第三节 极限的运算

一、极限的运算法则

为便于叙述，以$x\to x_0$这种情况为例，对于$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，等其它情况，有完全类似的结论．

定理1.6 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

$$=A\pm B;$$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B;$

(iii) 若有$B\neq 0$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}$.

上述极限的四则运算法则是计算极限的基础．有时往往需要先将函数进行适当的代数运算，才能使用法则．

例1 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x^2-x}\right)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x(x-1)}$ （通分）

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x} \quad（消去零因子）$$

$$=2.$$

例2 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$.

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$ （分子有理化）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

$$=1.$$

例3 求$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$.

解：令$\sqrt[6]{x-1}=t$.

原式$=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2-1}{t^3-1}$ （变量代换）

$$=\lim_{t\to1}\frac{t+1}{t^2+t+1} \quad（消去零因子）$$

$$=\frac{2}{3}.$$

例4 求$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}$(其中$a>0$).

解：原式$=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^3-a^3}}+\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\cdot\sqrt{x^3-a^3}}+\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+a^2}}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2+ax+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{3a^2}}$$

$$=0+\frac{1}{\sqrt{3a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3a}.$$

类似问题 求$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x^2-a^2})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]$

$$=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x+a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时，分子，分母的极限都是无穷大．($\frac{\infty}{\infty}$型)

先用x^3去除分子分母，分出无穷小，再求极限．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

例6 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$，$m,n$为自然数.

解：因式分解

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1),$$

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1).$$

$\frac{x^m-1}{x^n-1}$在$x=1$处没有定义，但可以将$x-1$约去，从而有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\frac{m}{n}.$$

例7 证明 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

证：由于是讨论$x\to0$时的极限，因此我们可以限定$0<|x|<\frac{\pi}{2}$. 于是可得

$$0<|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}.$$

即

$$0<1-\cos x<\frac{x^2}{2}.$$

当$x\to0$时，$\frac{x^2}{2}\to0$，由夹逼定理有$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$，所以

$$\lim_{x\to0}\cos x=1.$$

定理1.7(复合函数的极限运算法则) 设函数$y=f[g(x)]$是由$y=f(u)$与$u=g(x)$复合而成，$f[g(x)]$在点x_0的某个去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在$\delta_0>0$，当$x$属于$x_0$的$\delta_0$某个去心邻域时，有$g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证：按函数极限的定义，我们需证：对任意的正数ε，存在正数δ，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$$

成立.

因为$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，对任意的正数$\varepsilon$，存在正数$\eta$，使得当$0<|u-u_0|<\eta$时，有$|f(u)-A|<\varepsilon$成立.

又因为$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，对于前面得到的正数$\eta$，存在正数$\delta_1$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，$|g(x)-u_0|<\eta$成立.

于是，当x属于x_0的δ_0某个去心领域时，$g(x)\neq u_0$.

取$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|g(x)-u_0|<\eta$及$|g(x)-u_0|\neq0$同时成立，即$0<|g(x)-u_0|<\eta$成立，从而

$$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$$

成立. 证毕.

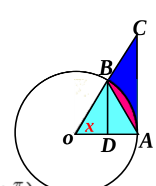
注：(i) 在定理中，把$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$换成$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，而把$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$换成$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，可得类似的定理.

(ii) 如果函数$f(u)$和$g(x)$满足该定理的条件，那么作代换$u=g(x)$可把求$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$化为求$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，这里$u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

二、两个重要极限

1. 第一个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$



设单位圆O，圆心角$\angle AOB=x(0<x<\frac{\pi}{2})$.

作单位圆的切线AC，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x，ΔOAB的高为BD，

于是有$\sin x=BD$，$x=$弧AB，$\tan x=AC$.

因为ΔAOB的面积<扇形AOB的面积<ΔAOC的面积，

所以 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot x<\frac{1}{2}\tan x$，即$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

由 $\lim\limits_{x\to0+}\cos x=1$及夹逼定理，得 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$成立.

接下来证明$x\to0^-$时$\frac{\sin x}{x}\to1$也成立.

因为

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}\quad(令x=-t)$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1,$$

于是$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，得证.

第一个重要极限可以推广为

$$\lim_{u(x)\to0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$$

其中$u(x)$是关于x的函数.

例8 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot5$

$=5.$

例9 求$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sin(x-4)}{\sqrt{x}-2}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to4}\frac{\sin(x-4)}{x-4}\cdot(\sqrt{x}+2)$

$=1\cdot4=4.$

例10 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac12\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$

$$=\frac12\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac12\cdot1^2=\frac12.$$

例11 求$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac1x$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac1x}{\frac1x}=1.$

例12 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}$.

解：因为

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}$不存在.

2. 第二个重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac1x)^x=e$

数e是个无理数，$e\approx2.71828\cdots$

证：分两步给出证明.

(1) 证明当x取正整数值n趋于∞时，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac1n)^n$存在，即考察数列$\{a_n\}=\left\{(1+\frac1n)^n\right\}$的收敛性.

由牛顿二项式定理，有

$$a_n=(1+\frac1n)^n$$
$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac1n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac1n)+\frac{1}{3!}(1-\frac1n)(1-\frac2n)+\cdots$$
$$+\frac{1}{k!}(1-\frac1n)(1-\frac2n)\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}(1-\frac1n)(1-\frac2n)\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

同理，$a_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots$$
$$+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

比较上面两个展开式，容易看出$a_n < a_{n+1}$，即说明了数列$\{a_n\}$是单调增加的.

又因为$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3,$$

表明$\{a_n\}$有上界. 根据单调有界数列必有极限，$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. 此极限值$e$是一个无理数.

(2) 下面证明对于连续自变量x，也有$\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.

当$x \to +\infty$时，存在n使得$n \le x < n+1$，那么有

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

于是

$$1 + \frac{1}{n} \ge 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

从而有$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{x})^x > (1 + \frac{1}{n+1})^n$

由于

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n}) = e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n+1})^{-1} = e.$$

因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.

当$x \to -\infty$时，令$x = -t$，则$t \to +\infty$. 于是

$$\lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1 - \frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t\to+\infty}(\frac{t-1}{t})^{-t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(1 + \frac{1}{t-1})^{t-1}(1 + \frac{1}{t-1})$$

$$= e$$

综上所述可得

$$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

第二个重要极限可以推广为

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$$

其中$u(x)$是关于x的函数.

例13 求$\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^{3x+5}$.

解：原式$= \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^{3x} \cdot (1 + \frac{1}{x})^5$

$$= e^3 \cdot 1 = e^3.$$

例14 求$\lim\limits_{x\to\infty}(1 - \frac{2}{x})^{5x}$.

解：原式$= \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{\frac{-x}{2}})^{-\frac{x}{2}(-10)} = e^{-10}$.

例15 确定c，使$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x = 4$.

解：

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{c}{x})^x}{(1-\frac{c}{x})^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{c}{x})^{\frac{x}{c}\cdot c}}{(1+\frac{c}{-x})^{\frac{-x}{c}\cdot(-c)}}$$

$$= \frac{e^c}{e^{-c}} = e^{2c}.$$

由$e^{2c} = 4$可得$c = \ln 2$.

在极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$中，如令$\frac{1}{x} = t$，则得到它的另一形式，即

$$\lim_{t\to0}(1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

上面重要极限可以推广为

$$\lim_{u(x)\to0}(1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e,$$

其中$u(x)$是关于x的函数.

例16 求$\lim\limits_{x\to0}(1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$.

解：原式$= \lim\limits_{t\to0}[1 + (-3x)]^{\frac{1}{-3x}(-3)} = e^{-3}$.

例17 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}\cdot\frac{2}{3}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=e^{\frac{2}{3}}.$$

三、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量的定义

定义1.12 以零为极限的变量，称为无穷小量．即如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$等)，则称当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$等)时，$\alpha(x)$是无穷小量，简称无穷小．

例如，当 $x\to 1$时，x^2-1是无穷小量．

当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{2^n}$是无穷小量．

显然，所谓无穷小量是针对自变量的某种变化趋势而言，它的极限必须是零．不要把无穷小与很小的数混为一谈．

因为无穷小是这样的函数，在自变量的某种变化趋势中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε，而很小的数可能不能小于任意给定的正数 ε．0是可以作为无穷小的惟一的常数．因为如果 $f(x)\equiv 0$，那么对于任意给定的正数 ε总有 $|f(x)|<\varepsilon$.

注：下面一些定理仅对 $x\to x_0$时给出叙述和证明，对 $x\to\infty$等情形定理也同样正确.

2. 无穷小量的性质

（1）有限个无穷小量的和、差仍为无穷小量；

（2）有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量；

（3）有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

以上性质均可利用极限的定义予以证明．

现仅证明性质(3)．

证：设 $f(x)$为有界函数，即存在正常数 M，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$时，有 $|f(x)|\le M$成立；又设当 $x\to x_0$时，$\alpha(x)$是无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$时，有

$$|\alpha(x)-0|<\frac{\varepsilon}{M}，即|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，那么，当 $0<|x-x_0|<\delta$时，我们有

$$|f(x)\cdot\alpha(x)-0|=|f(x)\cdot\alpha(x)|$$

$$=|f(x)|\cdot|\alpha(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

成立，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\alpha(x)=0$．即表示当 $x\to x_0$时，$f(x)\cdot\alpha(x)$是无穷小量．

此性质可以用来求某些函数的极限．

例18 求 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cos\frac{1}{x})$.

解：由于 $x\to 0$时，x^2是无穷小量．又因为 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$，$\cos\frac{1}{x}$是有界函数，所以

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cos\frac{1}{x})=0.$$

例19 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$

由于 $\sin x$是有界函数，且当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$是无穷小量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$.

注意，性质(1)和(2)必须对有限个无穷小量才成立．若是无限个无穷小量，就不一定成立了．

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})\ne 0$.

3. 无穷小量的比较

我们知道，有限个无穷小量的和、差和乘积仍旧是无穷小．但是，两个无穷小的商却不一定是无穷小量．例如当 $x\to 0$时，x^2、x、$\sin x$都是无穷小量，但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

下面引出无穷小量比较的概念．

定义1.13 设当$x \to x_0$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$都是无穷小量.

(i) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记作$\alpha=o(\beta)$. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小.

(ii) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$(不为零的常数)，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小. 特别地，如果$c=1$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小. 记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(iii) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小.

例20 证明：当$x\to 0$时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$.

证：因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

所以，当$x\to 0$时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$.

下面介绍两个定理.

定理1.8(等价无穷小的代换定理)设当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$和$\alpha_1(x)$是等价无穷小量，$\beta(x)$和$\beta_1(x)$是等价无穷小量，且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

证：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}&=\lim_{x\to x_o}\left[\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right]\\&=\lim_{x\to x_o}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\\&=1\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot 1\\&=\lim_{x\to x_o}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\end{aligned}$$

利用等价无穷小代换定理，可以简化极限的计算. 在极限计算中，常用到下列几组等价无穷小：当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

例21 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$.

解：由于$x\to 0$时，$\tan 3x\sim 3x$，$\sin 5x\sim 5x$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

例22 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+3x)}{1-\cos x}$.

解：由于$x\to 0$时，$\ln(1+3x)\sim 3x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{\frac{x^2}{2}}=6.$$

例23 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2+3x^4}-1}{\ln(1+x^2-x^3)}$.

解：由于$x\to 0$时，

$$\sqrt[4]{1+x^2+3x^4}-1\sim\frac{1}{4}(x^2+3x^4),$$

$$\ln(1+x^2-x^3)\sim x^2-x^3,$$

于是，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(x^2+3x^4)}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(1+3x^2)}{1-x}=\frac{1}{4}.$$

例24 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{x^3}-1}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{e^{x^3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(e^{x^3}-1)\cos x}$.

由于$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$e^{x^3}-1\sim x^3$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{x^3}-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3\cdot\cos x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

定理1.9 设α_1，β_1；α_2，β_2是两组在同一变化过程中的无穷小量，$\alpha_1\sim\beta_1$，$\alpha_2\sim\beta_2$，且$\lim\frac{\beta_1}{\beta_2}=a\neq-1$，则$\alpha_1+\alpha_2\sim\beta_1+\beta_2$.

证：因为$\lim\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}-1\right]=\lim\frac{(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)}{\beta_1+\beta_2}$

$$=\lim\frac{\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1\right)\beta_1+\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}-1\right)\beta_2}{\beta_1+\beta_2}$$

$$=\lim\frac{\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1\right)\frac{\beta_1}{\beta_2}+\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}-1\right)}{1+\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

$$=\frac{0\times a+0}{1+a}=0.$$

故$\lim\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}=1$，即$\alpha_1+\alpha_2\sim\beta_1+\beta_2$.

例25 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)+(1-\cos x)}{x\sin x}$

$$\overset{\text{代换}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\cdot x+\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}$$

$$=1.$$

例26 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+\tan x}-1)-(\sqrt{1-\tan x}-1)}{e^x-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\tan x-(-\frac{1}{2}\tan x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1.$$

例27 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}e^{-x}\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}e^{-x}\left(\dfrac{e^x-1}{\sin x}\right)^2$

$$=\lim_{x\to0}e^{-x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)^2=\lim_{x\to0}e^{-x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{x}\right)^2$$

$$=1\times1=1.$$

例28 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}e^{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x}$$

$$=e^0\times1=1$$

定理1.10 (具有极限的函数与无穷小量的关系)

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$. 其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小量.

证：先证必要性 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，于是有

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-A)=\lim_{x\to x_0}f(x)-A=A-A=0.$$

即当$x\to x_0$时，$f(x)-A$是无穷小量.

令$f(x)-A=\alpha(x)$，即$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是无穷小量（当$x\to x_0$时）.

再证充分性

设$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_o}\alpha(x)=0$，

于是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x))$

$$=A+\lim_{x\to x_0}\alpha(x)$$

$$=A.$$

4. 无穷大量

定义1.14 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$等)时，函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大，则称当$x\to x_0$（或$x\to\infty$等）时，$f(x)$是无穷大量. 记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

无穷大(∞)不是数，不可与很大的数混为一谈.

很显然，无穷大量与无穷小量有如下关系：

定理1.11 当$x \to x_0$(或$x \to \infty$等)时，若$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量；若$f(x)$是无穷小量，且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量.

例29 求$\lim\limits_{x\to 0}(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

解：由于当$x \to 0^-$时，$\frac{1}{x} \to -\infty$，于是，

$$\lim_{x\to 0^-}(e^{\frac{1}{x}}-1) = -1.$$

当$x \to 0^+$时，$\frac{1}{x} \to +\infty$，于是

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{\frac{1}{x}}-1) = +\infty.$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}(e^{\frac{1}{x}}-1)$不存在.