

## 第六周学习提纲

**学习内容：** 同学们结合慕课视频（P25—P30）和电子版教材（第四版）学习本ppt中的内容，并注意以下问题：

- 1、量纲分析应如何进行？
- 2、如何建立种群增长模型？长时间稳定性应如何判断？
- 3、微分方程模型与差分方程模型的区别和联系是什么？
- 4、查找matlab帮助文件，自学常微分方程（组）求解函数ode45，并思考如何运用该函数求解微分方程模型。

**作业：** 本周作业见下页ppt。

请在**4月20日23:00**前提交至sufe\_math\_model@163.com

## 作业（微分方程与差分方程模型）

人在饮酒后，酒精先进入胃肠道，随后由胃肠道外壁进入血液系统，最后通过代谢排出体外。《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阈值与检验》国家标准规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于20毫克 / 百毫升，小于80毫克 / 百毫升为饮酒驾车，血液中的酒精含量大于或等于80毫克 / 百毫升为醉酒驾车。

已知体重为70千克的某人在聚餐时短时间饮用了两瓶啤酒，饮酒后的血药浓度（毫克/百毫升）如下表：

时间( 小时)	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
酒精含量	30	68	75	82	82	77	68	68	68	51	50	41
时间( 小时)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
酒精含量	38	35	28	25	18	15	12	10	7	7	4	

根据以上数据（也可自行搜索需要的数据）试建立合适的数学模型，并回答：

- 1、若此人只饮用了一瓶啤酒，则在饮酒后多久可以开车？
- 2、若此人每餐都要饮酒，应如何控制饮用量，才能安全驾驶？

# 第六章 代数方程与差分方程模型

## 6.2 CT技术的图像重建

## 6.3 原子弹爆炸的能量估计

## 6.6 按年龄分组的种群增长



## 6.2 CT技术的图像重建

### 背景

- CT(计算机断层成像 )技术是20世纪50至70年代由美国科学家科马克和英国科学家豪斯费尔德发明的.
- 1971年第一代供临床应用的CT设备问世.
- 螺旋式CT机等新型设备被医疗机构普遍采用.
- CT技术在工业无损探测、资源勘探、生态监测等领域也得到了广泛的应用.

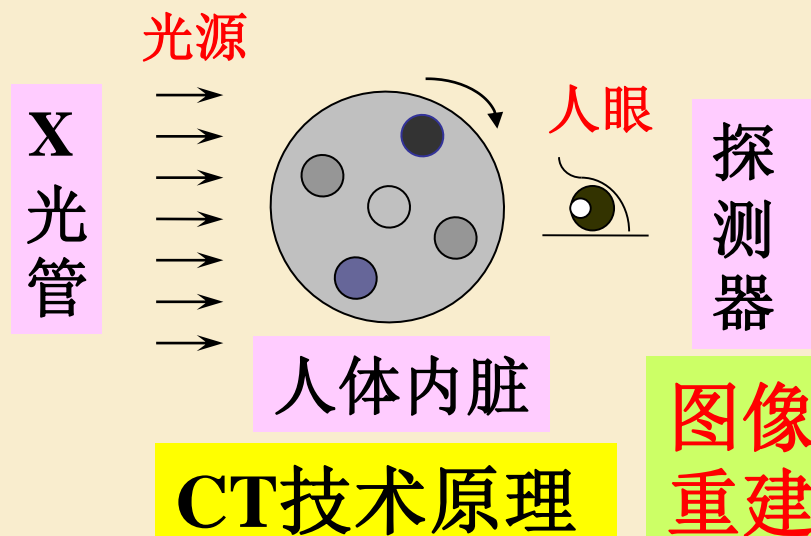
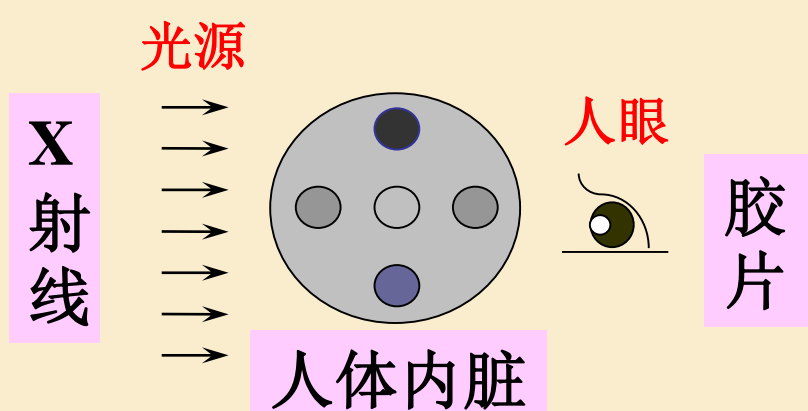
什么是CT，它与传统的X射线成像有什么区别？

**概念图示**

一个半透明物体嵌入5个不同透明度的球

单方向观察无法确定球的数目和透明度

让物体旋转从多角度观察能分辨出5个球及各自的透明度



传统的X射线成像原理

CT技术原理

图像重建

**CT技术:** 在不同深度的断面上,从各个角度用探测器接收旋转的X光管发出、穿过人体而使强度衰减的射线;经过测量和计算将人体器官和组织的影像重新构建.



# X射线强度衰减与图像重建的数学原理

$I$ ~射线强度       $l$ ~物质在射线方向的厚度

$I_0$ ~入射强度       $\mu$ ~物质对射线的衰减系数

- 射线强度的衰减率与强度成正比.

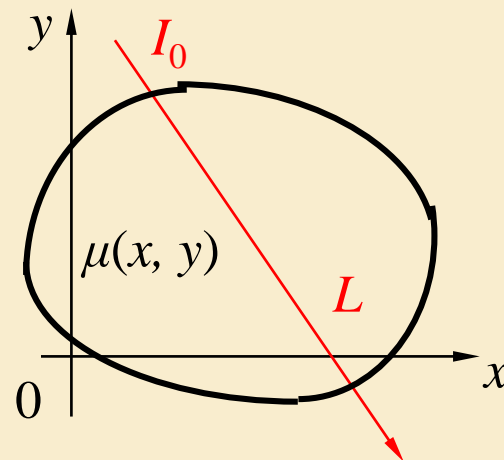
$$\frac{dI}{dl} = -\mu I \quad \Rightarrow \quad I = I_0 e^{-\mu l}$$

- 射线沿直线 $L$ 穿行, 穿过由不同衰减系数的物质组成的非均匀物体(人体器官).

$$\mu l \Rightarrow \int_L \mu(x, y) dl$$

$$\Rightarrow I = I_0 \exp\left(-\int_L \mu(x, y) dl\right)$$

$$\Rightarrow \int_L \mu(x, y) dl = \ln \frac{I_0}{I}$$



## X射线强度衰减与图像重建的数学原理

$$\int_L \mu(x, y) dl = \ln \frac{I_0}{I} \quad \text{右端数值可从CT的测量数据得到}$$

图像重建

多条直线 $L$ 的线积分  $\int_L \mu(x, y) dl$   $\Rightarrow$  被积函数 $\mu(x, y)$

$\Rightarrow$  反映人体器官大小、形状、密度的图像

数学原理

$$P_f(L) = \int_L f(x, y) dl \quad f(Q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dF_Q(q)}{q}$$

拉东变换

拉东逆变换

$F_Q(q) \sim$  与 $Q$ 相距 $q$ 的直线 $L$ 的线积分 $P_f(L)$ 对所有 $q$ 的平均值

实际上只能在有限条直线上得到投影(线积分).

图像重建在数学方法上的进展, 为CT技术各个领域成功的和不断拓广的应用提供了必要条件.

## 图像重建的代数模型

$m$ 个像素( $j=1, \dots, m$ ),  $n$ 束射线( $i=1, \dots, n$ )

每个像素对射线的衰减系数是常数

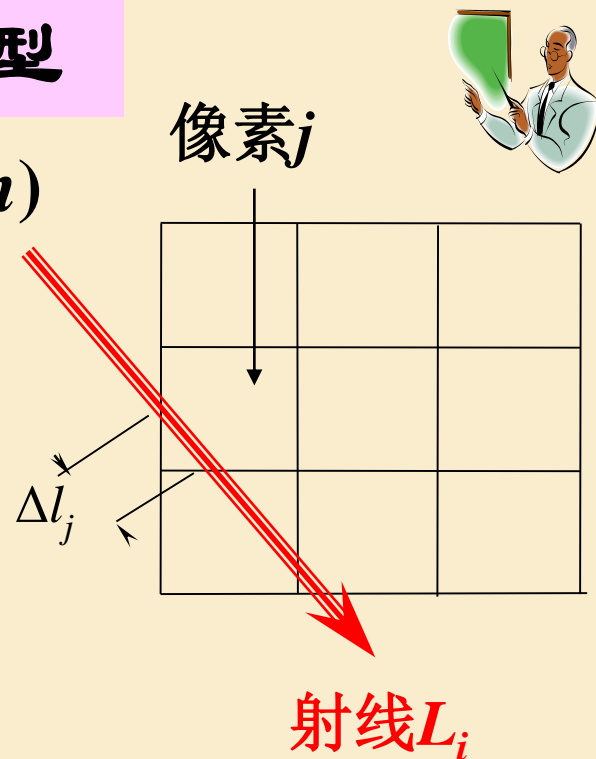
$\mu_j$ ~像素 $j$ 的衰减系数

$\Delta l_j$ ~射线在像素 $j$ 中的穿行长度

$J(L_i)$ ~射线 $L_i$ 穿过的像素 $j$ 的集合

$\ln(I_0 / I)_i \sim L_i$ 的强度测量数据

$$\int_L \mu(x, y) dl = \ln \frac{I_0}{I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in J(L_i)} \mu_j \Delta l_j = \ln(I_0 / I)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$





## 图像重建的代数模型

### 常用算法

$$\ln(I_0 / I)_i = b_i, \quad \mu_j = x_j$$

设像素的边长和射线的宽度均为 $\sigma$

### 中心线法

$a_{ij}$ ~射线 $L_i$ 的中心线在像素 $j$ 内的长度 $l_{ij}$ 与 $\sigma$ 之比.

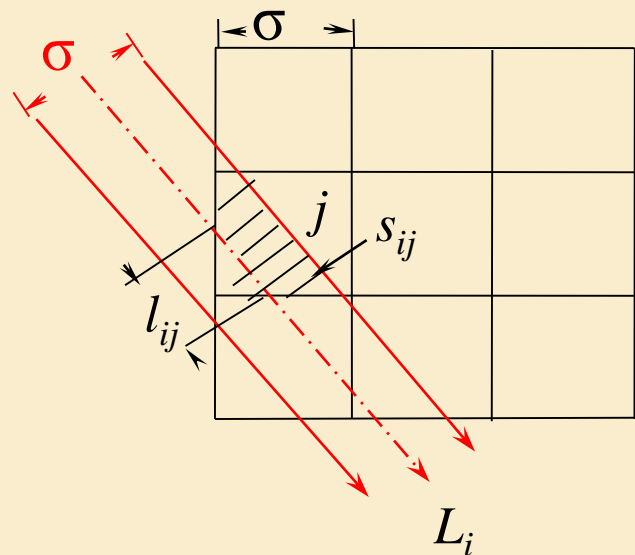
$$\sum_{j \in J(L_i)} \mu_j \Delta l_j = \ln(I_0 / I)_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

### 面积法

$a_{ij}$ ~射线 $L_i$ 的中心线在像素 $j$ 内的面积 $s_{ij}$ 与 $\sigma$ 之比.

### 中心法

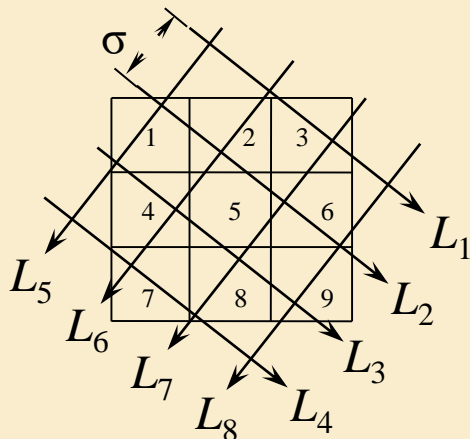
$a_{ij}=1$ ~射线 $L_i$ 经过像素 $j$ 的中心点.



## 图像重建的代数模型

## 代数重建技术(ART)

中心法的简化形式

假定射线的宽度为零, 间距 $\sigma$  $a_{ij}=1$   $\sim L_i$  经过像素 $j$ 内任一点

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据 $A$ 和 $b$ , 由  $Ax = b$  确定像素的衰减系数向量 $x$  $m$ 和 $n$ 很大且 $m > n$ , 方程有无穷多解 + 测量误差和噪声

$$Ax + e = b$$

在 $x$ 和 $e$ 满足的最优准则下估计 $x$

## 6.3 原子弹爆炸的能量估计

1945年7月16日美国科学家在新墨西哥州阿拉莫戈多沙漠试爆了全球第一颗原子弹, 震惊世界!



后来公布爆炸实际释放的能量21千吨

当时资料是保密的, 无法准确估计爆炸的威力.

英国物理学家泰勒研究了两年后美国公开的录像带, 利用**数学模型估计**这次爆炸释放的能量为**19.2千吨**.

# 原子弹爆炸的能量估计

爆炸产生的冲击波以爆炸点为中心呈球面向四周传播，爆炸的能量越大，在一定时刻冲击波传播得越远。

冲击波由爆炸形成的“蘑菇云”反映出来。

泰勒测量：时刻 $t$ 所对应的“蘑菇云”的半径 $r$

$t(\text{ms})$	$r(\text{m})$	$t(\text{ms})$	$r(\text{m})$	$t(\text{ms})$	$r(\text{m})$	$t(\text{ms})$	$r(\text{m})$	$t(\text{ms})$	$r(\text{m})$
0.10	11.1	0.80	34.2	1.50	44.4	3.53	61.1	15.0	106.5
0.24	19.9	0.94	36.3	1.65	46.0	3.80	62.9	25.0	130.0
0.38	25.4	1.08	38.9	1.79	46.9	4.07	64.3	34.0	145.0
0.52	28.8	1.22	41.0	1.93	48.7	4.34	65.6	53.0	175.0
0.66	31.9	1.36	42.8	3.26	59.0	4.61	67.3	62.0	185.0

泰勒用量纲分析方法建立数学模型，辅以小型试验，又利用测量数据对爆炸的能量进行估计。

# 量纲齐次原则

在经验和实验的基础上利用物理定律的量纲齐次原则，确定各物理量之间的关系。

## 物理量的量纲

长度  $l$  的量纲记  $L=[l]$

质量  $m$  的量纲记  $M=[m]$

时间  $t$  的量纲记  $T=[t]$

速度  $v$  的量纲  $[v]=LT^{-1}$

加速度  $a$  的量纲  $[a]=LT^{-2}$

力  $f$  的量纲  $[f]=LMT^{-2}$

引力常数  $k$  的量纲  $[k]=[f][l]^2[m]^{-2}=L^3M^{-1}T^{-2}$

对无量纲量  $\alpha$ ,  $[\alpha]=1(=L^0M^0T^0)$

动力学中  
基本量纲  
 $L, M, T$

导出量纲

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

## 量纲齐次原则

## 等式两端的量纲一致

量纲分析~利用量纲齐次原则寻求物理量之间的关系。

例：单摆运动

求摆动周期  $t$  的表达式

设物理量  $t, m, l, g$  之间有关系式

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \quad (1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为待定系数,  $\lambda$  为无量纲量

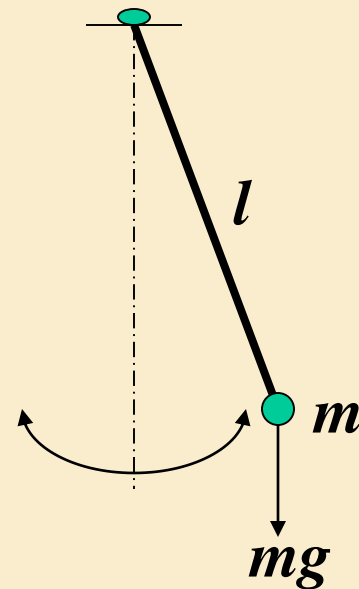
(1) 的量纲表达式  $[t] = [m]^{\alpha_1} [l]^{\alpha_2} [g]^{\alpha_3}$

$$\Rightarrow T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2 + \alpha_3} T^{-2\alpha_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \lambda \sqrt{\frac{l}{g}}$$

与  $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  对比



量纲齐  
次原则

单摆运动

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3}$$

为什么假设这种形式?

设  $p = f(x, y, z)$  对  $x, y, z$  的两组量测值  $x_1, y_1, z_1$  和  $x_2, y_2, z_2$ ,

$$p_1 = f(x_1, y_1, z_1), \quad p_2 = f(x_2, y_2, z_2)$$

$x, y, z$  的量纲单位缩小  $a, b, c$  倍

$$p'_1 = f(ax_1, by_1, cz_1), \quad p'_2 = f(ax_2, by_2, cz_2)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p'_1}{p'_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)} = \frac{f(ax_1, by_1, cz_1)}{f(ax_2, by_2, cz_2)}$$

$$\Rightarrow p = f(x, y, z) \text{ 的形式为 } f(x, y, z) = \lambda x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

单摆运动中  $t, m, l, g$  的一般表达式  $f(t, m, l, g) = 0$

$\Rightarrow t^{y_1} m^{y_2} l^{y_3} g^{y_4} = \pi$   $y_1 \sim y_4$  为待定常数,  $\pi$  为无量纲量

$$\begin{cases} [t] = L^0 M^0 T^1 \\ [m] = L^0 M^1 T^0 \\ [l] = L^1 M^0 T^0 \\ [g] = L^1 M^0 T^{-2} \end{cases} \quad \begin{aligned} & (L^0 M^0 T^1)^{y_1} (L^0 M^1 T^0)^{y_2} (L^1 M^0 T^0)^{y_3} \\ & (L^1 M^0 T^{-2})^{y_4} = L^0 M^0 T^0 \\ & L^{y_3+y_4} M^{y_2} T^{y_1-2y_4} = L^0 M^0 T^0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_3 + y_4 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_1 - 2y_4 = 0 \end{cases}$$

基本解

$$\Rightarrow y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (2, 0, -1, 1)^T$$

$$t^2 l^{-1} g = \pi \quad F(\pi) = 0$$

$$(t = \lambda \sqrt{l/g})$$



**Pi定理 (Buckingham)** 设  $f(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0$

是与量纲单位无关的物理定律,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是基本量纲,  $n \leq m$ ,  $q_1, q_2, \dots, q_m$  的量纲可表为

$$[q_j] = \prod_{i=1}^n X_i^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

量纲矩阵记作  $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$ , 若  $\text{rank } A = r$

线性齐次方程组  $Ay = 0$  有  $m-r$  个基本解, 记作

$$y_s = (y_{s1}, y_{s2}, \dots, y_{sm})^T, \quad s = 1, 2, \dots, m-r$$

则  $\pi_s = \prod_{j=1}^m q_j^{y_{sj}}$  为  $m-r$  个相互独立的无量纲量, 且

$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-r}) = 0$  与  $f(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0$  等价,  $F$  未定.

# 原子弹爆炸能量估计的量纲分析方法建模

记爆炸能量为 $E$ ，将“蘑菇云”近似看成一个球

时刻 $t$ 球的半径为 $r$   $r$ 与哪些因素有关?  $t, E$

空气密度 $\rho$ ，大气压强 $P$

$$r = \varphi(t, E, \rho, P)$$

$$\varphi(r, t, E, \rho, P) = 0$$

基本量纲:  $L, M, T$

$$[r] = L; [t] = T;$$

$$[E] = L^2 M T^{-2};$$

$$[\rho] = L^{-3} M;$$

$$[P] = L^{-1} M T^{-2}$$

量纲矩阵

$$A_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L \\ M \\ T \end{matrix}$$

$r$	$t$	$E$	$\rho$	$P$
-----	-----	-----	--------	-----

# 原子弹爆炸能量估计的量纲分析方法建模

$\text{Rank } A = 3 \quad \Rightarrow \quad Ay = 0, y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$  有2个基本解

$$y = (1, -2/5, -1/5, 1/5, 0) \quad y = (0, 6/5, -2/5, -3/5, 1)^T$$



两个无量纲量

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$\pi_1 = rt^{-2/5} E^{-1/5} \rho^{1/5} = r \left( \frac{\rho}{t^2 E} \right)^{1/5}$$

$$\pi_2 = t^{6/5} E^{-2/5} \rho^{-3/5} P = \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5}$$



$$r \left( \frac{\rho}{t^2 E} \right)^{1/5} = \psi \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5}$$



$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5} \psi \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5}$$

# 原子弹爆炸能量估计的数值计算

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5} \psi \left( \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5} \right)$$

时间  $t$  非常短  
能量  $E$  非常大

$$\psi \left( \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5} \right) \approx \psi(0)$$

泰勒根据一些小型爆炸试验的数据建议

$$\psi(0) \approx 1$$

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5}$$

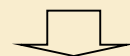
$$\Rightarrow E = \frac{\rho r^5}{t^2}$$

空气密度  $\rho = 1.25 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

用  $r, t$  的实际数据做平均



$$E = 8.2825 \times 10^{13} \text{ (焦耳)}$$



1千吨(TNT能量)  
=  $4.184 \times 10^{12}$  焦耳

$$E = 19.7957 \text{ (千吨)}$$

**实际值21千吨**

# 泰勒的计算

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5}$$

$$\Rightarrow \log_{10} r = \frac{2}{5} \log_{10} t + \frac{1}{5} \log_{10} \left( \frac{E}{\rho} \right)$$

$$\Rightarrow y = c, \quad y = \frac{5}{2} \log_{10} r - \log_{10} t, \quad c = \frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{E}{\rho} \right)$$

取y平均值得  $c=6.9038$   $E=8.0276 \times 10^{13}$  (焦耳)即19.2千吨

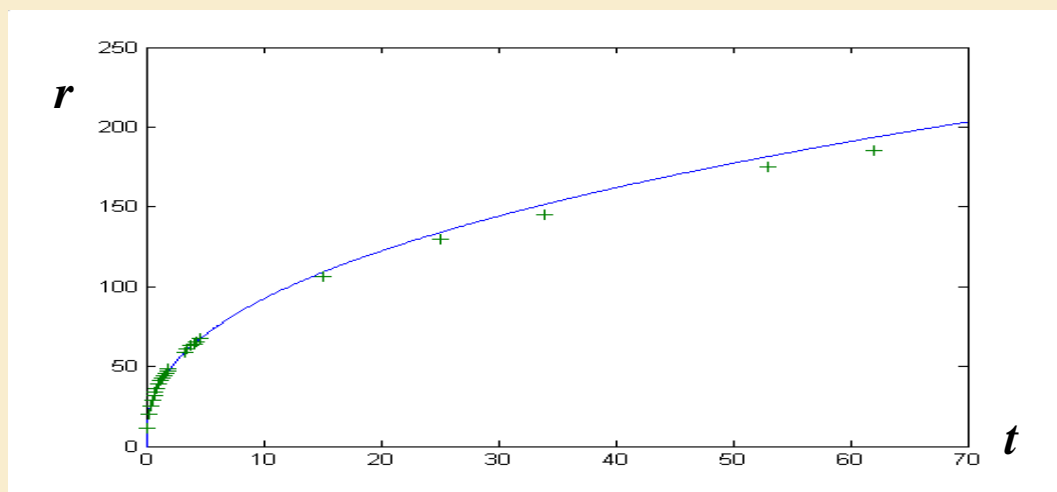
## 模型检验

最小二乘法拟合

$$r = at^b$$

$$b=0.4058$$

$$\sim 2/5$$



## 6.6 按年龄分组的种群增长



- 不同年龄组的繁殖率和死亡率不同.
- 以雌性个体数量为对象.

建立差分方程模型, 讨论稳定状况下种群的增长规律.

### 假设与建模

- 种群按年龄大小等分为 $n$ 个年龄组, 记 $i=1,2,\dots,n$
- 时间离散为时段, 长度与年龄组区间相等, 记 $k=1,2,\dots$
- 第 $i$ 年龄组1雌性个体在1时段内的繁殖率为 $b_i$
- 第 $i$ 年龄组在1时段内的死亡率为 $d_i$ , 存活率为 $s_i=1-d_i$

# 假设 与 建模

$x_i(k)$ ~时段 $k$ 第 $i$  年龄组的种群数量

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^n b_i x_i(k) \quad (\text{设至少1个 } b_i > 0)$$

$$x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k), i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

~Leslie矩阵( $L$ 矩阵)

$$x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T$$

~按年龄组的分布向量

$$x(k+1) = Lx(k)$$

$$x(k) = L^k x(0)$$

预测任意时段种群  
按年龄组的分布

# 稳定状态分析的数学知识

- $L$ 矩阵存在正单特征根 $\lambda_1$ ,  $|\lambda_k| \leq \lambda_1, k = 2, 3, \dots, n$

特征向量  $x^* = \left[ 1, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_1^2}, \dots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right]^T$

- 若 $L$ 矩阵存在 $b_i, b_{i+1} > 0$ , 则  $|\lambda_k| < \lambda_1, k = 2, 3, \dots, n$

且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = cx^*, c$ 是由 $b_i, s_i, x(0)$ 决定的常数

解释

$x(k) = L^k x(0)$   **$L$ 对角化**  $L = P[\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)]P^{-1}$

$L^k = P[\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)]P^{-1}$   $P$ 的第1列是 $x^*$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = P \text{diag}(1, 0, \dots, 0) P^{-1} x(0) = cx^*$



# 稳态分析—— $k$ 充分大 种群按年龄组的分布

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = cx^*$$



1)  $x(k) \approx c\lambda^k x^*$  ~ 种群按年龄组的分布趋向稳定,  
 $x^*$ 称**稳定分布**,与初始分布无关。

2)  $x(k+1) \approx \lambda x(k)$

□  $x_i(k+1) \approx \lambda x_i(k)$

~ 各年龄组种群数量按同一  
倍数增减,  $\lambda$ 称**固有增长率**

与基本模型  $x(k+1) = Lx(k)$  比较

3)  $\lambda=1$ 时  $x(k+1) \approx x(k) \approx cx^*$

$$x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \dots, s_1 s_2 \cdots s_{n-1}]^T$$

~ 各年龄组种群  
数量不变



# 稳态分析

3)  $\lambda=1$ 时  $Lx^* = x^*$   $x^* = [1, s_1, s_1s_2, \dots, s_1s_2 \cdots s_{n-1}]^T$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 + b_2s_1 + \cdots + b_ns_1s_2 \cdots s_{n-1} = 1$$

~ 1个个体在整个存活期内的繁殖数量为1

4)  $x(k) \approx c\lambda^k x^*$ ,  $x^* = [1, s_1, s_1s_2, \dots, s_1s_2 \cdots s_{n-1}]^T$

$\Rightarrow x_{i+1}(k) \approx s_i x_i(k), i = 1, 2, \dots, n-1$

~存活率  $s_i$  是同一时段的  $x_{i+1}$  与  $x_i$  之比

(与  $s_i$  的定义  $x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k)$  比较)

## 人口模型

## 连续型人口模型的离散形式

$x_i(k)$ ~ $k$ 年 $i$ 岁的女性人数(模型只考虑女性人口).

$b_i(k)$ ~ $k$ 年 $i$ 岁女性生育率(每人平均生育女儿数).

$$b_i(k) = \beta(k)h_i, \quad \sum_{i=i_1}^{i_2} h_i = 1 \quad \begin{array}{l} h_i \sim \text{生育模式} \\ [i_1, i_2] \sim \text{生育区间} \end{array}$$

$$\beta(k) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(k)$$

$k$ 年育龄女性平均生育女儿数

——总合生育率(生育胎次)

$d_i$ ~ $i$ 岁女性死亡率,  $s_i=1-d_i$ ~存活率

$$x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T$$

~年龄分布向量

# 人口模型

原模型  $x(k+1) = Lx(k)$

$$b_i(k) = \beta(k)h_i$$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

存活率矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & h_{i_1} & \cdots & h_{i_2} & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots & & & & \cdots 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 \cdots & & & & \cdots 0 \end{bmatrix}$$

生育模式矩阵

$$x(k+1) = Ax(k) + \beta(k)Bx(k)$$

$x(k)$ ~状态变量,  $\beta(k)$ ~控制变量

双线性方程(对  
 $x(k)$ ,  $\beta(k)$ 线性)