诚实考试吾心不虚 ，公平竞争方显实力，

考试失败尚有机会 ，考试舞弊前功尽弃.

上海财经大学《高等数学（经管类)》课程考试卷（A）闭卷

课程代码 102561

2015—2016 学年第二学期(2016 年 6 月 14 日)

一、填空题(每空格 2 分，共计 20 分)

1. 曲线 $y=\ln(1+x)$ 与 x 轴及直线 $x=1$ 所围平面图形面积为 $\underline{2\ln 2-1}$

2. 空间曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程为 $\underline{\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0 \end{cases}}$

3. 已知 $x^2+y^2+z^2=3xyz$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\dfrac{3yz-2x}{2z-3xy}}$

4. 交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ ____

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{-p^2+5p-5}}$ 绝对收敛，则 p 满足 $\underline{2<p<3}$

6. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{3n+1}}{n^2+\ln n}$ 的收敛域为 $\underline{[-2,0]}$

7. 设 $a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 在收敛域上的和函数是 $S(x)$，

   则 $S(x)=\underline{\dfrac{1}{1-x-x^2}}$

8. 微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解为 $\underline{y=e^{-\sin x}(x+C)}$

9. 对 $y''=f(y,y')$ 型二阶微分方程,令 $y'=p$,则 $y''=\underline{p\dfrac{dp}{dy}}$

10. $y_x=\sin ax$ 的一阶差分是 $\underline{2\cos a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{a}{2}}$ 或 $\underline{\sin a(x+1)-\sin ax}$

二、选择题(每题 2 分，共计 10 分)

1．由 $y=e^x$，及其过原点的切线和 y 轴所围成的平面图形的面积是（　C　）

（A）e　　（B）$\frac{e}{2}$　　（C）$\frac{e}{2}-1$　　（D）$\frac{e}{2}+1$

2．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　A　）

(A) 不可微，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在
(C) 连续，可微　　(D) 不连续，偏导数不存在

3．$f_x'(x_0,y_0)$ 与 $f_y'(x_0,y_0)$ 均存在是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的（　D

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

4．下列叙述正确的是（　B　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时敛散　（B）若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

（C）若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　（D）若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$

5．设 $a_n>0, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda>0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\tan\frac{\lambda}{n}a_n$（　A　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）收敛性与 λ 有关

三、计算题(每题 6 分，共计 36 分)

1．计算 $y=\ln x, x=1, x=e, y=0$ 所围平面图形分别绕 x, y 轴所得旋转体体积.

解: 绕 x 轴旋转体积：$V_x=\pi\int_1^e(\ln x)^2dx=\pi(e-2)$.

绕 y 轴旋转体积：$V_y=2\pi\int_1^e x\ln x dx=\frac{\pi}{2}(\frac{e^2}{2}+1)$.

2．求 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

解：由 $\begin{cases} z_x = 2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ z_y = 2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$，

解得驻点 $(0,0)$ 及 $x^2+y^2=1$. 再由 $A=z_{xx}(0,0)=2, B=z_{xy}(0,0)=0, C=z_{yy}(0,0)=2$，

$\Delta = B^2-AC=-4<0, A>0$ 知 $f(0,0)=0$ 为极小值. （4 分）

令 $x^2+y^2=t$，则 $z=te^{-t}$，由 $z'(t)=0$ 得驻点 $t=1$，且有 $z''(1)=-e^{-1}<0$ 知在 $t=1$ 处取的极大值，即函数 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上取得极大值 e^{-1}.（2 分）

3．计算二重积分 $\iint\limits_D (|x|+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$ 为 $|x|+|y|\le 1$.

解：利用对称性有 $\iint\limits_D (|x|+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D |x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ （2 分）

$$=2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x-1}^{-x+1} x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$$ （4 分）

4．计算二重积分 $\iint_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 与坐标轴所围成的第一象限内的闭区域.

解：作极坐标变换，则积分可化为

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\,\mathrm{d}r$$ （2 分）

$$=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$ （4 分）

5．将 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$ 展开成麦克劳林级数.

解：$\ln(1+x+x^2+x^3+x^4) = \ln\left(\dfrac{1-x^5}{1-x}\right) = \ln(1-x^5)-\ln(1-x)$ （3 分）

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n}$$,收敛域为[-1,1) . （3 分）

6．求 $y_{x+2}+\frac{1}{4}y_x=5$ 满足初始条件 $y_0=5, y_1=6$ 的解.

解：特征方程为 $r^2+\frac{1}{4}=0$，特征根为 $r_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{2}\right)$，

故齐次方程通解为 $Y_x=(\frac{1}{2})^x\left(C_1\cos\frac{\pi}{2}x+C_2\sin\frac{\pi}{2}x\right)$.　　（2 分）

设特解 $y_x^*=A$，代回原方程可得 $A=4$，

故方程通解为 $y_x=(\frac{1}{2})^x\left(C_1\cos\frac{\pi}{2}x+C_2\sin\frac{\pi}{2}x\right)+4$，　　（2 分）

由初始条件得 $C_1=1, C_2=4$，

故所求解为 $y_x=(\frac{1}{2})^x\left(\cos\frac{\pi}{2}x+4\sin\frac{\pi}{2}x\right)+4$.　　（2 分）

四、（本题 7 分） 设 $z=z(u,v)$, $u=x^2-y^2, v=2xy$, 将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 化为关于 u,v 的方程.

解：由于 $z_x=2xz_u+2yz_v$，$z_y=-2yz_u+2xz_v$，　　（2 分）

由此得 $z_{xx}=2z_u+4x^2z_{uu}+8xyz_{uv}+4y^2z_{vv}$，

$z_{yy}=-2z_u+4y^2z_{uu}-8xyz_{uv}+4x^2z_{vv}$，　　（3 分）

将它们回代原方程并化简即得所求方程为 $2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}=0$.　　（2 分）

五、（本题 7 分） 某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是 $p_1=18-2Q_1, p_2=12-Q_2$，其中 p_1, p_2 为售价，Q_1, Q_2 为销售量，总成本函数为 $C=2(Q_1+Q_2)+5$.如果企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量

和统一的价格，使该企业总利润最大化，并求出最大利润是多少?

解: 由于价格无差别，固有 $p_1 = p_2$，从而得约束条件 $2Q_1 - Q_2 = 6$. 即求在该约束条件下，

总利润函数 $P = R - C = p_1Q_1 + p_2Q_2 - [2(Q_1 + Q_2) + 5] = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5$

的极值.

构造 Lagrange 函数 $L(Q_1, Q_2, \lambda) = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5 + \lambda(2Q_1 - Q_2 - 6)$，由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = -4Q_1 + 16 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_2} = -2Q_2 + 10 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2Q_1 - Q_2 - 6 = 0 \end{cases} \qquad (5 \text{ 分})$$

得 $Q_1 = 5, Q_2 = 4, \lambda = 2,$ 对应的统一价格为 $p_1 = p_2 = 8$，此时可取得最大利润

$$P = \left(-2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5\right)\Big|_{Q_1=5,Q_2=4} = 49. \qquad (2 \text{ 分})$$

六、(本题 7 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 在收敛域 $(-\infty, +\infty)$ 上的和函数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(3n)!}$ 的值.

解: 设 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$，则有 $S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x$，且满足 $S(0) = 1, S'(0) = 0$.

由此可解出微分方程通解 $S(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \dfrac{1}{3}e^x$, (4 分)

由 $S(0) = 1, S'(0) = 0$ 可得微分方程特解 $S(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \dfrac{1}{3}e^x$, (2 分)

故所求级数和为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(3n)!} = \dfrac{1}{3}e + \dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (1 分)

七、（本题 7 分） 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-(1+\frac{1}{n})^{n}\right)^{p}$ 的敛散性.

解：当 $p\le 0$ 时，一般项不趋于 0，故此时发散； (2 分)

当 $p>0$ 时，由 $e-(1+\frac{1}{n})^{n}=e(1-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1})$，由 $n\ln(1+\frac{1}{n})=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^{2}}+o(\frac{1}{n^{2}})$

知当 n 充分大时有

$\left(e-(1+\frac{1}{n})^{n}\right)^{p} \sim \frac{1}{(2n)^{p}}$，由此知：当 $0<p\le 1$ 时，级数发散，当 $p>1$ 时，级数收敛

(5 分)

八、（本题 6 分） 设 $a_n>0$ ，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ，

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

证明：因为 $a_n>0$，故 S_n 单调增. (2 分)

所以
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k^2}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_kS_{k-1}}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}\le\frac{1}{a_1}$$

故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 有界，从而收敛. (4 分)