第四节　函数的连续性

一、函数连续性的概念

连续性是函数的一个重要特性．直观地讲，所谓函数$y=f(x)$在点x_0处连续，就是指函数$y=f(x)$的图形在点$(x_0,f(x_0))$处连续而不间断．因此可以很自然地引入函数连续性定义．

1.函数在一点处连续的定义.

定义1.15　设函数在点的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0处连续.

上面函数在一点处连续的定义也可用“$\varepsilon-\delta$”分析定义来叙述：

函数$f(x)$在点x_0处连续$\Leftrightarrow$任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立.

例1　设$f(x)=\begin{cases}(1-x)^{1/x}, & -1<x<1\text{且}x\neq 0\\ \frac{1}{e}, & x=0\end{cases}$，试问$f(x)$在点$x=0$处是否连续？

解　因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e},\quad f(0)=\frac{1}{e},$$

可见$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$，所以$f(x)$在点$x=0$处连续.

下面给出左连续及右连续的概念.

如果$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$存在且等于$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0处左连续.

如果$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$存在且等于$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0处右连续.

显然，函数$f(x)$在点x_0处连续$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在点$x=x_0$处既左连续又右连续.

即也可以表达为下面结果：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

例2　设$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & x<0\\ k, & x=0\\ 3+x\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，确定$k$的值，使$f(x)$在点$x=0$处连续.

解　因

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{x}=3,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3+x\sin\frac{1}{x})=3.$$

且有　$f(0)=k.$

因此，当$k=3$时，有$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$，即$f(x)$在$x=0$处连续.

例3　设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$，试问$f(x)$在$x=0$处是否连续？

解　由$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$可得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}x, & x<0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

且　$f(0)=\frac{1}{2},$

显然，$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$，因此$f(x)$在$x=0$处不连续.

下面给出函数在一点处连续的另一等价定义.

由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$可改写为

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

若记$\Delta x=x-x_0$，Δx称为自变量的改变量，记$\Delta y=f(x)-f(x_0)$(或$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$)，$\Delta y$称为函数$f(x)$的增量，于是

定义1.16 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果当自变量的改变量Δx趋近于零时，函数值的相应改变量Δy也趋向于零，即有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续.

2. 函数在区间上连续的定义

(1) 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续，则称函数$f(x)$在(a,b)内连续;

(2) 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续，且在左端点$x=a$处右连续，在右端点$x=b$处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

例4 求证函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

证 设x是区间$(-\infty,+\infty)$内任意取定的一点. 当自变量x有增量时，对应的函数y的增量为

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\tfrac{\Delta x}{2})\sin\tfrac{\Delta x}{2},$$

由于$\left|\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1$，$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<\left|\frac{\Delta x}{2}\right|$(当$\Delta x\neq 0$时)，则有

$$0\le|\Delta y|<|\Delta x|,$$

由夹逼准则可知，当$\Delta x\to 0$时，有$\Delta y\to 0$，因此，函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

我们知道，如果$f(x)$是有理整函数(多项式)，则对于任意的实数x_0，都有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，因此有理整函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的. 对于有理分式函数$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，只要$Q(x_0)\neq 0$，就有$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$，因此有理分式函数在其定义域内的每一点都是连续的.

二、连续函数的运算与初等函数的连续性

关于连续函数的运算与初等函数的连续性有以下结论(证明从略):

(i) 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数.

例如：$\sin x$和$\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续，那么有$\tan x$、$\cot x$ 、$\sec x$和$\csc x$在其定义域内连续.

(ii) 连续函数的复合函数仍是连续函数.

因为函数$u=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续，函数$y=\sin u$在$(-\infty,+\infty)$内连续，所以，函数$u=\frac{1}{x}$和函数$y=\sin u$的复合函数$y=\sin\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内是连续的.

(iii) 设函数$y=f(x)$在x_0处连续，在x_0的某个领域内严格单调，$y_0=f(x_0)$，则$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$在y_0处是连续的.

区间上连续的严格单调函数必有连续的反函数，反函数的定义域也是一个区间，且反函数与给定函数有相同的单调性.

例如：函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加且连续，故$y=\arcsin x$在$[-1,1]$上也是单调增加且连续的. 函数$y=\arccos x$在$[-1,1]$上单调减少且连续; $y=\arctan x$和$y=\mathrm{arccot} x$在$(-\infty,+\infty)$上单调且连续.

(iv) 基本初等函数在其定义域内都是连续的.

综合(i)、(ii)、(iii)和(iv)可得到以下定理:

定理1.8 一切初等函数在其定义区间（定义区间即包含在定义域内的区间）内都是连续的.

但是，初等函数在其定义域内不一定连续.

例如：(1) $y=\sqrt{\cos x-1}$,

定义域为$D: x=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$，该函数在其定义域中不连续.

(2) $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$，其定义域为$D: x=0$及$x\ge 1$，该函数在$x=0$处不连续，但在区间$[1,+\infty)$上连续.

由这个定理可知，若$f(x)$是初等函数，x_0是其有定义区间上的任意一点，则有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$. 这说明，对于连续函数求极限，可以把极限符号与函数记号交换，也就是只要把函数式中的x代以x_0即可．例如：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

例5 指出下列函数的连续区间：

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}, & -1<x<1, x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

解（1）$f(x)$的定义域就是连续区间，即为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）$f(x)$是分段函数，须考察分段点$x=0$处的连续性．由于

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}\ (令\sqrt[6]{1+x}=t)$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}$$

而$f(0)=1$，可见$f(x)$在$x=0$处不连续.

于是，$f(x)$的连续区间是$(-1,0)\cup(0,1)$.

三、函数的间断点

1. 间断点的定义

设若函数$f(x)$在点x_0处不连续，则点x_0称为$f(x)$的不连续点或间断点.

显然，如果函数$f(x)$有下列三种情形之一，

(i) $f(x)$在$x=x_0$没有定义；

(ii) $f(x)$在$x=x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

(iii) $f(x)$在$x=x_0$处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

则点x_0为$f(x)$的不连续点或间断点.

2. 间断点的分类

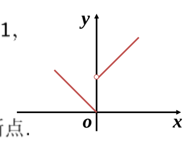
若函数$f(x)$当$x\to x_0$时其左右极限都存在但不相等，则称点x_0为$f(x)$的第一类跳跃间断点.

例6 讨论函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0^-)=0$，$f(0^+)=1$，

因为$f(0^-)\neq f(0^+)$，

所以$x=0$为函数$f(x)$的跳跃间断点.

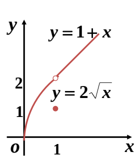


若函数$f(x)$当$x\to x_0$时其左右极限都存在且相等，即$f(x)$在x_0的极限存在，但不等于函数值(或函数值无定义)，则称x_0为$f(x)$的第一类可去间断点.

例7 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leq x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

在$x=1$处的连续性.



解 因为$f(1)=1$，

$f(1^-)=2$，$f(1^+)=2$，

所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1)$，

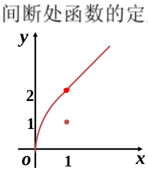
于是可得$x=0$是函数$f(x)$的可去间断点.

注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

如例7中，令$f(1)=2$，

则$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leq x<1,\\ 1+x, & x\geq 1,\end{cases}$

在$x=1$处连续.



跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点：函数在x_0处的左右极限都存在.

如果函数$f(x)$在x_0的左右极限中至少有一个不存在，则称x_0点为函数$f(x)$的第二类间断点.

除了第一类间断点以外，其它间断点都称为第二类间断点.

例8 求下列函数的间断点,并指明类型.

(1) $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-2x}$.

(3) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$.

解 (1) $f(x)$是分段函数，当$x<0$时，$x-2$是连续的；当$x\geq 0$时，e^x也是连续的. 因此考察分段点$x=0$处的情形.

由于
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-2)=-2,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x=1,$$
可见，左右极限都存在但不相等，所以$x=0$是$f(x)$的第一类跳跃间断点.

(2) 它是初等函数，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

在$x=0$处，因为
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x-2}\right)=-\frac{1}{2},$$
所以，$x=0$是第一类可去间断点.

在$x=2$处，因为
$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sin x}{x(x-2)}=\infty,$$
所以，$x=2$是第二类间断点.

由于$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$，我们也把这样的间断点称为无穷间断点.

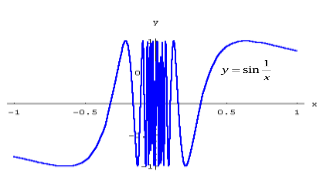
(3) 函数$f(x)$是初等函数，定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

在$x=1$处，由于
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+e^{1/x-1}}=0,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+e^{1/x-1}}=1,$$
所以$x=1$是$f(x)$的第一类跳跃间断点.

例9 讨论函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x=0$处的连续性.

解 因为函数$f(x)$在$x=0$处没有定义，并且$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，所以$x=0$是$f(x)$的第二类间断点.

这种间断点称为振荡间断点.

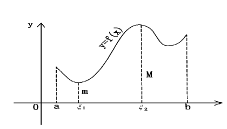


在经济理论中，通常假设所讨论的经济函数是连续的，但是不连续的函数也是大量存在的. 例如，当产量达到一定数量后，需要在增产时，就必须增添新的设备以及增加劳力，这时成本作为产量的函数就可能跳跃上升，它的图形将是一条不连续曲线.

四、闭区间上连续函数的性质

下面介绍闭区间上连续函数的几个重要性质.

定理1.9(最值定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一定有最大值和最小值，即至少存在$\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使得对一切$x\in[a,b]$，均有
$$m=f(\xi_1)\leq f(x)\leq f(\xi_2)=M.$$
如图所示.



注意：定理的条件如果不满足，则最大值与最小值就不一定存在. 例如:

$y=x$在开区间$(0,1)$上就找不到最大值与最小值;

$y=\frac{1}{x}$在$[-1,1]$上不连续，$y=\frac{1}{x}$在$[-1,1]$不存在最大值与最小值.

推论: 闭区间上的连续函数必有界.

定理1.10(介值定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，M与m分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，则对任意介于m与M之间的实数C，在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$.

例10 若$f(x)$在(a,b)内连续，且$a<x_1<x_2<x_3<b$，试证：在$[x_1,x_3]$上至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

证 由于$f(x)$在(a,b)内连续，且$a<x_1<x_2<x_3<b$，显然有$f(x)$在$[x_1,x_3]$上连续.

由最值定理可知，在$[x_1,x_3]$上$f(x)$有最大值M与最小值m，即得

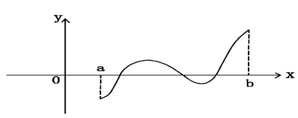
$$m\le f(x_1)\le M,$$
$$m\le f(x_2)\le M,$$
$$m\le f(x_3)\le M$$

于是，可得 $$m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\le M.$$

由介值定理可知，在$[x_1,x_3]$上至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

定理1.11(零值定理) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$.



该定理的结论表示了方程$f(x)=0$在(a,b)内至少有一个实根．从几何图形上看，表明此时曲线$y=f(x)$与x轴至少相交一次.

例11 试证方程$x\cdot 2^x=1$至少有一个小于1的正根.

证 设$f(x)=x\cdot 2^x-1$，显然，$f(x)$在$[0,1]$上连续，且有

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=1>0.$$

于是，由零值定理可知，在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$，即方程$x\cdot 2^x=1$至少有一个小于1的正根.

例12 设$f(x)$在$[0,2a]$上连续，且$f(0)=f(2a)$，试证：在$[0,a]$上至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=f(\xi+a)$.

证 令$F(x)=f(x)-f(x+a)$，由于$f(x)$在$[0,2a]$上连续，因此$F(x)$在$[0,a]$上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(a),$$

$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0).$$

于是，$F(0)$与$F(a)$可能异号或者同时为零．下面分两种情况考虑:

(i) 当$f(0)\neq f(a)$时，$F(0)$与$F(a)$异号，于是，由零值定理可知，在$(0,a)$内至少存在一点ξ，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f(\xi+a)$.

(ii) 当$f(0)=f(a)$时，$F(0)$与$F(a)$都为零．这表明点0与点a就是满足结论$F(\xi)=0$的ξ.

由(i)与(ii)可知：在$[0,a]$上至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=f(\xi+a).$$