第二章

第四节 隐函数和参数方程求导 相关变化率

一、隐函数的导数

二、由参数方程确定的函数的导数

三、相关变化率

一、隐函数的导数

若由方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 是 x 的函数，则称此函数为**隐函数**.

由 $y=f(x)$ 表示的函数，称为**显函数**.

例如, $x-y^3-1=0$ 可确定显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$

$y^5+2y-x-3x^7=0$ 可确定 y 是 x 的函数，

但此隐函数不能显化 .

隐函数**求导方法:** $F(x,y)=0$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0 \quad (\text{含导数 } y' \text{ 的方程})$$

例1. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解: 方程两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^5+2y-x-3x^7)=0$$

得 $$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因 $x=0$ 时 $y=0$，故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$

例2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解: 椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$\therefore\ \left.y'\right|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\left.\frac{9}{16}\frac{x}{y}\right|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为 $$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$$

即 $$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$$

例3. 求 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$ 的导数 .

解: 两边取对数，化为隐式

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore\ y'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})$$

说明:

1) 对幂指函数 $y=u^v$ 可用对数求导法求导 :

$$\ln y=v\ln u$$

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+\frac{u'v}{u}$$

$$y'=u^v(v'\ln u+\frac{u'v}{u})$$

注意: $$y'=\underbrace{u^v\ln u\cdot v'}_{\text{按指数函数求导公式}}+\underbrace{vu^{v-1}\cdot u'}_{\text{按幂函数求导公式}}$$

2) 有些显函数用对数求导法求导很方便 .

例如, $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a>0,b>0,\frac{a}{b}\neq 1)$

两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b}+a[\ln b-\ln x]+b[\ln x-\ln a]$$

两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$$

$$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$$

又如, $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

两边取对数 $\boxed{(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}}$

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

二、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数关系, $\varphi(t),\psi(t)$ 可导, 且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$, 则

$\varphi'(t)\neq 0$时, 有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\psi'(t)\neq 0$时, 有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

(此时看成 x 是 y 的函数)

若上述参数方程中$\varphi(t),\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则由它确定的函数$y=f(x)$ 可求二阶导数 .

利用新的参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\end{cases}$,可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\Big/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

注意 : 已知 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\neq\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$

例4. 设 $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$, 且 $f''(t)\neq 0$,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t$, $\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{f''(t)}$

例. 设 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t^2\\ y=1-t\end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{t}$; $\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{t^2}\Big/t=\frac{1}{t^3}$

例5. 抛射体运动轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=v_1t\\ y=v_2t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解: 先求速度大小:

速度的水平分量为 $\frac{dx}{dt}=v_1$, 垂直分量为 $\frac{dy}{dt}=v_2-gt$,

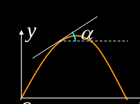
故抛射体速度大小

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_1^2+(v_2-gt)^2}$$

再求速度方向 (即轨迹的切线方向):

设 α 为切线倾角, 则

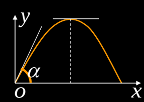
$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{v_2-gt}{v_1}$$



抛射体轨迹的参数方程 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

速度的水平分量 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1$，垂直分量 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_2 - gt$，

速度的方向　$\tan\alpha = \frac{v_2 - gt}{v_1}$



在刚射出 (即 $t = 0$)时, 倾角为

$$\alpha = \arctan\frac{v_2}{v_1}$$

达到最高点的时刻 $t = \frac{v_2}{g}$，高度 $y\big|_{t=\frac{v_2}{g}} = \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g}$

落地时刻 $t = \frac{2v_2}{g}$，抛射最远距离 $x\big|_{t=\frac{2v_2}{g}} = \frac{2v_1v_2}{g}$

例6. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon\sin y = 1 \end{cases}$　$(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon\cos y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{1 - \varepsilon\cos y} \end{cases}$$

故　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon\cos y)}$$

三、相关变化率

$x = x(t)$，$y = y(t)$ 为两可导函数

x，y 之间有联系 $\Longrightarrow$ $\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{\text{称为相关变化率}}$ 之间也有联系

相关变化率问题解法:

找出相关变量的关系式

$\big\downarrow$ 对 t 求导

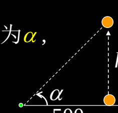
得相关变化率之间的关系式

$\big\downarrow$

求出未知的相关变化率

例7. 一气球从离开观察员500 m 处离地面铅直上升，其速率为 140 m/min，当气球高度为 500 m 时，观察员视线的仰角增加率是多少?

解: 设气球上升 t 分后其高度为 h，仰角为 α，



则　$\tan\alpha = \frac{h}{500}$

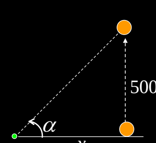
$\big\downarrow$ 两边对 t 求导

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$　$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha}$

已知 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 140\,\mathrm{m/min}$，$h = 500\mathrm{m}$ 时, $\tan\alpha = 1$，$\sec^2\alpha = 2$，

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}\cdot 140 = 0.14\ (\mathrm{rad/min})$$

思考题: 当气球升至500 m 时停住，有一观测者以 100 m / min 的速率向气球出发点走来,当距离为500 m 时, 仰角的增加率是多少？



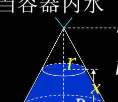
提示: $\tan\alpha = \frac{500}{x}$

$\big\downarrow$ 对 t 求导

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{500}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

已知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 100\,\mathrm{m/min}$，$x = 500\,\mathrm{m}$, 求 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.

例8. 有一底半径为 R cm，高为 h cm 的圆锥容器，今以 $25\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 自顶部向容器内注水，试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速度.



解: 设时刻 t 容器内水面高度为 x，水的体积为 V，则

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi r^2(h - x) = \frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3 - (h - x)^3]$$

$\big\downarrow$ 两边对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot(h - x)^2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$，而 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 25\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

故　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{25h^2}{\pi R^2(h - x)^2}$，当 $x = \frac{h}{2}$ 时, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{100}{\pi R^2}\ (\mathrm{cm/s})$

内容小结

1. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导

2. 对数求导法：适用于幂指函数及某些用连乘，连除表示的函数

3. 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

求高阶导数时,从低到高每次都用参数方程求导公式

4. 相关变化率问题

列出依赖于 t 的相关变量关系式

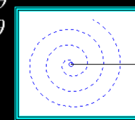
$\downarrow$ 对 t 求导

相关变化率之间的关系式

思考与练习

1. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

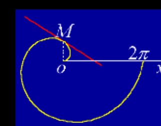
解: 化为参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$



$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(0,\frac{\pi}{2})$,

斜率 $k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$



∴ 切线方程为 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

2. 设 $y=\underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1}+\underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$，求 y'.

提示: 分别用对数微分法求 y_1'，y_2' .

答案:

$$y'=y_1'+y_2'$$

$$=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1)$$

$$+\frac{1}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(2+x)^2}}\left[1-2\ln x-\frac{x}{3(2-x)}-\frac{2x}{3(2+x)}\right]$$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$, $y''(0)$.

解: 方程两边对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0 \qquad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0 \qquad ②$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，故由 ① 得

$$y'(0)=-\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得 $\quad y''(0)=\frac{1}{e^2}$

备用题

1. 设 $y=x+e^x$，求其反函数的导数 .

解: **方法1** $\because \frac{dy}{dx}=1+e^x$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=\frac{1}{1+e^x}$$

方法2 等式两边同时对 y 求导

$$1=\frac{dx}{dy}+e^x\frac{dx}{dy} \Longrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+e^x}$$

2. 设 $\begin{cases} x=3t^2+2t \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解: 方程组两边同时对 t 求导，得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=6t+2 \\ e^y\frac{dy}{dt}\cdot\sin t+e^y\cos t-\frac{dy}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}\right|_{t=0}=\frac{e}{2}$$