第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

第三章

一、函数单调性的判定法

二、曲线的凹凸与拐点

一、 函数单调性的判定法

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导, 若 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$ 在 I 内单调递增 (递减) .

证: 无妨设 $f'(x)>0,\ x\in I$, 任取 $x_1,x_2\in I\ (x_1<x_2)$ 由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$$

$$\xi\in(x_1,x_2)\subset I$$

故 $f(x_1)<f(x_2)$. 这说明 $f(x)$ 在 I 内单调递增.

证毕

例1. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

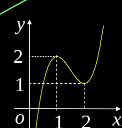
解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1, x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

故 $f(x)$ 的**单调增**区间为 $(-\infty,1)$, $(2,+\infty)$;

$f(x)$ 的**单调减**区间为 $(1,2)$.



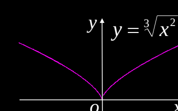
说明:

1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0}=\infty$$

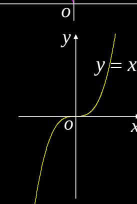


2) 如果函数在某驻点两边导数同号, 则不改变函数的单调性 .

例如, $y=x^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2$$

$$y'\big|_{x=0}=0$$



例2. 证明 $0<x\le\frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x}\ge\frac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

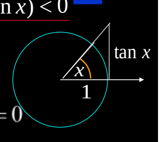
$$f'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$$

证

因此 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, 因此 $f(x)\ge f(\frac{\pi}{2})=0$

从而 $\frac{\sin x}{x}\ge\frac{2}{\pi},\quad x\in(0,\frac{\pi}{2}]$



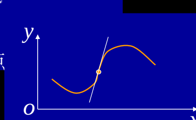
二、曲线的凹凸与拐点

定义 . 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续 , $\forall x_1,x_2\in I$,

(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的图形是**凹**的;

(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的图形是**凸**的 .

连续曲线上有切线的凹凸分界点称为**拐点** .



定理2.(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$在区间I 上有二阶导数

(1) 在 I 内$f''(x)>0$, 则 $f(x)$在 I 内图形是凹的 ; $+$

(2) 在 I 内 $f''(x)<0$,则 $f(x)$在 I 内图形是凸的 . $-$

证: $\forall x_1, x_2 \in I$, 利用一阶泰勒公式可得

$$f(x_1)=f(\tfrac{x_1+x_2}{2})+\boxed{f'(\tfrac{x_1+x_2}{2})(x_1-\tfrac{x_1+x_2}{2})}+\boxed{\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-\tfrac{x_1+x_2}{2})^2}$$

$$f(x_2)=f(\tfrac{x_1+x_2}{2})+\boxed{f'(\tfrac{x_1+x_2}{2})(x_2-\tfrac{x_1+x_2}{2})}+\boxed{\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-\tfrac{x_1+x_2}{2})^2}$$

两式相加

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(\tfrac{x_1+x_2}{2})+\underline{\tfrac{1}{2!}(\tfrac{x_2-x_1}{2})^2[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]}$$

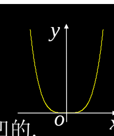
当 $f''(x)\underset{<}{>}0$时, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\underset{<}{>}f(\frac{x_1+x_2}{2})$, 说明 (1) 成立; (2) 证毕

例3. 判断曲线 $y=x^4$的凹凸性.

解: $y'=4x^3$, $y''=12x^2$

当$x\neq 0$时, $y''>0$; $x=0$时, $y''=0$,

故曲线 $y=x^4$在 $(-\infty,+\infty)$ 上是向上凹的.



说明:

1) 若在某点二阶导数为 0 , 在其两侧二阶导数不变号, 则曲线的凹凸性不变 .

2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

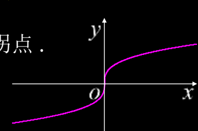
若曲线 $y=f(x)$在点x_0 连续, $f''(x_0)=0$或不存在, 但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号, 则点$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$的一个拐点.

例4. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解: $y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	+	不存在	−
y	凹	0	凸

因此点 (0 , 0) 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点 .



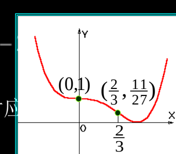
例5. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间及拐点.

解: 1) 求 y''

$y'=12x^3-12x^2$, $y''=36x^2-$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$, 对应



3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹

故该曲线在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上向上凹, 在$(0,\frac{2}{3})$上向上凸 , 点 (0 , 1) 及 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 均为拐点.

内容小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x)>0, x\in I \Longrightarrow f(x)$在 I 上单调递增

$f'(x)<0, x\in I \Longrightarrow f(x)$在 I 上单调递减

2.曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x)>0, x\in I \Longrightarrow$ 曲线$y=f(x)$ 在I上向上凹 $+$

$f''(x)<0, x\in I \Longrightarrow$ 曲线$y=f(x)$ 在I上向上凸 $-$

拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点

思考与练习

1. 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (*B*)

(*A*) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(*B*) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(*C*) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(*D*) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

提示: 利用 $f'(x)$ 单调增加 , 及

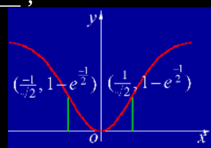
$f(1)-f(0)=f'(\xi)$ $(0<\xi<1)$

2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}$；

凸区间是 $\underline{(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})}$ 及 $\underline{(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)}$；

拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-e^{\frac{-1}{2}})}$.

提示: $y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$



备用题

1.求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证明: $y'=\dfrac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{(-2-2x)(x^2+1)^2-(1-2x-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=1,\quad x_2=-2-\sqrt{3},\quad x_3=-2+\sqrt{3}$$

从而三个拐点为

$$(1,1),\quad (-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}),\quad (-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}})$$

因为

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}-1}{-2-\sqrt{3}-1}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}-1}{-2+\sqrt{3}-1}$$

所以三个拐点共线.

2． 证明: 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

证明: 令 $F(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$ ，则 $F(0)=0,\ F(\frac{\pi}{2})=0$

$\because\quad F'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$

$\quad\ \ F''(x)=-\sin x<0$

$\therefore\quad F(x)$ 是凸函数

$\therefore\quad F(x)\geq\min\{F(0),F(\frac{\pi}{2})\}=0$ (自证)

即 $\quad\sin x>\dfrac{2}{\pi}x\qquad(0<x<\dfrac{\pi}{2})$