第八章

第六节 多元函数微分学的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

复习: 平面曲线的切线与法线

已知平面光滑曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 有

切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

若平面光滑曲线方程为 $F(x, y) = 0$, 因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$

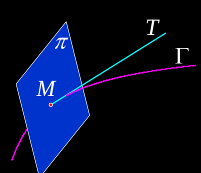
故在点 (x_0, y_0) 有

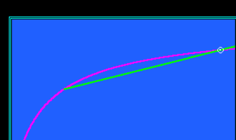
切线方程 $F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

法线方程 $F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

一、空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.



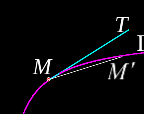


点击图中任意点动画开始或暂停

---

1. 曲线方程为参数方程的情况

Γ: $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$



设 $t = t_0$ 对应 $M(x_0, y_0, z_0)$

$t = t_0 + \Delta t$ 对应 $M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

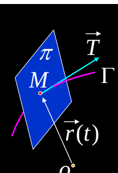
割线 MM' 的方程:

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

上述方程之分母同除以 Δt, 令 $\Delta t \to 0$, 得

切线方程 $\dfrac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$

此处要求 $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$ 不全为0, 如个别为0, 则理解为分子为 0 .



切线的方向向量:

$$\vec{T} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

称为曲线的**切向量** .

$\vec{T}$ 也是法平面的法向量, 因此得**法平面方程**

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

说明: 若引进向量函数 $\vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$, 则 Γ 为 $\vec{r}(t)$ 的矢端曲线, 而在 t_0 处的导向量

$$\vec{r}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

就是该点的切向量.

例1. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x' = -R\sin\varphi, y' = R\cos\varphi, z' = k$, 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\vec{T} = (-R, 0, k)$, 故

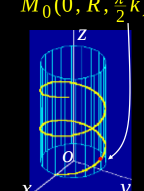
切线方程 $\dfrac{x}{-R} = \dfrac{y - R}{0} = \dfrac{z - \frac{\pi}{2}k}{k}$

即 $\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$

法平面方程 $-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$

即 $Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$

$M_0(0, R, \frac{\pi}{2}k)$

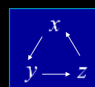


2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时, Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$



曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$$

$$=\left\{1,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right\}$$

或 $\vec{T}=\left\{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_M,\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right\}$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 有

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_M}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_M}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_M}$$

法平面方程 $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_M(x-x_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M(y-y_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_M(x-x_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M(y-y_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M(z-z_0)=0$$

也可表为

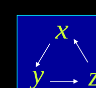
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,–2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2,\ G=x+y+z$, 则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_M=\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M=0;\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M=6$$



切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2. 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z}$$

曲线在点 $M(1,–2,1)$ 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\bigg|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,–2,1)$ 处的切向量

$\vec{T}=(1,0,-1)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

即 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面方程 $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$

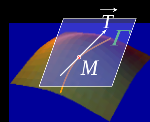
即 $x-z=0$

三、曲面的切平面与法线

设 有光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

通过其上定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 任意引一条光滑曲线 $\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$，设 $t=t_0$ 对应点 M，且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 不全为0．则 Γ 在点 M 的**切向量**为

$$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

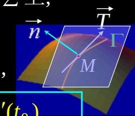


切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

下面证明：Σ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上．此平面称为 Σ 在该点的**切平面**．

证：$\because \Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 在 Σ 上，

$\therefore\ F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$



两边在 $t=t_0$ 处求导，注意 $t=t_0$ 对应点 M，得

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0}$$

令 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\vec{T}\perp\vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性，表明这些切线都在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上，从而切平面存在．

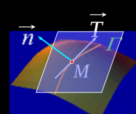
曲面 Σ 在点 M 的**法向量:**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

过 M 点且垂直于切平面的直线称为曲面 Σ 在点 M 的**法线.**



法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

特别, 当光滑曲面 Σ 的方程为显式 $z=f(x,y)$ 时，令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点 (x,y,z)，$F_x=f_x$，$F_y=f_y$，$F_z=-1$

故当函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有连续偏导数时，曲面 Σ 在点 (x_0,y_0,z_0) 有

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

用 α,β,γ 表示法向量的方向角，并假定法向量方向向上，则 γ 为锐角.

法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

将 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 分别记为 f_x，f_y，则

法向量的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

例3. 求球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点(1 , 2 , 3) 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x,4y,6z)$

$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)$

所以球面在点 (1 , 2 , 3) 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$

例4. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0,\ x_0z_0,\ x_0y_0),\quad \vec{n}_2=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0y_0z_0}{x_0^2}=\frac{x_0y_0z_0}{y_0^2}=\frac{x_0y_0z_0}{z_0^2}$$

$$\therefore\quad x_0^2=y_0^2=z_0^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0^2=y_0^2=z_0^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\sigma=x_0y_0z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left(\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$

法平面方程 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况 . 空间光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$的**法向量**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$

法向量 $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$

法线的**方向余弦**

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)}\\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)}\\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)}\end{cases}$$

$\Longrightarrow\ \lambda=\pm2$

2. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$,则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 .

备用题

1. 证明曲面 $F(x - my, z - ny) = 0$ 的所有切平面恒与定直线平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n} = (F_1', \ F_1' \cdot (-m) + F_2' \cdot (-n), \ F_2')$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l} = (m, 1, n)$ (定向量)

则 $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$, 故结论成立 .

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点(1,1,1) 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (2x - 3, 2y, 2z)\big|_{(1,1,1)} = (-1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_2 = (2, -3, 5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (16, 9, -1)$

由此得切线: $\dfrac{x-1}{16} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{z-1}{-1}$

法平面: $16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0$

即 $16x + 9y - z - 24 = 0$