

## 第四节

## 第七章

### 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

二、空间曲线的参数方程

三、空间曲线在坐标面上的投影

### 一、空间曲线的一般方程

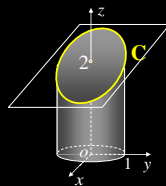
空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} S_2 \\ L \end{matrix} \quad \begin{matrix} S_1 \\ F(x, y, z) = 0 \end{matrix}$$

例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

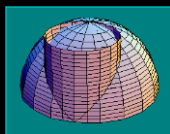
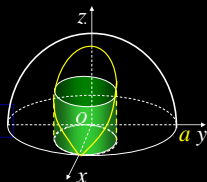
表示圆柱面与平面的交线  $C$ .



又如, 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线  $C$ .



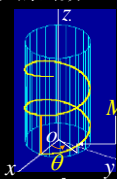
### 二、空间曲线的参数方程

将曲线  $C$  上的动点坐标  $x, y, z$  表示成参数  $t$  的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{称它为空间曲线的} \\ \text{参数方程.} \end{matrix}$$

例如, 圆柱螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{令 } \theta = \omega t, b = \frac{v}{\omega} \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b\theta \end{cases}$$



当  $\theta = 2\pi$  时, 上升高度  $h = 2\pi b$ , 称为螺距.

例1. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

解: (1) 根据第一方程引入参数, 得所求为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{1}{3}(6 - 2\cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为  $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ , 故所求为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \\ z = a \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

例2. 求空间曲线  $\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$  绕  $z$  轴旋转时的旋转曲面方程.

解: 任取点  $M_1(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \in \Gamma$ , 点  $M_1$  绕  $z$  轴旋转, 转过角度  $\theta$  后到点  $M(x, y, z)$ , 则

$$\begin{cases} x = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)} \cos \theta \\ y = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)} \sin \theta \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (\alpha \leq t \leq \beta) \\ (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{matrix}$$

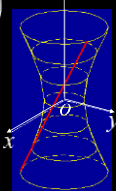
这就是旋转曲面满足的参数方程.

例如, 直线  $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \cos \theta \\ y = \sqrt{1+t^2} \sin \theta \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} -\infty < t < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

消去  $t$  和  $\theta$ , 得旋转曲面方程为

$$4(x^2 + y^2) - z^2 = 4$$



又如,  $xOz$  面上的半圆周  $\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ y = 0 \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$

绕  $z$  轴旋转所得旋转曲面 (即球面) 方程为

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

说明: 一般曲面的参数方程含两个参数, 形如

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases}$$

### 三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线  $C$  的一般方程为  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

消去  $z$  得投影柱面  $H(x, y) = 0$ ,

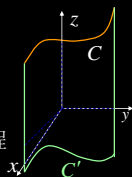
则  $C$  在  $xOy$  面上的投影曲线  $C'$  为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

消去  $x$  得  $C$  在  $yOz$  面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

消去  $y$  得  $C$  在  $zOx$  面上的投影曲线方程  $\begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

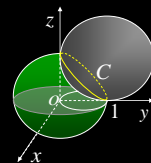


例如,

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

在  $xOy$  面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



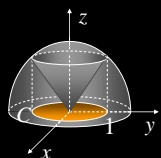
又如,

上半球面  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  和锥面  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  所围的立体在  $xOy$  面上的投影区域为: 二者交线在  $xOy$  面上的投影曲线所围之域.

$$\text{二者交线 } C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

在  $xOy$  面上的投影曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

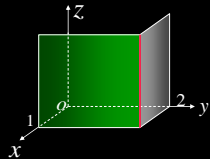
所围圆域:  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ .



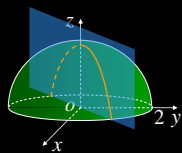
### 内容小结

- 空间曲线  $\longleftrightarrow$  三元方程组  
或参数方程 (如, 圆柱螺线)
- 求投影曲线

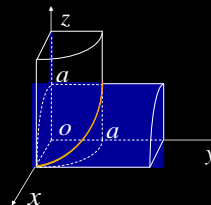
$$(1) \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$



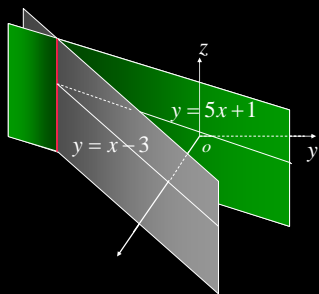
$$(2) \begin{cases} z = \sqrt{4-x^2-y^2} \\ y-x=0 \end{cases}$$



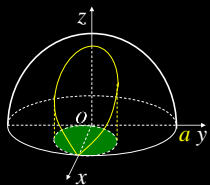
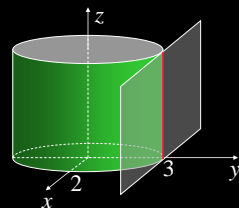
$$(3) \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$



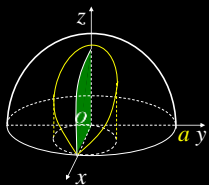
$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq ax \\ z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leq a^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad (x \geq 0, z \geq 0)$$

**备用题** 求曲线  $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转的曲面与平面  $x + y + z = 1$  的交线在  $xoy$  平面的投影曲线方程.

**解:**  $\because$  旋转曲面方程为  $z = x^2 + y^2$ , 它与所给平面的交线为

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向  $xoy$  面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在  $xoy$  面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$