第五节 平面及其方程

第七章

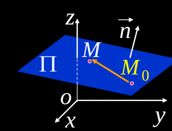
一、平面的点法式方程

二、平面的一般方程

三、两平面的夹角

一、平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$, 求该平面Π的方程.



任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$, 则有

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故

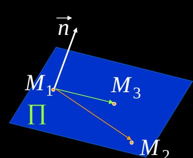
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad ①$$

称①式为平面Π的**点法式方程**, 称 $\vec{n}$ 为平面 Π 的**法向量**.

例1. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.



解: 取该平面Π 的法向量为

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(14, 9, -1)$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

即

$$14x+9y-z-15=0$$

说明: 此平面的**三点式方程**也可写成

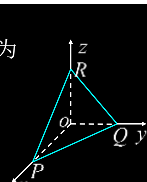
$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况: 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0), \ Q(0,b,0), \ R(0,0,c)$$



时, 平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ (a, b, c \neq 0)$$

此式称为平面的**截距式方程**.

分析: 利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc - y(-a)c + zab = 0$

即 $bcx + acy + abz = abc$

二、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \ (A^2+B^2+C^2 \neq 0) \qquad ②$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0, 则

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

以上两式相减, 得平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

显然方程②与此点法式方程等价,因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n}=(A, B, C)$ 的平面, 此方程称为**平面的一般方程**.

$$Ax+By+Cz+D=0\quad(A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D=0$ 时, $Ax+By+Cz=0$ 表示**通过原点**的平面;
- 当 $A=0$ 时, $By+Cz+D=0$ 的法向量
  $\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i}$, 平面平行于 x 轴;
- $Ax+Cz+D=0$ 表示 平行于 y 轴的平面;
- $Ax+By+D=0$ 表示 平行于 z 轴的平面;
- $Cz+D=0$ 表示平行于 xoy 面 的平面;
- $Ax+D=0$ 表示平行于 yoz 面 的平面;
- $By+D=0$ 表示平行于 zox 面 的平面.

例2. 求通过 x 轴和点$(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴, 故 $A=D=0$

设所求平面方程为

$$By+Cz=0$$

代入已知点$(4,-3,-1)$得 $C=-3B$

化简, 得所求平面方程

$$y-3z=0$$

例3. 用平面的一般式方程导出平面的截距式方程.

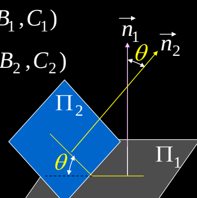
三、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常为锐角)称为两平面的夹角.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

则两平面夹角θ 的余弦为



$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\Pi_1:\ \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

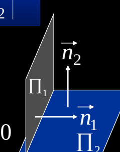
$\Pi_2:\ \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论:

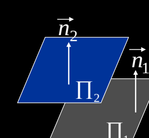
(1) $\Pi_1\perp\Pi_2\iff\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

$\iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$



(2) $\Pi_1/\!/\Pi_2\iff\vec{n}_1/\!/\vec{n}_2$

$\iff\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$



例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面Π: $x+y+z=0$, 求其方程.

解: 设所求平面的法向量为$\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}\Longrightarrow -A+0\cdot B-2C=0$, 即 $A=-2C$

$\vec{n}\perp\Pi$ 的法向量$\Longrightarrow A+B+C=0$, 故

$$B=-(A+C)=C$$

因此有 $-2\cancel{C}(x-1)+\cancel{C}(y-1)+\cancel{C}(z-1)=0\quad(C\neq 0)$

约去C, 得 $\quad -2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

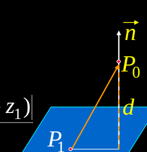
即 $\quad 2x-y-z=0$

例5. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离d.

解: 设平面法向量为$\vec{n}=(A,B,C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 则P_0 到平面的距离为

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(点到平面的距离公式)

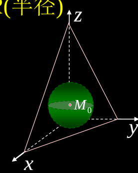
例6. 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则它位于第一卦限, 且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = x_0 = y_0 = z_0 = R(\text{半径})$$

$\because x_0+y_0+z_0 \le 1$, $\therefore 1-3x_0=\sqrt{3}x_0$

从而 $x_0=y_0=z_0=R=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$



因此所求球面方程为

$$(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2=(\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2$$

内容小结

1.**平面**基本方程:

一般式 $Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \quad (abc\neq 0)$

三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

备用题

求过点 (1,1,1)且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解: 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,-1,1), \quad \vec{n}_2=(3,2,-12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$$

则所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

化简得 $2x+3y+z-6=0$