线性代数

第五章　向量空间

主讲人：张远征、张震峰、钱晓明

上海财经大学应用数学系

May 31, 2010

本章主要内容

1. 向量空间、基、维数;
2. 坐标与坐标变换;
3. 向量的内积、正交矩阵.

本章主要内容

1. 向量空间、基、维数;
2. 坐标与坐标变换;
3. 向量的内积、正交矩阵.

本章主要内容

1. 向量空间、基、维数;
2. 坐标与坐标变换;
3. 向量的内积、正交矩阵.

目录

1.向量空间的定义

定义1—向量空间

设V为n维向量的非空集合，若V满足：

(1) 加法封闭： 若$\alpha, \beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$;

(2) 数乘封闭： 若$\alpha \in V, k \in \mathbb{R}$，则$k\alpha \in V$，

则称V为一向量空间.

例1 $V_1 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例2 $V_2 = \{(1, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例3 由一个零向量构成的向量空间称为零空间;

例4 由全体n维实向量构成的向量空间记为$\mathbb{R}^n$.

1.向量空间的定义

定义1—向量空间

设V为n维向量的非空集合，若V满足:

(1) 加法封闭：若$\alpha, \beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$;

(2) 数乘封闭：若$\alpha \in V, k \in \mathbb{R}$，则$k\alpha \in V$，

则称V为一向量空间.

例1 $V_1 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例2 $V_2 = \{(1, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例3 由一个零向量构成的向量空间称为零空间;

例4 由全体n维实向量构成的向量空间记为$\mathbb{R}^n$.

定义1—向量空间

设V为n维向量的非空集合，若V满足：

(1) 加法封闭： 若$\alpha,\beta\in V$，则$\alpha+\beta\in V$;

(2) 数乘封闭： 若$\alpha\in V,k\in\mathbb{R}$，则$k\alpha\in V$，

则称V为一向量空间.

例1 $V_1=\{(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbb{R},i=2,3,\cdots,n\}$

例2 $V_2=\{(1,x_2,x_3,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbb{R},i=2,3,\cdots,n\}$

例3 由一个零向量构成的向量空间称为零空间;

例4 由全体n维实向量构成的向量空间记为$\mathbb{R}^n$.

定义1—向量空间

设V为n维向量的非空集合, 若V满足:

(1) 加法封闭: 若$\alpha, \beta \in V$, 则$\alpha + \beta \in V$;

(2) 数乘封闭: 若$\alpha \in V, k \in \mathbb{R}$, 则$k\alpha \in V$,

则称V为一向量空间.

例1 $V_1 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例2 $V_2 = \{(1, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例3 由一个零向量构成的向量空间称为零空间;

例4 由全体n维实向量构成的向量空间记为$\mathbb{R}^n$.

1.向量空间的定义

定义1—向量空间

设V为n维向量的非空集合，若V满足:

(1) 加法封闭: 若$\alpha, \beta \in V$, 则$\alpha + \beta \in V$;

(2) 数乘封闭: 若$\alpha \in V, k \in \mathbb{R}$, 则$k\alpha \in V$,

则称V为一向量空间.

例1 $V_1 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例2 $V_2 = \{(1, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \cdots, n\}$

例3 由一个零向量构成的向量空间称为零空间;

例4 由全体n维实向量构成的向量空间记为$\mathbb{R}^n$.

2.基与维数的定义

定义2—基与维数

设V是一个向量空间，如果V中的r个向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$满足

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) V中的任意向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量空间$V$的一组**基**，$r$称为$V$的**维数**, 记为$\dim V=r$，并称$V$为$r$维向量空间.

注1 注意空间维数与向量维数的区别;

注2 零空间没有基, 其维数规定为0;

注3 如果将V看成向量组, 则它的基事实上就是V的极大无关组.

2.基与维数的定义

定义2—基与维数

设V是一个向量空间，如果V中的r个向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$满足

(1) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) V中的任意向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为向量空间$V$的一组基，$r$称为$V$的维数, 记为$\dim V = r$，并称$V$为$r$维向量空间.

注1 注意空间维数与向量维数的区别;

注2 零空间没有基, 其维数规定为0;

注3 如果将V看成向量组, 则它的基事实上就是V的极大无关组.

定义2—基与维数

设V是一个向量空间，如果V中的r个向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$满足

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) V中的任意向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量空间$V$的一组**基**，$r$称为$V$的**维数**, 记为$\dim V=r$，并称$V$为$r$维向量空间.

注1 注意空间维数与向量维数的区别;

注2 零空间没有基, 其维数规定为0;

注3 如果将V看成向量组, 则它的基事实上就是V的极大无关组.

2.基与维数的定义

定义2—基与维数

设V是一个向量空间，如果V中的r个向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$满足

(1) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) V中的任意向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为向量空间$V$的一组基，$r$称为$V$的维数，记为$\dim V = r$，并称$V$为$r$维向量空间.

注1 注意空间维数与向量维数的区别;

注2 零空间没有基，其维数规定为0;

注3 如果将V看成向量组，则它的基事实上就是V的极大无关组.

定义3—子空间

设U为向量空间V的非空子集, 且U也构成向量空间, 则称U为V的一个子空间.

例1 V的平凡子空间：零空间和V本身。

例2 在实三维空间中，过原点的直线是一维子空间，通过原点的平面是二维子空间;

例3 在$\mathbb{R}^n$中，n元齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的全体解向量组成一个子空间，即$AX=\mathbf{0}$的解空间.

定义3—子空间

设U为向量空间V的非空子集，且U也构成向量空间，则称U为V的一个子空间.

例1 V的平凡子空间：零空间和V本身。

例2 在实三维空间中，过原点的直线是一维子空间，通过原点的平面是二维子空间；

例3 在$\mathbb{R}^n$中，n元齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的全体解向量组成一个子空间，即$AX=\mathbf{0}$的解空间.

定义3—子空间

设U为向量空间V的非空子集，且U也构成向量空间，则称U为V的一个子空间.

例1 V的平凡子空间：零空间和V本身。

例2 在实三维空间中，过原点的直线是一维子空间，通过原点的平面是二维子空间;

例3 在$\mathbb{R}^n$中，n元齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的全体解向量组成一个子空间，即$AX=\mathbf{0}$的解空间.

4.生成的子空间

定义4—生成的子空间

设$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$是$\mathbb{R}^n$的子集，记$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$为这组向量所有可能的线性组合构成的子集，即

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s|k_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,n\}$$

它是$\mathbb{R}^n$的一个子空间，称之为由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$**生成的子空间**.

生成的子空间的基与维数

1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大无关组是子空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$的一组基，
$\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$.
2. $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\subseteq L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示;
3. $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow$
$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_t$等价;
4. $\mathbb{R}^n$中的任意n个线性无关的向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$都是$\mathbb{R}^n$的基，且

$$\mathbb{R}^n=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

生成的子空间的基与维数

1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大无关组是子空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$的一组基,
   $\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$.
2. $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\subseteq L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示;
3. $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_t$等价;
4. $\mathbb{R}^n$中的任意n个线性无关的向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$都是$\mathbb{R}^n$的基, 且

$$\mathbb{R}^n=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

生成的子空间的基与维数

1. $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$的极大无关组是子空间$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$的一组基,
   $\dim L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$.
2. $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \subseteq L(\beta_1, \cdots, \beta_t) \Leftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_s$可由$\beta_1, \cdots, \beta_t$线性表示;
3. $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = L(\beta_1, \cdots, \beta_t) \Leftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$与$\beta_1, \cdots, \beta_t$等价;
4. $\mathbb{R}^n$中的任意n个线性无关的向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$都是$\mathbb{R}^n$的基，且

$$\mathbb{R}^n = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

生成的子空间的基与维数

1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大无关组是子空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$的一组基，
$\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$.
2. $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\subseteq L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示；
3. $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow$
$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_t$等价；
4. $\mathbb{R}^n$中的任意n个线性无关的向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$都是$\mathbb{R}^n$的基，且

$$\mathbb{R}^n=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

例

例1 设$\alpha_1 = (1, 0, -1, 2), \alpha_2 = (3, 0, -3, 6), \alpha_3 = (2, 0, 1, 4)$, 求$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的基与维数.

例2 设$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$, 证明:$L(\alpha_1, \alpha_2) = L(\alpha_3, \alpha_4)$

例3 $AX = \mathbf{0}$的解空间的基就是它的基础解系, 维数等于$n - r(A)$

例1 设$\alpha_1 = (1, 0, -1, 2), \alpha_2 = (3, 0, -3, 6), \alpha_3 = (2, 0, 1, 4)$, 求$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的基与维数.

例2 设$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$, 证明:$L(\alpha_1, \alpha_2) = L(\alpha_3, \alpha_4)$

例3 $AX = \mathbf{0}$的解空间的基就是它的基础解系, 维数等于$n - r(A)$

例

例1 设$\alpha_1=(1,0,-1,2),\alpha_2=(3,0,-3,6),\alpha_3=(2,0,1,4)$, 求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的基与维数.

例2 设$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+3\alpha_4=0\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0\end{cases}$, 证明:$L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\alpha_3,\alpha_4)$

例3 $AX=\mathbf{0}$的解空间的基就是它的基础解系, 维数等于$n-r(A)$

目录

定义1—坐标

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$n$维向量空间$V$一组基，则对$V$ 中的任意向量α，存在唯一数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

我们称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标，记作$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

2. 过渡矩阵

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$n$维向量空间$V$的两组基，它们之间的关系（基变换公式）为

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\
\beta_2 &= p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n &= p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n
\end{aligned}
$$

我们称表示矩阵$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$为由基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

注

记号约定:

(1) 线性表示: $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$写为:

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(2) 基变换公式: $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P.$

注

记号约定:

(1) 线性表示: $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$写为:

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(2) 基变换公式: $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P.$

坐标变换公式

坐标变换公式

设$\gamma \in V$在基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \cdots, \beta_n$下的坐标分别为$(x_1, \cdots, x_n)^T$和$(y_1, \cdots, y_n)^T$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

例

例1 给定$\mathbb{R}^3$中的两组基

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T,$$

$$\beta_1=(2,2,1)^T,\beta_2=(1,2,0)^T,\beta_3=(3,2,1)^T.$$

(1) 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(2) 若向量δ在β_1,β_2,β_3下的坐标为$(1,-2,1)^T$,
求δ在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标.

例1 给定$\mathbb{R}^3$中的两组基

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T,$$

$$\beta_1=(2,2,1)^T,\beta_2=(1,2,0)^T,\beta_3=(3,2,1)^T.$$

(1) 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(2) 若向量δ在β_1,β_2,β_3下的坐标为$(1,-2,1)^T$，求δ在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标.

例1 给定$\mathbb{R}^3$中的两组基

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T,$$

$$\beta_1=(2,2,1)^T,\beta_2=(1,2,0)^T,\beta_3=(3,2,1)^T.$$

(1) 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(2) 若向量δ在β_1,β_2,β_3下的坐标为$(1,-2,1)^T$，求δ在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标.

目录

1. 内积的定义与性质

定义1—内积

对任意$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 称

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \equiv \alpha^T \beta$$

为向量α与β的内积.

性质:

1. 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
2. 双线性性: $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$,并且$(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

1. 内积的定义与性质

定义1—内积

对任意$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$,
称

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \equiv \alpha^T \beta$$

为向量α与β的内积.

性质:

1. 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
2. 双线性性:
   $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$,并且$(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

1. 内积的定义与性质

定义1—内积

对任意$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 称

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \equiv \alpha^T \beta$$

为向量α与β的内积.

性质:

1. 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
2. 双线性性: $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$,并且$(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

1. 内积的定义与性质

定义1—内积

对任意$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$,称

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\equiv\alpha^T\beta$$

为向量α与β的**内积**.

性质:

1. 对称性: $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;
2. 双线性性:
   $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma),(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;
3. 正定性: $(\alpha,\alpha)\geq 0$,并且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

定义1—内积

对任意$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$,
称

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \equiv \alpha^T\beta$$

为向量α与β的内积.

性质:

1. 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
2. 双线性性:
   $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$,并且$(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

2. 向量的长度

1. 向量的长度: 称非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量α的长度或模. 记为$\|\alpha\|$, 即$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$.
2. 单位向量: 长度等于1的向量.
3. 单位化: $\alpha^0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$

1. 向量的长度: 称非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量α的长度或模. 记为$\|\alpha\|$, 即$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$.
2. 单位向量: 长度等于1的向量.
3. 单位化: $\alpha^0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$

2. 向量的长度

1. 向量的长度: 称非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量α的长度或模. 记为$\|\alpha\|$, 即$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$.
2. 单位向量: 长度等于1的向量.
3. 单位化: $\alpha^0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$

(1) 柯西-布涅柯夫斯基不等式:

$$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$$

其中等号成立$\Leftrightarrow \alpha,\beta$线性相关.

(2) 夹角:由

$$\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

决定的θ称为向量α与β间的夹角.

(3) 正交: 当$(\alpha,\beta)=0$, 即$\theta=\frac{\pi}{2}$时, 称向量α与β正交或垂直, 记为$\alpha\perp\beta$.

(1) 柯西-布涅柯夫斯基不等式:

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

其中等号成立$\Leftrightarrow \alpha, \beta$线性相关.

(2) 夹角:由

$$\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

决定的θ称为向量α与β间的夹角.

(3) 正交: 当$(\alpha, \beta) = 0$, 即$\theta = \frac{\pi}{2}$时, 称向量α与β正交或垂直, 记为$\alpha \perp \beta$.

3. 向量间的夹角与正交

(1) 柯西-布涅柯夫斯基不等式:

$$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$$

其中等号成立$\Leftrightarrow \alpha,\beta$线性相关.

(2) 夹角:由

$$\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

决定的θ称为向量α与β间的夹角.

(3) 正交: 当$(\alpha,\beta)=0$, 即$\theta=\frac{\pi}{2}$时, 称向量α与β正交或垂直, 记为$\alpha\perp\beta$.

4. 标准正交基

(1) 两两正交的非零向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 称为正交向量组.

(2) 正交向量组一定线性无关.

(3) 标准正交基: 由两两正交的单位向量构成的一组基称为标准正交基.

如果$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是向量空间$V$的标准正交基, 则

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix} (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \begin{pmatrix} (\eta_1, \eta_1) & (\eta_1, \eta_2) & \cdots & (\eta_1, \eta_n) \\ (\eta_2, \eta_1) & (\eta_2, \eta_2) & \cdots & (\eta_2, \eta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\eta_n, \eta_1) & (\eta_n, \eta_2) & \cdots & (\eta_n, \eta_n) \end{pmatrix} = I.$$

4. 标准正交基

(1) 两两正交的非零向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 称为正交向量组.

(2) 正交向量组一定线性无关.

(3) 标准正交基: 由两两正交的单位向量构成的一组基称为标准正交基.

如果$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是向量空间$V$的标准正交基, 则

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix} (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \begin{pmatrix} (\eta_1, \eta_1) & (\eta_1, \eta_2) & \cdots & (\eta_1, \eta_n) \\ (\eta_2, \eta_1) & (\eta_2, \eta_2) & \cdots & (\eta_2, \eta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\eta_n, \eta_1) & (\eta_n, \eta_2) & \cdots & (\eta_n, \eta_n) \end{pmatrix} = I.$$

4. 标准正交基

(1) 两两正交的非零向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 称为正交向量组.

(2) 正交向量组一定线性无关.

(3) 标准正交基: 由两两正交的单位向量构成的一组基称为标准正交基.

如果$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是向量空间$V$的标准正交基, 则

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix} (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \begin{pmatrix} (\eta_1, \eta_1) & (\eta_1, \eta_2) & \cdots & (\eta_1, \eta_n) \\ (\eta_2, \eta_1) & (\eta_2, \eta_2) & \cdots & (\eta_2, \eta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\eta_n, \eta_1) & (\eta_n, \eta_2) & \cdots & (\eta_n, \eta_n) \end{pmatrix} = I.$$

5. 施密特（Schmidt）正交化

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

(1) Schmidt正交化:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2, \cdots \\
\beta_s &= \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1}
\end{aligned}
$$

(2) 单位化:

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \cdots, \eta_s = \frac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$$

5. 施密特（Schmidt）正交化

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

(1) Schmidt正交化:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2, \cdots \\ \beta_s &= \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1}\end{aligned}$$

(2) 单位化:

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \cdots, \eta_s = \frac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$$

例

例1 确定k使向量$\alpha = (1, k, 2)^T, \beta = (2, 1, -3)^T$垂直.

例2 求与向量α_3与$\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1, 1)^T$都垂直的单位向量.

例3 将$\alpha_1 = (2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 2, 3)^T, \alpha_3 = (3, -1, 2)^T$化为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基.

例1 确定k使向量$\alpha = (1, k, 2)^T, \beta = (2, 1, -3)^T$垂直.

例2 求与向量α_3与$\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1, 1)^T$都垂直的单位向量.

例3 将$\alpha_1 = (2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 2, 3)^T, \alpha_3 = (3, -1, 2)^T$化为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基.

例1 确定k使向量$\alpha=(1,k,2)^T,\beta=(2,1,-3)^T$垂直.

例2 求与向量α_3与$\alpha_1=(1,0,2)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T$都垂直的单位向量.

例3 将$\alpha_1=(2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(3,-1,2)^T$化为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基.

6. 正交矩阵

定义2—正交矩阵

设A是n阶方阵，如果

$$AA^T = A^TA = I$$

则称A为n阶正交矩阵.

性质

(1) 正交矩阵的行列式等于± 1;

(2) 正交矩阵一定可逆，且$A^{-1} = A^T$;

(3) 设A为正交矩阵，则A^{-1}, A^T, A^*也是正交矩阵;

(4) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,但正交矩阵的和不一定是正交矩阵;

6. 正交矩阵

定义2—正交矩阵

设A是n阶方阵，如果

$$AA^T = A^TA = I$$

则称A为n阶正交矩阵.

性质

(1) 正交矩阵的行列式等于± 1;

(2) 正交矩阵一定可逆，且$A^{-1} = A^T$;

(3) 设A为正交矩阵，则A^{-1}, A^T, A^*也是正交矩阵;

(4) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,但正交矩阵的和不一定是正交矩阵;

定义2—正交矩阵

设A是n阶方阵，如果

$$AA^T = A^TA = I$$

则称A为n阶正交矩阵.

性质

(1) 正交矩阵的行列式等于± 1;

(2) 正交矩阵一定可逆，且$A^{-1} = A^T$;

(3) 设A为正交矩阵，则A^{-1}, A^T, A^*也是正交矩阵;

(4) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,但正交矩阵的和不一定是正交矩阵;

定义2—正交矩阵

设A是n阶方阵，如果

$$AA^T = A^TA = I$$

则称A为n阶正交矩阵.

性质

(1) 正交矩阵的行列式等于± 1;

(2) 正交矩阵一定可逆，且$A^{-1} = A^T$;

(3) 设A为正交矩阵，则A^{-1}, A^T, A^*也是正交矩阵;

(4) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,但正交矩阵的和不一定是正交矩阵;

6. 正交矩阵

定义2—正交矩阵

设A是n阶方阵，如果

$$AA^T = A^TA = I$$

则称A为n阶正交矩阵.

性质

(1) 正交矩阵的行列式等于± 1;

(2) 正交矩阵一定可逆，且$A^{-1} = A^T$;

(3) 设A为正交矩阵，则A^{-1}, A^T, A^*也是正交矩阵;

(4) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,但正交矩阵的和不一定是正交矩阵;

性质(续)

(5) 设A为正交矩阵, 则$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$;

(6) 设A为n阶正交矩阵, $\eta_1, \cdots, \eta_n$为标准正交向量组, 则$A\eta_1, \cdots, A\eta_n$也是标准正交向量组.

(7) n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$它的列 (行)向量组为$\mathbb{R}^n$标准正交基;

(8) 标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵.

性质(续)

(5) 设A为正交矩阵, 则$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$;

(6) 设A为n阶正交矩阵, $\eta_1, \cdots, \eta_n$为标准正交向量组, 则$A\eta_1, \cdots, A\eta_n$也是标准正交向量组.

(7) n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$它的列 (行)向量组为$\mathbb{R}^n$标准正交基;

(8) 标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵.

性质(续)

(5) 设A为正交矩阵, 则$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$;

(6) 设A为n阶正交矩阵, $\eta_1, \cdots, \eta_n$为标准正交向量组, 则$A\eta_1, \cdots, A\eta_n$也是标准正交向量组.

(7) n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$它的列 (行)向量组为$\mathbb{R}^n$标准正交基;

(8) 标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵.

性质(续)

(5) 设A为正交矩阵, 则$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$;

(6) 设A为n阶正交矩阵, $\eta_1, \cdots, \eta_n$为标准正交向量组, 则$A\eta_1, \cdots, A\eta_n$也是标准正交向量组.

(7) n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$它的列 (行)向量组为$\mathbb{R}^n$标准正交基;

(8) 标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵.

例

例1 设正交矩阵A的行列式$|A| < 0$, 证明:$|A + I| = 0$.