第二章 导数与微分

导数思想最早由法国数学家 Fermat在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton 

德国数学家 Leibniz 

微分学 $\begin{cases}\text{导数 —— 描述函数变化快慢}\\ \text{微分 —— 描述函数变化程度}\end{cases}$

都是描述物质运动的工具 (从微观上研究函数)

第二章

第一节 导数的概念

一、引例

二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数的可导性与连续性的关系

五、单侧导数

一、引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

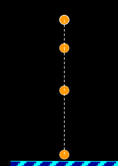
$$s = f(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

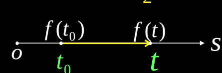
而在 t_0时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$



自由落体运动

$s = \frac{1}{2}gt^2$



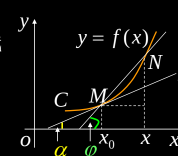
---

2. 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT

(当$\varphi\to\alpha$时)



切线 MT 的斜率

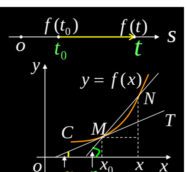
$$k = \tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi$$

割线 MN 的斜率 $\tan\varphi = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$k = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

切线斜率 $k = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



两个问题的**共性:**

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

………

变化率问题

二、导数的定义

定义1 . 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0的某邻域内有定义 ,

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\boxed{\begin{array}{c}\Delta y = f(x)-f(x_0)\\ \Delta x = x-x_0\end{array}}$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0处**可导**, 并称此极限为

$y = f(x)$ 在点 x_0的**导数**. 记作:

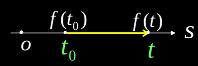
$$y'\big|_{x=x_0};\quad f'(x_0);\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0};\quad \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

即 $$y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

运动质点的位置函数 $s = f(t)$

在 t_0 时刻的瞬时速度

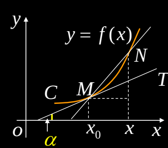


$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)$$



说明: 在经济学中，边际成本率，边际劳动生产率和边际税率等从数学角度看就是导数.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \boxed{\begin{aligned}\Delta y &= f(x) - f(x_0)\\ \Delta x &= x - x_0\end{aligned}}$$

若上述极限不存在，就说函数在点 x_0 不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$，也称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为无穷大.

若函数在开区间 I 内每点都可导，就称函数在 I 内可导.

此时导数值构成的新函数称为导函数.

记作: y'; $f'(x)$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

注意: $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0} \neq \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

例1. 求函数 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导数.

解: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$

即 $\boxed{(C)' = 0}$

例2. 求函数 $f(x) = x^n$ ($n \in \mathrm{N}^+$) 在 $x = a$ 处的导数.

解: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$$

$$= n a^{n-1}$$

说明:

对一般幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为常数)

$\boxed{(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}}$ （以后将证明）

例如, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = \frac{-3}{4} x^{-\frac{7}{4}}$$

例3. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

解: 令 $h = \Delta x$，则

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2} \Big/ h$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

即 $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

类似可证得 $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

例4. 求函数 $f(x) = \ln x$ 的导数.

解: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

或 $\boxed{= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x}}$

$$= \lim_{h \to 0} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln \mathrm{e} = \frac{1}{x}$$

即 $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

例5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

证: $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在，即 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

例6. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

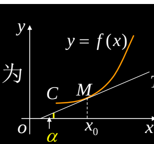
解: 原式 $=\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2(-h)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}f'(x_0)+\dfrac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)$

三、 导数的几何意义

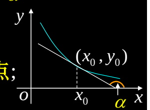
曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的切线斜率为

$\tan\alpha=f'(x_0)$



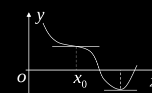
若 $f'(x_0)>0$, 曲线过 (x_0,y_0) 上升;

若 $f'(x_0)<0$, 曲线过 (x_0,y_0) 下降;



若 $f'(x_0)=0$, 切线与 x 轴平行, x_0 称为**驻点**;

若 $f'(x_0)=\infty$, 切线与 x 轴垂直 .



$f'(x_0)\ne\infty$ 时, 曲线在点 (x_0,y_0) 处的

切线方程: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

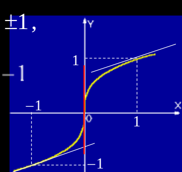
法线方程: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $(f'(x_0)\ne0)$

例7. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有垂直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解: $\because y'=(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad\therefore y'|_{x=0}=\infty$,

故在原点 $(0,0)$ 有垂直切线 $x=0$

令 $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{3}$, 得 $x=\pm1$, 对应 $y=\pm1$,



则在点(1,1) , (–1,–1) 处与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$

平行的切线方程分别为

$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$

即 $\quad x-3y\pm2=0$

四、 函数的可导性与连续性的关系

定理1. $f(x)$ 在点 x 处可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x 处连续

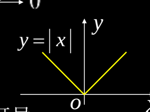
证: 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

存在，因此必有

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\alpha=0$

故 $\quad \Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x\xrightarrow{\Delta x\to0}0$

所以函数 $y=f(x)$ 在点 x 连续 .



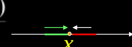
注意: 函数在点 x **连续未必可导**.

反例: $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.

五、 单侧导数

定义2 . 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右 (左) 邻域内有定义, 若极限

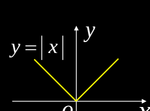
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0^+\\(\Delta x\to0^-)}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0^+\\(\Delta x\to0^-)}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$



存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的**右 (左) 导数**, 记作

$f'_+(x_0)$ $(f'_-(x_0))$

即 $\quad f'_{\pm}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^{\pm}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$



例如, $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处有

$f'_+(0)=+1,\quad f'_-(0)=-1$

定理2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在, 且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

简写为 $\boxed{f'(x_0)\text{存在} \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)}$

定理3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右 (左) 导数存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 必 右 (左) 连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

显然:

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导 $\Longrightarrow$ $f(x)\in C[a,b]$

内容小结

1. 导数的实质: 增量比的极限;
2. $f'(x_0)=a \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$
3. 导数的几何意义: 切线的斜率;
4. 可导必连续, 但连续不一定可导;
5. 已学求导公式：

$(C)'=0$;　$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$;　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$;　$(\cos x)'=-\sin x$;

6. 判断可导性 $\begin{cases}\text{不连续, 一定不可导.}\\ \text{直接用导数定义;}\\ \text{看左右导数是否存在且相等.}\end{cases}$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$在某点 x_0处的导数 $f'(x_0)$与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别: $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$是数值;

联系: $f'(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0)\ \cancel{\overset{?}{=}}\ [f(x_0)]'$

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\underline{\ -f'(x_0)\ }.$$

3. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=k_0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\underline{\ k_0\ }$.

4. 若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 可导?

解: 由题设 $f(0)=0$

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 且 $f'(0)=0$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ a\,x, & x\ge0\end{cases}$，问 a 取何值时, $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $x=0$ 连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{a\,x-0}{x-0}=a$$

故 $a=1$ 时 $f'(0)=1$, 此时 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$都存在,

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge0\end{cases}$$

备用题

1. 设 $f'(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求 $f'(1)$.

解: 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

所以　$f'(1)=-2$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$处连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 证明: $f(x)$在 $x=0$ 处可导.

证: 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

又 $f(x)$在 $x=0$处连续, 故 $f(0)=0$

所以　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

即　$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.