例 1 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=3xy+xy^2$的通解.

解 分离变量得 $\frac{dy}{3y+y^2}=xdx$

两边积分得 $\int \frac{dy}{3y+y^2}=\int xdx$

$$\frac{1}{3}(\ln|y|-\ln|3+y|)=\frac{1}{2}x^2+C_1$$

记$C=\pm e^{3C_1}$,则通解为

$$\frac{y}{y+3}=Ce^{\frac{3x^2}{2}}.$$

例 2 求满足方程 $(x^2y^2+1)dx+2x^2dy=0$，且过点（1，2）的积分曲线.

解 设$u=xy$, 则 $du=ydx+xdy$,于是

$$(u^2+1)dx+2x(du-\frac{u}{x}dx)=0$$

$$\therefore \frac{du}{(u-1)^2}=-\frac{dx}{2x},$$

两边积分得 $\frac{-1}{u-1}=-\frac{\ln x}{2}+C$,

微分方程的通解为 $\frac{\ln x}{2}-\frac{1}{xy-1}=C$

代入$x=1, y=2$，得 $C=-1$,于是积分曲线是

$$\frac{\ln x}{2}-\frac{1}{xy-1}=-1.$$

例 3 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解.

解 设 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,

即原方程化为 $\frac{dx}{x}=\frac{du}{u(\ln u-1)}$,

积分得 $\ln x+\ln C=\ln(\ln u-1)$,

$$Cx=\ln u-1,$$

$$u=e^{Cx+1}, \quad \therefore y=xe^{Cx+1}.$$

例 4 求 $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$ 的通解.

解 原方程化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{2(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}++(\frac{y}{x})^2}$,

设$u=\frac{y}{x}$,则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,于是方程为

$$(\frac{1}{u-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u-2}-\frac{1}{2u})du=\frac{dx}{x}$$

积分得 $\frac{u-1}{\sqrt{u}\cdot(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx$, 代入$u=\frac{y}{x}$,

$$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3.$$

例 5 求 $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx=xdy$满足$y(1)=0$的特解.

解 原方程化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2},\text{设 } u=\frac{y}{x},\text{则}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}.$$

两边积分得 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$, $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx$.

则所求的特解为

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=x.$$

例 6 求 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x-2}{y+x+4}$ 的通解.

解 设 $\begin{cases}x=\zeta+\alpha\\ y=\eta+\beta\end{cases}$,则 $\frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{\eta-\zeta+\beta-\alpha-2}{\eta+\zeta+\alpha+\beta+4}$,

令$\begin{cases}\beta-\alpha-2=0\\ \beta+\alpha+4=0\end{cases}$, $\Rightarrow \alpha=-3,\ \beta=-1.$

$$\therefore \frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{\eta-\zeta}{\eta+\zeta},$$

这是齐次方程,解之$\sqrt{\zeta^2+\eta^2}=Ce^{-\arctan\frac{\eta}{\zeta}}$,

即$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}=Ce^{-\arctan\frac{y+1}{x+3}}$.

例7 若$f(x)$二阶连续可微，$f'(1)=1, f(1)=\frac{1}{8}$，求$u(x,y)$，使得

$$du=[xf'(x)-4f(x)]dy+4yf'(x)dx.$$

解 这里 $P(x,y)=4yf'(x), Q(x,y)=xf'(x)-4f(x)$,

令 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则有 $f''(x)-\frac{7f'(x)}{x}=0$,

即 $\frac{df'(x)}{f'(x)}=\frac{7dx}{x} \Rightarrow f'(x)=C_1x^7$,

$$\therefore f(x)=\frac{C_1}{8}x^8+C_2,$$

再利用初始条件，则$C_1=1, C_2=0$,

于是进一步计算知 $u(x,y)=\frac{1}{2}x^8y+C$. ▌

例8 设函数$f(x)$在正实轴上连续，且等式

$$\int_1^{xy} f(t)dt=y\int_1^x f(t)dt+x\int_1^y f(t)dt$$

对任何正数x, y都成立，又$f(1)=3$，求 $f(x)$.

解 固定x，对y求导，

$$xf(xy)=\int_1^x f(t)dt+xf(y),$$

令$y=1$，由$f(1)=3$可知

$$xf(x)=\int_1^x f(t)dt+3x,$$

两边再对x求导，整理得 $f'(x)=\frac{3}{x}$，于是有

$$f(x)=3\ln x+c,$$

由$f(1)=3$可知$c=3$，因此$f(x)=3\ln x+3$. ▌

例9 求微分方程 $xy'\ln x-y=1+\ln^2 x$的通解.

解 将方程改写为

$$y'-\frac{y}{x\ln x}=\frac{1+\ln^2 x}{x\ln x},$$

$$y=e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}[\int\frac{1+\ln x^2}{x\ln x}\cdot e^{\int-\frac{dx}{x\ln x}}dx+C]$$

$$=|\ln x|(\int\frac{1+\ln^2 x}{x\ln x\cdot|\ln x|}dx+C)$$

$$=\pm\ln x(\pm\int\frac{d\ln x}{\ln^2 x}\pm\int\frac{dx}{x}+C)$$

$$=\pm\ln x(\mp\frac{1}{\ln x}\pm\ln x+C)$$

$$=-1+\ln^2 x+C_1\ln x \quad (C_1=\pm C).$$ ▌

例 10 求方程 $y^2dx=(x+y^2e^{y-\frac{1}{y}})dy$ 的满足条件$y(0)=1$的特解.

解 该方程关于y为未知数是非线性的，但是关于x却是线性的，把方程化为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y^2}=e^{y-\frac{1}{y}},$$

则 $$x=e^{\int\frac{1}{y^2}dy}[\int e^{y-\frac{1}{y}dy}\cdot e^{\int-\frac{1}{y^2}dy}dy+C]$$

$$=e^{-\frac{1}{y}}[\int e^y dy+C]$$

$$=e^{y-\frac{1}{y}}+Ce^{-\frac{1}{y}}.$$ ▌

例11 求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2y^6$ 的通解.

解 这是$n=6$的伯努利方程，代入公式得

$$y^{1-6}=e^{-\int(1-6)\frac{1}{x}dx}[\int(1-6)\cdot x^2e^{\int(1-6)\frac{1}{x}dx}dx+C]$$

$$y^{-5}=e^{5\ln x}[\int-5x^2\cdot\frac{1}{x^5}dx+C]$$

$$=x^5(\frac{5x^{-2}}{2}+C).$$ ▌

例 12 求 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3y}{x^4+y^2}, y(1)=1$ 的特解.

解 把方程改写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^4+y^2}{2x^3y}=\frac{1}{2y}x+\frac{y}{2}x^{-3},$$

即 $$x'-\frac{1}{2y}x=\frac{y}{2}x^{-3},$$

这是关于$n=-3$的伯努利方程

$$x^4=e^{-\int\frac{-4}{2y}dy}[\int 4\cdot\frac{y}{2}e^{\int\frac{-4}{2y}dy}dy+C]$$

$$=y^2(2\int y\cdot y^{-2}dy+C]=y^2(2\ln y+C).$$

由于有$y(1)=1$，$C=1$，则

$$x^4=y^2(1+2\ln y).$$ ▌

例13 若$y=e^x$是方程 $x\frac{dy}{dx}+p(x)y=x$的一个解，求满足 $y(\ln 2)=0$ 的特解.

解 首先，求出未知函数$p(x)$,把$y=e^x$代入原方程有 $p(x)=x(e^{-x}-1)$,于是有 $y'+(e^{-x}-1)y=1$

这是一个一元线性非齐次方程，于是

$$y=e^{\int\frac{-1+e^x}{e^x}dx}[\int 1\cdot e^{\int\frac{1-e^x}{e^x}dx}dx+C]$$

$$=Ce^{x+e^{-x}}+e^x.$$

由于$y(\ln 2)=0$可得$C=-e^{\frac{-1}{2}}$,

故所求特解为 $y=e^x-e^{e^{-x}+x-\frac{1}{2}}$.

例14 若 $\int_0^1 f(ux)du=\frac{1}{2}f(x)+1$,求$f(x)$.

解 设 $ux=t$,则 $du=\frac{dt}{x}$,当 $u=0, t=0$;当$u=1, t=x$.

$$\int_0^x f(t)\frac{dt}{x}=\frac{1}{2}f(x)+1,$$

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{xf(x)}{2}+x,$$

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x},$$

因此 $$f(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}[\int\frac{-2}{x}e^{\int\frac{-dx}{x}}dx+C]$$

$$=2+Cx.$$

例 15 设 $f(x)$ 在[0，$+\infty$）上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b>0$,又$a>0$,

证明方程 $\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$的一切解 $y(x)$,均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\frac{b}{a}$.

解 方程 $\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$ 的解为

$$y=e^{-ax}[C+\int_0^x f(t)e^{at}dt],$$

于是 $$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{C+\int_0^x f(t)e^{at}dt}{e^{ax}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{ax}}{ae^{ax}}=\frac{b}{a}.$$

例 16 若曲线过点$N(1,1)$, 曲线上任意一点$P(x,y)$处的切线与 Oy 轴交于Q, 经PQ为直径做的圆过$A(1,0)$，求此曲线方程.

解 过点$P(x,y)$的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$.

令 $x=0$, 则点$Q(0, y-xy')$,线段PQ的中点$M(\frac{x}{2},y-\frac{xy'}{2})$,

由于$MQ=MA$, 则

$$(0-\frac{x}{2})^2+[(y-xy')-(y-\frac{xy'}{2})]^2=(1-\frac{x}{2})^2+[0-(y-\frac{xy'}{2})]^2.$$

整理得 $$y'-\frac{1}{x}y=(\frac{1}{x}-1)y^{-1},$$

这是 $n=-1$的伯努力方程，解之得

$$y^2=Cx^2+2x-1.$$

考虑到 $y(1)=1$,则 $C=0$，于是所求曲线为

$$y^2=2x-1.$$

例 17 求方程 $y'''=\frac{\ln x}{x^2}$满足初始条件$y|_{x=1}=0$, $y'|_{x=1}=1, y''|_{x=1}=2$的特解.

解 $y''=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1$, $\because y''(1)=2$, $\therefore C_1=3$,

$$y'=\int(3-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x})dx=3x-\frac{\ln^2 x}{2}-\ln x+C_2,$$

$\because y'(1)=1$, $\therefore C_2=-2$,

$$y=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{x\ln^2 x}{2}+C_3,$$

$\because y(1)=0$, $\therefore C_3=\frac{1}{2}$,

$$y=\frac{3x^2}{2}-2x-\frac{x\ln^2 x}{2}+\frac{1}{2}.$$

例 18 解方程 $(1+x^2)y''=2xy'$.

解 设 $y'=p$，则原方程可化为

$$\frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{1+x^2},$$

积分得 $$p=C_1(1+x^2),$$

即 $$y'=C_1(1+x^2),$$

再积分得原方程的通解为

$$y=C_1x+\frac{C_1}{3}x^3+C_2.$$

例 19 解方程 $yy''-y'^2=y^2\ln y.$

解 由于 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=(\dfrac{y'}{y})'=(\ln y)''$,

设 $z=\ln y$, 则 $z''=z$,

其特征根是1，-1，所以

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

即 $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. ▌

例 20 求方程 $x''+(4y+e^{2x})(x')^3=0$的通解.

解 $x'=\dfrac{1}{y'}$, $x''=\dfrac{-1}{y'^2}\cdot y''\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$,

代入原方程得

$$y''-4y=e^{2x},$$

解这个微分方程，得其通解为

$$y=Ce^{-2x}+De^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}.$$ ▌

例 21 求微分方程 $(y''')^2+(y'')^2=1$适合条件 $y(0)=0, y'0)=1, y''(0)=0$ 的特解.

解 设 $y''=p$, 则原方程化为 $p'=\pm\sqrt{1-p^2}$,

解之 $\arcsin p=\pm x+C_1$.

由于 $p(0)=y''(0)=0$, 因此$C_1=0$.

$$y''=\pm\sin x.$$

积分两次有 $y=\mp\sin x+C_2x+C_3$.

因为$y(0)=0$, $y'(0)=1$, 所以

$$y=2x-\sin x或y=\sin x.$$ ▌

例 22 求方程 $\dfrac{d^2y}{d^2x}=\dfrac{2y-1}{y^2+1}(\dfrac{dy}{dx})^2$的通解.

解 设 $y'=p$,则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$, 原方程可化为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{2y-1}{y^2+1}p^2,$$

当$p=0$时，$y=C$是方程的解，当$p\neq 0$时，有

$$\frac{dp}{p}=\frac{2y-1}{y^2+1}dy,$$

积分得

$$p=y'=C_1(y^2+1)e^{-\arctan y}, 或C_1dx=\frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}dy,$$

$$C_1x=e^{\arctan y}+C_2, (y=C也包含于此通解中).$$ ▌

例 23 若一曲线上各点的曲率与该点纵坐标的平方成反比,比例系数为 a , 且曲线经过点$(0, a)$, 并在$(0, a)$处的切线平行于Ox 轴,求曲线方程.

解 依题意有 $\begin{cases}\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{a}{y^2}, \\ y(0)=a, y'(0)=0\end{cases}$

设$y'=p$, 则$y''=p\frac{dp}{dy}$, 于是

$$y^2p\frac{dp}{dy}=a(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

分离变量，解之得 $\dfrac{-1}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{-a}{y}+C_1$,

由$p|_{y=a}=0$知$C_1=0$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{y}, 或p^2=\frac{y^2-a^2}{a^2},$$

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a},$$

$$arch\frac{y}{a}=\frac{y}{a}+C_2,$$

由于$y(0)=a$可得$C_2=0$.

于是原方程的通解为 $y=arch\dfrac{x}{a}$. ▌

例 24 设物体 A 从点(0,1)出发以常速度 v 沿 y 轴正向运动,物体B以常速度 $2v$ 从 点 (-1,0) 与A同时出发,方向始终指向A .试建立物体 B运动轨迹所满足的微分方程.

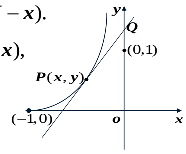
解 在时刻 t, 物体B位于$P(x,y)$, $Q(0,vt+1)$,

过 $P(x,y)$的切线方程是 $Y-y=y'(X-x)$.

代入点$Q(0,vt+1)$,有 $vt+1-y=y'(0-x)$,

即 $vt=y-1-xy'$,

由弧长公式 $2vt=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}dx$,



$$2(y-1-xy')=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}dx,$$

求导得 $2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0$,

所求方程为 $\begin{cases} 2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$

例 25 求方程 $\begin{cases} y''-3y'-4y=0 \\ y\big|_{x=0}=0 \\ y'\big|_{x=0}=-5 \end{cases}$ 的特解.

解 特征方程 $r^2-3r-4=0$, $\therefore$ $r_{1,2}=-1,4$.

原方程的通解 $y_1=Ce^{-x}+De^{4x}$,

则$y_1'=-Ce^{x}+4De^{4x}$,

代入初始条件，解得 $C=1, D=-1$.

于是原方程的特解为

$$y=e^{-x}-e^{4x}.$$

例 26 求方程 $y''-7y'+6y=\sin x$的通解.

解 不难求出特征根为1，6，对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=Ce^{x}+De^{6x}$,

可以判断出其特解为 $y^*=A\sin x+B\cos x$,

$$(y^*)'=A\cos x-B\sin x,\ (y^*)''=-A\sin x-B\cos x.$$

代入初始条件解得

$$A=\frac{5}{74}, B=\frac{7}{74},$$

$$y=\bar{y}+\frac{5\sin x}{74}+\frac{7\cos x}{74}$$

$$=Ce^{x}+De^{6x}+\frac{5\sin x}{74}+\frac{7\cos x}{74}.$$

例 27 解方程 $y''-4y'+4y=8x^2+e^{2x}+\sin 2x$.

解 不难求出方程的特征根为2，2.

方程 $y''-4y'+4y=8x^2$ 的特解 $y_1^*=Ax^2+Bx+C$;

方程$y''-4y'+4y=e^{2x}$ 的特解 $y_2^*=Dx^2e^{2x}$;

方程 $y''-4y'+4y=\sin 2x$的特解 $y_3^*=E\cos 2x+F\sin 2x$.

原方程的特解 $y^*=y_1^*+y_2^*+y_3^*$

代入初始条件，并解方程组，求得

$$A=2, B=4, C=3, D=\frac{1}{2}, E=\frac{1}{8}, F=0.$$

$$y^*=2x^2+4x+3+\frac{x^2e^{2x}}{2}+\frac{\cos 2x}{8};$$

原方程的通解为 $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+y^*$.

***例28** 设$y_1=\varphi(x)$是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的一个解,若$y_2=y_1u(x)$,求出此方程的另一个与 y_1线性无关的解,并写出所给方程的通解.

解 $y_2=y_1u(x)=\varphi(x)u(x)$,则把 y_2, y_2', y_2''代入原方程,

$$\varphi u''+(2\varphi'+P\varphi)u'+(\varphi''+P\varphi'+Q\varphi)u=0.$$

由于 $y=\varphi(x)$ 是原方程的解，故

$$\varphi''+P\varphi'+Q\varphi=0,$$

$$\varphi u''+(2\varphi'+P\varphi)u'=0.$$

$$\frac{du'}{u'}=(-P-\frac{2\varphi'}{\varphi})dx,$$

$$u'=\frac{C_1e^{\int -Pdx}}{\varphi^2},$$

$$u=C_1\int\frac{e^{\int -Pdx}}{\varphi^2}+C_2,$$

令 $C_1=1, C_2=0$,

$$y_2=\varphi\int\frac{e^{\int -Pdx}}{\varphi^2}dx$$ （与$y_1=\varphi(x)$线性无关），

原方程的通解为

$$y=\varphi(C_1+C_2\int\frac{e^{\int -Pdx}}{\varphi^2}dx).$$

例 29 设 $y(x)$ 是 x的连续可微函数,且满足

$$x\int_0^x y(t)dt=(x+1)\int_0^x ty(t)dt,\text{求}y(x).$$

解 两边对 x 求导, 得到

$$xy(x)+\int_0^x y(t)dt=(x+1)xy(x)+\int_0^x ty(t)dt,$$

整理即 $\int_0^x y(t)dt=x^2y(x)+\int_0^x ty(t)dt,$

再求导，并整理得到微分方程

$$\frac{dy}{y}=\frac{1-3x}{x^2}dx,$$

解之得 $\ln y=-\frac{1}{x}-3\ln x+\ln C$,

即 $y=\frac{Ce^{-\frac{1}{x}}}{x^3},$

$$\because \lim_{x\to+0} y(x)=0, \therefore\ y=\begin{cases}\frac{C}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$ ■

例 30 若可微函数$f(x)$ 满足方程

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t^3f(t)+t}dt=f(x)-1,\text{求 } f(x)\text{的无积分的表达式.}$$

解 由所给方程可知 $f(1)=1$,两边对 x 求导, 得

$$\frac{f(x)}{x^3f(x)+x}=f'(x),$$

记 $y=f(x)$, 则上述方程化为 $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=x^3,$

这是关于 $n=3$ 的伯努力方程.

则 $x^{1-3}=e^{-\int\frac{2dy}{y}}[\int(-2)e^{\int\frac{2dy}{y}}dy+C],$

整理即 $x^{-2}=\frac{C}{f^2(x)}-\frac{2f(x)}{3}.$

因$(1)=1$，则$C=\frac{5}{3}$，因此$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{2f^3(x)}{3}=\frac{5}{3}$. ■

例 31 设函数$f(x)$ 满足 $xf'(x)-3xf(x)=-6x^2$，求由曲线$y=f(x)$, $x=1$与x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周的旋转体的体积最小.

解 原方程可化为

$$f'(x)-\frac{3}{x}f(x)=-6x,$$

$$y=f(x)=e^{\int\frac{3dx}{x}}[\int(-6x)e^{-\int\frac{3dx}{x}}dx+C]=Cx^3+6x^2.$$

旋转体的体积为 $V(C)=\pi\int_0^1 y^2(x)dx$

$$=\pi\int_0^1(Cx^3+6x)^2dx$$

$$=\pi(\frac{C^2}{7}+2C+\frac{36}{5}).$$

令 $V'(C)=0,\quad \therefore C=-7.$ 又 $V''(C)=\frac{2\pi}{7}>0,$

所以$V(C)$在此唯一驻点处取最小值，所求函数为

$$f(x)=6x^2-7x^3.$$ ■

例 32 若$f(x)$ 可微, $f'(0)=0$, 对任何x, y, 有

$$f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x),\text{求}f(x).$$

解 令 $y=0$, 则 $f(x)=e^xf(0)+f(x),\ f(0)=0.$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^xf(h)+e^hf(x)-f(x)}{h}$$

$$=e^x\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+f(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}$$

$$=e^xf'(0)+f(x)$$

$$=2e^x+f(x).$$

解方程 $f'(x)-f(x)=2e^x,$

得通解 $f(x)=2xe^x+Ce^x,$

代入条件 $f(0)=0$, 则 $C=0$, 所以

$$f(x)=2xe^x.$$ ■

例 33 若 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$

是某二阶非齐次线性方程的三个解，求这个微分方程.

解 由线性方程的理论可知

$\overline{Y}_1=y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x}$ 是对应齐次方程的解，

$\overline{Y}_2=y_1-y_3=e^{-x}$ 也是对应齐次方程的解，

所以 $\overline{Y}_3=\overline{Y}_1+\overline{Y}_3=e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解，

于是 e^{2x}, e^{-x} 都是对应的齐次方程的解，

不难写出这个齐次方程为（因为特征根是-1和2）

$$y''-y'-2y=0.$$

设所求的非齐次方程为

$$y''-y'-2y=f(x),$$

代入 $y_1=xe^x+e^{2x},$

则 $f(x)=e^x-2xe^x,$

所以所求线性非齐次方程为

$$y''-y'-2y=e^x-2xe^x.$$ ■

例 34 连续函数$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$,求$f(x)$.

解 将 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$ 改写为

$$f(x)=\sin x - x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$$

对 x 求导, 得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

再对 x 求导

$$f''(x)+f(x)=-\sin x$$

显然 $f(0)=0, f'(0)=1,$

不难解得这个非齐次线性方程的通解为

$$f(x)=C\sin x+D\cos x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

所以

$$f'(x)=C\cos x-D\sin x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x.$$

代入条件 $f(0)=0, f'(0)=1$, 则

C= ½ , *D*=0 . 所以

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

例 35 设函数$f(x)$ 在[1，+∞]上连续，直线 $x=1$, $x=t$ $(t>1)$ 与 x 轴所年围成的平面图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积为

$$V=\frac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)],\ f(2)=\frac{2}{9},\text{求}y=f(x).$$

解 一方面，由已知得

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)]\cdots\cdots(1)$$

另一方面，

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)dx\cdots\cdots(2)$$

于是由（1）和（2）得到

$$3\int_1^t f^2(x)dx=t^2 f(t)-f(1).$$

再求导，得

$$3f^2(t)=2tf(t)+t^2 f'(t),$$

即 $\frac{dy}{dx}=3\cdot(\frac{y}{x})^2-2\cdot\frac{y}{x},\ \ y(2)=\frac{2}{9}.$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $x\frac{du}{dx}=3u(u-1).$

当 $u\neq 0$, $u\neq 1$ 时，解得

$$1-\frac{1}{u}=Cx^3,\quad \text{即}\quad y-x=Cx^3 y.$$

再代入初始条件确定常数$C=-1$,

于是所求的特解为

$$y-x=-x^3 y,$$

即

$$y=\frac{x}{1+x^3}.$$