第八章

第五节 隐函数的求导方法

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

二、方程组所确定的隐函数组及其导数

本节讨论：

1) 方程在什么条件下才能确定隐函数 .

例如, 方程 $x^2+\sqrt{y}+C=0$

当 $C<0$ 时, 能确定隐函数;

当 $C>0$ 时, 不能确定隐函数;

2) 在方程能确定隐函数时, 研究其连续性、可微性及求导方法问题 .

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

定理1. 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内满足

① 具有连续的偏导数;

② $F(x_0,y_0)=0$;

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 x_0 的**某邻域内**可唯一确定一个单值连续函数 $y=f(x)$, 满足条件 $y_0=f(x_0)$, 并有连续导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}\qquad \text{(隐函数求导公式)}$$

定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

设 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 , 则

$$F(x,f(x))\equiv 0$$

$\downarrow$ 两边对 x 求导

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv 0$$

$\downarrow$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $F_y\neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

若 $F(x,y)$ 的二阶偏导数也都连续, 则还有

二阶导数 :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^{\,2}-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^{\,2}}{F_y^3}$$

$-\frac{F_x}{F_y}$

$x\quad y$

x

例1. 验证方程 $\sin y+e^x-xy-1=0$ 在点(0,0)某邻域可确定一个单值可导隐函数 $y=f(x)$,并求

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

解: 令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy-1$, 则

① $F_x=e^x-y,\ F_y=\cos y-x$ 连续 ,

② $F(0,0)=0$,

③ $F_y(0,0)=1\neq 0$

由 定理1 可知, 在 $x=0$ 的某邻域内方程存在单值可导的隐函数 $y=f(x)$, 且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{x=0} = -\left.\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right|_{x=0,\, y=0} = -1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

$$= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right)\right|_{x=0,\ y=0,\ y'=-1}$$

$$= -\left.\frac{(e^x - y')(\cos y - x) - (e^x - y)(-\sin y \cdot y' - 1)}{(\cos y - x)^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=0\\ y'=-1}}$$

$$= -3$$

导数的另一求法 — 利用隐函数求导

$\sin y + e^x - xy - 1 = 0,\ \ y = y(x)$

↓ 两边对 x 求导

$\cos y \cdot y' + e^x - y - xy' = 0$ ⟶ $\boxed{\left. y'\right|_{x=0} = -\left.\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right|_{(0,0)} = -1}$

↓ 两边再对 x 求导

$-\sin y \cdot (y')^2 + \cos y \cdot y'' + e^x - y' - y' - xy'' = 0$

↓ 令 $x = 0$，注意此时 $y = 0$，$y' = -1$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = -3$$

定理2. 若函数 $F(x,y,z)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有**连续偏导数**，

② $F(x_0,y_0,z_0) = 0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

则方程 $F(x,y,z) = 0$ 在点 (x_0,y_0) 某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数 $z = f(x,y)$，满足 $z_0 = f(x_0,y_0)$，并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

定理证明从略, 仅就求导公式推导如下:

设 $z = f(x,y)$ 是方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数，则

$F(x, y, f(x,y)) \equiv 0$

↓ 两边对 x 求偏导

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$$

↓ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内 $F_z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

例2. 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1 利用隐函数求导

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 4\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}$$

↓ 再对 x 求导

$$2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}$$

解法2 利用公式

设 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$

则 $F_x = 2x,\ F_z = 2z - 4$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z-2} = \frac{x}{2-z}$$

↓ 两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right) = \frac{(2-z) + x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}$$

例3. 设$F(x, y)$具有连续偏导数，已知方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$，求 $\mathrm{d}z$.

解法1 利用偏导数公式. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 确定的隐函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$$

故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$

解法2 微分法. 对方程两边求微分:

$$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot\mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot\mathrm{d}(\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2})+F_2'\cdot(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2})=0$$

$$\frac{xF_1'+yF_2'}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{z}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

二、方程组所确定的隐函数组及其导数

隐函数存在定理还可以推广到方程组的情形.

以两个方程确定两个隐函数的情况为例，即

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$$

由 F、G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}$$

称为F、G 的**雅可比(Jacobi)**行列式.

定理3. 设函数 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数;

② $F(x_0, y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0, y_0,u_0,v_0)=0$;

③ $J\Big|_P=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_P\neq 0$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内可**唯一**确定一组满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$的**单值连续函数** $u=u(x,y), v=v(x,y)$, 且有偏导数公式 ：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\G_x & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\G_y & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\G_u & G_x\end{vmatrix}$$

定理证明略.
仅推导偏导
数公式如下:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\G_u & G_y\end{vmatrix}$$

设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 有隐函数组 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，则

$$\begin{cases}F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0\\G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0\end{cases}$$

两边对 x 求导得 $\begin{cases}F_x+F_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\\G_x+G_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$

这是关于 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，在点P 的某邻域内

系数行列式 $J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$, 故得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例4. 设 $xu-yv=0$, $yu+xv=1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解: 方程组两边对 x 求导，并移项得

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u \\ y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases}$$

由题设 $J=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2\neq 0$

故有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix}=-\frac{xv-yu}{x^2+y^2} \end{cases}$$

练习: 求 $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$

答案:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yu-xv}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2} \end{cases}$$

例5. 设函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在点(u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

1) 证明函数组 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 在与点 (u,v) 对应的点 (x,y) 的某一邻域内唯一确定一组单值、连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

2) 求 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 对 x, y 的偏导数.

解: 1) 令 $F(x,y,u,v)\equiv x-x(u,v)=0$

$G(x,y,u,v)\equiv y-y(u,v)=0$

则有 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$,

由定理 3 可知结论 1) 成立.

2) 求反函数的偏导数.

$$\begin{cases} x\equiv x(u(x,y),v(x,y)) \\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y)) \end{cases} \quad ①$$

①式两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 1=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad ②$$

注意 $J\neq 0$, 从方程组②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理, ①式两边对 y 求导, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

内容小结

1. 隐函数(组) 存在定理
2. 隐函数 (组) 求导方法
   - 方法1. 利用复合函数求导法则直接计算 ;
   - 方法2. 利用微分形式不变性 ;
   - 方法3. 代公式

思考与练习

设 $z=f(x+y+z,xyz)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial x}{\partial y}$.

提示: $z=f(x+y+z,\,xyz)$

- $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(1+\frac{\partial z}{\partial x})+f_2'\cdot(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'+yzf_2'}{1-f_1'-xyf_2'}$$

- $1=f_1'\cdot(\frac{\partial x}{\partial z}+1)+f_2'\cdot(yz\frac{\partial x}{\partial z}+xy)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1-f_1'-xyf_2'}{f_1'+yzf_2'}$$

- $0=f_1'\cdot(\frac{\partial x}{\partial y}+1)+f_2'\cdot(yz\frac{\partial x}{\partial y}+xz)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_1'+xzf_2'}{f_1'+yzf_2'}$$

解法2. 利用全微分形式不变性同时求出各偏导数.

$$z=f(x+y+z,\,xyz)$$

$$\mathrm{d}z=f_1'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+f_2'\cdot(yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z)$$

解出 $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x=\frac{-(f_1'+xzf_2')\mathrm{d}y+(1-f_1'-xyf_2')\mathrm{d}z}{f_1'+yzf_2'}$$

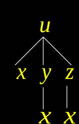
由 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的系数即可得 $\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial x}{\partial z}$.

备用题 **1.** 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$, $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. **(2001考研)**

解: 两个隐函数方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} e^{xy}(y+xy')-(y+xy')=0 \\ e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(1-z') \end{cases}$$



解得 $y'=-\frac{y}{x}$, $z'=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$

因此 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'-\frac{y}{x}f_2'+[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}]f_3'$

2. 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. **(99考研)**

解法1 分别在各方程两端对 x 求导, 得

$$\begin{cases} z'=f+x\cdot f'\cdot(1+y') \\ F_x+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -xf'\cdot y'+z'=f+xf' \\ F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=-F_x \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_y & -F_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_y & F_z \end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$$

$$(F_y+xf'\cdot F_z\neq 0)$$

解法2 微分法.

$$z=xf(x+y),\quad F(x,y,z)=0$$

对各方程两边分别求微分:

$$\begin{cases} \mathrm{d}z=f\,\mathrm{d}x+xf'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \\ F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y+F_3'\mathrm{d}z=0 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} (f+xf')\,\mathrm{d}x+xf'\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0 \\ F_1'\,\mathrm{d}x+F_2'\,\mathrm{d}y+F_3'\mathrm{d}z=0 \end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}y$ 可得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.