线性代数

第三章　　向量

主讲人：张远征、张震峰、钱晓明

上海财经大学应用数学系

May 31, 2010

本章的研究内容

本章的研究内容

1. 在线性运算的框架下，讨论向量组的线性关系，特别是向量组的线性无关性；
2. 引入向量组的极大无关组以及秩的概念，这是本章的核心概念. 矩阵的秩根本地反映了矩阵等价以及矩阵标准形的意义.

本章的研究内容

1. 在线性运算的框架下，讨论向量组的线性关系，特别是向量组的线性无关性;
2. 引入向量组的极大无关组以及秩的概念,这是本章的核心概念. 矩阵的秩根本地反映了矩阵等价以及矩阵标准形的意义.

本章内容的特点和难点

1. 特点: 概念多, 定理多, 内容纵横交错, 知识前后联系紧密.
2. 难点: 一是向量组之间关系的判定, 二是有关秩的理论.
3. 学习要点: 充分理解概念; 准确运用定理; 抓联系, 抓规律, 及时总结.

本章内容的特点和难点

1. 特点: 概念多, 定理多, 内容纵横交错, 知识前后联系紧密.
2. 难点: 一是向量组之间关系的判定, 二是有关秩的理论.
3. 学习要点: 充分理解概念; 准确运用定理; 抓联系, 抓规律, 及时总结.

本章内容的特点和难点

1. 特点: 概念多, 定理多, 内容纵横交错, 知识前后联系紧密.
2. 难点: 一是向量组之间关系的判定, 二是有关秩的理论.
3. 学习要点: 充分理解概念; 准确运用定理; 抓联系, 抓规律, 及时总结.

目录

定义1—n维向量

n个数组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为n维向量，a_i称为向量的第i个分量．向量一般用小写的希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示，分量一般用小写的英文字母$a_i, b_i, c_i, \cdots$表示．$n$维向量也可以写成列向量的形式：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

1. 零向量：分量都为0的向量，记做$\mathbf{0}$.
2. 负向量：称$(-a_1, \cdots, -a_n)$为$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$的负向量，记做$-\alpha$.

1. n维向量

定义1—n维向量

n个数组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为n维向量，a_i称为向量的第i个分量. 向量一般用小写的希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示，分量一般用小写的英文字母$a_i, b_i, c_i, \cdots$表示. n维向量也可以写成列向量的形式:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

1. 零向量: 分量都为0的向量，记做$\mathbf{0}$.
2. 负向量: 称$(-a_1, \cdots, -a_n)$为$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$的负向量，记做$-\alpha$.

1. n维向量

定义1—n维向量

n个数组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为n维向量，a_i称为向量的第i个分量. 向量一般用小写的希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示，分量一般用小写的英文字母$a_i, b_i, c_i, \cdots$表示. n维向量也可以写成列向量的形式:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

1. 零向量: 分量都为0的向量，记做$\mathbf{0}$.
2. 负向量: 称$(-a_1, \cdots, -a_n)$为$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$的负向量，记做$-\alpha$.

1. n维向量

定义1—n维向量

n个数组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为n维向量，a_i称为向量的第i个分量. 向量一般用小写的希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示，分量一般用小写的英文字母$a_i, b_i, c_i, \cdots$表示. n维向量也可以写成列向量的形式：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

1. 零向量：分量都为0的向量，记做**0**.
2. 负向量：称$(-a_1, \cdots, -a_n)$为$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$的负向量，记做$-\alpha$.

2.向量的运算

(1) 加减法: 设$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 定义

$$\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm a_n)$$

(2) 数乘: 设$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), k \in \mathbb{R}$, 定义

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

2.向量的运算

(1) 加减法: 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 定义

$$\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm a_n)$$

(2) 数乘: 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),k\in\mathbb{R}$, 定义

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

运算法则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(6) $1\alpha=\alpha$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

运算法则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(6) $1\alpha=\alpha$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

运算法则

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$

(6) $1\alpha = \alpha$

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

运算法则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(6) $1\alpha=\alpha$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

运算法则

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$

(6) $1\alpha = \alpha$

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

运算法则

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(6) $1\alpha=\alpha$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

运算法则

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$

(6) $1\alpha = \alpha$

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

(5) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$

(6) $1\alpha = \alpha$

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

目录

1. 线性表示和线性相关的概念

定义1—线性表示

设n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$以及向量$\beta$, 若存在数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

称向量β可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示或称向量β是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的线性组合.

1. 线性表示和线性相关的概念

定义2—线性相关

设n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，若存在一组不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，否则称为线性无关.

定义2—线性相关

设n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，若存在一组不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，否则称为线性无关.

线性无关

定义3—线性无关

设n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，若从

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

总能推出

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

例

例1 设$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,-2,3)^T,\alpha_3=(4,3,4)^T$ 判断$\beta=(-1,-3,0)$能否被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

例2 设$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(-1,-1,2)^T,\alpha_3=(2,3,-5)^T$, 讨论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性.

例3 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$也线性无关

例4 证明向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

例

例1 设$\alpha_1 = (1,2,1)^T, \alpha_2 = (2,-2,3)^T, \alpha_3 = (4,3,4)^T$ 判断$\beta = (-1,-3,0)$能否被$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

例2 设$\alpha_1 = (1,0,-1)^T, \alpha_2 = (-1,-1,2)^T, \alpha_3 = (2,3,-5)^T$, 讨论$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性相关性.

例3 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 证明$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$也线性无关

例4 证明向量组$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$线性相关.

例

例1 设$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,-2,3)^T,\alpha_3=(4,3,4)^T$ 判断$\beta=(-1,-3,0)$能否被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

例2 设$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(-1,-1,2)^T,\alpha_3=(2,3,-5)^T$, 讨论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性.

例3 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$也线性无关

例4 证明向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

例

例1 设$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,-2,3)^T,\alpha_3=(4,3,4)^T$ 判断$\beta=(-1,-3,0)$能否被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

例2 设$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(-1,-1,2)^T,\alpha_3=(2,3,-5)^T$, 讨论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性.

例3 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$也线性无关

例4 证明向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

2. 简单性质

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

2.简单性质

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

2.简单性质

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

2. 简单性质

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示, 则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

2.简单性质

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

2.简单性质

- 零向量可由任何同维向量组线性表示;
- 含有零向量的向量组线性相关;
- n维单位坐标向量组线性无关;
- 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示;
- 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量;
- 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例;
- 若向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

性质—线性关系的判定定理

1. n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

2. $n+1$个n维向量一定线性相关.

3.重要性质

性质—线性关系的判定定理

1. n个n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

2. $n+1$个n维向量一定线性相关.

3. 重要性质(续)

性质—线性关系的判定定理

3. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关.
(部分相关则整体相关；反之，整体无关则部分无关)

4. 设k维向量组$(I)\alpha_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik})^T, i = 1, \cdots, m$, s维向量组$(II)\tilde{\alpha}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik}, a_{ik+1}, \cdots, a_{is})^T$. 若向量组$(I)$线性无关，则添加一些分量后的向量组$(II)$也线性无关.
(原来无关，则加维后也无关)

3.重要性质(续)

性质—线性关系的判定定理

3. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关.
   (部分相关则整体相关；反之， 整体无关则部分无关)

4. 设k维向量组$(I)\alpha_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik})^T, i = 1, \cdots, m$, s维向量组$(II)\tilde{\alpha}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik}, a_{ik+1}, \cdots, a_{is})^T$. 若向量组$(I)$线性无关，则添加一些分量后的向量组$(II)$也线性无关.
   (原来无关，则加维后也无关)

性质—线性关系定理

5. 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$中至少有一个向量可以由其余$s-1$个向量线性表示.

6. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, β不能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示, 则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性无关.

7. 设向量β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示.
   (1) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, 则表示法唯一;
   (2) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则表示有无穷多.

性质—线性关系定理

5. 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$中至少有一个向量可以由其余$s-1$个向量线性表示.

6. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, β不能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示, 则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性无关.

7. 设向量β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示.

   (1) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, 则表示法唯一;

   (2) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则表示有无穷多.

3. 重要性质(续)

性质—线性关系定理

5. 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$中至少有一个向量可以由其余$s-1$个向量线性表示.

6. 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关, β不能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$线性无关.

7. 设向量β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示.

   (1) 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关, 则表示法唯一;

   (2) 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关, 则表示有无穷多.

性质—线性关系定理

5. 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$中至少有一个向量可以由其余$s-1$个向量线性表示.

6. 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关, β不能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$线性无关.

7. 设向量β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示.
   (1) 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关, 则表示法唯一;
   (2) 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关, 则表示有无穷多.

性质—线性关系定理

5. 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$中至少有一个向量可以由其余$s-1$个向量线性表示.

6. 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关, β不能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$线性无关.

7. 设向量β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示.
   (1) 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关, 则表示法唯一;
   (2) 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关, 则表示有无穷多.

性质—线性关系的判定定理

8. 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关，且

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

则$\beta_1, \cdots, \beta_n$也线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

例5 使用判定定理再来解答例2和例3.

例6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关,
$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_1$, 问

(1) 当t取何值时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关;

(2) 当t取何值时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例5 使用判定定理再来解答例2和例3.

例6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关,
$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_1$, 问

(1) 当t取何值时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关;

(2) 当t取何值时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例

例7 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s>2)$线性无关, 令

$$\beta_1=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_1,\beta_2=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_s$$

证明:$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关.

例8 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, $\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关, 问:

(1) α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示;
(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示.

例

例7 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s>2)$线性无关, 令

$$\beta_1=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_1,\beta_2=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_s$$

证明:$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关.

例8 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, $\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关, 问:

(1) α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示;
(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示.

例

例7 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s>2)$线性无关, 令

$$\beta_1=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_1,\beta_2=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_s$$

证明:$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关.

例8 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, $\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关, 问:

(1) α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示;
(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示.

例

例7 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s>2)$线性无关, 令

$$\beta_1=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_1,\beta_2=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\alpha_s$$

证明:$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关.

例8 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, $\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关, 问:

(1) α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示;
(2) α_{s+1}能否由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示.

Summary

1. 主要内容:

   (1) 三个重要概念: 线性表示, 线性相关, 线性无关. 其中最重要的是线性无关的概念.

   (2) 向量组线性关系的系列判定定理.

2. 主要题型:

   (1) 利用定理判定向量组的线性关系.

   (2) 从定义出发证明向量组线性无关.

1. 主要内容:
   (1) 三个重要概念: 线性表示, 线性相关, 线性无关. 其中最重要的是线性无关的概念.
   (2) 向量组线性关系的系列判定定理.

2. 主要题型:
   (1) 利用定理判定向量组的线性关系.
   (2) 从定义出发证明向量组线性无关.

目录

1.向量组之间的表示关系

定义1—线性表示

设有向量组$(I)\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$; 另有向量组$(II)\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 如果向量组$(II)$中每个向量$\beta_i$都可以由向量组$(I)$线性表示, 称向量组$(II)$可以由向量组$(I)$线性表示. 即

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{s1}\alpha_s \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{s2}\alpha_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_t = a_{1t}\alpha_1 + a_{2t}\alpha_2 + \cdots + a_{st}\alpha_s \end{cases}$$

表示关系的矩阵形式

矩阵形式:

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}$$

定义2—等价

如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表示, 向量组(II)也可以由向量组(I) 线性表示, 称向量组(I)和向量组(II)等价.

简单性质:

(1) 线性表示具有传递性;

(2) 等价具有反身性, 对称性, 传递性.

定义2—等价

如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表示, 向量组(II)也可以由向量组(I) 线性表示, 称向量组(I)和向量组(II)等价.

简单性质:

(1) 线性表示具有传递性;

(2) 等价具有反身性, 对称性, 传递性.

定义2—等价

如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表示，向量组(II)也可以由向量组(I)线性表示，称向量组(I)和向量组(II)等价.

简单性质:

(1) 线性表示具有传递性;

(2) 等价具有反身性，对称性，传递性.

定义2—等价

如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表示，向量组(II)也可以由向量组(I) 线性表示，称向量组(I)和向量组(II)等价.

简单性质:

(1) 线性表示具有传递性;

(2) 等价具有反身性，对称性，传递性.

2.等价无关组

引理

设有向量组$(I)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, $(II)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 如果(II)可以由向量组(I)线性表示, 且$t>s$, 则向量组(II)线性相关.

推论1

如果(II)可以由向量组(I)线性表示, 且向量组(II)线性无关, 则$s\geq t$.

推论2

两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相等.

定义3—极大线性无关组

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$n$维向量组$T$中的一部分向量，如果满足：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；

(2) T中任意一个向量α可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为$T$的一个极大无关组.

性质

(1) 向量组T与它的任何一个极大无关组等价；

(2) 向量组T的极大无关组不一定唯一，但任何一个极大无关组所含向量的个数是唯一.

3.极大线性无关组

定义3—极大线性无关组

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$n$维向量组$T$中的一部分向量，如果满足：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；

(2) T中任意一个向量α可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为$T$的一个极大无关组.

性质

(1) 向量组T与它的任何一个极大无关组等价；

(2) 向量组T的极大无关组不一定唯一，但任何一个极大无关组所含向量的个数是唯一.

3.极大线性无关组

定义3—极大线性无关组

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$n$维向量组$T$中的一部分向量，如果满足:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) T中任意一个向量α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$T$的一个极大无关组.

性质

(1) 向量组T与它的任何一个极大无关组等价;

(2) 向量组T的极大无关组不一定唯一，但任何一个极大无关组所含向量的个数是唯一.

3.极大线性无关组

定义3—极大线性无关组

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$n$维向量组$T$中的一部分向量，如果满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

(2) T中任意一个向量α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$T$的一个极大无关组.

性质

(1) 向量组T与它的任何一个极大无关组等价；

(2) 向量组T的极大无关组不一定唯一，但任何一个极大无关组所含向量的个数是唯一.

4.向量组的秩

定义4—秩

向量组T的极大无关组所含向量的个数称为向量组T的**秩**. 记为$rank(T)$或$r(T)$.

约定: 仅含零向量的向量组没有极大无关组, 其秩规定为0.

4.向量组的秩

定义4—秩

向量组T的极大无关组所含向量的个数称为向量组T的**秩**. 记为$rank(T)$或$r(T)$.

约定: 仅含零向量的向量组没有极大无关组, 其秩规定为0.

续

性质

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$.

(2) 如果向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则$r(II) \le r(I)$.

(3) 等价的向量组具有相同的秩. (注: 反之不对)

(4) 如果$r(I) = r(II)$, 且向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则它们等价.

续

性质

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$.

(2) 如果向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则$r(II) \leq r(I)$.

(3) 等价的向量组具有相同的秩. (注: 反之不对)

(4) 如果$r(I) = r(II)$, 且向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则它们等价.

续

性质

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$.

(2) 如果向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则$r(II) \leq r(I)$.

(3) 等价的向量组具有相同的秩. (注：反之不对)

(4) 如果$r(I) = r(II)$，且向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则它们等价.

续

性质

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$.

(2) 如果向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则$r(II) \le r(I)$.

(3) 等价的向量组具有相同的秩. (注: 反之不对)

(4) 如果$r(I) = r(II)$, 且向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则它们等价.

续

性质

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$.

(2) 如果向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则$r(II) \le r(I)$.

(3) 等价的向量组具有相同的秩. (注: 反之不对)

(4) 如果$r(I) = r(II)$, 且向量组(II)可以由向量组(I)线性表示, 则它们等价.

性质

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$.

(2) 如果向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，则$r(II) \leq r(I)$.

(3) 等价的向量组具有相同的秩. (注: 反之不对)

(4) 如果$r(I) = r(II)$, 且向量组(II)可以由向量组(I)线性表示, 则它们等价.

例1 设$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$, 则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$中的任意$r$个线性无关的向量都是它的极大无关组.

例2 如果n单位坐标向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

Summary

1. 主要内容:
   (1) 重要概念: 向量组之间的表示以及等价; 极大线性无关组与秩. 其中后者是本章的核心概念.
   (2) 向量组与其极大线性无关组等价; 等价的无关组所含向量分个数相等.
   (3) 用秩来判定向量组的线性关系, 向量组之间的等价关系.

2. 主要题型:
   (1) 求向量组的极大线性无关组(见本章第五块内容).
   (2) 利用极大无关组来建立秩的不等式.

Summary

1. 主要内容:
   (1) 重要概念: 向量组之间的表示以及等价; 极大线性无关组与秩. 其中后者是本章的核心概念.
   (2) 向量组与其极大线性无关组等价; 等价的无关组所含向量分个数相等.
   (3) 用秩来判定向量组的线性关系, 向量组之间的等价关系.

2. 主要题型:
   (1) 求向量组的极大线性无关组(见本章第五块内容).
   (2) 利用极大无关组来建立秩的不等式.

目录

矩阵的列分块和行分块

1. 将矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的每一列看成一个$m$维列向量$\alpha_i$，称它们为矩阵$A$的列向量组．即

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

2. 将矩阵A的每一行看成一个n维行向量β_j，称它们为矩阵A的行向量组．即

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

定义1—矩阵的秩

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的行秩;
矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A的列秩. 矩阵A的列秩称为矩阵A的秩. 记$r(A)$.

性质

行秩=列秩

1. 矩阵的秩—定义1

定义1—矩阵的秩

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的行秩;
矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A的列秩. 矩阵A的列秩称为矩阵A的秩. 记$r(A)$.

性质

行秩=列秩

2. 矩阵的秩—定义2

k阶子式

矩阵A中任取k行k列，位于这些行列交叉处的元素按原来的顺序组成的一个k阶行列式称为A的k 阶子式.

定理3.1

1. 若A的某一个r阶子式不为0, 则$r(A) \geq r$;
2. 若A的所有$r+1$ 阶子式全为0, 则$r(A) \leq r$.

定义2—矩阵的秩

$r(A) = r \Leftrightarrow A$的有一个$r$阶子式不为0, 而所有$r+1$ 阶子式全为0.

2. 矩阵的秩—定义2

k阶子式

矩阵A中任取k行k列，位于这些行列交叉处的元素按原来的顺序组成的一个k阶行列式称为A的k 阶子式.

定理3.1

1. 若A的某一个r阶子式不为0, 则$r(A) \geq r$;
2. 若A的所有$r+1$ 阶子式全为0, 则$r(A) \leq r$.

定义2—矩阵的秩

$r(A) = r \Leftrightarrow A$的有一个$r$阶子式不为0, 而所有$r+1$ 阶子式全为0.

k阶子式

矩阵A中任取k行k列，位于这些行列交叉处的元素按原来的顺序组成的一个k阶行列式称为A的k 阶子式.

定理3.1

1. 若A的某一个r阶子式不为0, 则$r(A) \geq r$;
2. 若A的所有$r+1$ 阶子式全为0, 则$r(A) \leq r$.

定义2—矩阵的秩

$r(A) = r \Leftrightarrow A$的有一个$r$阶子式不为0, 而所有$r+1$ 阶子式全为0.

例1 $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

例2 若P可逆，则$r(PA) = r(A)$.

例3 若P,Q可逆，则$r(PAQ) = r(A)$. 即初等变换不改变矩阵的秩.

定义3—矩阵的秩

矩阵A的秩就是A的标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$中非零行的行数.

定理3.2

1. 同阶矩阵A和B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.
2. n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A) = n$.

例1 $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

例2 若P可逆, 则$r(PA) = r(A)$.

例3 若P,Q可逆, 则$r(PAQ) = r(A)$. 即初等变换不改变矩阵的秩.

定义3—矩阵的秩

矩阵A的秩就是A的标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$中非零行的行数.

定理3.2

1. 同阶矩阵A和B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.
2. n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A) = n$.

例1 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

例2 若P可逆, 则$r(PA) = r(A)$.

例3 若P, Q可逆, 则$r(PAQ) = r(A)$. 即初等变换不改变矩阵的秩.

定义3—矩阵的秩

矩阵A的秩就是A的标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$中非零行的行数.

定理3.2

1. 同阶矩阵A和B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.
2. n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A) = n$.

例1 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

例2 若P可逆, 则$r(PA) = r(A)$.

例3 若P, Q可逆, 则$r(PAQ) = r(A)$. 即初等变换不改变矩阵的秩.

定义3—矩阵的秩

矩阵A的秩就是A的标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$中非零行的行数.

定理3.2

1. 同阶矩阵A和B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.
2. n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A) = n$.

3. 矩阵的秩—定义3

例1 $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

例2 若P可逆, 则$r(PA) = r(A)$.

例3 若P, Q可逆, 则$r(PAQ) = r(A)$. 即初等变换不改变矩阵的秩.

定义3—矩阵的秩

矩阵A的秩就是A的标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$中非零行的行数.

定理3.2

1. 同阶矩阵A和B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.
2. n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A) = n$.

例1 $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

例2 若P可逆，则$r(PA) = r(A)$.

例3 若P, Q可逆，则$r(PAQ) = r(A)$. 即初等变换不改变矩阵的秩.

定义3—矩阵的秩

矩阵A的秩就是A的标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$中非零行的行数.

定理3.2

1. 同阶矩阵A和B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.
2. n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow r(A) = n$.

秩的不等式

(1) $r(A_{m\times n}) \leq \min(m,n)$

(2) $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$.

(3) $r(A \vdots B) \leq r(A) + r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$.

例4 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m < n$. 若$AB = E$, 证明: B的列向量组线性无关.

例5 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m < n$. 证明: $|BA| = 0$.

秩的不等式

(1) $r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$

(2) $r(A\pm B) \le r(A)+r(B)$.

(3) $r(A\vdots B) \le r(A)+r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B)$.

例4 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 若$AB=E$, 证明: B的列向量组线性无关.

例5 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 证明: $|BA|=0$.

秩的不等式

(1) $r(A_{m\times n}) \leq \min(m,n)$

(2) $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$.

(3) $r(A \vdots B) \leq r(A) + r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$.

例4 设A是$m \times n$矩阵, B是$n \times m$矩阵, 其中$m < n$. 若$AB = E$, 证明: B的列向量组线性无关.

例5 设A是$m \times n$矩阵, B是$n \times m$矩阵, 其中$m < n$. 证明: $|BA| = 0$.

秩的不等式

(1) $r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$

(2) $r(A\pm B) \le r(A)+r(B)$.

(3) $r(A\vdots B) \le r(A)+r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B)$.

例4 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 若$AB=E$, 证明: B的列向量组线性无关.

例5 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 证明: $|BA|=0$.

秩的不等式

(1) $r(A_{m\times n}) \leq \min(m,n)$

(2) $r(A\pm B) \leq r(A)+r(B)$.

(3) $r(A \vdots B) \leq r(A)+r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B)$.

例4 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 若$AB=E$, 证明: B的列向量组线性无关.

例5 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 证明: $|BA|=0$.

秩的不等式

(1) $r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$

(2) $r(A \pm B) \le r(A) + r(B)$.

(3) $r(A\vdots B) \le r(A) + r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$.

例4 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 若$AB=E$, 证明: B的列向量组线性无关.

例5 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 其中$m<n$. 证明: $|BA|=0$.

Summary

1. 主要内容:

   (1) 重要概念: 矩阵的秩的三种等价定义;
   (2) 方阵满秩$\Leftrightarrow$方阵可逆; 矩阵列满秩$\Leftrightarrow$列向量组线性无关.
   (3) 秩的不等式.

2. 主要题型:

   (1) 求矩阵的秩(见本章第五块内容).
   (2) 秩的不等式的应用.

Summary

1. 主要内容:

   (1) 重要概念: 矩阵的秩的三种等价定义;
   (2) 方阵满秩$\Leftrightarrow$方阵可逆; 矩阵列满秩$\Leftrightarrow$列向量组线性无关.
   (3) 秩的不等式.

2. 主要题型:

   (1) 求矩阵的秩(见本章第五块内容).
   (2) 秩的不等式的应用.

目录

一般地, 阶梯形矩阵形如(其中拐角处元素$b_{ij_i} \neq 0$)

$$B = \begin{pmatrix} b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_3-1} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_3-1} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

简化阶梯形矩阵

简化阶梯形矩阵形如(其中拐角处元素全为1，拐角处以上元素全为0)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & c_{1j_2-1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{2j_3-1} & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

思考：C的秩？极大无关组？其余向量关于极大无关组的表示式？

简化阶梯形矩阵

简化阶梯形矩阵形如(其中拐角处元素全为1, 拐角处以上元素全为0)

$$C=\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \cdots & c_{1j_2-1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & \cdots & c_{2j_3-1} & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \color{red}{1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

思考: C的秩? 极大无关组? 其余向量关于极大无关组的表示式?

计算原理

Facts—计算原理

1. 使用初等行变换，任何矩阵都可以化为简化阶梯形. (先化为阶梯形，再化为简化阶梯形).

2. 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性关系.

计算原理

Facts—计算原理

1. 使用初等行变换, 任何矩阵都可以化为简化阶梯形. (先化为阶梯形, 再化为简化阶梯形).
2. 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性关系.

1. 矩阵及向量组的秩:

(1) 利用行变换化为阶梯形.
$A \longrightarrow B$(阶梯形) $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $r(A) = r(B)$

(2) 将向量组写成列形式, 作行变换化为阶梯形(同上).

2. 计算秩判定向量组的线性关系:

(1) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关.

1. 矩阵及向量组的秩:

(1) 利用行变换化为阶梯形.

$A \longrightarrow B(\text{阶梯形}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r(A) = r(B)$

(2) 将向量组写成列形式, 作行变换化为阶梯形(同上).

2. 计算秩判定向量组的线性关系:

(1) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关.

本章基本计算问题

1. 矩阵及向量组的秩:

(1) 利用行变换化为阶梯形.

$A \longrightarrow B$(阶梯形) .... $r(A) = r(B)$

(2) 将向量组写成列形式, 作行变换化为阶梯形(同上).

2. 计算秩判定向量组的线性关系:

(1) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关.

1. 矩阵及向量组的秩:

(1) 利用行变换化为阶梯形.

$A \longrightarrow B$(阶梯形) .... $r(A) = r(B)$

(2) 将向量组写成列形式, 作行变换化为阶梯形(同上).

2. 计算秩判定向量组的线性关系:

(1) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关.

本章基本计算问题

1. 矩阵及向量组的秩:

(1) 利用行变换化为阶梯形.
$A \longrightarrow B$(阶梯形) .... $r(A) = r(B)$

(2) 将向量组写成列形式, 作行变换化为阶梯形(同上).

2. 计算秩判定向量组的线性关系:

(1) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关.

1. 矩阵及向量组的秩:

(1) 利用行变换化为阶梯形.
$A \longrightarrow B$(阶梯形) .... $r(A) = r(B)$

(2) 将向量组写成列形式, 作行变换化为阶梯形(同上).

2. 计算秩判定向量组的线性关系:

(1) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 如果$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < n$, 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关.

例

例1 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -a^2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 决定$a$的值, 使$r(A)=2$.

例2 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$r(A)$.

例1 设$A=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\-1&0&-a^2&2\\0&1&1&a\end{pmatrix}$, 决定$a$的值, 使$r(A)=2$.

例2 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}$, 求$r(A)$.

3. 线性表示:
向量β关于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的表示问题的计算格式:

$$(\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \ \vdots\ \beta\ ) \longrightarrow (\ C\ \vdots\ \tilde{\beta}\ )$$

(写成列形式, 作行变换, 化为简化阶梯形)

(1) 若$r(C) \neq r(\ C\ \vdots\ \tilde{\beta}\ )$, 则$\beta$不能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表示;

(2) 若$r(C) = r(\ C\ \vdots\ \tilde{\beta}\ )$, 则$\beta$能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表示, 且表示式与$\tilde{\beta}$关于$C$的列向量的表示式一致.

3. 线性表示:
向量β关于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的表示问题的计算格式:

$$(\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \ \vdots\ \beta\ ) \longrightarrow (\ C \ \vdots\ \tilde{\beta}\ )$$

(写成列形式, 作行变换, 化为简化阶梯形)

(1) 若$r(C) \neq r(\ C\ \vdots\ \tilde{\beta}\ )$, 则$\beta$不能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表示;

(2) 若$r(C) = r(\ C\ \vdots\ \tilde{\beta}\ )$, 则$\beta$能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表示, 且表示式与$\tilde{\beta}$关于$C$的列向量的表示式一致.

3. 线性表示:

向量β关于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的表示问题的计算格式:

$$(\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \ \vdots \ \beta\ ) \longrightarrow (\ C \ \vdots \ \tilde{\beta}\ )$$

(写成列形式, 作行变换, 化为简化阶梯形)

(1) 若$r(C) \neq r(\ C \ \vdots \ \tilde{\beta}\ )$, 则$\beta$不能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表示;

(2) 若$r(C) = r(\ C \ \vdots \ \tilde{\beta}\ )$, 则$\beta$能被$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表示, 且表示式与$\tilde{\beta}$关于$C$的列向量的表示式一致.

4. 极大线性无关组:

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \longrightarrow (\beta_1, \cdots, \beta_n) = C$$

(写成列形式, 作行变换, 化为简化阶梯形)

因此, 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的极大线性无关组、秩及其线性表示与$C$中对应的列向量组一致.

例

例3 求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

的秩及其一个极大无关组, 并用该极大无关组来表示其余的向量.

例4 设$\alpha_1 = (1,2,1)^T, \alpha_2 = (2,-2,3)^T, \alpha_3 = (4,3,4)^T$ 判断β能否被$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

例

例3 求向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$$

的秩及其一个极大无关组，并用该极大无关组来表示其余的向量.

例4 设$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,-2,3)^T,\alpha_3=(4,3,4)^T$ 判断β能否被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.