

第三节

第七章

曲面及其方程

- 一、曲面方程的概念
- 二、旋转曲面
- 三、柱面
- 四、二次曲面

一、曲面方程的概念

引例：求到两定点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 等距离的点的轨迹方程.

解：设轨迹上的动点为 $M(x, y, z)$, 则 $|AM| = |BM|$, 即

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}$$

化简得 $2x - 6y + 2z - 7 = 0$

说明：动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面. 显然在此平面上的点的坐标都满足此方程, 不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

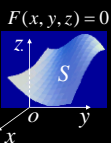


定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

- (1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;
- (2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的**方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.



两个基本问题：

- (1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 求曲面方程.
- (2) 已知方程时, 研究它所表示的几何形状 (必要时需作图).

例1. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解：设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $M_0M = R$ 即

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

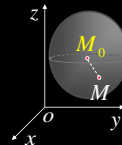
故所求方程为

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

特别, 当 M_0 在原点时, 球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 表示上(下)球面.



例2. 研究方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 表示怎样的曲面.

解：配方得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$

此方程表示: 球心为 $M_0(1, -2, 0)$,

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

说明：如下形式的三元二次方程 ($A \neq 0$)

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

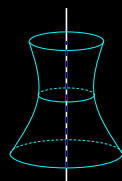
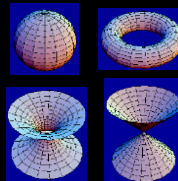
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

一个**球面**, 或**点**, 或**虚轨迹**.

二、旋转曲面

定义2. 一条平面曲线绕其平面上一条**定直线**旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴**.

例如：



建立 $yo z$ 面上曲线 C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 $yo z$ 面上曲线 $C: f(y, z) = 0$

若点 $M_1(0, y_1, z_1) \in C$, 则有

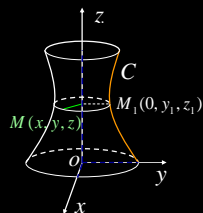
$$f(y_1, z_1) = 0$$

当绕 z 轴旋转时, 该点转到
 $M(x, y, z)$, 则有

$$z = z_1, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$$

故旋转曲面方程为

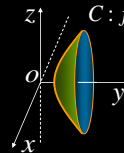
$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$



思考: 当曲线 C 绕 y 轴旋转时, 方程如何?

$$C: f(y, z) = 0$$

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$



例3. 试建立顶点在原点, 旋转轴为 z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面方程.

解: 在 $yo z$ 面上直线 L 的方程为

$$z = y \cot \alpha$$

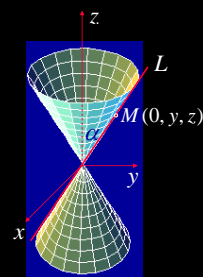
绕 z 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

$$\text{令 } a = \cot \alpha$$

两边平方

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$



例4. 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

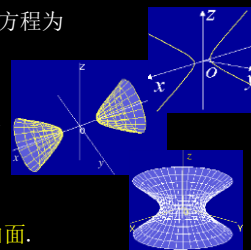
解: 绕 x 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

这两种曲面都叫做旋转双曲面.



三、柱面

引例. 分析方程 $x^2 + y^2 = R^2$

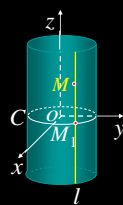
表示怎样的曲面.

解: 在 xoy 面上, $x^2 + y^2 = R^2$ 表示圆 C ,

在圆 C 上任取一点 $M_1(x, y, 0)$, 过此点作
平行 z 轴的直线 l , 对任意 z , 点 $M(x, y, z)$
的坐标也满足方程 $x^2 + y^2 = R^2$

沿曲线 C 平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面**. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ 表示圆柱面}$$



定义3. 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**. C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

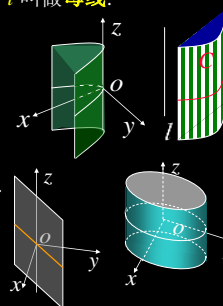
• $y^2 = 2x$ 表示**抛物柱面**,

母线平行于 z 轴;

准线为 xoy 面上的抛物线.

• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于
 z 轴的**椭圆柱面**.

• $x - y = 0$ 表示母线平行于
 z 轴的**平面**.
(且 z 轴在平面上)



一般地, 在三维空间
方程 $F(x, y) = 0$ 表示 **柱面**,

母线 平行于 z 轴;

准线 xoy 面上的曲线 l_1 .

方程 $G(y, z) = 0$ 表示 **柱面**,

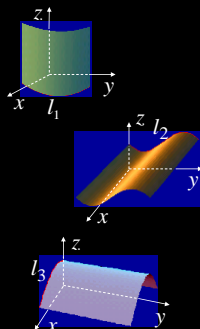
母线 平行于 x 轴;

准线 $yo z$ 面上的曲线 l_2 .

方程 $H(z, x) = 0$ 表示 **柱面**,

母线 平行于 y 轴;

准线 xoz 面上的曲线 l_3 .



四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形通常为**二次曲面**. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程, 下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍.

研究二次曲面特性的基本方法: **截痕法**

1. 椭球面

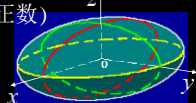
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

(1) 范围:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c$$

(2) 与坐标面的交线: 椭圆

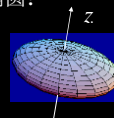
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

(3) 截痕: 与 $z = z_1$ ($|z_1| < c$) 的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



同样 $y = y_1$ ($|y_1| \leq b$) 及 $x = x_1$ ($|x_1| \leq a$) 的截痕也为椭圆.

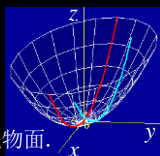
(4) 当 $a = b$ 时为**旋转椭球面**; 当 $a = b = c$ 时为**球面**.

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

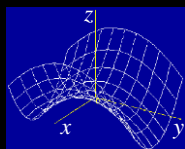
$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q \text{ 同号})$$

特别, 当 $p = q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.



(2) 双曲抛物面 (鞍形曲面)

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q \text{ 同号})$$



3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

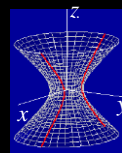
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

平面 $z = z_1$ 上的截痕为 **椭圆**.

平面 $y = y_1$ 上的截痕情况:

1) $|y_1| < b$ 时, 截痕为**双曲线**:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} \\ y = y_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{实轴平行于 } x \text{ 轴;} \\ \text{虚轴平行于 } z \text{ 轴} \end{matrix}$$



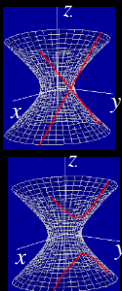
2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为**相交直线**:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0 \\ y = b \text{ (或 } -b) \end{cases}$$

3) $|y_1| > b$ 时, 截痕为**双曲线**:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于 z 轴;
虚轴平行于 x 轴)



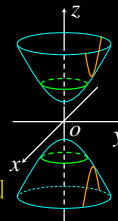
(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

平面 $y = y_1$ 上的截痕为 **双曲线**

平面 $x = x_1$ 上的截痕为 **双曲线**

平面 $z = z_1$ ($|z_1| > c$) 上的截痕为 **椭圆**



注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

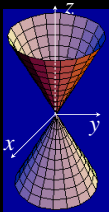
图形

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \quad (a, b \text{ 为正数})$$

在平面 $z = t$ 上的截痕为 **椭圆**

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1, \quad z = t \quad \text{①}$$



在平面 $x = 0$ 或 $y = 0$ 上的截痕为过原点的两直线.

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到, 见书 P316)

内容小结

1. 空间曲面 \longleftrightarrow 三元方程 $F(x, y, z) = 0$

• 球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

• 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

• 柱面

如, 曲面 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如, 椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等.

2. 二次曲面 \longleftrightarrow 三元二次方程

• 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

• 抛物面: 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$
(p, q 同号)

• 双曲面: 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

• 椭圆锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

思考与练习

1. 指出下列方程的图形:

方 程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x = 5$	平行于 y 轴的直线	平行于 $yo z$ 面的平面
$x^2 + y^2 = 9$	圆心在 $(0, 0)$ 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的 圆柱面
$y = x + 1$	斜率为 1 的直线	平行于 z 轴的平面