第八章

第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

一、多元函数的极值

定义: 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\quad (\text{或 } f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$$

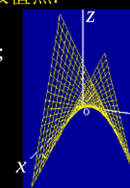
则称函数在该点取得极大值(极小值). 极大值和极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

例如 :

$z=3x^2+4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z=xy$ 在点 (0,0) 无极值.



定理1 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值 , 故

$z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得极值

$z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得极值

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为驻点 .

但驻点不一定是极值点.

例如, $z=xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则: 1) 当 $AC-B^2>0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定 , 需另行讨论.

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=12\times6>0,\ A>0,$

$\therefore f(1,0)=-5$ 为极小值;

在点(1,2) 处 $A=12,\ B=0,\ C=-6$

$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)$ 不是极值;

在点(–3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=-12\times6<0,\ \therefore f(-3,0)$ 不是极值;

在点(–3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$

$\therefore f(-3,2)=31$ 为极大值.

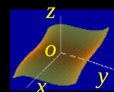
$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

例2. 讨论函数 $z=x^3+y^3$ 及 $z=(x^2+y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点，并且在 (0,0) 都有

$$AC-B^2=0$$

$z=x^3+y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值



可能为 $\begin{cases}\text{正}\\ \text{负}\\ 0\end{cases}$，因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$z=(x^2+y^2)^2>z|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2|_{(0,0)}=0$ 为极小值.

二、最值应用问题

依据

函数 f 在闭域上连续

$\Downarrow$

函数 f 在闭域上可达到最值

最值可疑点 $\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小(大)值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小(大)值

例3. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 x,y 米,则高为 $\frac{2}{xy}$ 米,

则水箱所用材料的面积为

$$A=2\left(xy+y\cdot\frac{2}{xy}+x\cdot\frac{2}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\quad\begin{pmatrix}x>0\\ y>0\end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases}A_x=2(y-\frac{2}{x^2})=0\\ A_y=2(x-\frac{2}{y^2})=0\end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$

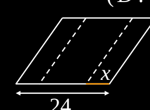
根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$

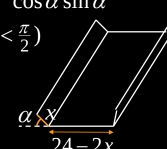
高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

例4. 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面面积最大.

解: 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α, 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D:0<x<12,\ 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2})$$





$$A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D:0<x<12,\ 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2})$$

令 $\begin{cases}A_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0\\ A_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\end{cases}$

$\Big\downarrow\ \sin\alpha\neq 0,\ x\neq 0$

$\begin{cases}12-2x+x\cos\alpha=0\\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\end{cases}$

解得: $\alpha=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\ x=8\,(\text{cm})$

由题意知, 最大值在定义域 D 内达到, 而在域 D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

三、条件极值

极值问题 $\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制}\\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外, 还有其它条件限制}\end{cases}$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如，

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

转化 $\Big\Downarrow$ 从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=\psi(x)$

求一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2 拉格朗日乘数法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

如方法 1 所述, 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$, 则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题, 故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $$\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

引入辅助函数 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

则极值点满足: $$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ F_\lambda=\varphi=0 \end{cases}$$

辅助函数*F* 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值.

设 $F=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$

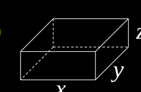
解方程组 $$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ F_z=f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ F_{\lambda_1}=\varphi=0 \\ F_{\lambda_1}=\psi=0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例5. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 x , y , z 分别表示长、宽、高, 则问题为求x , y , z 使在条件 $xyz=V_0$ 下水箱表面积 $S=2(xz+yz)+xy$ 最小.

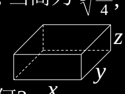
令 $F=2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V_0)$



解方程组 $$\begin{cases} F_x=2z+y+\lambda yz=0 \\ F_y=2z+x+\lambda xz=0 \\ F_z=2(x+y)+\lambda xy=0 \\ F_\lambda=xyz-V_0=0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda=\frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此 , 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x=y=z=\sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F=2(xz+yz)+2\,xy+\lambda(xyz-V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z=f(x,y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，设拉格朗日函数 $F = f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点 .

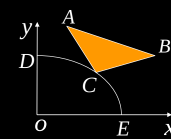
3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数，确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $(x>0, y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y),

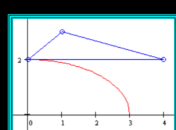
则 $S_\triangle = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$= \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ x-1 & y-3 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F = (x+3y-10)^2 + \lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10) - \frac{2\lambda}{9}x = 0 \\ 6(x+3y-10) - \frac{2\lambda}{4}y = 0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4} = 0 \end{cases}$



点击图中任意点
动画开始或暂停

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D = 2, S_C = 3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

补充题 **1.** 求半径为 R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为 x, y, z ,则

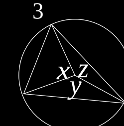
$x+y+z=2\pi$, $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

它们所对应的三个三角形面积分别为

$S_1 = \frac{1}{2}R^2\sin x$, $S_2 = \frac{1}{2}R^2\sin y$, $S_3 = \frac{1}{2}R^2\sin z$

设拉氏函数 $F = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x+y+z-2\pi)$

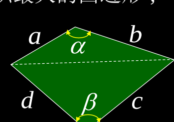
解方程组 $\begin{cases} \cos x + \lambda = 0 \\ \cos y + \lambda = 0 \\ \cos z + \lambda = 0 \\ x+y+z-2\pi = 0 \end{cases}$ ，得 $x=y=z=\frac{2\pi}{3}$



故圆内接正三角形面积最大，最大面积为

$S_{\max} = \frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

2. 求平面上以 a, b, c, d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件？



提示:

目标函数: $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta$

$(0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi)$

约束条件: $a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta$

答案: $\alpha+\beta=\pi$, 即四边形内接于圆时面积最大 .