第四节

有理函数的积分

第四章

• 基本积分法：直接积分法；换元积分法；分部积分法

• 初等函数 $\underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}$ 初等函数

本节内容:

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$时, $R(x)$为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$为真分式

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$ $\xrightarrow{\text{分解}}$ $\boxed{\text{若干部分分式之和}}$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in\mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{1}{x(x-1)^2};\quad (2)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\quad (3)\ \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore\quad A=(x-2)\cdot\text{原式}\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot\text{原式}\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad$ 原式 $=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=(1+2x)\cdot\text{原式}\Big|_{x=-\frac12}=\frac45$$

分别令 $x=0,1$代入等式两端

$$\begin{cases}1=\frac45+C\\ \frac16=\frac{4}{15}+\frac{B+C}{2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}B=-\frac25\\ C=\frac15\end{cases}$$

$$\text{原式}=\frac15\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

四种典型部分分式的积分:

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n}+C\quad(n\ne1)$

3. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

$(p^2-4q<0,\ n\ne1)$

变分子为 $\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}$ 再分项积分

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{ 原式} = \frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

例3. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

思考: 如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$?

提示: 变形方法同例3, 并利用 P209 例9 .

说明: 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行, 但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例4. 求 $I = \int \frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解: $I = \int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x + \int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4} + \int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \arctan x + C$$

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int\frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} - \int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解: 原式 $= \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧
按常规方法较繁

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x \neq 0)$$

二 、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{ 令 } t = \tan\tfrac{x}{2} \quad \boxed{\text{万能代换}}$$

$\boxed{t\text{ 的有理函数的积分}}$

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例8. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\quad(ab\neq0)$.

解: 原式 $=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2x+b^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2x+(\frac{b}{a})^2}$

$$=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$$

说明: 通常求含 $\sin^2x$, $\cos^2x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时, 用代换 $t=\tan x$ 往往更方便 .

例9. 求 $\int\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x\quad(ab\neq0)$.

解法 1

原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x+b)^2\cos^2x}$

令 $t=\tan x$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{(at+b)^2}=-\frac{1}{a(at+b)}+C$$

$$=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C$$

例9. 求 $\int\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x\quad(ab\neq0)$

解法 2 令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$

原式 $=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi)+C$$

$\varphi=\arctan\frac{a}{b}$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\arctan\frac{a}{b})+C$$

例10. 求 $\int\frac{\cos^3x-2\cos x}{1+\sin^2x+\sin^4x}\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

原式 $=\int\frac{(\cos^2x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2x+\sin^4x}=-\int\frac{(\sin^2x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2x+\sin^4x}$

$$=-\int\frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}=-\int\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t=-\int\frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2x}{\sqrt{3}\sin x}+C$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\,dx$， 令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$

$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$， 令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})\,dx$，

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$，p 为 m,n 的最小公倍数.

例11. 求 $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2,\ dx=3u^2\,du$

$$\text{原式}=\int\frac{3u^2}{1+u}\,du=3\int\frac{(u^2-1)+1}{1+u}\,du$$
$$=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)du$$
$$=3\left[\tfrac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\right]+C$$
$$=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例12. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2，3 的最小公倍数 6，令 $x=t^6$，则有

$$\text{原式}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}$$
$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=6\left[\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|\right]+C$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$$

例13. 求 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，$dx=\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}$

$$\text{原式}=\int(t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt$$
$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$
$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$\begin{tikzcd}
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & & \text{三角函数有理式} \arrow[ll, "\text{万能代换}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & & \text{简单无理函数} \arrow[u, "\text{三角代换}"'] \arrow[llu, "\text{根式代换}"]
\end{tikzcd}$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出，但不一定简便，要注意综合使用基本积分法，简便计算.

思考与练习

如何求下列积分更简便？

1. $\int\frac{x^2}{a^6-x^6}\,dx\quad(a>0)$ 2. $\int\frac{dx}{\sin^3x\cos x}$

解: 1. $\text{原式}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{(a^3)^2-(x^3)^2}=\boxed{\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3}\right|+C}$

2. $\text{原式}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^3x\cos x}\,dx=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos x}{\sin^3x}\,dx$

$$=\int\frac{d\tan x}{\tan x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^3x}=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2x}+C$$

备用题 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

分母次数较高，宜使用倒代换.

解： 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}\,t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

2.求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x.$

解： 原式 $=\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x$

前式令 $u=\tan\frac{x}{2}$；后式配元

$$=\int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}\,u-\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$=\int \frac{1}{u^2+2}\mathrm{d}\,u-\ln|3+\cos x|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}-\ln|3+\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2})-\ln|3+\cos x|+C$$