第十章

第四节 对面积的曲面积分

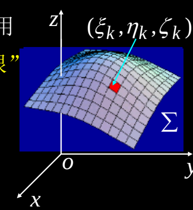
一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用 "大化小, 常代变, 近似和, 求极限" 的方法, 可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分 或第一类曲面积分. 其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1,Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1,k_2 为常数, 则

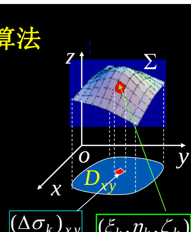
$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z)\pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S=k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\pm k_2\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法

定理: 设有光滑曲面

$$\Sigma: z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$$

$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有



$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k=\iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}}\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot\sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot\sqrt{1+z_x^2(\xi_k,\eta_k)+z_y^2(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$

或 $y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$

可有类似的公式.

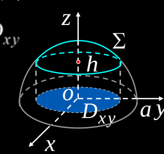
2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下dS 的表达式, 也可将对面积的曲面积分转化为对参数的二重积分. (见本节后面的例4, 例5)

例1. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,, (x,y)\in D_{xy}$

$D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2-h^2$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$



$$\therefore \iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2} = a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

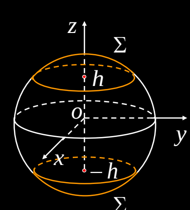
$$= 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}} = 2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

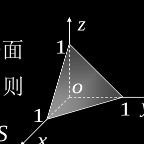
$$\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z} = (\quad 0 \quad)$$

$$\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{|z|} = (\ 4\pi a\ln\frac{a}{h}\ )$$



例2. 计算 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.

解: 设$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$ 在平面 $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=1$ 上的部分, 则



$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}\right)xyz\,\mathrm{d}S$$

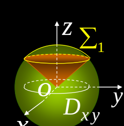
$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4: z=1-x-y,\ (x,y)\in D_{xy}: \begin{cases} 0\le y\le 1-x \\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}/120$$

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$



计算 $I = \iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2, z=\frac{1}{2}a$.

设Σ_1为上半球面夹于锥面间的部分, 它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\}$, 则

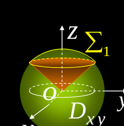
$$I = \iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I = \iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$



思考: 若例3 中被积函数改为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} |z|\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} |z|<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

计算结果如何？

例4. 求半径为R 的均匀半球壳 Σ 的重心.

解: 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

用球坐标

$z=R\cos\varphi$

$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R}=\frac{R}{2}$$

思考题: 例 3 是否可用球面坐标计算？

例5. 计算 $I=\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R),\ \Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2.$

解: 取球面坐标系, 则 $\Sigma: z=R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\phi}{\lambda-R\cos\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\phi)}{\lambda-R\cos\phi}$$

$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$

例6. 计算 $I=\iint_\Sigma(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 显然球心为(1,1,1), 半径为$\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}S$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\iint_\Sigma(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$$

$$=4\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=4\cdot\bar{x}\cdot\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

$$=4\cdot1\cdot4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

利用重心公式

$$\bar{x}=\iint_\Sigma x\mathrm{d}S\Big/\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

例7. 计算 $I=\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

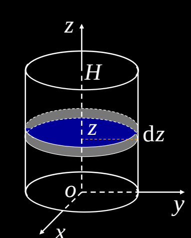
分析: 若将曲面分为前后(或左右)两片, 则计算较繁.

解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则 $$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$



例8. 求椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 位于 xoy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S.

解: $S=\iint_\Sigma\mathrm{d}S$

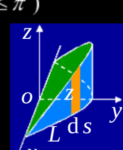
$L: x=\sqrt{5}\cos t,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le\pi)$

取 $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$

$$=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^\pi 3\sin t\sqrt{5\sin^2t+9\cos^2t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^\pi\sqrt{5+4\cos^2t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln5$$



内容小结

1. 定义: $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设 $\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

备用题 1. 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu=x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 z＝1以上部分Σ 的质量 M .

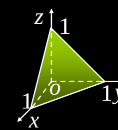
解: Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$ ，故

$$M=\iint_{\Sigma}\mu\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)=13\pi$$

2. 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的表面, 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S.$



解: 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0\le z\le 1, 0\le y\le 1-z$

$$\therefore I=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}y+$$

$$+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$