第三节 格林公式及其应用

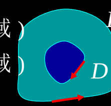
第十章

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

一、 格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases}\text{单连通区域 (无“洞”区域)}\\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)}\end{cases}$



域 D 边界L 的**正向: 域的内部靠左**

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

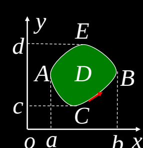
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ （格林公式）

或 $$\iint_D \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证明: 1) 若D 既是 X - 型区域 , 又是 Y - 型区域 , 且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\widehat{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\widehat{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\widehat{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\widehat{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

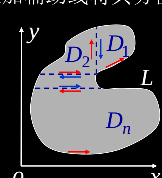
同理可证

$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件, 则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域 , 如图



$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^n\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^n\oint_{\partial D_k}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ (∂D_k表示 D_k的正向边界)

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ 证毕

格林公式 $$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

推论: 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$, $0\le\theta\le2\pi$ 所围面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

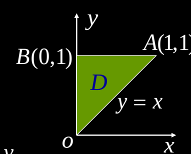
利用格林公式 , 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .

解: 令 $P = 0,\ Q = xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$$



利用格林公式 , 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} x e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overline{OA}} x e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

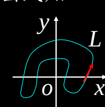
例3. 计算 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

则当$x^2 + y^2 \neq 0$时, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时, 由格林公式知

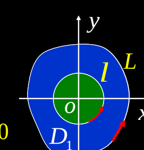
$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0$$



当$(0,0) \in D$时, 在D 内作圆周 $l: x^2 + y^2 = r^2$, 取逆时针方向, 记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1 , 对区域 D_1 应用格林公式 , 得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

$$= \oint_{L + l^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$



$$\therefore \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D 是单连通域 , 函数 $P(x,y), Q(x,y)$在D 内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿D 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

(2) 对D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 只与起止点有关.

(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分, 即 $\mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

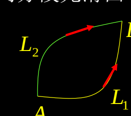
证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)

设 L_1, L_2为D 内任意两条由A 到B 的有向分段光滑曲线, 则

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{L_1 + L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(根据条件(1))}$$



$$\therefore \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

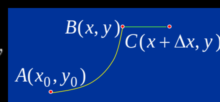
说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明 (2) ⟹ (3)

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$



则 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y)-u(x,y)$

$$=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,\mathrm{d}x$$

$$=P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x, y)=P(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, 因此有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) ⟹ (4)

设存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$$\therefore\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

P, Q 在 D 内具有连续的偏导数, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

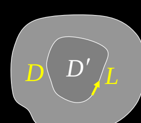
从而在D内每一点都有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

证明 (4) ⟹ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线, 所围区域为 $D'\subset D$ (如图), 因此在 D'上

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$$



利用**格林公式**, 得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0$$

证毕

说明: 根据定理2, 若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 则

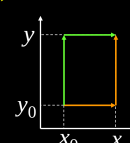
1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算,
   若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线;

3) 可用积分法求$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在域 D 内的原函数:
   取定点$(x_0,y_0)\in D$及动点$(x,y)\in D$, 则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $u(x,y)=\displaystyle\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$

例4. 计算 $\displaystyle\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O\,(0,0)$ 到 $A\,(4,0)$.

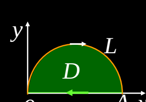
解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L 所围区域为D, 则

$$\text{原式}=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}$$



例5. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证: 设$P=xy^2,\ Q=x^2y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

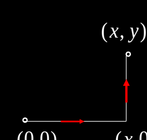
由定理2 可知, 存在函数 $u(x,y)$ 使

$$\mathrm{d}u=xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$$

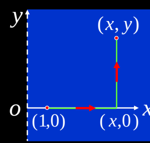
$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2$$



例6. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 ($x>0$) 内存在原函数，并求出它.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\quad(x>0)$

由**定理 2** 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=-\int_1^x 0\cdot\mathrm{d}x+x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\quad(x>0)$$

或

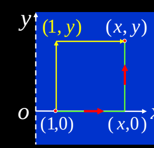
$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-y\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

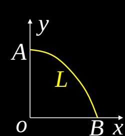
$$=\arctan y+\arctan\frac{1}{y}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\arctan\frac{y}{x}\quad(x>0)$$



例7. 设质点在力场 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L : $y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\dfrac{\pi}{2},0)$, 求力场所作的功 W (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



解: $W=\int_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int_L\dfrac{k}{r^2}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$

令 $P=\dfrac{ky}{r^2}$, $Q=-\dfrac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad(x^2+y^2\neq 0)$$

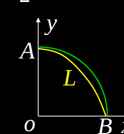
可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\widehat{AB}$: $x=\dfrac{\pi}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\ \ (\theta:\dfrac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\widehat{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}k$$



思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关 !

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

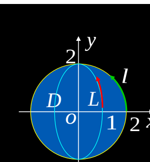
$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

思考与练习

1. 设 $L: x^2+\frac{1}{4}y^2=1$, $l: x^2+y^2=4$, 且都取正向, 问下列计算是否正确 ?



(1) $\displaystyle\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\cancel{=}\oint_l\frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 5\,\mathrm{d}\sigma=5\pi$

(2) $\displaystyle\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma$

$=2\pi$ ✓

提示: $x^2+y^2\neq 0$ 时

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\neq\dfrac{\partial P}{\partial y}$

(2) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

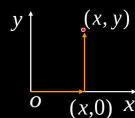
2. 设 $\operatorname{grad} u(x,y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$，求 $u(x,y)$.

提示: $\mathrm{d}\,u(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^x x^4\,\mathrm{d}x + \int_0^y (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y + C$$

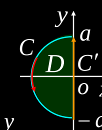
$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5 + C$$



备用题 1. 设 C 为沿 $x^2 + y^2 = a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆, 计算

$$\int_C \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x + \left[ax + 2y\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})\,\right]\mathrm{d}y$$

解: 添加辅助线如图，利用格林公式.



原式 $= \int_{C+C'} - \int_{C'}$

$$= \iint_D \left[a + \cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}} - \cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$- \int_{-a}^{a} (\cancel{2y\ln a})\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^3$$

2. 质点M 沿着以AB为直径的半圆, 从 $A(1,2)$ 运动到点$B(3,4)$, 在此过程中受力 $\vec{F}$ 作用, $\vec{F}$ 的大小等于点 M 到原点的距离, 其方向垂直于OM, 且与y 轴正向夹角为锐角, 求变力 $\vec{F}$ 对质点M 所作的功. (90考研)

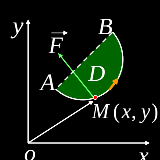
解: 由图知 $\vec{F} = (-y, x)$, 故所求功为

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\overset{\frown}{AB}} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}} + \int_{\overline{AB}}\right)(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$$

$$= 2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^3 [-(x+1) + x]\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi - 2$$



$\overline{AB}$的方程

$y = 2 + \frac{4-3}{3-1}(x-1)$