第二节 对坐标的曲线积分

第十章

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、对坐标的曲线积分的计算法

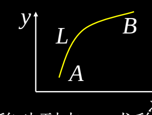
三、两类曲线积分之间的联系

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

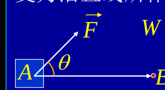
设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



在 xoy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B, 求移动过程中变力所作的功W.

变力沿直线所作的功



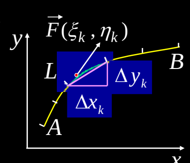
$$W=F\,|AB|\cos\theta$$
$$=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

解决办法:
"大化小"
"常代变"
"近似和"
"取极限"

1) "大化小".

把L分成 n 个小弧段, $\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k, 则

$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$



2) "常代变"

有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$ 近似代替, 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k,η_k), 则有

$$\Delta W_k\approx\vec{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$
$$=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

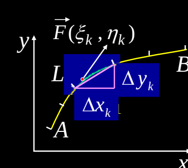
3) "近似和"

$$W\approx\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

4) "取极限"

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

(其中λ 为 n 个小弧段的最大长度)



2. 定义. 设 L 为xoy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑弧**, 在L 上定义了一个向量函数

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]\overset{\text{记作}}{=\!=}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

都存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对**坐标的曲线积分**, 或**第二类曲线积分**. 其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为**被积函数**, L 称为**积分弧段** 或 **积分曲线**.

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,$$

称为对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,$$

称为对 y 的曲线积分.

若记 $\overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

类似地, 若 Γ为空间曲线弧 , 记 $\overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

$$\int_\Gamma\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. 性质

(1) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 L_i ($i=1,\cdots,k$),

则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) 用 L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

说明:

- 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的**方向**！
- 定积分是第二类曲线积分的特例.

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理: 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$, 则曲线积分存在, 且有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

证明: 下面先证

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

根据定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i，点 (ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，由于

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$\therefore\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为L 为光滑弧，所以$\varphi'(t)$连续

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

同理可证 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$

特别是, 如果 L 的方程为 $y=\psi(x),\ x:a\to b$, 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$, 类似有

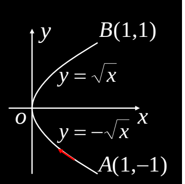
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

例1. 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$, 其中L 为沿抛物线 $y^2=x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段.



解法1 取 x 为参数, 则 $L:\widehat{AO}+\widehat{OB}$

$\widehat{AO}$: $y=-\sqrt{x},\ x:1\to0$

$\widehat{OB}$: $y=\sqrt{x},\ x:0\to1$

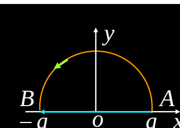
$$\therefore\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{\widehat{AO}}xy\mathrm{d}x+\int_{\widehat{OB}}xy\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$

解法2 取 y 为参数, 则 $L:x=y^2$, $y:-1\to1$

$$\therefore\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y^2y(y^2)'\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}y^4\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$$

例2. 计算 $\int_L y^2\mathrm{d}x$，其中 L 为



(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.

解: (1) 取L的参数方程为 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t:0\to\pi$

则 $\int_L y^2\mathrm{d}x=\int_0^\pi a^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t$

$$=-2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot1=-\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为 $y=0,\ x:a\to-a$, 则

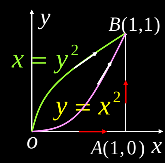
$$\int_L y^2\mathrm{d}x=\int_a^{-a}0\,\mathrm{d}x=0$$

例3. 计算$\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$，其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} + \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y\cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

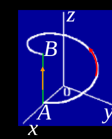
(3) 原式 $= \int_{OA} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{AB} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 (2x\cdot 0 + x^2\cdot 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y\cdot 0 + 1)\,\mathrm{d}y = 1$

例4. 设在力场 $\vec{F} = (y, -x, z)$ 作用下，质点由$A(R, 0, 0)$沿Γ移动到 $B(R, 0, 2\pi k)$，其中Γ为

(1) $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = kt$;

(2) $\overline{AB}$.



试求力场对质点所作的功.

解: (1) $W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$

$= \int_0^{2\pi} (-R^2 + k^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\pi(\pi k^2 - R^2)$

(2) Γ 的参数方程为 $x = R,\ y = 0,\ z = t,\ t: 0 \to 2\pi k$

$W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi k} t\,\mathrm{d}t$

$= 2\pi^2 k^2$

例5. 求$I = \int_\Gamma (z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$，其中

$\Gamma\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$，从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程

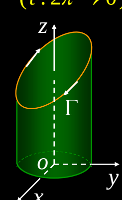
$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2 - \cos t + \sin t \quad (t: 2\pi \to 0)$

$\therefore\quad I = -\int_0^{2\pi} [(2-\cos t)(-\sin t)$

$+ (-2 + 2\cos t - \sin t)\cos t$

$+ (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)]\,\mathrm{d}t$

$= \int_0^{2\pi} (1 - 4\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = -2\pi$



三、两类曲线积分之间的联系

设有向光滑弧 L 以弧长为参数 的参数方程为

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \le s \le l)$$

已知L切向量的方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\ \cos\beta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$

则两类曲线积分有如下联系

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^l \left\{ P[x(s), y(s)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q[x(s), y(s)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^l \{P[x(s), y(s)]\cos\alpha + Q[x(s), y(s)]\cos\beta\}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_L \{P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\}\,\mathrm{d}s$$

类似地，在空间曲线 Γ上的两类曲线积分的联系是

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R),\ \mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$\vec{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}s$$

记$\vec{A}$在$\vec{t}$上的投影为A_t

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma A_t\,\mathrm{d}s$$

例6. 设 $M = \max\sqrt{P^2 + Q^2}$，$P(x,y), Q(x,y)$ 在L上连续，曲线段 L 的长度为s，证明

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| \le Ms$$

证: $\left|\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s\right|$

$\le \int_L |P\cos\alpha + Q\cos\beta|\,\mathrm{d}s$

设 $\vec{A} = (P, Q),\ \vec{t} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

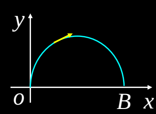
二者夹角为 θ

$= \int_L |\vec{A}\cdot\vec{t}|\,\mathrm{d}s = \int_L |\vec{A}|\,|\cos\theta|\,\mathrm{d}s \le Ms$

说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.

例7. 将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分，其中 L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$.

解： $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$



$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

内容小结

1\. 定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[\,P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

2\. 性质

(1) L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i=1,\cdots,k)$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) L^- 表示 L 的反向弧

$$\int_{L^-}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分必须注意**积分弧段的方向**!

3\. 计算

- 对有向光滑弧 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $t:\alpha\to\beta$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

- 对有向光滑弧 $L:y=\psi(x)$, $x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

- 对空间有向光滑弧 $\Gamma:\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t)\end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

4\. 两类曲线积分的联系

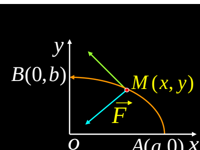
$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L\{P\cos\alpha+Q\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_\Gamma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\mathrm{d}s$$

思考与练习

1. 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\vec{F}$ 的作用, $\vec{F}$ 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比, $\vec{F}$ 的方向恒指向原点，此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针移动到 $B(0,b)$, 求力 $\vec{F}$ 所作的功.



提示: $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\vec{F}=-k(x,y)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-kx\,\mathrm{d}x-ky\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad t:0\to\tfrac{\pi}{2}$$

思考: 若题中 $\vec{F}$ 的方向改为与 $\overrightarrow{OM}$ 垂直且与 y 轴夹锐角,则 $\vec{F}=k(y,-x)$

2. 已知 Γ 为折线 $ABCOA$(如图), 计算

$$I=\int_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$$

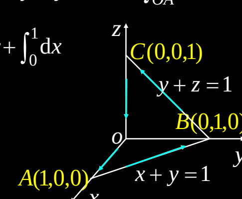
提示:

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z+0+\int_{\overrightarrow{OA}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x$$

$$=-2+(1+\tfrac{1}{2})+1$$

$$=\frac{1}{2}$$



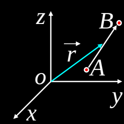
备用题 1. 一质点在力场$\vec F$作用下由点 $A(2,2,1)$ 沿直线移动到$B(4,4,2)$, 求 $\vec F$ 所作的功 W. 已知 $\vec F$ 的方向指向坐标原点, 其大小与作用点到 xoy 面的距离成反比.

解: $\vec F = \frac{k}{|z|}(-\vec r^{\,0}) = -\frac{k}{|z|}\frac{x\vec i + y\vec j + z\vec k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$W = \int_L \vec F\cdot \mathrm{d}\vec s = -k\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$L:\begin{cases} x=2t+2 \\ y=2t+2 \quad (t:\ 0\to 1) \\ z=t+1 \end{cases}$$

$$= -k\int_0^1 \frac{3\,\mathrm{d}t}{t+1} = -3k\ln 2$$



$\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$

2. 设曲线C为曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$与曲面 $x^2+y^2=ax$ $(z\ge 0,\ a>0)$的交线, 从 ox 轴正向看去为逆时针方向,

(1) 写出曲线 C 的参数方程 ;

(2) 计算曲线积分 $\int_C y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$.

解: (1) $\begin{cases} (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 \\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \qquad t:0\to 2\pi \\ z=a\sin\frac{t}{2} \end{cases}$$

(2) 原式 $= \int_0^{2\pi}[-\frac{a^3}{8}\sin^3 t+\frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t + \frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}]\,\mathrm{d}t$

令 $u=\pi-t$

$= \int_{-\pi}^{\pi}[-\frac{a^3}{8}\cancel{\sin^3 u}-\frac{a^3}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u + \frac{a^3}{8}(1-\cos u)^2\cancel{\sin\frac{u}{2}}]\,\mathrm{d}u$

$= -2\cdot\frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos u}{2}\cos u\,\mathrm{d}u$ 利用“偶倍奇零”

$= -\frac{\pi}{4}a^3$