第八章

第三节 全微分

一元函数 $y=f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases}\text{近似计算}\\ \text{估计误差}\end{cases}$$

本节内容:

一、全微分的定义

*二、全微分在数值计算中的应用

一、全微分的定义

定义: 如果函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 的内点 (x,y) 处全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示成

$$\Delta z = \boxed{A\Delta x + B\Delta y} + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 仅与 x, y 有关, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) **可微**, $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**, 记作

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$$

若函数在域 D 内各点都可微, 则称此函数**在 D 内可微.**

由微分定义:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$$

得 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

即 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x, y) 可微 $\Longrightarrow$ 函数在该点连续

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系:

(1) 函数可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数可微

定理1 (必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) **可微**, 则该函数在该点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且有

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 令 $\Delta y = 0$, 得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y} = B$, 因此有 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

注意: 定理1 的逆定理不成立 . 即:

偏导数存在函数 不一定可微 !

反例: 函数 $$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2 = 0\end{cases}$$

易知 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 但

$$\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \Big/ \rho = \frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 $(0,0)$ 不可微 .

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微分.

证: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y \quad \boxed{(0<\theta_1, \theta_2<1)}$$

$$= [f_x(x,y) + \alpha]\Delta x + [f_y(x,y) + \beta]\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0\right)$$

$\Delta z = \cdots$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0\right)$$

注意到 $\left|\dfrac{\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y}{\rho}\right| \le |\alpha| + |\beta|$, 故有

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微.

推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u = f(x,y,z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$\mathrm{d}\,u = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}\,x}_{\mathrm{d}_x u} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}\,y}_{\mathrm{d}_y u} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}\,z}_{\mathrm{d}_z u}$$

记作 $\mathrm{d}_x u$ $\mathrm{d}_y u$ $\mathrm{d}_z u$

$\mathrm{d}_x u, \mathrm{d}_y u, \mathrm{d}_z u$ 称为**偏微分**. 故有下述叠加原理

$$\mathrm{d}\,u = \mathrm{d}_x u + \mathrm{d}_y u + \mathrm{d}_z u$$

例1. 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = e^2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$\therefore\quad \left.\mathrm{d}\,z\right|_{(2,1)} = e^2\,\mathrm{d}\,x + 2e^2\,\mathrm{d}\,y = e^2(\mathrm{d}\,x + 2\mathrm{d}\,y)$$

例2. 计算函数 $u = x + \sin\dfrac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}\,u = 1\cdot\mathrm{d}\,x + (\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{y}{2} + z\,e^{yz})\,\mathrm{d}\,y + y\,e^{yz}\,\mathrm{d}\,z$

*二、全微分在数值计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x$ 及 $\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例3. 有一圆柱体受压后发生形变, 半径由 20cm 增大到 20.05cm , 高度由100cm 减少到 99cm , 求此圆柱体体积的近似改变量.

解: 已知 $V = \pi r^2 h$, 则

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

$r = 20,\quad h = 100,$

$\Delta r = 0.05,\quad \Delta h = -1$

$$\Delta V \approx 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.05 + \pi \times 20^2 \times (-1)$$

$$= -200\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

即受压后圆柱体体积减少了 $200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例4. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y) = x^y$, 则

$$f_x(x,y) = y\,x^{y-1},\quad f_y(x,y) = x^y \ln x$$

取 $x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0.04,\ \Delta y = 0.02$

则 $1.04^{2.02} = f(1.04,\ 2.02)$

$$\approx f(1,2) + f_x(1,2)\Delta x + f_y(1,2)\Delta y$$

$$= 1 + 2\times 0.04 + 0\times 0.02 = 1.08$$

2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差界，则

z 的绝对误差界约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差界约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

特别注意

(1) $z = xy$ 时，$\frac{\delta_z}{|z|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$

(2) $z = \frac{y}{x}$ 时，

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right|\delta_x + \left|\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x}\right|\delta_y = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

- 乘除后的结果相对误差变大
- 很小的数不能做除数

类似可以推广到三元及三元以上的情形.

例5. 利用公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$a = 12.5 \pm 0.01,\ b = 8.3 \pm 0.01,\ C = 30° \pm 0.1°$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

解: $\delta_S = \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\delta_a + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\delta_b + \left|\frac{\partial S}{\partial c}\right|\delta_c$

$$= \frac{1}{2}|b\sin C|\delta_a + \frac{1}{2}|a\sin C|\delta_b + \frac{1}{2}|ab\cos C|\delta_C$$

$a = 12.5,\ b = 8.3,\ C = 30°,\ \delta_a = \delta_b = 0.01,\ \delta_C = \frac{\pi}{1800}$

故绝对误差约为 $\delta_S = 0.13$

又 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\times 12.5\times 8.3\times \sin 30° \approx 25.94$

所以 S 的相对误差约为 $\frac{\delta_S}{|S|} = \frac{0.13}{25.94} \approx 0.5\,\%$

内容小结

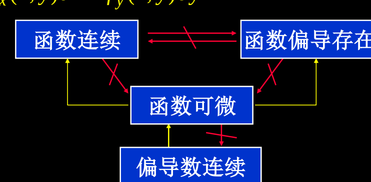
1. 微分定义: ($z = f(x,y)$)

$$\Delta z = \underline{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y} + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



3. 微分应用

- 近似计算

$$\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

- 估计误差

绝对误差 $\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$

相对误差 $\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$

思考与练习

1. 选择题

函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微的充分条件是(D)

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续;

(B) $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在;

(C) $\Delta z - f'_x(x,y)\Delta x - f'_y(x,y)\Delta y$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时是无穷小量;

(D) $\frac{\Delta z - f'_x(x,y)\Delta x - f'_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时是无穷小量.

2. 设 $f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$，求 $\mathrm{d}f\,\big|_{(0,0,0)}$.

解: $\because\ f(x,0,0)=\dfrac{x}{3+\cos x}$

注意: x, y, z 具有轮换对称性

$\therefore\ f_x(0,0,0)=\left(\dfrac{x}{3+\cos x}\right)'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{4}$

利用轮换对称性，可得

$$f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{d}f\,\big|_{(0,0,0)}=f_y(0,0,0)\,\mathrm{d}x+f_y(0,0,0)\,\mathrm{d}y+f_z(0,0,0)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

5. 已知 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\mathrm{d}z$.

答案: $\mathrm{d}z=\dfrac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

备用题

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在，但偏导数在点 (0,0) 不连续，而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

证: 1) 因 $\left|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|xy|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0=f(0,0)$

故函数在点 (0, 0) 连续 ;

2) $\because\ f(x,0)\equiv0$，$\therefore\ f_x(0,0)=0$；同理 $f_y(0,0)=0$.

3) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当点 $P(x,y)$ 沿射线 $y=|x|$ 趋于 (0,0) 时，

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(|x|\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right)$$

极限不存在，$\therefore\ f_x(x,y)$ 在点(0,0)不连续 ;

同理，$f_y(x,y)$ 在点(0,0)也不连续.

4) 下面证明 $f(x,y)$ 在点 (0,0)可微 :

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|$$

$$=\left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|\Delta x|\xrightarrow{\rho\to0}0$$

$\therefore\ f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

说明: 此题表明，偏导数连续只是可微的充分条件.