第八章 多元函数微分法及其应用

一元函数微分学

$\downarrow$ 推广

多元函数微分学

第一节 多元函数的基本概念

第八章

一、区域

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

一、 区域

1. 邻域

点集 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$, 称为点 P_0 的**δ邻域**.

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\} \text{(圆邻域)}$$

在空间中,

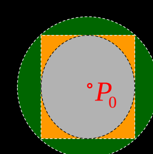
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

说明： 若不需要强调邻域半径δ，也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

在讨论实际问题中也常使用方邻域, 因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

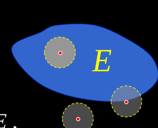


平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$$

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点

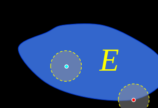


设有点集 E 及一点 P :

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$, 则称 P 为 E 的**内点**;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$, 则称 P 为 E 的**外点** ;
- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E 中的内点也含 E 的外点 , 则称 P 为 E 的**边界点** .

显然, E 的内点必属于 E , E 的外点必不属于 E , E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E .

(2) 聚点



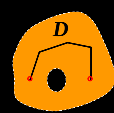
若对任意给定的δ，点 P 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点 , 则称 P 是 E 的**聚点**.

聚点可以属于 E , 也可以不属于 E (因为聚点可以为 E 的边界点)

所有聚点所成的点集成为 E 的**导集** .

(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集；
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E ;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集；
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 , 则称 D 是连通的 ;
- 连通的开集称为开区域 ,简称区域 ;
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.



例如，在平面上

♣ $\{(x,y)\mid x+y>0\}$

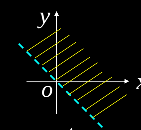
♣ $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$

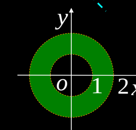
开区域

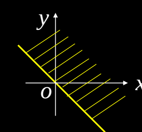
♣ $\{(x,y)\mid x+y\ge 0\}$

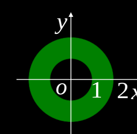
♣ $\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$

闭区域



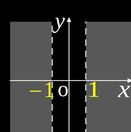






♣ 整个平面 是最大的开域 , 也是最大的闭域；

♣ 点集 $\{(x,y)\mid |x|>1\}$ 是开集， 但非区域 .



- 对区域 D , 若存在正数 K , 使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\le K$，则称 D 为**有界域**，否则称为**无界域** .

3. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 **n 维空间**, 记作 R^n , 即

$$\mathrm{R}^n = \mathrm{R}\times\mathrm{R}\times\cdots\times\mathrm{R}$$
$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in\mathrm{R}, k=1,2,\cdots,n\}$$

n 维空间中的每一个元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为空间中的一个点，数 x_k 称为该点的第 k 个坐标 .

当所有坐标 $x_k=0$时，称该元素为 R^n中的零元, 记作 O .

R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的**距离**记作 $\rho(x,y)$ 或 $\|x-y\|$，规定为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 O 的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当 $n=1,2,3$时, $\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

R^n 中的变元 x 与定元 a 满足 $\|x-a\|\to 0$ 记作 $x\to a$.

R^n中点 a 的 δ邻域为

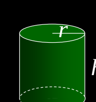
$$U(a,\delta)=\{x\mid x\in\mathrm{R}^n, \rho(x,a)<\delta\}$$

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

$$V=\pi r^2 h,\quad \{(r,h)\mid r>0, h>0\}$$

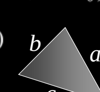


- 定量理想气体的压强

$$p=\frac{RT}{V}\ (R\text{为常数}),\quad \{(V,T)\mid V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\{(a,b,c)\mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$



定义1. 设非空点集 $D\subset \mathrm{R}^n$, 映射 $f: D\mapsto \mathrm{R}$ 称为定义在 D 上的 ***n* 元函数**, 记作

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \text{ 或 } u=f(P),\ P\in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**; 数集 $\{u \mid u=f(P), P\in D\}$ 称为函数的**值域** .

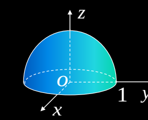
特别地, 当 $n=2$ 时, 有二元函数

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset \mathrm{R}^2$$

当 $n=3$ 时, 有三元函数

$$u=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in D\subset \mathrm{R}^3$$

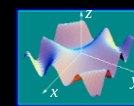
例如, 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



定义域为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

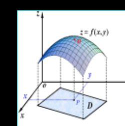
图形为中心在原点的上半球面.

又如, $z=\sin(xy), (x,y)\in \mathrm{R}^2$



说明: 二元函数 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$ 的图形一般为空间曲面 Σ .

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$



定义域为单位闭球

$$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

图形为 R^4空间中的超曲面.

三、多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathrm{R}^n$, P_0 是 D 的聚点, 若存在常数 A, 对任意正数 ε, 总存在正数δ, 对一切 $P\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$, 都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$, 则称 A 为函数 $f(P)$当$P\to P_0$时的极限, 记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{(也称为 } n \text{ 重极限)}$$

当 $n=2$ 时, 记 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作:

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\ne 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

证: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| \le x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当$0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0| \le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\ne 0\\ 0\quad, & xy=0\end{cases}$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

证: $\because |f(x,y)-0| \le \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon/2$, 当$0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0| \le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

- 若当点 $P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时, 函数趋于不同值或有的极限不存在, 则可以断定函数极限不存在 .

例3. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0) , 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

***k* 值不同极限不同 !**

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x, y 轴

解: 因 $x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2 = x^2+y^2$, 则

$$\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

而 $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to0}\dfrac{2r^4}{r^6} = \infty$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$

$1-\cos r^2 \sim \dfrac{r^2}{2}$

- 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不同.

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在, 推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) = 0, \quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y) = 0$$

但由例3 知它在(0,0)点二重极限不存在 .

四、 多元函数的连续性

定义3 . 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 如果存在

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续, 否则称为不连续, 此时 P_0 称为间断点 .

如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上连续.

例如, 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \ne 0 \\ 0 \quad , & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists\, K>0$, 使 $|f(P)| \le K$, $P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ; (最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m, M]$, $\exists\, Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$; (介值定理)

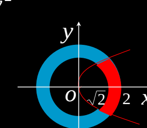
例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解: 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例6. 求函数 $f(x,y) = \dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} |3-x^2-y^2| \le 1 \\ x-y^2 > 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x > y^2 \end{cases}$



内容小结

1. 区域

- 邻域 : $U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集
- R^n 空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$P \in D \subset R^n$

常用 $\begin{cases} \text{二元函数 (图形一般为空间曲面)} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |PP_0| < \delta$ 时, 有 $|f(P) - A| < \varepsilon$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理 ; 最值定理 ; 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

备用题 **1.** 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$, 求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

解法1 令 $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y^2}{x} = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{uv} \\ x = \frac{u}{\sqrt[3]{uv}} \end{cases}$

$\Longrightarrow f(u, v) = \frac{u^2}{(uv)^{2/3}} + (uv)^{2/3}$

$u = \frac{y^2}{x}, \; v = xy$

$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2} + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + y^2$

1. 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$, 求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

解法2 令 $\begin{cases} xy = \frac{v^2}{u} \\ \frac{y^2}{x} = uv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = v \\ x = \frac{v}{u} \end{cases}$ $\quad \boxed{f(\frac{v^2}{u}, uv)}$

$\Longrightarrow f(\frac{v^2}{u}, uv) = f(xy, \frac{y^2}{x}) = (\frac{v}{u})^2 + v^2$

即 $f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{y^2}{x^2} + y^2$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \frac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

解: 利用 $\ln(1+xy) \sim xy$, 取 $y = x^\alpha - x$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \to 0}} \frac{x^2 y}{x+y} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\alpha+2} - x^3}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x \to 0} (x^2 - x^{3-\alpha}) = \begin{cases} -1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha < 3 \\ \infty, & \alpha > 3 \end{cases}$$

所以极限不存在.

3. 证明 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

在全平面连续.

证: 在 $(x, y) \neq (0, 0)$ 处, $f(x, y)$ 为初等函数 , 故连续.

又 $\quad 0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$

由夹逼准则得 $\quad \boxed{x^2 + y^2 \ge 2|xy|}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$$

故函数在全平面连续 .