第三章 微分中值定理 与导数的应用

$$\text{中值定理}\begin{cases}\text{罗尔中值定理}\\ \text{拉格朗日中值定理} \xrightarrow{\text{推广}} \text{泰勒公式 (第三节)}\\ \text{柯西中值定理}\end{cases}$$

↓

$$\text{应用}\begin{cases}\text{研究函数性质及曲线性态}\\ \text{利用导数解决实际问题}\end{cases}$$

第三章

第一节 中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日中值定理

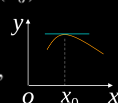
三、柯西(Cauchy)中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

费马(fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{ 在 }\cup(x_0)\text{ 有定义,}\\ \text{且 } f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0)\text{ 存在}\end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

(或≥)



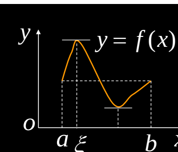
证: 设 $\forall x_0+\Delta x\in\cup(x_0),\ f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$,

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\begin{cases} f'_-(x_0)\ge 0 & (\Delta x\to 0^-)\\ f'_+(x_0)\le 0 & (\Delta x\to 0^+)\end{cases} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

证毕

罗尔(Rolle)定理



$y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在区间 (a,b) 内可导

(3) $f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

若 $M=m$, 则 $f(x)\equiv M,\ x\in[a,b]$,

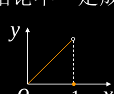
因此 $\forall\xi\in(a,b),\ f'(\xi)=0$.

若 $M>m$, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等, 不妨设 $M\ne f(a)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=M$, 则由费马引理得 $f'(\xi)=0$.

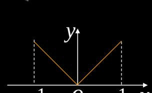
注意:

1) 定理条件条件不全具备, 结论不一定成立. 例如,

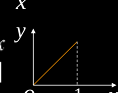
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$



$f(x)=|x|$ $x\in[-1,1]$



$f(x)=x$ $x\in[0,1]$



---

2) 定理条件只是充分的. 本定理可推广为

$y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)$$

$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

证明提示: 设 $F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ f(b^-), & x=b\end{cases}$

证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理.

例1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1 的正实根 .

证: 1) 存在性 .

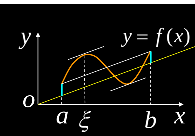
设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 , 且 $f(0)=1, f(1)=-3$. 由介值定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0.

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$, $\because$ $f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件 , $\therefore$ 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0,\ x\in(0,1)$, 矛盾, 故假设不真!

二、拉格朗日中值定理



$y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然 , $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 , 在 (a, b) 内可导, 且 $\varphi(a)=\dfrac{b\,f(a)-a\,f(b)}{b-a}=\varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$, 即定理结论成立 . 证毕

拉格朗日中值定理的有限增量形式:

令 $a=x_0, b=x_0+\Delta x$, 则

$$\Delta y=f'(\underbrace{x_0+\theta\Delta x}_{\xi})\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

推论: 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上用拉日中值公式 , 得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0 \quad (x_1<\xi<x_2)$$

$$\therefore \quad f(x_2)=f(x_1)$$

由 x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$ 在 I 上为常数 .

例2. 证明等式 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2},\ x\in[-1,1]$.

证: 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, 则在 $(-1,1)$ 上

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0$$

由推论可知 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=C$ (常数)

令 $x=0$, 得 $C=\dfrac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1)=\dfrac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1,1]$ 上成立.

经验: 欲证 $x\in I$ 时 $f(x)=C_0$, 只需证在 I 上 $f'(x)\equiv 0$,
且 $\exists\, x_0\in I$, 使 $f(x_0)=C_0$.

自证: $\arctan x+\operatorname{arc\,cot} x=\dfrac{\pi}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$

例3. 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ \ (x>0)$.

证: 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 因此应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad 0<\xi<x$$

即 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi},\quad 0<\xi<x$

因为 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$

故 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad (x>0)$

三、柯西(Cauchy)中值定理

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足 :

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a, b) 内可导

(3)在开区间 (a, b) 内 $F'(x)\neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析: $F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)\neq 0 \qquad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}=0$ $\qquad \varphi'(\xi)$

$\Longrightarrow$ $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

证: 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导, 且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗 ?

$\because f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

两个 ξ 不一定相同

上面两式相比即得结论. **错 !**

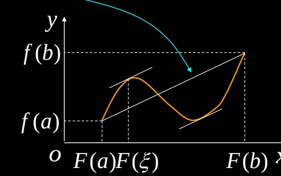
柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}}=\boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　切线斜率

$$\begin{cases} x=F(t)\\ y=f(t)\end{cases}$$

注意: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f'(t)}{F'(t)}$



例4. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设 $F(x)=x^2$, 则 $f(x),F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 (0 , 1) 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即　$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$

例5. 试证至少存在一点 $\xi\in(1,e)$ 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

证: 法1 用柯西中值定理 . 令

$f(x)=\sin\ln x,\quad F(x)=\ln x$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 [1 , e] 上满足柯西中值定理条件,

因此　$\dfrac{f(e)-f(1)}{F(e)-F(1)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\quad \xi\in(1,e)$

即　$\sin 1=\dfrac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi$

分析:

$\sin 1=\cos\ln\xi \Longleftrightarrow \dfrac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}=\dfrac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}$

例5. 试证至少存在一点 $\xi\in(1,e)$ 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

法2 令 $f(x)=\sin\ln x-\sin 1\cdot\ln x$

则 $f(x)$ 在 [1 , e] 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi\in(1,e)$, 使

$f'(\xi)=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\cos\ln x-\sin 1\cdot\dfrac{1}{x}$

$\sin 1=\cos\ln\xi$

内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系

费马引理 → 罗尔定理

罗尔定理 $\xrightarrow{}$ 拉格朗日中值定理　$f(b)=f(a)$

拉格朗日中值定理 $\xleftarrow{F(x)=x}$ 柯西中值定理

罗尔定理 ⟷ 柯西中值定理　$f(b)=f(a)$, $F(x)=x$

2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数

思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 [1, 2] 上满足拉格朗日定理条件, 则中值 $\xi=$ $\underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\boxed{\frac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3}$$

2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x)=0$ 有 $\underline{\ 3\ }$ 个根，它们分别在区间 $\underline{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)}$ 上.

2. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$, 且在 $(0,\pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

提示: 由结论可知, 只需证

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$$

即 $\quad [\,f(x)\sin x\,]'\big|_{x=\xi}=0$

设 $\quad F(x)=f(x)\sin x$

验证 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理条件.

3. 若 $f(x)$ 可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

提示: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2$,

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $\quad e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $\quad [e^x f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$, 验证 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理条件.

4. 思考: 在 $[0,x]$ 上对函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 应用拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad \xi\in(0,x)$$

即 $\quad x^2\sin\frac{1}{x}=(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi})x,\ \ \xi\in(0,x)$

$\therefore\quad \cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x}$

当 $x\to0^+$ 时 $\xi\to0^+$, 因此由上式得 $\cos\frac{1}{\xi}\to0$.

问是否可由此得出 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\frac{1}{x}=0$?

不能！ 因为 $\xi=\xi(x)$ 是依赖于 x 的一个特殊的函数. $x\to0^+$ 表示 x 从右侧以任意方式趋于 0 .

柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本，《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 .他是经典分析的奠人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.

备用题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导, 且 $f(1)=0$, 求证存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证: 设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,

因此至少存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即 $\quad nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

2. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$ 证明对任意 $x_1>0, x_2>0$ 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

证: 不妨设 $0<x_1<x_2$

$$\because \quad f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)$$

$$=[\,f(x_1+x_2)-f(x_2)\,]-[\,f(x_1)-f(0)\,]$$

$$=f'(\xi_2)x_1-f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2<\xi_2<x_1+x_2\,,\ 0<\xi_1<x_1)$$

$$=x_1 f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0 \qquad (\xi_1<\xi<\xi_2)$$

$$\therefore \quad f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$