下面介绍数列极限存在的两个判定定理.

定理1.1 (数列的夹逼定理) 设有三个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，如果$a_n \le b_n \le c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

证：任给$\varepsilon > 0$，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$可知，∃正整数$N_1$，当$n > N_1$时，有$|a_n - A| < \varepsilon$，即

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \qquad (1)$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$可知，∃正整数$N_2$，当$n > N_2$时，有$|c_n - A| < \varepsilon$，即

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \qquad (2)$$

取$N = \max(N_1, N_2)$，当$n > N$时，上述(1)与(2)式都成立．又因为$a_n \le b_n \le c_n$，于是得出

$$A - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < A + \varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

夹逼准则

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2)，$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_1, N_2$,

当$n > N_1$时，$y_n - a < \varepsilon$

当$n > N_2$时，$z_n - a| < \varepsilon$

令$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时，有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

由条件 (1) $\quad a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$

即$|x_n - a| < \varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例6 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解：由于

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$．又由于

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) > \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$．因此，由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

例6’. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi}\right) = 1$

证: 利用夹逼准则．由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} < n\left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi}\right) < \frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}} = 1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi}\right) = 1$$

例6** 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$

解 $\quad \frac{1}{\sqrt{n^6+n^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^6+kn}} \le \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} (k = 1, 2, \cdots, n)$,

故 $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}$.

而 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}} = \frac{1}{3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n}} = \frac{1}{3},$$

由夹逼准则，原式$= \frac{1}{3}$.

例7 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，且$a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A.$$

证：因为$a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$A \geq 0$．下面分两种情况讨论．

(i)$A = 0$．由不等式

$$0 < \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

及例4的结论$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = A = 0$$

由夹逼定理立即有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0 = A$$

(ii) $A > 0$．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$．再由不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

及极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}} = A$$

和$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$，再由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A.$$

例 任何实数都是某个有理数列的极限．

证明. 设 A 为实数. 如果 A 为有理数, 则令 $a_n = A\ (n \geqslant 1)$ 即可. 如果 A 为无理数, 令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 因此 a_n 都是有理数. 因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. □

因此nA不可能为整数，严格不等号成立．

下面我们给出单调数列的定义．

如果数列$\{a_n\}$满足条件

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

就称数列$\{a_n\}$是单调增加的；如果数列$\{a_n\}$满足条件

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

就称数列$\{a_n\}$是单调减少的．单调增加和单调减少的数列统称为单调数列．

定理1.2 单调有界数列必有极限．

此定理的严格证明，需要用到实数理论的知识，这里不作证明，仅作几何解释．

因为当数列$\{a_n\}$单词增加且$|a_n| < M$时，在数轴上画出数列$\{a_n\}$的点，随着n的增大，点a_n沿数轴向右平移，且不超过点M，则a_n只能无限趋近某个定点A，这样点A就是$\{a_n\}$的极限．当数列$\{a_n\}$单调减少，且$|a_n| < M$时，可类似说明．

我们知道，收敛的数列一定有界．但有界的数列不一定收敛．但定理1.2表明：如果数列不仅有界，并且是单调的，那么这数列的极限必定存在，也就是说这数列一定收敛．

例8 已知数列$\{a_n\}$：$a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{a_1}{1+a_1}$，$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}, \cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$．

解：先证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在

(i) 用数学归纳法可证得$\{a_n\}$单调增加：$a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{3}{2}$．显然$a_1 < a_2$．

假设$a_{k-1} < a_k$成立，于是

$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= \left(1 + \frac{a_{k-1}}{1+a_{k-1}}\right) - \left(1 + \frac{a_k}{1+a_k}\right) \\ &= \frac{a_{k-1} - a_k}{(1+a_{k-1})(1+a_k)} < 0 \end{aligned}$$

即$a_k < a_{k+1}$成立．

(ii) 不难看出$\{a_n\}$有界：$1 < a_n < 2$. 根据定理1.2，可知数列$\{a_n\}$有极限，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 下面求出$A$.

由于$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$，两边取极限得

$$A = 1 + \frac{A}{1+A}$$

即$A^2 - A - 1 = 0$, 于是得出$A = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 根据收敛数列的保号性的推论可知$A$非负，所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例9 求证$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, k 为正整数.

证：设$a_n = \frac{n^k}{a^n}$, 于是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k, \ \frac{1}{a} < 1.$$

故当n充分大时，

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{a} < 1.$$

即

$$a_{n+1} < a_n.$$

因此数列$\{a_n\}$从某项开始为递减数列. 又$a_n > 0$,$\{a_n\}$有下界，因此$\{a_n\}$收敛.

设其极限为A. 利用关系式

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{a_n}{a}$$

知$A = \frac{A}{a}$, 故$A = 0$. 即$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

下面给出另一种解法(利用夹逼定理)：

证明$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$，$a > 1$，$k$为正整数.

证：由于$a > 1$，可令$a = 1 + h$且$h > 0$，当k为正整数时，则有

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n = 1^n + n\cdot h + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot h^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1} + \cdots + h^n \\ &> \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n^k}{a^n} &< \frac{n^k}{\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(n-k)h^{k+1}} \end{aligned}$$

补充例1 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明:因为对任意的$n \in N$,有$\sqrt[n]{n} \geq 1$,所以令$\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$,且有$\alpha_n \geq 0$和$n = (1+\alpha_n)^n$.

利用二项式定理，有

$$\begin{aligned} n = (1+\alpha_n)^n &= 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2. \end{aligned}$$

即$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$. 当$n \geq 2$时，有

$$\alpha_n^2 < \frac{2}{n-1}\text{或}0 \leq \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

由夹逼定理可得$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

补充例2 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

解：当$n \geq k$时，有$n(k-1) \geq k(k-1) = k^2 - k$，
即：$nk - k^2 + k \geq n$或$k(n-k+1) \geq n$.

当$k = 1, 2, \cdots, n$时，分别有
$1\cdot n \geq n$, $2(n-1) \geq n$, $3(n-2) \geq n, \cdots, n\cdot 1 \geq n$.
将这n个不等式左右两边分别相乘，有

$$(n!)^2 \geq n^n\text{或}\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n},$$

即:$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.由于$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$，根据夹逼定理得：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

补充例3 证明数列$x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1}>x_n$， $\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又$\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$， $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的； $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$， $x_{n+1}^2=3+x_n$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2=3+A$, 解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

补充例4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}(a>0)$.

解：令$x_n=\frac{a^n}{n!}$，有

$x_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{a}{n+1}=x_n\cdot\frac{a}{n+1}$，

当$\frac{a}{n+1}<1$时(即$n>a-1$)，就能保证数列是严格单调递减的.

又因为$x_n>0, n\in N$，于是数列$\{x_n\}$必存在极限，并设此极限为l.

由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}$ 即：$l=l\cdot 0$.

也即：$l=0$.

下面叙述柯西极限存在准则(或称柯西审敛原理)，它给出了数列收敛的充分必要条件.

柯西极限存在准则 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数ε，存在着这样的正整数N，使得当$m>N$,$n>N$时，就有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

证：必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. $\forall\varepsilon>0$，由数列极限的定义，$\exists$正整数N，当$n>N$时，有

$$|a_n-A|<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

同样，当$m>N$时，也有

$$|a_m-A|<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当$m>N$,$n>N$时，有

$$|a_n-a_m|=|(a_n-A)-(a_m-A)|$$
$$\le|a_n-A|+|a_m-A|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以条件是必要的.

充分性证明从略.

从几何上看，数列$\{a_n\}$收敛的充分条件是：对于任意给定的正数ε，在数轴上一切具有足够大脚标的点a_n中，任意两点间的距离小于ε.

例10 设有数列$\{a_n\}$，令$T_n=|a_1|+\cdots+|a_n|$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若$\{T_n\}$收敛，则$\{S_n\}$收敛.

证：$\forall\varepsilon>0$，由于$\{T_n\}$收敛，故$\exists$正整数N，当$n>N$时，不等式

$$|T_{n+p}-T_n|=|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切自然数p成立．而

$$|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|$$
$$\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|=|T_{n+p}-T_n|$$

所以对任意的自然数p, $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$也成立．由柯西极限存在准则可得$\{S_n\}$收敛.

例11 设$\{a_n\}$是单调减数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$n=1,2,\cdots$，若$\{S_n\}$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证：因为$\{S_n\}$收敛，所以存在一个数S，使得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S, \lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S.$$

于是得
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}$$
$$=S-S=0$$

再有$\{a_n\}$是单调减数列，得$a_n\ge 0$.

由于$\{S_n\}$收敛，根据柯西存在准则，对任意的正数ε，$\exists$正整数N，使得对一切自然数p，只要$n>N$，就有

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当$n > N$时，利用$\{a_n\}$是单调减数列得到

$$\begin{aligned} 2na_{2n} &\le 2(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) \\ &= 2|S_{n+n} - S_n| \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2n+1)a_{2n+1} &\le (2n+1)a_{2n+1} + a_{2n+1} \\ &\le 2(n+1)a_{2n+1} \\ &\le 2(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}) \\ &= 2|S_{2n+1} - S_n| \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

于是，对任意的正数ε，取$N_1 = 2N$，只要$n > N_1$就有

$$|na_n| = na_n < \varepsilon$$

也就是有

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$