第10章 曲线积分与曲面积分

（一）主要定义

1. 对弧长的曲线积分

设 $f(x,y)$和 $f(x,y,z)$分别是定义在平面上光滑曲线L和空间光滑曲线Γ上的有界函数, 则它们在各自曲线上对弧长的曲线积分, 分别定义为(若右端极限存在):

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

其中Δs_i为第i个小弧段的长度, $f(M_i)(M_i=(\xi_i,\eta_i)$或$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i))$表示$L$(或$\Gamma$)上第$i$个弧段上的任意一点, λ表示n个弧段中最长的一段弧的长度.

2. 对坐标的曲线积分:

设 $f(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$,

$F(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$.

分别是定义在光滑的平面有向曲线L和空间有向曲线Γ上的向量函数, 且P,Q,R都是有界函数,

则它们在各自曲线上对坐标的曲线积分定义为:

$$\int_L \vec{f}\bullet ds=\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy\ (ds=dx\vec{i}+dy\vec{j})$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\bullet ds=\int_\Gamma P(x,y,z)dx+\int_\Gamma Q(x,y,z)dy+\int_\Gamma R(x,y,z)dz$$
$$(ds=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

设下面右端极限存在,定义

$$\int_L P(x,y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

都称为在相应曲线上对坐标x的曲线积分.

类似地可以写出对坐标y,z的曲线积分的定义

3.对面积的曲面积分:

设$f(x,y,z)$是定义在光滑曲面Σ上的有界函数, 则$f(x,y,z)$在Σ上对面积的曲面积分定义为(设右端极限存在,以下同此)

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中ΔS_i为第i个小曲面块的面积,点(ξ_i,η_i,ζ_i)为第i个小曲面块上的任意一点, λ表示n个小曲面块诸直径中最大者.

4.对坐标的曲面积分:

设Σ为一张光滑的有向曲面

$F(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

是定义在Σ上的向量函数, 且P,Q,R在Σ上有界,

则函数P,Q,R对坐标的曲面积分可表示为

$$\iint_\Sigma \vec{F}dS=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx+\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$$
$$(dS=dy\,dz\,\vec{i}+dz\,dx\,\vec{j}+dx\,dy\,\vec{k})$$

其中 $\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$

称为P对坐标y,z的曲面积分,

$(\Delta S_i)_{yz}$为第i个小曲面块ΔS_i(也表示相应的面积)在yOz面上的投影,

(ξ_i,η_i,ζ_i)为ΔS_i上的任意一点, λ为n个曲面块的最大直径长.

类似地有

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

分别称为Q和R对坐标z,x和x,y的曲面积分.

5. 通量: $\iint_\Sigma \vec{A}\bullet\vec{n}dS$ 式中$\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$,

$\vec{n}$为Σ单位向量, $\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$

6. 散度 $\operatorname{div}A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

7. 环流量: $\Phi=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$,

Γ的正向与Σ的侧符合右手定则

（二）主要结论

1.曲线积分的性质：

设函数$f(x,y)$, $g(x,y)$在光滑曲线L上连续, k为常数, 则

(1) $\int_L ds = L$ （L也表示曲线L的长度）

(2) $\int_L [f(x,y)\pm g(x,y)]ds = \int_L f(x,y)ds \pm \int_L g(x,y)ds$

(3) $\int_L kf(x,y)ds = k\int_L f(x,y)ds$

(4) $\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds$

$(L = L_1 + L_2)$

对坐标的曲线积分具有上述性质(2),(3),(4).

但积分与曲线方向有关:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

(5) $f(x,y)\le g(x,y) \Rightarrow \int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds$

(6) $m \le f(x,y) \le M \Rightarrow mL \le \int_L f(x,y)ds \le ML$

(7) 若$f(x,y)$在L上连续,则必有(ξ,η)在L上,使得

$\int_L f(x,y)ds = f(\xi,\eta)\cdot L$

注:对面积的曲面积分有与此完全平行的性质.

2. 曲线积分的计算方法:

(1) 设曲线L由参数方程$x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\le t\le\beta$给出,且$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数,又$f(x,y)$在曲线$L$上连续,则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$$

若曲线L由极坐标$r=r(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$,则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

若曲线L由方程$y=\psi(x)$ $(a\le x\le b)$,则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx$$

若曲线L由方程$x=\varphi(y)$ $(c\le y\le d)$,则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy$$

(2) 设曲线L由参数方程$x=\varphi(t), y=\psi(t)$给出,L的起点A及终点B分别对应于参数值α及β(α不一定小于β),且$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，当t由α变到β时,点$M(x,y)$描出有向曲线L. 又$P(x,y),Q(x,y)$在L上连续, 则有

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

若曲线AB由$y=\varphi(x)$给出时,则有

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (a\to 起点, b\to 终点)$$
$$= \int_a^b \{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\varphi'(t)\}dx$$

3. 曲线积分的性质:

对面积的曲面积分有类似于对弧长的曲线积分的一些性质.当对坐标的曲面积分存在时,其性质有:

(1) $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$= \iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

(2) $\iint\limits_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_{\Sigma^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

其中Σ^+表示曲面Σ的某一侧面,而Σ^-表示与Σ^+相反侧

4. 曲线积分的计算方法:

(1) 设曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出,Σ在xOy面上投影区域为D_{xy} ,函数$z(x,y)$在D_{xy}上具有连续一阶偏导数,被积函数$f(x,y,z)$在Σ上连续,则有

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

若$\Sigma: x=x(y,z)$,Σ在yOz面上投影区域为D_{yz} ,则有

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}dydz$$

若$\Sigma: y=y(z,x)$,Σ在zOx面上投影区域为D_{zx} ,则有

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{zx}} f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+y_x^2(z,x)+y_z^2(z,x)}dzdx$$

(2) 设曲面 Σ 由方程$z=z(x,y)$给出的曲面上侧,Σ在xOy面上投影区域为D_{xy} ,函数$z(x,y)$在D_{xy}上连续,被积函数$R(x,y,z)$在Σ上连续,则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

若曲面积分取在Σ的下侧,则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

若Σ由$x=x(y,z)$给出,Σ在yOz面上的投影区域为D_{xy} ,则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

当积分曲面取Σ的前侧,应取"+"号，取Σ的后侧，则取"—"号.

若Σ由$y=y(z,x)$给出,Σ在xOz面上的投影区域为D_{zx} ,则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

当积分曲面取Σ的右侧,应取"+"号，取Σ的左侧，则取"—"号.

5. 格林(Green)公式:

设函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$及$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$在分段光滑的闭曲线$L$所围成的闭区域$D$上连续,则有格林公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

其中曲线积分是沿L的正向进行的.

当格林公式中取$P(x,y)=-y,Q(x,y)=x$时,则有

$$A=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

其中A为区域D的面积.

（三）结论补充

1. 曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关的条件:

设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在单连通区域D内具有一阶连续偏导数,则以下四条相互等价:

(1) $\int_L Pdx+Qdy$在D内与路径无关.

(2) $\oint_C Pdx+Qdy=0$, C为D在任一分段光滑闭曲线.

(3) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(4) 存在$u(x,y)$, 使$du=Pdx+Qdy$, 且

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

或 $u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$

对空间曲线积分亦有与上面类似的条件:

2. $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$与路径无关的充要条件有:

(1) $\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=0$.

(2) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$.

(3) 存在$u(x,y,z)$, 使$du=Pdx+Qdy+Rdz$, 且

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

3. 设$I=\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$, $\Sigma: z=z(x,y)$, z_x , z_y连续.

Σ关于xOy面对称, Σ_1表示xOy面上方或下方的部分.

若$R(x,y,z)$关于z为奇（偶）函数, 则有

$$I=2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy \quad (I=0)$$

注:对坐标的曲线积分也有类似结论.

4. 设$I=\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$, 若连续函数$f(x,y,z)$关于$z$为奇（偶）函数, 光滑曲面$\Sigma$关于$xOy$面对称, Σ_1表示xOy面上方的部分, 则 $I=0$ $(I=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS)$

注:对弧长的曲线积分也有类似结论.

7. 设曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$与路径无关, L的始点为(x_0, y_0),终点为(x, y). 记$du = Pdx + Qdy$,则

$$\int_L Pdx + Qdy = u(x, y) - u(x_0, y_0)$$

注:利用此公式,可以简化与路径无关的曲线积分计算.

8. 对弧长的曲线积分应用: (以空间为例)

空间光滑曲线L,线密度为$\rho(x,y,z)$, 则

(1) 质量: $M = \int_L \rho(x, y, z)ds$

(2) 重心坐标$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$: $\overline{x} = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x, y, z)ds$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\int_L y\rho(x, y, z)ds \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\int_L z\rho(x, y, z)ds$$