

习题课

第二章

导数与微分

一、导数和微分的概念及应用

二、导数和微分的求法

一、导数和微分的概念及应用

• 导数: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

当 $\Delta x \rightarrow 0^+$ 时, 为右导数 $f'_+(x)$

当 $\Delta x \rightarrow 0^-$ 时, 为左导数 $f'_-(x)$

• 微分: $df(x) = f'(x)dx$

• 关系: 可导 \iff 可微

• 应用:

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)' = 0; (\ln x)' = \frac{1}{x}; (\sin x)' = \cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分界点处的导数, 及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2) 用导数定义求极限

(3) 微分在近似计算与误差估计中的应用

例1. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + (\Delta x)^2) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x + (\Delta x)^2) - f(x_0)}{\Delta x + (\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right] \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

例2. 若 $f(1) = 0$ 且 $f'(1)$ 存在, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{(e^x - 1) \tan x}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x) = 1 \text{ 且 } f(1) = 0$$

联想到凑导数的定义式

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin^2 x + \cos x - 1) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \\ &= f'(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

例3. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$, 求 $f'(2)$.

解: $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \cdot \frac{f(x)}{(x-2)}] = 0$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 3 \end{aligned}$$

思考: P124 题2

例4. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$

试确定常数 a, b 使 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f'(x)$.

解: $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

$x < 1$ 时, $f'(x) = a$; $x > 1$ 时, $f'(x) = 2x$.

利用 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 得

$$\begin{cases} f(1^-) = f(1^+) = f(1) \\ f'_-(1) = f'_+(1) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a+b+1 = \frac{1}{2}(a+b+1) \\ a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$x < 1$ 时, $f'(x) = a$, $x > 1$ 时, $f'(x) = 2x$

$\therefore a = 2, b = -1, f'(1) = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

判别: $f'(x)$ 是否为连续函数?

例5. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$

处的连续性及可导性.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \implies f'(0) = 0$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

二、导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论 **界点** 处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 —— 对数微分法

(3) 参数方程求导法 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法 —— 逐次求导归纳;

间接求导法; 利用莱布尼兹公式.

例6. 设 $y = e^{\sin x} \sin e^x + f(\arctan \frac{1}{x})$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 y' .

解: $dy = \sin e^x d(e^{\sin x}) + e^{\sin x} d(\sin e^x) + f'(\arctan \frac{1}{x}) d(\arctan \frac{1}{x})$

$$= \sin e^x \cdot e^{\sin x} d(\sin x) + e^{\sin x} \cdot \cos e^x d(e^x) + f'(\arctan \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} d(\frac{1}{x})$$

$$= e^{\sin x} (\cos x \sin e^x + e^x \cos e^x) dx - \frac{1}{1+x^2} f'(\arctan \frac{1}{x}) dx$$

$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \dots$

例7. 设 $x \leq 0$ 时 $g(x)$ 有定义, 且 $g''(x)$ 存在, 问怎样选择 a, b, c 可使下述函数在 $x=0$ 处有二阶导数.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x > 0 \\ g(x), & x \leq 0 \end{cases}$$

解: 由题设 $f''(0)$ 存在, 因此

1) 利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 即 $f(0^+) = f(0^-) = f(0)$,

得 $c = g(0)$

2) 利用 $f'_+(0) = f'_-(0)$, 而

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'_-(0)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(ax^2 + bx + c) - g(0)}{x - 0} = b$$

得 $b = g'_-(0)$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x > 0 \\ g(x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$c = g(0) \quad b = g'_-(0)$$

3) 利用 $f''_-(0) = f''_+(0)$, 而

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g'(x) - g'_-(0)}{x - 0} = g''_-(0)$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2ax + b) - b}{x - 0} = 2a$$

$$\text{得 } a = \frac{1}{2} g''_-(0)$$

例8. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: 方程组两边对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2t + 2 \\ 2t - \frac{dy}{dt} + \varepsilon \cos y \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2(t+1) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)} \right)}{2(t+1)} \\ &= \frac{(1 - \varepsilon \cos y) - \varepsilon t (t+1) \sin y \frac{dy}{dt}}{2(t+1)^3 (1 - \varepsilon \cos y)^2} \\ &= \frac{(1 - \varepsilon \cos y)^2 - 2\varepsilon t^2 (t+1) \sin y}{2(t+1)^3 (1 - \varepsilon \cos y)^3} \end{aligned}$$