第五周学习提纲

学习内容： 同学们结合慕课视频（P19--P24）和电子版教材（第四版）学习本ppt中的内容，并注意以下问题：

1. 如何利用一般的传播规律建立传染病模型；
2. 如何建立战争模型来预测战争的结局；
3. 如何建立描述吸烟过程的数学模型，分析人体吸入的毒物数量。

作业： 本周没有作业。

提醒： 第二次作业（上周已布置）ddl为4月6日23:00，请同学们准时提交。

第五章 微分方程模型

动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程.
- 分析对象特征的变化规律.
- 预报对象特征的未来性态.
- 研究控制对象特征的手段.

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数.
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设.
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程.

5.1 传染病模型

背景与问题

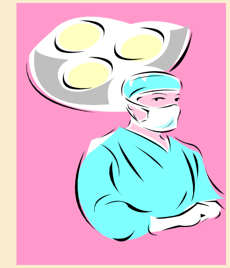
传染病的极大危害(艾滋病、SARS、…)

- 描述传染病的传播过程.
- 分析受感染人数的变化规律.
- 预报传染病高潮到来的时刻.
- 预防传染病蔓延的手段.

基本方法

不是从医学角度分析各种传染病的特殊机理，而是按照传播过程的一般规律建立数学模型.

模型1　已感染人数 (病人) $i(t)$



假设

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人,则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设 1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$.

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病.

λ~ 日接触率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$

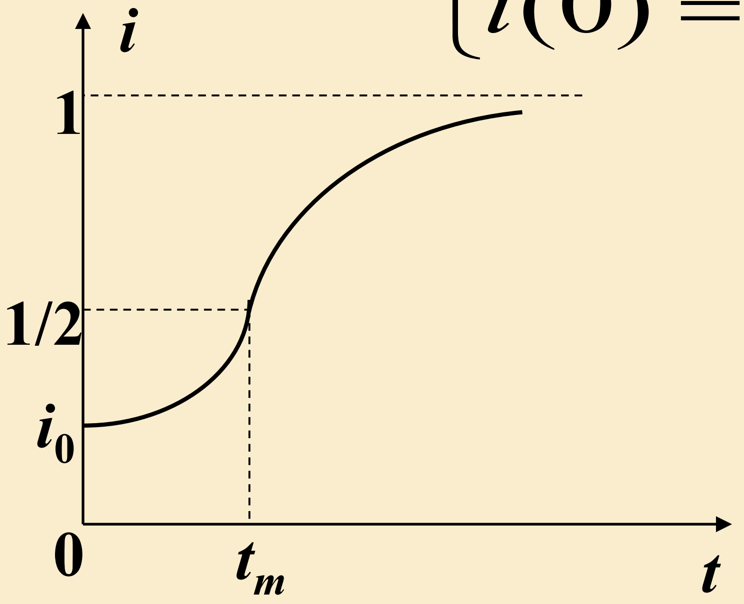
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$$?

病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染.

SIS 模型

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i=-\lambda i[i-(1-\dfrac{1}{\sigma})] \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$\sigma=\lambda/\mu$

λ~日接触率

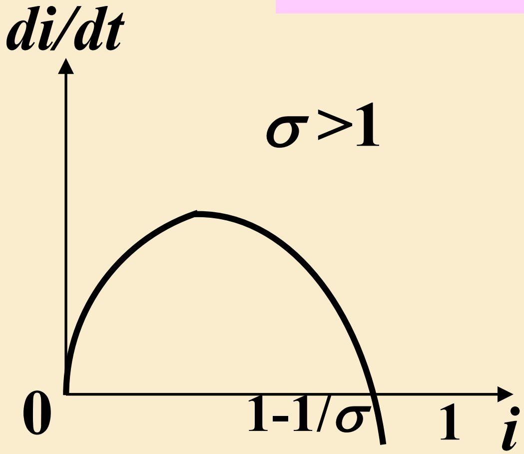
$1/\mu$~感染期

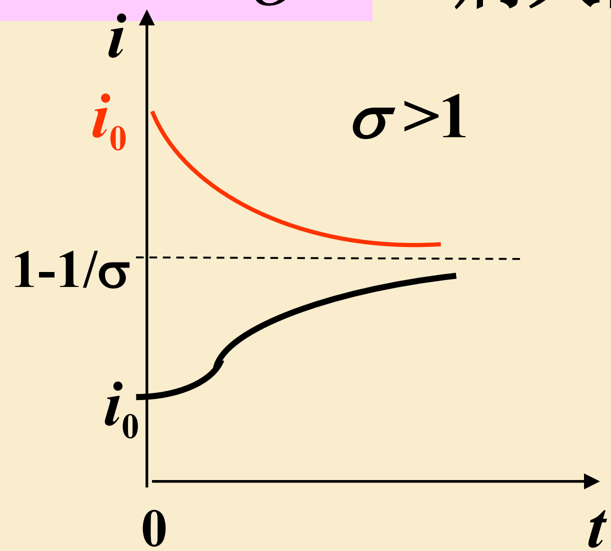
σ ~一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**.

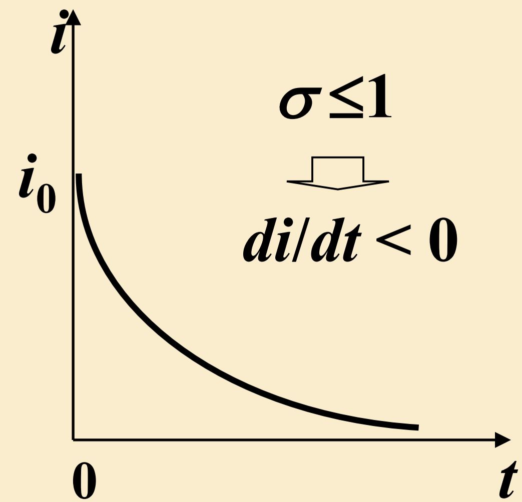
模型3

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$

接触数σ (感染期内每个病人的有效接触人数)







$$i(\infty) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \le 1 \end{cases}$$

$\sigma > 1,\ i_0 < 1-1/\sigma$ ⇨ $i(t)$按S形曲线增长

$\sigma \le 1$ ⇨ $i(t)$单调下降

感染期内有效接触使健康者感染的人数不超过原有的病人数

接触数$\sigma=1$ ~ 阈值

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者.**

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$.

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程.

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

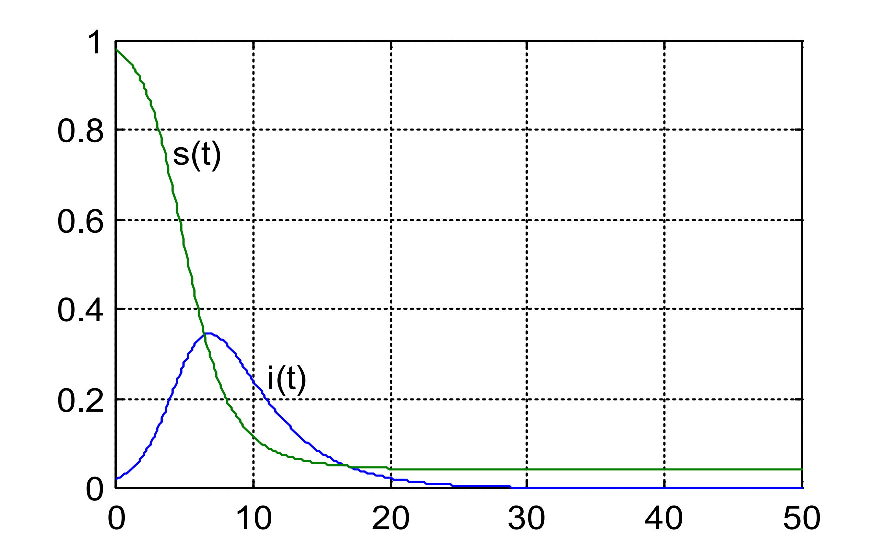
先做数值计算，再在相平面上研究解析解性质

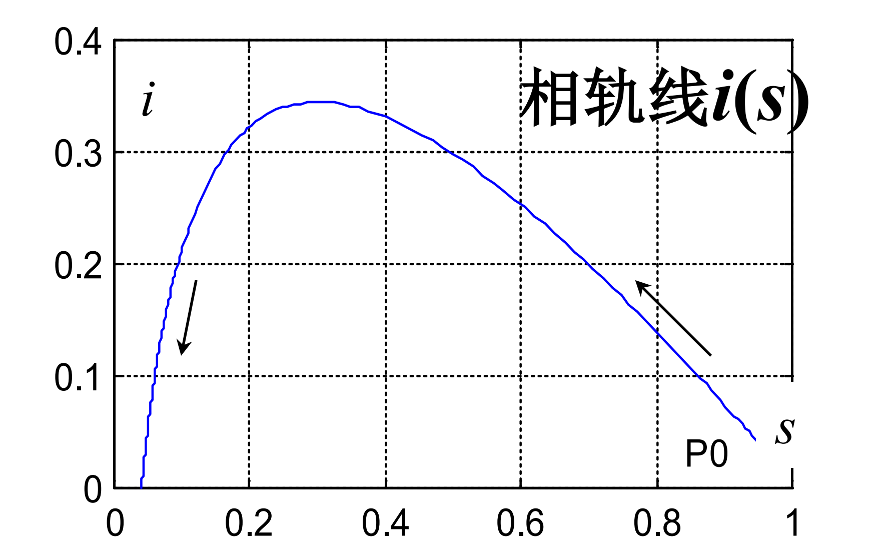
$i_0+s_0\approx 1$ (通常$r(0)=r_0$很小)

模型4 SIR模型的数值解

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i, i(0) = i_0 \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si, \ \ s(0) = s_0 \end{cases}$$

设λ=1, μ=0.3, i_0=0.02, s_0=0.98, 用MATLAB计算作图$i(t)$, $s(t)$及$i(s)$





$i(t)$从初值增长到最大；$t\to\infty$, $i\to 0$.

$s(t)$单调减；$t\to\infty$, $s\to 0.04$.

模型4　SIR模型的相轨线分析

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

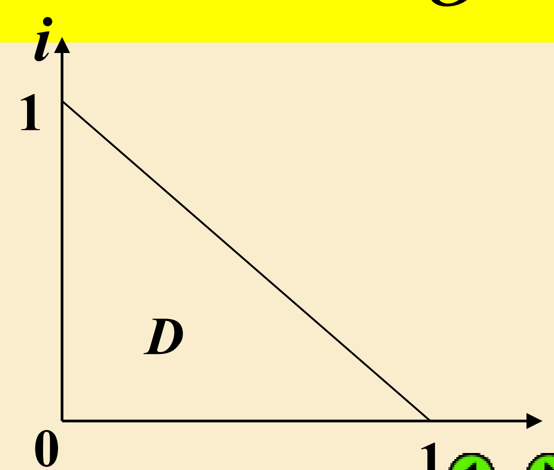
相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i) \mid s \ge 0,\ i \ge 0,\ s + i \le 1\}$$

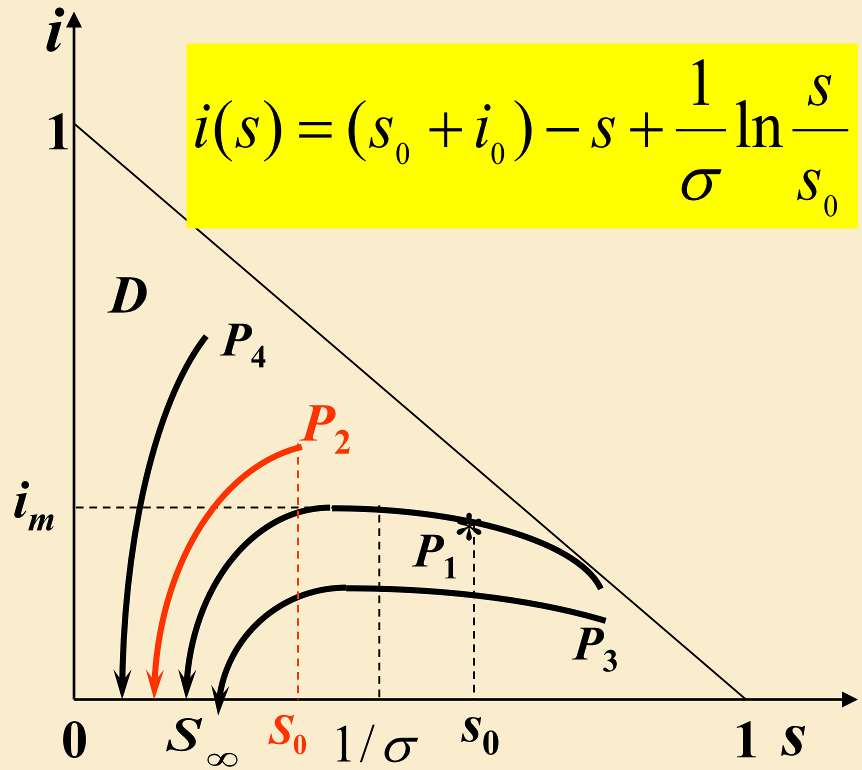
在D内作相轨线$i(s)$的图形，进行分析



模型4　相轨线 $i(s)$ 及其分析　SIR模型

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\ i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$

$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s=1/\sigma,\ i=i_m \qquad t\to\infty,\ i\to 0$$

s_∞满足 $s_0+i_0-s_\infty+\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1: $s_0>1/\sigma$→ $i(t)$先升后降至0 ⇨ **传染病蔓延**

P_2: $s_0<1/\sigma$→ $i(t)$单调降至0 ⇨ **传染病不蔓延**

$1/\sigma$~阈值

模型4　预防传染病蔓延的手段

SIR模型

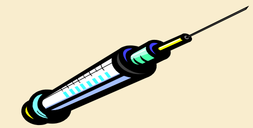
传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- **提高阈值 $1/\sigma$** ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow,\ \mu\uparrow$

λ(日接触率)$\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平↑

μ(日治愈率)$\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平↑

- **降低 s_0** ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫



$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略i_0 ⇨

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

模型4 预防传染病蔓延的手段

• 降低日接触率λ • 提高日治愈率μ • 提高移出比例r_0

以最终未感染比例s_∞和病人比例最大值i_m为度量指标.

λ	μ	$1/\sigma$	s_0	i_0	s_∞	i_∞
1	0.3	0.3	0.98	0.02	0.0398	0.3449
0.6	0.3	0.5	0.98	0.02	0.1965	0.1635
0.5	0.5	1.0	0.98	0.02	0.8122	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.98	0.02	0.9172	0.0200
1	0.3	0.3	0.70	0.02	0.0840	0.1685
0.6	0.3	0.5	0.70	0.02	0.3056	0.0518
0.5	0.5	1.0	0.70	0.02	0.6528	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.70	0.02	0.6755	0.0200

$\lambda\downarrow, \mu\uparrow \Rightarrow s_\infty\uparrow, i_m\downarrow$ $s_0\downarrow (r_0\uparrow) \Rightarrow s_\infty\uparrow, i_m\downarrow$

模型4　被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

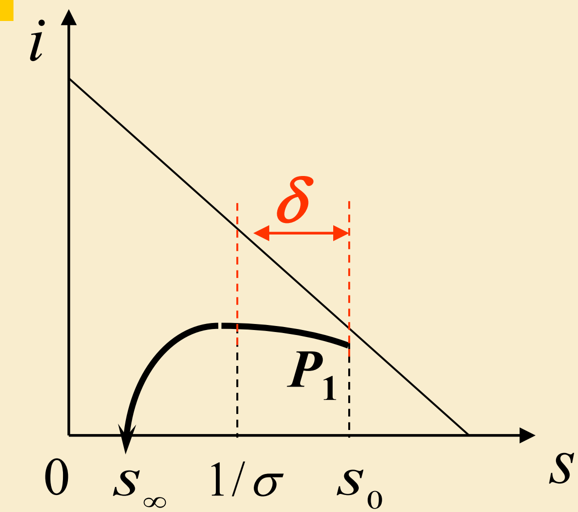
$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \approx 0$$

$x << s_0$

$$x\left(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \approx 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right)$$



$s_0 - 1/\sigma = \delta$

δ小, $s_0\sigma \approx 1$

$$x \approx 2\delta$$

提高阈值$1/\sigma$ ⇒ 降低被传染人数比例 x

传染病模型

模型1 → 模型2 (SI) → 模型3 (SIS)

模型2 (SI) → 模型4 (SIR)

区分病人和健康人

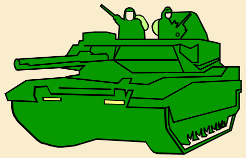
考虑治愈

模型3, 4: 描述传播过程, 分析变化规律,

预报高潮时刻, 预防蔓延手段.

模型4: 数值计算与理论分析相结合.

5.3　正规战与游击战



第一次世界大战Lanchester提出预测战役结局的模型.

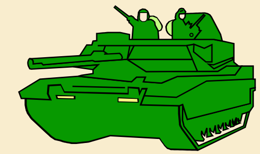
战争分类：正规战争，游击战争，混合战争.

只考虑双方兵力多少和战斗力强弱.

兵力因战斗及非战斗减员而减少，因增援而增加.

战斗力与射击次数及命中率有关.

建模思路和方法为用数学模型讨论社会领域的实际问题提供了可借鉴的示例.



一般模型

$x(t)$ ~甲方兵力，$y(t)$ ~乙方兵力

模型假设

- 每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力.
- 每方非战斗减员率与本方兵力成正比.
- 甲乙双方的增援率为$u(t)$, $v(t)$.

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y) - \alpha x + u(t), \quad \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) = g(x, y) - \beta y + v(t), \quad \beta > 0 \end{cases}$$

f, g 取决于战争类型

正规战争模型

双方均以正规部队作战

- 甲方战斗减员率只取决于乙方的兵力和战斗力

$f(x, y)=-ay$, a ~ 乙方每个士兵的杀伤率

$a=r_y p_y$, r_y~射击率， p_y~命中率

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases}$$

$$g = -bx, b = r_x p_x$$

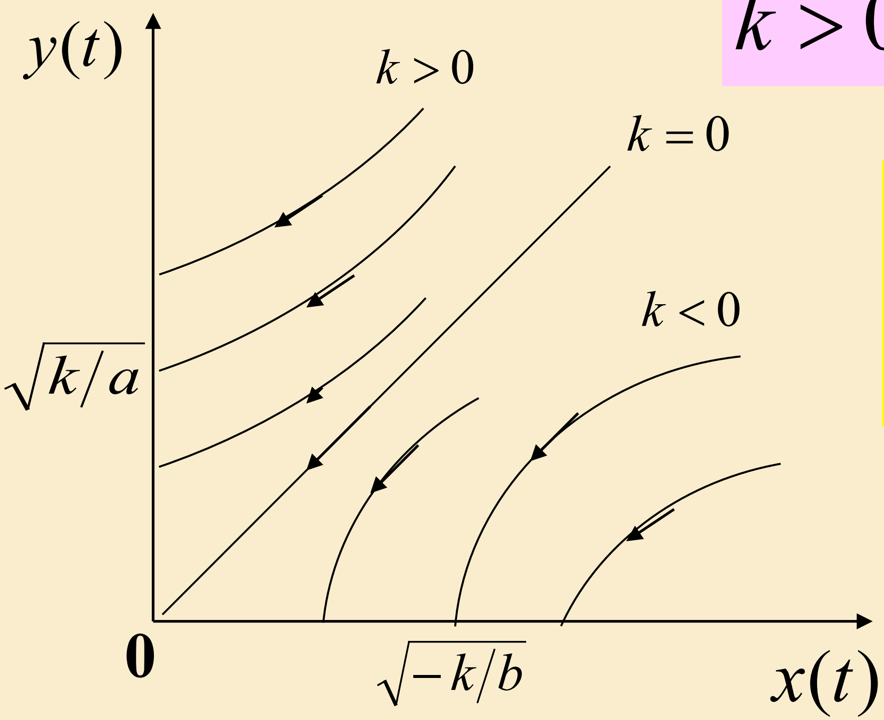
- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

正规战争模型

为判断战争的结局，不求$x(t), y(t)$而在相平面上讨论 x 与 y 的关系.

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \Rightarrow \begin{matrix} ay^2 - bx^2 = k \\ k = ay_0^2 - bx_0^2 \end{matrix}$$



$k>0 \Rightarrow x=0$时$y>0$ $\Rightarrow$ 乙方胜

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$$

平方律模型

$k<0 \Rightarrow$ 甲方胜

$k=0 \Rightarrow$ 平局

游击战争模型

双方都用游击部队作战

- 甲方战斗减员率还随着甲方兵力的增加而增加

$f(x, y) = -cxy$, c~ 乙方每个士兵的杀伤率

$c = r_y p_y$ $\qquad$ $p_y = s_{ry} / s_x$

r_y~射击率 $\Rightarrow$ s_x~ 甲方活动面积

p_y~命中率 $\qquad$ s_{ry}~ 乙方射击有效面积

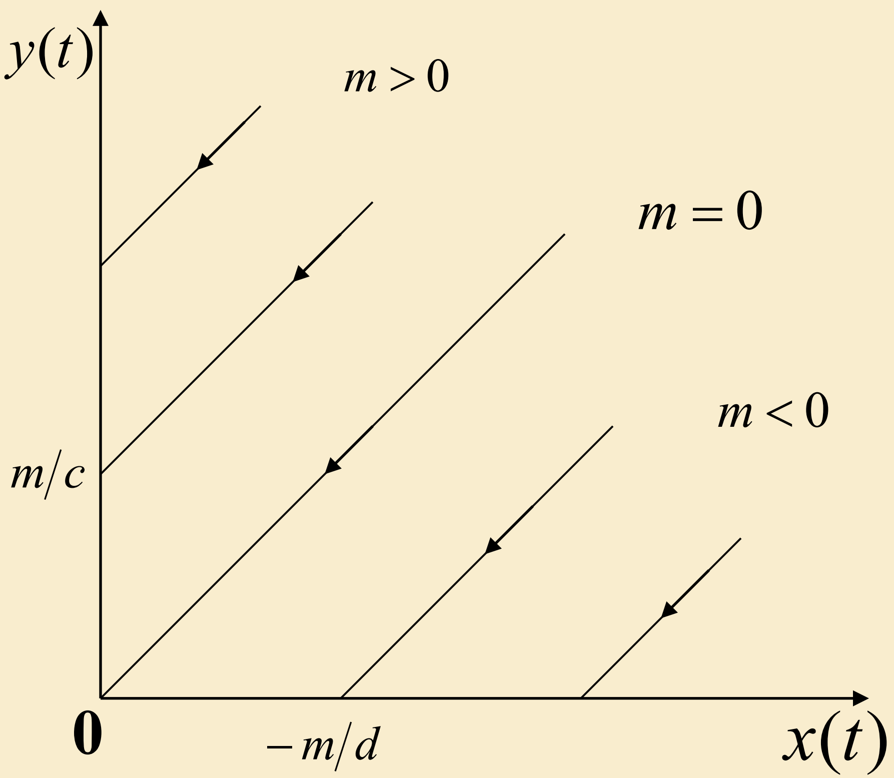
$$g(x, y) = -dxy, \quad d = r_x p_x = r_x s_{rx} / s_y$$

- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

游击战争模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{c} \Rightarrow \begin{aligned} & cy - dx = m \\ & m = cy_0 - dx_0 \end{aligned}$$



$m > 0 \Rightarrow x = 0$时$y > 0$

$\Rightarrow$乙方胜

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y}$$

线性律模型

$m < 0 \Rightarrow$甲方胜

$m = 0 \Rightarrow$平局

混合战争模型

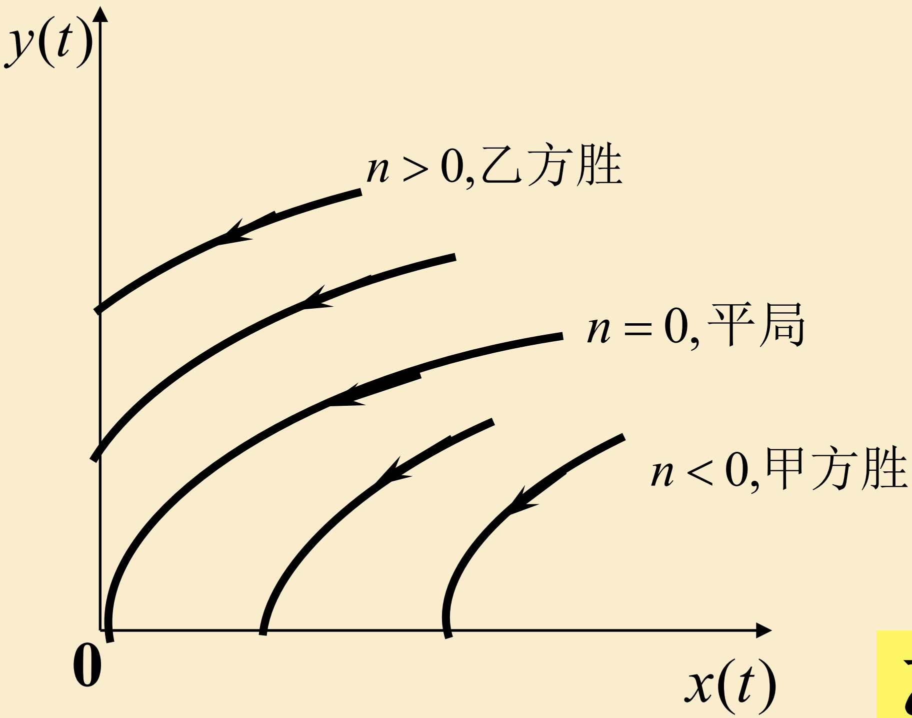
甲方为游击部队，乙方为正规部队

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad cy^2 - 2bx = n$$

$$n = cy_0^2 - 2bx_0$$

$n > 0$ 乙方胜 $\Rightarrow \left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 > \dfrac{2b}{cx_0}$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0}$$



设 x_0=100, r_x/r_y=1/2, p_x=0.1, s_x=1(km²), s_{ry}=1(m²)

$$\Rightarrow \quad (y_0/x_0)^2 > 100$$

乙方必须10倍于甲方的兵力!

5.5 香烟过滤嘴的作用

问题

- 过滤嘴的作用与它的材料和长度有什么关系?
- 人体吸入的毒物量与哪些因素有关，其中什么因素影响大，什么因素影响小?

模型分析

- 分析吸烟时毒物进入人体的过程，建立吸烟过程的数学模型.
- 设想一个“机器人”在典型环境下吸烟，吸烟方式和外部环境在整个过程中不变.

模型假设

1）l_1~烟草长， l_2~过滤嘴长， $l=l_1+l_2$，毒物量M均匀分布，密度$w_0=M/l_1$.

2）点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是$a':a$，$a'+a=1$.

3）未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的(单位时间)吸收率分别是b和β.

4）烟雾沿香烟穿行速度是常数v，香烟燃烧速度是常数u， $v>>u$.

定性分析

Q ~ 吸一支烟毒物进入人体总量

$\beta\uparrow, l_2\uparrow, M\downarrow, a\downarrow, v\downarrow \Rightarrow Q\downarrow$

$b\uparrow, l_1\uparrow \Rightarrow Q\downarrow ?$

$u\uparrow \Rightarrow Q\uparrow\downarrow ?$

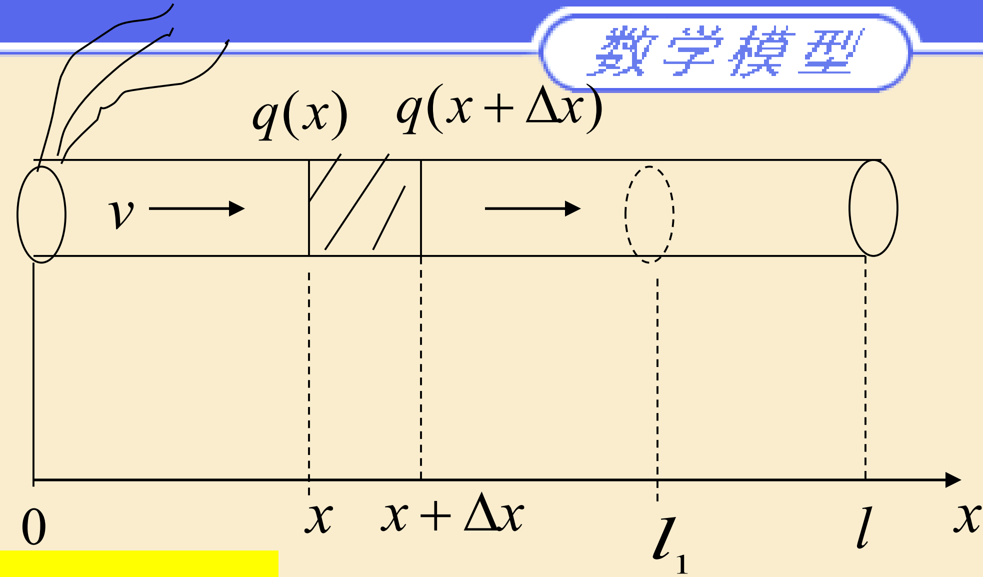
模型建立

t=0, x=0，点燃香烟

$q(x,t)$ ~ 毒物流量

$w(x,t)$ ~ 毒物密度

$w(x,0) = w_0$



$$Q = \int_0^T q(l,t)dt, \quad T = l_1 / u$$

1) 求$q(x,0)=q(x)$　　流量守恒

$$q(x) - q(x+\Delta x) = \begin{cases} bq(x)\Delta\tau, 0 \le x \le l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau, l_1 \le x \le l, \end{cases} \qquad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\frac{dq}{dx} = \begin{cases} -\frac{b}{v}q(x), 0 \le x \le l_1 \\ -\frac{\beta}{v}q(x), l_1 \le x \le l \end{cases}$$

$$q(0) = aH_0$$
$$H_0 = uw_0$$

1) 求$q(x,0)=q(x)$

$$\frac{dq}{dx}=\begin{cases}-\dfrac{b}{v}q(x),\ 0\le x\le l_1\\ -\dfrac{\beta}{v}q(x),\ l_1\le x\le l\end{cases}\Rightarrow q(x)=\begin{cases}aH_0e^{-\frac{bx}{v}}, & 0\le x\le l_1\\ aH_0e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l\end{cases}$$

2) 求$q(l,t)$

t* 时刻，香烟燃至 *x=ut

$$H_0\Rightarrow H(t)=uw(ut,t)\quad x\Rightarrow x-ut\ (ut\le x\le l_1),l_1\Rightarrow l_1-ut\ (l_1\le x\le l)$$

$$q(x,t)=\begin{cases}aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\le x\le l_1\\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l\end{cases}$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

3) 求$w(ut,t)$

考察Δt内毒物密度的增量

$$w(x,t+\Delta t)-w(x,t)=b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t$$

(单位长度烟雾毒物被吸收部分)

$$q(x,t)=aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}$$

$$H(t)=uw(ut,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{b}{v}auw(ut,t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}\\ w(x,0)=w_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right),\quad a'=1-a$$

4) 计算 Q　　$Q \sim$ 吸一支烟毒物进入人体总量

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right)$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

$$=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{abut}{v}}\right)$$

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)dt=\frac{aw_0 v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),$$

$$r=\frac{a'bl_1}{v},\ \varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}$$

结果分析

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),\quad r=\frac{a'bl_1}{v},\ \varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}$$

1）Q与a,M成正比， aM是毒物集中在$x=l$ 处的吸入量

2) $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ ~过滤嘴因素，β, l_2~ 负指数作用

$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 是毒物集中在$x=l_1$ 处的吸入量

3）$\varphi(r)$~ 烟草的吸收作用　　烟草为什么有作用?

$$r=\frac{a'bl_1}{v}<<1 \qquad \varphi(r)\doteq 1-r/2$$

$$Q \doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-\frac{a'bl_1}{2v}\right)$$

b, l_1~ 线性作用

结果分析

4) 与另一支不带过滤嘴的香烟比较，w_0, b, a, v, l 均相同，吸至 $x=l_1$ 扔掉.

带过滤嘴

$$Q_1 = \frac{a w_0 v}{a'b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'b l_1}{v}}\right)$$

不带过滤嘴

$$Q_2 = \frac{a w_0 v}{a'b} e^{-\frac{b l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'b l_1}{v}}\right)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{-\frac{(\beta - b) l_2}{v}}$$

$$\beta > b \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

提高 β-b 与加长l_2，效果相同.

香烟过滤嘴的作用

- 在基本合理的简化假设下，用精确的数学工具解决一个看来不易下手的实际问题.

- 引入两个基本函数：流量$q(x,t)$和密度$w(x,t)$，运用物理学的守恒定律建立微分方程，构造动态模型.

- 对求解结果进行定性和定量分析，得到合乎实际的结论.