线性代数——先修课

第三章 矩 阵

§3.6 逆矩阵及矩阵可逆的条件

内容提要

- 逆矩阵的概念
- 逆矩阵的性质
- 伴随矩阵及其性质
- 矩阵可逆的条件

问题的提出：

- 记 $A=(a_{ij})_{m\times n}, \vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, \vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$，则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

  可写成矩阵的形式 $A\vec{X}=\vec{b}$.

- 在解一元方程 $ax=b$ 的时候，如果 $a\neq 0$，则等式两边同乘以 a^{-1}，得 $x=a^{-1}b$.

问题：对线性方程组$A\vec{X}=\vec{b}$，是否可以象一元方程 $ax=b$ 一样求解？

问题的分析：

在数的运算中，当数$a\neq 0$时，有 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$，其中 $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

在矩阵的运算中，单位阵 I 相当于数的乘法运算中的 1. 那么，对于矩阵A，能否在一定条件下引进 A^{-1} 的概念，使得

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

若可以，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有解 $\vec{X}=A^{-1}\vec{b}$，且解唯一.

首先，若A为$m\times n$型的矩阵，则由上式两个可乘条件知 A^{-1} 的为$n\times m$型的矩阵；又因两个乘积等于同一个单位阵 I，则有 $m=n$，即 A 和 A^{-1} 均为 n阶方阵.

一、逆矩阵的概念

定义1 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得 $AB=BA=I_n$，则称 A 为可逆矩阵或非奇异矩阵，而称 B 为A 的逆矩阵，并记为A^{-1}.

注：1. 定义中矩阵 A 与 B 的地位相同，因而若 A可逆，且 B 是 A 的逆，则 B 也可逆，A 即是 B 的逆，并且A与A^{-1}乘法可交换.

2. 对上述定义式两边取行列式知：若A为可逆矩阵，则

$$|A|\neq 0, |A^{-1}|=|A|^{-1}=1/|A|$$

3. 若 A 为可逆矩阵，则其逆是唯一的.

（设 B, C 都是 A 的逆矩阵，则有

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C.$$）

例1 三类初等矩阵都是可逆矩阵，且.

$$E_i(k)^{-1}=E_i(1/k)\quad (k\neq 0);$$

$$E_{i,j}^{-1}=E_{i,j};$$

$$E_{i,j}(k)^{-1}=E_{i,j}(-k).$$

说明： 因为三类初等变换都是可逆的变换过程，且由初等变换与初等矩阵的关系，很容易得到上述结果; 另一方面，也可由矩阵乘法直接验证定义1的等式.

例2 考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，对任意2阶方阵 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，有

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-c & b-d\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2.$$

从而，并不是所有的方阵都可逆.

现在的问题是：在什么条件下方阵A是可逆的？
如果 A 可逆，怎样求 A^{-1} ？
可逆矩阵有什么性质？

二、逆矩阵的性质

对可逆矩阵A而言，A^{-1}可看作是对A的一种运算. 下面给出求逆运算与其他运算的一些运算律.

性质： 设A, B, A_i为n阶可逆矩阵, 实数 $k \neq 0$, 则

(1) A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

“穿脱原则”，与$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$类似.

进一步有，$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_1^{-1}$

(3) kA 也可逆，且 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

(4) A^{T} 也可逆，且 $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

问题： 是否有 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

- 乘积矩阵求逆的“穿脱原则”：

整个黄色的过程的逆向过程，就是整个红色的过程，即：

$$(AB)^{-1} = [(\text{穿袜子})\cdot(\text{穿鞋})]^{-1} = (\text{脱鞋})\cdot(\text{脱袜子}) = B^{-1}A^{-1}$$

性质的证明：用定义直接验证，得

$$(1)\ AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

$$(2)\ (AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I.$$

反复运用性质(2)，即可得多个矩阵乘积的逆的结论.

$$(3)\ (kA)(k^{-1}A^{-1})=k(A(k^{-1}I_n))A^{-1}=(kk^{-1})AA^{-1}=1\cdot I_n=I_n$$

$$(k^{-1}A^{-1})(kA)=k^{-1}(A^{-1}(kI_n))A=(k^{-1}k)A^{-1}A=1\cdot I_n=I_n$$

$$(4)\ A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}=I,$$

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}=I.$$

■

问题的进一步分析与回顾

问题： 对线性方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$，是否可以象一元方程 $ax=b$ 一样求解？

即在定义了A^{-1} 后，希望有 $\vec{X}=A^{-1}\vec{b}.$

但是，A^{-1} 仅对方阵有定义，即对应方程组的方程个数m=未知数个数n.

Cramer法则回顾

符号定义如上，若 $D=|A|\neq 0$, 则$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解, 即

$$x_j=\frac{D_j}{|A|},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

如果把 D_j 按照第 j 列展开，可得:

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj},\ j=1,2,\cdots,n.$$

如果采用矩阵乘法符号表示Cramer法则给出的解，有：

$$\vec{X} = |A|^{-1}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = |A|^{-1}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\boxed{|A|^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}}_{B}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = B\vec{b}.$$

注意1: 这里的A_{ij}是数，而非分块子矩阵.
注意2: A_{ij}下标的排列顺序与a_{ij}相反.

则, 原方程组的解即为: $\vec{X} = B\vec{b}$.　问题是这里的B是否就是A^{-1}是呢？

下面验证：在A为方阵且 $|A|\neq 0$ 时，有 $A^{-1}=B$.

一方面，由行列式的展开定理有：

$$AB=|A|^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=|A|^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right]_{1\le i,j\le n}$$

$$=|A|^{-1}\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=I_n$$

另一方面，也可证 $BA=I$：

$$BA=|A|^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = |A|^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right]_{1\le i,j\le n}$$

$$=|A|^{-1}\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = I_n$$

思考：在以上推导中，条件 $|A|\neq 0$ 在什么地方用到？ 回答：$|A|^{-1}$

那么，当 $|A|=0$ 时，怎么办？

三、伴随矩阵及其性质

定义2 用 n 阶方阵 A 的元素的代数余子式 A_{ij} 组成的矩阵的转置

$$\left(A_{ij}\right)^T_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}:=A^*$$ 称为矩阵A的伴随矩阵.

注: (1) 对方阵A, $\boxed{AA^*=A^*A=|A|I}$ 总是成立的 (含 $|A|=0$ 时).

(2) 若 $|A|\neq 0$, 则 $A|A|^{-1}A^*=|A|^{-1}A^*A=I$, 故 A 和 A^* 可逆, 且

$$A^{-1}=|A|^{-1}A^*,\quad (A^*)^{-1}=|A|^{-1}A.$$

- 伴随矩阵给出了一个求方阵逆的构造性的方法.

例1　若二阶方阵的行列式 $|A|\neq 0$, 于是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=|A|^{-1}A^*=\frac{1}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

副对角线
元素取负.

主对角线
元素换位.

例2 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

解

$\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq0,$ 所以可以用伴随矩阵求逆法.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,$$

同理可得 $A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,\ A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2.$

故 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

伴随求逆法的优缺点：

(与Cramer法则类似)

缺点

- 计算量大，n^2个$n-1$阶行列式
- 仅对2、3阶方阵实用

优点

- 显式公式
- 2阶可直接写出
- 含参,证明时有效

四、矩阵可逆的条件

设A为n阶方阵，若A可逆，则由定义知 $AA^{-1}=I$,

两边取行列式，得 $\left|AA^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}\right|=\left|I_n\right|=1 \Rightarrow |A|\neq 0.$

反之，若 $|A|\neq 0$，则由伴随矩阵的性质 $AA^*=A^*A=|A|I$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=I_n, \quad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

于是，我们就得到了如下关于矩阵可逆的条件.

定理1 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0.$

- 逆矩阵定义中有如下关键条件：

(1) A, B都是n阶方阵，(2) $AB = I_n$，(3) $BA = I_n$.

思考：这些条件独立吗？(有多余的吗?)

显然， (2)+(3) ⇒ (1)；以下结论说明：(1)+(2) ⇒ (3) 或 (1)+(3) ⇒ (2).

推论1 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得 $AB = I_n$ (或 $BA = I_n$), 则 A可逆，且 $B = A^{-1}$.

证明: $\because$ $|AB| = |A||B| = |I| = 1$ $\therefore |A| \neq 0$，故A^{-1}存在. 于是

$$B = IB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}\left(AB\right) = A^{-1}I = A^{-1}.$$ ■

- 所以, 上述定义中的三个条件(1),(2),(3)不是独立的, 其中任意去掉一条, 都与原定义等价!

定理2 n 阶方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 为若干个初等矩阵的乘积.

证明： "$\Leftarrow$" :因为初等矩阵都是可逆阵，又因可逆矩阵的乘积仍可逆，所以A为可逆阵.

"$\Rightarrow$" : 若A 可逆, 则$|A|\neq 0$，于是齐次线性方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$, 有唯一解(零解), 说明A经过初等行变换化为简化的阶梯形矩阵后，必为I_n, 即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$, 使得 $P_s\cdots P_1 A = I_n$,

$$\therefore\ A=\left(P_s\cdots P_2P_1\right)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1};$$

$$A^{-1}=P_s\cdots P_2P_1.$$

■

推论2 n 阶方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$只有零解 .

证明： "$\Rightarrow$"：若A可逆，则 $\vec{X}=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$, 即方程组只有零解.

"$\Leftarrow$"：若齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解, 即有唯一解，则说明A经过初等行变换化为阶梯形矩阵后有，主元个数 $r=n$，进一步再化为简化的阶梯形矩阵后为 I_n，即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$,使得

$$P_s\cdots P_1A=I_n,$$

从而 A 可逆. ■

回顾分块初等矩阵： 其中，我们在定义分块倍乘矩阵时

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I_t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & P \end{bmatrix}$$

要求其中的子块P为特定方阵. 下面我们把这个要求明确化.

由于初等变换都是可逆的过程，故对应的初等矩阵为可逆阵，这等价于要求初等矩阵的行列式不为零. 对于分块倍乘矩阵，有

$$\begin{vmatrix} P & O \\ O & I \end{vmatrix} = |P| \cdot |I| = |P| \neq 0.$$

因此，$|P| \neq 0$, 也即P为可逆阵，就是分块倍乘矩阵的明确要求.

本讲小结

- 逆矩阵的概念： 方阵，且$AB = BA = I$.
- 逆矩阵的性质：
  - $(A^{-1})^{-1} = A$； $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$； $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$； $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- 伴随矩阵及其性质：$A^* = (A_{ij})^T_{n\times n}$，$AA^* = A^*A = |A|I$
- 矩阵可逆的条件
  - A可逆 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow AB = I \Longleftrightarrow A = P_1P_2\cdots P_s$ (初等矩阵乘积)
    $\Longleftrightarrow A\vec{X} = \vec{0}$只有零解.