第七章
空间解析几何与向量代数

第一部分 向量代数

第二部分 空间解析几何

在三维空间中:

空间形式 — 点, 线, 面

⇅

数量关系 — 坐标, 方程(组)

基本方法 — 坐标法; 向量法

第七章

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

二、向量的线性运算

三、空间直角坐标系

四、利用坐标作向量的线性运算

五、向量的模、方向角、投影

一、向量的概念

向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 或 $\vec{a}$,或$\mathbf{a}$.

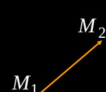
向量的模 : 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$,或 $|\mathbf{a}|$.

向径 (矢径): 起点为原点的向量.

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量,记作 $\vec{a}^{\circ}$ 或 $\mathbf{a}^{\circ}$.

零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$,或 $\mathbf{0}$.



若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$大小相等, 方向相同, 则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等, 记作 $\vec{a}=\vec{b}$;

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反, 则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 记作 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行 ;

与 $\vec{a}$ 的模相同, 但方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的负向量, 记作 $-\vec{a}$;

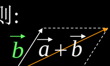
因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量共线 .

若 $k\,(\geq 3)$个向量经平移可移到同一平面上 , 则称此 k 个向量共面 .

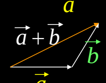
二、向量的线性运算

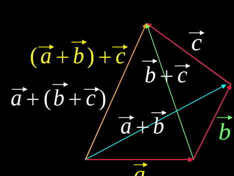
1. 向量的加法

平行四边形法则:



三角形法则:



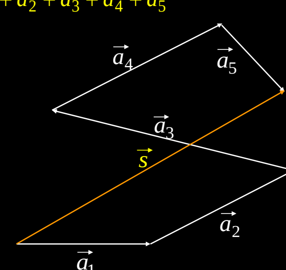


运算规律 : 交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5$

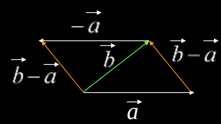


2. 向量的减法

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

特别当$\vec{b}=\vec{a}$时, 有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$



三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

3. 向量与数的乘法

λ 是一个数 , λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量, 记作 $\lambda\vec{a}$.

规定 : $\lambda>0$时, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向, $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda<0$时, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向, $|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda=0$时, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

运算律 : 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=\lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

若 $\vec{a}\ne\vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{a}^{\circ}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量 , 则

$$\vec{a}\,//\,\vec{b} \iff \vec{b}=\lambda\vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证: " $\longrightarrow$ ". 设 $\vec{a}//\vec{b}$, 取 $\lambda=\pm\,|\vec{b}|/|\vec{a}|$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同向时取正号, 反向时取负号, 则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向, 且

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

故 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性 . 设又有 $\vec{b}=\mu\vec{a}$, 则 $(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$

而 $|\vec{a}|\ne0$, 故 $|\lambda-\mu|=0$, 即 $\lambda=\mu$.

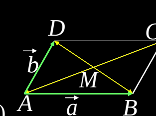
" $\longleftarrow$ " 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 则

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 }\lambda=0\text{ 时, }\vec{b}=\vec{0}\\ \text{当 }\lambda>0\text{ 时, }\vec{a},\vec{b}\text{ 同向}\\ \text{当 }\lambda<0\text{ 时, }\vec{a},\vec{b}\text{ 反向}\end{array}\right\}\Longrightarrow \vec{a}//\vec{b}$$

例1. 设 M 为▱$ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用$\vec{a}$与$\vec{b}$表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$

$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$



$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\quad \overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

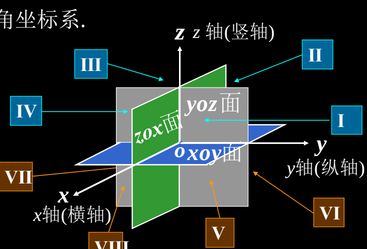
$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\quad \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

三、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)



在直角坐标系下

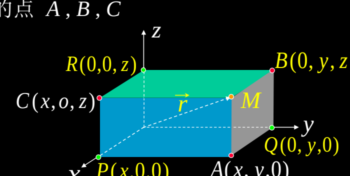
点 $M \overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ 有序数组$(x,y,z)\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ 向径 $\vec{r}$

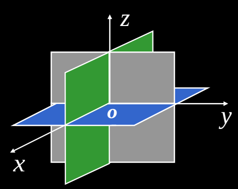
(称为点 M 的**坐标**)

特殊点的坐标 :

原点 $O(0,0,0)$; 坐标轴上的点 P, Q, R ;

坐标面上的点 A, B, C





坐标轴：

x轴 $\leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

y轴 $\leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$

z轴 $\leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

坐标面：

xoy面 $\leftrightarrow z=0$

yoz面 $\leftrightarrow x=0$

zox面 $\leftrightarrow y=0$

2. 向量的坐标表示

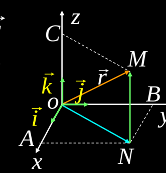
在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}\,/\!/\,\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x \\ b_y&=\lambda a_y \\ b_z&=\lambda a_z \end{aligned}}$$

例2. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2)$, $\vec{b}=(-1,1,-2)$.

解: 2×① −3×②，得

$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

例3. 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ 及实数 $\lambda\neq-1$，在AB直线上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

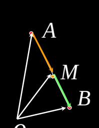
解: 设 M 的坐标为(x,y,z)，如图所示

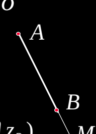
$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$





得 $$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$$

即 $$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

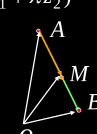
说明: 由

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

得**定比分点公式:**

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

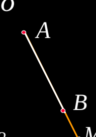
$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$



当 $\lambda=1$时，点 M 为 AB 的中点，于是得

中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

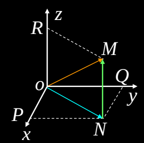


五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设 $\vec{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$



由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$，因

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式：

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例4. 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形 .

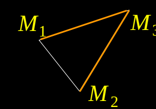
证:

$\because\ |M_1M_2|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$

$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$

$|M_1M_3|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$

$\therefore\ |M_2M_3|=|M_1M_3|$



即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形 .

例5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

解: 设该点为 $M(0,0,z)$，因为 $|MA|=|MB|$，

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$，故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

提示:

(1) 设动点为 $M(x,y,0)$，利用 $|MA|=|MB|$，得

$$14x+8y+28=0,\ \text{且}\ z=0$$

(2) 设动点为 $M(x,y,z)$，利用 $|MA|=|MB|$，得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例6. 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求 $\overrightarrow{AB}^{\circ}$.

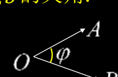
解: $\overrightarrow{AB}^{\circ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\varphi$

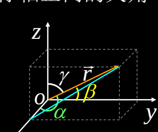


类似可定义向量与轴，轴与轴的夹角 .

给定 $\vec{r}=(x,y,z)\ne\vec{0}$，称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴正向的夹角 α,β,γ 为其**方向角**.

方向角的余弦称为其**方向余弦**.

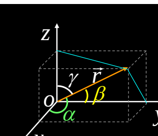
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量：

$$\vec{r}^{\circ}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

例7. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角 .

解: $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$

$=(-1,1,-\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\qquad \beta=\frac{\pi}{3},\qquad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例8. 设点 A 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=6$，求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，则

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\tfrac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限，故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$，于是

$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}^{\circ}=6(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{1}{2})=(3,3\sqrt{2},3)$$

故点 A 的坐标为 $(3,3\sqrt{2},3)$.

备用题

1. 设 $\vec m=3\vec i+5\vec j+8\vec k$，$\vec n=2\vec i-4\vec j-7\vec k$，$\vec p=5\vec i+\vec j-4\vec k$，求向量 $\vec a=4\vec m+3\vec n-\vec p$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解: 因 $\vec a=4\vec m+3\vec n-\vec p$

$$=4(3\vec i+5\vec j+8\vec k)+3(2\vec i-4\vec j-7\vec k)-(5\vec i+\vec j-4\vec k)$$

$$=13\vec i+7\vec j+15\vec k$$

故在 x 轴上的投影为 $a_x=13$

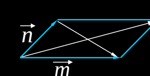
在 y 轴上的分向量为 $a_y\vec j=7\vec j$

2. 设 $\vec m=\vec i+\vec j$，$\vec n=-2\vec j+\vec k$，求以向量 $\vec m,\vec n$ 为边的平行四边形的对角线的长度 .

解: 对角线的长为 $|\vec m+\vec n|$，$|\vec m-\vec n|$

$\because\ \vec m+\vec n=(1,-1,1)$

$\vec m-\vec n=(1,3,-1)$



$\therefore\ |\vec m+\vec n|=\sqrt{3}$

$|\vec m-\vec n|=\sqrt{11}$

该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$