第11章 无穷级数

一、内容提要

（一）主要定义

1. 数项级数

把数列$\{u_n\}$各项依次用“+”号连接起来所得的

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

表达式为常数项级数(简称级数).

2. 级数的收敛与发散

级数的部分和数列$\{s_n\}$$\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\right)$存在极限 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, s称为它的和, 记作$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

若极限 $\lim_{n\to\infty} s_n$不存在, 则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

3. 函数项级数

设函数列$\{u_n(x)\}$中的每一项都是定义在区间I上的函数, 则称表达式 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为函数项级数. 称$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数.

4. 函数项级数的收敛域与和函数

设$x_0 \in I$, 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛, 称$x_0$为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点. 否则称为发散点. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点的全体为它的收敛域.

在收敛域上函数项级数的和$s(x)$是收敛点x的函数, 将$s(x)$称为函数项级数的和函数. 在收敛域上

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

5. 幂级数

级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$称($a_0 \neq 0$)为幂级数, $x_0=0$时, 成为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

6. 幂级数的收敛半径与收敛区间

对任何幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 都存在唯一的实数$R(0 \le R < +\infty)$, 当$|x| < R$或$|x| \le R$时幂级数收敛, 当$|x| > R$时幂级数发散, 称$R$为幂级数的收敛半径. 在$(R, -R)$内幂级数处处收敛, 在$x=\pm R$处可能收敛也可能发散. 确定了端点$x=\pm R$的收敛性以后, 便得到幂级数的收敛区间, 如$[R, -R]$, $(R, -R)$, $[R, -R)$, $(R, -R\,]$, $(-\infty, +\infty)$等.

收敛半径 $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

（二）主要结论

1. 正项级数审敛法

(1)比较审敛法 设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 若存在自然数N, 当$n \ge N$时$u_n \le v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛; $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

比较审敛法的极限形式, 即若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l\ (0 < l < +\infty)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散.

(2)比值审敛法(D'Alembert判定法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的后项与前项之比的极限为ρ,

即$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \rho < 1, & \text{收敛;} \\ \rho > 1 \text{或} \rho = +\infty, & \text{发散;} \\ \rho = 1, & \text{不能确定.} \end{cases}$

(3)根值审敛法 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若有

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \rho < 1, & \text{收敛;} \\ \rho > 1, & \text{发散;} \\ \rho = 1, & \text{不能确定.} \end{cases}$

(4)极限审敛法 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果 $\lim_{n\to\infty} n u_n = l > 0\left(\text{或} \lim_{n\to\infty} n u_n = \infty\right)$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散; 如果有$p>1$, 使$\lim_{n\to\infty} n^p u_n$存在, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(5)正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{s_n\}$有界.

(6)柯西积分审敛法 设$f(x)$为一单调减少非负函数($1 \le x < +\infty$), 若$f(x) = u_n$, 则当 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时, 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛; 当$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

2.交错级数审敛法(莱布尼茨定理)

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0, n=1,2,\cdots)$满足条件 (1) $u_{n+1}\le u_n$; (2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. 则级数收敛.

3.任意项级数审敛法

若任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 称其为绝对收敛级数.

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散, 称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛级数.

4. 几个经典常数项级数的敛散性

(1)等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\begin{cases}+\infty, & |a|>0,\ |r|\ge 1 \quad (\text{发散})\\ \dfrac{a}{1-r}, & |r|<1 \quad (\text{收敛})\end{cases}$$

(2)调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ **(发散).**

(3)*p*级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$**, 当*p*≤1时发散, 当 *p*>1时收敛.**

7. 几个重要函数的麦克劳林级数

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots\quad(-1<x\le 1)$.

(5) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

(6) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

(7) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

（三）结论补充

1. 正项级数

(1)若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**和**$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**都收敛, 则**$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$**收敛.**

(2) $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{u_n}=0, \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{v_n}=0, \boldsymbol{u_n}=\mathrm{O}(\boldsymbol{v_n})$, **则级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**和**$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**收敛性相同.**

(3)设$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\alpha$**, 则当*α* >1时, 级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛; 当*α*<1时, 级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**发散.**

2. 任意项级数

(1)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**和**$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**都绝对收敛, 则级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$**也绝对收敛.**

(2)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛,** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**条件收敛, 则级数**$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$**条件收敛.**

(3)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛,** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**发散, 则级数**$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$**必发散.**

(4)若$u_n\le w_n\le v_n$, 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**和**$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ **都收敛时, 则级数**$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$**收敛.**

***(5)级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛的充要条件是**$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$**, 当*m*>*n*>*N*时, 恒有**$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_m|<\varepsilon$.

3.函数项级数

(1)在区间*I*上, 若$|u_n(x)|\le a_n$**, 而数项级数** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$**收敛, 则级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$**在*I*上绝对收敛.**

(2)幂函数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$**收敛半径的另一个公式为**

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(3)幂级数的和函数的分析性质

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$**，在收敛域内可以逐项求导与逐项积分，且所得幂级数收敛半径不变.**

(4)若*f* (*x*)在x_0某领域内任意阶可导，则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为*f* (*x*)的泰勒级数，当x_0=0时，级数成为$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，**称为*f* (*x*)的麦克劳林级数.**

(5)欧拉(Euler)公式 $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$，$\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

或$\begin{cases} e^{it} = \cos t + i\sin t, \\ e^{-it} = \cos t - i\sin t. \end{cases}$