第七节 方向导数与梯度

第八章

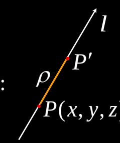
一、方向导数

二、梯度

三、物理意义

一、方向导数

定义: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 存在下列极限:



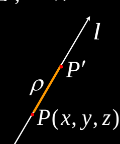
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}\overset{\text{记作}}{=}\frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left(\begin{array}{l}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2},\\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta,\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{array}\right)$$

则称 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的**方向导数**.

定理: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，则函数在该点**沿任意方向** l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$



其中 α,β,γ 为 l 的方向角.

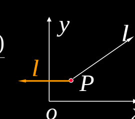
证明: 由函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 可微，得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(\rho)$$

$$=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)+o(\rho)$$

故 $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

对于二元函数 $f(x,y)$, 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l (方向角为 α,β) 的方向导数为



$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta$$

$$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\Delta y=\rho\cos\beta)$$

特别:

- 当 l 与 x 轴同向 $(\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 l 与 x 轴反向 $(\alpha=\pi,\beta=\frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

例1. 求函数 $u=x^2yz$ 在点 $P(1,1,1)$ 沿向量 $\vec{l}=(2,-1,3)$ 的方向导数.

解: 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

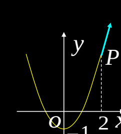
$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{14}},\quad\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left(2xyz\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}-x^2z\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+x^2y\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

例2. 求函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $P(2,3)$ 沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数.

解: 将已知曲线用参数方程表示为



$$\begin{cases}x=x\\ y=x^2-1\end{cases}$$

它在点 P 的切向量为 $(1,2x)|_{x=2}=(1,4)$

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\qquad\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=\left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+(3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]_{(2,3)}=\frac{60}{\sqrt{17}}$$

例3. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解: $\vec{n}=(4x,6y,2z)\big|_P=2(2,3,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$

同理得 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$

$\therefore\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\dfrac{1}{14}(6\times2+8\times3-14\times1)=\dfrac{11}{7}$

二、梯度

方向导数公式 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l}^{\,0}=|\vec{G}|\cos(\vec{G},\vec{l}^{\,0})\quad(|\vec{l}^{\,0}|=1)$

当 $\vec{l}^{\,0}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时，方向导数取最大值：

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)=|\vec{G}|$$

这说明 $\vec{G}$：
- 方向：f 变化率最大的方向
- 模：f 的最大变化率之值

1. 定义

向量 $\vec{G}$ 称为函数 $f(P)$ 在点 P 处的梯度 (gradient)，记作 grad f，即

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

同样可定义二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

说明: 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影.

2. 梯度的几何意义

定义 2 若 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 存在对所有自变量的偏导数，则称向量 $(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的**梯度**，记作[①]

$$\operatorname{grad} f=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)).$$

向量 grad f 的长度(或模)为

$$|\operatorname{grad} f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}.$$

在定理 17.6 的条件下，若记 $\boldsymbol{l}$ 方向上的单位向量为

$$\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

于是方向导数公式又可写成

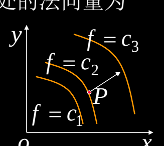
$$f_l(P_0)=\operatorname{grad} f(P_0)\cdot\boldsymbol{l}_0=|\operatorname{grad} f(P_0)|\cos\theta$$

这里 θ 是梯度向量 grad $f(P_0)$ 与 $\boldsymbol{l}_0$ 的夹角. 因此当 $\theta=0$ 时，$f_l(P_0)$ 取得最大值 $|\operatorname{grad} f(P_0)|$. 这就是说，当 f 在 P_0 可微时，f 在 P_0 的梯度方向是 f 的值增长最快的方向，且沿这一方向的变化率就是梯度的模；而当 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量反方向 $(\theta=\pi)$ 时，方向导数取得最小值 $-|\operatorname{grad} f(P_0)|$.

对函数 $z=f(x,y)$，曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ z=C\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影 $L^*: f(x,y)=C$ 称为函数 f 的**等值线**.

设 f_x, f_y 不同时为零，则 L^* 上点 P 处的法向量为

$$(f_x,f_y)\big|_P=\operatorname{grad} f\big|_P$$



(设 $c_1<c_2<c_3$)

同样，对应函数 $u=f(x,y,z)$，有等值面(等量面) $f(x,y,z)=C$，当各偏导数不同时为零时，其上点 P 处的法向量为 $\operatorname{grad} f\big|_P$.

函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线)，指向函数增大的方向.

3. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} C=\vec{0}$

(2) $\operatorname{grad}(C u)=C\operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u\pm v)=\operatorname{grad} u\pm\operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u v)=u\operatorname{grad} v+v\operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u$

例4. 设 $f(r)$ 可导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec r$ 的模， 试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec r^{\,0}$.

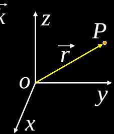
证: $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r},\quad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore\ \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec i+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec j+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec k$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\,\vec i+y\,\vec j+z\,\vec k)$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec r=f'(r)\vec r^{\,0}$$



内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 l (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$在点 $P(x,y)$处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=(f_x(x,y),\ f_y(x,y))$$

3. 关系

- 可微 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 方向导数存在 $\overset{\not\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 偏导数存在
- $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\vec l^{\,0}$　梯度在方向 $\vec l$ 上的投影.

例 4　二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\\ & -\infty<x<+\infty,\\ 0, & \text{其余部分}.\end{cases}$$

如图 16-8 所示，当(x,y)沿任何直线趋于原点时，相应的$f(x,y)$都趋于零，但这并不表明此函数在$(x,y)\to(0,0)$时极限存在. 因为当点(x,y)沿抛物线 $y=kx^2$ $(0<k<1)$趋于 O 点时，$f(x,y)$将趋于 1. 所以极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$$

不存在.　□

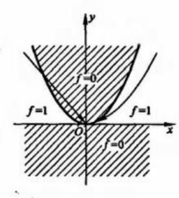


图 16-8

例 2　设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty \text{ 时},\\ 0, & \text{其余部分},\end{cases}$$

如图 16-8 所示. 这个函数在原点不连续(当然也不可微)，但在始于原点的任何射线上，都存在包含原点的充分小的一段，在这一段上 f 的函数值恒为零. 于是由方向导数定义，在原点处沿任何方向 l 都有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0.\qquad □$$

这个例子说明：(i) 函数在一点可微是方向导数存在的充分条件而不是必要条件. (ii) 函数在一点连续同样不是方向导数存在的必要条件，当然也不是充分条件(对此，读者容易举出反例).

思考与练习

1. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

　(1) 求函数在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲线 $\begin{cases}x=t\\ y=2t^2-1\\ z=t^3\end{cases}$ 在该点切线方向的方向导数;

　(2) 求函数在 $M(1,1,1)$ 处的**梯度**与(1)中**切线方向**的夹角 θ.

解答提示:

1. (1) $f(x,y,z)=x^2+y^z$, 曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在点 $M\,(1,1,1)$ 处切线的方向向量

$$\vec{l}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\bigg|_{t=1}=(1,4,3)$$

函数沿 $\vec{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_M=[\,f_x\cdot\cos\alpha+f_y\cdot\cos\beta+f_z\cdot\cos\gamma\,]\big|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{26}}$$

(2) $\operatorname{grad} f\,|_M=(2,1,0)$

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{grad} f\,|_M\cdot\vec{l}}{\left|\operatorname{grad} f\,|_M\right|\left|\vec{l}\right|}=\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_M}{\left|\operatorname{grad} f\,|_M\right|}=\frac{6}{\sqrt{130}}$$

$$\therefore\ \theta=\arccos\frac{6}{\sqrt{130}}$$

补充题 1. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\,|_M=$ $\underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$ **(92考研)**

解: $\operatorname{grad} u\,|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 x,y,z 具有轮换对称性

$$=\left(\frac{2x}{r^2},\frac{2y}{r^2},\frac{2z}{r^2}\right)\bigg|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}(1,2,-2)$$

2. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{\ 1/2\ }$. **(96考研)**

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$