第三节 泰勒 (Taylor)公式

用多项式近似表示函数 — 应用 $\begin{cases}\text{理论分析}\\ \text{近似计算}\end{cases}$

一、泰勒公式的建立

二、几个初等函数的麦克劳林公式

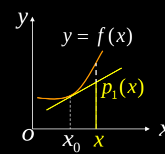
三、泰勒公式的应用

一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

$$f(x)\approx \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



特点: $p_1(x_0)=f(x_0)$

$p_1'(x_0)=f'(x_0)$

需要解决的问题 $\begin{cases}\text{如何提高精度？}\\ \text{如何估计误差？}\end{cases}$

1. 求 n 次近似多项式 $p_n(x)$, 要求:

$$p_n(x_0)=f(x_0),\ p_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,\ p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

令 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

则 $p_n'(x)=\quad a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$

$p_n''(x)=\quad 2!a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$p_n^{(n)}(x)=\quad n!a_n$

$a_0=p_n(x_0)=f(x_0),\qquad a_1=p_n'(x_0)=f'(x_0),$

$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),\cdots,a_n=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

故 $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

2. 余项估计

令 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$(称为余项)，则有

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\quad(\xi_1\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\quad(\xi_2\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间})$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n-x_0)-0}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$\because p_n^{(n+1)}(x)=0,\ \therefore R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$ 时

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

$$\therefore R_n(x)=o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0)$$

泰勒中值定理：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\quad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间) ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式**.

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的**拉格朗日余项**.

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]\qquad ④$$

公式 ③ 称为 n 阶泰勒公式的**佩亚诺(Peano) 余项**.

* 可以证明:

$f(x)$ 在点 x_0 有直到 n 阶的导数

$\Longrightarrow$ ④ 式成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
(ξ 在 x_0 与 x 之间)

特例:

(1) 当 $n=0$ 时, 泰勒公式给出拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n=1$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

可见 $f(x)\approx f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\mathrm{d}f}$

误差 $R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

在泰勒公式中若取 $x_0=0,\ \xi=\theta x\ (0<\theta<1)$, 则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为**麦克劳林 (Maclaurin) 公式** .

由此得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$, 则有误差估计式

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x)=e^x$

$\because\ f^{(k)}(x)=e^x,\quad f^{(k)}(0)=1\quad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad (0<\theta<1)$

(2) $f(x)=\sin x$

$\because\ f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases}\qquad (m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\frac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\qquad (0<\theta<1)$

(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}\qquad (0<\theta<1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \quad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$(0<\theta<1)$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

三、泰勒公式的应用

1. 在近似计算中的应用

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)|\le\dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

M 为 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1) 已知 x 和误差限 , 要求确定项数 n ;
2) 已知项数 n 和 x , 计算近似值并估计误差;
3) 已知项数 n 和误差限 , 确定公式中 x 的适用范围.

例1. 计算无理数 e 的近似值 , 使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

令 $x=1$, 得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1)$$

由于 $0<e^{\theta}<e<3$, 欲使

$$|R_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-6}$$

由计算可知当 $n=9$ 时上式成立 , 因此

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}=2.718281$$

说明: 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e\approx 1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 6 位, 则

各项舍入误差之和不超过 $7\times0.5\times10^{-6}$,

总误差为 $7\times0.5\times10^{-6}+10^{-6}<5\times10^{-6}$

这时得到的近似值**不能保证**误差不超过 10^{-6}.

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位 .

例2. 用近似公式 $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值, 使其精确到 0.005 , 试确定 x 的适用范围.

解: 近似公式的误差

$$|R_3(x)|=\left|\frac{x^4}{4!}\cos(\theta x)\right|\le\frac{|x|^4}{24}$$

令 $\dfrac{|x|^4}{24}\le 0.005$

解得 $|x|\le 0.588$

即当 $|x|\le 0.588$ 时, 由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005 .

2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则不方便!

解: 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\tfrac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$
$$=2[\,1+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{3}{4}x)+\tfrac{1}{2!}\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\,(\tfrac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,]$$
$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\tfrac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明 $\sqrt{1+x}>1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\quad(x>0)$.

证: $\because\ \sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$
$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3\qquad(0<\theta<1)$$
$$\therefore\quad \sqrt{1+x}>1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\quad(x>0)$$

内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0=0$ 时为**麦克劳林公式**.

2. 常用函数的麦克劳林公式

e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$

3. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数 , 例如 $\sin x$

(3) 其他应用 ——— 求极限 , 证明不等式 等.

思考与练习

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解: $\because\ e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

备用题 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数 , 且 $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(\frac{1}{2})=0$, 证明 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $|f'''(\xi)|\ge 24$.

证: 由题设对 $x\in[0,1]$, 有

$$f(x)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})\,(x-\tfrac{1}{2})^2$$
$$+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$
$$=f(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})\,(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

(其中 ζ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1$, 得

$$1 = f(0) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \tfrac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_2 \in (\tfrac{1}{2}, 1))$$

下式减上式，得

$$1 = \frac{1}{48}[\, f'''(\zeta_2) + f'''(\zeta_1)\,] \le \frac{1}{48}[\,|f'''(\zeta_2)| + |f'''(\zeta_1)|\,]$$

令 $|f'''(\xi)| = \max(|f'''(\zeta_2)|, |f'''(\zeta_1)|)$

$$\le \frac{1}{24}|f'''(\xi)| \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\Longrightarrow |f'''(\xi)| \ge 24$$

2. 证明 e 为无理数 .

证: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$

两边同乘 $n!$

$$n!e = \text{整数} + \frac{e^\theta}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设 e 为有理数 $\frac{p}{q}$ (p , q 为正整数) ,

则当 $n \ge q$ 时，等式左边为整数;

当 $n \ge 2$ 时，等式右边不可能为整数.

矛盾！故 e 为无理数 .