第七章

# 第二节 数量积 向量积 *混合积

一、两向量的数量积

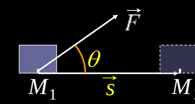
二、两向量的向量积

三、向量的混合积

## 一、两向量的数量积

**引例.** 设一物体在常力 $\vec F$ 作用下, 沿与力夹角为 $\theta$ 的直线移动, 位移为 $\vec s$, 则力 $\vec F$ 所做的功为

$$W=|\vec F||\vec s|\cos\theta$$




**1. 定义**

设向量 $\vec a,\vec b$ 的夹角为 $\theta$, 称

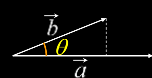
$$|\vec a||\vec b|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \vec a\cdot\vec b$$

$$\boxed{W=\vec F\cdot\vec s}$$

为 $\vec a$ 与 $\vec b$ 的数量积 (点积) .

当 $\vec a\ne\vec 0$ 时, $\vec b$ 在 $\vec a$ 上的投影为

$$|\vec b|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \mathrm{Prj}_{\vec a}\vec b$$




故 $\quad \vec a\cdot\vec b=|\vec a|\,\mathrm{Prj}_{\vec a}\vec b$

同理, 当 $\vec b\ne\vec 0$ 时,

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec b|\,\mathrm{Prj}_{\vec b}\vec a$$

**2. 性质**

(1) $\vec a\cdot\vec a=|\vec a|^2$

(2) $\vec a,\vec b$ 为两个非零向量, 则有

$$\vec a\cdot\vec b=0 \Longleftrightarrow \vec a\perp\vec b$$

$\vec a\ne\vec 0,\ \vec b\ne\vec 0$

则 $\vec a\cdot\vec b=0$

$\Updownarrow$

$(\widehat{\vec a,\vec b})=\dfrac{\pi}{2}$

**3. 运算律**

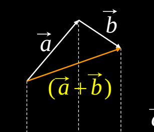
(1) 交换律 $\vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a$

(2) 结合律 ($\lambda,\mu$ 为实数)

$$(\lambda\vec a)\cdot\vec b=\vec a\cdot(\lambda\vec b)=\lambda(\vec a\cdot\vec b)$$

$$(\lambda\vec a)\cdot(\mu\vec b)=\lambda(\vec a\cdot(\mu\vec b))=\lambda\mu(\vec a\cdot\vec b)$$

(3) 分配律 $(\vec a+\vec b)\cdot\vec c=\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c$




$\mathrm{Prj}_{\vec c}\vec a\ \ \mathrm{Prj}_{\vec c}\vec b$

$\mathrm{Prj}_{\vec c}(\vec a+\vec b)$

事实上, 当 $\vec c=\vec 0$ 时, 显然成立 ; 当 $\vec c\ne\vec 0$ 时

$$(\vec a+\vec b)\cdot\vec c=|\vec c|\,\mathrm{Prj}_{\vec c}(\vec a+\vec b)=|\vec c|\,(\mathrm{Prj}_{\vec c}\vec a+\mathrm{Prj}_{\vec c}\vec b)$$

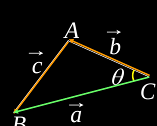
$$=|\vec c|\,\mathrm{Prj}_{\vec c}\vec a+|\vec c|\,\mathrm{Prj}_{\vec c}\vec b=\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c$$

**例1.** 证明三角形余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

**证:** 如图 . 设

$$\overrightarrow{CB}=\vec a,\quad \overrightarrow{CA}=\vec b,\quad \overrightarrow{AB}=\vec c$$




则 $\quad \vec c=\vec a-\vec b$

$$|\vec c|^2=(\vec a-\vec b)\cdot(\vec a-\vec b)=\vec a\cdot\vec a+\vec b\cdot\vec b-2\vec a\cdot\vec b$$

$$=|\vec a|^2+|\vec b|^2-2|\vec a||\vec b|\cos\theta$$

$\Big\downarrow\ a=|\vec a|,\ b=|\vec b|,\ c=|\vec c|$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

**4. 数量积的坐标表示**

设 $\vec a=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k,\ \vec b=b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k$, 则

$$\vec a\cdot\vec b=(a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k)\cdot(b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k)$$

$\Big\downarrow\ \vec i\cdot\vec i=\vec j\cdot\vec j=\vec k\cdot\vec k=1,\quad \vec i\cdot\vec j=\vec j\cdot\vec k=\vec k\cdot\vec i=0$

$$\vec a\cdot\vec b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

两向量的夹角公式

当 $\vec a,\ \vec b$ 为非零向量时, 由于 $\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta$, 得

$$\cos\theta=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

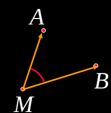
**例2.** 已知三点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$ .

**解:** $\overrightarrow{MA}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{MB}=(1,\ 0,\ 1)$

则 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$

$=\dfrac{1+0+0}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

故 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$

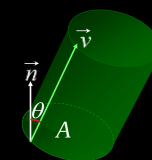



**例3.** 设均匀流速为 $\vec{v}$ 的流体流过一个面积为 $A$ 的平面域，且 $\vec{v}$ 与该平面域的单位垂直向量 $\vec{n}$ 的夹角为 $\theta$, 求单位时间内流过该平面域的流体的质量 $P$ (流体密度为 $\rho$).

**解:** $P=\rho A\,|\vec{v}|\cos\theta$

$\vec{n}$ 为单位向量

$=\rho A\,\vec{v}\cdot\vec{n}$




单位时间内流过的体积

$A\,|\vec{v}|\cos\theta$

## 二、两向量的向量积

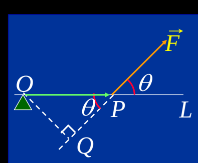
**引例.** 设 $O$ 为杠杆 $L$ 的支点，有一个与杠杆夹角为 $\theta$ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 $P$ 点上，则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩是一个向量 $\vec{M}$:

$|\vec{M}|=|OQ||\vec{F}|=|\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$

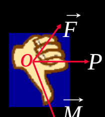
$\overrightarrow{OP}\Rightarrow\vec{F}\Rightarrow\vec{M}$ 符合右手规则

$\vec{M}\perp\overrightarrow{OP}$

$\vec{M}\perp\vec{F}$




$|OQ|=|\overrightarrow{OP}|\sin\theta$




**1. 定义**

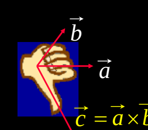
设 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\theta$, 定义

向量 $\vec{c}$ $\begin{cases}\text{方向}: \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}\ \text{且符合右手规则}\\ \text{模}: |\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积，记作

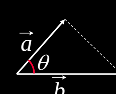
$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ (叉积)

引例中的力矩 $\vec{M}=\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$




**思考:** 右图三角形面积

$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$




**2. 性质**

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

**证明:** 当 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$ 时,

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$

$\Longleftrightarrow\sin\theta=0$, 即 $\theta=0$ 或 $\pi\Longleftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

**3. 运算律**

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(证明略)

**4. 向量积的坐标表示式**

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

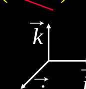
$=\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})$

$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})$

$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}$

$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$

$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$



## 向量积的行列式计算法

$$\vec a\times\vec b=(a_yb_z-a_zb_y)\vec i+(a_zb_x-a_xb_z)\vec j+(a_xb_y-a_yb_x)\vec k$$

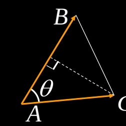
$$=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec a&=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k\\ \vec b&=b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k\end{aligned}}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right)$$

**例4.** 已知三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$, 求三角形 $ABC$ 的面积

**解:** 如图所示,




$$S_{\Delta ABC}=\frac12|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$=\frac12|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$=\frac12\left|\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}\right|=\frac12|(4,-6,\ 2)|$$

$$=\frac12\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

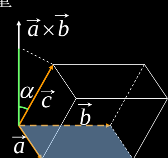
## *三、向量的混合积

**1. 定义** 已知三向量 $\vec a,\vec b,\vec c$, 称数量

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c\ \xlongequal{记作}\ [\vec a\,\vec b\,\vec c]$$

为 $\vec a,\vec b,\vec c$ 的**混合积**.

**几何意义**




以 $\vec a,\vec b,\vec c$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A=|\vec a\times\vec b|$, 高 $h=|\vec c||\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V=Ah=|\vec a\times\vec b|\,|\vec c|\,|\cos\alpha|=|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$$

$$=|[\vec a\,\vec b\,\vec c]|$$

## 2. 混合积的坐标表示

设 $\vec a=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec b=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec c=(c_x,c_y,c_z)$

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec a\,\vec b\,\vec c]=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

## 3. 性质

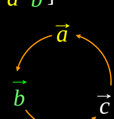
(1) 三个非零向量 $\vec a,\vec b,\vec c$ 共面的充要条件是

$$[\vec a\,\vec b\,\vec c]=0$$

(2) 轮换对称性:

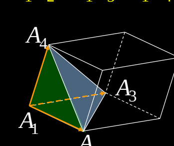
$$[\,\vec a\ \vec b\ \vec c\,]=[\,\vec b\ \vec c\ \vec a\,]=[\,\vec c\ \vec a\ \vec b\,]$$

(可用三阶行列式推出)




**例6.** 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k,y_k,z_k)$ $(k=1,2,3,4)$, 求该四面体体积.

**解:** 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac16$, 故



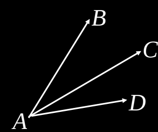

$$V=\frac16\left|[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}]\right|$$

$$=\frac16\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\\x_4-x_1&y_4-y_1&z_4-z_1\end{vmatrix}\right|$$

**例7.** 证明四点 $A(1,1,1)$, $B(4,5,6)$, $C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$ 共面 .

**解:** 因

$$[\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\ ] = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$




故 $A, B, C, D$ 四点共面 .

## 内容小结

设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z), \vec{b}=(b_x, b_y, b_z), \vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

混合积: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 向量关系:

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$

## 思考与练习

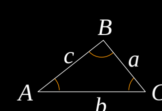
1. 设 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, 计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$, 并求 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角 $\theta$ 的正弦与余弦 .

**答案:** $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\quad \vec{a}\times\vec{b}=(1, 1, 3)$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $\quad \sin\theta=\sqrt{\dfrac{11}{12}}$

2. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



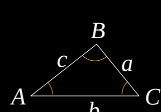

**证:** 由三角形面积公式

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|$$

因 $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}| = b\cdot c\cdot\sin A$

$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}| = c\cdot a\cdot\sin B$

$|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}| = a\cdot b\cdot\sin C$




所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

## 备用题

**1.** 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$, 且 $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=3$, 求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

**解:** $\because\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

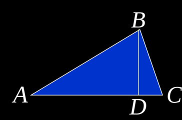
$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cos\dfrac{3\pi}{4}+3^2$

$=17$

$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$

**2.** 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 $AC$ 边上的高 $BD$.




**解：** $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 $ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}\;=1$$

而 $\quad |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$

故有 $\quad 1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD| \qquad \therefore\ |BD|=\frac{2}{5}$