第六节 函数图形的描绘

第三章

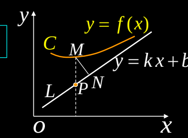
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

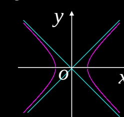
定义．若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线．**

或为“纵坐标差”



例如，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$



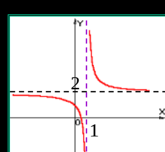
但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线．

1. 水平与铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$．
(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$．
(或 $x\to x_0^-$)

例1. 求曲线 $y=\frac{1}{x-1}+2$ 的渐近线．



解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x-1}+2)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{x-1}+2)=\infty$，$\therefore\ x=1$ 为垂直渐近线．

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$．
(或 $x\to-\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$

⇓

$\lim\limits_{x\to+\infty} x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$

⇓

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$

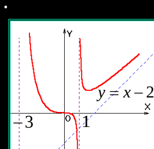
⇓

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}]$

$\therefore$ $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
(或 $x\to-\infty$)

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$
(或 $x\to-\infty$)

例2. 求曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线．



解: $\because\ y=\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}$，$\lim\limits_{x\to-3} y=\infty$，
(或 $x\to1$)

所以有铅直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$

$\therefore$ $y=x-2$ 为曲线的斜渐近线．

二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；
2. 求 $f'(x)$，$f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；
3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；
4. 求渐近线；
5. 确定某些特殊点，描绘函数图形．

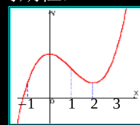
例3. 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,无对称性及周期性.

2) $y'=x^2-2x$, $y''=2x-2$,

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2$

令 $y''=0$, 得 $x=1$



3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2 (极大)		$\frac{4}{3}$ (拐点)		$\frac{2}{3}$ (极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2

例4. 描绘方程 $(x-3)^2+4y-4xy=0$的图形.

解: 1) $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为$(-\infty,1),(1,+\infty)$

2) 求关键点

$\because\ 2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$

$\therefore\ y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$

$\because\ 2+4y''-8y'-4xy''=0$

$\therefore\ y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$

令 $y'=0$ 得 $x=-1,3$;

3) 判别曲线形态

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y		-2 (极大)				0 (极小)	

4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to1}y=\infty$, $\therefore x=1$ 为铅直渐近线

$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, $y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$, $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{4}$, 即 $k=\frac{1}{4}$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$

$\therefore\ y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$为斜渐近线

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$

$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$

$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$

6）绘图

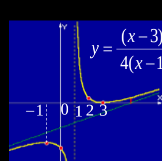
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y		-2 (极大)		无定义		0 (极小)	

铅直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



例5. 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: 1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形对称于 y 轴.

2) 求关键点

$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$

令 $y'=0$得 $x=0$; 令 $y''=0$得 $x=\pm1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (极大)		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ (拐点)	

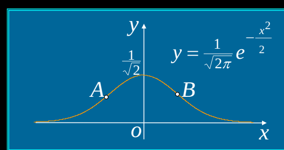
x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		(拐点)	

4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore y=0$ 为水平渐近线

5) 作图



内容小结

1. 曲线渐近线的求法

水平渐近线； 垂直渐近线;

斜渐近线

2. 函数图形的描绘 ——— 按作图步骤进行

思考与练习

1\. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线； (B) 仅有水平渐近线；

(C) 仅有铅直渐近线；

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$

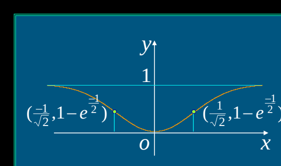
2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}$ ，

凸区间是 $\underline{(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})}$ 及 $\underline{(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)}$ ，

拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-e^{\frac{-1}{2}})}$ ， 渐近线 $\underline{y=1}$.

提示:

$$y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$$



备用题 求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 的渐近线 .

解: 令 $y=t\,x$, 代入原方程得曲线的参数方程 :

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\qquad t\neq -1$$

当 $x\to\infty$ 时 $t\to -1$, 因

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to -1}\frac{3at^2}{1+t^3}\bigg/\frac{3at}{1+t^3}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}[y-(-x)]=\lim_{t\to -1}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right]=\lim_{t\to -1}\frac{3at\cancel{(1+t)}}{\cancel{(1+t)}(1-t+t^2)}$$

$$=-a$$

所以笛卡儿叶形线有斜渐近线 $y=-x-a$