习题课 多元函数微分法

第八章

一、 基本概念

二、多元函数微分法

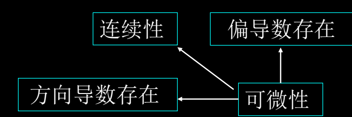
三、多元函数微分法的应用

一、 基本概念

1. 多元函数的定义、极限 、连续

- 定义域及对应规律
- 判断极限不存在及求极限的方法
- 函数的连续性及其性质

2. 几个基本概念的关系



思考与练习

1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 时, 下列算法**是否正确**?

解法1 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=0$

解法2 令 $y=kx$, 原式 $=\lim\limits_{x\to0}x\dfrac{k}{1+k}=0$

解法3 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,

原式 $=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=0$

分析:

解~~法~~1 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=0$

此法第一步排除了沿坐标轴趋于原点的情况, 第二步未考虑分母变化的所有情况, 例如, $y=\frac{x}{x-1}$时, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$, 此时极限为 1 .

解~~法~~2 令 $y=kx$, 原式 $=\lim\limits_{x\to0}x\dfrac{k}{1+k}=0$

此法排除了沿曲线趋于原点的情况. 例如 $y=x^2-x$时

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1$$

解~~法~~3 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,

$$原式=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=0$$

此法忽略了 θ 的任意性, 当 $r\to0, \theta\to-\frac{\pi}{4}$ 时

$$\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}$$ 极限不存在！

由以上分析可见, 三种解法都不对, 因为都不能保证自变量在定义域内以任意方式趋于原点 . 同时还可看到, 本题极限实际上不存在 .

特别要注意, 在某些情况下可以利用极坐标求极限, 但要注意在定义域内 r , θ 的变化应该是任意的.

2. 证明: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0) 处连续且偏导数存在 , 但不可微 .

提示: 利用 $2xy\le x^2+y^2$, 知

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$$

故 f 在 (0,0) 连续;

又因 $f(x,0)=f(0,y)=0$, 所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

而 $\quad \Delta f\big|_{(0,0)} = \dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$

当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 时,

$$\frac{\Delta f\big|_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$$

$$\not\to 0$$

所以 f 在点(0,0)不可微！

例1. 已知 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2 + \varphi(x+y)$, 且 $f(x,0) = x$, 求出 $f(x,y)$的表达式.

解法1 令 $u = x+y, v = x-y$, 则

$$x = \tfrac{1}{2}(u+v),\ y = \tfrac{1}{2}(u-v)$$

$$\therefore\ f(u,v) = \tfrac{1}{4}(u+v)^2 - \tfrac{1}{4}(u-v)^2 + \varphi(u) = uv + \varphi(u)$$

即 $\qquad f(x,y) = xy + \varphi(x)$

$$\Big\downarrow \because f(x,0) = x, \therefore \varphi(x) = x$$

$$f(x,y) = x(y+1)$$

解法2 $\because f(x+y, x-y) = (x+y)(x-y) + \varphi(x+y)$

$\therefore\ f(x,y) = xy + \varphi(x)$ 以下与解法1 相同.

二、多元函数微分法

1. 分析复合结构 $\begin{cases}\text{显示结构}\\ \text{隐式结构}\end{cases}$ (画变量关系图)

   自变量个数 = 变量总个数 – 方程总个数

   自变量与因变量由所求对象判定

2. 正确使用求导法则

   "分段用乘,分叉用加,单路全导,叉路偏导"

   注意正确使用求导符号

3. 利用一阶微分形式不变性

例2. 设 $z = xf(x+y), F(x,y,z) = 0$, 其中 f 与 F 分别具有一阶导数或偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. (99 考研)

解法1 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + xf'\cdot\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\\ F_1' + F_2'\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3'\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-xf'\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + xf'\\ F_2'\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3'\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -F_1'\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix}-xf' & f+xf'\\ F_2' & -F_1'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-xf' & 1\\ F_2' & F_3'\end{vmatrix}} = \frac{xF_1'f' - xF_2'f' - fF_2'}{-xf'F_3' - F_2'}$$

$$(xf'F_3' + F_2' \neq 0)$$

$\boxed{z = xf(x+y),\ F(x,y,z) = 0}$

解法2 方程两边求微分, 得

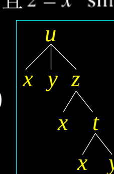
$$\begin{cases}\mathrm{d}z = f\,\mathrm{d}x + xf'\cdot(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\\ F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0\end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{化简}$$

$$\begin{cases}(f + xf')\mathrm{d}x + xf'\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0\\ F_1'\,\mathrm{d}x + F_2'\,\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0\end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}y$ 即可得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

例3. 设 $u = f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, 且 $z = x^2\sin t$, $t = \ln(x+y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.



解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_3'\cdot\left(2x\sin t + x^2\cos t\cdot\dfrac{1}{x+y}\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = f_{12}'' + f_{13}''\cdot\left(x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y}\right)$$

$$+\left[f_{32}'' + f_{33}''\cdot\left(x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y}\right)\right]\left(2x\sin t + \frac{x^2\cos t}{x+y}\right)$$

$$+ f_3'\cdot\left[2x\cos t\cdot\frac{1}{x+y} + x^2\frac{-\sin t\cdot\frac{1}{x+y}(x+y) - \cos t\cdot 1}{(x+y)^2}\right]$$

$$= \cdots$$

练习题

1. 设函数 f 二阶连续可微, 求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(1) $z = x f(\dfrac{y^2}{x})$

(2) $z = f(x + \dfrac{y^2}{x})$

(3) $z = f(x, \dfrac{y^2}{x})$

解答提示: 第 1 题

(1) $z = x f(\dfrac{y^2}{x})$: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x f'(\dfrac{y^2}{x}) \cdot \dfrac{2y}{x} = 2y f'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y f'' \cdot (-\frac{y^2}{x^2}) = -\frac{2y^3}{x^2} f''$$

(2) $z = f(x + \dfrac{y^2}{x})$: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \dfrac{2y}{x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} f' + \frac{2y}{x} f'' \cdot (1 - \frac{y^2}{x^2})$$

$$= -\frac{2y}{x^2} f' + \frac{2y}{x} (1 - \frac{y^2}{x^2}) f''$$

(3) $z = f(x, \dfrac{y^2}{x})$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x} f_2'$$

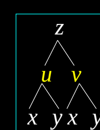
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} f_2' + \frac{2y}{x} (f_{21}'' - \frac{y^2}{x^2} f_{22}'')$$

P73 题12 设 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

提示: 由 $z = uv$, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \qquad ②$$



由 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, 得

$$\begin{cases} dx = e^u \cos v \, du - e^u \sin v \, dv \\ dy = e^u \sin v \, du + e^u \cos v \, dv \end{cases}$$

利用行列式解出 du, dv :

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & -e^u \sin v \\ dy & e^u \cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix}} = \underbrace{e^{-u} \cos v}_{\frac{\partial u}{\partial x}} dx + \underbrace{e^{-u} \sin v}_{\frac{\partial u}{\partial y}} dy$$

$$dv = -\underbrace{e^{-u} \sin v}_{\frac{\partial v}{\partial x}} dx + \underbrace{e^{-u} \cos v}_{\frac{\partial v}{\partial y}} dy$$

将 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 代入①即得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$;

将 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 代入②即得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数 , 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下两式确定

$$e^{xy} - xy = 2, \qquad e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$$

求 $\dfrac{du}{dx}$. (2001考研)

答案: $\dfrac{du}{dx} = f_1' - \dfrac{y}{x} f_2' + [1 - \dfrac{e^x (x-z)}{\sin(x-z)}] f_3'$

三、多元函数微分法的应用

1. 在几何中的应用

求曲线在切线及法平面 (关键: 抓住切向量)

求曲面的切平面及法线 (关键: 抓住法向量)

2. 极值与最值问题

- 极值的必要条件与充分条件
- 求条件极值的方法 (消元法, 拉格朗日乘数法)
- 求解最值问题
- 最小二乘法

3. 在微分方程变形等中的应用

例4. 在第一卦限作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 使其在三坐标轴上的截距的平方和最小, 并求切点.

解: 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, 切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则切平面的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_M=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

切平面方程

$$\frac{\cancel{2}x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{\cancel{2}y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{\cancel{2}z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$

切平面在三坐标轴上的截距为 $\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$

问题归结为求 $s=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2$

在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的条件极值问题 .

设拉格朗日函数

$$F=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$(x>0,\ y>0,\ z>0)$

令
$$\begin{cases} F_x=-2(\frac{a^2}{x})\frac{a^2}{x^2}+2\lambda\frac{x}{a^2}=0 \\ F_y=-2(\frac{b^2}{y})\frac{b^2}{y^2}+2\lambda\frac{y}{b^2}=0 \\ F_z=-2(\frac{c^2}{z})\frac{c^2}{z^2}+2\lambda\frac{z}{c^2}=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Longrightarrow \text{唯一驻点} \begin{cases} x=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}} \\ y=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}} \\ z=\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} \end{cases}$$

由实际意义可知 $M\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}},\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}},\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)$ 为所求切点 .

例5. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解: 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点, 则 P 到平面 $x+y-2z-2=0$ 的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$$

问题归结为

$$\begin{cases} \text{目标函数:}\ (x+y-2z-2)^2\ \ (\min) \\ \text{约束条件:}\ \ x^2+y^2-z=0 \end{cases}$$

作拉氏函数

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

令
$$\begin{cases} F'_x=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0 \\ F'_y=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0 \\ F'_z=2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

解此方程组得唯一驻点 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{8}$.

由实际意义最小值存在 , 故

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}$$

练习题:

1. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出该法线方程 .

提示: 设所求点为 (x_0, y_0, z_0), 则法线方程为

$$\frac{x-x_0}{y_0} = \frac{y-y_0}{x_0} = \frac{z-z_0}{-1}$$

利用 $\begin{cases} \dfrac{y_0}{1} = \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{-1}{1} & \text{法线垂直于平面} \\ z_0 = x_0 y_0 & \text{点在曲面上} \end{cases}$

得 $x_0 = -3$, $y_0 = -1$, $z_0 = 3$

2. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使与三坐标面围成的四面体体积最小,并求此体积.

提示: 设切点为(x_0, y_0, z_0), 则切平面为 **(见例4)**

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

所指四面体围体积 $V = \dfrac{1}{6}\dfrac{a^2b^2c^2}{x_0 y_0 z_0}$

V 最小等价于 $f(x, y, z) = x\,y\,z$ 最大, 故取拉格朗日函数

$$F = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

用拉格朗日乘数法可求出(x_0, y_0, z_0) .