第四节 函数展开成幂级数

第十一章

两类问题: 在收敛域内

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}}$ 和函数 $S(x)$

本节内容:

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、函数展开成幂级数

一、泰勒 (Taylor) 级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式**, 其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\,\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

称为**拉格朗日余项** .

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 的**泰勒级数 .**

当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数又称为**麦克劳林级数** .

待解决的问题 :

1) 对此级数, 它的收敛域是什么 ?

2) 在收敛域上 , 和函数是否为 $f(x)$?

定理1 . 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\bigcup(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的**充要条件**是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

证明: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \bigcup(x_0)$

令 $S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[\,f(x) - S_{n+1}(x)] = 0, \quad x \in \bigcup(x_0)$$

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的 , 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则 $\qquad a_0 = f(0)$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots; \quad a_1 = f'(0)$

$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots; \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$

…… $\qquad$ …

$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots; \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$

…… $\qquad$ …

显然结论成立 .

二、函数展开成幂级数

展开方法
- 直接展开法 — 利用泰勒公式
- 间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下 :

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值 ;

第二步 写出麦克劳林级数 , 并求出其收敛半径 R ;

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与x之间)

故 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

类似可推出:

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中m为任意常数 .

解: 易求出 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1)$,

$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1),\ \cdots$

于是得 级数 $1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$

因此对任意常数 m, 级数在开区间 (−1, 1) 内收敛.

为避免研究余项 , 设此级数的和函数为$F(x), -1<x<1$

则 $F(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right]$$

$(1+x)F'(x)=mF(x),\quad F(0)=1$ 推导

$$\int_0^x\frac{F'(x)}{F(x)}\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{m}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\ln F(x)-\ln F(0)=m\ln(1+x)$$

$$F(x)=(1+x)^m$$

由此得

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$(-1<x<1)$

称为二项展开式 .

说明:

(1) 在 $x=\pm1$ 处的收敛性与 m 有关 .

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的二项式定理.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots \quad (-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots \quad (-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成 幂级数.

例4. 将函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

把 x 换成 x^2，得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad (-1<x<1)$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分，得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, \quad -1<x\le 1$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛，而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续，所以展开式对 $x=1$ 也是成立的，于是收敛区间为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例6. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x=\sin[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})]$

$$=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos(x-\tfrac{\pi}{4})+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin(x-\tfrac{\pi}{4})$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{2}}[\cos(x-\tfrac{\pi}{4})+\sin(x-\tfrac{\pi}{4})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right) \quad (-\infty<x<+\infty)$$

例7. 将 $\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})} \quad (|x-1|<2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \quad (-1<x<3)$$

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数.

2. 常用函数的幂级数展开式

- $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots, \quad x\in(-\infty,+\infty)$
- $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \quad x\in(-1,+1]$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

  $x \in (-\infty, +\infty)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

  $x \in (-\infty, +\infty)$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

  $+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同？

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y = \sin^2 x$ 的幂级数？

提示: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$= -\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

备用题 1. 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$

$\therefore \; f(x) - f(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

$x = \pm 1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

2. 将 $f(x) = \ln(2 + x - 3x^2)$ 在 $x = 0$ 处展为幂级数.

解: $f(x) = \ln(1-x) + \ln 2 + \ln(1 + \frac{3}{2}x)$

$\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1 \le x < 1)$

$\ln(1 + \frac{3}{2}x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n \quad (-\frac{2}{3} < x \le \frac{2}{3})$

因此 $f(x) = \ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$

$= \ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1 + (-\frac{3}{2})^n]x^n \quad (-\frac{2}{3} < x \le \frac{2}{3})$