第九章

第二节 二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

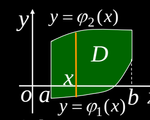
二、利用极坐标计算二重积分

*三、二重积分的换元法

一、利用直角坐标计算二重积分

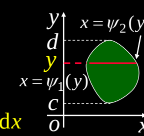
由曲顶柱体体积的计算可知，当被积函数 $f(x,y)\ge 0$ 且在D上连续时，若D为 X－型区域

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$



则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

若D为Y－型区域 $D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$



则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

当被积函数 $f(x,y)$在D上**变号**时，由于

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+|f(x,y)|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$

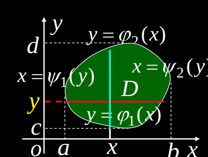
$f_1(x,y)$　$f_2(x,y)$ 均非负

$$\therefore\ \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此上面讨论的累次积分法仍然有效 .

说明: (1) 若积分区域既是X–型区域又是Y–型区域 , 则有

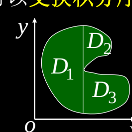
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可**选择积分序**, 必要时还可以**交换积分序**.

(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干 X-型域或Y-型域 , 则

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}$$

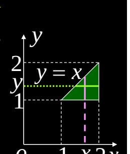


例1. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X–型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac12 xy^2\right]_1^x \mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac12 x^3-\tfrac12 x\right]\mathrm{d}x=\frac98$$



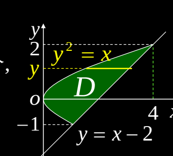
解法2. 将D看作Y–型区域, 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac12 x^2y\right]_y^2 \mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac12 y^3\right]\mathrm{d}y=\frac98$$

例2. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

则 $D:\begin{cases}y^2\le x\le y+2\\ -1\le y\le 2\end{cases}$



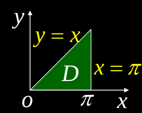
$$\therefore\ \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^2\left[\tfrac12 x^2y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y=\frac12\int_{-1}^2\left[y(y+2)^2-y^5\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac12\left[\frac{y^4}{4}+\frac43 y^3+2y^2-\frac16 y^6\right]_{-1}^2=\frac{45}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x, y=0,$ $x=\pi$ 所围成的闭区域.

解: 由被积函数可知, 先对 x 积分不行, 因此取D 为X – 型域 :



$$D:\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le \pi\end{cases}$$

$$\therefore\quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y$$

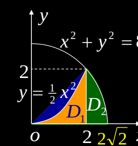
$$=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\pi}=2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例4. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac12 x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt2\end{cases}$$

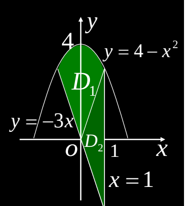
将 $D=D_1+D_2$ 视为Y–型区域，则

$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le\sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

例5. 计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$ 由 $y=4-x^2$, $y=-3x$, $x=1$ 所围成.

解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$



$D=D_1+D_2$ （如图所示）

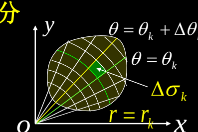
显然, 在D_1上, $f(-x,y)=-f(x,y)$

在D_2上, $f(x,-y)=-f(x,y)$

$$\therefore\quad I=\iint_{D_1}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

二、利用极坐标计算二重积分

在极坐标系下, 用同心圆 $r=$常数及射线 $\theta=$常数, 分划区域D 为



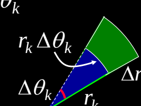
$\Delta\sigma_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$

则除包含边界点的小区域外,小区域的面积

$$\Delta\sigma_k=\tfrac12(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k-\tfrac12 r_k^{\,2}\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\tfrac12[r_k+(r_k+\Delta r_k)]\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\overline{r_k}\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$



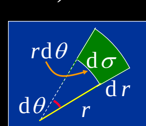
在 $\Delta\sigma_k$ 内取点$(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$, 对应有

$$\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\quad \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$$

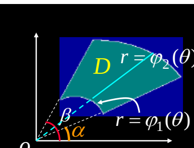
$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n f(\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k})\overline{r_k}\Delta r_k\Delta\theta_k$$

即 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

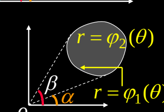


设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$, 则

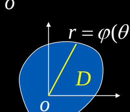


$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$



特别, 对 $D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$



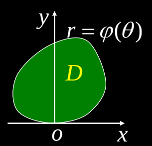
$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

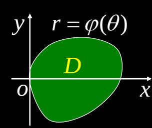
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$

若 $f\equiv 1$ 则可求得D 的面积

$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1) 

(2) 

答: (1) $0\le\theta\le\pi$; (2) $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

例6. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: x^2+y^2\le a^2$.

解: 在极坐标系下$D:\begin{cases}0\le r\le a\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$, 故

$$\text{原式}=\iint_D e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数 , 故本题无法用直角坐标计算.

注: 利用例6可得到一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上, 当D 为 R^2 时,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=4\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

利用例6的结果, 得

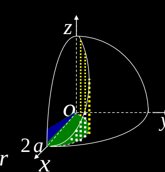
$$4\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2=\lim_{a\to+\infty}\pi(1-e^{-a^2})=\pi$$

故①式成立 .

例7. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知



$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

---

*三、二重积分换元法

定理: 设 $f(x,y)$在闭域 D上连续, 变换:

$$T:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D'\to D$$

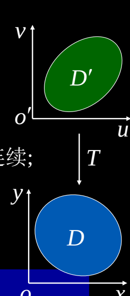
满足 (1) $x(u,v),\,y(u,v)$在D'上一阶导数连续;

(2) 在D'上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0;$$

(3) 变换$T: D'\to D$是一一对应的 ,

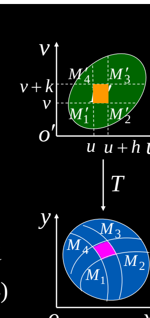
则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$



证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在$uo'v$坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为

$$M_1'(u,v),\qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k),\quad M_4'(u,v+k).$$



通过变换T, 在 xoy 面上得到一个四边形,其对应顶点为$M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u,v+k) - x(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}\Big|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $y_2 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial u}\Big|_{(u,v)} h + o(\rho)$

$$y_4 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial v}\Big|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k 充分小时, 曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx \left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\right| = \left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{matrix}\right\|$$

$$\approx \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} h & \frac{\partial y}{\partial u} k \\ \frac{\partial x}{\partial v} h & \frac{\partial y}{\partial v} k \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\| hk = |J(u,v)|\, hk$$

因此面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

从而得二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

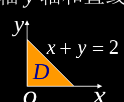
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

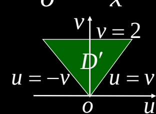
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例8. 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是 x 轴 y 轴和直线 $x + y = 2$ 所围成的闭域.



解: 令 $u = y - x,\ v = y + x$, 则

$$x = \frac{v-u}{2},\ y = \frac{v+u}{2} \quad (D' \to D)$$



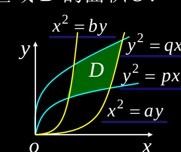
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{-1}{2}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}v \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (e - e^{-1})\, v\,\mathrm{d}v = e - e^{-1}$$

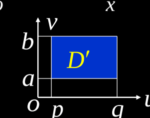
例9. 计算由 $y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.

解: 令 $u = \frac{y^2}{x},\ v = \frac{x^2}{y}$, 则



$$D' : \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$



$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u \int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例10. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ 的体积V.

解: 取 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$, 由对称性

$$V = 2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2c\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$, 则$D$ 的原象为

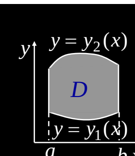
$$D' : r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

$$\therefore\quad V = 2c\iint_{D'} \sqrt{1 - r^2}\, abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2abc\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi abc$$

内容小结



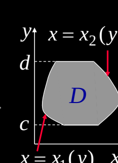
(1) 二重积分化为累次积分的方法

直角坐标系情形 :

- 若积分区域为

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$



- 若积分区域为

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

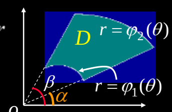
则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

极坐标系情形: 若积分区域为

$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\ \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\}$

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$



(2) 一般换元公式

在变换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 下

$(x,y)\in D\longleftrightarrow(u,v)\in D'$, 且 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

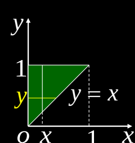
(3) 计算步骤及注意事项

- 画出积分域
- 选择坐标系 $\begin{cases}\text{域边界应尽量多为坐标线}\\ \text{被积函数关于坐标变量易分离}\end{cases}$
- 确定积分序 $\begin{cases}\text{积分域分块要少}\\ \text{累次积好算为妙}\end{cases}$
- 写出积分限 $\begin{cases}\text{图示法}\\ \text{不等式}\end{cases}$ (先积一条线, 后扫积分域)
- 计算要简便 $\begin{cases}\text{充分利用对称性}\\ \text{应用换元公式}\end{cases}$

思考与练习

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,

求 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.



提示: 交换积分顺序后, x , y互换

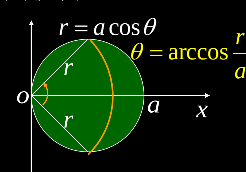
$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$\therefore\ 2I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=A^2$

2. 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)\,\mathrm{d}r\quad(a>0)$

提示: 积分域如图



$I=\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$

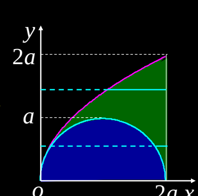
备用题 1. 给定 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\quad(a>0)$

改变积分的次序.

解: $y=\sqrt{2ax}\Rightarrow x=\frac{y^2}{2a}$

$y=\sqrt{2ax-x^2}$

$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$



原式 $=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

$+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

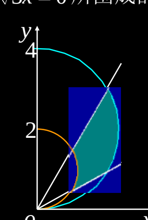
2. 计算 $\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$ 为由圆 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解: $x^2+y^2=2y\Rightarrow r=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y\Rightarrow r=4\sin\theta$

$y-\sqrt{3}x=0\ \Rightarrow\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0\ \Rightarrow\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$



$\therefore\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3})$