第三节 分部积分法

第四章

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} &\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ \text{或}\quad &\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\}\text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得 ;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算 .

例1. 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = x,\ v' = \cos x$,

则 $u' = 1,\ v = \sin x$

$\therefore$ 原式 $= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$

$= x\sin x + \cos x + C$

思考: 如何求 $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$?

提示: 令 $u = x^2,\ v' = \sin x$, 则

原式 $= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

$= \cdots$

例2. 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \ln x,\ v' = x$

则 $u' = \frac{1}{x},\quad v = \frac{1}{2}x^2$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

例3. 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \arctan x,\ v' = x$

则 $u' = \frac{1}{1+x^2},\quad v = \frac{1}{2}x^2$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$

例4. 求 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \sin x,\ v' = e^x$, 则

$u' = \cos x,\ v = e^x$

$\therefore$ 原式 $= e^x\sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

再令 $u = \cos x,\ v' = e^x$, 则

$u' = -\sin x,\ v = e^x$

$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

故 原式 $= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

说明: 也可设 $u = e^x, v'$ 为三角函数 , 但两次所设类型必须一致 .

解题技巧: 选取 u 及 v' 的一般方法:

把被积函数视为两个函数之积 , 按 **"反对幂指三"** 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

例5. 求 $\int \arccos x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \arccos x,\ v' = 1$, 则

$u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad v = x$

原式 $= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$

$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

例6. 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln\cos x,\ v'=\frac{1}{\cos^2 x}$ ，则

$u'=-\tan x,\quad v=\tan x$

$$\text{原式}=\tan x\cdot\ln\cos x+\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\int(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$
$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\tan x-x+C$$

例7. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2,\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=2\int t\,e^t\,\mathrm{d}t$$

令 $u=t,\ v'=e^t$

$$=2(t\,e^t-e^t)+C$$
$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

例8. 求 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

解: 令 $u=\sqrt{x^2+a^2},\ v'=1$, 则 $u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\ v=x$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore\ \text{原式}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

例9. 求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: 令 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\ v'=1$, 则 $u'=\frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\ v=x$

$$\therefore\ I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

说明: 已知 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2$$
$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1\right)$$
$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例10. 证明递推公式

$$I_n=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}\quad(n\ge 2)$$

证: $I_n=\int\tan^{n-2}x\,(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$

$$=\int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)-I_{n-2}$$
$$=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$$

注: $I_n\to\cdots\to I_0$ 或 I_1

$$I_0=x+C,\quad I_1=-\ln|\cos x|+C$$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分；

2) 分部产生循环式，由此解出积分式；

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变，解出积分后加 C) 例4

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解:
$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x) = x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x = x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C = -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

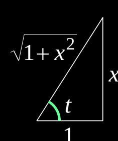
$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例12. 求 $I = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

解法1 先换元后分部

令 $t = \arctan x$, 即 $x = \tan t$, 则

$$I = \int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= e^t\sin t - \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= e^t\sin t + e^t\cos t - \int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$



故 $I = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)e^t + C$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x} + C$$

解法2 用分部积分法

$$\boxed{I = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x}$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}e^{\arctan x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}e^{\arctan x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}(1+x) - I$$
$$\therefore\ I = \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + C$$

内容小结

分部积分公式 $\int u v'\,\mathrm{d}x = u v - \int u' v\,\mathrm{d}x$

1. 使用原则： v 易求出, $\int u' v\,\mathrm{d}x$ 易积分

2. 使用经验：“**反对幂指三**” ，前 u 后 v'

3. 题目类型：

分部化简； 循环解出; 递推公式

4. 计算格式：

$$\begin{array}{ccc} u & & u' \\ & + \quad | \quad - \int & \\ v' & & v \end{array}$$

例13. 求 $I = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t = \ln x$, 则 $x = e^t$, $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$

$\therefore\ I = \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t \longrightarrow \boxed{= e^t\sin t - \int e^t\cos t\,\mathrm{d}t}$

$$\begin{array}{cccccc} \sin t & & \cos t & & -\sin t & \\ & + & & - & | & +\int \\ e^t & & e^t & & e^t & \end{array}$$

$= e^t(\sin t - \cos t) - I$

$\therefore\ I = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C$

$= \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

可用表格法求
多次分部积分

例14. 求 $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln x$, 则 $x=e^u$, $\mathrm{d}x=e^u\,\mathrm{d}u$

原式 $=\int e^{3u}u^4 e^u\,\mathrm{d}u=\int u^4 e^{4u}\,\mathrm{d}u$

u^4	$4u^3$	$12u^2$	$24u$	24	0
+	−	+	−	+	$-\int$
e^{4u}	$\frac{1}{4}e^{4u}$	$\frac{1}{4^2}e^{4u}$	$\frac{1}{4^3}e^{4u}$	$\frac{1}{4^4}e^{4u}$	$\frac{1}{4^5}e^{4u}$

原式 $=\frac{1}{4}e^{4u}(u^4-u^3+\frac{3}{4}u^2-\frac{3}{8}u+\frac{3}{32})+C$

$=\frac{1}{4}x^4(\ln^4 x-\ln^3 x+\frac{3}{4}\ln^2 x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32})+C$

思考与练习

1. 下述运算错在哪里? 应如何改正?

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\sin x}-\int(\frac{1}{\sin x})'\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\int\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x=1+\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$\therefore\ \int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=1$, 得 $0=1$ $\boxed{=\ln|\sin x|+C}$

答: 不定积分是原函数族 , 相减不应为 0 .
求此积分的正确作法是用换元法 .

2. 求 $I=\int e^{kx}\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$

提示:

$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$-a^2\cos(ax+b)$
+	−	$+\int$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$	$\frac{1}{k^2}e^{kx}$

备用题. 求不定积分 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部 , 再换元)

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}(e^x-1)$$

$$=2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{(e^x-1)}=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u\quad\boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2)$, $\mathrm{d}x=\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

故 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2\int\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int\frac{1+u^2-1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$