第十一章

第五节 函数幂级数展开式的应用

一、近似计算

二、欧拉公式

一、近似计算

例1. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解: $\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3(1-\frac{1}{3^4})^{\frac{1}{5}}$

$$=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right)$$

$$\because |r_2|=3\left(\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)$$

$$<3\cdot\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]<0.5\times 10^{-4}$$

$$\therefore \quad \sqrt[5]{240}\approx 3(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4})\approx 3-0.00741\approx 2.9926$$

例2. 计算 $\ln 2$ 的近似值 ,使准确到 10^{-4}.

解: 已知

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$

$$\therefore \quad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad (-1\le x<1)$$

故 $$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right) \quad (-1<x<1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$ 得 $x=\frac{1}{3}$, 于是有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right)$$

在上述展开式中取前四项,

$$\because |r_4|=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^{11}}\left(1+\frac{1}{9}+(\frac{1}{9})^2+\cdots\right)=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}$$

$$=\frac{1}{78732}<0.2\times 10^{-4}$$

$$\therefore \ \ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931$$

说明: 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

中,令 $x=\frac{1}{2n+1}$ (n为自然数) , 得

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{2n+1})^3+\frac{1}{5}(\frac{1}{2n+1})^5+\cdots\right)$$

$$\therefore \ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{2n+1})^3+\frac{1}{5}(\frac{1}{2n+1})^5+\cdots\right)$$

具此递推公式可求出任意正整数的对数 . 如

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\frac{1}{9})^3+\frac{1}{5}(\frac{1}{9})^5+\cdots\right)\approx 1.6094$$

例3. 利用 $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$,求 $\sin 9°$ 的近似值 , 并估计误差.

解: 先把角度化为弧度 $9°=\frac{\pi}{180}\times 9=\frac{\pi}{20}$ (弧度)

$$\because \quad \sin\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{20}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{20})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{20})^5-\frac{1}{7!}(\frac{\pi}{20})^7+\cdots$$

$$|r_2|<\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{20})^5<\frac{1}{120}(0.2)^5<\frac{1}{3}\times 10^{-5}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{20}\approx\frac{\pi}{20}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{20})^3\approx 0.157080-0.000646$$

$$\approx 0.15643$$

误差不超过 10^{-5}

例4. 计算积分 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4} .

(取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$)

解: $e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

欲使截断误差 $|r_n| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n!(2n+1)\cdot 2^{2n}} < 10^{-4}$

则 n 应满足 $\sqrt{\pi}\cdot n!(2n+1)\cdot 2^{2n} > 10^4 \Longrightarrow n \geq 4$

取 $n = 4$, 则所求积分近似值为

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)$$

$$\approx 0.5205$$

例5. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, 故所给积分不是广义积分.

若定义被积函数在 $x = 0$ 处的值为 1, 则它在积分区间上连续, 且有幂级数展开式 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} + \cdots$$

$$|r_3| < \frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{35280} < 0.3\times 10^{-4}$$

$$\approx 1 - 0.05556 + 0.00167 \approx 0.9461$$

二、欧拉(Euler)公式

对复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i\,v_n)$ ①

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$, 则称 ① **收敛** , 且其和为 $u + i\,v$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n + i\,v_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ 收敛, 则称 ① **绝对收敛.**

由于 $|u_n| \leq \sqrt{u_n^{\,2} + v_n^{\,2}}$, $|v_n| \leq \sqrt{u_n^{\,2} + v_n^{\,2}}$, 故知

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i\,v_n)$ 绝对收敛 $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i\,v_n)$ 收敛 .

定义: 复变量 $z = x + i\,y$ 的指数函数为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (\,|z| < \infty\,)$$

易证它在整个复平面上绝对收敛 .

当 $y = 0$ 时, 它与实指数函数 e^x 的幂级数展式一致.

当 $x = 0$ 时,

$$e^{i\,y} = 1 + i\,y + \frac{1}{2!}(i\,y)^2 + \frac{1}{3!}(i\,y)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(i\,y)^n + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \cdots\right)$$

$$+\, i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i\,\sin y$$

$e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$ （欧拉公式）

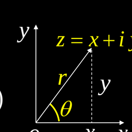
$e^{-i\,x} = \cos x - i\,\sin x$

则 $\begin{cases}\cos x = \dfrac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\\[2mm] \sin x = \dfrac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2i}\end{cases}$ （也称欧拉公式）

利用欧拉公式可得复数的指数形式

$$z = x + i\,y = r\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right)$$

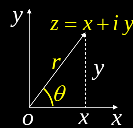
$$= r\,e^{i\,\theta}$$



据此可得

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(德莫弗公式)



利用幂级数的乘法, 不难验证

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

特别有

$$e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (x, y \in R)$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x(\cos y + i\sin y)\right| = e^x$$

作业 P229 1(2) , (4) ; 2 (2)