的$\varphi(x)$隐含在被积函数中。<u>如何适当选择$u=\varphi(x)$，把积分中$\varphi'(x)\,dx$凑成du没有一般规律可循</u>，故多做练习、熟练掌握各种形式的凑微分方法是关键。

例：$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot (2x)'\,dx \left(= \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C\right) = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

（一偶一奇）一般地，对于$\sin^{2k+1} x \cos^n x$或$\sin^n x \cos^{2k+1} x$ (其中$k \in N$)型函数的积分，即$\sin x$与$\cos x$中的一个为奇次幂时，取奇次中的一次与dx合并成$-d\cos x$或$d\sin x$，于是可分别作变换$u = \cos x$或$u = \sin x$，求得结果。如下例：

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x\,dx = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\,d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

（两偶，降幂）一般地，对于$\sin^{2k} x \cos^{2l} x\ (k, l \in N)$型函数，总可利用三角恒等式$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$化成$\cos 2x$的多项式，然后用类似以下的方法求得积分：

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int (\cos 2x - \cos^3 2x)\,dx + \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) + \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + C$$

一般地，对于$\tan^n x \sec^{2k} x$ ($\sec x$ 为偶次)或$\tan^{2k-1} x \sec^n x\ (k \in N^+)$($\tan x$ 为奇次)型函数的积分，可分别作变换$u = \tan x$或$u = \sec x$，求得结果。如下两例：

- $\int \sec^6 x\,dx = \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)^2\,d(\tan x) = \int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x)\,d(\tan x) = \cdots$
- $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx = \int \tan^4 x \sec^2 x \cdot \sec x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x\,d(\sec x) = \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x)\,d(\sec x) = \cdots$

其他常用凑微分公式：

- $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b), (a \neq 0).$　　$\int f(ax^2+b)x\,dx = \frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)\,d(ax^2+b), (a \neq 0)$
- 由以上两式推而广之，$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\,dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\,d(ax^n+b), (a \neq 0, n \neq 0)$
- $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)$

第二类换元法

较之第一类换元法，第二类换元法则是从相反的方向处理问题。适当地选择变量代换$x = \varphi(t)$，将积分$\int f(x)\,dx$化为积分$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$。这是另一种形式的变量代换，换元公式可表达为：

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

此公式成立的条件：

- 等式右边的不定积分要存在，即$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$有原函数
- $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$求出后必须用$x = \varphi(t)$的反函数$t = \varphi^{-1}(x)$代回去。为保证此反函数存在且可导，假定直接函数$x = \varphi(t)$在$t$的某一区间（此区间与所考虑的$x$的积分区间相对应）上是单调的、可导的，且$\varphi'(t) \neq 0$

第二类换元法的关键是作变量的一个适当代换$x = \varphi(t)$，使$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数易求。当被积函数中含有根式而又不能凑微分时常可以考虑用第二类换元法将被积函数有理化。

例：求$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\ (a > 0)$

解：令$x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$(为何不是闭区间？), 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,dt$,　　$t = \arcsin\frac{x}{a}, \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

三角代换（注意选取t的范围，使$x = \varphi(t)$单调可导）：

- 若被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$，可作代换$x = a\sin t$ 或$x = a\cos t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$化去根式
- 若被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$，可作$x = \pm a\sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$化去根式
- 若被积函数含有$\sqrt{a^2+x^2}$，可作代换$x = a\tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$化去根式

  但要具体情况具体对待，不拘泥于此。

倒代换：

- $x = \frac{1}{t}$

指数代换：

- 被积函数由a^x构成，令$a^x = t$，则$dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t}$

根式代换：

- 被积函数由$\sqrt[n]{ax+b}$构成，令$\sqrt[n]{ax+b} = t$

代万能换：

- 令$t = \tan\frac{x}{2}$，则$x = 2\arctan t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Exercises

$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx = -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-3x^2)$，此第一类换元法。也可用第二类换元法，令$x=\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\alpha, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

分子分母都含有微分变量且分母次数高：

- 令$u=x+2$, 则$dx=du$于是$\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx=\int\frac{(u-2)^2}{u^3}du=\int(u^{-1}-4u^{-2}+4u^{-3})\,du=\cdots$
- $\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{u}{u^2+4}du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+4}d(u^2+4)=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$

$\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\int\tan u\,du\left(u=\sqrt{1+x^2}\right)=\cdots$

不同倍数的三角函数积分：用积化和差公式

$\int \cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos x\,dx+\frac{1}{5}\int\cos 5x\,d(5x)\right)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$

分部积分法

函数之积的导数公式$(uv)'=u'v+uv'\xrightarrow{\text{move}}uv'=(uv)'-u'v\xrightarrow{\text{Indefinite Integral}}\boldsymbol{\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx}$

若求$\int uv'\,dx$有困难，而求$\int u'v\,dx$较容易时，分部积分公式就发挥作用了。

被积函数中含有两种不同类型的乘积时，常考虑用分部积分法。

选择u和v'时可按反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数的顺序把排在前面的那类函数选作u，而把排在后面的那类函数选作v'。

分部积分法求不定积分时有时会出现复原的情况，应注意：

- 所求积分又出现但系数不同，可通过移项得到结果
- 得到递推公式
- 积分又回到原形式且与积分前系数也一样，说明积分有误

Exercise

P193 证明函数$\arcsin(2x-1)$, $arc\cos(1-2x)$和$2arc\tan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$都是$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数。

三个变一个不变，故证明三个变化的都等于那个不变的。

Definite Integral

2011年3月16日　　20:04

由求曲边梯形的面积与求变速直线运动的路程而引出定积分。

定义 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$,，各个小区间的长度依次为$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$。在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i\ (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i,\ i\in[1,n])$，作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积，并求其和$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。记$\lambda=max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，若无论对$[a,b]$怎样划分，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点$\xi_i$ 怎样选取，只要$\lambda\to 0$时，和S总是趋于确定的极限I，那么称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分（简称积分），记作:

$$\int_a^b f(x)\,dx,\text{namely}\int_a^b f(x)\,dx=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\qquad(\text{可见定积分的本质是一个极限})$$

其中$f(x)$叫做被积函数，$f(x)\,dx$叫做被积表达式，x叫做积分变量，a,b分别叫做积分下限和积分上限，$[a,b]$叫做积分区间。

当和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$的极限存在（也就是定积分存在）时，其极限仅与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关。若不改变$f(x)$和$[a,b]$，只改变积分变量x，则和的极限不变，也就是定积分的值不变:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$$

可积的条件（满足任意一个即可）:

- 若$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。
- 若$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积。

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分的几何意义是：函数$f(x)$的曲线与直线$x=a,x=b$所围成的图形的面积中，用x轴上方的部分减去x轴下方的部分的结果。

求定积分的近似值的方法有矩形法、梯形法和抛物线法（又称辛普森(Simpson)法）。

以下性质，联系定积分的几何意义，就不难理解:

- $a=b$时，$\int_a^b f(x)\,dx=0$;　$a>b$时，$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.
- 设$a<c<b$,则$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.
  推而广之,不论a,b,c的相对位置如何,此等式总成立。　(定积分对积分区间具有可加性)
- 若在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv 1$,则$\int_a^b 1\,dx=\int_a^b dx=b-a$
- 若在区间$[a,b]$上$f(x)\ge 0$,则$\int_a^b f(x)\,dx\ge 0\ (a<b)$
  - 推论1：若在区间$[a,b]$上$f(x)\le g(x)$,则$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx\ \ (a<b)$
  - 推论2：$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx\ \ (a<b)$
- 设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值，则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)\ \ (a<b)$
- **定积分中值定理**：若函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ使$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)\ (a\le\xi\le b)$
  积分中值公式的几何解释是：在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边、以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值

设$f(x)$在[a, b]上连续，F(x)在[a, b]上除了$c\in(a,b)$外连续。F(c-0)和F(c+0)存在，且$F'(x)=f(x),x\in(a,b),x\ne c$, 则$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^{c-0}+[F(x)]_{c+0}^b$. 以断点为界，分别计算。

重积分

2011年5月25日　　12:36

考研：有时计算时需要交换积分顺序，或变换坐标系。

求$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 e^{x^2}\,dx$.

Double Integral

一个闭区域的直径是指区域上任意两点间距离最大者。

二重积是一个极限值：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

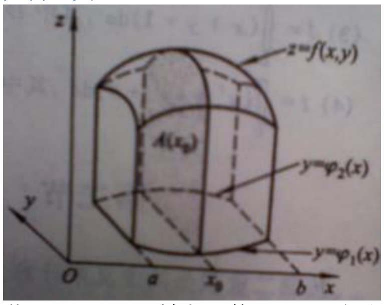
$f(x,y)$为被积函数，$f(x,y)\,d\sigma$为被积表达式，$d\sigma$为面积元素，x、y为积分变量，D为积分区域，$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$为积分和。

二重积分不能理解为对x、y积分的乘积。应理解为先对一个变量积分，结果作为被积函数再对另一个变量积分。

在直角坐标系中，有时也把面积元素$d\sigma$记作$dx\,dy$，称之为直角坐标系中的面积元素。

$f(x,y)$在闭区域D上连续时，积分和的极限必存在，即函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分必定存在。二重积分存在，则$f(x,y)$在D上必有界。

几何意义



若$f(x,y)\geq 0$，被积函数$f(x,y)$可解释为曲顶柱体的顶在点(x,y)处的竖坐标（在z轴上的坐标），故二重积分的几何意义就是柱体的体积。

若$f(x,y)<0$，柱体在xOy平面的下方，二重积分是负的，但其绝对值仍等于柱体体积。

若$f(x,y)$在D的若干部分区域上为正，其他部分为负，则$f(x,y)$在D上的二重积分等于xOy平面上方的柱体体积减去xOy平面下方的柱体体积 所得之差。

若在D上$f(x,y)=1$，σ为D的面积，则：（几何意义很明显，因为高为1的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积）

$$\sigma = \iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma$$

更廣泛的意義：$dxdy$是面積微元，函數$f(x,y)$是權值，這個權值表示的是z座標即柱體高度時，二重積分就表示曲頂柱體的體積；當然這個權值還可以表示面密度等其他意義。

对称区域上奇偶函数的积分的性质

1. 设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，若D关于x轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 0 & f(x,y)\text{对y为奇函数} \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,y)\text{对y为偶函数} \end{cases}$$

其中D_1为D在x轴上半平面部分

2. 设f(x, y)在有界闭区域D上连续，若D关于y轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \begin{cases} 0,\text{若}f(x,y)\text{对}x\text{为奇函数} \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\,d\sigma,\text{若}f(x,y)\text{对}x\text{为偶函数。其中}D_2\text{为}D\text{在}y\text{轴右半平面部分。} \end{cases}$$

3. 设f(x, y)在有界闭区域D上连续，若D关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \begin{cases} 0, f(-x,-y)=-f(x,y),(x,y)\in D. \\ 2\iint_{D_3} f(x,y)\,d\sigma, f(-x,-y)=f(x,y),(x,y)\in D. \end{cases}$$
其中D_3为D的上半平面部分或右半平面部分。

4. 设f(x, y)在有界闭区域D上连续，若D关于直线y=x对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma$$

若$D=D_4\cup D_5, D_4, D_5$分别为D在y=x的上方与下方部分，则

$$\iint_{D_4} f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D_5} f(y,x)\,d\sigma$$

计算方法

把二重积分化为两次单积分（即两次定积分）来计算，转化时要注意积分上限大于下限。

利用直角坐标计算二重积分

哪型区域，就后对哪个变量积分。后积分的是常数。

X型区域

先对y积分，再对x积分，即先对y、后对x的二次积分：

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

一个积分区域，用二个不等式确定。若为X型区域，则x的范围用常数表示（不含未知数的表达式），而y的范围用含有变量x的式子表示。

由计算曲顶柱体体积引出二重积分的求法。

首先计算截面积。在区间$[a,b]$上任意取定一点x_0，作平行于yOz面的平面$x=x_0$. 此平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间$[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$为底、曲线$z=f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形（可以想象，其两腰平行于z轴）。这个截面的面积为：

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

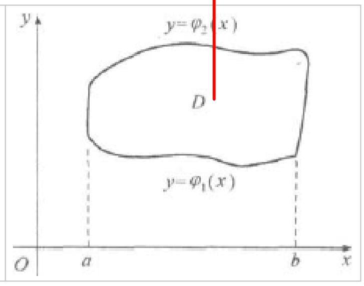
这个截面的面积也就是第一次积分（对y的积分）的几何意义。

二重积分化为二次积分时，确定积分限是关键。积分限是根据积分区域D确定的，先画出D的图形。

画一条直线，确定上下限。

假如积分区域是X型的，如右图所示。在区间$[a,b]$上任取定一个x值，积分区域上以这个x值为横坐标的点在一段直线上，此直线平行于y轴。此线段上点的纵坐标从$\varphi_1(x)$变到$\varphi_2(x)$，这就是公式中先把x看作常量而对y积分时的下限和上限。

因为上面x的值是在$[a,b]$上任意取定的，故再把x看作变量而对x积分，积分区间就是$[a,b]$.



Y型区域

与X型区域类似。

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

先对x积分，再对y积分。y的范围用常数表示，x的范围用含有变量y的式子表示。

Summary

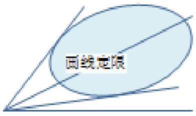
求二重积分时既要考虑积分区域D的形状，又要考虑被积函数$f(x,y)$的特性。选其简单的。

<u>转换积分次序，可先化为重积分</u>：在直角坐标系中两种不同顺序的累次积分的互相转化是一种很重要的手段，具体做法是先把给定的累次积分反过来化为二重积分，求出它的积分区域D，然后根据D再把二重积分化为另外一种顺序的累次积分。

若积分区域（如三角形、平行四边形）有一条边平行于坐标轴，则无须分块即可直接积分；对于梯形，则须有3条边平行于坐标轴。

平行于哪个坐标轴，就先积哪个对应的变量，这样不用分块。

利用极坐标计算二重积分



也分为先对ρ或先对θ积分，一般先对ρ积分（考纲也只要求先对ρ积分再对θ积分这种情形）。

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

其中$\rho d\rho d\theta$就是极坐标系中的面积元素。

要把二重积分中的变量从直角坐标变换为极坐标，只要把被积函数中的x、y分别换成$\rho\cos\theta,\rho\sin\theta$，并把直角坐标系中的面积元素$dx\,dy$换成极坐标系中的面积元素$\rho d\rho d\theta$

先对ρ积分：

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho d\rho\right]d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho d\rho$$

以上是一般情形。若极点位于积分区域的边界上，则是以上的一种特例，此时$0\le\rho\le\varphi(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$.

若极点位于积分区域内，则$0\le\rho\le\varphi(\theta),\alpha\le\theta\le 2\pi$.

二重积分的积分区域D为圆形、环域扇形区域或环扇形区域，或者被积函数$f(x,y)$中含有$x^2+y^2,\frac{x}{y},\frac{y}{x}$等时，往往用极坐标计算二重积分。

工程上常用的反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Triple Integral

三重積分$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$的意義：$dxdydz$是體積微元，函數$f(x,y,z)$是權值，這個權值表示點$(x,y,z)$處的密度時，三重積分就表示物體的質量。

曲线积分

2011年5月25日　　23:26

曲线积分的对称性

对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

函数$f(x,y)$在曲线弧L上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分：

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段。若L为闭曲线，则函数$f(x,y)$在闭曲线L上对弧长的曲线积分记为$\oint_L f(x,y)=ds$.

对弧长的曲线积分的物理意义是求密度分布为$f(x,y)$的曲线形构件的质量。

此定义可推广到积分弧段为空间曲线弧的情形。

Δs_i是一小段弧，$f(\xi_i,\eta_i)$是此段弧上某点的函数值。

当$f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时，对弧长的曲线积分是存在的。

若在积分曲线上$f(x,y)=1$，则对弧长的曲线积分在数值上与弧长相等。

计算方法

对弧长的曲线积分的计算方法是化为参变量的定积分，然后计算。

设$f(x)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $(\alpha\le t\le\beta)$，其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分$\int_L f(x,y)ds$存在，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\qquad(\alpha<\beta,\text{this condition is required.})$$

要求积分下限α小于上限β，这是因为公式推导过程中小弧段的长度Δs_i总是正的，从而$\Delta t_i>0$，故下限要小于上限。

这表明计算对弧长的曲线积分时，只要把x,y,ds依次换为$\varphi(t),\psi(t),\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$，然后从α到β作定积分即可。

对空间曲线弧的弧长的曲线积分与之类似：

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt\qquad(\alpha<\beta,\text{this condition is required.})$$

Exercises

设L是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为a，求$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\,ds$.

解：L的方程也可写为$3x^2+4y^2=12$

$$\therefore\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\,ds=\oint_L(2xy+12)\,ds=2\oint_L xy\,ds+12\oint_L ds$$

∵被积函数xy是有关于x的奇函数，L关于y轴对称，∴ $\oint_L xy\,ds=0$

而$\oint_L ds=a$(因为被积函数为1) ∴原式=12a

Tips:

曲线积分的积分区域是曲线段，因而被积函数中的x和y满足积分曲线L的方程，可将L的方程代入被积函数化简，这一点与定积分和重积分不同。

计算对弧长的曲线积分时，可利用对称性化简计算，但应同时考虑被积函数的奇偶性和积分路径的对称性：

- 积分弧段关于y轴对称、被积函数是关于x的奇函数时，对弧长的曲线积分的结果为0.

对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

函数$P(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标x的曲线积分记为$\int_L P(x,y)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i$

函数$Q(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标y的曲线积分记为$\int_L Q(x,y)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i$

其中$P(x,y),P(x,y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段。以上两个积分也称为第二类曲线积分。

此定义可推广到积分弧段为空间有向曲线弧的情形。

应用上经常出现的是：

$$\int_L P(x,y)\,dx+\int_L Q(x,y)\,dy\text{，这种合并起来的形式，为简便起见，也可写成}\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

也可写成向量形式$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}$，其中$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$为向量值函数，$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}$.

对坐标的曲线积分的物理意义是求变力$\boldsymbol{F}(x,y)$（注意力是一个向量）沿曲线所作的功。

$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i$，看上去像是两个向量的数量积的坐标表达式.

积分弧段的方向改变时，对坐标的曲线积分要改变符号，即$\int_{L^-}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}$

计算方法

对坐标的曲线积分的计算方法与对弧长的曲线积分类似，都是化为参变量的定积分，然后计算。

设$P(x,y),Q(x,y)$在有向曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，当参数t单调地从α变到β时，点M(x,y)从L的起点A沿L运动到终点B，$\varphi(t),\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$存在，且：

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt$$

这表明计算对坐标的曲线积分时，只要把x, y, dx, dy依次换为$\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t)dt, \psi'(t)dt$，然后从L的起点所对应的参数值α到L的终点所对应的参数值β作定积分即可。这里不限制α与β的大小关系。

两类曲线积分的联系

两类曲线积分都有对分段弧的可加性。
平面曲线L上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

其中$\alpha(x,y), \beta(x,y)$为有向曲线弧L在点(x, y)处的切向量的方向角。
$\alpha(x,y), \beta(x,y)$也是变量，除非曲线弧是直线（即方向角恒定）。
空间曲线Γ上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

其中$\alpha(x,y,z), \beta(x,y,z), \gamma(x,y,z)$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的切向量的方向角。
两类曲线积分间的联系也可以用向量的形式表达，如空间曲线上的两类曲线积分之间的联系可写成：

$$\int_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}dr \qquad or \qquad \int_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \boldsymbol{A}_\tau ds$$

其中$\boldsymbol{A} = (P, Q, R), \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的单位切向量，$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}ds = (dx, dy, dz)$称为有向曲线元，$\boldsymbol{A}_\tau$为向量$\boldsymbol{A}$在向量$\boldsymbol{\tau}$上的投影。

Exercise

把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$化为对弧长的曲线积分，其中L为：

1. 在xOy面内沿直线从点(0,0)到(1,1)
2. 沿抛物线$y = x^2$从点(0,0)点(1,1)
3. 沿上半圆周$x^2 + y^2 = 2x$从点(0,0)点(1,1)

解：1、L的方向余弦$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，故$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \frac{\sqrt{2}}{2}[P(x,y) + Q(x,y)]ds$
2、曲线$y = x^2$上点(x,y)的切向量$T = \{1, 2x\}$

曲面积分

2011年6月5日　　19:46

曲面积分的对称性

对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

物理意义：求光滑曲面的质量

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

计算方法

把对面积的曲面积分化为对（此曲面的投影的）二重积分：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+{z_x}^2(x,y)+{z_y}^2(x,y)}dxdy$$

用红色标出的3个z都代表Σ的方程。

曲面的方程是$z=z(x,y)$, $dS=\sqrt{1+{z_x}^2(x,y)+{z_y}^2(x,y)}dxdy$. 计算对面积的曲面积分时，只要把变量z换为$z(x,y)$、$dS$换为$\sqrt{1+{z_x}^2(x,y)+{z_y}^2(x,y)}dxdy$，再确定$\Sigma$在$xOy$面上的投影区域$D_{xy}$，就把对面积的曲面积分化为二重积分了。

总结为一代（将曲面的方程代入被积函数）二换（换面积元）三投影（将曲面投影到坐标面）

Tips

这里积分曲面的方程必须是单值显函数，否则可利用可加性，分块计算，结果相加

把曲面投影到哪一个坐标面，取决于曲面方程即方程的表达形式

将曲面的方程代入被积函数的目的是把被积函数化为二元函数

切记任何时候都要换面积元

对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

有向曲面

设Σ是有向曲面。在Σ上取一小块曲面ΔS，把ΔS投影到xOy面上得一投影区域，此投影区域的面积让为$(\Delta\sigma)_{xy}$.假定ΔS上各点处的法向量与z轴的夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号（$\cos\gamma$即都是正的或都是负的，在几何上看来，这样的曲面是“单调”的，没有起伏）。**规定**（这是规定）ΔS在xOy面上的投影为

$$(\Delta\sigma)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma > 0\ (i.e., 0<\gamma<\frac{\pi}{2}) \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma < 0\ (i.e., \frac{\pi}{2}<\gamma<\pi) \\ 0, & \cos\gamma \equiv 0 \end{cases}$$

ΔS在xOy面上的投影实际上就是投影区域的面积附加一定的正负号，上面的规定是为了让此投影不为负。类似地，可以定义ΔS在yOz面及zOx面上的投影。

法向量朝向坐标轴正向者，法向量与坐标轴正向的夹角$\in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故其余弦为正数。

Definition

物理意义是求流向曲面一侧的流量

$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$称为函数$R(x,y,z)$在有向曲面$\Sigma$上对坐标$x,y$的曲面积分，记为$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$，即

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$R(x,y,z)$叫做被积函数，Σ叫做积分曲面。

类似地，函数$P(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标y, z的曲面积分$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz$及函数$Q(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标z, x的曲面积分$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dzdx$分别为

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}, \qquad \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dzdx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

应用是出现较多的是$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy + \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dzdx$，可简记为：

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy + P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx$$

微分方程

2011年3月19日 20:58

含有自变量、未知函数和未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程。未知函数是一元函数称为常微分方程(Ordinary Differential Equation, ODE)，簡稱微分方程或方程；未知函数是多元函数则称为偏微分方程。
滿足微分方程的函數稱為微分方程的解；通解就是含有獨立常數的個數與方程的階數相等的解；通解有時也稱為一般解，<u>但不一定是全部解</u>。不含任意常數或任意常數確定后的解稱為特解。

First-order ODE

一階常微分方程，MIT課程, Professor Arthur Mattuck. Feb 5, 2003.

微分方程的特解在幾何上是一條曲綫，稱為該方程的一條積分曲綫。而通解在幾何上是一族曲綫，稱為該方程的積分曲綫族。積分曲綫族間的各積分曲綫不能相交、也不能相切（即不能挨著Touch）：

- 為何不能相交？因為如果可以相交，那麼交點處將有＞1個斜率；
- 為何不能相切？因為存在與唯一性定理(Existence and Uniqueness Theorem): 通過一點(x_0, y_0), $y' = f(x,y)$有且僅有一個解（這里，函數y在這一點的鄰域内必須連續）。
  用分離變量法解$xy' = 1 - y \xrightarrow{Separate\ variables} \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{Solution} y = 1 - Cx$,幾何上，積分曲綫族是過點(0,1)的所有直線。此處，“唯一性”似乎是不成立的，點(0,1)處有多個解。而實際上，分離變量時，x位於分母上，原函數在點(0,1)處是不連續的。

Views of ODE	解析法Analytic（常規解法）	幾何法Geometric
微分方程的寫法	y'=f(x,y)	Direction field (方向場，又稱斜率場或線素場)
微分方程的解	$y_1(x)$=...	積分曲綫Integral Curve

Direction Filed

You take the plane, and in each point of the plane -- of course, that's an impossibility. But, you pick some points of the plane. You draw what's called a little line element. So, there is a point. It's a little line and the only thing which distinguishes it outside of its position in the plane. So here's the point, (x,y), at which we are drawing this line element, is its slope. And what is its slope? Its slope is to be f(x,y). And now, you fill up the plane with these things until you're tired of putting them in. So, I don't know, let's not take them all to the same way. That sort of seems cheating. Sine I didn't have any particular differential equation in mind. Now, the integral curve, so those are the line elements. The integral cueve is a curve, which goes through the plane and at every point is tangent to the line element there
取平面上的每一點——當然這不太現實，不過可取部份點示意一下。每一點標出線素，點上一條短線，它在平面内位置唯一確定。這一點是(x,y)，線素表明該點斜率。其斜率是f(x,y)。然後，將整個平面畫滿線素，直至畫到不想畫為止。我讓它們指向不同方向，免得你們說我使詐。我并沒打算讓它們滿足什麼特定方程。再看積分曲綫，積分曲綫是穿過平面、每一點處與線素相切的曲綫。

齊次微分方程

若一階微分方程可化為$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的形式，則稱之為齊次方程。可把它轉換為可分离變量的微分方程，然後求解。
令$u = \frac{y}{x}$, 則$y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.
於是原方程可化為 $u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$, 這是變量可分離的方程。

可化為齊次的方程

方程$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$當$c = c_1 = 0$時是齊次的，否則不是齊次的。在非齊次情況下，可用變換把它化為齊次方程。

例：解微分方程$y' = \dfrac{2x - y + 1}{2x - y - 1}$

解：令2x-y=z, 則$y' = \frac{z+1}{z-1}$.

$\dfrac{dz}{dx} = 2 - \dfrac{dy}{dx}$, $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx} = 2 - \dfrac{dz}{dx}$, 代入原方程得

$2 - \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z+1}{z-1}$. 这一步是为了消去y, 使式子中只含z和x. 这样才能分离变量。在其他方程求解时作用同。

至此，就化为了可分离变量的方程。

一階線性微分方程

若未知函数和它的各阶导数都是一次项，而且它們的系数只是自变量的函数或常数，则称这种微分方程为**线性**微分方程。
不含未知函数和它的导数的项称为**自由项**，自由项为零的线性方程称为齐次线性方程(homogeneous)；自由项不为零的方程为非齐次线性方程。

方程$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$叫做一階線性非齊次微分方程，因為它對於未知函數$y$及其導數$y'$是一次方程。

係數P(x)和自由項Q(x)可以是線性的，也可以是非線性的。如$\frac{dy}{dx} + x^2y = \sin x$是一階線性非齊次方程，而$\frac{dy}{dx} + xy^2 = x$則是一階、但不是線性的微分方程。

“一階”指y的一階導數y'，如它不是二階導y''或三階導y'''；“線性”指y和y'是一次的，如它們不是y^2或y'^2。

若$Q(x) \equiv 0$，則此方程稱為齊次的（指的是未知函數y與它的導數/微分的次數齊）；若$Q(x) \not\equiv 0$，則此方程稱為非齊次的，如y''+py'+qy=x就不是“齊次”的，因为方程右边的项x不含y及y的某階導數, 是关于y,y',y'',……的0次项。

常系数非齐次线性微分方程

欲得到非齐次线性微分方程的通解，我们首先求出对应的齐次方程的通解，然后用待定系数法或常数变易法求出非齐次方程本身的一

个特解，把它们相加，就是非齐次方程的通解。

待定係數法(From Wikipedia)

考慮微分方程$\frac{dy}{dx}=y+e^{2x}$，對應的齊次方程是$\frac{dy}{dx}=y$，其通解為$y=Ce^{x}$.

由於非齊次部份是e^{2x}，猜測特解的形式是$y_p=Ae^{2x}$，把這個函數及其導數代入微分方程中，可解出A：

$\frac{d(Ae^{2x})}{dx}=Ae^{2x}+e^{2x},\frac{dA}{dx}e^{2x}+2Ae^{2x}=Ae^{2x}+e^{2x},\frac{dA}{dx}+2A=A+1,A=1$

故原微分方程的解是$y=Ce^{x}+e^{2x}$

常數變易法

先求出$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$所對應的齊次線性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解：

$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y\xrightarrow{\text{分離變量}}\frac{dy}{y}=-P(x)dx\xrightarrow{\text{兩端積分}}\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1\xrightarrow{\text{去對數符號}}y=Ce^{-\int P(x)dx}(C=\pm e^{C_1})$$

把以上齊次方程的通解中的常數C換成x的未知函數u(x)，即$y=ue^{-\int P(x)dx}$

用u(x)代替C后，既能满足齐次方程，又能产出非齐次项，故一定可以找到合适的u(x)，使得它由微分算子运算后得到原微分方程的非齐项，因此原微分方程的通解都可以写成y2=u(x)y1(x)；（y1(x)是与它相应的齐次方程的通解）。

u待定，只要求出u，就求出了非齊次線性方程的通解。

把變換后的通解代入原非齊次方程中，得：

$$u'e^{-\int P(x)dx}-uP(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)ue^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

到這里，必然會有兩項正好消去

上式兩端積分，得：

$$u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

u已求出，於是乎：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\xrightarrow{\text{寫成兩項之和的形式}}y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$$

以上過程可簡述為：

1. 解出對應齊次方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的解$y=Ce^{-\int P(x)dx}$
2. 令$y=ue^{-\int P(x)dx}$，則$u'e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$, 由此可解得u=...
3. 把解出的u代入上一步的式子，得出结果。

它的第一項是對應齊次線性方程的通解，第二項是非齊次線性方程的一個特解。

這個特解的初始條件是什麼？

通常意義上講，$y'=x-y^2$是不可解的，沒有初等函數能夠表達出y. 而實際上，它還是可解的。

Bernoulli 伯努利方程

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$. 兩端同除以$y^n$, 使其最后一项向一阶线性微分方程靠拢

$\frac{dy}{dx}y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$. 再令$z=y^{1-n}$, 它的第二项就像一阶线性微分方程了

为了消去y，可写出$\frac{dz}{dx}$的表达式，用$\frac{dz}{dx}$代替$\frac{dy}{dx}$，这样就化成了善于z和x的一阶线性微分方程。

有理函数的微分方程

把分母分解得不能再分解，用待定系数法确定分子的系数。

高階線性微分方程

二階及以上的微分方程稱為高階微分方程。

定理：若函數$y_1(x)$與$y_2(x)$是二階齊次線性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的兩個解，則$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是該方程的解，其中C_1,C_2是任意常數。

定理：若函數$y_1(x)$與$y_2(x)$是二階齊次線性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的兩個線性無關的特解，則$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是該方程的通解，其中C_1,C_2是任意常數。

線性無關：兩者之比恒為常數$\frac{y_1}{y_2}\equiv Constant$，則線性相關；否則線性無關。

推論：若$y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$是$n$階齊次線性方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$的$n$個線性無關的解，則此方程的通解為$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$，其中$C_1,C_2,\dots,C_n$是任意常數。

幾階線性微分方程，通解中就應當有幾個任意常數C

前已述及，一階非齊次線性微分方程的通解由兩部份構成：一部份是對齊次方程的通解，另一部份是非齊次方程本身的一個特解。實際上，不僅一階非齊次線性微分方程的通解具有這樣的結構，而且二階及更高階的非齊次線性微分方程的通解也具有同樣的結構。

定理：設$y^*(x)$是二階非齊次線性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的一個特解，$Y(x)$是與該方程對應的齊次方程的通解，則$y=Y(x)+y^*(x)$是該二階非齊次線性微分方程的通解。

定理：設非齊次線性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的右端$f(x)$是兩個函數之和，即$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$，而${y_1}^*(x)$與${y_2}^*(x)$分別是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$與$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的特解，那麼${y_1}^*(x)+{y_2}^*(x)$就是原方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的特解。這一定理通常稱為**線性微分方程的解的叠加原理**。

常係數齊次線性微分方程

在二階齊次線性微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$中，若y',y的係數$P(x),Q(x)$均為常數，即方程變為$y''+py'+qy=0$，其中p,q是常數，則稱此方程為二階常係數齊次線性微分方程。若p,q不全為常數則稱為二階變係數齊次線性微分方程。

前已述及，要找微分方程$y''+py'+qy=0$的通解，可先求出其兩個解y_1,y_2，若$\frac{y_1}{y_2}\not\equiv Constant$,即$y_1,y_2$線性無關，則$y=C_1y_1+C_2y_2$即為此方程通解。當$r$為常數時，指數函數$y=e^{rx}$和它的各階導數都只相差一個常數因子（$y'=re^{rx},y''=r^2e^{rx},\dots$）。因于指数函数有這個特點，可用$y=e^{rx}$來嘗試，看能否選取適當的常數$r$，使$y=e^{rx}$滿足$y''+py'+qy=0$.

$y = e^{rx} \xrightarrow{\text{代入}} y'' + py' + qy = 0 \xrightarrow{\text{求導,并提取公因式}} (r^2 + pr + q)e^{rx} = 0 \xrightarrow{\because e^{rx}\neq 0} r^2 + pr + q = 0$

故只要$y = e^{rx}$滿足$r^2 + pr + q = 0$，它就是微分方程$y'' + py' + qy = 0$的解。$r^2 + pr + q = 0$叫做微分方程$y'' + py' + qy = 0$的**特徵方程**。

特徵方程是一個二次代數方程，其中r^2, r的係數及常數項恰好依次是微分方程$y'' + py' + qy = 0$中y'', y'及y的係數。是故特徵方程是很容易寫出來的。

特徵方程的兩個根可以用韋達定理求出$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$. 有3種情形：

- $p^2 - 4q > 0$時，r_1, r_2是特徵方程的兩個不等實根，微分方程$y'' + py' + qy = 0$的通解為
  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$時，r_1, r_2是特徵方程的兩個相等實根，微分方程$y'' + py' + qy = 0$的通解為
  $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
- $p^2 - 4q < 0$時，特徵方程有一對共軛復根$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = (\beta \neq 0)$，微分方程$y'' + py' + qy = 0$的通解為
  $y = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}$

上述解二階常係數齊次線性微分方程所用的方法以及方程通解的形式，可推廣到n階常係數齊次線性微分方程。

有時用記號D（叫做**微分算子**）表示對x求導的運算$\frac{d}{dx}$，把$\frac{dy}{dx}$記作D_y，把$\frac{d^n y}{dx^n}$記作$D^n y$。

從代數學知道，n次代數方程有n個根（重根按重數計算）。而特徵方程的每一個根都對應著通解中的一項，且每項各含一個任意常數。這樣就得到n階常係數齊次線性微分方程的通解$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$

Exercise

1. $y^{(4)} - y = 0.$ 特徵方程的解為$\pm 1, \pm i$，故通解為$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$
2. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$ 特徵方程的解為$r_1, r_2 = i, r_3, r_4 = -i$,通解為$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$
3. ? $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0.$ 特徵方程的解為$r_1, r_2 = 0, r_3, r_4 = 1$,通解為$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x$

常係數非齊次線性微分方程

二階常係數非齊次線性微分方程的一般形式為$y'' + py' + qy = f(x)$，其中p, q是常數，求它的通解，可歸結為求對應齊次方程$y'' + py' + qy = 0$的通解和它本身的一個特解y^*。

這里只討論$y'' + py' + qy = f(x)$中的$f(x)$取兩種常見形式時求y^*的方法，其特點是不用積分就可求出y^*，此乃待定係數法。

$\boldsymbol{f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)}$**型：**

其中λ是常數，$P_m(x)$是x的一個m次多項式$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$

猜測解的形式：方程$y'' + py' + qy = f(x)$的特解y^*是使方程成為恒等式的函數，怎樣的函數能使之成為恒等式呢？因為方程右端$f(x)$是多項式$P_m(x)$與指數函數$e^{\lambda x}$的乘積，而多項式與指數函數乘積的導數仍然是多項式與指數函數的乘積，故推測$y^* = Q(x)e^{\lambda x}$（其中$Q(x)$是某個多項式）可能是方程的特解……

形如$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$的二階常係數非齊次線性微分方程$y'' + py' + qy = f(x)$，具有形如：

$$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$$

的特解，其中$Q_m(x)$是與$P_m(x)$同次（即同為m次）的多項式，而k按λ不是特徵方程的根、是特徵方程的單根或是特徵方程的重根依次取值為0、1或2.

此結論可推廣到n階常係數非齊次線性微分方程，但要注意k是特徵方程含根λ的重複次數，即若λ不是特徵方程的根，則$k=0$；若λ是特徵方程的s重根，則$k=s$.

$\boldsymbol{f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]}$**型：**

其中λ, ω是常數，$P_l(x), P_n(x)$分別是x的l次、n次多項式，且有一個可為0.

其特解的形式可設為：

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m{}^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m{}^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

其中$R_m{}^{(1)}(x), R_m{}^{(2)}(x)$是$m$次多項式，$m = max\{l, n\}$，而$k$按$\lambda + i\omega$（或$\lambda - i\omega$）不是特徵方程的根、或是特徵方程的單根依次取0或1.

此結論可推廣到n階常係數非齊次線性微分方程，但要注意k是特徵方程中含根$\lambda + i\omega$（或$\lambda - i\omega$）的重複次數。

二阶变系数非齐次线性微分方程

先求出对应二阶变系数齐次线性微分方程的通解，再用常数变易法解。

已知$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$的通解为$y = C_1 x + C_2 e^x$. 求$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1$的通解。

设非齐次方程的通解为$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 x + u_2 e^x$, 则

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \text{人为地令} y' = (u_1 y_1 + u_2 y_2)' \text{中的} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \text{这样} y'' \text{的表达 式中不会出现} u_1'' \text{和} u_2'' \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = x - 1, \text{这个式子是把} y, y', y'' \text{代入原非齐次方程后所得} \end{cases}$$

上面的方程组即

$$\begin{cases} u_1' x + u_2' e^x = 0 \\ u_1' + u_2' e^x = x - 1 \end{cases}$$

解得$u_1' = -1, u_2' = xe^{-x}$. 积分，求出u1和u2，代入所设的通解即得结果。

Vector

2011年5月11日　　22:59

實際問題中，有些向量與其起點有關（如質點運動的速度與該質點的位置有關，一個力與該力的作用點的位置有關），有些向量與其起點無關。由於一切向量的共性是它們都有大小和方向，因此在數學上我們只研究與起點無關的向量，并稱這種向量為**自由向量**，簡稱向量，即只考慮其大小和方向，而不論起點在什麼地方。遇到與起點有關的向量時，可在一般原則下作特別處理。

模等於1的向量叫做**單位向量**。某個數軸上一點P的座標為x的充要條件是$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$.(其中$\boldsymbol{i}$為單位向量)

模等於0的向量叫做**零向量**，零向量的起點與終點重合，其方向可以看作是任意的。

空間直角座標系

通常把x軸和y軸配置在水平面上，而z軸則是鉛垂線，它們的正向通常符合**右手規則**，即以右手握住z軸，當右手的四個手指從正向x軸以π/2角度轉向正向y軸時，大拇指的指向就是z軸的正向。

x, y, z三個座標軸把空間分成8個部份，每一部份叫做一個卦限。含有x軸、y軸與z軸三者正半軸的那個卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在xOy面的上方，按逆時針方向確定。第五至第八卦限，在xOy面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆時針方向確定。這八個卦限分別用字母Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ, Ⅶ, Ⅷ表示。

向量$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$稱為點M關於原點O的**向徑**。一個點與該點的向徑有相同的座標，記號(x, y ,z)既可以表示點M，又可以表示向量$\overrightarrow{OM}$。至於到底表示的是誰，可以根據上下文推測出。

空間向量

定理： 設向量$\boldsymbol{a} \neq 0$，那麼向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$的充要條件是：存在唯一的實數λ，使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. 座標表示為$\left(b_x, b_y, b_z\right) = \lambda\left(a_x, a_y, a_z\right)$，這也就相當于向量與對應的座標成比例：

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.\text{當}a_x, a_y, a_z\text{有一個為0，如}a_x = 0, a_y, a_z \neq 0\text{時,應理解為}\begin{cases} b_x = 0 \\ \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} \end{cases}.\text{有兩個為0時與此類似。}$$

已知兩點$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2, z_2)$以及實數$\lambda \neq -1$，在直線AB上求點M，使$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. 則$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$. 點M叫做有向線段$\overrightarrow{AB}$的***λ*分點**。特別地，$\lambda = 1$時為其中點。

非零向量$\boldsymbol{r}$與三條座標軸的夾角α, β, γ稱為向量$\boldsymbol{r}$的方向角，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$稱為向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦。以向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦為座標的向量就是與$\boldsymbol{r}$同方向的單位向量$\boldsymbol{e_r}$，且$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

設點M'為點M在u軸上的投影，$\overrightarrow{OM'} = \lambda\boldsymbol{e}$，則數$\lambda$（可見，投影是個標量）稱為向量$\overrightarrow{OM}$在u軸上的投影，記作$\mathrm{Prj_u}\mathbf{r}$或$(\boldsymbol{r})_u$.

$(\boldsymbol{a})_u = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, φ為向量與u軸的夾角

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u = (\boldsymbol{a})_u + (\boldsymbol{b})_u$

數量積vs. 向量積

	數量積	向量積
Result	數值	向量
Expression	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \lvert\boldsymbol{c}\rvert = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin\theta$
⊥	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \xleftrightarrow{\text{充要條件}} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$	
//	$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}\ \left(\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}\right)$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
運算律	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, λ is a constant.	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, λ is a constant.
Specials	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

兩向量的向量積仍是一個向量$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其方向垂直于$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$所決定的平面，具體指向由右手規則確定：若右手的四個手指從$\boldsymbol{a}$以不超過π的角度向$\boldsymbol{b}$握拳時，大拇指的指向就是$\boldsymbol{c}$的方向。

曲面及其方程

若曲面S與三元方程F(x, y, z)=0有下述關係：

- 曲面S上任一點的座標都滿足方程F(x, y, z)=0
- 不在曲面S上的點的座標都不滿足方程F(x, y, z)=0　　（注意不要把注意力都放在滿足方程的點上，勿忘了不在S上的點不滿足）

則方程F(x, y, z)=0就叫做曲面S的方程，而曲面S叫做此方程的圖形。

旋轉曲面

无穷级数

2011年12月11日 9:40

无穷级数就是无穷多项相加，它与有限项相加有本质不同。
历史上曾对一个无穷级数问题引起争论，例如1-1+1-1+1...+(-1)^(n+1)+... 有三种看法，得出三种不同的和：
第一种：(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+... = 0.
第二种：1-(1-1)-(1-1)-...-(1-1)-... = 1.
第三种（欧拉）：令1-1+1-1+1...+(-1)^(n+1)+... =S, 则1-[1-1+1-1+...]=S. 于是1-S=S, 故S=0.5. 这种方法是错误的。

无穷级数的前n项和已经不是无穷多项相加了。
发散的级数没有“和”的概念。不过某些特殊含义下可考虑发散级数的和；基础课和考研中不要求此特殊含义。
收敛级数具有结合律，即对级数的项任意加括号所得新级数仍收敛，且其和不变。发散级数不具有结合律。
级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要（不充分）条件是$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. **调和级数**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$满足此条件，但调和级数是发散的。
等比级数（亦曰几何级数）$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n\ (a\neq 0), |r|<1$时收敛，$|r|\geq 1$时发散。
P级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p>1$时收敛, $p\leq 1$时发散。

正项级数审敛法

若$u_n\geq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$称为正项级数。（或曰：可以等于0，这应称为非负级数。这一是历史遗留问题）
正项级数和前n项和数列$\{S_n\}$是单调递增数列，它是否收敛取决于S_n是否有上界。单调有界数列必有极限。
比较判别法
比较判别法的极限形式：设$u_n>0, v_n>0$. 若$lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$, 则

- $0<A<\infty$时，这两个级数同时收敛同时发散；
- A=0时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；
- $A=+\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛。

比值判别法（达朗贝尔判别法）
根值判别法（柯西判别法）

交错级数审敛法

若$u_n>0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$称为交错级数。
莱布尼兹判别法

绝对收敛与条件收敛

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必收敛（反之未必）。此时称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛。
若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛。
绝对收敛级数具有交换律，即级数中无穷多项任意交换顺序，得到的级数仍绝对收敛，且其和不变。
条件收敛级数的正项或负项构成的级数，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$或$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n-|u_n|)$, 必定是发散的。

一类重要级数

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$
当p>1时绝对收敛
当$0<p\leq 1$时条件收敛
当$p\leq 0$时发散

函数项级数

2011年12月30日　　18:58

和函数的定义域就是函数项级数的收敛域。

幂级数

基本的幂级数展开式（n都从0开始）：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,,-1<x<1;\qquad \text{把}x\text{换为}-x,\text{得到}\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\,,-1<x<1.$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<+\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1},-\infty<x<+\infty$$

以上是三个最基本的幂级数展开式，由此可以推出许多其他的幂级数展开式。如用变量代换，替换掉上式是的x；还可以对以上式了两端同时求导或同时积分……

求和函数，就是要设法把幂级数转化为某个级数的展开式。即把幂级数展开式逆用。

傅立叶级数

设f(x)是周期为2π的周期函数，且能展开成傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则其中的系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

Fourier Transform

2011年12月3日 22:00

http://altdevblogaday.com/2011/05/17/understanding-the-fourier-transform/

Yes, I realize that after reading the title of this post, 99% of potential readers just kept scrolling. Soto the few of you who clicked on it, welcome! Don't worry, this won't take long.A very long time ago, I was curious how to detect the strength of the bass and treble in music, inorder to synchronize some graphical effects. I had no idea how to do such a thing, so I tried to figureit out, but I didn't get very far. Eventually I learned that I needed something called a Fouriertransform, so I took a trip to the library and looked it up (which is what we had to do back in thosedays).What I found was the Discrete Fourier Transform (DFT), which looks like this:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}$$

This formula, as anyone can see, makes no sense at all. I decided that Fourier must have been speaking to aliens, because if you gave me allthe time and paper in the world, I would not have been able to come up with that.

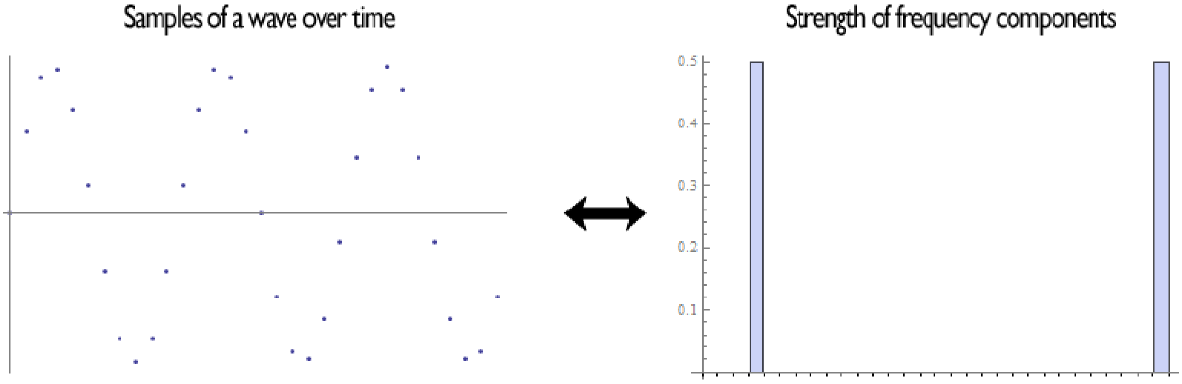
Eventually, I was able to visualize how it works, which was a bit of alight bulb for me. That's what I want to write about today: an intuitive wayto picture the Fourier transform. This may be obvious to you, but it wasn't to me, so if you work with audio or rendering, I hope there's something here you find useful.

Disclaimer: my math skills are pitch-patch at best, and this is just intended to be an informal article, so please don't expect a rigorous treatment. However, I will do my best not to flat-out lie about anything, and I'm sure people will set me straight if I get something wrong.

A quick bit of background – what does the Fourier transform do? It translates between two different ways to represent a signal:

在信号的两种表现形式之间转换：

- The **time domain** representation (a series of evenly spaced samples over time)
- The **frequency domain** representation (the strength and phase of waves, at different frequencies, that can be used to reconstruct the signal)



The picture on the left shows 3 cycles of a sine wave, and the picture on the right shows the Fourier transform of those samples. The output bars show energy at 3 cycles (and, confusingly enough, negative 3 cycles… more on that below).The inputs and outputs are actually complex numbers, so to feed a real signal (like some music) into the Fourier transform, we just set all the imaginary components to zero. And to check the strength of the frequency information, we just look at the magnitude of the outputs, and ignore the phase. But let's never mind all that for now.

What are we trying to accomplish? We've got a sampled signal, and we want to extract frequency information from it. The Fourier transform works on a periodic, or looping signal. This seems like a problem, since we don't actually have any signals like that. In practice, you just take a small slice of a longer signal, fade both ends to zero so that they can be joined (which is a whole topic unto itself),and pretend it's a loop.

Let's make things simple and say that our loop repeats once per second.

Picture it as a bead, sliding up and down along a thin rod, tracing out the signal. So as this bead is bobbing up and down, look what happens if we spin the rod at a rate of, say, 10 revolutions per second:

We get a scribble, as you'd expect. And it is roughlycentered on the origin.

Now, let's assume we know there's some energy inthe signal at 3 Hz, and we want to measure it. What that means is that on top of whatever else is causingthe signal to wobble around, we've added a wavethat oscillates 3 times per second. It has a high point every 1/3 of a second, and corresponding low points in between, also spaced 1/3 of a second apart. You can probably see now how we might be able to detect it... let's try spinning our signal at a matching rate of 3 revolutions per second.

Since the signal completes a rotation every 1/3 of a second, all the high points in our 3 Hz wave line up at the same part of the rotation, and this pulls the whole scribble off-center. How can we quantify that? The easiest way would be to record a bunch of points as we rotate, and average them to find their midpoint:

It makes sense that the distance of this midpoint from the origin is proportional to the strength of the signal, because as the high points in our signal get higher, they will move the scribble farther away. But what if the signal contains no energy at 3 Hz? Let's remove the 3Hz wave and see:

Now there is nothing to pull the scribble off center, and all of the other oscillations tend to (approximately) balance each other out.

This looks promising as a way to detect energy at a given frequency. Time to translate it into math! For a looping signal of N samples:

(Raising e to an imaginary power produces rotation around a unit circle in the complex plane, according to Euler's formula. How? Magic, as far as I can tell. But apparently it's true).

So this equation is a little different from what we started with. I've added a normalization factor of 1/N, and changed the sign of the exponent. I also rearranged the terms slightly for clarity. This form is normally called the inverse DFT, which is confusing, but apparently the difference between the DFT and IDFT is a matter of convention, and can depend on the application. So, let's call that close enough.

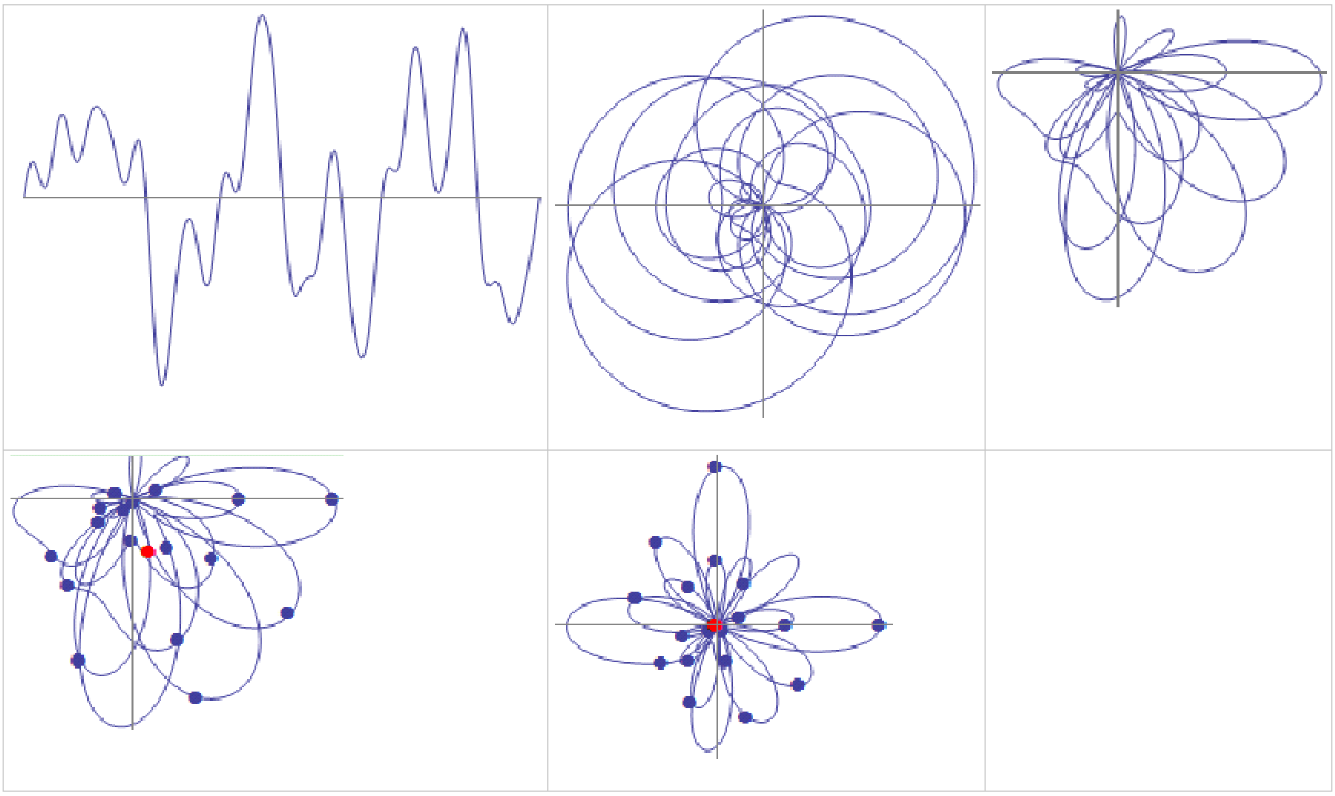
Anyway, once you can "see" what's going on in your head, a lot of the quirks of working with the DFT become much less mysterious. If you've had to work with DFT output before, you may have wondered:

- Why does the first element in the result (k=0) contain the DC offset? Because in that case, our samples don't spin at all, so all we're doing is averaging them.
- Why doesn't the DC offset affect the frequency information? Because adding a constant value to all the samples just makes the whole scribble bigger, which doesn't affect the midpoint.
- Why does the second half of the output array contain a mirror image of the first half? It's just our old friend aliasing. When calculating the last element (k=N-1), we're rotating by(N-1)/N at each step, which is almost all of the way around. This is the same as taking small steps (1/N) in the wrong direction. That's why the result at (k=N-1) has the same magnitude as (k=1). It's equivalent to processing a negative frequency of (k=-1).

- Why does a sine wave with amplitude1.0 come out of the DFT as 0.5? When we spin the sine wave, we get a circle of diameter 1.0, but it's midpoint is only half that distance away from the origin.
- Where is the other half of the energy then? It's hiding in the negative frequency part!

Hopefully this was more helpful than confusing.

And if you'd like to get updates on my game development work, come subscribe to my RSS feed.



$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$$

To find the energy at a particular frequency. Spin your signal around a circle at that frequency, and average a bunch of points along that path.

Fourier transform

2011年8月31日 23:38

文字翻译：(注意对应的颜色)要找出一个特定的频率（绿色部分）所具有的能量（紫色），以那个频率（绿色）绕着一个圆（黄色）旋转（红色）你的信号（蓝色），然后取该路径上所有点的平均值（粉紫色）。
这是由Stuart Riffle所发表的一篇文章中提到的，想要了解更多请跳转访问。（http://altdevblogaday.com/2011/05/17/understanding-the-fourier-transform/）

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$$

To find the energy at a particular frequency, spin your signal around a circle at that frequency, and average a bunch of points along that path.

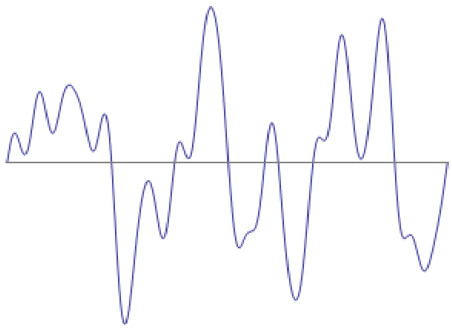
http://altdevblogaday.com/2011/05/17/understanding-the-fourier-transform/
Yes, I realize that after reading the title of this post, 99% of potential readers just kept scrolling. So to the few of you who clicked on it, welcome! Don’t worry, this won’t take long.
A very long time ago, I was curious how to detect the strength of the bass and treble in music, in order to synchronize some graphical effects. I had no idea how to do such a thing, so I tried to figure it out, but I didn’t get very far. Eventually I learned that I needed something called a Fourier transform, so I took a trip to the library and looked it up (which is what we had to do back in those days).
What I found was the Discrete Fourier Transform (DFT), which looks like this:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}$$

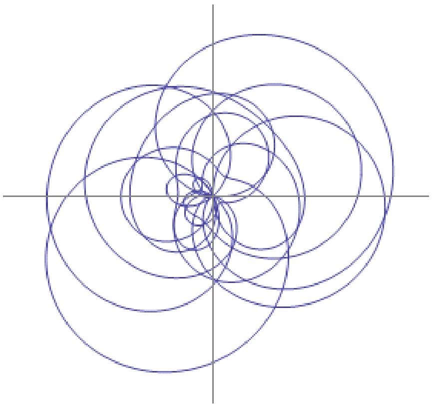
This formula, as anyone can see, makes no sense at all. I decided that Fourier must have been speaking to aliens, because if you gave me all the time and paper in the world, I would not have been able to come up with that.
Eventually, I was able to visualize how it works, which was a bit of a lightbulb for me. That’s what I want to write about today: an intuitive way to picture the Fourier transform. This may be obvious to you, but it wasn’t to me, so if you work with audio or rendering, I hope there’s something here you find useful.
Disclaimer: my math skills are pitch-patch at best, and this is just intended to be an informal article, so please don’t expect a rigorous treatment. However, I will do my best not to flat-out *lie* about anything, and I’m sure people will set me straight if I get something wrong.
A quick bit of background – what does the Fourier transform *do*? It translates between two different ways to represent a signal:

- The **time domain** representation (a series of evenly spaced samples over time)
- The **frequency domain** representation (the strength and phase of waves, at different frequencies, that can be used to reconstruct the signal)

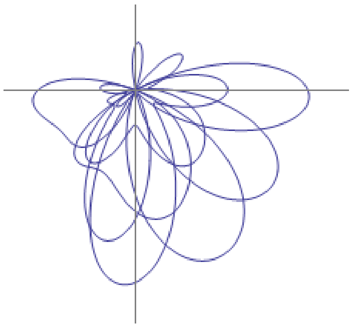
The picture on the left shows 3 cycles of a sine wave, and the picture on the right shows the Fourier transform of those samples. The output bars show energy at 3 cycles (and, confusingly enough, *negative* 3 cycles… more on that below).
The inputs and outputs are actually complex numbers, so to feed a real signal (like some music) into the Fourier transform, we just set all the imaginary components to zero. And to check the strength of the frequency information, we just look at the magnitude of the outputs, and ignore the phase. But let’s never mind all that for now.
What are we trying to accomplish? We’ve got a sampled signal, and we want to extract frequency information from it. The Fourier transform works on a periodic, or looping signal. This seems like a problem, since we don’t actually have any signals like that. In practice, you just take a small slice of a longer signal, fade both ends to zero so that they can be joined (which is a whole topic unto itself), and pretend it’s a loop.
Let’s make things simple and say that our loop repeats once per second.



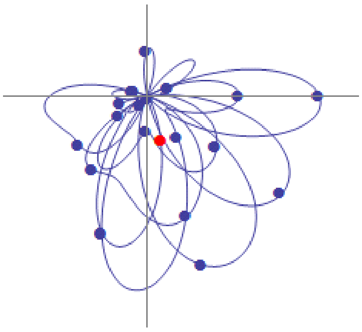
Picture it as a bead, sliding up and down along a thin rod, tracing out the signal. So as this bead is bobbing up and down, look what happens if we spin the rod at a rate of, say, 10 revolutions per second:



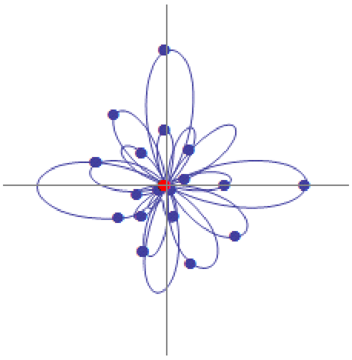
We get a scribble, as you' d expect. And it is roughly centered on the origin.
Now, let' s assume we know there' s some energy in the signal at 3 Hz, and we want to measure it. What that means is that on top of whatever else is causing the signal to wobble around, we' ve added a wave that oscillates 3 times per second. It has a high point every 1/3 of a second, and corresponding low points in between, also spaced 1/3 of a second apart. You can probably see now how we might be able to detect it… let' s try spinning our signal at a matching rate of 3 revolutions per second.



Since the signal completes a rotation every 1/3 of a second, all the high points in our 3 Hz wave line up at the same part of the rotation, and this pulls the whole scribble off-center. How can we quantify that? The easiest way would be to record a bunch of points as we rotate, and average them to find their midpoint:



It makes sense that the distance of this midpoint from the origin is proportional to the strength of the signal, because as the high points in our signal get higher, they will move the scribble farther away. But what if the signal contains no energy at 3 Hz? Let' s remove the 3 Hz wave and see:



Now there is nothing to pull the scribble off center, and all of the other oscillations tend to (approximately) balance each other out. This looks promising as a way to detect energy at a given frequency. Time to translate it into math! For a looping signal of N samples:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$$

To find the energy at a particular frequency, spin your signal around a circle at that frequency, and average a bunch of points along that path.

(Raising e to an imaginary power produces rotation around a unit circle in the complex plane, according to Euler's formula. How? Magic, as far as I can tell. But apparently it's true).
So this equation is a little different from what we started with. I've added a normalization factor of 1/N, and changed the sign of the exponent. I also rearranged the terms slightly for clarity. This form is normally called the *inverse* DFT, which is confusing, but apparently the difference between the DFT and IDFT is a matter of convention, and can depend on the application. So, let's call that close enough.

Anyway, once you can "see" what's going on in your head, a lot of the quirks of working with the DFT become much less mysterious. If you've had to work with DFT output before, you may have wondered:

- *Why does the first element in the result (k=0) contain the DC offset?* Because in that case, our samples don't spin at all, so all we're doing is averaging them.
- *Why doesn't the DC offset affect the frequency information?* Because adding a constant value to all the samples just makes the whole scribble bigger, which doesn't affect the midpoint.
- *Why does the second half of the output array contain a mirror image of the first half?* It's just our old friend aliasing. When calculating the last element (k=N-1), we're rotating by (N-1)/N at each step, which is almost all of the way around. This is the same as taking small steps (1/N) in the wrong direction. That's why the result at (k=N-1) has the same magnitude as (k=1). It's equivalent to processing a negative frequency of (k=-1).
- *Why does a sine wave with amplitude 1.0 come out of the DFT as 0.5?* When we spin the sine wave, we get a circle of diameter 1.0, but it's midpoint is only half that distance away from the origin.
- *Where is the other half of the energy then?* It's hiding in the negative frequency part!

Hopefully this was more helpful than confusing.
And if you'd like to get updates on my game development work, come subscribe to my RSS feed at[pureenergygames.com](pureenergygames.com)!

Analytic Geometry

2011年3月4日　　12:54

相互垂直的两直线，其斜率之积为-1

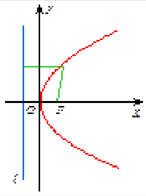
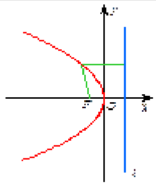
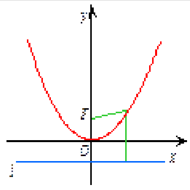
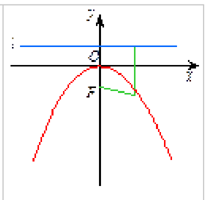
圆锥曲线

抛物线、椭圆、双曲线都是与定点（焦点）和定直线（准线）距离之比为常数e（离心率= c / a）的点的集合：$P=\left\{M\left|\frac{|MF|}{|MA|}=e\right.\right\}$。在直角坐标系中，这几种曲线的方程都是二次的，故称为二次曲线。

不管这三类曲线的图像如何变化（平衡或旋转），解题时只须记住它们的定义及其所含的参数（如焦距、准线等）的准确含义，从这些本质的东西着手，会给人一种豁然开朗的感觉。

抛物线

线上的点到一个定点与一条定直线的距离相等，e=1

Graphic				
Equation	$y^2=2px\ (p>0)$	$y^2=-2px\ (p>0)$	$x^2=2py\ (p>0)$	$x^2=-2py\ (p>0)$
Focus	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

	椭圆	双曲线	抛物线
顶点坐标	$(\pm a,0),(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$	$(0,0)$
对称轴	x轴,长轴长$2a$ y轴,短轴长$2b$	x轴,实轴长$2a$ y轴,虚轴长$2b$	x轴
焦点坐标	$(\pm c,0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\frac{p}{2},0\right)$
离心率	0<e<1	e>1	e=1
准　线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$
渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

椭圆

平面内到两定点F_1、F_2的距离之和（大于$|F_1F_2|$=2c）为常数2a的点的集合，0<e<1。

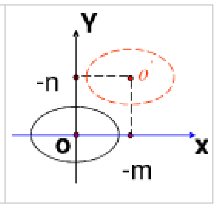
2a=2c时为点集为线段F_1F_2。

$b^2+c^2=a^2$。a为半长轴，b为半短轴，c为半焦距。

焦点在哪个轴上是根据分母的大小判断的。

若图形不是标准的，图形形状不变，离心率不变，但图形的方程及性质中的其他指标有变化，如焦点在X轴上时，$\frac{(x+m)^2}{a^2}+\frac{(y+n)^2}{b^2}=1$的中心是$(-m,-n)$. $\frac{(x+m)^2}{a^2}-\frac{(y+n)^2}{b^2}=1$的中心是$(-m,-n)$。

以椭圆为例，其标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，中心为原点。在非标准方程中，将$(x+m)$视为X，将$(y+n)$视为Y，求其中心，则由$\begin{cases}X=0\\Y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+m=0\\y+n=0\end{cases}$。同样，顶点坐标、对称轴、焦点坐标、准线及渐近线也可由此求出。



双曲线

平面内到两定点F_1、F_2的距离之差的绝对值（小于$|F_1F_2|$=2c）为常数2a的点的集合，e>1

2a=2c时为自F_1、F_2起到X轴两端的两条射线。

焦点在哪个轴上是根据x、y的系数符号判断的。

渐近线：焦点在x轴上时为$y=\pm\frac{b}{a}x$。焦点在y轴上时为$y=\pm\frac{a}{b}x$。

圆

圆$x^2+y^2=R^2$上任意一点(x_0,y_0)处的切线方程为$x_0x+y_0y=R^2$

Miscellaneous

2011年3月13日　　21:40

∀任意　　∃存在

点a的邻域$U(a)$，a的δ邻域(中心为a，半径为δ)记为(a,ε)，a的去心δ邻域记为$\overset{\circ}{U}(a,\delta)$。$a$的左$\delta$邻域为$(a-\delta,a)$

自然数集N，整数集Z，有理数集Q，实数集R.

複數集是無序集，不能建立大小順序。

形如z=a + bi的數，a=0時為純虛數，模$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

极坐标：以圆的半径为ρ，曰极径。

收敛数列不一定单调

斐波那奇序列：$F_0=0, F_1=1, F_i=F_{i-1}+F_{i-2}\ (i\geq 2)$

方程的近似解

求一些方程（如高次代数方程）的精确实根往往有困难，故需求其近似解：

1. 根的隔离：确定一个隔离区间$[a,b]$，使此区间内有唯一实根
2. 以根的隔离区间的端点作为根的初始近似值，逐渐改善根的近似值的精确度，直至求得满足精确度要求的近似解。这一步可用二分法、切线法等

线素，技术制图中的一般规定术语，是指不连续线的独立部分，如点、长度不同的画和间隔。 对于无法解出具体解的微分方程，常用画线素场的方法近似确定解的走向。

两向量的夹角范围为$[0,\pi]$，两直线的夹角范围为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Laws

二项式定理（又称牛顿二项式定理）：$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$

正弦定理：三角形各边和它所对角的正弦之比相等，且比值为该三角形外接圆半径的2倍：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

余弦定理：描述的是三角形的边角关系。$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. <u>勾股定理是余弦定理的特殊情况。</u>

韋達定理：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的兩個根為：

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Tips

在复习考研(微博)数学的时候，有的同学觉得基础概念不重要，考研不会这么简单，所以一开始就把重点放在高、难、怪的题目上。实际上打好基础是最重要的，下面跨考教育数学教研室李擂老师以考研常见的10种题型来分析把握概念的重要性。众所周知，以下10种题型是考研必考的题型：

1.运用洛必达法则和等价无穷小量求极限问题，直接求极限或给出一个分段函数讨论基连续性及间断点问题。

2.运用导数求最值、极值或证明不等式。

3.微积分中值定理的运用。

4.重积分的计算，包括二重积分和三重积分的计算及其应用。

5.曲线积分和曲面积分的计算。

6.幂级数问题，计算幂级数的和函数，将一个已知函数用间接法展开为幂级数。

7.常微分方程问题。可分离变量方程、一阶线性微分方程、伯努利方程等的通解、特解及幂级数解法。

8.解线性方程组，求线性方程组的待定常数等。

9.矩阵的相似对角化，求矩阵的特征值，特征向量，相似矩阵等。

10.概率论与数理统计。求概率分布或随机变量的分布密度及一些数字特征，参数的点估计和区间估计。

很多考生第一眼看到这些考点的时候都非常开心，因为这些考点太常见了！每年考研数学得高分的人非常多，甚至会出现好些满分，但为何每年过不了考研数学这道槛的人也很多呢？考研数学并不难，但涉及的知识点很多，只要你认真翻一下历年的数学考研大纲就不难发现，高数、线代、概率3门课程有很多知识点，都是需要认真而全面的复习。

既然是基础复习，就需要通览课本。因为很多同学认为课本很简单忽视了对课本的把握，在考研中往往得不到理想的数学成绩。与很多重视积累的基础学科一样，数学是由许多定义、定理、公式等积累起来，对这些细小东西的把握只能依靠课本，只有打好扎实的基础才能应对变化多端的考题。