第十二章

第三节 齐次方程

一、齐次方程

二、可化为齐次方程

一、齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 的一阶微分方程叫做**齐次方程**.

解法: 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,

代入原方程得 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$

分离变量: $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$ $\quad(\varphi(u)-u\neq 0)$

两边积分, 得 $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

若存在 u_0, 使得 $\varphi(u_0)-u_0=0$, 则 $u=u_0$ 也是方程

$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$ 的解,

带入原方程, 可知 $y=u_0x$ 也是齐次方程的解.

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$$

例 解微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

解: 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y'=u+xu'$, 代入原方程得

$$u+xu'=u+\tan u$$

分离变量 $\frac{\cos u}{\sin u}du=\frac{dx}{x}$ $\quad(u\neq k\pi\ (k\in Z))$

两边积分 $\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\int\frac{dx}{x}$

得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|$, 即 $\sin u=Cx$

此处 $C\neq 0$

故原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$ (C 为任意常数)

(当 $C=0$ 时, $y=k\pi x\ (k\in Z)$ 也是方程的解)

例 解微分方程 $y'=\frac{y}{x}+e^{-\frac{y}{x}}$. **(06-07, 二(5))**

解: 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y'=u+xu'$, 代入原方程得

$$u+xu'=u+e^{-u}$$

分离变量 $e^u\,du=\frac{dx}{x}$ 两边积分 $\int e^u\,du=\int\frac{dx}{x}$

得 $e^u=\ln|x|+C$

故原方程的通解为 $e^{\frac{y}{x}}=\ln|x|+C$ (C 为任意常数)

例 解微分方程 $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

解: 方程变形为 $\frac{dy}{dx}=2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2$, 令 $u=\frac{y}{x}$,

则有 $u+xu'=2u-u^2$ 分离变量 $\frac{du}{u^2-u}=-\frac{dx}{x}$ $\quad(u\neq 0,1)$

即 $(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u})du=-\frac{dx}{x}$

积分得 $\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$, 即 $\frac{x(u-1)}{u}=C$

代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy$ $\quad$(C 为任意常数)

说明: 显然 $y=0$, $y=x$ 也是原方程的解, $y=x$ 补充进了通解公式, $y=0$在求解过程中丢失了.

例 解微分方程 $y^2+x^2y'=xyy'$.

解: 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$

方程右端分子分母同时除以 x^2，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$$

为齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$,

则有 $u+xu'=\frac{u^2}{u-1}$, 即 $x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$,

分离变量，得 $\frac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

两边积分，得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C\,(C\text{ 为任意常数})$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 带入，得

$$\frac{y}{x}-\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln|x|+C$$

即 $y=x\ln|y|+Cx$ 为原方程的通解。

说明: 显然 $y=0$ 也是原方程的解，但求解过程中丢失了。

$$\frac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

二、可化为齐次方程的方程

方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}$ 是齐次微分方程。

方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ $(c^2+c_1^2\neq 0)$ 不是齐次方程。

解法:

1. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时,

做变换 $x=X+h,\ y=Y+k$ (h,k 为待定常数),

则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$.

原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$, 解出 h,k

$\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 保证方程组有解

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$ (齐次方程)

求出其解后, 将 $X=x-h,\ Y=y-k$ 代入, 即得原方程的解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\qquad x=X+h,\ y=Y+k$$

2. 当 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$$

令 $u=ax+by$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{u+c}{\lambda u+c_1}$$ (可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)\quad(c^2+c_1^2\neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

例 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4x+6y+4}{2x+3y+6}$

解: 令 $u=2x+3y$, 则 $\frac{du}{dx}=2+3\frac{dy}{dx}$, 代入方程，得

$$\frac{du}{dx}=2+3\cdot\frac{2u+4}{u+6}$$

即 $$\frac{du}{dx}=\frac{8u+24}{u+6}=8\cdot\frac{u+3}{u+6}$$

分离变量, 得

$$\frac{u+6}{u+3}du=8dx,$$

积分得

$$u+3\ln|u+3|=8x+C, \quad (C\text{ 为任意常数})$$

代入 $u=2x+3y$, 得原方程的通解:

$$-6x+3y+3\ln|2x+3y+3|=C. \quad (C\text{ 为任意常数})$$

容易验证 $2x+3y+3=0$ 也是方程的解，但丢失。

$$\frac{u+6}{u+3}\,du=8dx,$$

例 求解 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2}=-5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} x_0+y_0+4=0 \\ x_0-y_0-6=0 \end{cases}$ 得 $x_0=1,\ y_0=-5$

令 $x=X+1,\ y=Y-5$，得 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y=Xu$，得 $u+X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1+u}{1-u}$

分离变量，得 $\dfrac{1-u}{1+u^2}\,du=\dfrac{dX}{X}$

积分得 $\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|X|+C$

$(C$ 为任意常数)

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln|x-1|+C$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=0$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|X|+C \quad u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y+5}{x-1}$

$(C$ 为任意常数)