第五节 函数的微分

第二章

一、微分的概念

二、微分运算法则

三、微分在近似计算中的应用

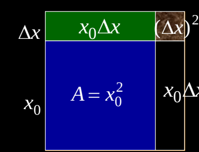
四、微分在估计误差中的应用

一、微分的概念

引例: 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由x_0变到$x_0+\Delta x$, 问此薄片面积改变了多少?

设薄片边长为 x, 面积为 A, 则 $A=x^2$, 当 x 在 x_0 取得增量Δx 时, 面积的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x^2$$
$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{时为高阶无穷小}}$$



故 $\Delta A\approx 2x_0\Delta x$

称为函数在 x_0 的微分

定义: 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于Δx 的常数)

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可微**, 而 $A\Delta x$ 称为$f(x)$在点x_0 的**微分**, 记作 $\mathrm{d}y$ 或$\mathrm{d}f$, 即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x$$

定理: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $A=f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

定理 : 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0处可导, 且 $A=f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

证: "必要性"

已知 $y=f(x)$ 在点 x_0可微 , 则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故 $y=f(x)$ 在点 x_0的可导, 且 $f'(x_0)=A$

定理 : 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0处可导, 且 $A=f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

"充分性" 已知 $y=f(x)$ 在点 x_0的可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\quad(\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0)$$

故 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{线性主部}}+o(\Delta x)$ $\quad(f'(x_0)\neq 0\text{时})$

即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

说明: $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时 ,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}$$
$$=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

所以 $\Delta x\to 0$ 时 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小, 故当 $|\Delta x|$ 很小时, 有近似公式

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y$$

微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \cdot \Delta x$$

当 Δx 很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y$

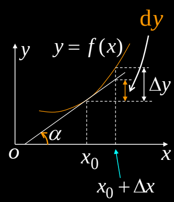
当 $y = x$ 时，

$$\Delta y = \Delta x \overset{\text{记}}{=} \mathrm{d}x$$

称 Δx 为**自变量的微分**，记作 $\mathrm{d}x$

则有 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ 导数也叫作微商



例如，$y = x^3$，

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \mathrm{d}x=0.02}} = 3x^2 \cdot \mathrm{d}x\Big|_{\substack{x=2\\ \mathrm{d}x=0.02}} = 0.24$$

又如，$y = \arctan x$，

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

基本初等函数的微分公式

二、 微分运算法则

设 $u(x)$，$v(x)$ 均可微，则

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$ （C 为常数）
3. $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$ $(v \neq 0)$
5. 复合函数的微分

$y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 分别可微，

则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = f'(u)\boxed{\varphi'(x)\mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$$

微分形式不变

例1. $y = \ln(1+e^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解：

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}(1+e^{x^2})$$

$$= \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}x$$

例2. 设 $y\sin x - \cos(x-y) = 0$，求 $\mathrm{d}y$.

解： 利用一阶微分形式不变性，有

$$\mathrm{d}(y\sin x) - \mathrm{d}(\cos(x-y)) = 0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y + y\cos x\,\mathrm{d}x + \sin(x-y)\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = 0$$

$$\mathrm{d}y = \frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}\mathrm{d}x$$

例3. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立：

(1) $\mathrm{d}(\ \tfrac{1}{2}x^2 + C\ ) = x\mathrm{d}x$

(2) $\mathrm{d}(\ \tfrac{1}{\omega}\sin\omega t + C) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t$

说明： 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意：数学中的反问题往往出现多值性.

三、 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，得近似等式：

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

令 $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则： 1) $f(x_0)$，$f'(x_0)$ 好算；

2) x 与 x_0 靠近.

特别当 $x_0=0$, $|x|$ 很小时,

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

常用近似公式: ($|x|$ 很小)

(1) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$

证明: 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

得 $f(0)=1,\ f'(0)=\alpha$

$\therefore$ 当 $|x|$ 很小时, $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$

(2) $\sin x\approx x$　　(3) $e^x\approx 1+x$

(4) $\tan x\approx x$　　(5) $\ln(1+x)\approx x$

例4. 求 $\sin 29^{\circ}$ 的近似值 .

解: 设 $f(x)=\sin x$,

取 $x_0=30^{\circ}=\frac{\pi}{6}$,　$x=29^{\circ}=\frac{29}{180}\pi$

则 $\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{180}$

$$\sin 29^{\circ}=\sin\frac{29}{180}\pi\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$　$\boxed{\sin 29^{\circ}\approx 0.4848\cdots}$

例5. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

$3^5=243$

解: $\sqrt[5]{245}=(243+2)^{\frac{1}{5}}$

$$=3(1+\frac{2}{243})^{\frac{1}{5}}$$　$\boxed{(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x}$

$$\approx 3(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243})$$

$$=3.0048$$

例6. 有一批半径为1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下, 每只球需用铜多少克 . (铜的密度 : $8.9\,\mathrm{g/cm^3}$)

解: 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1, \Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV,

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}=4\pi R^2\Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}$$

$$\approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$8.9\times 0.13=1.16$ (g)

四、 微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A, 其近似值为 a,

$|A-a|$ 称为a 的**绝对误差**

$\frac{|A-a|}{|a|}$ 称为a 的**相对误差**

若 $|A-a|\le\delta_A$

δ_A 称为测量 A 的**绝对误差限**

$\frac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的**相对误差限**

误差传递公式 :

若直接测量某量得 x, 已知测量误差限为 δ_x,

按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|f'(x)|\cdot|\Delta x|$$

$$\le|f'(x)|\cdot\delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y\approx|f'(x)|\cdot\delta_x$

相对误差限约为 $\frac{\delta_y}{|y|}\approx\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\cdot\delta_x$

例7. 设测得圆钢截面的直径 $D=60.0\,\text{mm}$, 测量D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05\,\text{mm}$, 欲利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢截面积 , 试估计面积的误差 .

解: 计算 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A=|A'|\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times 60.0\times 0.05$$
$$\approx 4.715\ \text{(mm)}$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|}=\frac{\frac{\pi}{2}D\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.0}=0.17\,\%$$

内容小结

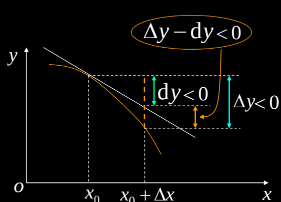
1. 微分概念
   - 微分的定义及几何意义
   - 可导 $\Longleftrightarrow$ 可微
2. 微分运算法则

   微分形式不变性 : $\mathrm{d}f(u)=f'(u)\,\mathrm{d}u$

   (u 是自变量或中间变量)
3. 微分的应用 $\begin{cases}\text{近似计算}\\ \text{估计误差}\end{cases}$

思考与练习

1. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出的点 x_0 处的 $\mathrm{d}y,\Delta y$ 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$, 并说明其正负 .



2. $\mathrm{d}(\arctan e^{-x})=\dfrac{1}{1+e^{-2x}}\,\mathrm{d}e^{-x}$

$$=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$$

3. $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x}=\sec^3 x$

4. $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C\right)=\sin 2x\,\mathrm{d}x$

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定, 求 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

解: 方程两边求微分, 得

$$3x^2\,\mathrm{d}x+3y^2\,\mathrm{d}y-3\cos 3x\,\mathrm{d}x+6\,\mathrm{d}y=0$$

当 $x=0$ 时 $y=0$, 由上式得 $\mathrm{d}y|_{x=0}=\frac{1}{2}\mathrm{d}x$

6. 设 $a>0$, 且 $|b|<<a^n$, 则

$$\sqrt[n]{a^n+b}\approx a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

备用题

1. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$, 求 $\mathrm{d}y$.

解: 因为

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

所以

$$\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\sin\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

2. 已知 $xy = e^{x+y}$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

解: 方程两边求微分, 得

$$x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x = e^{x+y}(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}\,y = \frac{y - e^{x+y}}{x + e^{x+y}}\,\mathrm{d}\,x$$