二、收敛数列的主要性质

1.（极限的唯一性）如果数列$\{a_n\}$收敛，那么它的极限是唯一的.

证：用反证法．假设收敛数列$\{a_n\}$的极限不唯一，即有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$，且$A \neq B$，于是对于某个$\varepsilon = \frac{|A-B|}{2}$，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$可知，存在正整数$N_1$，当$n > N_1$时，有

$$|a_n - A| < \frac{|A-B|}{2} \qquad (1)$$

同理，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$可知，存在正整数$N_2$，当$n > N_2$时，有

$$|a_n - B| < \frac{|A-B|}{2} \qquad (2)$$

当$n > N_1$时，

$$|a_n - A| < \frac{|A-B|}{2} \qquad (1)$$

当$n > N_2$时，

$$|a_n - B| < \frac{|A-B|}{2} \qquad (2)$$

取$N = \max(N_1, N_2)$，当$n > N$时，(1)与(2)式都成立，于是

$$\begin{aligned} |A-B| &= |A - a_n + a_n - B| \\ &\le |A - a_n| + |a_n - B| \\ &< \frac{|A-B|}{2} + \frac{|A-B|}{2} = |A-B| \end{aligned}$$

即$|A-B| < |A-B|$，这是一个矛盾的结果.

为此就证明了$A \neq B$的假设不成立，所以唯一性得证.

例5 证明数列$a_n = (-1)^n (n = 1, 2, \cdots)$是发散的.

证：如果这数列收敛，根据数列极限的唯一性，它有唯一的极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = A$，由数列极限的定义可得，对于$\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数$N$，当$n > N$时，有$|(-1)^n - A| < \frac{1}{2}$成立，即当$n > N$时，$(-1)^n$都在开区间$(A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2})$内，$(A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2})$开区间的长度为1.

因为$(-1)^n$无休止地反复取-1，1这两个数，而这两个数不可能同时属于长度为1的开区间内.

因此，数列$\{(-1)^n\}$是发散的.

2.（收敛数列的有界性）如果数列$\{a_n\}$收敛，那么数列$\{a_n\}$必有界.

证：由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$可知，对于任意给定的正数$\varepsilon$，存在正整数$N$，当$n > N$时，有$|a_n - A| < \varepsilon$.

取$\varepsilon = 1$，$\exists$正整数N_1，当$n > N_1$时，有$|a_n - A| < 1$，于是

$$|a_n| = |a_n - A + A| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_1}|, 1 + |A|),$$

则对一切n，有$|a_n| \le M$成立．因此收敛数列必有界.

注意：根据上面结论，如果数列$\{a_n\}$无界，那么数列一定发散．但是，如果数列$\{a_n\}$有界，却不能断定数列$\{a_n\}$一定收敛.

例如，数列$\{(-1)^n\}$，显然此数列是有界的，但它不收敛．因此数列有界只是数列收敛的必要条件.

3.（收敛数列的保号性）若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，且$A > 0$(或$A < 0$)，则存在正整数$N$，当$n > N$时，有$a_n > 0$(或$a_n < 0$).

证：就$A > 0$的情形给出证明．由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，对于$\varepsilon = \frac{A}{2}$，存在正整数$N$，当$n > N$时，于是有$|a_n - A| < \frac{A}{2}$，即得$\frac{A}{2} < a_n < \frac{3A}{2}$，从而$a_n > 0$．证毕.

对于$A < 0$的情况类似可证.

推论 如果数列$\{a_n\}$从某项起有$a_n \ge 0$(或$a_n \le 0$)，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，那么$A \ge 0$(或$A \le 0$).

利用反证法，根据保号性容易得此推论.

4. 收敛数列的任一子数列收敛于同一极限 .

证: 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 .

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

现取正整数 K, 使 $n_K \ge N$, 于是当 $k > K$ 时, 有

$$n_k > n_K \ge N$$

x_N　　x_{n_K}

****

N　　n_K

从而有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, 由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

说明:

由此性质可知 , 若数列有两个子数列收敛于不同的极限 , 则原数列一定发散 .

例如,

$$x_n = (-1)^{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)\ \text{发散 !}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1; \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$$