# 线性代数——先修课

# 第三章 矩 阵

## §3.7 逆矩阵的求法

# 内容提要

求逆矩阵的典型方法：

- 定义方法
- 伴随矩阵方法
- 初等变换方法
- 分块矩阵求逆方法

## (一) 逆矩阵的求法1——定义法

回顾: 逆矩阵定义中的条件:

(1) $A, B$都是$n$阶方阵, (2) $AB = I_n$, (3) $BA = I_n$.

—— 任意两个可推出第三个.

例1 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$, 其中$a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$, 求 $A^{-1}$.

分析: 若$AB = I_n$, 其中$A$与$I_n$均为对角阵，猜测$B$也是 ($n$阶) 对角阵；再由条件$a_{ii} \neq 0$, 用定义可验证结果.

解：由于$a_{ii} \neq 0$，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

**例2** 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, 其中$a_{11}, a_{22} \neq 0$, 求 $A^{-1}$.

**分析:** 若$AB=I_2$, 其中$A$与$I_2$均为上三角阵，猜测$B$也是2阶上三角阵，再由待定系数法，可求出$B$.

**解:** 设 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$, 若 $I_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}b_{11}=1 \\ a_{22}b_{22}=1 \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11}=a_{11}^{-1} \\ b_{22}=a_{22}^{-1} \\ b_{12}=-a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \end{cases} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

**例3** 设方阵$A$满足$A^2-2A+4I=O$，证明：$A+I$ 和$A-3I$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

**分析:** 关于$A$是多项式，$A^i$与$A^j$乘法可交换，可按通常方法分解多项式，希望能凑出$A+I$ 和$A-3I$ 的项.

**解:**

$$A^2-2A+4I=(A+I)(A-3I)+7I=O$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{7}(A+I)(A-3I)=I$$

由定义知 $(A+I)^{-1}=-\frac{1}{7}(A-3I)$； $(A-3I)^{-1}=-\frac{1}{7}(A+I)$.

**练习题** 设方阵$A$满足$A^k=O$, $k$ 为正整数，求 $(I-A)^{-1}$.

**提示：** 由 $I-A^k=I$, 分解左边即可.

## (二) 逆矩阵求法2——伴随矩阵法

回顾：伴随矩阵的定义：$A^* := \left(A_{ij}\right)^T_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

伴随矩阵的性质：$AA^* = A^*A = |A|I.$

若 $|A| \neq 0$，则$A^{-1} = |A|^{-1}A^*$，　$(A^*)^{-1} = |A|^{-1}A.$

对2阶方阵$A$：若$|A| \neq 0$，则 $A^{-1} = \dfrac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

(主对角线元素互换，副对角线元素取负)

**例2(续)** 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$，其中$a_{11}, a_{22} \neq 0$, 求 $A^{-1}$.

**分析:** 二阶矩阵求逆，伴随矩阵法是最方便的.

**解:** 由 $|A| = a_{11}a_{22} \neq 0$，知$A$可逆，且用伴随矩阵法得:

$$A^{-1} = |A|^{-1} A^* = a_{11}^{-1}a_{22}^{-1}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \underline{-a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}} \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

**例4** 求下面方阵 $A$ 的逆矩阵： $A=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\1&2&-2\end{bmatrix}$.

**解：** $\because |A|=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\1&2&-2\end{vmatrix}=-2\neq 0$，所以方阵 $A$ 可逆.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\2&-2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}3&-1\\2&-2\end{vmatrix}=4,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}3&-1\\2&0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix}=-3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1,$$

从而

$$A^*=\begin{bmatrix}-4&4&2\\2&-3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

于是

$$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$$

$$=\begin{bmatrix}2&-2&-1\\-1&3/2&1/2\\0&1/2&-1/2\end{bmatrix}.$$

## (三) 逆矩阵求法3——初等变换法

回顾：$n$阶方阵$A$可逆 $\Longleftrightarrow$ $A$ 经过若干次初等行变换后可化为$I_n$.

即 $P_s \cdots P_1 A = I$, 其中 $P_1, \cdots, P_s$ 为初等矩阵

$$\Rightarrow A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 = (P_s \cdots P_2 P_1) I,$$

说明：完全相同的初等行变换可以把 $I$ 化为 $A^{-1}$.

另一方面 $AA^{-1} = A(P_s \cdots P_2 P_1) = I,$

说明：经(顺序相反的)初等列变换可以把 $A$ 化为 $I$.

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 = I(P_s \cdots P_2 P_1),$$

说明：经(顺序相反的)初等列变换可以把 $I$ 化为$A^{-1}$.

综上，可得到求逆矩阵的初等变换法：

**行变换法：** 构造一个$n\times(2n)$阶分块矩阵：

$$\begin{bmatrix}A,I\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干初等行变换}}\begin{bmatrix}I,A^{-1}\end{bmatrix}$$

$$P_s\cdots P_1\begin{bmatrix}A,I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_s\cdots P_1A,P_s\cdots P_1I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1}A,A^{-1}I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I,A^{-1}\end{bmatrix}$$

**列变换法：** 构造一个$(2n)\times n$阶分块矩阵：

$$\begin{bmatrix}A\\I\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干初等列变换}}\begin{bmatrix}I\\A^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\I\end{bmatrix}P_s\cdots P_1=\begin{bmatrix}AP_s\cdots P_1\\IP_s\cdots P_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^{-1}\\IA^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\A^{-1}\end{bmatrix}$$

**例5** 用初等行变换求矩阵 $A$ 的逆矩阵: $A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$.

**解** 先将 $A$ 化为阶梯形矩阵，再化为单位阵：

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r1+r3]{r1\leftrightarrow r2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&-3/2&-5/2\\0&1&0&1/2&1/2&1/2\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right],\quad\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-3&-5\\1&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}.$$

**验证：** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-3&-5\\1&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\overset{?}{=\!=\!=}I_3.$

初等变换过程，环环相扣
容易出错，故验证很关键

**例6** 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\-1&1&-3\end{bmatrix}$，试判断 $A$ 是否可逆.

**解**

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\-1&1&-3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&2&-1&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&0&0&1&-1&1\end{array}\right],$$

此时，$A$ 经初等行变换化为阶梯形矩阵时，出现全零行，则 $A$ 的行列式为零，故 $A$ 不可逆.

这**说明**：利用初等变换法，判断是否可逆与求逆可以同时进行.

- **进一步分析：**

如果在如下行、列初等变换法的过程中，把 $I$ 换成其他矩阵会如何？

$$P_s\cdots P_1\left[A,\overset{B}{\boxed{I}}\right]=\left[P_s\cdots P_1A,P_s\cdots P_1\overset{B}{\boxed{I}}\right]=\left[A^{-1}A,A^{-1}\overset{B}{\boxed{I}}\right]=\left[I,\overset{A^{-1}B}{\boxed{A^{-1}}}\right]$$

$$\begin{bmatrix}A\\ \underset{C}{\boxed{I}}\end{bmatrix}P_s\cdots P_1=\begin{bmatrix}AP_s\cdots P_1\\ \underset{C}{\boxed{I}}P_s\cdots P_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^{-1}\\ \underset{C}{\boxed{I}}A^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\ \underset{CA^{-1}}{\boxed{A^{-1}}}\end{bmatrix}\qquad(A^{-1}=P_s\cdots P_2P_1)$$

$\Rightarrow$ $A^{-1}[A,B]=\left[I,A^{-1}B\right]$, $\Rightarrow$ $[A,B]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[I,A^{-1}B\right]$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix}I\\CA^{-1}\end{bmatrix}$, $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}I\\CA^{-1}\end{bmatrix}$

**例7** 求如下矩阵方程 $XA=C$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&2\\5&6\\7&8\end{pmatrix}$.

**解** 由$|A|=-2$知，$A$可逆，则$X=CA^{-1}$，对如下分块矩阵进行初等列变换，

$$\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}1&2\\3&4\\\hdashline 0&2\\5&6\\7&8\end{array}\right]\xrightarrow{(-2)c1+c2}\left[\begin{array}{cc}1&0\\3&-2\\\hdashline 0&2\\5&-4\\7&-6\end{array}\right]\xrightarrow{(-1/2)c2}\left[\begin{array}{cc}1&0\\3&1\\\hdashline 0&-1\\5&2\\7&3\end{array}\right]\xrightarrow{(-3)c2+c1}\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hdashline 3&-1\\-1&2\\-2&3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}I\\CA^{-1}\end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow\quad X=CA^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&2\\-2&3\end{bmatrix}.$$

# (四) 逆矩阵求法4——分块矩阵求逆法

本部分讨论一些特殊的分块矩阵的求逆问题. 利用分块矩阵的运算律，以及逆矩阵的定义，可以验证如下结论：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ 可逆 $\Leftrightarrow A_{11},\cdots,A_{nn}$ 均可逆, 此时 $$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22}^{-1} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

($A_{ii}$为方阵)

(准三角形矩阵)　　(准三角形矩阵)

特别地，若 $A=\mathrm{diag}(A_{11},\cdots,A_{nn})$ ，则 $A^{-1}=\mathrm{diag}(A_{11}^{-1},\cdots,A_{nn}^{-1})$

(准对角矩阵)　　(准对角矩阵)

**例8** 试判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求出 $A^{-1}$.

**解:** 设$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{bmatrix}$, 其中$A_{11}=\begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, 且$|A_{11}|=4$, $|A_{22}|=9$,

从而 $|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|=36$, 所以 $A, A_{11}, A_{22}$ 均可逆. 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}X&Y\\O&Z\end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&Y\\O&Z\end{bmatrix}=I \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}X=A_{11}^{-1};\\ Z=A_{22}^{-1};\\ A_{11}Y+A_{12}A_{22}^{-1}=O,\end{cases} \quad\Rightarrow\quad Y=-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1},$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\O&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&0&0&0\\-1&1/2&-1/2&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}.$$

分块矩阵的原则之一：子块当元素做运算. 在引入了逆矩阵的概念后，我们可以讨论**分块矩阵的三角化（打洞）问题**.

$$
\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \boxed{O} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & \boxed{O} \\ A_{12} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} A_{11}\text{可逆时}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} A_{22}\text{可逆时}
$$

**例9** 设 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 $A$ 可逆，$D$ 为方阵，试证 $|M|=|A||D-CA^{-1}B|$，

进而证明，$M$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ $D-CA^{-1}B$ 可逆，并求 $M$ 的逆.

**证明**

$$\because \begin{bmatrix} I & O \\ \underline{-CA^{-1}} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \boxed{O} \\ \boxed{O} & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$$

从而，$M$ 可逆 $\Longleftrightarrow A$ 与 $D-CA^{-1}B$ 均可逆，且

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$$

# 本讲小结

- 定义法求逆
- 伴随矩阵法求逆
- 初等变换法求逆
- 分块矩阵求逆方法