第九章

重 积 分

一元函数积分学

↓

多元函数积分学 $\begin{cases} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{cases}$

第九章

第一节 二重积分的概念与性质

一、引例

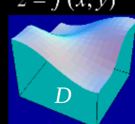
二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

一、引例

1.曲顶柱体的体积



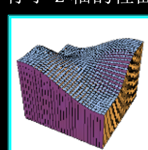
给定曲顶柱体:

底: xoy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x,y) \ge 0$

侧面: 以 D 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面

求其体积.



解法: 类似定积分解决问题的思想:

"大化小, 常代变, 近似和, 求 极限"

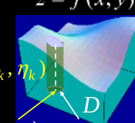
---

1)"大化小"

用任意曲线网分D为 n 个区域

$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2)"常代变"

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k), 则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) "近似和"

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

---

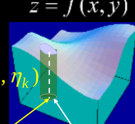
4) "取极限"

定义$\Delta\sigma_k$ 的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k) = \max\{\, |P_1P_2| \,\big|\, P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k \}$$

令 $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{ \lambda(\Delta\sigma_k) \}$

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$



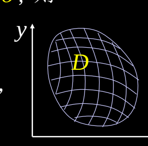
---

2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xoy 平面上占有区域 D , 其面密度为$\mu(x,y) \in C$,计算该薄片的质量 M .

若 $\mu(x,y) \equiv \mu$ (常数), 设D 的面积为σ, 则

$$M = \mu \cdot \sigma$$



若 $\mu(x,y)$非常数 , 仍可用

"大化小, 常代变,近似和, 求 极限"

解决.

1)"大化小"

用任意曲线网分D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$,

相应把薄片也分为小区域 .

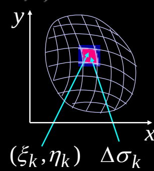
2)"常代变"

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k,η_k),则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

3)"近似和"

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$



4)"取极限"

令 $\lambda=\max_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的**共性**:

(1) 解决问题的步骤相同

"大化小, 常代变, 近似和,取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

二、二重积分的定义及可积性

定义: 设 $f(x,y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, 任取一点 $(\xi_k,\eta_k)\in\Delta\sigma_k$，若存在一个常数 I，使

$$I=\underbrace{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k}_{\text{积分和}} \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ **可积**，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**.

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分域}} \overbrace{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}^{\text{积分表达式}}$$

x,y 称为积分变量

如果 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 可用平行坐标轴的直线来划分区域 D，这时 $\Delta\sigma_k=\Delta x_k\Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

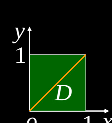
$$M=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二重积分存在定理: (证明略)

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**.

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

例如, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$



上二重积分存在； 但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在 D 上二重积分不存在 .

三、二重积分的性质

1. $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\quad$ (k 为常数)

2. $\iint_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

3. $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$(D=D_1\cup D_2,\ D_1,D_2$ 无公共内点$)$

4. 若在 D 上 $f(x,y)\equiv 1$, σ 为 D 的面积, 则

$$\sigma=\iint_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma=\iint_D\mathrm{d}\sigma$$

5. 若在D上 $f(x,y)\le\varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于 $-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|$

$$\therefore\quad \left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

6. 设 $M=\max\limits_D f(x,y),\ m=\min\limits_D f(x,y)$，$D$ 的面积为σ，

则有 $$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续，σ 为D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质6 可知，

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M$$

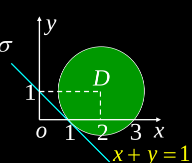
由连续函数介值定理，至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

例1. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$



其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$

解: 积分域 D 的边界为圆周

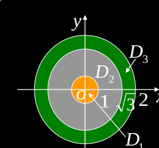
$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

它与 x 轴交于点 (1,0)，与直线 $x+y=1$ 相切. 而域 D 位于直线的上方，故在 D 上 $x+y\ge 1$，从而

$$(x+y)^2 \le (x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例2. 判断积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的正负号.



解: 分积分域为D_1,D_2,D_3，则

原式 $$=\iint_{D_1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

舍去此项

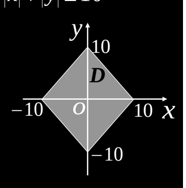
猜想结果为负

$$<\iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3}\sqrt[3]{3-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi-\sqrt[3]{2}\pi(4-3)=\pi(1-\sqrt[3]{2})<0$$

例3. 估计下列积分之值

$$\mathrm{I}=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\qquad D:|x|+|y|\le 10$$



解: D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

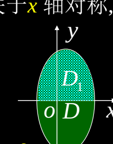
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

积分性质5

$$\frac{200}{102}\le \mathrm{I}\le\frac{200}{100}$$

即: $1.96\le \mathrm{I}\le 2$

8. 设函数 $f(x,y)$在闭区域上连续，域D 关于x 轴对称，D 位于 x 轴上方的部分为D_1，在 D 上



(1) $f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

(2) $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$

当区域关于 y 轴对称，函数关于变量 x 有奇偶性时，仍有类似结果.

如，D_1 为圆域 $D:x^2+y^2\le 1$在第一象限部分，则有

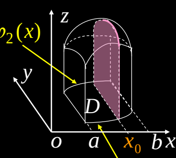
$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

四、曲顶柱体体积的计算

设曲顶柱的底为

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right\}$$



任取 $x_0\in[a,b]$,平面 $x=x_0$截柱体的

截面积为 $A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$

故曲顶柱体体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x$$

同样, 曲顶柱的底为

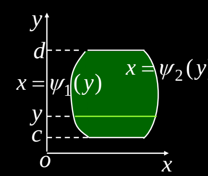
$$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}$$

则其体积可按如下两次积分计算

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_c^d\Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y$$

$$\triangleq\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



例4. 求两个底圆半径为R 的直角圆柱面所围的体积.

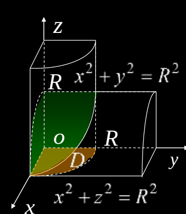
解: 设两个直圆柱方程为

$$x^2+y^2=R^2,\ \ x^2+z^2=R^2$$

利用对称性, 考虑第一卦限部分,

其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(x,y)\in D:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\\ 0\le x\le R\end{cases}$$



则所求体积为

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}R^3$$

内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\quad(\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

2. 二重积分的性质 (与定积分性质相似)

3. 曲顶柱体体积的计算 ——— 二次积分法

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

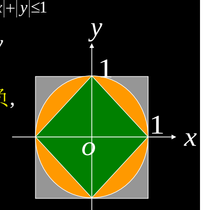
$$I_1=\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad I_2=\iint_{|x|+|y|\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2<I_1<I_3$$



2. 设D 是第二象限的一个有界闭域 , 且 $0<y<1$, 则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\ \ I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\ \ I_3=\iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (D)

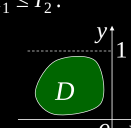
(A) $I_1\le I_2\le I_3$;　(B) $I_2\le I_1\le I_3$;

(C) $I_3\le I_2\le I_1$;　(D) $I_3\le I_1\le I_2$.

提示: 因 $0<y<1$, 故 $y^2\le y\le y^{1/2}$;

又因 $x^3<0$, 故在D上有

$$y^{1/2}x^3\le yx^3\le y^2x^3$$

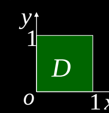


3. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

解:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin y+\cos y]\,\mathrm{d}y$$
$$=[-\cos y+\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2$$

4. 证明: $1\le\iint_D(\sin x^2+\cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma\le\sqrt{2}$, 其中$D$ 为 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$.



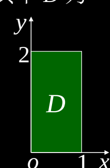
解: 利用题中 x, y 位置的对称性, 有

$$\iint_D(\sin x^2+\cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[\iint_D(\sin x^2+\cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_D(\sin y^2+\cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma\Big]$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[\iint_D(\sin x^2+\cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_D(\sin y^2+\cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma\Big]$$
$$=\iint_D(\sin x^2+\cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\iint_D\sin(x^2+\tfrac{\pi}{4})\,\mathrm{d}\sigma$$

$\because\ 0\le x^2\le 1,\ \therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1$, 又 D 的面积为 1 , 故结论成立 .

备用题

1. 估计 $I=\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 D 为 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2.$



解: 被积函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$

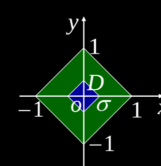
D 的面积 $\sigma=2$

在D上 $f(x,y)$的最大值 $M=f(0,0)=\dfrac{1}{4}$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=f(1,2)=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}$, $\therefore\ 0.4\le I\le 0.5$

2. 判断 $\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (\sigma>0)$ 的正负.



解: 当 $\sigma\le|x|+|y|\le 1$ 时,

$$0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1$$

故 $\ln(x^2+y^2)\le 0$

又当 $|x|+|y|<1$时, $\ln(x^2+y^2)<0$

于是 $\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<0$