一、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

例如

$y'=y+x^2,\quad \dfrac{dx}{dt}=x\sin t+t^2,$ 线性

$yy'-2xy=3,\quad y'-\cos y=1.$ 非线性

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为**齐次方程**;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为**非齐次方程**.

1. 解齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{dy}{y}=-P(x)dx$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|$

故通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)dx}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

常数变易法: 用函数 $C(x)$ 代替常数 C，并设函数

$$y(x)=C(x)\,e^{-\int P(x)dx},$$

为对应的非齐次方程的一个解，代入方程，得到

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}\cancel{-P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}}\cancel{+P(x)\,C(x)e^{-\int P(x)dx}}=Q(x)$$

即

$$C'(x)=Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)dx}$

两端积分得 $C(x)=\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C$

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

即 $$y=\underbrace{C\,e^{-\int P(x)dx}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

$C'(x)=Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\qquad y(x)=C(x)\,e^{-\int P(x)dx}$

例 解方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解: 原方程为一阶线性微分方程，于是

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^{5/2}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right]$$
$$=(x+1)^2\left[\int(x+1)^{1/2}dx+C\right]$$
$$=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$
$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

例 解方程 $y'-y=e^x$ **(07-08, 一(7))**

解: 原方程为一阶线性微分方程，于是

$$y=e^{\int dx}\left[\int e^x e^{-\int dx}dx+C\right]$$
$$=e^x\left[\int e^x e^{-x}dx+C\right]$$
$$=e^x[x+C]$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$
$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

例 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-\infty<x<+\infty)$, $f(0)=0$, 且满足方程
$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-a_n]x^n=e^x$, 求 $f(x)$ 及 a_n .

解: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n-1}x^n=f'(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$,

$\therefore f'(x)-f(x)=e^x$

$\therefore f(x)=e^{\int dx}[\int e^x e^{-\int dx}dx+C]=e^x[x+C]$

考虑初值条件可得 $C=0$, $\therefore f(x)=xe^x$

$\therefore f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $a_0=0$, $a_{n+1}=\frac{1}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$

例 设 $f(x)$连续可导，且对任意的 x,y满足
$f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$, $f'(0)=e$, 求 $f(x)$

解: 由题 $f(0)=0$,

两边对y同时求导可得 $f'(x+y)=e^xf'(y)+e^yf(x)$,

则 $f'(x)=e^xf'(0)+f(x)$, 即 $f'(x)-f(x)=e^{x+1}$,

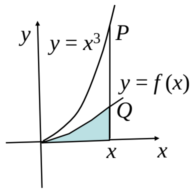
$\therefore f(x)=e^{\int dx}[\int e^{x+1}e^{-\int dx}dx+C]$

$=e^x[ex+C]$

考虑初值可得$C=0$

所以 $f(x)=xe^{x+1}$

例 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\,(x\geq 0)$截下的线段PQ的长度，在数值上等于阴影部分的面积, 求曲线 $y=f(x)$.



解: $|PQ|=x^3-y$

阴影部分的面积为

$$S(x)=\int_0^x y\,dx$$

于是得到

$$\int_0^x y\,dx=x^3-y$$

方程两边求导，得到

$$y=3x^2-y',\quad y|_{x=0}=0$$

下面解微分方程 $y'+y=3x^2$, $y|_{x=0}=0$
为一阶线性微分方程，于是

$$y=e^{\int dx}[\int 3x^2e^{\int dx}dx+C]$$
$$=e^{-x}[\int 3x^2e^xdx+C]$$
$$=e^{-x}[3x^2e^x-6xe^x+6e^x+C]$$
$$=3x^2-6x+6+Ce^{-x}$$

由$y|_{x=0}=0$, 得 $C=-6$.

曲线为 $y=-6e^{-x}+3x^2-6x+6$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\quad y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

例 求一连续可导函数$f(x)$使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)dt \qquad \boxed{令\ u=x-t}$$

解: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)du$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

通解为 $f(x)=e^{-\int dx}\left[\int \cos x\, e^{\int dx}dx+C\right]=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+Ce^{-x}$

特解为 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$

例 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$上连续，且满足方程 **(07-08, 四(22))**

$$f(t)=e^{3\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\leq 3t^2}f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}\right)d\sigma,\ 求\ f(t)$$

解: $f(t)=e^{3\pi t^2}+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}t}f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)rdr=e^{3\pi t^2}+2\pi\int_0^{\sqrt{3}t}f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)rdr$

所以 $f(0)=1$, 两边求导得 $f'(t)=6\pi te^{3\pi t^2}+2\pi f(t)\sqrt{3}t\cdot\sqrt{3}$,

即 $f'(t)-6\pi tf(t)=6\pi te^{3\pi t^2}$,

所以 $f(t)=e^{3\pi t^2}[\int 6\pi te^{3\pi t^2}e^{-3\pi t^2}dt+C]=e^{3\pi t^2}[3\pi t^2+C]$

考虑初值得 $C=1$,

所以 $f(t)=e^{3\pi t^2}[3\pi t^2+1]$

注：微分方程求解时，有时需要进行变量替换，有时需要将 x 看作是 y 的因变量。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y),\quad x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

例 解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x+y}$.

解: 原方程为 $(2x+y)dy=dx$, 以 x 为因变量，y 为自变量

原方程化为 $\frac{dx}{dy}-2x=y$, 其中 $P(y)=-2, Q(y)=y$.

方程的通解为 $x=e^{\int 2dy}(\int ye^{-\int 2dy}dy+C)$

$$=e^{2y}(-\frac{1}{4}(2y+1)e^{-2y}+C)=Ce^{2y}-\frac{1}{4}(2y+1)$$

例 解方程 $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$.

解: 以 x 为因变量， y 为自变量

原方程化为 $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\ln y}=\frac{1}{y}$，其中 $P(y)=\frac{1}{y\ln y}, Q(y)=\frac{1}{y}$.

$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}(\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy+C)$$

$$=\frac{1}{\ln y}(\int\frac{1}{y}\ln y dy+C)=\frac{1}{\ln y}(\frac{1}{2}\ln^2 y+C)$$

方程的通解为 $2x\ln y=\ln^2 y+C$

例 解方程 $xy\frac{dy}{dx}=x+y^2$.

解: 原方程可化为 $x\frac{d(y^2)}{dx}=2x+2y^2$,

令 $u=y^2$，则有

$$\frac{du}{dx}-2\frac{u}{x}=2,$$

为一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=-\frac{2}{x}, Q(x)=2.$

由公式得

$$u=e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int 2e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C)=x^2(-\frac{2}{x}+C)=Cx^2-2x$$

方程的通解为 $y^2=Cx^2-2x$.

二、伯努利 (Bernoulli)方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)$$

解法: 以 y^n 除方程两边, 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy+y^3$ 的通解. (07-08, 二(5))

解: 以 y^3 除方程两边, 得 $y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy^{-2}=1$

令 $z=y^{-2}$, 则 $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$, 于是方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+2zx=-2$$

其通解为 $z=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}[\int -2e^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=e^{-x^2}[-2\int e^{x^2}dx+C]$$

将 $z=y^{-2}$ 代入, 得原方程通解:

$$y^{-2}=e^{-x^2}[-2\int e^{x^2}dx+C]$$

例 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 以 y^2 除方程两边, 得 $y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{xy}=a(\ln x)$

令 $z=y^{-1}$, 则 $\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$, 于是方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=x[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2]=1$$

例 设有微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases}y'+y=2, & 0\le x\le 1\\ y\big|_{x=0}=0\end{cases}$

利用通解公式, 得

$$y=e^{-\int dx}\left(\int 2e^{\int dx}dx+C_1\right)$$

$$=e^{-x}(2e^x+C_1)=2+C_1e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-2$

故有 $y=2-2e^{-x}\quad(0\le x\le 1)$

2) 再解 $y'+y=0,\ x>1$

此齐次线性方程的通解为 $y=C_2e^{-x}\quad(x>1)$

利用连续条件得 $y\big|_{x=1}=y(1)=2-2e^{-1}=C_2e^{-1}$

所以 $C_2=2(e-1)$

因此有 $y=2(e-1)e^{-x}\quad(x>1)$

3) 原问题的解为

$$y=\begin{cases}2(1-e^{-x}), & 0\le x\le 1\\ 2(e-1)e^{-x}, & x>1\end{cases}$$

$y=2-2e^{-x}\quad(0\le x\le 1)$

例 求方程 $\dfrac{dx}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]dy=0$ 的通解.

解: 注意 x,y 同号, 不妨设 $x,y>0$, 此时 $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2d\sqrt{x}$,

故方程可变形为 $2\dfrac{d\sqrt{x}}{dy}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量 y 为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程**通解公式**, 得

$$\sqrt{x}=e^{\int\frac{dy}{2y}}\left[\int\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\int\frac{dy}{2y}}\right)dy+\ln C\right]\quad(C>0)$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}dy+\ln C\right]=\sqrt{y}\ln\frac{C}{y}$$

所求通解为 $y\,e^{\sqrt{x/y}}=C\quad(C\ne 0)$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

方法1 先解齐次方程, 再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\ne 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$, 化为线性方程求解.

思考与练习

判别下列方程类型: **提示:**

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=xy\dfrac{dy}{dx}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{y-1}{y}dy=\dfrac{dx}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)dx-2x\,dy=0$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{2x}y=-\dfrac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,dx+(y^3-x)dy=0$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{2y}x=-\dfrac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\ln x}{x}y^2$ 伯努利方程