第二章 条件概率与独立性

杨勇制作

第一节 条件概率与事件独立性

一．条件概率

例 假设有一批灯泡共 N 个，其中有 N_A 个是甲厂生产的, N_B 个是合格品，有在甲厂生产的 N_A 个灯泡中有 N_{AB} 个是合格品。从 N 个灯泡中随机地取一个，设

A = “任取一个产品，取得甲厂生产的”，

B = “任取一个产品，取得合格品”，

由于是古典概型

$$P(A)=\frac{N_A}{N}\quad,\quad P(B)=\frac{N_B}{N}\quad,\quad P(AB)=\frac{N_{AB}}{N}$$

任取一个产品，结果发现是甲厂生产的，此时问它是合格品的概率？

记在事件A发生的情况下，事件B发生的条件概率为$P(B|A)$

$$P(B|A)=\frac{N_{AB}}{N_A}=\frac{N_{AB}/N}{N_A/N}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义：设 A,B 为二个事件，

且 $P(A)>0$，记在事件 A 发生的情况下，事件 B 发生的条件概率为

$P(B|A)$，且

$$P(B|A) \triangleq \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例1 考察掷两颗骰子的试验。已知两颗骰子出现点数之和为7，求其中有一个是3点的概率。

解：$A=$“两颗骰子出现点数之和为7”

$B=$“其中有一个是3点”

$$\Omega=\left\{(x,y)\middle|\, i=1,2,\cdots,6,\ j=1,2,\cdots,6\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}(1,1),(1,2),\cdots,(1,6)\\(2,1),(2,2),\cdots,(2,6)\\\cdots\cdots\\(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\end{array}\right\}$$

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$B=\{(3,4),(4,3)\}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{1}{3}$$

杨勇制作

$$P(A)>0, P(AB)=P(A)P(B|A)$$

乘法定理：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，

且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$， 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$
$$\cdots P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

证明： $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset A_1A_2\cdots A_{n-1}$

$$P(A_1) \geq P(A_1A_2) \geq \cdots \geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$= P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1\cdots A_{n-1})}{P(A_1\cdots A_{n-2})}\frac{P(A_1\cdots A_n)}{P(A_1\cdots A_{n-1})}$$

$$= P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例2 P20 例2-3

一批零件共100件，其中有10件是次品，每次从中任取一件，取出的零件不再放回去，求第三次才取得合格品的概率。

解：$A_k=$“第k次取出的是合格品”，$k=1,2,3$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\,|\,\bar{A}_1)P(A_3\,|\,\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.0084$$

例4 在空战中，甲机先向乙机开火，击落乙机的概率为0.2；若乙机未被击落，就进行还击，击落甲机的概率为0.3；若甲机也未被击落，则再进行攻击，击落乙机的概率为0.4 。求在这几个回合中，甲机被击落的概率和乙机被击落的概率。

解：A＝“第一回合，甲机向乙机开火，击落乙机”

B＝“第二回合，乙机向甲机开火，击落甲机”

C＝“第三回合，甲机向乙机开火，击落乙机”

$$P(A)=0.2\quad,\ P(B|\bar{A})=0.3\quad,\quad P(C|\bar{A}\bar{B})=0.4$$

$$P(\text{甲被击落})=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.8\times0.3=0.24$$

$$P(\text{乙被击落})=P(A+\bar{A}\bar{B}C)=P(A)+P(\bar{A}\bar{B}C)$$

$$=P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A}\bar{B})$$

$$=0.2+0.8\times0.7\times0.4=0.424$$

其中 $P(B|\bar{A})+P(\bar{B}|\bar{A})=1$

二．事件独立性

1．两个事件的独立性

例5 P20 例2-4

袋中有*a*只黑球和*b*只白球，采取有放回摸球，陆续取出两球，求

（1）在已知第一次摸出黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率；

（2）第二次摸出黑球的概率。

$A=$“第一次摸出的是黑球”

$B=$“第二次摸出的是黑球”

(1)

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{a^2}{(a+b)^2}}{\frac{a}{a+b}}=\frac{a}{a+b}$$

注：

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{\frac{ba}{(a+b)^2}}{\frac{b}{a+b}}=\frac{a}{a+b}$$

(2) $$P(B)=P(B\Omega)=P(B(A+\bar{A}))=P(AB+\bar{A}B)$$

$$=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ba}{(a+b)^2}=\frac{a}{a+b}$$

所以可以得到

$$P(B|A)=P(B),P(B|\bar{A})=P(B)$$

从而

$$P(A)>0\,,P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

定义：设事件A和B满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称A和B相互独立，否则称为不独立。

Ω与任何事件A独立，

$\varnothing$与任何事件A独立

例6 掷一枚硬币和一颗骰子。定义

A =“硬币出现正面”，

B =“骰子出现奇数点”

讨论事件 A, B 的独立性。

解：

$$\Omega=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),$$
$$(T,1),(T,2),\ (T,3),(T,4),\ (T,5),\ (T,6)\}$$

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以，事件A和事件B相互独立

注：有放回地取东西，射击，抛掷等认为独立

例7 一个家庭中有若干个小孩，假定生男生女是等可能的，令

A = “一个家庭中有男孩又有女孩”

B = “一个家庭最多有一个女孩”

（1）家庭中有两个小孩，
（2）家庭中有三个小孩。

对上述2种情况，讨论事件 A, B 的独立性。

(1) $\Omega = \{(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)\}$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) \neq P(A)P(B)$$

所以，事件A和事件B不独立

(2) $\Omega = \{(B,B,B),(B,B,G),(B,G,B),(G,B,B),$

$(G,G,B),(G,B,G),(B,G,G),(G,G,G)\}$

$$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{3}{8}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以，事件A和事件B相互独立

讨论“A,B互不相容”和“A,B独立”

性质：若 A,B 独立，则

“$\bar{A},B$”，“$A,\bar{B}$”，“$\bar{A},\bar{B}$”也独立。

证明：　已知 $P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

$$=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(\bar{A})P(B)$$

所以，$\bar{A}$与B独立

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(AB))$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B))$$

$$= (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A))$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$$= P(\bar{A})P(\bar{B})$$

所以，$\bar{A}$与$\bar{B}$独立

2. 多个事件的独立性

杨勇制作

先讨论三个事件独立要满足什么条件。

A_1, A_2, A_3 独立

$$\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$$

定义：设有n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，若

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \qquad (*)$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$为$1, 2, \cdots, n$中的k个数，

$2 \le k \le n$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，

否则称为不独立。

性质1：如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$独立，则其中一些事件改为对立事件仍然独立。

性质2：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

证明：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

例8 设随机试验中，某一事件 A 出现的概率为 $\varepsilon > 0$ ，证明：不论 ε 多么小，只要不断地，独立地重复做此试验，则事件 A 迟早会发生的概率为1。

证明： $A_i =$“第 i 次试验事件 A 发生”, $i = 1, 2, \cdots$

先讨论前 n 次试验事件 A 至少发生一次的概率

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立,

$$P(A_i) = P(A) = \varepsilon, P(\bar{A}_i) = P(\bar{A}) = 1 - \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

$$= 1 - (1 - \varepsilon)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \lim_{n \to \infty} (1 - (1 - \varepsilon)^n) = 1$$

例9 P24 例2-11

对于一个元件，它能正常工作的概率p 称为它的可靠性，元件组成系统，系统正常工作的概率称为该系统的可靠性。如果构成系统的每个元件的可靠性均为$r(0<r<1)$，试比较图2-2系统1和图2-3系统2可靠性大小。(注：一般可以认为元件能否正常工作相互独立)

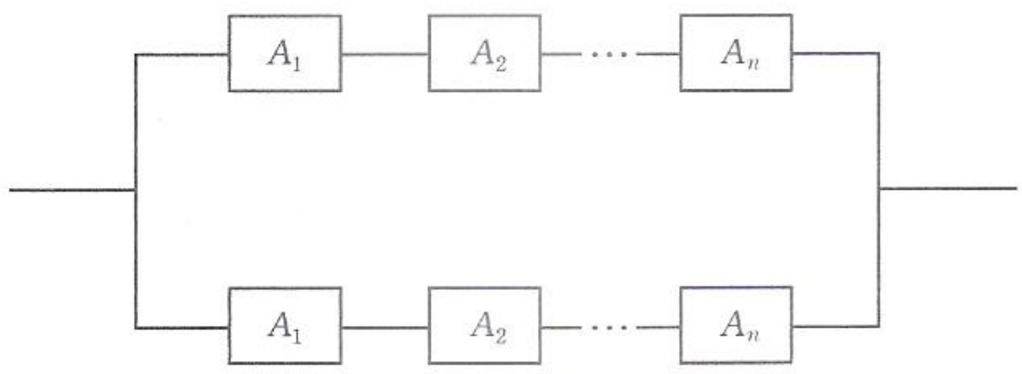


图 2—2 系统 I

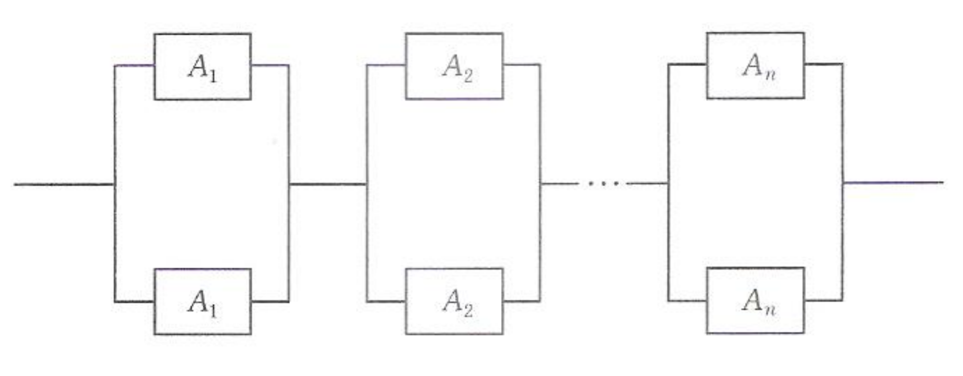
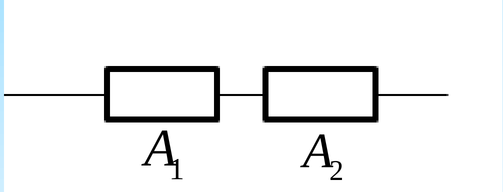


图 2—3 系统Ⅱ

$$A_i = \text{“第}i\text{个元件正常工作”}$$

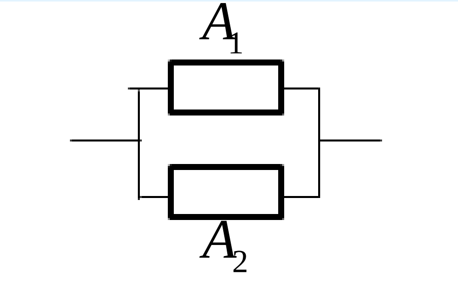
串联



$$P(A_i) = r \quad , \qquad A_1, A_2\text{独立}$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = r^2$$

并联



$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)$$
$$= 1-(1-r)^2$$

第二节 全概率公式和贝叶斯公式

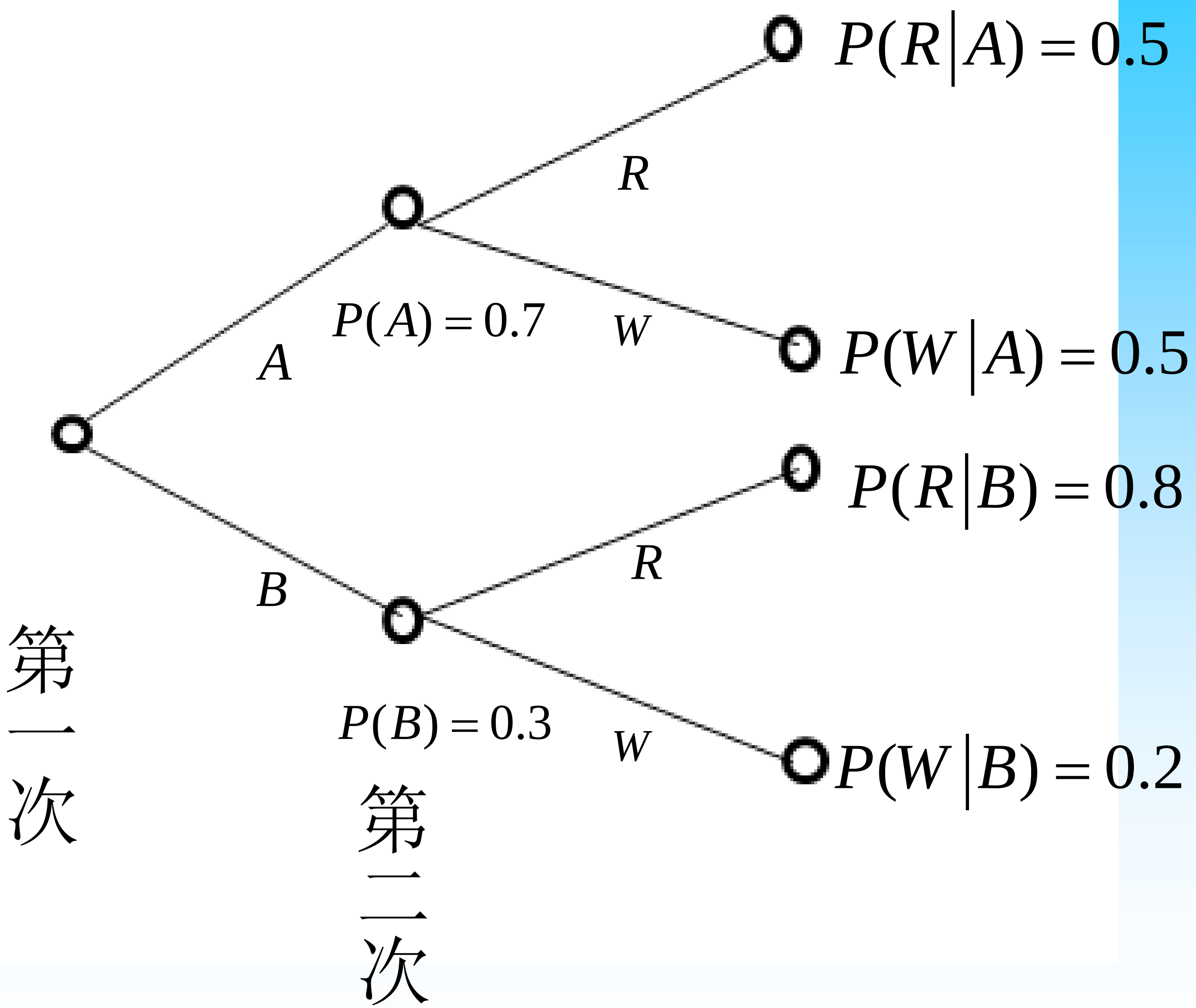
例10 有外形相同的球分装在三个盒子中，每盒10个。其中第一个盒子中7个球标有字母A ,3个球标有字母B；第二个盒子中有红球和白球各5个；第三个盒子中有红球8个，白球2个。试验按如下规则进行：先在第一个盒子中任取一球，若取得标有字母A的球，则在第二个盒子中任取一个球；若第一次取得标有字母B的球，则在第三个盒子中任取一个球。如果第二次取出的是红球，则称试验为成功，求试验成功的概率。

$A=$“第一次取到标有字母A的球”

$B=$“第一次取到标有字母B的球”

$R=$“第二次取到红球”

$W=$“第二次取到白球”


$P(R|A)=0.5$
R
$P(A)=0.7$
A
W
$P(W|A)=0.5$
$P(R|B)=0.8$
R
B
第一次
$P(B)=0.3$
W
$P(W|B)=0.2$
第二次

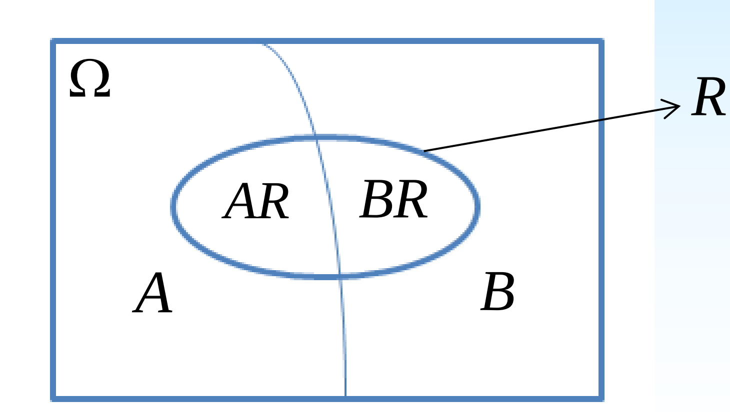
$$P(R)=P(R\Omega)=P(R(A+B))$$

$$=P(AR+BR)$$

$$=P(AR)+P(BR)$$

$$=P(A)P(R|A)+P(B)P(R|B)$$

$$=0.59$$



$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (a_1^{(1)}, r_1^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_2^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_3^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_4^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_5^{(2)}), \\ (a_1^{(1)}, w_1^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_2^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_3^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_4^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_5^{(2)}), \\ \ldots\ldots \\ (a_7^{(1)}, r_1^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_2^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_3^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_4^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_5^{(2)}), \\ (a_7^{(1)}, w_1^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_2^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_3^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_4^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_5^{(2)}), \\ (b_1^{(1)}, r_1^{(3)}), (b_1^{(1)}, r_2^{(3)}), (b_1^{(1)}, r_3^{(3)}), \cdots\cdots, (b_1^{(1)}, r_8^{(3)}), \\ (b_1^{(1)}, w_1^{(3)}), (b_1^{(1)}, w_2^{(3)}), \\ \ldots\ldots \\ (b_3^{(1)}, r_1^{(3)}), (b_3^{(1)}, r_2^{(3)}), (b_3^{(1)}, r_3^{(3)}), \cdots\cdots, (b_3^{(1)}, r_8^{(3)}), \\ (b_3^{(1)}, w_1^{(3)}), (b_3^{(1)}, w_2^{(3)}) \end{array} \right\}$$

定义：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个分割。

全概率公式：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个分割，B 为任一事件，则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B | A_i)$$

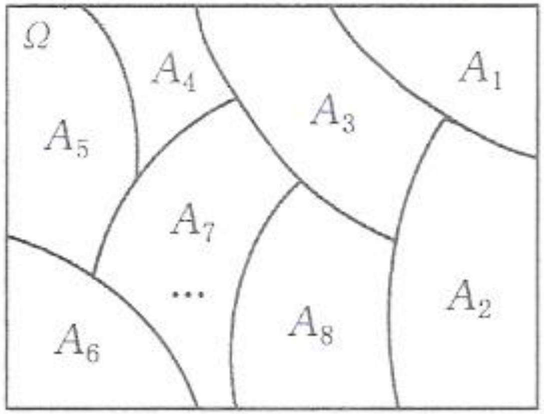
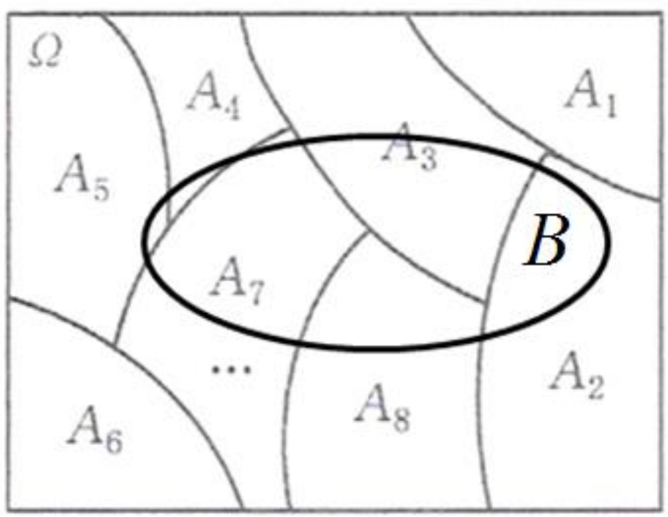


图 2—4　样本空间的分割



证明：

$$P(B) = P(B(A_1 + A_2 + \cdots + A_n))$$

$$= P(A_1B + A_2B + \cdots + A_nB)$$

$$= P(A_1B) + P(A_2B) + \cdots + P(A_nB)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

例11 某工厂有四条流水线生产同一种产品，该四条流水线的产量分别占总产量的15%，20%，30%和35%，又这四条流水线的次品率依次为0.05，0.04，0.03及0.02。现在从出厂产品中任取一件，求抽到的产品是次品的概率。

解：$A_i =$“产品来自第i条流水线”，

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$B =$“抽出的产品为次品”

$$P(A_1) = 0.15, P(B|A_1) = 0.05, \cdots$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.0315$$

若该厂规定，出了次品要追究有关流水线的经济责任。现在出厂产品中任取一件，结果为次品，但该件产品是哪一条流水线生产的标志已经脱落，问四条流水线各应承担多大责任？

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1|B)=23.8\%,P(A_2|B)=25.4\%,$$

$$P(A_3|B)=28.6\%,P(A_4|B)=22.2\%$$

贝叶斯公式：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个分割，B 为任一事件，且 $P(B) > 0,$ 则

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, k = 1, 2, \cdots, n$$

$P(A_i)$称为先验概率，$P(A_k|B)$称为后验概率

证明：

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$k=1,2,\cdots,n$$

例12 在电报通讯中，发送端发出的是由“。”和“—”两种信号组成的序列，而由于随机干扰的存在，接收端收到的是由“。”，“不清”和“—”三种信号组成的序列。信号“。”，“不清”和“—”分别简记为0，*x*，1。假设已知发送0和1的概率分别为0.6和0.4；在发出 0的条件下，收到0，*x*和1的条件概率分别为0.7，0.2和0.1；在发出1的条件下，收到 0，*x*和1的条件概率分别为0，0.1和0.9。试分别计算在接收信号为*x*（不清）的条件下，原发出信号为0和1的条件概率。

解： $A_i=$"发出的信号为i"， $i=0,1$

$B_j=$"接收到的信号为j"， $j=0,x,1$

$$P(A_0|B_x)=\frac{P(A_0)P(B_x|A_0)}{P(A_0)P(B_x|A_0)+P(A_1)P(B_x|A_1)}$$

$=0.75$

$$P(A_0|B_x)=0.75, P(A_1|B_x)=0.25$$

第三节 贝努利概型

杨勇制作

定义：有一随机试验，观察事件A发生与否，

$$P(A) \triangleq p(0 < p < 1), P(\bar{A}) = 1 - p \triangleq q$$

将此试验独立地重复进行n次，则称此模型为n重贝努利概型。

求在n次独立试验中事件A发生k次的概率。

$B_k =$ “n次独立试验中事件A发生k次”

$$n = 5$$

$$
\Omega=\left\{\begin{array}{l}
(A,A,A,A,A)_1,(A,A,A,A,\bar{A})_2,(A,A,A,\bar{A},A)_3,\\
(A,A,\bar{A},A,A)_4,(A,\bar{A},A,A,A)_5,(\bar{A},A,A,A,A)_6,\\
(A,A,A,\bar{A},\bar{A})_7,(A,A,\bar{A},A,\bar{A})_8,(A,\bar{A},A,A,\bar{A})_9,\\
(\bar{A},A,A,A,\bar{A})_{10},(A,A,\bar{A},\bar{A},A)_{11},(A,\bar{A},A,\bar{A},A)_{12},\\
(\bar{A},A,A,\bar{A},A)_{13},(A,\bar{A},\bar{A},A,A)_{14},(\bar{A},A,\bar{A},A,A)_{15},\\
(\bar{A},\bar{A},A,A,A)_{16},(A,A,\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{17},(A,\bar{A},A,\bar{A},\bar{A})_{18},\\
(\bar{A},A,A,\bar{A},\bar{A})_{19},(A,\bar{A},\bar{A},A,\bar{A})_{20},(\bar{A},A,\bar{A},A,\bar{A})_{21},\\
(\bar{A},\bar{A},A,A,\bar{A})_{22},(A,\bar{A},\bar{A},\bar{A},A)_{23},(\bar{A},A,\bar{A},\bar{A},A)_{24},\\
(\bar{A},\bar{A},A,\bar{A},A)_{25},(\bar{A},\bar{A},\bar{A},A,A)_{26},(A,\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{27},\\
(\bar{A},A,\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{28},(\bar{A},\bar{A},A,\bar{A},\bar{A})_{29},(\bar{A},\bar{A},\bar{A},A,\bar{A})_{30},\\
(\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A},A)_{31},(\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{32}
\end{array}\right\}
$$

$A_i =$ “第i次试验中A发生”

$P(A_i) = p, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5独立

$$P(\{\omega_8\}) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 \bar{A}_5)$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)P(A_4)P(\bar{A}_5)$$

$$= p^3 q^2$$

样本空间中的32个样本点依次记为

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{32}$$

$$B_0 = \{\omega_{32}\}$$

$$B_1 = \{\omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{29}, \omega_{30}, \omega_{31}\}$$

$$B_2 = \{\omega_{17}, \omega_{18}, \cdots, \omega_{26}\}$$

$$B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \cdots, \omega_{16}\}$$

$$B_4 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$$B_5 = \{\omega_1\}$$

$B_0, B_1, \cdots, B_5$ 两两互不相容

$$B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \cdots, \omega_{16}\}$$

$$= \{\omega_7\} + \{\omega_8\} + \cdots + \{\omega_{16}\}$$

$$P(B_3) = P(\{\omega_7\}) + P(\{\omega_8\}) + \cdots + P(\{\omega_{16}\})$$

$$= C_5^3 p^3 q^2$$

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \big| a_i = A \text{或} \bar{A}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$A_i = \text{“第}i\text{次试验中}A\text{发生”}$$

$$P(A_i) = p, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \text{独立}, \quad \forall \omega \in B_k$$

$$P(\{\omega\}) = P(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i} \cdot \bigcap_{i \notin \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}} \bar{A}_i) = p^k q^{n-k},$$

$$P(B_k) = P\left(\sum_{\omega \in B_k} \{\omega\} \right) = \sum_{\omega \in B_k} P(\{\omega\})$$

$$=\sum_{\omega\in B_k} p^k q^{n-k} = p^k q^{n-k}\sum_{\omega\in B_k} 1 = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, n = 0,1,\cdots,n$$

$B_0, B_1, \cdots, B_n$互不相容

$$C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \cdots + C_n^n p^n q^0$$

$$=(q+p)^n = 1$$

$$0 \le P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k} \le 1, k = 0,1,\cdots,n$$

杨勇制作

顺便问一个问题

求在 n 次独立试验中事件 $\bar{A}$ 发生 k 次的概率。

$B_k =$“n次独立试验中事件$\bar{A}$发生k次”

$$P(B_k) = C_n^k q^k p^{n-k}, n = 0, 1, \cdots, n$$

例13 某车间有10台同类型的机床，每台机床配备的电动机功率为10千瓦，已知每台机床工作时，平均每小时实际开动12分钟，且开动与否是相互独立。现因当地电力供应紧张，供电部门经研究只提供50千瓦的电力给这10台机床，问这10台机床能够正常工作的概率。

解：

$$A = \text{“10台机床能够正常工作”}$$

$$B_k = \text{“10台机床中有}k\text{台机床开动”}$$

$$k = 0,1,\cdots,10$$

$$P(B_k) = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k},\ k = 0,1,\cdots,10$$

$$P(A) = P\left(\sum_{k=0}^{5} B_k\right) = \sum_{k=0}^{5} P(B_k) = \sum_{k=0}^{5} C_{10}^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$$

$$\approx 0.994$$

杨勇制作

例14 P29 例2-17

甲、乙两个乒乓球运动员进行乒乓球单打比赛。如果每局甲胜的概率为0.6，乙胜的概率为0.4，比赛可以采用三局二胜制或五局三胜制，问在哪一种比赛制度下甲获胜的可能性较大？

解：我们必须假定各局比赛结果相互独立

（1）采用三局二胜制

$A_1 =$ “甲2:0胜”　　$A_2 =$ “甲2:1胜”

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$$

$$P(A_1)=C_2^2\cdot 0.6^2\cdot 0.4^0$$

$$P(A_2)=C_3^2\cdot 0.6^2\cdot 0.4^1$$ ×

$B=$“前二局1:1”　$C=$“第三局甲胜”

B,C相互独立

$$P(A_2)=P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(B)=C_2^1\cdot 0.6^1\cdot 0.4^1,\ P(C)=0.6$$