第四章 随机向量及其分布

（上）

设 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 描述同一个随机现象，一般地它们之间存在一定的联系，因而需要把它们作为一个整体来研究，我们称 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的整体 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维随机向量（n-dimensional random vector）。

本章主要讨论二维随机向量及其分布（包括离散型和连续型），随机变量的独立性，随机向量函数的分布。

第一节 二维随机向量

一. 随机向量及其联合分布函数

定义4-1 设随机试验的样本空间为 Ω ，对每一个 $\omega \in \Omega$ ，有确定的二个实值单值函数 $X(\omega), Y(\omega)$ 与之对应，则称$(X(\omega), Y(\omega))$为二维随机向量，简记为 (X, Y) 。

在定义4-1中要注意 X 和 Y 是定义在同一个样本空间 Ω 上的二个随机变量。

例如，有五件产品，其中两件是次品（用 a_1,a_2 表示），三件是正品（用 b_1,b_2,b_3 表示）。从中依次不放回地任意取出两件，此时随机试验的样本空间为

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1)\\(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\\(a_2,a_1),(b_1,a_1),(b_2,a_1),(b_3,a_1),(b_1,a_2)\\(b_2,a_2),(b_3,a_2),(b_2,b_1),(b_3,b_1),(b_3,b_2)\end{array}\right\}$$

我们将 Ω 中的样本点依次为$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{20}$。定义随机变量 X和Y 如下：

$$X = \begin{cases} 0, \text{如果第一次取出的是正品} \\ 1, \text{如果第一次取出的是次品} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0, \text{如果第二次取出的是正品} \\ 1, \text{如果第二次取出的是次品} \end{cases}$$

在一次随机试验中，若出现了样本点(a_1, b_3)（即 ω_4 ），则 $X(\omega_4) = 1, Y(\omega_4) = 0$；若出现了样本点$(b_3, a_1)$（即 ω_{14}），则 $X(\omega_{14}) = 0, Y(\omega_{14}) = 1$ 。

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(X+Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)$$

$$=P(X=0)P(Y=1\mid X=0)+P(X=1)P(Y=0\mid X=1)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

其中$\{X=0,Y=1\}$和$\{X=1,Y=0\}$互不相容。

ω

注意 X和Y 都是定义在 Ω 上的，对 Ω 中的每一个样本点，X和Y都有一个数与此样本点对应。

现在约定：

$$\left\{X = x_i, Y = y_j\right\} \hat{=} \left\{X = x_i\right\} \bigcap \left\{Y = y_j\right\}$$

其中$\left\{X = x_i\right\}$和$\left\{Y = y_j\right\}$均是样本空间 Ω 的子集。同理有

$$\left\{X \le x, Y \le y\right\} \hat{=} \{X \le x\} \bigcap \{Y \le y\}$$

定义4-2 设(X,Y)是一个二维随机向量，且x, y是二个任意实数，则称二元函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y), \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$$

为(X,Y)的联合分布函数

(joint distribution function)。

$$F(x,y)=P\left(\left\{\omega \middle| X(\omega)\le x, Y(\omega)\le y\right\}\right)$$

与一维的情形一样，掌握了联合分布函数也就掌握了二维随机向量的统计规律。

联合分布函数 具有下列五个基本性质：

(1) $0 \le F(x,y) \le 1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(2) $F(x,y)$对每个自变量都是单调非降的；

(3) 对一切实数 x 和 y，则有

$$F(-\infty, y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1;$$

(4) $F(x,y)$对每个自变量都是右连续的；

(5) 对一切实数 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，则有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$$。

证明：（1）~（4），类似一维随机变量分布函数的四个基本性质，下面我们只证（5）

由定义2知，$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$
是 (X,Y) 落在区域 D 内的概率，

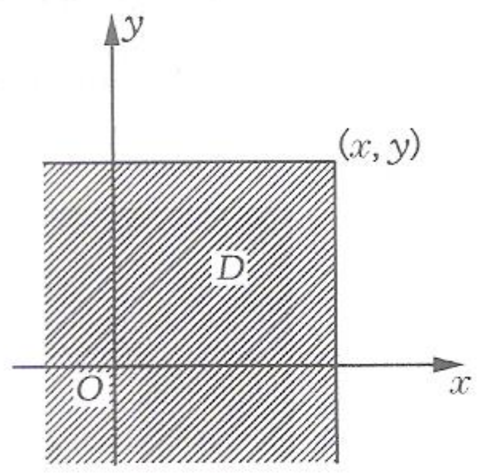


图 4—1

杨勇制作

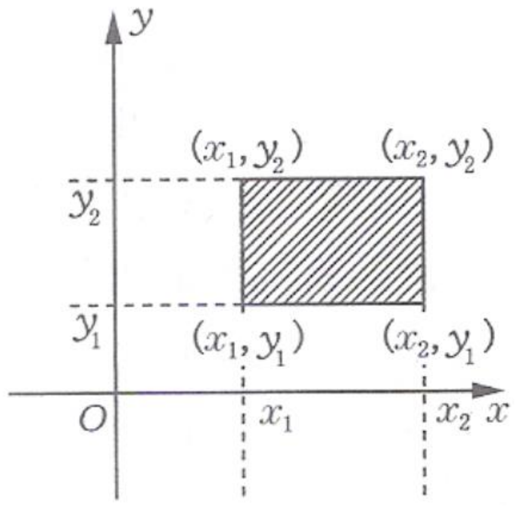


图 4—2

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= P(X \le x_2, Y \le y_2) - P(X \le x_1, Y \le y_2)$$

$$- P(X \le x_2, Y \le y_1) + P(X \le x_1, Y \le y_1)$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

这是用 $F(x,y)$ 来计算 (X,Y) 落在矩形区域 $\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$ 概率的公式，

再由概率的非负性，即知（5）成立，即

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0。$$

任何一个联合分布函数 $F(x,y)$ 一定具有以上五个基本性质；反之，任何具有以上五个基本性质的二元函数 $F(x,y)$ 必可作为某一二维随机向量 (X,Y) 的联合分布函数。

习题集77页典型例题

例1 试问二元函数 $F(x,y)=\begin{cases}1, x+y\geq 0\\ 0, x+y<0\end{cases}$

能否成为某二维随机向量的联合分布函数？

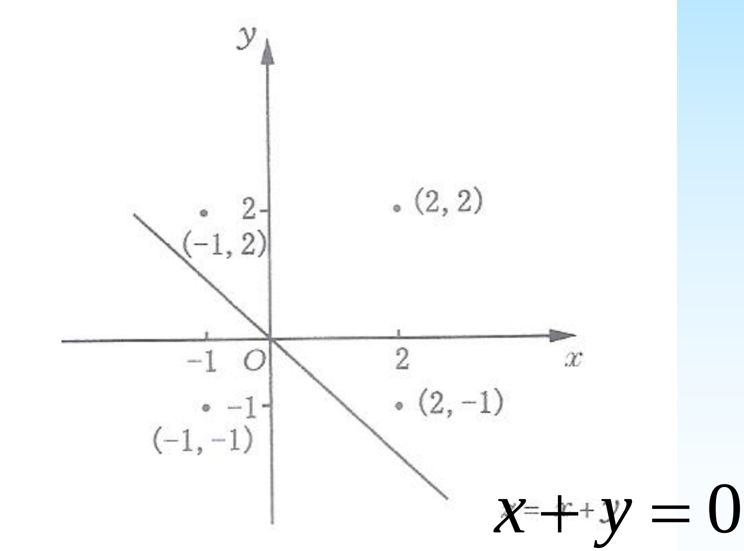


图 4—1

解：此二元函数$F(x, y)$满足基本性质$(1)\sim(4)$，但因为

$$F(2,2)-F(2,-1)-F(-1,2)+F(-1,-1)$$
$$=1-1-1+0=-1<0$$

即$F(x, y)$不满足联合分布函数的基本性质(5)，

故$F(x, y)$不能作为某二维随机向量的联合分布函数。

由于联合分布函数 $F(x,y)$ 全面描述了随机向量 (X,Y)的统计规律，显然由 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$ ，我们可以得到随机变量 X 和 Y 各自的分布函数。即

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, \Omega)$$

$$= P(X \le x, Y < +\infty)$$

$$= F(x, +\infty)$$

其中 $F(x,+\infty) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y)$ 。

同样，$F_Y(y)=F(+\infty,y)$，其中

$$F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)。$$

我们把 $F_X(x),F_Y(y)$ 分别称为 (X,Y) 关于 X,Y 的边际分布函数（marginal distribution function）。

我们经常讨论的随机向量有两种类型：离散型和连续型。

二．二维离散型随机向量及其联合概率分布

定义4-3 若二维随机向量 (X,Y) 的所有可能取值是有限对或可列无限多对，则称 (X,Y) 为二维离散型随机向量（2-dimensionat discrete random vector）。

定义4-4 设 (X,Y) 的所有可能取值为 $(x_i, y_j), i=1,\cdots,m,\cdots, j=1,\cdots,n,\cdots$ ，则称

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right), \begin{matrix} i=1,\cdots,m,\cdots \\ j=1,\cdots,n,.\cdots \end{matrix}$$

为二维离散型随机向量(X,Y)的联合概率分布（joint probability distribution）。

也常用表格列出：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

D是一个区域

$$P((X,Y)\in D)=\sum_{(i,j):(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$$

$$=\sum_{i:(x_i,y_j)\in D}\ \sum_{j:(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$$

联合概率分布完整地描述了离散型随机向量的统计规律。

联合概率分布具有下列两个基本性质：

(1) $p_{ij} \geq 0, \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m,\cdots \\ j=1,2,\cdots,n,\cdots \end{matrix};$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$。

证明：（1）显然；

（2）由于

杨勇制作

$$\sum_{i=1}^{\infty}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty}\{Y = y_j\} = \Omega$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\{X = x_i\}\right)\cap\left(\sum_{j=1}^{\infty}\{Y = y_j\}\right) = \Omega$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\{X = x_i\}\cap\left(\sum_{j=1}^{\infty}\{Y = y_j\}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\{X = x_i, Y = y_j\}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}=\Omega$$

再由概率的可列可加性知，

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P\left(X=x_i,Y=y_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P(\Omega)=1$$

即 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$ 。

联合概率分布一定具有以上二个基本性质。

反之，若一串 $p_{ij}(i=1,\cdots,m,\cdots,j=1,\cdots,n,\cdots)$

具有以上二个性质，则

$p_{ij}(i=1,\cdots,m,\cdots,j=1,\cdots,n,\cdots)$

一定可作为某一二维离散型随机向量的联合概率分布。

下面举例说明如何求二维离散型随机向量的联合概率分布。

70页例4-1

例4-1 箱子里装有 a 件正品和 b 件次品。每次从箱子中任取一件产品，共取两次。设随机变量 X 和 Y 的定义如下：

$$X = \begin{cases} 0, & \text{如果第一次取出的是正品} \\ 1, & \text{如果第一次取出的是次品} \end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & \text{如果第二次取出的是正品} \\ 1, & \text{如果第二次取出的是次品}\end{cases}$$

（1）第一次取出的产品仍放回去；
（2）第一次取出的产品不放回去。

在上述两种情况下分别求出二维随机向量 (X,Y) 的联合概率分布。

解：（1） $X:0,1, Y:0,1,$

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$P(X=0, Y=1) = P(X=0)P(Y=1)$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$P(X=1, Y=0) = P(X=1)P(Y=0)$$

$$= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{ba}{(a+b)^2}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{b^2}{(a+b)^2}$$

即联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{a^2}{(a+b)^2}$	$\frac{ab}{(a+b)^2}$
1	$\frac{ba}{(a+b)^2}$	$\frac{b^2}{(a+b)^2}$

（2） $X:0,1, Y:0,1,$

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0|X=0)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1|X=0)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0|X=1)$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1|X=1)$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

即联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\dfrac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$
1	$\dfrac{ba}{(a+b)(a+b-1)}$	$\dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

99页习题2

2. 一正整数X随机地在1,2,3,4四个数字中取一个值，另一个正整数Y随机地在$1\sim X$中取一个值，试求(X,Y)的联合概率分布。

解： $X:1,2,3,4, Y:1,2,3,4,$

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\,|\,X=i)$$

$$=\begin{cases} 0, i<j \\ \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{i}, i\geq j \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, i<j \\ \dfrac{1}{4i}, i\geq j \end{cases}, i,j=1,2,3,4$$

由于(X,Y)的联合概率分布全面地描述了二维离散型随机向量(X,Y)取值的统计规律，因此，当(X,Y)的联合概率分布已知时，我们就可以求出随机变量X和 Y 的概率分布。

具体地说，已知(X,Y)的联合概率分布为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, m, \cdots \\ j = 1, \cdots, n, \cdots \end{array}$$

则 X 的概率分布为

杨勇制作

$$P(X=x_i)=P(\{X=x_i\}\cap\Omega)$$

$$=P\left(\{X=x_i\}\cap\sum_{j=1}^{\infty}\{Y=y_j\}\right)$$

$$=P\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left[\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}\right]\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, \cdots, m, \cdots$$

同理可求得 Y 的概率分布为

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, \cdots, n, \cdots$$

我们记

$$p_{i\bullet} \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \ , \qquad p_{\bullet j} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

所以，X 的概率分布(又称边际概率分布)为

$$P(X = x_i) = p_{i\bullet}, i = 1, \cdots, m, \cdots$$

Y 的概率分布(又称边际概率分布)为

$$P(Y = y_j) = p_{\bullet j}, j = 1, \cdots, n, \cdots$$

我们也可以直接将二个边际概率分布写在 (X, Y) 的联合概率分布表中：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$p_{m\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	$\cdots$	1

例如，例4-1中的二个联合概率分布的边际概率分布分别为

Y \ X	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{a^2}{(a+b)^2}$	$\frac{ab}{(a+b)^2}$	$\frac{a}{a+b}$
1	$\frac{ba}{(a+b)^2}$	$\frac{b^2}{(a+b)^2}$	$\frac{b}{a+b}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	1

Y \ X	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{a}{a+b}$
1	$\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{b}{a+b}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	1

从例4-1中我们还可以发现，（1）、（2）两者有完全相同的边际概率分布，而联合概率分布却是不相同的。由此可知，由边际概率分布并不能唯一地确定联合概率分布。

事实上，(X,Y) 的联合概率分布还包含有 X 与 Y 之间的相互关系的信息，它是边际概率分布所不能提供的。

因而对单个随机变量 X 与 Y 的研究并不能代替对二维随机向量 (X,Y) 整体的研究。

三．二维连续型随机向量及其联合密度函数

定义4-6 设二维随机向量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，若存在非负可积二元函数 $p(x,y)$，使得对任意实数$x,y,$ 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

则称(X,Y)为二维连续型随机向量（2-dimensionat continuous random vector），

而称 $p(x,y)$ 为二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数（joint density function）。

联合密度函数完整地描述了二维连续型随机向量的统计规律。

联合密度函数具有下列二个基本性质。

(1) $p(x,y)\geq 0, \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$。

证明：（1）显然，（2）

$$1=F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy$$

联合密度函数一定具有以上二个基本性质；反之，具有以上二个性质的二元函数 $p(x,y)$ 必可作为某一二维连续型随机向量的联合密度函数。

性质4-1 设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$ ，且 D 为 xOy 平面上的一个区域，则

$$P\left(\left(X,Y\right)\in D\right)=\iint_{D} p(x,y)dxdy$$

证明：仅就 D 为有界区域加以证明。

如果 D 为矩形区域，即

$$D=\{(x,y) \mid a_1<x\le a_2, b_1<y\le b_2\}$$

$$P((X,Y)\in D)=P(a_1<X\le a_2, b_1<Y\le b_2)$$

$$=F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)+F(a_1,b_1)$$

$$=\int_{-\infty}^{a_2}\left(\int_{-\infty}^{b_2}p(x,y)dy\right)dx-\int_{-\infty}^{a_1}\left(\int_{-\infty}^{b_2}p(x,y)dy\right)dx$$

$$-\int_{-\infty}^{a_2}\left(\int_{-\infty}^{b_1}p(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{a_1}\left(\int_{-\infty}^{b_1}p(x,y)dy\right)dx$$

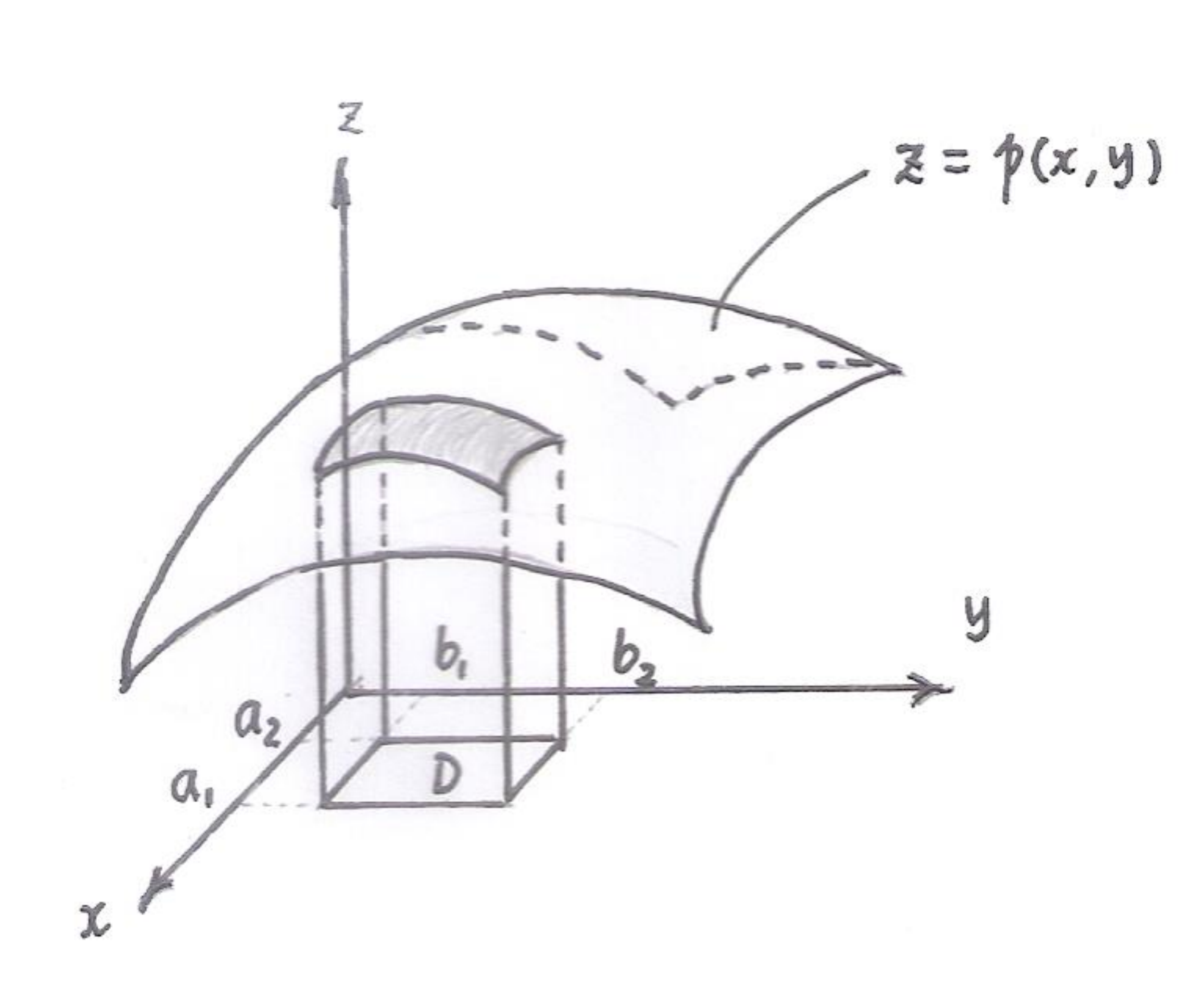
$$= \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{-\infty}^{b_2} p(x,y)dy\right)dx - \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{-\infty}^{b_1} p(x,y)dy\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} p(x,y)dx\right)dy - \int_{-\infty}^{b_1}\left(\int_{a_1}^{a_2} p(x,y)dx\right)dy$$

$$= \int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} p(x,y)dx\right)dy$$

$$= \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} p(x,y)dxdy$$

$$= \iint_D p(x,y)dxdy$$


z
z = p(x, y)
y
x
b₁
b₂
a₂
a₁
D

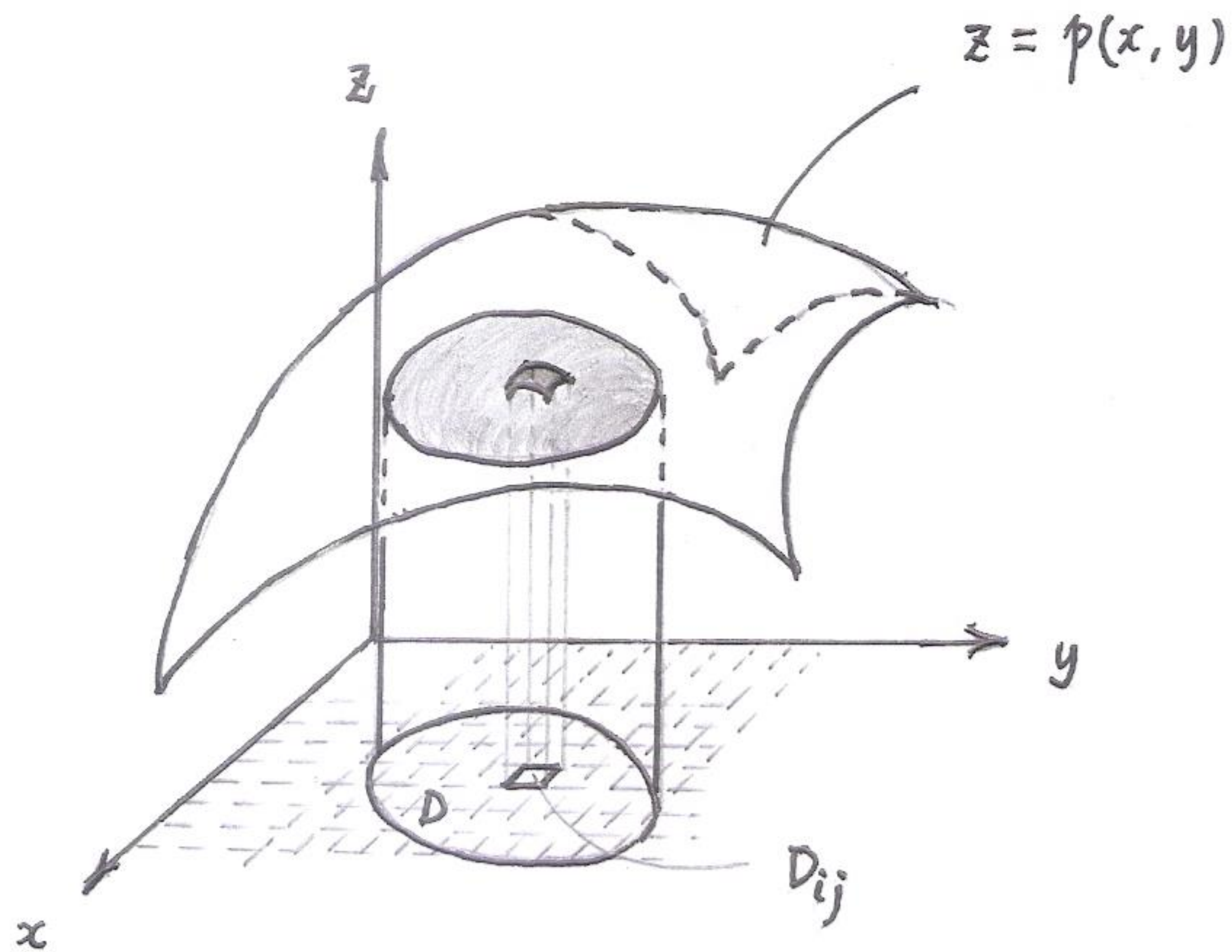
如果 D 不是矩形区域，可用平行于坐标轴的等距离直线将D 分成若干小矩形，对位于 D 内每个小矩形 D_{ij} ，运用上述方法得

$$P\left(\left(X,Y\right)\in D_{ij}\right)=P\left(x_i<X\le x_i+\Delta x_i,y_j<Y\le y_j+\Delta y_j\right)$$

$$=\iint_{D_{ij}} p(x,y)dxdy$$

$$\approx p(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$$

其中小矩形 D_{ij} 的直径很小。



z = p(x, y)
z
y
x
D
D_ij

求和，再令这些小矩形的最大直径 λ 趋于零得

$$P\left(\left(X,Y\right)\in D\right)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=\iint_D p(x,y)dxdy$$

此性质的几何意义是:(X,Y) 落入区域 D 的概率等于以区域 D 为底，D 的边界为准线，母线平行于 z 轴，曲面 $z=p(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。

注1：D无界也成立。

注2：基本性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy=1$

的几何意义。

注3:(X,Y)落在一个点上或者落在一条曲线上的概率为0。

性质4-2 设 $F(x,y)$ 为二维连续型随机向量的联合分布函数，则 $F(x,y)$ 处处连续。

证明：任意实数 $x, y,$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} F\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \int_{-\infty}^{x+\Delta x}\int_{-\infty}^{y+\Delta y} p(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv$$

$$=F(x,y)$$

即 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处连续， 又 (x,y) 的任意性可知， $F(x,y)$ 处处连续。

二维连续型随机向量的名称也由此性质得。

性质4-3 设 $F(x,y)$ 和 $p(x,y)$ 分别是二维连续型随机向量的联合分布函数和联合密度函数， 则在 $p(x,y)$ 的连续点上，有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = p(x,y)$$

证明：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dv\right)du$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{y}p(x,v)dv$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y)$$

由性质4-1的几何意义还可知，连续型随机向量 (X,Y) 取任何一对数的概率等于零。所以，

$$P\left(a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\right)$$

$$= P\left(a_1 < X < a_2, b_1 < Y < b_2\right)$$

$$= P\left(a_1 \le X < a_2, b_1 \le Y < b_2\right)$$

$$= P\left(a_1 \le X \le a_2, b_1 \le Y \le b_2\right)$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} p(x, y)dxdy$$

性质4-3表明，对于二维连续型随机向量 (X,Y) 而言，当已知联合分布函数 $F(x,y)$ 时，用求混合二阶偏导数可得其联合密度函数。

在 $p(x,y)$ 不连续点上，即 $F(x,y)$ 的混合偏导数不存在点上，$p(x,y)$ 的值可任意用一个非负常数给出，这不会影响以后有关事件概率的计算结果。

另外，当已知二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数 $p(x,y)$ ，则由定义

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

即可求得联合分布函数。

杨勇制作

75页例4-3

例4-3 设随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} x^2+cxy, 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, \\ 0 \quad , \quad 其他 \end{cases}$$

求 (1) 常数 c； (2) $P(X+Y\ge 1)$ ；

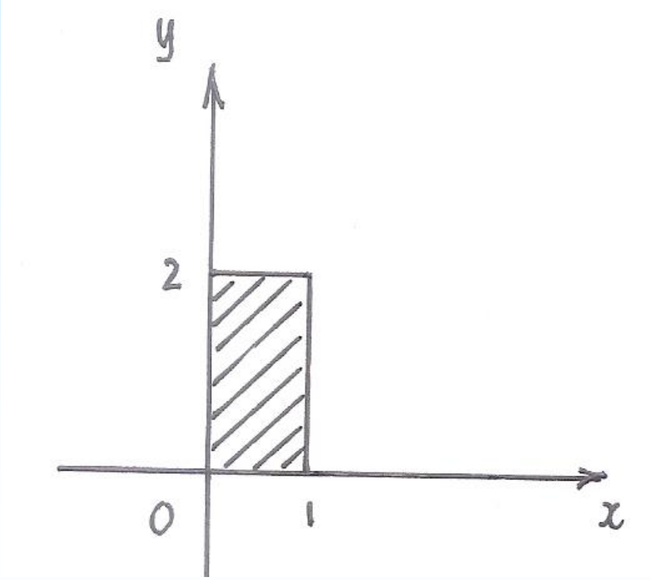
(3)联合分布函数 $F(x,y)$ 。

解：（1）由联合密度函数的基本性质知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^2 (x^2+cxy)dxdy$$

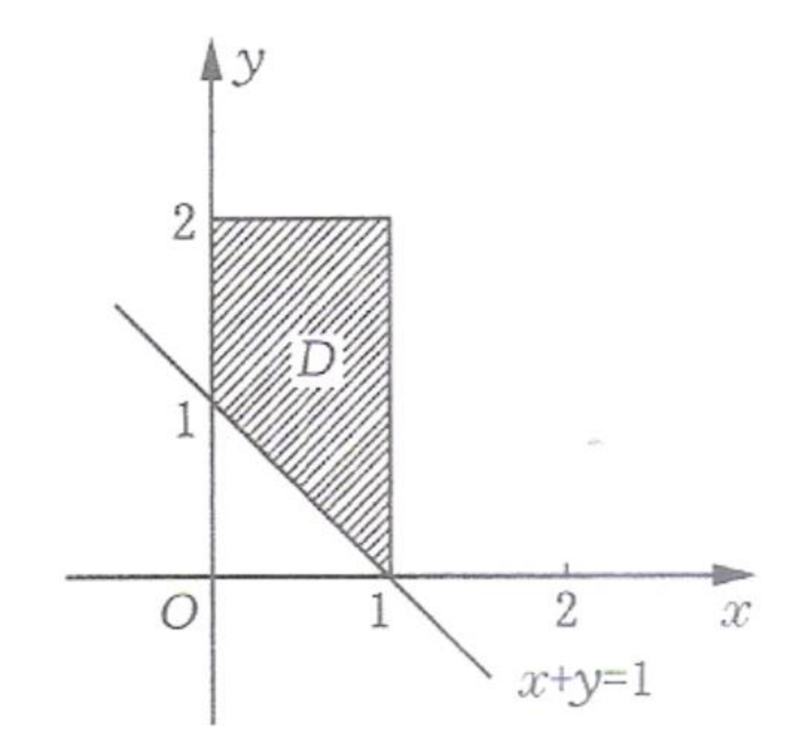
$$=\int_0^1 (2x^2+2cx)dx$$

$$=\frac{2}{3}+c=1$$



从而得 $c=\dfrac{1}{3}$；

(2)



由于在区域 $\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$ 外，

$p(x,y)=0$，

所以，在区域$\{(x, y)|x+y \geq 1\}$上积分等价于在区域 D 上的积分

$$\{X+Y \geq 1\} = \{(X, Y) \in \{(x, y)|x+y \geq 1\}\}$$

$$P(X+Y \geq 1) = \iint\limits_{x+y \geq 1} p(x, y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D} p(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^2 (x^2 + \frac{xy}{3})dy$$

$$=\int_0^1(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x)dx$$

$$=\frac{65}{72};$$

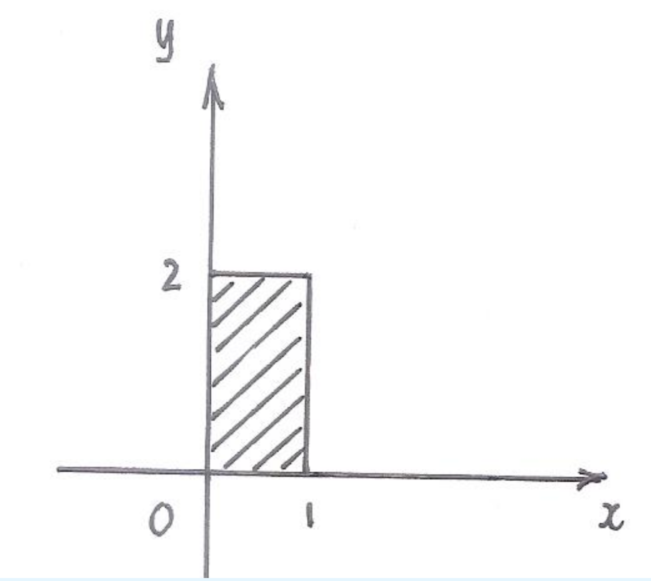
（3）由于

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

所以，

当 $x<0$或 $y<0$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,du\,dv=0$$

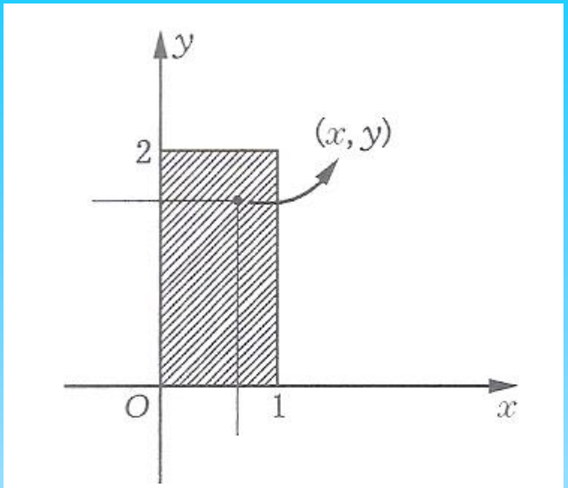


当$0 \le x < 1, 0 \le y < 2$时，

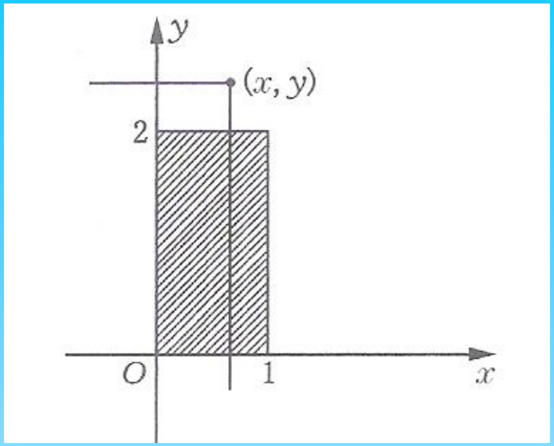
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv$$

$$= \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} (u^2 + \frac{1}{3}uv)dudv$$

$$= \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{12},$$



当 $0 \le x < 1, y \ge 2$ 时，

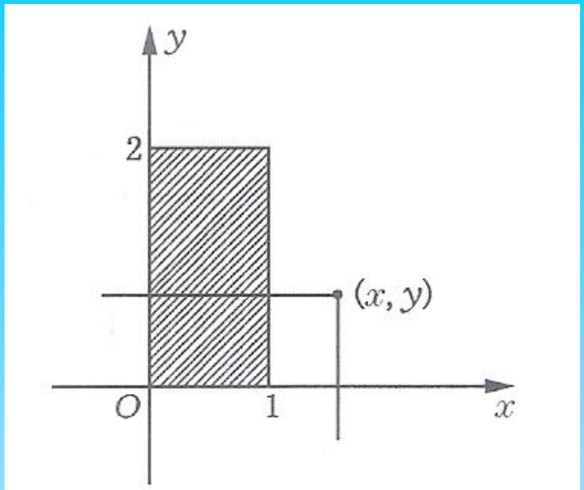


$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv$$

$$= \int_{0}^{x}\int_{0}^{2} (u^2 + \frac{1}{3}uv)dudv$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 ,$$

当 $x \geq 1, 0 \leq y < 2$ 时，

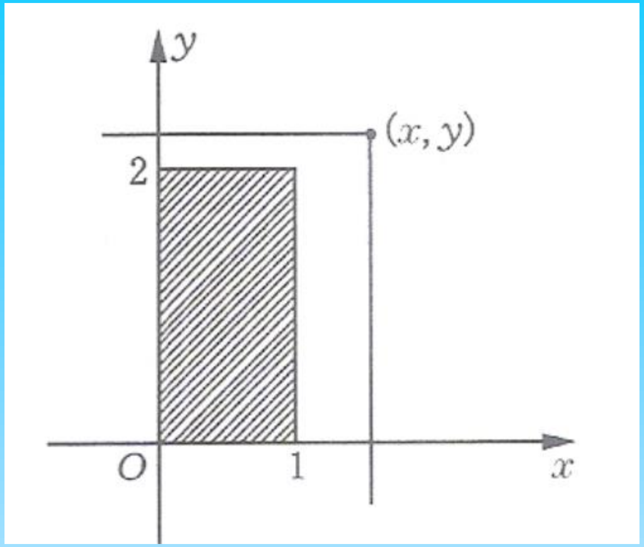


$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv$$

$$= \int_0^1\int_0^y (u^2 + \frac{1}{3}uv)dudv$$

$$= \frac{y}{3} + \frac{y^2}{12},$$

当 $x \geq 1, y \geq 2$ 时，



$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{2} (u^2 + \frac{1}{3}uv)dudv$$

$$= 1$$

杨勇制作

综上所述，

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 \quad , \quad x<0\text{或}y<0 \\ \dfrac{x^3y}{3}+\dfrac{x^2y^2}{12}, 0\le x<1, 0\le y<2 \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2x^3}{3}, 0\le x<1, y\ge 2 \\ \dfrac{y}{3}+\dfrac{y^2}{12}, x\ge 1, 0\le y<2 \\ 1 \quad , \quad x\ge 1, y\ge 2 \end{cases}$$

注：就这题而言，已知$F(x,y)$,求$p(x,y)$。

由于 (X,Y) 的联合密度函数全面地描述了二维连续型随机向量 (X,Y) 的统计规律，因此，当 (X,Y) 的联合密度函数已知时，我们就可以求出随机变量 X 和 Y 的密度函数。

具体地说，已知 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，则

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$= P(X \le x, Y < +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, v) du dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(u, v) dv \right) du$$

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy$$

同样可求得 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

定义4-7 我们称

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

为二维连续型随机向量(X,Y)关于X的边际密度函数（marginal density function）。

称

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

为二维连续型随机向量 (X,Y) 关于 Y 的边际密度函数。

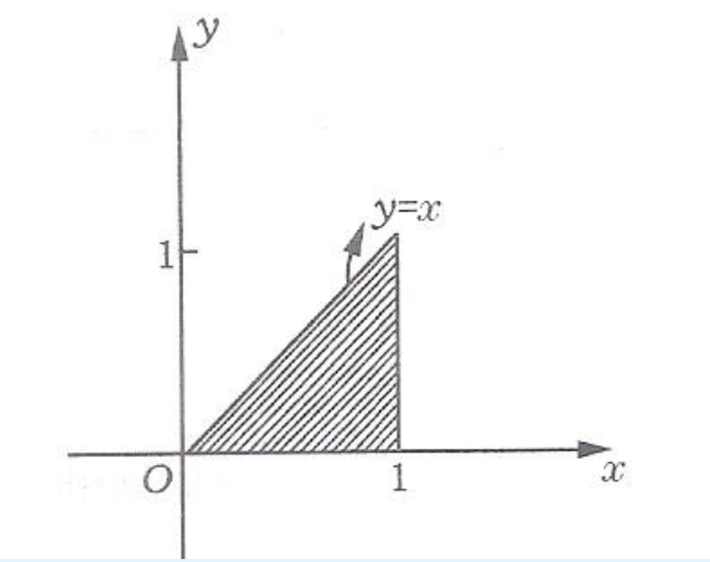
78页例4-4

例4-4 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, 0<x<1, 0<y<x\\ 0 \quad , \qquad \text{其他}\end{cases}$$

求 (X,Y) 的边际密度函数 $p_X(x)$, $p_Y(y)$。

解：先画出区域$\{(x,y)|0<x<1,0<y<x\}$的图形，



则

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 3xdy, 0<x<1 \\ 0 \quad , \quad 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3x^2, 0<x<1 \\ 0, 其他\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 3xdx, 0<y<1 \\ 0 \ , 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}y^2, 0<y<1 \\ 0 \quad ,其他 \end{cases}。$$

与二维离散型随机向量一样，对于二维连续型随机向量 (X,Y) 而言，二个边际密度函数也不能唯一地确定联合密度函数。