第十二章

# 第七节 常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

$\downarrow$ 转化

求特征方程(代数方程)之根

---

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数}) \qquad ①$$

因为$r$为常数时, 函数 $e^{rx}$ 和它的导数只差常数因子, 所以令①的解为 $y = e^{rx}$ ( $r$ 为待定常数 ), 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\longrightarrow r^2 + pr + q = 0 \qquad ②$$

称②为微分方程①的**特征方程**, 其根称为**特征根**.

---

1\. 当$p^2 - 4q > 0$时，

特征方程有两个相异实根 $r_1, r_2$,

微分方程有两个线性无关的特解:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x},$$

因此方程的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

---

2\. 当$p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = e^{r_1 x} u(x)$ ( $u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$e^{r_1 x}[\,(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + q u\,] = 0$$

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + p r_1 + q)u = 0$$

$\downarrow$ 注意 $r_1$ 是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取 $u = x$ , 则得 $y_2 = x e^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

---

3\. 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理 , 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2} = \tfrac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

---

**小结:**

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根 : $r_1, r_2$

| 特 征 根 | 通 解 |
|---|---|
| $r_1 \neq r_2$ 实根 | $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ |
| $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ | $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$ |
| $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ | $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ |

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

**例** 求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

**解:** 特征方程 $r^2-2r-3=0$, 特征根: $r_1=-1, r_2=3$,

因此原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$

**例** 求解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0\\ s\big|_{t=0}=4, \quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-2\end{cases}$

**解:** 特征方程 $r^2+2r+1=0$ 有重根 $r_1=r_2=-1$,

因此原方程的通解为 $s=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$

利用初始条件得 $C_1=4, \quad C_2=2$

于是所求初值问题的解为 $s=(4+2t)\mathrm{e}^{-t}$

**例** 求方程 $y''+4y'+8y=0$ 的通解.

**解:** 特征方程 $r^2+4r+8=0$,

特征根: $r_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 8}}{2}$

$=-2\pm 2i$

因此原方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-2x}[C_1\cos 2x+C_2\sin 2x]$

**推广:**

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ ($a_k$ 均为常数)

特征方程: $r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$

若特征方程含 $k$ 重实根 $r_1$ (特征方程含$(r-r_1)^k$因子), 则

$\mathrm{e}^{r_1x}, \ x\mathrm{e}^{r_1x}, \cdots, x^{k-1}\mathrm{e}^{r_1x}$是方程线性无关的解,

其通解中含对应项

$$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\mathrm{e}^{r_1x}.$$

($C_i$为任意常数)

若特征方程含 $k$ 重复根 $r=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$, 则

$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \ x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \ \cdots, \ x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;$

$\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \ x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \ \cdots, \ x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

是方程线性无关的解，其通解中含对应项

$$\mathrm{e}^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+ \\ +(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

(以上 $C_i, D_i$ 均为任意常数)

**例** 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

**解:** 特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0$, 特征根:

$r_1=r_2=0, \quad r_{3,4}=1\pm 2\,\mathrm{i}$

因此原方程通解为

$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$

**例** 解方程 $y^{(5)}-y^{(4)}=0$.

**解:** 特征方程: $r^5-r^4=0$, 特征根:

$r_1=r_2=r_3=r_4=0, \quad r_5=1$

原方程通解: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5\mathrm{e}^x$



## 第八节 常系数非齐次线性微分方程

一、待定系数法

二、常数变易法

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$y''+py'+qy=f(x)$ （$p,q$ 为常数） ①

根据解的结构定理，其通解为

$y = Y + y^*$

齐次方程通解　非齐次方程特解

求特解的方法 — **待定系数法；常数变易法.**

**一、待定系数法**

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 $y^*$ 的待定形式，代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

**1.** $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

$\lambda$ 为实数，$P_m(x)$ 为 $m$ 次多项式 .

设特解为 $y^* = e^{\lambda x}Q(x)$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$

$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$

代入原方程，得

$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$ ②

(1) 若 $\lambda$ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 $m$ 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，代入②式，比较系数，得到 $Q_m(x)$，从而得到特解，形式为 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$ .

$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$

(2) 若 $\lambda$ 是特征方程的单根，即

$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0$，

则 $Q'(x)$ 为 $m$ 次多项式，故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 $\lambda$ 是特征方程的重根，即

$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0$，

则 $Q''(x)$ 是 $m$ 次多项式，故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

$\boxed{\text{小结}}$ 对方程①，当 $\lambda$ 是特征方程的 $k$ 重根 时，

可设特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}\quad (k=0,1,2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

**例** 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

**解:** 本题 $\lambda=0$，而特征方程为 $r^2-2r-3=0$，

$\lambda=0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$，代入方程：

$-2b_0-3b_0x-3b_1=3x+1$

比较系数，得

$$\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}\longrightarrow b_0=-1,\ b_1=\frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\frac{1}{3}$ .

**例** 求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

**解:** 本题 $\lambda=2$，特征方程为 $r^2-5r+6=0$，其根为

$r_1=2,\quad r_2=3$

对应齐次方程的通解为 $\overline{Y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$

代入方程得 $2b_0-2b_0x-b_1=x$

比较系数，得 $\begin{cases}-2b_0=1\\2b_0-b_1=0\end{cases}\longrightarrow b_0=-\frac{1}{2},\ b_1=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$ .

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$ .

**例** 求微分方程 $y''+6y'+9y=(1+x^2)e^{-3x}$ 的通解

**解:** 本题 $\lambda=-3$，特征方程为 $r^2+6r+9=0$，

其根为 $r_1=r_2=-3$

对应齐次方程的通解为 $\overline{Y}=(C_1+C_2x)e^{-3x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)e^{-3x}$

由题 $Q(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2$，

$Q''(x)=12Ax^2+6Bx+2C=x^2+1$

所以 $A=\frac{1}{12},\quad B=0,\quad C=\frac{1}{2}$，

**(07-08, 四(21))**

因此特解为 $y^*=x^2(\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{2})e^{2x}$ .

所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}+x^2(\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{2})e^{2x}$ .

**例** 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{\alpha x}$ 的通解（其中 $\alpha$ 为实数）.

**解:** 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$, 特征根: $r_1 = r_2 = -2$

对应齐次方程通解: $\overline{Y} = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x}$

$\alpha \neq -2$时, 令 $y^* = A\mathrm{e}^{\alpha x}$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{(\alpha+2)^2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{(\alpha+2)^2}\mathrm{e}^{\alpha x}$

$\alpha = -2$ 时, 令 $y^* = Bx^2\mathrm{e}^{-2x}$, 代入原方程得 $B = \frac{1}{2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$

**例** 已知二阶常微分方程 $y'' + ay' + by = c\,\mathrm{e}^x$ 有特解 $y = e^{-x}(1 + x\mathrm{e}^{2x})$, 求微分方程的通解 .

**解:** 将特解代入方程得恒等式

$$(1-a+b)\mathrm{e}^{-x} + (2+a)\mathrm{e}^x + (1+a+b)x\mathrm{e}^x = c\,\mathrm{e}^x$$

比较系数得 $\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 2+a=c \\ 1+a+b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$

故原方程为 $y'' - y = 2\mathrm{e}^x$ $\boxed{y = \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^x}$

对应齐次方程通解: $\overline{Y} = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$

原方程通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^x$

**2.** $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

$\lambda, \omega$为实数，$P_l(x), \tilde{P}_n(x)$分别为$l$和$n$次多项式.

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

($p, q$ 为常数)

$\lambda + \mathrm{i}\omega$为特征方程的 $k$ 重根 ( $k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x\right]$$

其中$m = \max\{n, l\}$,

$R_m(x), \tilde{R}_m(x)$ 为 $m$ 次待定系数多项式.

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

**例** (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + \mathrm{e}^{2x}$ 时可设特解为

$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k\,\mathrm{e}^{2x}$

**提示:** $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$y^* = x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$

$m = \max\{n, l\}$

**例** 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

**解:** 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}$

对应齐次方程的通解为 $\overline{Y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

$\pm 3i$为特征方程的单根 , 因此设非齐次方程特解为

$y^* = x(a\cos 3x + b\sin 3x)$

代入方程: $6b\cos 3x - 6a\sin 3x = 18\cos 3x - 30\sin 3x$

比较系数, 得 $a = 5$, $b = 3$,

因此特解为 $y^* = x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$$

**例** 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的特解 .

**解:** 本题 $\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, \tilde{P}_n(x) = 0$, 考虑非齐次项 $x\cos 2x + e^x$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$

$\lambda + \mathrm{i}\omega = 2\mathrm{i}$不是特征方程的根, 故设特解为

$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数 , 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d + 4a = 0 \end{cases}$ $\therefore\ a = \frac{-1}{3},\ d = \frac{4}{9}$ $\quad b = c = 0$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$ .

例 求微分方程 $y''-y'=3e^x+\cos 3x$ 的通解**(07-08, 一(8))**

**解:** 特征方程为 $r^2-r=0$, 其根为 $r_1=1, r_2=0$,

对应齐次方程的通解为 $\overline{Y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2$

设非齐次方程特解为 $y^*=Axe^x+(B\cos 3x+C\sin 3x)$

代入方程比较系数, 得

$$\begin{cases} A=3 \\ -9B-3C=1 \\ -9C+3B=0 \end{cases} \Longrightarrow A=3, B=-\frac{1}{10}, C=-\frac{1}{30},$$

因此特解为 $y^*=3x\mathrm{e}^x-\frac{1}{10}\cos 3x-\frac{1}{30}\sin 3x$.

所求通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2+3x\mathrm{e}^x-\frac{1}{10}\cos 3x-\frac{1}{30}\sin 3x$.

例 $f(x)$ 为二阶可导函数，且满足方程

$f(x)=e^{3x}+\int_0^x tf(x-t)dt$, 求 $f(x)$ **(06-07, 五(1))**

**解:** $\int_0^x tf(x-t)dt \overset{u=x-t}{=} \int_x^0 (x-u)f(u)(-du)$

$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

所以 $f(0)=1$, 两边同时求导得

$f'(x)=3e^{3x}+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)$,

所以 $f'(0)=3$, 两边同时求导得 $f''(x)=9e^{3x}+f(x)$,

问题化为解初值问题: $\begin{cases} f''(x)-f(x)=9e^{3x} \\ f(0)=1,\ f'(0)=3 \end{cases}$

$y''-y=9e^{3x},\ \ y(0)=1,\ y'(0)=1$

这里 $\lambda=3$, 特征方程为 $r^2-1=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 1$

对应齐次方程的通解为 $\overline{Y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=A\mathrm{e}^{3x}$, 代入方程得 $9A-A=9$,

得 $A=\frac{9}{8}$, 因此特解为 $y^*=\frac{9}{8}\mathrm{e}^{3x}$.

所求通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{9}{8}\mathrm{e}^{3x}$

考虑初值得 $C_1=-\frac{1}{4},\ C_2=\frac{1}{8}$

所以所求 $f(x)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^x+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}+\frac{9}{8}\mathrm{e}^{3x}$

例 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x)=e^{3x}-\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$ **(05-06, 八)**

求 $f(x)$.

**解:** $f(x)=e^{3x}-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f(0)=1$,

$f'(x)=3e^{3x}-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\,f(x)+x\,f(x)$ 则 $f'(0)=3$

$f''(x)=9e^{3x}-f(x)$

问题化为解初值问题: $\begin{cases} f''(x)+f(x)=9e^{3x} \\ f(0)=1,\ f'(0)=3 \end{cases}$

最后求得 $f(x)=\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x+\frac{9}{10}e^{3x}$

例 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$.

**解:** $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f(0)=0$,

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\,f(x)+x\,f(x)$ 则 $f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

问题化为解初值问题: $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x \\ f(0)=0,\ f'(0)=1 \end{cases}$

最后求得 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

**思考:** 设 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}u)\,\mathrm{d}u,\ \varphi(0)=0$,

如何求 $\varphi(x)$?

**提示:** 对积分换元, 令 $t=\sqrt{x}u$, 则有

$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t,\quad \varphi'(0)=1$

$\varphi''(x)=\mathrm{e}^x+\varphi(x)$

解初值问题: $\begin{cases} \varphi''(x)-\varphi(x)=\mathrm{e}^x \\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1 \end{cases}$

答案: $\varphi(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^x(2x+1)-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$

**例** 设有幂级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 收敛域与和函数.

**解:** 级数缺少奇次幂项, 故直接由比值判别法求收敛半径.

考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+2)!}x^{2(n+1)}}{\frac{1}{(2n)!}x^{2n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$

故原级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

$S(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ S(0)=2,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ S'(0)=0,$

$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$S''(x)-S(x)=-1,\ \ S(0)=2,\ \ S'(0)=0,$

特征方程为 $r^2-1=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 1,$

对应齐次方程的通解为 $\overline{S}=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$

设非齐次方程特解为 $S^*=A,$

代入方程比较系数, 得 $A=1,$

因此特解为 $S^*=1.$

所求和函数通解为 $S=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2e^{x}+1.$

考虑初值条件可得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$

所以该级数的和函数为 $S(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}+e^{x})+1$

**例** 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 收敛域与和函数.

**解:** 级数缺次幂项, 故直接由比值判别法求收敛半径.

考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(3n+3)!}x^{3(n+1)}}{\frac{1}{(3n)!}x^{3n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=0$ 故原级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},\ S(0)=1,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\ \ S'(0)=0,$

$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},\ S''(0)=0,\ S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},$

$\cancel{S'''(x)-S(x)=0,\ \ S(0)=1,\ \ S'(0)=0,\ \ S''(0)=0,}$

$S''(x)+S'(x)+S(x)=e^{x},\ S(0)=1,\ \ S'(0)=0,$

特征方程为 $r^2+r+1=0$, 其根为 $r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},$

对应齐次方程的通解为 $\overline{S}=e^{-\frac{1}{2}x}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]$

设非齐次方程特解为 $S^*=Ae^{x},$

代入方程比较系数, 得 $A=\frac{1}{3}$, 因此特解为 $S^*=\frac{1}{3}e^{x}.$

所求和函数通解为 $S=e^{-\frac{1}{2}x}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+\frac{1}{3}e^{x}.$

考虑初值条件可得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0.$

所以该级数的和函数为 $S(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^{x}$

**例** 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,(-\infty<x<+\infty),\ f(0)=0,$ 且满足方程 $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-a_n]x^n=e^{x}$, 求 $f(x)$ 及 $a_n$.

**解:** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n-1}x^n=f'(x),\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x),$

$\therefore f'(x)-f(x)=e^{x}$

$\therefore f(x)=e^{\int dx}[\int e^{x}e^{-\int dx}dx+C]\ =e^{x}[x+C]$

考虑初值条件可得 $C=0,\ \ \therefore f(x)=xe^{x}$

$\therefore f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad a_0=0,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$

**例** 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,(-\infty<x<+\infty),\ f(0)=3,$ 且满足方程 $\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{a_nx^{n+1}}{(n+1)}-(n+1)a_{n+1}x^n]=x$, 求 $f(x)$

**解:** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n-1}x^n=f'(x),\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x f(t)dt,$

$\therefore\ \int_0^x f(t)dt-f'(x)=x,\ f'(0)=0,\therefore f''(x)-f(x)=-1,$

特征方程为 $r^2-1=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 1,$

齐次方程的通解为 $\overline{f}(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$

设非齐次方程特解为 $f^*(x)=A,$ 比较系数, 得 $A=1,$

通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2e^{x}+1.$ 考虑初值可得 $C_1=C_2=1$

所以 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+e^{x}+1$

**例** 求以 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 为通解的微分方程.

**解:** 由通解式可知特征方程的根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

故特征方程为 $(r-1)(r-2) = 0$, 即 $r^2 - 3r + 2 = 0$

因此微分方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$

**例** 求以 $y_1 = \cos 2x - \frac{x}{4}\cos 2x,\ y_2 = \sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x,$

为解的二阶常系数非齐次线性微分方程.

**解:** 由解可知特征方程的根为 $r_{1,2} = \pm 2i$, 故特征方程为

$(r-2i)(r+2i) = 0$, 因此对应齐次微分方程为

$y'' + 4y = 0$. 可设非齐次微分方程为

$y'' + 4y = A\cos 2x + B\sin 2x$, 代入特解 $y^* = -\frac{x}{4}\cos 2x$

比较系数得 $A = 0, B = 1$, 所求方程为 $y'' + 4y = \sin 2x$.

**例** 求下列微分方程的通解 $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$

**解:** 特征根: $r_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$,

齐次方程通解: $\bar{Y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

令非齐次方程特解为 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$

代入方程可得 $A = \frac{1}{17}$, $B = -\frac{4}{17}$

原方程通解为 $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{17}\cos 2x - \frac{4}{17}\sin 2x$

**思考**

若方程中非齐次项改为 $\sin^2 x$, 特解设法有何变化?

**提示:** $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, 故 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x + D$

**例** 求微分方程 $\begin{cases} y'' + y = x, & x \le \frac{\pi}{2} \\ y'' + 4y = 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 满足条件

$y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$, 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处连续且可微的解.

**提示:** 当 $x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 解满足 $\begin{cases} y'' + y = x \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$

特征根: $r_{1,2} = \pm \mathrm{i}$,

设特解: $y^* = Ax + B$, 代入方程定 $A, B$, 得 $y^* = x$

故通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x$

利用 $y|_{x=0} = 0,\ y'|_{x=0} = 0$, 得

$y = -\sin x + x \quad (x \le \frac{\pi}{2})$

由 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的衔接条件可知, 当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, 解满足

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{\pi}{2}, \quad y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1 \end{cases}$$

其通解: $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$

定解问题的解: $y = -\frac{1}{2}\sin 2x + (1 - \frac{\pi}{2})\cos 2x, \quad x > \frac{\pi}{2}$

故所求解为

$$y = \begin{cases} -\sin x + x, & (x \le \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{1}{2}\sin 2x + (1-\frac{\pi}{2})\cos 2x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## 两类二阶微分方程的解法总结

**1. 可降阶微分方程的解法 — 降阶法**

- $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \longrightarrow$ 逐次积分求解
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{令 } p(x) = \frac{dy}{dx}} \frac{dp}{dx} = f(x, p)$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{令 } p(y) = \frac{dy}{dx}} p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$

**2. 二阶线性微分方程的解法**

- 常系数情形 $\begin{cases} \text{齐次} \\ \text{非齐次} \end{cases}$ —— 代数法

## 内容小结

**待定系数法**

1. $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}$

$\lambda$ 为特征方程的 $k\,(=0, 1, 2)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

2. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 $k\,(=0, 1)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{l, n\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.