第三节 定积分的换元法和分部积分法

第五章

不定积分

$\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{array}\right. \longrightarrow$ 定积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{array}\right.$

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

一、定积分的换元法

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

2) 在$[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在，且它们的原函数也存在 . 设 $F(x)$ 是 $f(x)$的一个原函数，则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数，因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$
$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当$\beta<\alpha$, 即区间换为$[\beta,\alpha]$时， 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意**换元必换限**，原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用，即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\quad(令\ x=\varphi(t))$$

或配元 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

配元不换限

例1. 计算 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

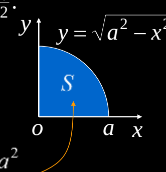
解: 令 $x=a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当$x=0$时, $t=0$; $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ 原式 $=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$



例2. 计算 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当$x=0$时, $t=1$; $x=4$时, $t=3$.

$\therefore$ 原式 $=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}$$

例3. 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

偶倍奇零

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$

证: $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

令 $x=-t$

$$=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x)时\\ 0, & f(-x)=-f(x)时\end{cases}$$

二、定积分的分部积分法

定理2. 设$u(x), v(x)\in C^1[a,b]$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

证: $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

两端在$[a,b]$上积分

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

例4. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例5. 证明 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

证: 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

令 $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, 则 $u' = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x$, $v = -\cos x$

$$\therefore\ I_n = \underbrace{[-\cos x\cdot\sin^{n-1} x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

由此得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

于是 $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$

$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1$

而 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$

故所证结论成立 .

内容小结

基本积分法 $\begin{cases}\text{换元积分法} \\ \text{分部积分法}\end{cases}$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

思考与练习

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\sin^{100} x}$

提示: 令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100} u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C_1$, $f(1) = 0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t = \ln x$, 求 $f(e)$.

解法1 $\ln x = \int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x^3) - f(1) = f(x^3)$

令 $u = x^3$, 得 $f(u) = \ln\sqrt[3]{u} = \frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(e) = \frac{1}{3}$

解法2 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3) = \frac{1}{x}$

令 $u = x^3$, 得 $f'(u) = \frac{1}{3u}$

$$\therefore\ f(e) = \int_1^e f'(u)\,\mathrm{d}u + f(1)$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$$

思考: 若改题为

$$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t = \ln x$$

$$f(e) = ?$$

提示: 两边求导, 得

$$f'(x) = \frac{1}{3x^3}$$

$$f(e) = \int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ **(分部积分)**

$$= \frac{1}{2}\left[x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

备用题

1. 证明 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以 π 为周期的函数.

证: $f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$$= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$= f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)\,\mathrm{d}x$

解: 右端 $= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ 分部积分积分

$$= \frac{1}{2}\left[(x-a)(x-b) f'(x)\right]\Big|_a^b$$

$$- \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$ 再次分部积分

$$= -\frac{1}{2}\left[(2x-a-b) f(x)\right]\Big|_a^b + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{左端}$$