例11-1 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$ 的收敛性.

解 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$

由于级数收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,

此题不满足,故该级数发散.

例11-2 判定级数 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$ 的收敛性.

解 原级数是由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ 逐项相加而得到的,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ 收敛.这是因为前者是调和级数,后者是公比为1/4的等比级数. 于是,原级数成为一收敛级数与一发散级数逐项相加而得到的级数,由级数性质可推知原级数发散.

例11-3 判定级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$ 的收敛性.

解 将原级数加括号使之成为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\cdots$$

通项为 $b_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\frac{2}{n-1}$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由级数性质——如果加括号后所成的级数发散, 则原来级数也发散,可以知道, 此题所给级数发散.

例11-4 设 $u_n\geq 0$, 且级数

$$u_1+(u_2+u_3+u_4)+(u_5+u_6+u_7+u_8+u_9)+\cdots+(u_{(n-1)^2+1}+\cdots+u_{n^2})+\cdots$$

收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

$$\sigma_k=u_1+(u_2+u_3+u_4)+\cdots+(u_{(k-1)^2+1}+\cdots+u_{k^2})=s_{k^2}$$

由于原级数收敛, 必有 $\{\sigma_k\}=\{s_{k^2}\}$ 有上界, 对任何 n 必有 k, 使 $n\leq k^2$, 故 $s_n\leq s_k$, 从而 $\{s_n\}$ 也有上界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

例11-5 利用级数收敛的定义判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 的收敛性.

解 $u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right),$

$$s_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right],$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

由级数收敛定义知此级数收敛于1/3.

例11-6 设 $a>1$, 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb+c}{a^n}$ 的收敛性.

解 $s_n=\frac{b+c}{a}+\frac{2b+c}{a^2}+\cdots+\frac{(n-1)b+c}{a^{n-1}}+\frac{nb+c}{a^n},$

$$\frac{1}{a}s_n=\frac{b+c}{a^2}+\frac{2b+c}{a^3}+\cdots+\frac{(n-1)b+c}{a^n}+\frac{nb+c}{a^{n+1}}.$$

二式相减得 $\frac{a-1}{a}s_n=\frac{b+c}{a}+\frac{b}{a^2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^{n-2}}\right)-\frac{nb+c}{a^{n+1}},$

再经计算可得 $s_n=\frac{a}{a-1}\left[\frac{b+c}{a}+\frac{b}{a^2}*\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{a}}-\frac{nb+c}{a^{n+1}}\right]$

于是 $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{(b+c)a-c}{(a-1)^2}.$

故由级数收敛的定义可知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb+c}{a^n}$ 是收敛的.

例11-7 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2+2})^{\frac{1}{n}}$ 的收敛性.

解 令 $f(x)=(\frac{1}{x^2+2})^{\frac{1}{x}}$,

则 $$\lim_{x\to\infty} f(x)=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln(x^2+2)}{x}$$
$$=\exp\lim_{x\to\infty}(-\frac{2x}{x^2+2})=e^0=1$$

故 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+2})^{\frac{1}{n}}=1\neq 0$, 该级数发散.

例11-8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^n}{n!}$ 的收敛性.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n\cdot n^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3(1+\frac{1}{n})^n=3e>1.$$

由比值审敛法知原级数发散.

例11-9 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\arctan\frac{1}{4^n}$ 的收敛性.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\arctan\frac{1}{4^{n+1}}}{\sqrt{n}\arctan\frac{1}{4^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}}=\frac{1}{4}<1.$$

由比值审敛法知该级数收敛.

例11-10 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{2\cdot 7\cdots(5n-3)}$ 的收敛性.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)(3n+2)}{2\cdot 7\cdots(5n-3)(5n+2)}\cdot\frac{2\cdot 7\cdots(5n-3)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)}{(5n+2)}=\frac{3}{5}<1.$$

由比值审敛法知该级数收敛.

例11-11 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n n!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

由比较审敛法知该级数绝对收敛.

例11-12 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^2+n^5}$ 的收敛性.

解 $$u_n=\frac{n^2}{1+n^2+n^5}<\frac{n^2}{n^2+n^5}=\frac{1}{1+n^3}<\frac{1}{n^3},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛, 由比较审敛法知原级数收敛.

例11-13 判定级数 $\frac{3}{2\arctan 1}+\frac{9}{4\arctan^2 2}+\frac{27}{8\arctan^3 3}+\cdots$ 的收敛性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\arctan n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{3}{\pi}<1.$

由根值法知原级数收敛. ▌

例11-14 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n}$ 的收敛性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n}}{1/n^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}}=5.$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 根据比较法的极限形式

可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛. ▌

例11-15 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^{5/4}}$ 的收敛性.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^{5/4}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{5/4}}.$ 取a, 使 $\frac{5}{4}-a>1.$

注意到 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0,$

$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{5}{4}-a}\cdot\frac{\ln n}{n^{5/4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^a}=0.$

由极限审敛法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{5/4}}$ 收敛, 从而级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^{5/4}}$ 绝对收敛. ▌

例11-16 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2n}}{n+100}$ 的收敛性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{n+100}=0,$

设 $f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{x+100}\ (0<x<+\infty)$

则 $f'(x)=\frac{100-x}{\sqrt{2x}(x+100)^2}\ (x>100),$

故当$x>100$时, $f(x)$单调减少,因此$u_n>u_{n+1}$ ($n>100$).

由莱布尼茨审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2n}}{n+100}$ 收敛.

又 $\frac{\sqrt{2n}}{n+100}>\frac{\sqrt{2n}}{n+n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\ (n>100),$

而 $\sum\limits_{n=101}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 由比较法知

$\sum\limits_{n=101}^{\infty}\frac{\sqrt{2n}}{n+100}$ 也发散, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n}}{n+100}$ 亦发散.

总之, 原级数条件收敛. ▌

例11-17 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{2n+100}{3n+1})^n$ 的收敛性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1.$

由根值审敛法可知该级数绝对收敛. ▌

例11-18 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ **的收敛性.**

解 $|u_n|=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=u,$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0.$

由莱布尼茨判定法可知级数收敛.

然而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ **发散,**

原级数条件收敛.

例11-19 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ **的收敛性.**

解 由于ln(1+1/*n*) < 1,即ln(*n*+1)-ln*n* < 1,

从而1-ln(*n*+1) > -ln*n*, 推出(*n*+1)-ln(*n*+1) > *n*-ln*n*,

得$|u_{n+1}|<|u_n|\,(n=1,2,\cdots).$

注意到 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-\frac{\ln x}{x})},$

又 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\ln x}=0.$

由莱布尼茨判定法可知该级数收敛,

又 $\frac{1}{n-\ln n}\geq\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots),$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$**发散, 由比较审敛法可知** $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}\right|$**发散.**

总之, 原级数条件收敛.

例11-20 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3+a^n}$ **(*a* > 0)的收敛性.**

解 当*a* <1时, $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+a^n}=\frac{1}{3}\neq 0$

级数发散;

当*a* >1时, $|u_n|=\frac{1}{3+a^n}<\frac{1}{a^n}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ **收敛,故原级数绝对收敛.**

例11-21 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ **的收敛性.**

解 $|u_n|=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}<\frac{n}{2^n},$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$**是收敛, 因为** $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1.$

最后可知原级数绝对收敛.

例11-22 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$ **的收敛性.**

解 $|u_n|=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx\leq\int_0^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}dx$

$=(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{3/2}},$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ **收敛, 由比较法可知原级数绝对收敛.**

例11-23 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$收敛, 试证: 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛.

证 $|u_nv_n|\le\frac{u_n^2+v_n^2}{2}$, 显然, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$收敛.

由比较法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛.

这说明原级数绝对收敛.

例 11-24 设$f(x)$二阶连续可导于U(0, δ)内, 且

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$, 试证级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

证 由于$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$, 故$\lim_{x\to0}f(x)=0$,

于是$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$,

即$f'(0)=0$. 在U(0, δ)内,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2$$
$$=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\quad(\xi\in(0,x))$$

由于$f''(x)$连续, 在U(0, δ)再取以0为中心的小闭区间I$\subset$U(0, δ), 在I上, 必有$M>0$, 使$|f''(x)|\le M$,

此时$|f''(\xi)|\le M$. 取$x=\frac{1}{n}$, 只要n充分大,

即可保证$|f''(x)|\le M$. 于是$\left|f''(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$,

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$是收敛的, 由比较法可知级数

$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

例11-25 设$f(x)$在x=0的某邻域内有连续的二阶导数, $f(x)$为偶函数, 且$f(0)=1$, $f''(0)=2>0$. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$的收敛性.

解 由于$f(x)$是可导的偶函数, 故$f'(0)=0$.

又$f''(0)=2>0$, 故$f(0)=1$是$f(x)$的一个极小值.

只要n充分大, $\frac{1}{n}$就靠近0, $f(\frac{1}{n})$就会大于$f(0)=1$,

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$去掉前面有限项后是正项级数.

不妨假定$n\ge n_0$时成立. 此时, 在x=0充分小的邻域内,

即使$f(\frac{1}{x})>1$的邻域内,将$f(x)$展开成二阶泰勒公式, 有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$
$$=1+\frac{1}{2}\cdot2x^2+o(x^2)=1+x^2+o(x^2).$$

取$x=\frac{1}{n}$, 有$f(\frac{1}{n})=1+(\frac{1}{n})^2+o(\frac{1}{n^2})$,

于是$f(\frac{1}{n})-1\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$.

级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$收敛, 从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$绝对收敛.

例11-26 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$的收敛域.

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}\sqrt{n}}\cdot\frac{3^n\sqrt{n+1}}{1}=3.$$

当x=3时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

很容易由由莱布尼茨审敛法可知该级数收敛;

当x=-3时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

故原级数之收敛区间为(- 3, 3].

例11-27 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$ 的收敛域.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n x^{2n}}{2^{n-1}x^{2(n-1)}}\right|=\left|2x^2\right|$,

当$|2x^2|<1$, 即$|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$时, 级数收敛;

$|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 级数发散;

$|x|=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 级数一般项为1, 级数发散.

故原级数收敛域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

例11-28 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-4)^n$ 的收敛域.

解 收敛半径为 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}\right|=1.$

当x-4=1时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,

由莱布尼茨判定法可知该级数收敛;

当x-4=-1时, 级数成为$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 此级数显然发散.

解不等式-1< x-4 ≤ 1, 得3 < x ≤ 5, 原级数收敛域为(3, 5].

例11-29 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}x^n$的收敛域.

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{n}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{1}{3}.$$

当x=1/3时, 级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}(\frac{1}{3})^n$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n}\right].$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 由比值法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛, 故

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$ 发散.

当x=-1/3时, 级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+(-1)^n\frac{1}{n}\right],$$

容易判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

都收敛, 故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛.

原级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

例11-30 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$ 的收敛域.

解 设 $y=\frac{1}{x}$, 则级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}n^2y^n$, 对于新级数,

由于 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$, 又在$y$ = ±1时级数发散,

故此级数收敛域为-1<y<1, 即 $-1<\frac{1}{x}<1$.

故原级数收敛域为(-∞, -1)∪(1, +∞).

例11-31 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域为(-4, 4],

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$的收敛域.

解 显然$\sum_{n=0}^{\infty}a_n4^n$ 收敛. 对于后一幂级数,

取x=2, 成为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n2^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}a_n4^n$, 故收敛;

当x=-2时, 成为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-2)^{2n+1}=-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n4^n$, 亦收敛.

设有$|x_1|>2$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1^{2n}$收敛, 那么

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1^{2n+1}=x_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1^{2n}=x_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x_1^2\right)^n$ 收敛,

而$\left|x_1^2\right|>4$. 这与原级数收敛域为(-4, 4]相矛盾,

故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1^{2n}$ 发散.

总之, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n+1}$的收敛域为[-2, 2].

例11-32 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域.

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{n+1}{4^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\frac{1}{4}.$$

$x+1=\frac{1}{4}$时, 级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛,

故此时幂级数发散;

$x+1=-\frac{1}{4}$ 时, 级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 都是收敛的,

故此时幂级数收敛.

由$-\frac{1}{4}\le x+1<\frac{1}{4}$, 解出$-\frac{5}{4}\le x+1<-\frac{3}{4}$.

所给幂级数的收敛域为$\left[-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$.

例11-33 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

解 令 $y=\frac{x}{2x+1}$, 则级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y^n$,

后者的收敛半径显然为1.

当 $y=1$时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, 发散;

当 $y=-1$时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(-1)^n$, 发散;

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y^n$ 的收敛域为(-1, 1).

由$-1\le\frac{x}{2x+1}<1$, 解出$-\frac{1}{3}<x<+\infty$或$-\infty<x<-1$.

原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域为

$$(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right).$$

例11-34 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-2)^n(x+2)^n$ 的收敛域.

解 令$x^2-4=t$, 则级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$.

容易求得后者的收敛域为[-1, 1).

由$-1\le t<1$, 得$-1\le x^2-4<1$, 解出 $\sqrt{3}\le|x|<\sqrt{5}$,

原级数收敛域为 $\left(-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$.

例11-35 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$在$x = 3$处条件收敛，求该幂级数的收敛半径$R$.

解 设$y = x+1$, 由于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$在$x = 3$处条件收敛, 所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$在$y = 4$处条件收敛, 从而幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$的收敛半径为$R = 4$.

否则, 存在$y_0>4$, 使得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$在$y=y_0$处收敛.

根据阿贝尔定理知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$在$|y|<y_0$内绝对收敛.

从而推出$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$在$y = 4$处绝对收敛.

这与$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$在$y = 4$处条件收敛矛盾.

所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$的收敛半径$R = 4$.

例11-36 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$的收敛区间及和函数.

解 当$-1<x-1<1$, 即当$0<x<2$时, 幂级数绝对收敛.

在收敛区间$(0, 2)$内

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = \left[\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}\right) dx\right]' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n(x-1)^{n-1} dx\right)' = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\right]' = \left[\frac{x-1}{1-(x-1)}\right]' = \frac{1}{(2-x)^2}$$

例11-37 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n} x^{2n-2} (|x|<\sqrt{3})$的和函数, 并求级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$的和.

解 当$|x|<\sqrt{3}$, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n-2} \cdot \frac{1}{3}$,

$$\int_0^x s(x)\,dx = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (2n-1)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n-2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{x}{3-x^2},$$

$$s(x) = \left(\frac{x}{3-x^2}\right)' = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2} \quad (|x|<\sqrt{3}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1+2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

$$= S(1) + 2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3+1}{(3-1)^2} + 2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$= 1+1 = 2.$$

例11-38 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}$的和.

解 作幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n}$ $(|x|<1)$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' dx$$

$$= x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}\right)dx = x\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 1).$$

故可利用此公式求原级数的和, 只需令$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$即可.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

例11 -39 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n \ (|x|<1)$的和函数.

解 设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n \ (|x|<1)$，则有

$$\int_0^x s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

再令$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,显然此级数收敛域亦为(-1, 1),

在此区间内 $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n\,t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$,

从而 $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$,

进一步 $\int_0^x s(t)\,dt=\frac{x^2}{(1-x)^2}$,

故 $s(x)=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}$,

亦即$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1).$

例11 -40 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$的和函数.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+3}{n+1}x^{2n+2}\Big/\frac{2n+1}{n}x^{2n}\right]=x^2.$

当$x=\pm1$时, 级数发散. 收敛域为(-1, 1). 在收敛域内

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\frac{2x^2}{1+x^2}+\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\right)'dx$$

$$=\frac{2x^2}{1+x^2}+\int_0^x\left(2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}\right)dx$$

$$=\frac{2x^2}{1+x^2}+\int_0^x\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{2x^2}{1+x^2}+\ln\left(1+x^2\right)$$

收敛域为(-1, 1).

例11 -41 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$的和函数.

解 首先求收敛域, 有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$,

当$-1<x<1$时, 级数收敛; 当$x=\pm1$时, 级数发散. 故原级数之收敛域为(-1, 1).

设所给级数的和函数为$s(x)$, 则

$$s(x)=x^2+2x^4+3x^6+\cdots+nx^{2n}+\cdots,$$

$$x^2s(x)=x^4+2x^6+3x^8+\cdots+(n-1)x^{2n}+\cdots,$$

$$\left(1-x^2\right)s(x)=x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots=\frac{x^2}{1-x^2}.$$

故 $s(x)=\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$.

例11 -42 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$的和.

解 当$x=1$时, 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$即为所给的数项级数,

显然其收敛半径为$R=+\infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x,$$

乘x得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=xe^x$,

求导得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=(x+1)e^x$,

再乘x得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+1}=\left(x^2+x\right)e^x,$

再求导, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n=\left(x^2+3x+1\right)e^x$

令x=1得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=5e.$

例11 -43 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$的和函数.

解 容易验证此幂级数的收敛域为(-∞, +∞).

注意到$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 故$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'$$
$$=\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)\right]'=\left[x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}-1\right)\right]'$$
$$=\left(xe^{x^2}-x\right)'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-1\quad(-\infty,+\infty).$$

例11 -44 将函数$\frac{1}{(1-x)^2}$展开为x的幂级数.

解 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1.$

故 $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\quad(|x|<1).$

例11 -45 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$展开为麦克劳林级数.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right]$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n\quad(-1<x<1).$$

例11 -46 将$f(x)=\ln(2x^2+x-3)$在$x_0=3$处展开成幂级数.

解 $f(x)=\ln(2x^2+x-3)=\ln(2x+3)+\ln(x-1)$

$$=\ln\left[9+2(x-3)\right]+\ln\left[2+(x-3)\right]$$
$$=\ln 9+\ln\left[1+\frac{2}{9}(x-3)\right]+\ln 2+\ln\left[1+\frac{x-3}{2}\right]$$
$$=\ln 9+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left[\frac{2(x-3)}{9}\right]^n+\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$$
$$=\ln 18+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right](x-3)^n$$

收敛域为满足$-1<\frac{2}{9}(x-3)\le 1$和$-1<\frac{x-3}{2}\le 1$的公共区间, 即$1<x\le 5$.

例11 -47 将$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$展开为$x$的幂级数,

并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$的和.

解 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad |x|<+\infty,$

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots\quad |x|<+\infty,\ x\ne 0.$$

故 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}+\cdots\quad(0\ne|x|<+\infty).$

从而 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}+\cdots=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}\quad(0\ne|x|<+\infty).$

令x=1得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(1-1)e+1}{1}=1.$