Equations

# Functions

函数是从实数集到实数集的映射。数列是定义在 N+ 上的函数，是函数的特例，是函数的离散化（自变量只取 N+）。

复合映射(fog)(x) = f[g(x)]. 复合映射是讲顺序的，fog 未必与 gof 相同。

函数之偶或奇，首先是其定义域关于原点对称。

奇函数的图形关于原点对称，x1+x2=0, y1+y2=0.

原函数和反函数关于直线 y = x 对称。

若函数 f(x) 的图像关于直线 y = a 对称，则 f(x) = f(2a - x).

## 函数的连续性和间断点

连续的定义：Δx→0 时，Δy 的极限为0. 从静止的角度理解，x 不变时，y 亦不变。也可定义为：函数在 x0 点某一邻域内的函数值的极限等于在 x0 点处的函数值。连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线。

* 第一类间断点，左右极限都存在：
  + 左右极限相等者又称为可去间断点；
  + 不等者又称为跳跃间断点。
* 不是第一类间断点者，称为第二类间断点，如无穷间断点、振荡间断点。

一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

## Trigonometric functions

的定义域是 .

倒数关系：

的三角函数值之间的关系：

### 和差角公式

### 半角公式

### 积化和差

其他积化和差公式的推导与此类似。

### 和差化积

只有同名的三角函数能和差化积。化积后必出现角度的加减和函数的相乘（既是化积，自然相乘了）。

### 万能公式

### 平方差公式

### 其他

## 反三角函数

证明：令 则

# 极限

数列的极限：某一项之后的所有项，无限接近某个定值（这个定值就是极限）。

极限存在，亦谓之收敛；极限不存在，亦谓之发散。

极限的四则运算遵循代数的四则运算：（在自变量的同一变化过程中）若两个函数的极限都存在，则两个函数四则运算后求极限，等于各自求极限后再作四则运算（除法时需分母的极限不为 0）。

以上的一个推论是：函数的 n 次方的极限，等于其极限的 n 次方，其中 n∈N+.

例题：

1) 若 lim f(x) 存在，lim g(x) 不存在，则 lim[f(x) + g(x)] 不存在。正确。

2) 若 lim f(x) 和 lim g(x) 都不存在，则 lim[f(x) + g(x)] 不存在。错误。如 f(x) = (-1)^n, g(x) = (-1)^(n+1), 则 f(x) + g(x) ≡0.

3) 若 lim f(x) 存在，lim g(x) 不存在，则 lim[f(x)g(x)] 不存在。错误。如 f(x) = x, g(x) = sin(1/x), 在 x→0 时。

A: 准则：单调有界数列必有极限。收敛数列不一定是单调的（如摆动着收敛），因此该准则所说的“单调”是数列收敛的充分条件，而不是必要条件（但其中的“有界”则是必要的）。

B: 数列收敛的充要条件是柯西极限存在准则（也叫柯西审敛原理）给出的，说两个项之间的距离无限小，且这样的两个项有无穷多对。

理解：B 不限制数列以怎样的方式趋于一个值（收敛），如单调着、摆动着；B 则说数列单调着趋于一上值。可认为 A 是 B 的一个特例。

## 无穷大 无穷小

无穷大必为无界，而无界未必是无穷大。无穷大，在 x 的某个变化过程中，|f(x)| 无限增大。对于 f(x) = xsinx, 其图像在 x 轴上下摆动着散开。即 x →∞ 时，|f(x)| 不是趋于 ∞，因为它总是与 x 轴有交点。

是不是说无穷大要求单调地趋于无穷大？

无穷小量，指的是极限为0的变量，另加一个特殊的常量0.

恒不为 0 的无穷小量的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小。0 是唯一可作为无穷小的常数，故单纯地说“无穷小的倒数是无穷大”是错误的。

无穷小的性质：

* 自反性：
* 对称性：
* 传递性：

时的一些等价无穷小：

以上部分等价无穷小可用函数在 x = 0 处的微分推导出，如：

## 极限的求法

有理分式函数的极限，若分子分母都不趋于 0，则某一点的极限就等于那一点的函数值；若分子分母都趋于 0，则尝试约分约去趋于 0的 因子；若分母趋于0，则求其倒数的极限（子母倒置，或曰倒挂金钟）。

### 等价代换

加减式子：设在自变量 x 的同一变化过程中， 均为无穷小，且 .

### 夹逼准则

左边缩小，右边放大。

### 数学归纳法

例：求数列 的极限。

解：数列可表示为

1) 先考察其有界性：

2) 再考察其单调性：很显然，单调增加。

3) 单调有界数列必有极限，设

解方程得 故数列的极限为 2.

**方法：在递推公式两边同时取极限，得到一个关于极限值 a 的方程。解方程即求出极限值。**

### 转化为两个重要极限的形式

### 洛必达法则

## 函数的连续性

设函数和在某一点连续，证明函数 在该点也连续。

证明：

**在编程中，利用以上式子，不用比较运算即可求出两数中的较大、较小者。**

若函数在某一点连续，则函数 在该点亦连续，而连续函数的和差仍连续，故得证。

## Exercises

教材总习题一 9.(5), 9.(6) 太难。

# 导数与微分

定义：在某一点的导数是一个极限值：

## 基本初等函数的导数

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 函数 | 导数 | Comments |
| 幂函数 |  |  |
| 指数函数 |  |  |
| 对数函数 |  |  |
| 正余弦 |  | “正”函数的导数带正号，“余”函数的导数带负号。 |
| 正余切 |  |
| 正余割 |  |
| 反正余弦 |  |
| 反正余切 |  |
| n阶导数 |  |  |
| n 阶导数 |  |  |

乘积的求导法则：

幂指函数求导，先对等式两边求对数，再求导。

由参数方程所确定的函数的导数，及其二阶导数。

莱布尼茨 Leibniz 公式计算函数乘积的 n 阶导数。

## Exercises

例1：反函数求导。

的反函数也可以这样求，但根据 可快速求出.

例2：（教材2.4 例9）计算参数方程

所确定的函数 的二阶导数。

在 中，把 t 看成关于自变量 x 的函数 u(x)，于是它就变成了以 t 为中间变量的复合函数，而又可根据反函数的求导法则求出。

例3：（教材习题 2 – 3, 第 4 题）从 推导其二阶和三阶导数。

# 微分中值定理与导数的应用

微分中值定理分为罗尔中值定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理，又（统）称为微分学基本定理、有限改变量定理或有限增量定理，是微分学的基本定理之一，内容是说一段连续光滑曲线中必然有一点，它的斜率与整段曲线平均斜率相同。

费马引理

Rolle 罗尔定理：函数在闭区间上连续、开区间上可导，且在区间端点处的函数值相等，则在此开区间内至少存在一个导数为 0 的点。（几何意义上平等于 x 轴的切线）

Lagrange 拉格朗日中值定理：函数在闭区间上连续、开区间上可导，则在开区间内至少有一点处的切线平行于两端点构成的弦。拉格朗日中值公式：

定理：若函数在区间上的导数恒为 0，则该函数在该区间上是一个常数。

柯西中值定理：令拉格朗日中值定理中的函数以参数方程的形式给出：

Taylor 泰勒中值定理：用一个 n 阶多项式精确地表达函数值。

泰勒公式中n=0 时变成拉格朗日中值公式，故泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广。

泰勒公式中 时变成 Maclaurin 麦克劳林公式：

## 曲线

* 一阶导|单调性|**驻点**：导数为 0 的点称为函数的驻点（或曰稳定点、临界点）。
* 二阶导|凹凸性|**拐点**：若曲线经过某点后凹凸性发生了改变，则称该点为曲线的拐点。

若函数在定义区间上连续，除去有限个导数不存在的点外，导数存在且连续，则只要用方程 f’(x)=0 的根及 f’(x) 不存在的点来划分函数 f(x) 的定义区间，就能保证 f’(x) 在各个部分区间内保持固定符号，因而函数 f(x) 在每个部分区间上单调。

### 极值 最值

极大值的定义：设函数f(x)在点的某邻域内有定义，若对于去心邻域内的任一x有，则称是函数f(x)的一个极大值。极小值的定义类似。极值的概念是局部性的。

极值点处的切线是水平的（一阶导为0），而有水平切线的地方不一定取得极值（如 f(x)=x3在 x=0 处）。即一阶导为0是取得极值的**必要不充分**条件。也可以说极值点必是驻点，而驻点未必是极值点。

此外，导数不存在的点也可能取得极值。如 在 x=0 处不可导，但取得极小值。

取得极值的第一充分条件：设函数在某一点处连续，且在该点的某去心邻域内可导。若函数的一阶导数在该点左右两侧异号，则在该点处取得极值；若一阶导数同号，则在该点处没有极值。

取得极值的第二充分条件：调函数在某一点处的一阶导为0，且二阶导不为0，则函数在该点处取得极值。该点的二阶导：为正数时取得极小值，为负数时取得极大值（结合凹凸性记忆），为0时是否取得极值不一定（如）。

### 凹凸性 拐点

凹凸性的定义：

凹凸性的判定定理：若二阶导为正数，则是凹的；若二阶导是负数，则是凸的。

二阶导不存在的点也可能是拐点。二阶导为 0 的点不一定是拐点，如 , 但根据凹凸性判定定理， (0,0) 点不是其拐点。

怎样找拐点：求 的根以及二阶导不存在的点，根据凹凸性判定定理判断是否为拐点。

## Exercises

教材 P144 例3

利用带佩亚诺型余项的麦克劳林公式求极限

教材上的解法，把分母替换为等价无法小 , 分别求分子中两个项的三阶麦克劳林公式。结果是 1/3.

为什么下面的解法是错误的：

教材习题 3-3, 8, 9 利用泰勒公式求近似值，10 利用泰勒公式求极限。

# 不定积分

积分运算是微分运算的逆运算。

## 基本积分表

## 换元积分法

### 第一类换元法

形如

是对复合函数求导法则的逆向应用，但比复合函数求导困难，因为如何选择适当的变量代换没有规律可循。

一般对 型函数的积分，总可依次作变换 来计算。

### 第二类换元法

形如 ，