第五节 对坐标的曲面积分

第十章

一、有向曲面及曲面元素的投影

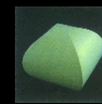
二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

三、对坐标的曲面积分的计算法

四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

• 曲面分类 $\begin{cases}\text{双侧曲面}\\ \text{单侧曲面}\end{cases}$

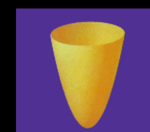


曲面分内侧和外侧

莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)

曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量指向表示：

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

• 设 Σ 为有向曲面, 其面元 ΔS 在 xoy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}\ge 0$, 则规定

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

类似可规定 $(\Delta S)_{yz}$, $(\Delta S)_{zx}$

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量 Φ .

分析: 若 Σ 是面积为 S 的平面,

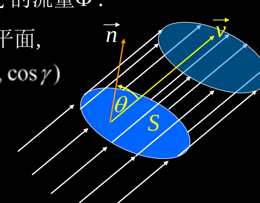
法向量: $\vec{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量

$$\Phi=S\cdot|\vec{v}|\cos\theta$$

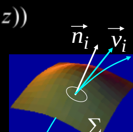
$$=S\,\vec{v}\cdot\vec{n}$$



对一般的有向曲面 Σ , 对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$



设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$, 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

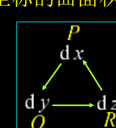
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

2. 定义. 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, 若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



P, Q, R 叫做被积函数; Σ 叫做积分曲面.

$\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 称为P 在有向曲面Σ上**对 y, z 的曲面积分;**

$\iint_\Sigma Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ 称为Q 在有向曲面Σ上**对 z, x 的曲面积分;**

$\iint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 称为R 在有向曲面Σ上**对 x, y 的曲面积分.**

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若记 Σ **正侧**的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

$\vec{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式

$$\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(1) 若 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k}\Sigma_i$, 且 Σ_i 之间无公共内点, 则

$$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{k}\iint_{\Sigma_i}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 用Σ^- 表示 Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理: 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$ 取上侧, $R(x,y,z)$是 Σ 上的连续函数, 则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证: $\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

$\because \Sigma$ 取上侧, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i, z(\xi_i,\eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$
$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若$\Sigma: x = x(y,z), (y,z)\in D_{yz}$, 则有

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

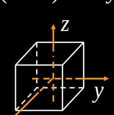
(前正后负)

- 若$\Sigma: y = y(z,x), (z,x)\in D_{zx}$, 则有

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x, y(z,x), z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

例1. 计算 $\iint_\Sigma (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

原式 $= 3\iint_\Sigma (z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z = \frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2})$ 取上侧

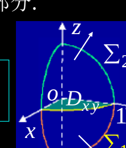
Σ 的底部 $\Sigma_2: z = -\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2})$ 取下侧

$$= 3\left[\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$
$$= 3\left[\iint_{D_{xy}}\left(\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}}\left(-\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$
$$= 3a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3a^3$$

例2. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第八卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

$\boxed{\text{根据对称性 } \iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0}$



解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases}\Sigma_1: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}\\ \Sigma_2: z = \sqrt{1-x^2-y^2}\end{cases}$$

$$(x,y)\in D_{xy}: \begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$$

$$\therefore \iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

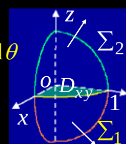
$$= -\iint_{D_{xy}} xy\,(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2/15$$



例3. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算

$$I = \iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y} - \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

解: 利用轮换对称性，有

$$\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x} = \iint_S \frac{2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z},\quad \iint_S \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y} = \iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos^2 z} = 0$$

$$\therefore I = \iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z} = 2\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\,\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\,\cos^2\sqrt{1-r^2}} = -4\pi\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$= 4\pi\tan 1$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\,]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\,]\Delta S_i$$

$$= \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\vec{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

向量形式 $\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

$A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}$ ($\vec{A}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影)

$$= \iint_\Sigma A_n\,\mathrm{d}S$$

例4. 设 $\Sigma: z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I = \iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.

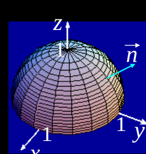
解: $I = \iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

$$= \iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

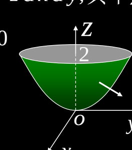
$$= \iint_{D_{xy}} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



例5. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

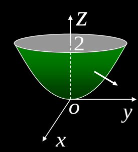
$$= \iint_\Sigma (z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_\Sigma (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}$$

$$\therefore\ \text{原式} = \iint_\Sigma [(z^2+x)(-x) - z\,]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入, 得



原式 $= -\iint_{D_{xy}} \{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x](-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \iint_{D_{xy}} [x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 (r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= 8\pi$$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$
- $\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

性质: $\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= -\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

思考:

两类曲线积分的定义一个与 Σ 的方向无关, 一个与 Σ 的方向有关, 上述联系公式是否矛盾 ?

2. 常用计算公式及方法

面积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{转化}}$ 二重积分

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程
(方程不同时分片积分)

(2) 积分元素投影 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类:　面积投影}\\ \text{第二类:　有向投影}\end{array}\right.$

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注: 二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma: z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$ 时,

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上侧取 "+", 下侧取 "−")

类似可考虑在 *yoz* 面及 *zox* 面上的二重积分转化公式 .

备用题　求 $I=\oiint_\Sigma(\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z})$, 其中

$\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 取外侧 .

解: $\oiint_\Sigma \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z} = \frac{2}{c}\iint_{D_{x,y}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　注意±号

$D_{x,y}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{c^2}\cdot 4\pi abc$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z} = \frac{1}{c^2}\cdot 4\pi abc$$

利用轮换对称性

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi abc$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{b^2}\cdot 4\pi abc$$

$$\therefore\quad I = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$