第十章

第六节 高斯公式 通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

三、通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

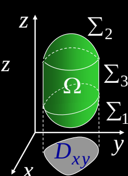
定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数 , 则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{(Gauss 公式)}$$

下面先证:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

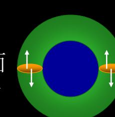
证明: 设 $\Omega: z_1(x,y)\le z(x,y)\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$ 为XY型区域 , $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$, $\Sigma_1: z=z_1(x,y)$, $\Sigma_2: z=z_2(x,y)$,则



$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$
$$=\iint_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y))$$
$$-R(x,y,z_1(x,y))\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_3}\right)R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



若 Ω 不是 XY–型区域 , 则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域, 在辅助面正反两侧面积分正负抵消, 故上式仍成立 .

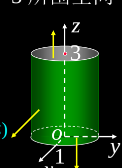
类似可证 $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 用Gauss 公式计算 $\oiint_\Sigma (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式}=\iiint_\Omega (y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(用柱坐标)}$$
$$=\iiint_\Omega (r\sin\theta-z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

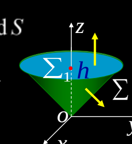
思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例2. 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_\Sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2, \text{取上侧}$$

记Σ,Σ_1所围区域为Ω, 则 $\boxed{\text{在 }\Sigma_1\text{ 上 }\alpha=\beta=\tfrac{\pi}{2},\gamma=0}$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$
$$=2\iiint_\Omega (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

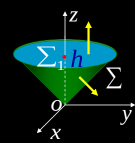
$$I = 2\iiint_\Omega (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用重心公式, 注意 $\bar{x}=\bar{y}=0$

$$= 2\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$



例3. 设Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2$, $1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_\Sigma (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1: z=1\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

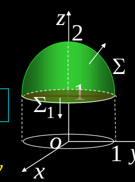
$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标　用极坐标

$$=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}$$



例4. 设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在闭区域 Ω上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$\iiint_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x}\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y}\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

其中 Σ 是整个 Ω 边界面的外侧.

分析: 高斯公式 $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证: 令 $P=u\frac{\partial v}{\partial x}$, $Q=u\frac{\partial v}{\partial y}$, $R=u\frac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\iiint_\Omega\left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

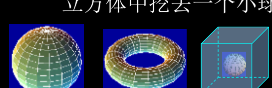
移项即得所证公式.

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

1. 连通区域的类型 设有空间区域 G,

- 若 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G, 则称 G 为空间二维单连通域 ;
- 若 G 内任一闭曲线总可以张一片全属于 G 的曲面, 则称 G 为空间一维单连通域 .

例如, 球面所围区域 既是一维也是二维单连通区域 ;
环面所围区域 是二维但不是一维单连通区域 ;
立方体中挖去一个小球所成的区域 是一维但不是二维单连通区域 .



2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在空间二维单连通域$G$内具有连续一阶偏导数, Σ为$G$内任一闭曲面, 则

$$\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,\quad (x,y,z)\in G \qquad ②$$

证: "充分性" .根据高斯公式可知②是①的充分条件.
"必要性" . 用反证法已知①成立, 假设存在 $M_0\in G$, 使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}\ne 0$$

因P, Q, R 在G内具有连续一阶偏导数，则存在邻域 $\cup(M_0)\subset G$, 使在$\cup(M_0)$上,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$$

设$\cup(M_0)$的边界为Σ' 取外侧, 则由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma'} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{\cup(M_0)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$\neq 0$$

与①矛盾，故假设不真. 因此条件②是必要的.

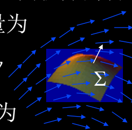
三、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ 为场中任一有向曲面, 则由对坐标的曲面积分的物理意义可知, 单位时间通过曲面Σ 的流量为

$$\Phi=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

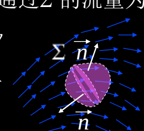


由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

$$\Phi=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$
$$=\iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

若Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过Σ 的流量为

$$\Phi=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$\Phi>0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量少于流出的, 表明Σ 内有泉;

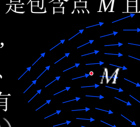
当$\Phi<0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量多于流出的, 表明Σ 内有洞；

当$\Phi=0$ 时, 说明流入与流出Σ 的流体质量相等 .

根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad ③$$

为了揭示场内任意点M 处的特性, 设Σ 是包含点 M 且方向向外的任一闭曲面，记Σ 所围域为Ω, 在③式两边同除以Ω 的体积 V, 并令Ω 以任意方式缩小至点 M (记作$\Omega\to M$),则有



$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=\lim_{\Omega\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad ((\xi,\eta,\zeta)\subset\Omega)$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

此式反应了流速场在点M 的特点: 其值为正,负或 0, 分别反映在该点有流体涌出, 吸入, 或没有任何变化.

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{A}$通过有向曲面 Σ 的**通量**(流量) .

在场中点 $M(x,y,z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\operatorname{div}\vec{A}$$

divergence

称为向量场 $\vec{A}$在点 M 的**散度**.

说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div}\vec{A}>0$ 表明该点处有正源,

$\operatorname{div}\vec{A}<0$ 表明该点处有负源,

$\operatorname{div}\vec{A}=0$ 表明该点处无源,

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 $\vec{A}$处处有 $\operatorname{div}\vec{A}=0$, 则称 $\vec{A}$为**无源场**.

例如, 匀速场 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ (其中v_x,v_y,v_z 为常数),

$$\operatorname{div}\vec{v}=0$$

故它是无源场.

***例5.** 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z)\qquad(\vec{r}\neq\vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解: $\operatorname{div}\vec{E}=q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]$

$$=q\left[\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right]$$

$$=0\qquad(r\neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.

内容小结

1. 高斯公式及其应用

公式: $\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

2. 通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$, P, Q, R, 在域G内有一阶 连续偏导数, 则

向量场通过有向曲面 Σ 的通量为

$$\iint_\Sigma\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

G 内任意点处的散度为

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

思考与练习

设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧, Ω 为 Σ 所围立体, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 判断下列演算是否正确?

(1) $\iint_\Sigma\frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v\cancel{=}\frac{3}{R}\iiint_\Omega\mathrm{d}v=4\pi R^2$$

(2) $\iint_\Sigma\frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\cancel{=}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v=\cdots$$

备用题 设 Σ 是一光滑闭曲面,所围立体 Ω 的体积为V, θ 是 Σ 外法线向量与点 (x,y,z) 的向径 $\vec{r}$ 的夹角, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 试证 $\frac{1}{3}\oiint_\Sigma r\cos\theta\,\mathrm{d}S=V$.

证: 设 Σ 的单位外法向量为 $\vec{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, $\vec{r}^0=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}$, 则

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}^0\cdot\vec{r}^0}{|\vec{n}^0|\cdot|\vec{r}^0|}=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}\oiint_\Sigma r\cos\theta\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}v=V$$