

第五章 定积分

积分学 $\begin{cases} \text{不定积分} \\ \text{定积分} \end{cases}$

第一节

第五章

定积分的概念及性质

- 一、定积分问题举例
- 二、定积分的定义
- 三、定积分的性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= ah$

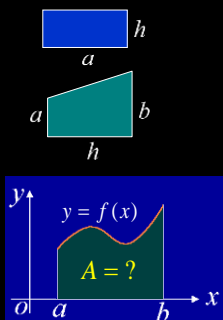
梯形面积 $= \frac{h}{2}(a+b)$

1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及 x 轴, 以及两直线 $x = a, x = b$ 所围成, 求其面积 A .



解决步骤:

1) 大化小. 在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 常代变. 在第 i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

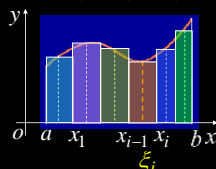
作以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底, $f(\xi_i)$

为高的小矩形, 并以此小

梯形面积近似代替相应

窄曲边梯形面积 ΔA_i , 得

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n)$$

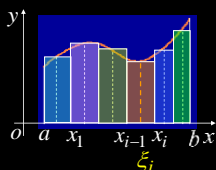


3) 近似和.

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

4) 取极限. 令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 则曲边梯形面积

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$, 且 $v(t) \geq 0$, 求在运动时间内物体所经过的路程 s .

解决步骤:

1) 大化小. 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点, 将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i] (i = 1, 2, \dots, n)$, 在每个小段上物体经过的路程为 $\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$

2) 常代变. 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 以 $v(\xi_i)$ 代替变速, 得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

3) 近似和.

$$s \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i$$

4) 取极限.

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \quad (\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i)$$

上述两个问题的**共性**:

- 解决问题的方法步骤相同:

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

- 所求量极限结构式相同: 特殊乘积和式的极限

二、定积分定义

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上, 若对 $[a, b]$ 的任一种分法 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 任取

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$, 只要 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ 时 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

总趋于确定的极限 I , 则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**, 记作 $\int_a^b f(x) dx$

即 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

此时称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上**可积**.

积分上限 $[a, b]$ 称为积分区间

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

积分下限 a b 被积函数 $f(x)$ 被积表达式 $f(x)dx$ 积分变量 x 积分和

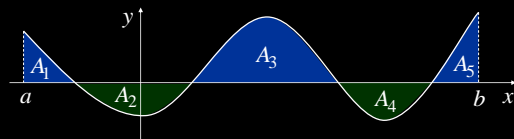
定积分仅与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量用什么字母表示无关, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

定积分的几何意义:

$f(x) > 0$, $\int_a^b f(x) dx = A$ 曲边梯形面积

$f(x) < 0$, $\int_a^b f(x) dx = -A$ 曲边梯形面积的负值



$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

可积的充分条件:

定理1. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\iff f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

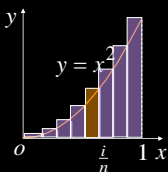
定理2. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点 $\iff f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. (证明略)

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解: 将 $[0, 1]$ n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$)

取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

则 $f(\xi_i) \Delta x_i = \xi_i^2 \Delta x_i = \frac{i^2}{n^3}$



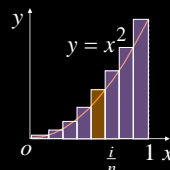
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

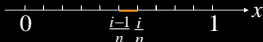
$$= \frac{1}{3}$$



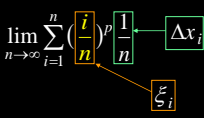
例2. 用定积分表示下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{\Delta x_i} \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$



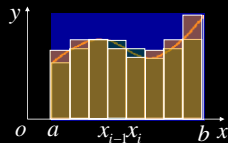
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{\Delta x_i} \int_0^1 x^p dx$



说明: 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 根据定积分定义可得如下近似计算方法:

将 $[a, b]$ 分成 n 等份: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$,
 $x_i = a + i \cdot \Delta x \ (i = 0, 1, \dots, n)$

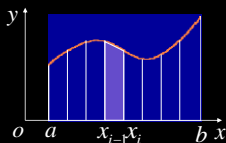
记 $f(x_i) = y_i \ (i = 0, 1, \dots, n)$



$$1. \int_a^b f(x) dx \approx y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \cdots + y_{n-1} \Delta x \\ = \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) \quad (\text{左矩形公式})$$

$$2. \int_a^b f(x) dx \approx y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x \\ = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \quad (\text{右矩形公式})$$

$$3. \int_a^b f(x) dx \\ \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [y_{i-1} + y_i] \Delta x \\ = \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} (y_0 + y_n) + (y_1 + \cdots + y_{n-1}) \right] \quad (\text{梯形公式})$$



为了提高精度, 还可建立更好的求积公式, 例如辛普森公式, 复化求积公式等, 并有现成的数学软件可供调用。

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b dx = b - a$$

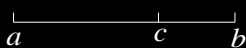
$$3. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数})$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

证: 左端 $= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i$
 $= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \text{右端}$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

证: 当 $a < c < b$ 时,



因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,

所以在分割区间时, 可以永远取 c 为分点, 于是

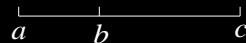
$$\sum_{[a, b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a, c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c, b]} f(\xi_i) \Delta x_i$$

令 $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

当 a, b, c 的相对位置任意时, 例如 $a < b < c$,

则有



$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

6. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

证: $\because \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$$

推论1. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

推论2. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b f(x) dx \quad (a < b)$

证: $\because -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\therefore -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\text{即} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

7. 设 $M = \max_{[a, b]} f(x)$, $m = \min_{[a, b]} f(x)$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b)$$

例3. 试证: $1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}$.

证: 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 有

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x) < 0$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) < f(0^+)$$

$$\text{即} \quad \frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{故} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

$$\text{即} \quad 1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}$$

8. 积分中值定理

若 $f(x) \in C[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

证: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M , 则由性质7可得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

根据闭区间上连续函数介值定理, 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

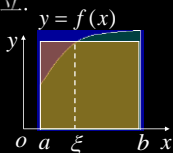
因此定理成立.

说明:

- 积分中值定理对 $a < b$ 或 $a > b$ 都成立.

- 可把 $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi)$

理解为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值. 因



$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.

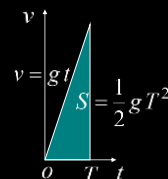
例4. 计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

解: 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{T-0} \int_0^T gt dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} g T^2 = \frac{gT}{2} \end{aligned}$$



内容小结

1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

\implies 近似计算 $\begin{cases} \text{矩形公式} \\ \text{梯形公式} \end{cases}$

2. 定积分的性质

3. 积分中值定理


\implies 连续函数在区间上的平均值公式

思考与练习

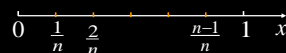
1. 用定积分表示下述极限：

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

解： $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx$



或 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\pi \cdot \frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x \, dx$



思考： 如何用定积分表示下述极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} + \sin \frac{(n+1)\pi}{n} \right]$$

提示： $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(n+1)\pi}{n}$$

极限为 0 !