第四章

习题课 不定积分的计算方法

一、 求不定积分的基本方法

二、几种特殊类型的积分

一、 求不定积分的基本方法

1. 直接积分法

通过简单变形, 利用基本积分公式和运算法则求不定积分的方法 .

2. 换元积分法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;\underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}}\; \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(代换: $x=\varphi(t)$)

(注意常见的换元积分类型)

3. 分部积分法

$$\int u v'\,\mathrm{d}x = u v - \int u' v\,\mathrm{d}x$$

使用原则:

1) 由 v' 易求出 v ;

2) $\int u' v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int u v'\,\mathrm{d}x$ 好求 .

一般经验: 按 "反, 对, 幂, 指 , 三" 的顺序, 排前者取为 u , 排后者取为 v' .

计算格式: 列表计算

多次分部积分的 规 律

$$\int u v^{(n+1)}\,\mathrm{d}x = u v^{(n)} - \int u' v^{(n)}\,\mathrm{d}x$$
$$= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + \int u'' v^{(n-1)}\,\mathrm{d}x$$
$$= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \int u''' v^{(n-2)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \cdots$$
$$= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)} v\,\mathrm{d}x$$

快速计算表格:

$u^{(k)}$	u	u'	u''	$\cdots$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
	$+$	$-$	$+$		$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}\int$
$v^{(n+1-k)}$	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$\cdots$	v'	v

特别: 当 u 为 n 次多项式时, $u^{(n+1)}=0$, 计算大为简便 .

例1. 求 $\displaystyle\int \frac{2^x 3^x}{9^x+4^x}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $\displaystyle= \int \frac{2^x 3^x}{3^{2x}+2^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\frac{2}{3})^x\,\mathrm{d}x}{1+(\frac{2}{3})^{2x}}$ $\quad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{3})^x}{1+(\frac{2}{3})^{2x}}$$

$$= \frac{\arctan(\frac{2}{3})^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$$

例2. 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解:

原式 $=\int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}} + C$$

分析:

$$\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5] = \frac{(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

例3. 求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解：

$$原式 = \int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{\int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}_{分部积分} + \int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C$$

例4. 设 $y(x-y)^2 = x$, 求积分 $\int \frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x$.

解: $y(x-y)^2 = x$

令 $x-y=t$, 即 $y=x-t$

$$x = \frac{t^3}{t^2-1},\quad y = \frac{t}{t^2-1},\quad 而\ \mathrm{d}x = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore\quad 原式 = \int \frac{1}{\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{3t}{t^2-1}}\cdot\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right| + C = \tfrac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right| + C$$

例5. 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x$.

解: $原式 = -\int \arctan e^x\,\mathrm{d}e^{-x}$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + \int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + \int \frac{(1+e^{2x})-e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + x - \tfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$$

例6. 求 $\int (x^3-x+2)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

解: 取 $u = x^3-x+2,\quad v^{(4)} = e^{2x}$

$u^{(k)}$	x^3-x+2	$3x^2-1$	$6x$	6	0
	$+$	$-$	$+$	$-$	
$v^{(4-k)}$	e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$\therefore\ 原式 = e^{2x}\left[\tfrac{1}{2}(x^3-x+2) - \tfrac{1}{4}(3x^2-1) + \tfrac{1}{8}\cdot 6x - \tfrac{1}{16}\cdot 6\right] + C$$

$$= \tfrac{1}{8}e^{2x}(4x^3-6x^2+2x+7) + C$$

说明: 此法特别适用于如下类型的积分: $\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$

例7. 设 $I_n = \int \sec^n x\,\mathrm{d}x$, 证明递推公式:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad (n\ge 2)$$

证: $\boxed{I_n} = \int \sec^{n-2}x\cdot\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x - (n-2)\int \sec^{n-3}x\cdot\sec x\tan x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x - (n-2)\int \sec^{n-2}x\cdot(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x \boxed{-(n-2)I_n} + (n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore\quad I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad (n\ge 2)$$

例8. 求 $\int |x-1|\,\mathrm{d}x$.

解: 设 $F'(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ 1-x, & x<1 \end{cases}$

则 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+C_1, & x\ge 1 \\ x-\frac{1}{2}x^2+C_2, & x<1 \end{cases}$

因 $F(x)$ 连续 , 利用 $F(1^+) = F(1^-) = F(1)$, 得

$$-\tfrac{1}{2}+C_1 = \tfrac{1}{2}+C_2 \xlongequal{记作} C$$

得 $\int |x-1|\,\mathrm{d}x = F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x\ge 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x<1 \end{cases}$

例9. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且 $F(0)=1$, 当 $x\ge 0$ 时有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$, $F(x)\ge 0$, 求 $f(x)$.

解: 由题设 $F'(x)=f(x)$, 则 $F(x)F'(x)=\sin^2 2x$,

故 $$\int F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int \sin^2 2x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$$

即 $$F^2(x)=x-\tfrac{1}{4}\sin 4x+C$$

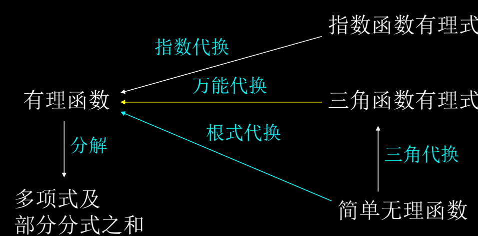
$\because F(0)=1$, $\therefore C=F^2(0)=1$, 又 $F(x)\ge 0$, 因此

$$F(x)=\sqrt{x-\tfrac{1}{4}\sin 4x+1}$$

故 $$f(x)=F'(x)=\frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}}$$

二、几种特殊类型的积分

1. 一般积分方法



2. 需要注意的问题

(1) 一般方法不一定是最简便的方法， 要注意综合使用各种基本积分法, 简便计算 .

(2) 初等函数的原函数不一定是初等函数 , 因此不一定都能积出.

例如 , $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \sin x^2\mathrm{d}x$,

$\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$, $\int\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$,

$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ (0<k<1)$, ……

例10. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解: 令 $t=e^{\frac{x}{6}}$, 则 $x=6\ln t$, $\mathrm{d}x=\frac{6}{t}\mathrm{d}t$

$$原式=6\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3+t^2+t)t}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)t}$$

$$=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{t+1}-\frac{3t+3}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6\ln|t|-3\ln|t+1|-\frac{3}{2}\ln(t^2+1)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(e^{\frac{x}{6}}+1)-\tfrac{3}{2}\ln(e^{\frac{x}{3}}+1)-3\arctan e^{\frac{x}{6}}+C$$

例11. 求 $\int\frac{3\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

解: 令 $3\cos x-\sin x$
$=A(\cos x+\sin x)+B(\cos x+\sin x)'$

令 $a\cos x+b\sin x$
$=A(c\cos x+d\sin x)+B(c\cos x+d\sin x)'$

$\therefore$ 原式 $=\int\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}$

$=x+\ln|\cos x+\sin x|+C$

说明: 此技巧适用于形为 $\int\frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}\mathrm{d}x$ 的积分.

例12. 求 $I_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$ 及 $I_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$.

解: 因为

$$\begin{cases} aI_2+bI_1=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=x+C_1 \\ bI_2-aI_1=\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x \quad \boxed{\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x)} \end{cases}$$

$$=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_1=\frac{1}{a^2+b^2}(bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|)+C \\ I_2=\frac{1}{a^2+b^2}(ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|)+C \end{cases}$$

例13. 求不定积分 $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\mathrm{d}x \quad$ (令 $u=\cos x$)

$$=\int \frac{1}{(2+u)(u^2-1)}\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{(2+u)(u^2-1)} = \frac{A}{2+u}+\frac{B}{u-1}+\frac{C}{u+1} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{6} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|u+2|+\frac{1}{6}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln(\cos x+2)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+C$$

例14. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)} \quad (a-b\neq k\pi)$

解: $I=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\mathrm{d}\,x-\int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\ln|\sin(x+b)|-\ln|\sin(x+a)|\right]+C$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$$

例15. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad$ (n 为自然数)

解: $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}$

令 $t=\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}$

则 $t^n=\frac{x-a}{x-b}$, $\boxed{n t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{d}x}$

$$\frac{n}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{t^n}\frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{n}{(a-b)t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{n}{a-b}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{n}{b-a}\frac{1}{t}+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$$