线性代数

第二章　　矩阵

主讲人：张远征、张震峰、钱晓明

上海财经大学应用数学系

May 31, 2010

本章的研究内容

1. 矩阵的定义及其运算, 矩阵是线性代数的主要研究对象;
2. 逆矩阵的概念, 这是线性代数的一个核心概念;
3. 矩阵的初等变换及相应的初等矩阵, 初等变换为本课程提供了最基本的计算方法;
4. 对矩阵作分块, 以便于矩阵的运算.

本章的研究内容

1. 矩阵的定义及其运算，矩阵是线性代数的主要研究对象；
2. 逆矩阵的概念，这是线性代数的一个核心概念；
3. 矩阵的初等变换及相应的初等矩阵，初等变换为本课程提供了最基本的计算方法；
4. 对矩阵作分块，以便于矩阵的运算.

本章的研究内容

本章的研究内容

1. 矩阵的定义及其运算，矩阵是线性代数的主要研究对象;
2. 逆矩阵的概念，这是线性代数的一个核心概念;
3. 矩阵的初等变换及相应的初等矩阵，初等变换为本课程提供了最基本的计算方法;
4. 对矩阵作分块，以便于矩阵的运算.

本章的研究内容

1. 矩阵的定义及其运算，矩阵是线性代数的主要研究对象；
2. 逆矩阵的概念，这是线性代数的一个核心概念；
3. 矩阵的初等变换及相应的初等矩阵，初等变换为本课程提供了最基本的计算方法；
4. 对矩阵作分块，以便于矩阵的运算.

本章内容的特点和难点

1. 特点: 概念多, 运算规律多.
2. 难点: 初等变换与初等矩阵.
3. 要点: 注意矩阵运算规律的一些特殊性.

本章内容的特点和难点

1. 特点: 概念多, 运算规律多.
2. 难点: 初等变换与初等矩阵.
3. 要点: 注意矩阵运算规律的一些特殊性.

本章内容的特点和难点

1. 特点: 概念多, 运算规律多.
2. 难点: 初等变换与初等矩阵.
3. 要点: 注意矩阵运算规律的一些特殊性.

矩阵

由$m \times n$个数$a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$按一定次序排列成$m$行$n$列的矩形表格

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$阶矩阵. 简记$A=(a_{ij})_{m\times n}$, 或$A_{m\times n}$.

2. 特殊矩阵

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

特殊矩阵

(1) 行矩阵　$m = 1$

(2) 列矩阵　$n = 1$

(3) 方阵　$m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵　$a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵　$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵　$a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵　$\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵　所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

2. 特殊矩阵

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

2. 特殊矩阵

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

2. 特殊矩阵

特殊矩阵

(1) 行矩阵　$m = 1$

(2) 列矩阵　$n = 1$

(3) 方阵　$m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵　$a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵　$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵　$a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵　$\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵　所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

2. 特殊矩阵

特殊矩阵

(1) 行矩阵 $m = 1$

(2) 列矩阵 $n = 1$

(3) 方阵 $m = n$, 记$A = (a_{ij})_n$, 或A_n

(4) 上(下)三角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$

(5) 对角矩阵 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(6) 数量矩阵 $a_{ii} = \lambda$的对角矩阵

(7) 单位矩阵 $\lambda = 1$的数量矩阵, 记I_n, 或E_n

(8) 零矩阵 所有元素都是零的矩阵, 记$O_{m\times n}$, 或O

矩阵的相等

矩阵的相等

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 如果

$$a_{ij}=b_{ij},\quad \forall i,j$$

则矩阵A与B相等, 记为$A=B$.

(1)加减法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 交换律: $A+B=B+A$

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 其他: $A+O=A$, $A-A=O$

(1)加减法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 交换律: $A+B=B+A$

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 其他: $A+O=A$, $A-A=O$

(1)加减法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 交换律: $A+B=B+A$

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 其他: $A+O=A$, $A-A=O$

(1)加减法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 交换律: $A+B=B+A$

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 其他: $A+O=A$, $A-A=O$

(1)加减法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 交换律: $A+B=B+A$

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 其他: $A+O=A$, $A-A=O$

(2)数乘

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$以及数k，定义

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 第一分配律: $k(A+B)=kA+kB$

(2) 第二分配律: $(k+l)A=kA+lA$

(3) 结合律: $(kl)A=k(lA)$

(4) 其他: $0\cdot A=O$

(2)数乘

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$以及数k，定义

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 第一分配律: $k(A+B)=kA+kB$

(2) 第二分配律: $(k+l)A=kA+lA$

(3) 结合律: $(kl)A=k(lA)$

(4) 其他: $0\cdot A=O$

(2)数乘

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$以及数k，定义

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 第一分配律: $k(A+B)=kA+kB$

(2) 第二分配律: $(k+l)A=kA+lA$

(3) 结合律: $(kl)A=k(lA)$

(4) 其他: $0\cdot A=O$

(2)数乘

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$以及数k，定义

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 第一分配律: $k(A+B)=kA+kB$

(2) 第二分配律: $(k+l)A=kA+lA$

(3) 结合律: $(kl)A=k(lA)$

(4) 其他: $0\cdot A=O$

(2)数乘

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$以及数k，定义

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

运算法则:

(1) 第一分配律: $k(A+B)=kA+kB$

(2) 第二分配律: $(k+l)A=kA+lA$

(3) 结合律: $(kl)A=k(lA)$

(4) 其他: $0\cdot A=O$

(2)数乘

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$以及数k，定义

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

运算法则：

(1) 第一分配律：$k(A+B)=kA+kB$

(2) 第二分配律：$(k+l)A=kA+lA$

(3) 结合律：$(kl)A=k(lA)$

(4) 其他：$0\cdot A=O$

例

矩阵的加法与数乘统称为线性运算.

例1 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

且$A + 2X = B$, 求X.

解 $X = \frac{1}{2}(B - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

矩阵的加法与数乘统称为线性运算.

例1 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

且$A + 2X = B$, 求X.

解 $X = \frac{1}{2}(B - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

例

矩阵的加法与数乘统称为线性运算.

例1 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,
且$A + 2X = B$, 求X.

解 $X = \frac{1}{2}(B - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(3)乘法

设$A=(a_{ij})_{m\times l}, B=(b_{jk})_{l\times n}$, 定义

$$AB=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}$.

注: 矩阵A, B相乘的条件: 前者的列数=后者的行数.

运算法则

运算法则:

(1) 分配律: $A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

(2) 结合律: $(AB)C = A(BC)$

(3) 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(4) 其他: $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

运算法则:

(1) 分配律: $$\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (B+C)A &= BA+CA \end{aligned}$$

(2) 结合律: $(AB)C = A(BC)$

(3) 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(4) 其他: $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

运算法则

运算法则:

(1) 分配律: $$\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (B+C)A &= BA+CA \end{aligned}$$

(2) 结合律: $(AB)C = A(BC)$

(3) 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(4) 其他: $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

运算法则:

(1) 分配律: $\begin{array}{l} A(B+C) = AB+AC \\ (B+C)A = BA+CA \end{array}$

(2) 结合律: $(AB)C = A(BC)$

(3) 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(4) 其他: $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

运算法则:

(1) 分配律: $$\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (B+C)A &= BA+CA \end{aligned}$$

(2) 结合律: $(AB)C = A(BC)$

(3) 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(4) 其他: $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

乘法运算法则的注解

例2 设$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$, 求$AB$和$BA$.

注

以下结论一般情况下不成立

- $AB=BA$
- $AB=O\Rightarrow A=O$或$B=O$
- $AB=AC, A\neq O\Rightarrow B=C$

乘法运算法则的注解

例2 设$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$, 求$AB$和$BA$.

注

以下结论一般情况下不成立

- $AB=BA$
- $AB=O\Rightarrow A=O$或$B=O$
- $AB=AC, A\neq O\Rightarrow B=C$

乘法运算法则的注解

例2 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$AB$和$BA$.

注

以下结论一般情况下不成立

- $AB=BA$
- $AB=O \Rightarrow A=O$或$B=O$
- $AB=AC, A\neq O \Rightarrow B=C$

乘法运算法则的注解

例2 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$AB$和$BA$.

注

以下结论一般情况下不成立

- $AB=BA$
- $AB=O \Rightarrow A=O$或$B=O$
- $AB=AC, A\neq O \Rightarrow B=C$

(4)方阵的幂

设$A=(a_{ij})_n$是n阶方阵，k是一个自然数，定义

$$A^k=\overbrace{AA\cdots A}^{k}$$

规定$A^0=I, A\neq O$.

运算法则:

$$A^{k+l}=A^kA^l,\quad (A^k)^l=A^{kl}$$

(4)方阵的幂

设$A=(a_{ij})_n$是n阶方阵，k是一个自然数，定义

$$A^k=\overbrace{AA\cdots A}^{k}$$

规定$A^0=I, A\neq O$.

运算法则：

$$A^{k+l}=A^kA^l,\quad (A^k)^l=A^{kl}$$

方幂运算的注解

以下结论一般情况下不成立，除非$AB = BA$

$$\begin{aligned} (AB)^k &= A^k B^k \\ A^2 = O &\Rightarrow A = O \\ A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ (A \pm B)^2 &= A^2 \pm 2AB + B^2 \end{aligned}$$

例3 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^2$.

特殊矩阵(续)

(9) 幂零矩阵　适合$A^k = O$的矩阵A

(10) 幂等矩阵　适合$A^2 = A$的矩阵A

方幂运算的注解

以下结论一般情况下不成立，除非$AB = BA$

$$\begin{aligned}(AB)^k &= A^k B^k \\ A^2 = O &\Rightarrow A = O \\ A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ (A \pm B)^2 &= A^2 \pm 2AB + B^2\end{aligned}$$

例3 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^2$.

特殊矩阵(续)

(9) 幂零矩阵　适合$A^k = O$的矩阵A

(10) 幂等矩阵　适合$A^2 = A$的矩阵A

方幂运算的注解

以下结论一般情况下不成立，除非$AB = BA$

$$
\begin{aligned}
(AB)^k &= A^k B^k \\
A^2 = O &\Rightarrow A = O \\
A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\
(A \pm B)^2 &= A^2 \pm 2AB + B^2
\end{aligned}
$$

例3 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^2$.

特殊矩阵(续)

(9) 幂零矩阵　适合$A^k = O$的矩阵A

(10) 幂等矩阵　适合$A^2 = A$的矩阵A

方幂运算的注解

以下结论一般情况下不成立，除非$AB=BA$

$$\begin{aligned}(AB)^k &= A^kB^k\\ A^2=O &\Rightarrow A=O\\ A^2-B^2 &= (A+B)(A-B)\\ (A\pm B)^2 &= A^2\pm 2AB+B^2\end{aligned}$$

例3 设$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，求$A^2$.

特殊矩阵(续)

(9) 幂零矩阵　适合$A^k=O$的矩阵A

(10) 幂等矩阵　适合$A^2=A$的矩阵A

方幂运算的注解

以下结论一般情况下不成立，除非$AB = BA$

$$
\begin{aligned}
(AB)^k &= A^k B^k \\
A^2 = O &\Rightarrow A = O \\
A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\
(A \pm B)^2 &= A^2 \pm 2AB + B^2
\end{aligned}
$$

例3 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^2$.

特殊矩阵(续)

(9) 幂零矩阵　适合$A^k = O$的矩阵A

(10) 幂等矩阵　适合$A^2 = A$的矩阵A

矩阵运算及法则—转置

(5)转置

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

称$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$为矩阵$A$的转置.

转置运算法则

运算法则:

$$
\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\
(kA)^T &= kA^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^k)^T = (A^T)^k
\end{aligned}
$$

特殊矩阵(续)

(11) 对称矩阵　适合 $A^T = A$ 的矩阵 A

(12) 反对称矩阵　适合 $A^T = -A$ 的矩阵 A

- $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 因此对称矩阵的元素关于其主对角线对称.
- $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, 反对称矩阵的主对角线元素都为零.

转置运算法则

运算法则:

$$\begin{aligned}(A^T)^T &= A, \quad (A\pm B)^T = A^T \pm B^T\\ (kA)^T &= kA^T, \quad (AB)^T = B^TA^T, \quad (A^k)^T = (A^T)^k\end{aligned}$$

特殊矩阵(续)

(11) 对称矩阵　适合$A^T=A$的矩阵A

(12) 反对称矩阵　适合$A^T=-A$的矩阵A

- $A^T=A \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}, \forall i,j$, 因此对称矩阵的元素关于其主对角线对称.
- $A^T=-A \Leftrightarrow a_{ij}=-a_{ji}, \forall i,j$, 反对称矩阵的主对角线元素都为零.

转置运算法则

运算法则:

$$
\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\
(kA)^T &= kA^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^k)^T = (A^T)^k
\end{aligned}
$$

特殊矩阵(续)

(11) 对称矩阵　适合 $A^T = A$ 的矩阵 A

(12) 反对称矩阵　适合 $A^T = -A$ 的矩阵 A

- $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 因此对称矩阵的元素关于其主对角线对称.
- $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, 反对称矩阵的主对角线元素都为零.

转置运算法则

运算法则:

$$
\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\
(kA)^T &= kA^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^k)^T = (A^T)^k
\end{aligned}
$$

特殊矩阵(续)

(11) 对称矩阵　适合$A^T = A$的矩阵A

(12) 反对称矩阵　适合$A^T = -A$的矩阵A

- $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 因此对称矩阵的元素关于其主对角线对称.
- $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, 反对称矩阵的主对角线元素都为零.

转置运算法则

运算法则:

$$
\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\
(kA)^T &= kA^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^k)^T = (A^T)^k
\end{aligned}
$$

特殊矩阵(续)

(11) 对称矩阵　适合 $A^T = A$ 的矩阵 A

(12) 反对称矩阵　适合 $A^T = -A$ 的矩阵 A

- $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 因此对称矩阵的元素关于其主对角线对称.
- $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, 反对称矩阵的主对角线元素都为零.

转置运算法则

运算法则:

$$
\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\
(kA)^T &= kA^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^k)^T = (A^T)^k
\end{aligned}
$$

特殊矩阵(续)

(11) 对称矩阵　适合 $A^T = A$ 的矩阵 A

(12) 反对称矩阵　适合 $A^T = -A$ 的矩阵 A

- $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, 因此对称矩阵的元素关于其主对角线对称.
- $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, 反对称矩阵的主对角线元素都为零.

对称矩阵的性质

性质

1. 设A为$m \times n$阶矩阵，则AA^T, A^TA分别为m和n阶对称方阵.
2. 设A为n阶方阵，则$A + A^T$对称，而$A - A^T$反对称.
3. 设A, B均为n阶方阵，则$A \pm B, kA$也对称，但AB不一定对称.

对称矩阵的性质

性质

1. 设A为$m \times n$阶矩阵，则AA^T, A^TA分别为m和n阶对称方阵.
2. 设A为n阶方阵，则$A + A^T$对称，而$A - A^T$反对称.
3. 设A, B均为n阶方阵，则$A \pm B, kA$也对称，但AB不一定对称.

对称矩阵的性质

性质

1. 设A为$m \times n$阶矩阵, 则AA^T, A^TA分别为m和n阶对称方阵.
2. 设A为n阶方阵, 则$A + A^T$对称, 而$A - A^T$反对称.
3. 设A, B均为n阶方阵, 则$A \pm B, kA$也对称, 但AB不一定对称.

例

例4 设A, B均为n阶对称矩阵, 则AB也对称的充分必要条件是$AB = BA$.

例5 证明: 任何一个方阵都可以写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

例6 设$AA^T = 0$, 证明: $A = O$.

例

例4 设A, B均为n阶对称矩阵, 则AB也对称的充分必要条件是$AB = BA$.

例5 证明: 任何一个方阵都可以写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

例6 设$AA^T = 0$, 证明: $A = O$.

例

例4 设A, B均为n阶对称矩阵, 则AB也对称的充分必要条件是$AB = BA$.

例5 证明: 任何一个方阵都可以写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

例6 设$AA^T = 0$, 证明: $A = O$.

例4 设A, B均为n阶对称矩阵, 则AB也对称的充分必要条件是$AB = BA$.

例5 证明: 任何一个方阵都可以写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

例6 设$AA^T = 0$, 证明: $A = O$.

例

例4 设A, B均为n阶对称矩阵, 则AB也对称的充分必要条件是$AB = BA$.

例5 证明: 任何一个方阵都可以写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

例6 设$AA^T = 0$, 证明: $A = O$.

例

例4 设A, B均为n阶对称矩阵, 则AB也对称的充分必要条件是$AB = BA$.

例5 证明: 任何一个方阵都可以写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

例6 设$AA^T = 0$, 证明: $A = O$.

(6)方阵的行列式

方阵的行列式

设A为n阶方阵，称$|A| = |a_{ij}|$为A的行列式，又记$\det A$.

运算法则:

$$\begin{aligned} |A^T| &= |A|, \quad |kA| = k^n|A| \\ |AB| &= |A||B|, \quad |A^k| = |A|^k \end{aligned}$$

例7 设A, B均为n阶方阵，证明：$|AB| = |BA|$. 举例说明：当A, B不是方阵时，结论不成立.

例8 证明：奇数阶反对称矩阵的行列式恒等于零.

例9 设$|A| = a$，求$|-A|, ||A|A|$.

(6)方阵的行列式

方阵的行列式

设A为n阶方阵，称$|A| = |a_{ij}|$为A的行列式，又记$\det A$.

运算法则：

$$
\begin{aligned}
|A^T| &= |A|, \quad |kA| = k^n|A| \\
|AB| &= |A||B|, \quad |A^k| = |A|^k
\end{aligned}
$$

例7 设A, B均为n阶方阵，证明：$|AB| = |BA|$. 举例说明：当A, B不是方阵时，结论不成立.

例8 证明：奇数阶反对称矩阵的行列式恒等于零.

例9 设$|A| = a$, 求$|-A|, ||A|A|$.

(6)方阵的行列式

方阵的行列式

设A为n阶方阵，称$|A|=|a_{ij}|$为A的行列式，又记$\det A$.

运算法则：

$$\begin{aligned} |A^T| &= |A|, \quad |kA| = k^n|A| \\ |AB| &= |A||B|, \quad |A^k| = |A|^k \end{aligned}$$

例7 设A, B均为n阶方阵，证明：$|AB|=|BA|$. 举例说明：当A, B不是方阵时，结论不成立.

例8 证明：奇数阶反对称矩阵的行列式恒等于零.

例9 设$|A|=a$，求$|-A|, ||A|A|$.

方阵的行列式

设A为n阶方阵，称$|A|=|a_{ij}|$为A的行列式，又记$\det A$.

运算法则：

$$
\begin{aligned}
|A^T| &= |A|, \quad |kA| = k^n|A| \\
|AB| &= |A||B|, \quad |A^k| = |A|^k
\end{aligned}
$$

例7 设A,B均为n阶方阵，证明：$|AB|=|BA|$. 举例说明：当A,B不是方阵时，结论不成立.

例8 证明：奇数阶反对称矩阵的行列式恒等于零.

例9 设$|A|=a$，求$|-A|, ||A|A|$.

(6)方阵的行列式

方阵的行列式

设A为n阶方阵, 称$|A| = |a_{ij}|$为A的行列式, 又记$\det A$.

运算法则:

$$\begin{aligned} |A^T| &= |A|, \quad |kA| = k^n|A| \\ |AB| &= |A||B|, \quad |A^k| = |A|^k \end{aligned}$$

例7 设A, B均为n阶方阵, 证明: $|AB| = |BA|$. 举例说明: 当A, B不是方阵时, 结论不成立.

例8 证明: 奇数阶反对称矩阵的行列式恒等于零.

例9 设$|A| = a$, 求$|-A|, ||A|A|$.

1. 用乘法结合律求矩阵的高次幂.

例10 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 求$(AB^T)^n$.

例11 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, 求$(AB)^{10}$.

2. 用二项式展开式求矩阵的高次幂.

例12 设$A=\begin{pmatrix}k&1&0\\0&k&1\\0&0&k\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

例13 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n-2A^{n-1}, n\geq 2.$.

1. 用乘法结合律求矩阵的高次幂.

例10 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 求$(AB^T)^n$.

例11 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, 求$(AB)^{10}$.

2. 用二项式展开式求矩阵的高次幂.

例12 设$A=\begin{pmatrix}k&1&0\\0&k&1\\0&0&k\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

例13 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n-2A^{n-1}, n\geq 2$..

4. 方阵的高次幂的计算

1. 用乘法结合律求矩阵的高次幂.

例10 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 求$(AB^T)^n$.

例11 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, 求$(AB)^{10}$.

2. 用二项式展开式求矩阵的高次幂.

例12 设$A=\begin{pmatrix}k&1&0\\0&k&1\\0&0&k\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

例13 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n-2A^{n-1}, n\geq 2.$.

4. 方阵的高次幂的计算

1. 用乘法结合律求矩阵的高次幂.

例10 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 求$(AB^T)^n$.

例11 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, 求$(AB)^{10}$.

2. 用二项式展开式求矩阵的高次幂.

例12 设$A=\begin{pmatrix}k&1&0\\0&k&1\\0&0&k\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

例13 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n-2A^{n-1}, n>2$..

4. 方阵的高次幂的计算

1. 用乘法结合律求矩阵的高次幂.

例10 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 求$(AB^T)^n$.

例11 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, 求$(AB)^{10}$.

2. 用二项式展开式求矩阵的高次幂.

例12 设$A=\begin{pmatrix}k&1&0\\0&k&1\\0&0&k\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

例13 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n-2A^{n-1}, n>2$..

4. 方阵的高次幂的计算

1. 用乘法结合律求矩阵的高次幂.

例10 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 求$(AB^T)^n$.

例11 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, 求$(AB)^{10}$.

2. 用二项式展开式求矩阵的高次幂.

例12 设$A=\begin{pmatrix}k&1&0\\0&k&1\\0&0&k\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

例13 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n-2A^{n-1}, n>2$..

Summary

1. 矩阵的运算:
   - (1) 线性运算: 加法与数乘;
   - (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   - (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   - (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:
   - (1) 乘法交换律一般不成立;
   - (2) $A^2=O$不能导出$A=O$; $AB=O$不能导出$A=O$或$B=O$; 但$A^TA=O$必有$A=O$;
   - (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB=AC, A\neq O$不能导出$B=C$;
   - (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   - (5) $|kA|=k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:

(1) 线性运算: 加法与数乘;

(2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;

(3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;

(4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:

(1) 乘法交换律一般不成立;

(2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$; 但$A^TA = O$必有$A = O$;

(3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;

(4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;

(5) $|kA| = k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:
   - (1) 线性运算: 加法与数乘;
   - (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   - (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   - (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:
   - (1) 乘法交换律一般不成立;
   - (2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$; 但$A^TA = O$必有$A = O$;
   - (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;
   - (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   - (5) $|kA| = k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:

   (1) 线性运算: 加法与数乘;
   (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:

   (1) 乘法交换律一般不成立;
   (2) $A^2=O$不能导出$A=O$; $AB=O$不能导出$A=O$或$B=O$;
   但$A^TA=O$必有$A=O$;
   (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB=AC, A\neq O$不能导出$B=C$;
   (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   (5) $|kA|=k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:
   - (1) 线性运算: 加法与数乘;
   - (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   - (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   - (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:
   - (1) 乘法交换律一般不成立;
   - (2) $A^2=O$不能导出$A=O$; $AB=O$不能导出$A=O$或$B=O$; 但$A^TA=O$必有$A=O$;
   - (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB=AC, A\neq O$不能导出$B=C$;
   - (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   - (5) $|kA|=k^n|A|$.

1. 矩阵的运算:
   - (1) 线性运算: 加法与数乘;
   - (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   - (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   - (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:
   - (1) 乘法交换律一般不成立;
   - (2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$; 但$A^TA = O$必有$A = O$;
   - (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;
   - (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   - (5) $|kA| = k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:

(1) 线性运算: 加法与数乘;

(2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;

(3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;

(4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:

(1) 乘法交换律一般不成立;

(2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$; 但$A^TA = O$必有$A = O$;

(3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;

(4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;

(5) $|kA| = k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:
   - (1) 线性运算: 加法与数乘;
   - (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   - (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   - (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:
   - (1) 乘法交换律一般不成立;
   - (2) $A^2=O$不能导出$A=O$; $AB=O$不能导出$A=O$或$B=O$; 但$A^TA=O$必有$A=O$;
   - (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB=AC, A\neq O$不能导出$B=C$;
   - (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   - (5) $|kA|=k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:
   - (1) 线性运算: 加法与数乘;
   - (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   - (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   - (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:
   - (1) 乘法交换律一般不成立;
   - (2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$; 但$A^TA = O$必有$A = O$;
   - (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;
   - (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   - (5) $|kA| = k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:

(1) 线性运算: 加法与数乘;

(2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;

(3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;

(4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:

(1) 乘法交换律一般不成立;

(2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$; 但$A^TA = O$必有$A = O$;

(3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;

(4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;

(5) $|kA| = k^n|A|$.

Summary

1. 矩阵的运算:

   (1) 线性运算: 加法与数乘;
   (2) 矩阵乘法AB: 前者的列数应等于后者的行数;
   (3) 矩阵转置A^T: A与A^T的行列互换;
   (4) 方阵的幂以及方阵的行列式.

2. 运算规律: 注意矩阵的运算有别于数的运算, 例如:

   (1) 乘法交换律一般不成立;
   (2) $A^2 = O$不能导出$A = O$; $AB = O$不能导出$A = O$或$B = O$;
   但$A^TA = O$必有$A = O$;
   (3) 乘法削去律一般不成立,即$AB = AC, A \neq O$不能导出$B = C$;
   (4) 因式分解公式一般不成立, 除非有交换性;
   (5) $|kA| = k^n|A|$.

目录

本节主要内容

乘法削去律一般不成立, 但基于对削去律的偏好, 自然要问:

> 当方阵A满足什么条件时, 从$AX = AY$能导出$X = Y$.

这个问题就引出了逆矩阵的概念, 它是倒数概念的推广.

本节主要内容

1. 逆矩阵的概念及其性质;

2. 引入伴随矩阵, 揭示矩阵可逆的条件.

乘法削去律一般不成立，但基于对削去律的偏好，自然要问：

当方阵A满足什么条件时，从$AX = AY$能导出$X = Y$.

这个问题就引出了逆矩阵的概念，它是倒数概念的推广.

本节主要内容

1. 逆矩阵的概念及其性质;
2. 引入伴随矩阵，揭示矩阵可逆的条件.

本节主要内容

乘法削去律一般不成立，但基于对削去律的偏好，自然要问：

当方阵A满足什么条件时，从$AX = AY$能导出$X = Y$.

这个问题就引出了逆矩阵的概念，它是倒数概念的推广.

本节主要内容

1. 逆矩阵的概念及其性质；
2. 引入伴随矩阵，揭示矩阵可逆的条件.

本节主要内容

乘法削去律一般不成立，但基于对削去律的偏好，自然要问：

当方阵A满足什么条件时，从$AX = AY$能导出$X = Y$.

这个问题就引出了逆矩阵的概念，它是倒数概念的推广.

本节主要内容

1. 逆矩阵的概念及其性质；
2. 引入伴随矩阵，揭示矩阵可逆的条件.

1. 矩阵可逆的概念

定义—逆矩阵

设A是一个n阶方阵，I是一个n阶单位阵，如果存在一个n阶方阵B，使得

$$AB = BA = I$$

则称A可逆，又称A为非奇异矩阵，并称B为A的逆矩阵。否则称A不可逆，又称A为奇异矩阵。

注：当方阵A可逆时，左乘A的逆矩阵，从$AX = AY$就导出$X = Y$。此时，矩阵削去律成立。

1. 矩阵可逆的概念

定义—逆矩阵

设A是一个n阶方阵, I是一个n阶单位阵, 如果存在一个n阶方阵B, 使得

$$AB = BA = I$$

则称A可逆, 又称A为非奇异矩阵, 并称B为A的逆矩阵. 否则称A不可逆, 又称A为奇异矩阵.

注: 当方阵A可逆时, 左乘A的逆矩阵, 从$AX = AY$就导出$X = Y$. 此时, 矩阵削去律成立.

性质

1. 若方阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆，且数$k \neq 0$，则kA也可逆，且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆，则A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆，则A^k也可逆，且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆，则AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   一般地，$(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆，则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. 可逆矩阵的性质

性质

1. 若方阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆，且数$k \neq 0$，则kA也可逆，且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆，则A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆，则A^k也可逆，且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆，则AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
一般地，$(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆，则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. 可逆矩阵的性质

性质

1. 若方阵A可逆, 则A的逆矩阵唯一; 记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆, 则A^{-1}也可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆, 且数$k \neq 0$, 则kA也可逆, 且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆, 则A^T也可逆, 且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆, 则A^k也可逆, 且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆, 则AB也可逆, 且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 一般地, $(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆, 则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. 可逆矩阵的性质

性质

1. 若方阵A可逆, 则A的逆矩阵唯一; 记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆, 则A^{-1}也可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆, 且数$k \neq 0$, 则kA也可逆, 且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆, 则A^T也可逆, 且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆, 则A^k也可逆, 且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆, 则AB也可逆, 且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 一般地, $(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆, 则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. 可逆矩阵的性质

性质

1. 若方阵A可逆, 则A的逆矩阵唯一; 记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆, 则A^{-1}也可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆, 且数$k \neq 0$, 则kA也可逆, 且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆, 则A^T也可逆, 且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆, 则A^k也可逆, 且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆, 则AB也可逆, 且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 一般地, $(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆, 则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. 可逆矩阵的性质

性质

1. 若方阵A可逆, 则A的逆矩阵唯一; 记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆, 则A^{-1}也可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆, 且数$k \neq 0$, 则kA也可逆, 且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆, 则A^T也可逆, 且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆, 则A^k也可逆, 且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆, 则AB也可逆, 且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 一般地, $(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆, 则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. 可逆矩阵的性质

性质

1. 若方阵A可逆, 则A的逆矩阵唯一; 记为A^{-1}.
2. 若方阵A可逆, 则A^{-1}也可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若方阵A可逆, 且数$k \neq 0$, 则kA也可逆, 且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
4. 若方阵A可逆, 则A^T也可逆, 且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若方阵A可逆, 则A^k也可逆, 且$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. 若A, B可逆, 则AB也可逆, 且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   一般地, $(A_1A_2\cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1}A_{t-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.
7. 若方阵A可逆, 则$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

3. 伴随矩阵及重要恒等式

设A_{ij}为矩阵$A=(a_{ij})_n$中的代数余子式, 称

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为矩阵A的伴随矩阵.

重要恒等式

$$AA^*=A^*A=|A|I$$

3. 伴随矩阵及重要恒等式

设A_{ij}为矩阵$A=(a_{ij})_n$中的代数余子式, 称

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为矩阵A的伴随矩阵.

重要恒等式

$$AA^*=A^*A=|A|I$$

4. 矩阵可逆的条件

定理2.1—矩阵可逆的条件

方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$, 此时

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

推论—矩阵可逆概念的简化

设n阶方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.

例1 设A适合$A^2 + A - 2I = O$, 证明A可逆, 并求出其逆矩阵.

例2 设n阶矩阵A, B, C适合$AB = BC = CA = I$,

定理2.1—矩阵可逆的条件

方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$, 此时

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

推论—矩阵可逆概念的简化

设n阶方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.

例1 设A适合$A^2 + A - 2I = O$, 证明A可逆, 并求出其逆矩阵.

例2 设n阶矩阵A, B, C适合$AB = BC = CA = I$,

4. 矩阵可逆的条件

定理2.1—矩阵可逆的条件

方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$, 此时

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

推论—矩阵可逆概念的简化

设n阶方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.

例1 设A适合$A^2 + A - 2I = O$, 证明A可逆, 并求出其逆矩阵.

例2 设n阶矩阵A, B, C适合$AB = BC = CA = I$,

定理2.1—矩阵可逆的条件

方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$, 此时

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

推论—矩阵可逆概念的简化

设n阶方阵A,B适合$AB=I$, 则$BA=I$, 因此A,B互为逆矩阵.

例1 设A适合$A^2+A-2I=O$, 证明A可逆, 并求出其逆矩阵.

例2 设n阶矩阵A,B,C适合$AB=BC=CA=I$,

5. 有关伴随矩阵的问题

例3 伴随矩阵的运算规律:

$$
\begin{array}{ll}
(kA)^* = k^{n-1}A^* & (AB)^* = (BA)^* \\
(A^T)^* = (A^*)^T & (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\
|A^*| = |A|^{n-1} & (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A
\end{array}
$$

例4 设A, B均为n阶可逆矩阵, $|A| = -2, |B| = -3$, 则$||B|A^{-1}| =$ _____, $|2A^* + 3A^{-1}| =$ _____, $|A^{**}| =$ _____.

例5 证明：A可逆的充要条件是A^*可逆.

例6 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

5. 有关伴随矩阵的问题

例3 伴随矩阵的运算规律:

$$(kA)^* = k^{n-1}A^* \qquad (AB)^* = (BA)^*$$
$$(A^T)^* = (A^*)^T \qquad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$
$$|A^*| = |A|^{n-1} \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$$

例4 设A, B均为n阶可逆矩阵, $|A| = -2, |B| = -3$, 则$||B|A^{-1}| =$ ____, $|2A^* + 3A^{-1}| =$ ____, $|A^{**}| =$ ____.

例5 证明: A可逆的充要条件是A^*可逆.

例6 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

5. 有关伴随矩阵的问题

例3 伴随矩阵的运算规律:

$$(kA)^* = k^{n-1}A^* \qquad (AB)^* = (BA)^*$$
$$(A^T)^* = (A^*)^T \qquad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$
$$|A^*| = |A|^{n-1} \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$$

例4 设A, B均为n阶可逆矩阵, $|A| = -2, |B| = -3$, 则$||B|A^{-1}| =$ ____, $|2A^* + 3A^{-1}| =$ ____, $|A^{**}| =$ ____.

例5 证明: A可逆的充要条件是A^*可逆.

例6 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

5. 有关伴随矩阵的问题

例3 伴随矩阵的运算规律:

$$(kA)^* = k^{n-1}A^* \qquad (AB)^* = (BA)^*$$
$$(A^T)^* = (A^*)^T \qquad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$
$$|A^*| = |A|^{n-1} \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$$

例4 设A, B均为n阶可逆矩阵, $|A| = -2, |B| = -3$, 则$||B|A^{-1}| =$ ____, $|2A^* + 3A^{-1}| =$ ____, $|A^{**}| =$ ____.

例5 证明: A可逆的充要条件是A^*可逆.

例6 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

Summary

1. 基本理论:

(1) 方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.
(2) 方阵A可逆的充分必要条件时$|A| \neq 0$.

2. 基本问题:

(1) 证明方阵的可逆性—定义法, 或$|A| \neq 0$.
(2) 有关伴随矩阵的计算—运用公式:
$|A^*| = |A|^{n-1}, A^* = |A|A^{-1}$.

Summary

1. 基本理论:

(1) 方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.
(2) 方阵A可逆的充分必要条件时$|A| \neq 0$.

2. 基本问题:

(1) 证明方阵的可逆性—定义法, 或$|A| \neq 0$.
(2) 有关伴随矩阵的计算—运用公式:
$|A^*| = |A|^{n-1}, A^* = |A|A^{-1}$.

Summary

1. 基本理论:

   (1) 方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.

   (2) 方阵A可逆的充分必要条件时$|A| \neq 0$.

2. 基本问题:

   (1) 证明方阵的可逆性—定义法, 或$|A| \neq 0$.

   (2) 有关伴随矩阵的计算—运用公式:

   $|A^*| = |A|^{n-1}, A^* = |A|A^{-1}$.

Summary

1. 基本理论:

(1) 方阵A, B适合$AB = I$, 则$BA = I$, 因此A, B互为逆矩阵.
(2) 方阵A可逆的充分必要条件时$|A| \neq 0$.

2. 基本问题:

(1) 证明方阵的可逆性—定义法, 或$|A| \neq 0$.
(2) 有关伴随矩阵的计算—运用公式:
$|A^*| = |A|^{n-1}, A^* = |A|A^{-1}$.

目录

1.初等变换

初等行(列)变换

1. 互换矩阵的某两行(列)

$$r_i \leftrightarrow r_j, \qquad (c_i \leftrightarrow c_j)$$

2. 用数$k \neq 0$乘矩阵的某一行(列)

$$r_i \times k, \qquad (c_i \times k)$$

3. 把矩阵的某一行(列)元素的k倍加到另一行(列)的对应元素上去

$$kr_i + r_j, \qquad (kc_i + c_j)$$

初等行(列)变换

1. 互换矩阵的某两行(列)

$$r_i \leftrightarrow r_j, \qquad (c_i \leftrightarrow c_j)$$

2. 用数$k \neq 0$乘矩阵的某一行(列)

$$r_i \times k, \qquad (c_i \times k)$$

3. 把矩阵的某一行(列)元素的k倍加到另一行(列)的对应元素上去

$$kr_i + r_j, \qquad (kc_i + c_j)$$

1.初等变换

初等行(列)变换

1. 互换矩阵的某两行(列)

$$r_i \leftrightarrow r_j, \qquad (c_i \leftrightarrow c_j)$$

2. 用数$k \neq 0$乘矩阵的某一行(列)

$$r_i \times k, \qquad (c_i \times k)$$

3. 把矩阵的某一行(列)元素的k倍加到另一行(列)的对应元素上去

$$kr_i + r_j, \qquad (kc_i + c_j)$$

1.初等变换

初等行(列)变换

1. 互换矩阵的某两行(列)

$$r_i \leftrightarrow r_j, \qquad (c_i \leftrightarrow c_j)$$

2. 用数$k \neq 0$乘矩阵的某一行(列)

$$r_i \times k, \qquad (c_i \times k)$$

3. 把矩阵的某一行(列)元素的k倍加到另一行(列)的对应元素上去

$$kr_i + r_j, \qquad (kc_i + c_j)$$

2.初等矩阵

初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵，称为**初等矩阵**.

1. $$E(i,j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&&\\&&&\vdots&1&&&\vdots&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&\\&&&\vdots&&&1&\vdots&&\\&&&1&\cdots&\cdots&\cdots&0&&\\&&&&&&&&1&\\&&&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}$$

初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵, 称为**初等矩阵**.

1. $$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2.初等矩阵(续)

2. $E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

3. $E(i(k),j) = E(i,j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

2.初等矩阵(续)

2. $E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

3. $E(i(k), j) = E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

3.初等矩阵的转置与逆

(1) 初等矩阵的转置仍是同类初等矩阵:

$$E(i,j)^T = E(i,j)$$
$$E(i(k))^T = E(i(k))$$
$$E(i(k),j)^T = E(j,i(k))$$

(2) 初等矩阵可逆, 且它们的逆矩阵还是初等矩阵:

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$
$$E(i(k))^{-1} = E(i(k^{-1}))$$
$$E(i(k),j)^{-1} = E(i(-k),j)$$

3.初等矩阵的转置与逆

(1) 初等矩阵的转置仍是同类初等矩阵:

$$E(i,j)^T = E(i,j)$$
$$E(i(k))^T = E(i(k))$$
$$E(i(k),j)^T = E(j,i(k))$$

(2) 初等矩阵可逆, 且它们的逆矩阵还是初等矩阵:

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$
$$E(i(k))^{-1} = E(i(k^{-1}))$$
$$E(i(k),j)^{-1} = E(i(-k),j)$$

4.初等变换与初等矩阵之间的关系

定理3.1

(1) 若对$A_{m\times n}$作一次初等行变换，则相当于对A左乘一个相应的m阶初等矩阵.

(2) 若对$A_{m\times n}$作一次初等列变换，则相当于对A右乘一个相应的n阶初等矩阵.

例如:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \quad \Leftrightarrow \quad E(i,j)A = B$$

$$A \xrightarrow{r_i \times k} B \quad \Leftrightarrow \quad E(i(k))A = B$$

$$A \xrightarrow{kr_i + r_j} B \quad \Leftrightarrow \quad E(i(k),j)A = B$$

4.初等变换与初等矩阵之间的关系

定理3.1

(1) 若对$A_{m\times n}$作一次初等行变换，则相当于对A左乘一个相应的m阶初等矩阵.

(2) 若对$A_{m\times n}$作一次初等列变换，则相当于对A右乘一个相应的n阶初等矩阵.

例如:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \iff E(i,j)A = B$$

$$A \xrightarrow{r_i \times k} B \iff E(i(k))A = B$$

$$A \xrightarrow{kr_i + r_j} B \iff E(i(k),j)A = B$$

4.初等变换与初等矩阵之间的关系

定理3.1

(1) 若对$A_{m\times n}$作一次初等行变换，则相当于对A左乘一个相应的m阶初等矩阵.

(2) 若对$A_{m\times n}$作一次初等列变换，则相当于对A右乘一个相应的n阶初等矩阵.

例如:

$$A \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} B \;\Leftrightarrow\; E(i,j)A = B$$

$$A \xrightarrow{r_i\times k} B \;\Leftrightarrow\; E(i(k))A = B$$

$$A \xrightarrow{kr_i+r_j} B \;\Leftrightarrow\; E(i(k),j)A = B$$

4.初等变换与初等矩阵之间的关系

定理3.1

(1) 若对$A_{m\times n}$作一次初等行变换，则相当于对A左乘一个相应的m阶初等矩阵.

(2) 若对$A_{m\times n}$作一次初等列变换，则相当于对A右乘一个相应的n阶初等矩阵.

例如:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \quad \Leftrightarrow \quad E(i,j)A = B$$

$$A \xrightarrow{r_i \times k} B \quad \Leftrightarrow \quad E(i(k))A = B$$

$$A \xrightarrow{kr_i + r_j} B \quad \Leftrightarrow \quad E(i(k),j)A = B$$

定义—矩阵的等价

若矩阵$A_{m\times n}$经过有限次初等变换化为矩阵B, 则称矩阵A与B**等价**, 记作$A \to B$.

简单性质

(1) 反身性: $A \to A$.

(2) 对称性: 若$A \to B$, 则$B \to A$.

(3) 传递性: 若$A \to B$, $B \to C$, 则$A \to C$.

5. 矩阵的等价及标准形

定义—矩阵的等价

若矩阵$A_{m\times n}$经过有限次初等变换化为矩阵B, 则称矩阵A与B等价, 记作$A \to B$.

简单性质

(1) 反身性: $A \to A$.

(2) 对称性: 若$A \to B$, 则$B \to A$.

(3) 传递性: 若$A \to B$, $B \to C$, 则$A \to C$.

定义—矩阵的等价

若矩阵$A_{m\times n}$经过有限次初等变换化为矩阵B，则称矩阵A与B**等价**，记作$A\to B$.

简单性质

(1) **反身性**：$A\to A$.

(2) 对称性：若$A\to B$，则$B\to A$.

(3) 传递性：若$A\to B$，$B\to C$，则$A\to C$.

定义—矩阵的等价

若矩阵$A_{m\times n}$经过有限次初等变换化为矩阵B, 则称矩阵A与B**等价**, 记作$A \to B$.

简单性质

(1) **反身性**: $A \to A$.

(2) **对称性**: 若$A \to B$, 则$B \to A$.

(3) 传递性: 若$A \to B$, $B \to C$, 则$A \to C$.

5. 矩阵的等价及标准形

定义—矩阵的等价

若矩阵$A_{m\times n}$经过有限次初等变换化为矩阵B, 则称矩阵A与B**等价**, 记作$A \to B$.

简单性质

(1) **反身性**: $A \to A$.

(2) **对称性**: 若$A \to B$, 则$B \to A$.

(3) **传递性**: 若$A \to B$, $B \to C$, 则$A \to C$.

5. 矩阵的等价及标准形(续)

定理3.2—矩阵的标准形

任意一个$m\times n$阶非零矩阵A 都可经初等变换化为下列形式的矩阵(强调要用列变换)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (0 \le r \le \min(m,n))$$

称其为矩阵A的标准形矩阵. 即任意一个非零矩阵与它的标准形矩阵是等价的.

例

例1 化矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$为标准形.

注: 首先用行变换化为阶梯形矩阵, 再用列变换化为标准形.

例1 化矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$为标准形.

注: 首先用行变换化为阶梯形矩阵, 再用列变换化为标准形.

6.初等变换求逆法

定理3.3—矩阵可逆的条件

(1) n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A \to I$.

(2) n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A$可以表示成若干个初等矩阵的乘积. 即$A = P_1P_2\cdots P_k$.

定理3.4—矩阵等价的条件

$A \to B \Leftrightarrow$存在两个可逆矩阵P, Q, 使$PAQ = B$.

6.初等变换求逆法

定理3.3—矩阵可逆的条件

(1) n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A \to I$.

(2) n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A$可以表示成若干个初等矩阵的乘积. 即$A = P_1 P_2 \cdots P_k$.

定理3.4—矩阵等价的条件

$A \to B \Leftrightarrow$存在两个可逆矩阵P, Q, 使$PAQ = B$.

6.初等变换求逆法

定理3.3—矩阵可逆的条件

(1) n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A \to I$.

(2) n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A$可以表示成若干个初等矩阵的乘积．即$A = P_1P_2\cdots P_k$.

定理3.4—矩阵等价的条件

$A \to B \Leftrightarrow$存在两个可逆矩阵P, Q, 使$PAQ = B$.

6.初等变换求逆法(续)

设$A^{-1} = P_1P_2\cdots P_k$, 则

$$\begin{aligned} P_1P_2\cdots P_kA &= I \\ P_1P_2\cdots P_kI &= A^{-1} \end{aligned}$$

换言之, 当A经行变换化为I时, I经相同的行变换化为逆矩阵A^{-1}

方法

构造一个$n\times 2n$矩阵$\left(\, A \;\vdots\; I \,\right)$, 对其进行初等行变换, 当左侧矩阵$A$成为单位矩阵时, 右侧矩阵$I$则成为$A^{-1}$. 即

$$\left(\, A \;\vdots\; I \,\right) \rightarrow \left(\, I \;\vdots\; A^{-1} \,\right)$$

6.初等变换求逆法(续)

设$A^{-1} = P_1P_2\cdots P_k$, 则

$$P_1P_2\cdots P_kA = I$$
$$P_1P_2\cdots P_kI = A^{-1}$$

换言之, 当A经行变换化为I时, I经相同的行变换化为逆矩阵A^{-1}

方法

构造一个$n\times 2n$矩阵$\begin{pmatrix} A & \vdots & I \end{pmatrix}$, 对其进行初等行变换, 当左侧矩阵$A$成为单位矩阵时, 右侧矩阵$I$则成为$A^{-1}$. 即

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & \vdots & A^{-1} \end{pmatrix}$$

例2 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$的逆矩阵

1. 基本类型:

(1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$;

(2) $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

2. 方法:

(1) 行变换:$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & \vdots & A^{-1}B \end{pmatrix}$;

(2) 列变换:$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$.

1. 基本类型:

(1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$;

(2) $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

2. 方法:

(1) 行变换:$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I & \vdots & A^{-1}B \end{pmatrix}$;

(2) 列变换:$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$.

7.矩阵方程

1. 基本类型:

(1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$;

(2) $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

2. 方法:

(1) 行变换:$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & \vdots & A^{-1}B \end{pmatrix}$;

(2) 列变换:$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$.

例3 解矩阵方程$A^2(X^{-1}A)^{-1} = 2B + X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

例4 设$A^*X = A^{-1} + 2X$, 求X, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例3 解矩阵方程$A^2(X^{-1}A)^{-1} = 2B + X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

例4 设$A^*X = A^{-1} + 2X$, 求X, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Summary

1. 基本理论:

(1) 行变换等同于左乘初等矩阵; 列变换等同于右乘初等矩阵;

(2) 任何矩阵都等价于标准形;

(3) 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \to I$;

2. 基本题型:

(1) 求矩阵的标准形(行变换和列变换都可使用);

(2) 初等行变换求逆矩阵(不能使用列变换);

(3) 解矩阵方程.

Summary

1. 基本理论:

(1) 行变换等同于左乘初等矩阵; 列变换等同于右乘初等矩阵;
(2) 任何矩阵都等价于标准形;
(3) 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \rightarrow I$;

2. 基本题型:

(1) 求矩阵的标准形(行变换和列变换都可使用);
(2) 初等行变换求逆矩阵(不能使用列变换);
(3) 解矩阵方程.

Summary

1. 基本理论:
   (1) 行变换等同于左乘初等矩阵; 列变换等同于右乘初等矩阵;
   (2) 任何矩阵都等价于标准形;
   (3) 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \to I$;
2. 基本题型:
   (1) 求矩阵的标准形(行变换和列变换都可使用);
   (2) 初等行变换求逆矩阵(不能使用列变换);
   (3) 解矩阵方程.

Summary

1. 基本理论:
   (1) 行变换等同于左乘初等矩阵; 列变换等同于右乘初等矩阵;
   (2) 任何矩阵都等价于标准形;
   (3) 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \to I$;
2. 基本题型:
   (1) 求矩阵的标准形(行变换和列变换都可使用);
   (2) 初等行变换求逆矩阵(不能使用列变换);
   (3) 解矩阵方程.

目录

1. 矩阵分块

1. 在矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的行间和列间分别用一些水平线和铅直线将它分割成若干个小矩阵A_{ij}，每一个小矩阵A_{ij} 称为A的子块或子矩阵, 这种以子块或子矩阵A_{ij}为元素的矩阵称为分块矩阵. 记作

$$A=(A_{ij})_{r\times s}$$

2. 运算:只要对矩阵按适当的方式分块, 那么在对分块矩阵进行运算时,就可以将子块当作一般矩阵中的元素来看待, 并按一般矩阵的运算规则进行,然后子块之间的运算再按一般矩阵的运算规则进行.

1. 矩阵分块

1. 在矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的行间和列间分别用一些水平线和铅直线将它分割成若干个小矩阵A_{ij}，每一个小矩阵A_{ij} 称为A的子块或子矩阵，这种以子块或子矩阵A_{ij}为元素的矩阵称为分块矩阵. 记作

$$A=(A_{ij})_{r\times s}$$

2. 运算:只要对矩阵按**适当的方式**分块，那么在对分块矩阵进行运算时,就可以将子块当作一般矩阵中的元素来看待，并按一般矩阵的运算规则进行,然后子块之间的运算再按一般矩阵的运算规则进行.

2. 常见的分块矩阵

(1) 列分块和行分块:

$$A_{m\times n} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

(2) 分块三角形矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

2. 常见的分块矩阵

(1) 列分块和行分块:

$$A_{m\times n} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

(2) 分块三角形矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

(1) AB相乘的条件: A的列数等于B的行数;

(2) 对分块的要求: A的列分法与B的行分法相同.

例1 求AB, 其中矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) AB相乘的条件: A的列数等于B的行数;

(2) 对分快的要求: A的列分法与B的行分法相同.

例1 求AB, 其中矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) AB相乘的条件: A的列数等于B的行数;

(2) 对分块的要求: A的列分法与B的行分法相同.

例1 求AB, 其中矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例2 设$A_{m\times n}, B_{n\times s}$, 将$B$列分块$B=(B_1,\cdots,B_s)$, 则

$$AB=(AB_1,\cdots,AB_s)$$

注意: $(A_1,\cdots,A_n)B=(A_1B,\cdots,A_nB)$错误

例3 设$A_{m\times n}$列分块为$A=(A_1,\cdots,A_n)$, 则

$$(A_1,\cdots,A_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A_1x_1+\cdots+A_nx_n$$

例2 设$A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$, 将B列分块$B=(B_1,\cdots,B_s)$, 则

$$AB=(AB_1,\cdots,AB_s)$$

注意: $(A_1,\cdots,A_n)B=(A_1B,\cdots,A_nB)$错误

例3 设$A_{m\times n}$列分块为$A=(A_1,\cdots,A_n)$, 则

$$(A_1,\cdots,A_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A_1x_1+\cdots+A_nx_n$$

4. 分块矩阵的逆矩阵

(1) $$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

4. 分块矩阵的逆矩阵

(1) $$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例4 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1)\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \\ a_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

5. 分块矩阵的行列式

A, B分别为m和n阶方阵.

(1) $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

(2) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

例5 设A, B为n阶方阵, I为n阶单位矩阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & I \\ I & B \end{vmatrix} = |AB - I| = |BA - I|$$

5. 分块矩阵的行列式

A, B分别为m和n阶方阵.

(1) $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

(2) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

例5 设A, B为n阶方阵, I为n阶单位矩阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & I \\ I & B \end{vmatrix} = |AB - I| = |BA - I|$$