高 等 数 学

上海财经大学数学学院

主讲：叶玉全

Tel：65904589

儿点说明：

（1）使用的教材是:《高等数学》高等教育出版社出版，上海财大应用数学系编，2012年7月.

（2）教学参考书:《高等数学习题集》(第三版)上海财经大学应用数学系编，上海财经大学出版社，2012年10月.《高等数学习题及习题集精解》复旦大学出版社，2013年7月.

（3）由于使用多媒体教学，课程进度较快，屏幕显示变化较快，上课需集中精力听讲.

（4）大家在上课时，如有问题及时提出来，欢迎大家在课堂里就有关学习问题进行讨论.

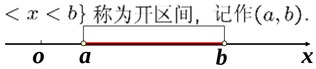
（5）本课程课外作业较多，希望大家独立、认真、及时地完成.

区间和邻域

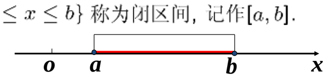
区间：是指介于某两个实数之间的全体实数，这两个实数叫做区间的端点.

$\forall\, a, b \in \mathcal{R}$, 且$a < b$.

$\{x\,|a < x < b\}$ 称为开区间，记作(a, b).



$\{x\,|a \le x \le b\}$ 称为闭区间，记作$[a, b]$.



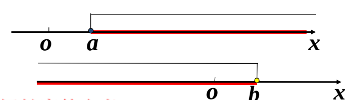
$\{x\,|a \le x < b\}$ 称为半开区间，记作$[a, b)$.

$\{x\,|a < x \le b\}$ 称为半开区间，记作$(a, b]$.

有限区间

$[a, +\infty) = \{x\,|a \le x\}$　$(-\infty, b) = \{x\,|x < b\}$

无限区间



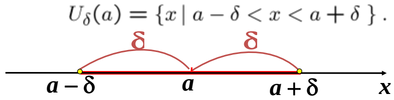
区间长度的定义:

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

邻域：设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$. 数集$\{x\,||x-a| < \delta\}$称为点a的δ邻域.

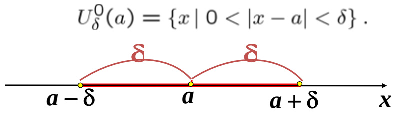
点a叫做这邻域的中心，δ叫做邻域的半径.

$$U_\delta(a) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$



点a的去心的δ邻域，记作$U^0_\delta(a)$. 即

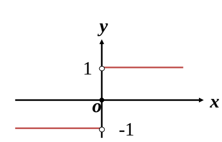
$$U^0_\delta(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$



几个特殊的函数举例

(1) 符号函数

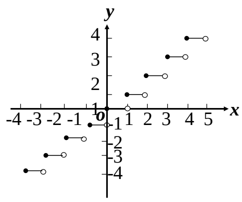
$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



显然有$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$

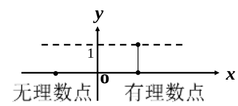
（2）取整函数

y为不超过x的最大整数，记为$y=[x]$.



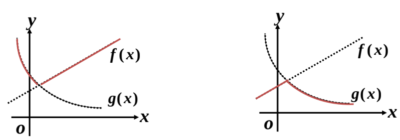
(3) 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & 当x为有理数时\\ 0, & 当x为无理数时\end{cases}$$



(4) 取最值函数

$y=\max\{f(x),g(x)\}$　　$y=\min\{f(x),g(x)\}$



在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

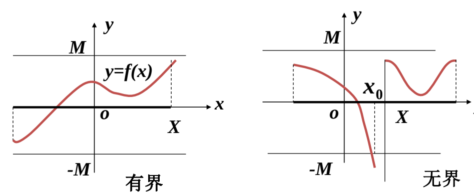
函数的基本性质

（1）有界性

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若$\exists M>0$，使得$\forall x\in I$，恒有

$$|f(x)|\le M,$$

则称$f(x)$在I上有界；否则，称$f(x)$在I上无界.



常见的有界函数有：

$|\sin x|\le 1$，$|\cos x|\le 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

$|\arcsin x|\le\frac{\pi}{2}$, $|\arccos x|\le\pi, x\in[-1,1]$.

$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$, $|\text{arccot}\, x|<\pi, x\in(-\infty,+\infty)$.

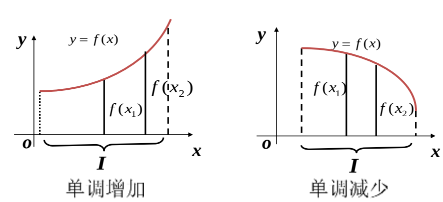
$|\frac{x}{1+x^2}|\le\frac{1}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

（2）单调性

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若$\forall x_1$，$x_2\in I$，$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)(或f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$在I上严格单调增加（或严格单调减少）.



注意：若$f(x)$在定义域D上严格单调增加(或严格单调减少)，则称$f(x)$为严格单调函数，否则，$f(x)$为非严格单调函数.

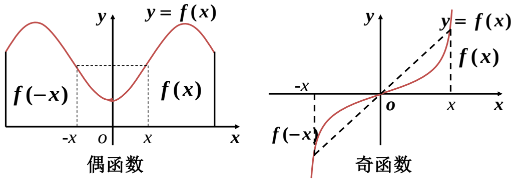
（3）奇偶性

设函数$f(x)$在关于原点对称的区间I上有定义，若$\forall x\in I$，恒有

$$f(-x) = f(x)(\text{或} f(-x) = -f(x)),$$
则称$f(x)$为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形关于y轴(即$x=0$)对称.

奇函数的图形关于原点对称.



常见的偶函数有:

x^{2n}, $|x|$, $\cos x$, $C, \cdots$, $f(x)+f(-x), \cdots$.

常见的奇函数有:

x^{2n+1}, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x, \cdots$, $f(x)-f(-x)$, $\cdots$.

奇±奇=奇; 偶±偶=偶; 奇×奇=偶;

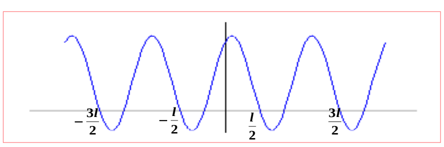
偶×偶=偶; 奇×偶=奇.

（4）周期性

设函数$f(x)$的定义域为D, 若$\exists$常数$T>0$, 使得$\forall x \in D$有$x \pm T \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立, 则称$f(x)$为周期函数, T称为$f(x)$的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.



常见周期函数的周期:

$A\sin(\omega x+\theta), A\cos(\omega x+\theta)$, 周期$T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$;

$A\tan(\omega x+\theta), A\cot(\omega x+\theta)$, 周期$T = \dfrac{\pi}{|\omega|}$;

$|\sin x|, |\cos x|$, 周期$T=\pi$.

1. 设 $f(0)=0$ 且 $x \neq 0$ 时 $a f(x) + b f(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 证明 $f(x)$为奇函数 .

证: 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{t}$, $a f(\frac{1}{t}) + b f(t) = ct$

由 $\begin{cases} a f(x) + b f(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x} \\ a f(\frac{1}{x}) + b f(x) = cx \end{cases}$

消去 $f(\frac{1}{x})$, 得

$$f(x) = \frac{c}{b^2-a^2}\left(bx - \frac{a}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

显然 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数 .

2. 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b\ (a \neq b)$ 均对称, 求证 $y=f(x)$ 是周期函数.

证: 由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(a+x) = f(a-x), \quad f(b+x) = f(b-x)$$

于是
$$\begin{aligned} f(x) &= f[a+(x-a)] \\ &= f[a-(x-a)] = f(2a-x) \\ &= f[b+(2a-x-b)] \\ &= f[b-(2a-x-b)] \\ &= f[x+2(b-a)] \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数 , 周期为 $T = 2(b-a)$

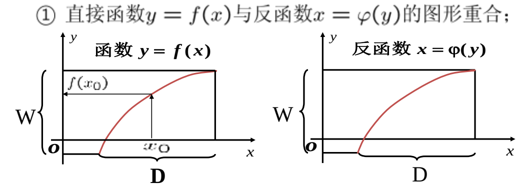
反函数

设函数$y=f(x)$的值域为R_f, 若$\forall y \in R_f$, 从关系式$y=f(x)$可确定一个x值, 则变量x是变量y的函数, 记为$x=\varphi(y)$.

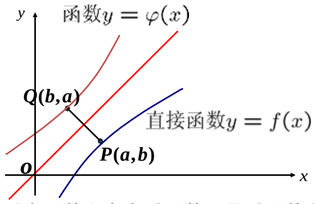
$\varphi(y)$称为函数$y=f(x)$的反函数, 记作$y=f^{-1}(x)$.

注意:

① 直接函数$y=f(x)$与反函数$x=\varphi(y)$的图形重合;



若把反函数$x=\varphi(y)$记为$y=\varphi(x)$，则函数$y=f(x)$的图形与函数$y=\varphi(x)$的图形关于$y=x$对称.



② 一一对应函数必存在反函数，且反函数也一一对应.

③ 直接函数与反函数的定义域与值域互换.

复合函数

复合函数是复合映射的一种特例，按照通常函数的记号，复合函数的概念可如下表述.

定义 设函数$y=f(u)$的定义域为D_f,而函数$u=\varphi(x)$在D_φ上有定义，且其值域为R_φ. 若$R_\varphi\subseteq D_f$，则称

$$y=f[\varphi(x)],\ x\in D_\varphi$$

为由函数$u=\varphi(x)$和函数$y=f(u)$构成的复合函数. 它的定义域为D_φ，x称为自变量，y称为因变量；u为中间变量.

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的；

例如，函数$y=\arcsin u$和$u=-(2+x^2)$不能构成复合函数.

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如，函数$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$可看作由函数$y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$ 和$v=\frac{x}{2}$复合而成.

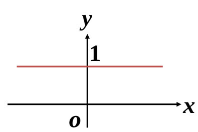
例 设$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in \bar{Q}\end{cases}$，求$D(-\frac{7}{5}), D(1-\sqrt{2})$，并讨论$D(D(x))$的性质.

解 $D(-\frac{7}{5})=1$，$D(1-\sqrt{2})=0$，$D(D(x))\equiv 1$，

有界函数，偶函数，

不是严格单调函数，

周期函数(无最小正周期).



例 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\ge 0\end{cases}$，求$f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\ge 1\end{cases}$，

1^0 当$\varphi(x)<1$时，

或$x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，$\Longrightarrow x<-1$；

或$x\ge 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，$\Longrightarrow 0\le x<\sqrt{2}$；

2^0 当$\varphi(x)\ge 1$时，

或$x<0$，$\varphi(x)=x+2\ge 1$，$\Longrightarrow -1\le x<0$；

或$x\ge 0$，$\varphi(x)=x^2-1\ge 1$，$\Longrightarrow x\ge\sqrt{2}$；

综上所述 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\le x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\le x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$.

例 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\le 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$，

1^0 当$|g(x)|\le 1$时，

或$|x|>2$, $|g(x)|=2\le 1$, $\Longrightarrow$ 此时无解；

或$|x|\le 2$, $|g(x)|=|2-x^2|\le 1$, $\Longrightarrow 1<|x|<\sqrt{3}$；

2^0 当$|g(x)|>1$时，

或$|x|>2$, $|g(x)|=2>1$, $\Longrightarrow |x|>2$；

或$|x|\le 2$, $|g(x)|=|2-x^2|>1$, $\Longrightarrow$

$|x|<1$或$\sqrt{3}<|x|\le 2$；

综上可得

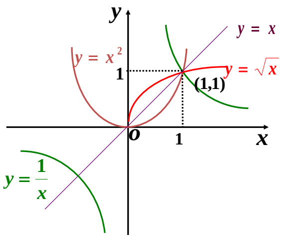
$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\le|x|\le\sqrt{3}\\ 0, & |x|<1\text{或}|x|>\sqrt{3}\end{cases}$

类似地，可以得到

$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$.

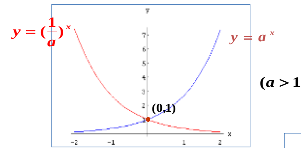
一、基本初等函数

1.幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 是常数)



2.指数函数

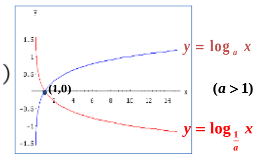
$y=a^{x}\quad (a>0,a\neq 1)$, 特殊地, $y=e^{x}$.



3.对数函数

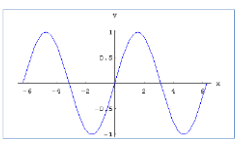
$y=\log_{a}x\quad (a>0,a\neq 1)$

特殊地, $y=\ln x$

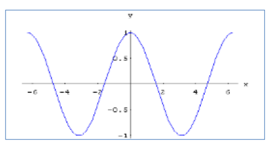


4.三角函数

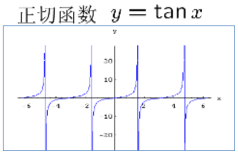
正弦函数 $y=\sin x$



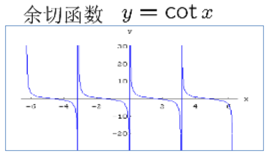
余弦函数 $y=\cos x$



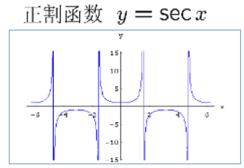
正切函数 $y=\tan x$



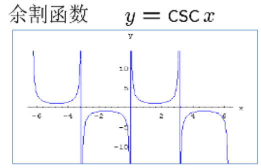
余切函数 $y=\cot x$



正割函数 $y=\sec x$



余割函数 $y=\csc x$



二、初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

一般来说, 分段函数不是初等函数; 但并不是所有的分段函数都不是初等函数. 例如:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$ 是分段函数, 但$f(x)$可以用一个式子表示为$f(x)=\sqrt{x^{2}}$, 因此$f(x)$是初等函数.

双曲函数与反双曲函数

1. 双曲函数

双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

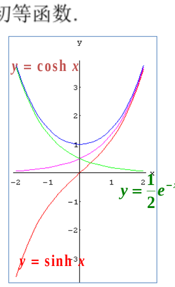
D: $(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

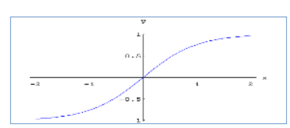
D: $(-\infty,+\infty)$, 偶函数.

双曲正切 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

D: $(-\infty,+\infty)$ 奇函数, 有界函数.



双曲正切的图形



双曲函数常用公式:

$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$;

$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$;

$\cosh^{2}x-\sinh^{2}x=1$;

$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$;

$\cosh 2x=\cosh^{2}x+\sinh^{2}x$.

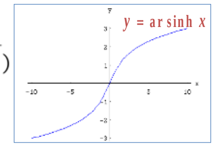
2. 反双曲函数

反双曲正弦 $y=\text{arcsinh}x$

$y=\text{arcsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

D：$(-\infty,+\infty)$奇函数,

在$(-\infty,+\infty)$单调递增.

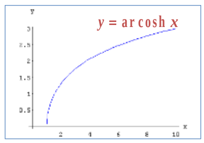


反双曲余弦 $y=\text{arccosh}x$

$y=\text{arccosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

D：$[1,+\infty)$

在 $[1,+\infty)$ 内单调增加



反双曲正切 $y=\text{arctanh}x$

$y=\text{arctanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

D：$(-1,1)$ 奇函数,

在$(-1,1)$单调增加.