内容小结

1. 可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

  1. $y^{(n)}=f(x)$ 逐次积分
  2. $y''=f(x,y')$ 令 $y'=p(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$
  3. $y''=f(y,y')$ 令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$
  4. $y''=f(y')$ 令 $y'=p(x)$， 或令 $y'=p(y)$.

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题？

  (1) 一般情况，边求解边定常数计算简便.

  (2) 遇到开平方时，要根据题意确定正负号.

一、一阶隐式方程

形如 $F(x,y,y')=0$ 的方程称为一阶隐式方程。

如果由此方程可以解出 y' (可能是若干个)，即

$$y'=f_i(x,y),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

解出这些方程可得原方程的解。

例 解方程 $y'^2+yy'-x^2-xy=0.$

解： 对方程左边因式分解(十字相乘)，得到

$$(y'+x+y)(y'-x)=0,$$

$$\boxed{\begin{matrix} y' & x+y \\ y' & -x \end{matrix}}$$

所以 $y'+x+y=0$ 或 $y'-x=0$。

由 $y'=x$，得 $y=\frac{x^2}{2}+C$; 由 $y'+y=-x$，得 $y=Ce^{-x}-x+1.$

所以原方程的解为 $y=\frac{x^2}{2}+C$ 或 $y=Ce^{-x}-x+1.$

二、可降阶的微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

特点： 方程不含 y 及 $y',\cdots,y^{(n-1)}$.

解法： 对方程连续积分 n 次，可得方程通解。

方程两边积分得 $y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$

继续积分可得 $y^{(n-2)}=\int[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1]\mathrm{d}x+C_2$

$$=\int[\int f(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

依次通过 n 次积分，可得含 n 个任意常数的通解.

注意：每次积分，要加一个任意常数.

例 求解 $y'''=\mathrm{e}^{2x}-\cos x.$

解： $y''=\int\left(\mathrm{e}^{2x}-\cos x\right)\mathrm{d}x+C_1'$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\sin x+C_1'$$

$$y'=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\cos x+C_1'x+C_2$$

$$y=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$$

(此处 $C_1=\frac{1}{2}C_1'$)

2. $y''=f(x,y')$ **型的微分方程**

特点： 方程不显含未知函数 y。

解法： 设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$,

原方程化为一阶方程

$$p'=f(x,p)$$

设其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$

则得 $y'=\varphi(x,C_1)$

再一次积分，得原方程的通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

例 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解： 设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$，即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，于是有 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分得 $y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

边求解
边定常数

3. $y'' = f(y, y')$ **型的微分方程**

特点: 方程不显含自变量 x .

解法: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

故方程化为 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

代入方程得 $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, 即 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$ (C_1=0 对应p=0的情形)

例 求下列微分方程的通解 $yy'' - y'^2 - 1 = 0$

解: 令 $y' = p(y)$, 则方程变为

$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0$, 即 $\frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$

则 $\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即$p = \pm\sqrt{(C_1y)^2 - 1}$

$\therefore y' = \pm\sqrt{(C_1y)^2 - 1}$, 分离变量并积分得

$$x = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^2 - 1}} = \pm\frac{1}{C_1}\int \frac{d(C_1y)}{\sqrt{(C_1y)^2 - 1}}$$

$$= \pm\frac{1}{C_1}\{\ln[C_1y + \sqrt{(C_1y)^2 - 1}] - C_2\} \quad \therefore C_1y = \frac{e^{C_1x+C_2} + e^{-(C_1x+C_2)}}{2}$$

例 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$p\,dp = e^{2y}dy$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p|_{y=0} = y'|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{dy}{dx} = p = e^y$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

4. $y'' = f(y')$**型的微分方程**

特点: 方程不显含自变量 x , 也不显含未知函数 y.

解法: 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$,

用 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程的解法;

或令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$,

用 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程的解法.

一般说, 用前者方便些,

有时用后者方便 . 例如, $y'' = e^{-(y')^2}$

例 求解 $\begin{cases} y'' - ay'^2 = 0 \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = -1 \end{cases}$

提示: 令 $y' = p(x)$, 则方程变为 $\frac{dp}{dx} = a\,p^2$

积分得 $-\frac{1}{p} = ax + C_1$, 利用 $p|_{x=0} = y'|_{x=0} = -1$ 得 $C_1 = 1$

再解 $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+ax}$, 故 $y = -\frac{1}{a}\ln|1+ax| + C_2$,

利用 $y|_{x=0} = 0$, $\therefore \quad y = -\frac{1}{a}\ln|1+ax|$

思考 若问题改为求解 $\begin{cases} y'' - \frac{1}{2}y'^3 = 0 \\ y|_{x=0} = 0, \; y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$

则求解过程中得 $p^2 = \frac{1}{1-x}$, 问开方时**正负号如何确定**?

一阶微分方程求解总结

1. 一阶标准类型方程求解

三个标准类型 $\begin{cases} \text{可分离变量方程} \\ \text{齐次方程} \\ \text{线性方程} \end{cases}$

关键: 辨别方程类型，掌握求解步骤

2. 一阶非标准类型方程求解

变量代换法 $\begin{cases} \text{代换}\textbf{自变量} \\ \text{代换}\textbf{因变量} \\ \text{代换}\textbf{某组合式} \end{cases}$

例 求下列方程的通解

(1) $y' + \dfrac{1}{y^2} e^{y^3+x} = 0$;　(2) $y' = \dfrac{3x^2+y^2}{2xy}$;

(3) $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$;　(4) $y' = \dfrac{1}{2x-y^2}$.

提示: (1) 因 $e^{y^3+x} = e^{y^3} e^x$，故为分离变量方程:

$$-y^2 e^{-y^3} dy = e^x dx$$

通解　$\dfrac{1}{3} e^{-y^3} = e^x + C$

(2) 这是一个齐次方程，令 $y = ux$，化为分离变量方程:

$$\frac{2u\,du}{3-u^2} = \frac{dx}{x}$$

(3) $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

方程两边同除以 x 即为齐次方程，令 $y = ux$，化为分离变量方程.

$x > 0$ 时，$y' = \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} \Longrightarrow xu' = \sqrt{1-u^2}$

$x < 0$ 时，$y' = -\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} \Longrightarrow xu' = -\sqrt{1-u^2}$

(4) $y' = \dfrac{1}{2x-y^2}$

调换自变量与因变量的地位，化为 $\dfrac{dx}{dy} - 2x = -y^2$，用线性方程通解公式求解.

例 求下列方程的通解:

(1) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$

(2) $2x\ln x\,dy + y(y^2\ln x - 1)dx = 0$

(3) $y' = \dfrac{3x^2+y^2-6x+3}{2xy-2y}$

提示: (1) 原方程化为 $(xy)' = y\ln(xy)$

令 $u = xy$，得 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u}{x}\ln u$　(分离变量方程)

(2) 将方程改写为

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2x\ln x} y = -\dfrac{y^3}{2x}$　(贝努里方程)　令 $z = y^{-2}$

(3) $y' = \dfrac{3x^2+y^2-6x+3}{2xy-2y}$

化方程为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(x-1)^2+y^2}{2y(x-1)}$

$\Big\downarrow$ 令 $t = x-1$，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2+y^2}{2ty}$　(齐次方程)

$\Big\downarrow$ 令 $y = ut$

可分离变量方程求解

例 求以 $(x+C)^2 + y^2 = 1$ 为通解的微分方程.

提示: $\begin{cases} (x+C)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x+C) + 2yy' = 0 \end{cases}$ 消去 C 得 $y^2(y'^2+1) = 1$

例 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' + y = 2\sqrt{xy}$

提示: 令 $u = xy$，化成可分离变量方程 : $u' = 2\sqrt{u}$

(2) $xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1)$

提示: 这是一阶线性方程，其中

$P(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$,　$Q(x) = a(1 - \dfrac{1}{\ln x})$

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2(\ln y-x)}$

提示: 可化为关于 x 的一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y}$

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$

提示: 为贝努里方程 , 令 $z=y^{-2}$

(5) $y\,y''-y'^2-1=0$

提示: 为可降阶方程 , 令 $p=y'\quad(p=p(y))$

(6) $(y^4-3x^2)\,\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$

提示: 可化为贝努里方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-3\frac{x}{y}=-y^3x^{-1}$

令 $z=x^2$

(7) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$

解: 令 $u=\sqrt{x^2+y}-x$, 即 $y=2xu+u^2$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2u+2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

原方程化为

$$2u+2(x+u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+\frac{2}{u}x=-2$$

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{u}\mathrm{d}u}\left[\int-2\mathrm{e}^{\int\frac{2}{u}\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+C\right]$$

$$=\frac{1}{u^2}\left[\int-2u^2\,\mathrm{d}u+C\right]=-\frac{2}{3}u^2+\frac{C}{u^2}$$

故原方程通解 $\sqrt{(x^2+y)^3}=x^3+\frac{3}{2}xy+C$

例 已知某曲线经过点(1 , 1), 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标 , 求它的方程 .

解: 设曲线上的动点为 $M(x,y)$, 此点处切线方程为

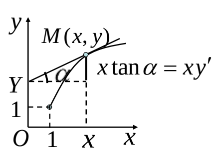
$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $X=0$, 得截距 $Y=y-y'x$, 由题意知微分方程为

$$y-y'x=x$$

即 $\quad y'-\frac{1}{x}y=-1$

定解条件为 $y|_{x=1}=1$.



思考: 能否根据草图列方程?

线性微分方程解的结构

***n* 阶线性微分方程**的一般形式:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

$$\begin{cases}f(x)\not\equiv0 \text{ 时, 称为非齐次方程;}\\ f(x)\equiv0 \text{ 时, 称为齐次方程.}\end{cases}$$

二阶线性微分方程的一般形式:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

复习: 一阶线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

通解: $y=\underbrace{C\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 }y^*}$

一、线性齐次方程解的结构

定理1. 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)\,y=0$$

的两个解, 则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数) 也是该方程的解. (对 n 阶线性齐次方程也适用)

叠加原理: 线性齐次微分方程的任何两个解的线性组合也是该方程的解.

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

说明: 定理1中的解 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$y_2(x)=2\,y_1(x)$ 也是齐次方程的解

但是 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=(C_1+2C_2)y_1(x)$ 并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义: 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**, 否则称为**线性无关.**

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关;

又如, $1, x, x^2$, 若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$, 则根据二次多项式至多只有两个零点, 可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0, 故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都 线性无关.

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的**充要条件:**

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\dfrac{k_2}{k_1}$ (无妨设 $k_1 \neq 0$)

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ (证明略)

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$ 必线性 相关

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是该方程的通解.

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

二、线性非齐次方程解的结构

$\left.\begin{array}{l}\text{线性非齐次微分方程的解} \\ \text{相应的齐次微分方程的解}\end{array}\right\}$ 二者的关系?

1. 线性非齐次方程(1)的任何解与相应的齐次方程(2)的解的和、差仍是线性非齐次方程(1)的解.
2. 线性非齐次方程(1)的任何两个解的差是相应的齐次方程(2)的解.

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = Q(x) \quad (1)$$

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (2)$$

定理 3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x) \quad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$(Y'' + y^{*\prime\prime}) + P(x)(Y' + y^{*\prime}) + Q(x)(Y + y^*)$$

$$= (y^{*\prime\prime} + P(x) y^{*\prime} + Q(x) y^*) + (Y'' + P(x) Y' + Q(x) Y)$$

$$= f(x) + 0 = f(x)$$

故 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的解, 又 Y 中含有两个独立任意常数, 因而 ② 也是通解 . 证毕

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

定理 4. 设 $y_k^*(x)\ \ (k=1,2,\cdots,m)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)\quad (k=1,2,\cdots,m)$$

的特解, 则 $y=\sum_{k=1}^{m}y_k^*$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{m}f_k(x)$$

的特解. (非齐次方程之解的叠加原理)

定理3, 定理4 均可推广到 n 阶线性非齐次方程.

定理 5. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解, $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次方程的通解为

$$y=\underline{C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)}+y^*(x)$$

$$=Y(x)+y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

例　设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

$(\cancel{A})$ $C_1y_1+C_2y_2+y_3$;

$(\cancel{B})$ $C_1y_1+C_2y_2+(C_1+C_2)y_3$;

$(\cancel{C})$ $C_1y_1+C_2y_2-(1+C_1+C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

提示: (C) $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)-y_3$

(D) $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$

y_1-y_3, y_2-y_3 都是对应齐次方程的解,

二者线性无关 . (反证法可证)

例　已知微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个解 $y_1=x, y_2=e^x, y_3=e^{2x}$, 求此方程满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=3$ 的特解 .

解: y_2-y_1 与 y_3-y_1 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{e^x-x}{e^{2x}-x}\neq 常数$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y=C_1(e^x-x)+C_2(e^{2x}-x)+x$$

代入初始条件 $y(0)=1, y'(0)=3$, 得 $C_1=-1, C_2=2$,

故所求特解为 $y=2e^{2x}-e^x$.