第五章　数字特征

（下）

杨勇制作

第二节 方差

一、方差的定义

我们已经知道，数学期望描述了随机变量取值的平均值，即其是分布的位置特征数，它总位于分布的中心，随机变量的取值总在其周围波动。方差是度量此种波动大小的最重要的特征数，下面引出它的定义。

设有一随机变量X，称 $X-EX$ 为偏差，此种偏差可大可小，可正可负，为了使此种偏差能积累起来，不致于正负抵消，可取绝对数偏差的均值 $E|X-EX|$ 来表示随机变量取值的波动大小。由于绝对值在数学上处理不甚方便，用$(X-EX)^2$衡量偏差更合适。因为 $(X-EX)^2$也是随机变量，取其平均值 $E(X-EX)^2$ 就可以作为刻划随机变量 X 取值的波动大小(或取值离散程度)的一个数字特征。

定义5-4 设 X 是一个随机变量，若 $E(X-EX)^2$ 存在，则称 $E(X-EX)^2$ 为 X 的方差(Variance)，记为 DX 或 $VarX$ 。即 $DX=E(X-EX)^2$ 。方差的平方根 $\sqrt{DX}$ 称为标准差或根方差(Standard deviation)。

若 X 为离散型随机变量，其概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots$$ ，

则按方差的定义有

$$DX=E(X-EX)^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-EX)^2 p_i$$ 。

若 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$，则按方差的定义有

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 p(x)dx 。$$

方差越小，随机变量取值越在EX 附近；

方差越大，随机变量取值离EX 越远。

注：当分布给定时，方差DX也是

一个常数。

数学期望和方差都是刻划随机变量统计特征的数字特征。前者刻划了随机变量取值的平均位置，因而也有人称它是位置特征；后者刻划了随机变量偏离其数学期望的(分散)程度，方差越小，随机变量取值越集中于数学期望的周围。

数学期望和方差是随机变量的最基本、最常用的两个数字特征。

为计算方便，方差的公式也可简化为：

$$DX = E(X - EX)^2$$

$$= E(X^2 - 2XEX + (EX)^2)$$

$$= E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2$$

$$= E(X^2) - (EX)^2$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2$$

例5-17 若随机变量 X 服从0-1分布，试求 X 的方差。

解：由例5-1知，$EX = p$，

又 $$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \cdot p = p,$$

则 $$DX = E(X^2) - (EX)^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p) = pq。$$

其中 $q \triangleq 1-p$ 。

例5-18 设随机变量 X 服从参数为 λ 的普阿松分布，$X \sim P(\lambda)$，试求 X 的方差。

解：由例5-2和例5-8知，$EX = \lambda$ 及 $E(X^2) = \lambda(\lambda+1)$，

则
$$DX = E(X^2) - (EX)^2$$
$$= \lambda(\lambda+1) - \lambda^2$$
$$= \lambda。$$

例5-19 设随机变量X服从参数为p几何分布，即 $X \sim G(p)$，求X的方差。

解：X的概率分布为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots,$$

由例5-3和例5-9知，

$$EX=\frac{1}{p}, E(X^2)=\frac{2-p}{p^2}$$

则

$$DX=E(X^2)-(EX)^2$$

杨勇制作

$$= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2},$$

其中$q \triangleq 1-p$。

例5－20 设 X 服从均匀分布，即 $X \sim U[a,b]$，试求 X 的方差。

解：由例5-5和例5-10知，

$$EX=\frac{a+b}{2},E(X^2)=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

则

$$DX=E(X^2)-(EX)^2$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}。$$

例5-21 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，即 $X \sim Exp(\lambda)$，试求 X 的方差。

解：由例5-6和例5-11知，

$$EX = \frac{1}{\lambda}, E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2},$$

则

$$DX = E(X^2) - (EX)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}。$$

例5-22 设 X 服从正态分布，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 DX 的方差。

解：由方差的定义知，

$$DX=E(X-EX)^2=E(X-\mu)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad \left(\text{其中}t=\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t d\left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma^2 。$$

由例5-7及上例知，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$中的第一个参数 μ是它的数学期望，第二个参数 σ^2是它的方差，于是正态分布的两个参数的概率意义都已明确了。由此可知，正态分布由它的数学期望和方差唯一确定。

二、方差的性质及切比雪夫不等式

随机变量的方差具有下述基本性质，其中假设性质中的方差均存在。

性质5-4 设 c 为常数，则

(1) $D(c)=0,$

(2) $D(X+c)=DX,$

(3) $D(cX)=c^2DX$ 。

证明:(1) $D(c) = E(c - Ec)^2$

$$= E(c - c)^2$$

$$= 0\,;$$

(2) $D(X + c) = E(X + c - E(X + c))^2$

$$= E[X + c - (EX + c)]^2$$

$$= E(X - EX)^2$$

$$= DX\text{。}$$

(3) $$D(cX) = E(cX - E(cX))^2$$

$$= E(cX - cEX)^2$$

$$= c^2 E(X - EX)^2$$

$$= c^2 DX \text{。}$$

性质5-4的(1),(2),(3)可以写成一个式子,

$$D(aX+b)=a^2DX \text{。}$$

性质5-5 若 X,Y 是两个相互独立的随机变量，则 $D(X+Y)=DX+DY$ 。

证明：

$$D(X+Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)+(Y-EY)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2+(Y-EY)^2+2(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$= DX + DY + 2E(X - EX)(Y - EY)$$

$$= DX + DY + 2E\left[XY - YEX - XEY + EXEY\right]$$

$$= DX + DY + 2\left[E(XY) - EX \cdot EY\right]$$

$$= DX + DY。$$

其中当 X 与 Y 独立时，

$$E(XY) = EX \cdot EY。$$

注：当X和Y独立时，

$$D(X-Y)=D(X+(-Y))$$

$$=DX+D(-Y)$$

$$=DX+DY\text{。}$$

还可以将性质5-5推广到多个随机变量的情况，即设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n\text{。}$$

性质5-5的推广提供了求方差的方法，但要求随机变量之间相互独立。

例5-23 设 X 服从二项分布，即 $X \sim B(n, p)$ ，试求 DX 。

解：由例5-16可知，

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从参数为 p 的0-1分布，故由性质5—5的推广可知，

$$DX = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n$$
$$= npq,$$

其中 $q \hat{=} 1 - p$ 。

注：当$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立时，则

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 DX_k,$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为常数。

教材第四章习题

32.设$X_1 \sim N(1,2), X_2 \sim N(0,3), X \sim N(2,1)$,

且X_1, X_2, X_3相互独立，求：

(1) $Y = 2X_1 + 3X_2 - X_3$的密度函数；

(2) $P(0 \le Y \le 6)$。

解：

$$Y \sim N(EY, DY)$$

$$EY = 2EX_1 + 3EX_2 - EX_3$$

$$DY = 4DX_1 + 9DX_2 + DX_3$$

132页习题22

22. 袋中有n张卡片，编号为$1,2,\cdots,n$, 从中有放回地每次抽一张，共抽r次，求所得号码之和X的数学期望和方差。

解：　X_i表示第i次抽到的号码，$i=1,2,\cdots,r$,

X_i	1	2	$\cdots$	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

且$X_1,X_2,\cdots,X_r$独立, 则

$$X=\sum_{k=1}^{r}X_k$$

其中 $$EX_k=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+\cdots+n\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\bullet\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n+1}{2},$$

$$EX=\sum_{k=1}^{r}EX_k=\frac{n+1}{2}r。$$

其中 $$E(X_k^2)=1^2\times\frac{1}{n}+2^2\times\frac{1}{n}+\cdots+n^2\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\bullet\frac{1}{n}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$DX_k=E(X_k^2)-(EX_k)^2$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12},$$

$$DX=\sum_{k=1}^{r}DX_k=\frac{n^2-1}{12}r。$$

性质5-6 随机变量 X 的方差 $DX=0$ 的充分必要条件是 X 取某个常数的概率为1，即对某个常数 a，有 $P(X=a)=1$。

定义5-5 对任一随机变量 X，若 $DX>0$，则称

$$Y=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$$

为 X 的标准化（standardized）随机变量。

性质5-7 若 Y 为 X 的标准化随机变量，则

$$EY=0, DY=1。$$

证明：

$$EY=E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{DX}}E(X-EX)=0;$$

$$DY=D\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right]$$

$$=\frac{1}{DX}D(X-EX)=1。$$

X 的标准化随机变量 Y 是一个无量纲的随机变量。它是把原分布中心 EX 移至原点，不使分布中心偏左或偏右，然后缩小或扩大坐标轴，使分布不致过疏或过密。在排除这些干扰后，使原随机变量 X 的一些性质容易显露出来，故标准化技术在概率论与数理统计中会经常使用。

下面我们来介绍一个重要的不等式---切比雪夫(Chebyshev) 不等式。

定理5-4(切比雪夫不等式) 对任一随机变量 X，若 DX 存在，则对任一正数 ε，恒有

$$P\left(\left|X-EX\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2},$$

或者
$$P\left(\left|X-EX\right|<\varepsilon\right)\geq1-\frac{DX}{\varepsilon^2}。$$

证明：

教材证了连续性的情形，我们这里证离散性的情形。

设X的概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

则

$$P\left(\left|X-EX\right|\geq\varepsilon\right)=\sum_{k:|x_k-EX|\geq\varepsilon}p_k$$

$$\leq\sum_{k:|x_k-EX|\geq\varepsilon}\frac{(x_k-EX)^2}{\varepsilon^2}p_k$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-EX)^2p_k=\frac{DX}{\varepsilon^2}。$$

切比雪夫不等式只要知道随机变量的数学期望和方差，没有用到随机变量的分布，这是切比雪夫不等式的优点，所以它有很广泛的应用，是概率论中一个重要的基本不等式。然而也就是这个原因，一般来说它给出的估计比较粗糙的。

第三节 协方差和相关系数

杨勇制作

二维随机向量的联合分布中还包含有X与Y之间相互关系的信息，能不能像数学期望和方差那样，用某些数值来刻划X和Y之间的联系的某些特性呢？协方差和相关系数就是描述两个随机变量之间联系的数字特征。

定义5-6 设 (X,Y)是一个二维随机向量，且 $E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$存在，则称

$$Cov(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

为 X 与 Y 的协方差(covariance)。

注：由协方差定义知，$Cov(X,X)=DX$ 。

若(X,Y)是二维离散型随机向量，则按定义知，

$$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij}$$

若(X,Y)是二维连续型随机向量，则按定义知，

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)p(x,y)dxdy$$

为计算方便，协方差的定义也可简化为：

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E\left[\left(X-EX\right)(Y-EY)\right]\\&=E\left[XY-YEX-XEY+EX\cdot EY\right]\\&=E(XY)-EX\cdot EY\text{。}\end{aligned}$$

性质5-8 设 X,Y,Z 是任意随机变量，且它们的方差均存在，则

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$;

(2) 对于任意常数a 和b,

$$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y);$$

(3) $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$。

证明：(1)

$$Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$$

$$=E(Y-EY)(X-EX)=Cov(Y,X);$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov(aX, bY) &= E(aX - E(aX))(bY - E(bY)) \\ &= E(aX - aEX)(bY - bEY) \\ &= abE(X - EX)(Y - EY) \\ &= abCov(X, Y); \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} Cov(X+Y, Z) &= E\left[(X+Y-E(X+Y))(Z-EZ)\right] \\ &= E\left[((X-EX)+(Y-EY))(Z-EZ)\right] \\ &= E\left[(X-EX)(Z-EZ)\right] + E\left[(Y-EY)(Z-EZ)\right] \\ &= Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)。 \end{aligned}$$

性质5-9 设随机变量 X 与 Y 的方差存在，则 $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$。

证明：由方差的定义知，

$$D(X+Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)+(Y-EY)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2+(Y-EY)^2+2(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$=DX+DY+2Cov(X,Y)。$$

类似地可以证明：

$$D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)。$$

性质5-9可推广为：设 $X_1,\cdots,X_n$ 的方差均存在，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)。$$

注意：当 $X_1,\cdots,X_n$ 不独立时，

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i$$

不一定成立。

例5-24 设 X 服从超几何分布，即 $X \sim H(M,N,n)$，求 EX, DX 。

解：为叙述方便不妨设 $n \le M$ ，且以产品检验为例加以说明。

产品共 N 件，其中 M件是次品，以 X 表示抽验的 n 件产品中次品的个数，显然 $X \sim H(M,N,n)$。

设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个产品为次品} \\ 0, & \text{第}i\text{个产品为正品} \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

显然

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,$$

其中 $X_1,\cdots,X_n$ 不独立。由第一章例1-12知，

$$P(X_i=1)=\frac{M}{N},$$

即有

X_i	0	1
P	$1-\dfrac{M}{N}$	$\dfrac{M}{N}$

其中 $i=1,2,\cdots,n$， 则

$$EX_i=\frac{M}{N},i=1,2,\cdots,n,$$

所以，

$$EX=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

$$=n\frac{M}{N}。$$

下面计算 X 的方差 DX 。

因为 X_i 服从0-1分布，所以，

$$DX_i = \frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right), i=1,2,\cdots,n。$$

又当 $i<j, i,j=1,2,\cdots,n$ 时，

$$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)$$

$$=P(X_i=1)P(X_j=1 \mid X_i=1)$$

$$=\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}=\frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

所以，X_iX_j 的概率分布为

X_iX_j	0	1
P	$1-\dfrac{M(M-1)}{N(N-1)}$	$\dfrac{M(M-1)}{N(N-1)}$

从而可知，

$$E(X_iX_j)=\frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

故

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - EX_i EX_j$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$$

$$= -\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}。$$

再由性质5-9的推广知，

$$DX = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\left[-\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}\right]$$

$$= \frac{nM(N-M)}{N^2} - \frac{2M(N-M)}{N^2(N-1)}\sum_{1\le i<j\le n} 1$$

$$= \frac{nM(N-M)}{N^2} - \frac{2M(N-M)}{N^2(N-1)}\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}。$$

协方差是关于二个随机变量的一个数字特征，它的数值在一定程度上反映了这二个随机变量相互间的的某种关系，不过用它来描述这一关系马上就会发觉一个不足的地方，这就是如让随机变量X和Y各自增大$k(\neq 0)$倍，尽管X,Y相互之间的关系与kX,kY之间的关系从直观上看并无差别，但是

$$Cov(kX,kY)=k^2Cov(X,Y),$$

即协方差却增大了k^2倍，为克服这一缺点，可在计算协方差之前，先对随机变量进行“标准化”。

定义5-7 设(X,Y)为二维随机向量，且X和Y的方差均存在，都为正，则称

$$\rho_{XY}=\rho(X,Y)=E\left[\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)\left(\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)\right]$$

$$=Cov\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$

为随机变量 X 与 Y 的相关系数(coefficient of correlation)。

易见，对 $k \neq 0$，有

$$\rho(kX, kY) = \rho(X, Y)。$$

例5-25 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则

$$\rho_{XY} = \rho。$$

证明：由第四章性质4-4可知，

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)，\quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

从而 $EX=\mu_1, DX=\sigma_1^2, EY=\mu_2, DY=\sigma_2^2$，

令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$， 则

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)p(x,y)dxdy$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uve^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uve^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(u-\rho v)^2+(1-\rho^2)v^2\right]}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{ve^{-\frac{v^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}du\right]\right\}dv,$$

其中 $p(x,y)$ 为 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的联合密度函数。

设 $Z_1\sim N(\rho v,1-\rho^2)$，则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}du=EZ_1=\rho v,$$

所以，

$$Cov(X,Y)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}\rho v\,dv$$

$$=\rho\sigma_1\sigma_2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}v^2e^{-\frac{v^2}{2}}dv,$$

再设 $Z_2\sim N(0,1)$， 则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}v^2e^{-\frac{v^2}{2}}dv=EZ_2^2=DZ_2=1,$$

从而， $Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

最后，由相关系数的定义知，

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho\text{。}$$

由此可知，二维正态分布中的五个参数都有了它们自己明确的含意。

定理5-5 设随机变量 X 与 Y 的方差存在，相关系数为 ρ_{XY} ，则有

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$；

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充分必要条件是 X 与 Y 以概率1线性相关，即存在常数 a 与 b，使有 $P(Y = aX + b) = 1$ 。

证明：(1)令 $X_1 = X - EX, Y_1 = Y - EY$, 对 X_1 与 Y_1 运用定理5-3（柯西一施瓦茨不等式）可得

$$\rho_{XY}^2 = \frac{[E(X-EX)(Y-EY)]^2}{E(X-EX)^2 \cdot E(Y-EY)^2}$$

$$= \frac{[E(X_1 Y_1)]^2}{EX_1^2 \cdot EY_1^2} \le 1,$$

即 $|\rho_{XY}| \le 1$，由此知(1)成立。

(2)由上述(1)的证明过程可知：

$|\rho_{XY}|=1$ 等价于 $[E(X_1Y_1)]^2 - EX_1^2 \cdot EY_1^2 = 0$，

这等价于二次方程(见定理5-3)：

$$E(tX_1+Y_1)^2 = t^2EX_1^2 + 2tE(X_1Y_1) + EY_1^2$$

仅有一个重根 t_0，即

$$E(t_0X_1+Y_1)^2 = 0,$$

又因为

$$E(t_0X_1+Y_1) = t_0EX_1 + EY_1 = 0,$$

所以， $D(t_0X_1+Y_1)=0$ 。

而由性质5-6知，

$D(t_0X_1+Y_1)=0$ 的充分必要条件是

$$P(t_0X_1+Y_1=0)=1,$$

令$a=-t_0, b=t_0EX+EY$,

即有 $$P(Y=aX+b)=1。$$

注：$t_0X_1+Y_1$等于常数，又数学期望为0，

所以，$t_0X_1+Y_1=0$ 。

定理5-5表明：当$|\rho_{XY}|=1$时，在 X 与 Y 之间存在着线性关系的事件概率为1，即 X 与 Y 之间线性关系不成立的事件的概率为零。

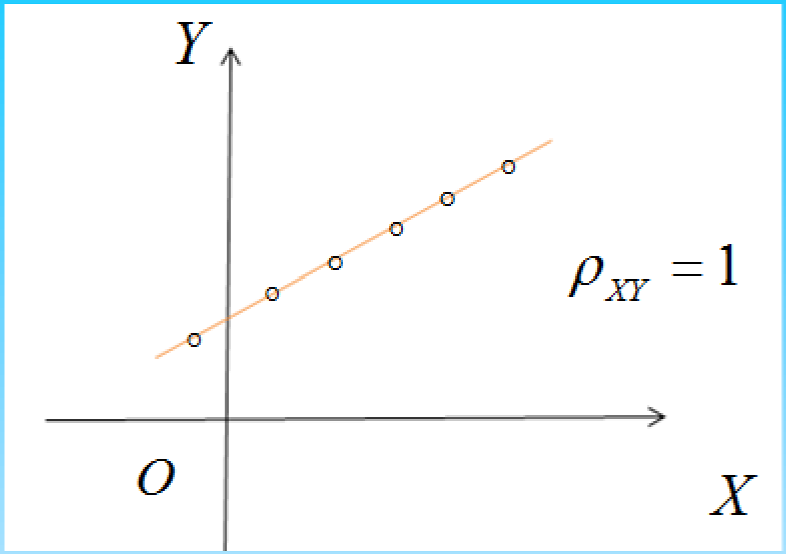
当 $\rho_{XY}=1$时，$a>0$ ，称 X 与 Y 正线性相关；
当 $\rho_{XY}=-1$ 时，$a<0$ ，称 X 与 Y 负线性相关；

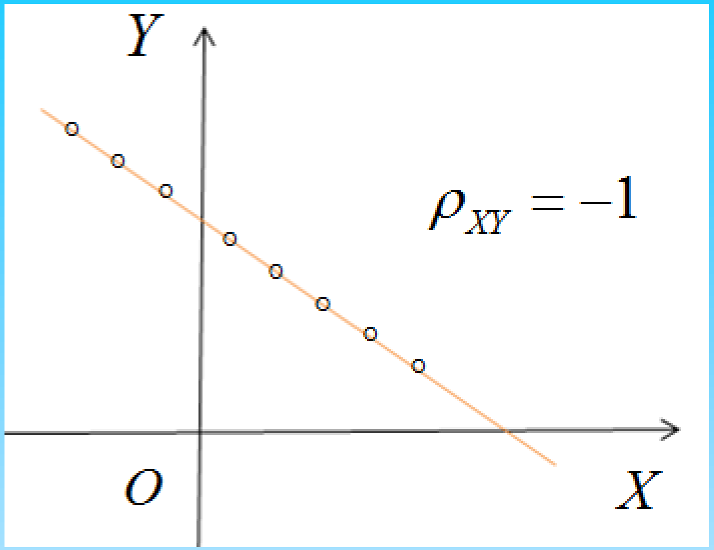
当 $|\rho_{XY}|<1$ 时，这种线性相关的程度随着$|\rho_{XY}|$的减小而减弱。

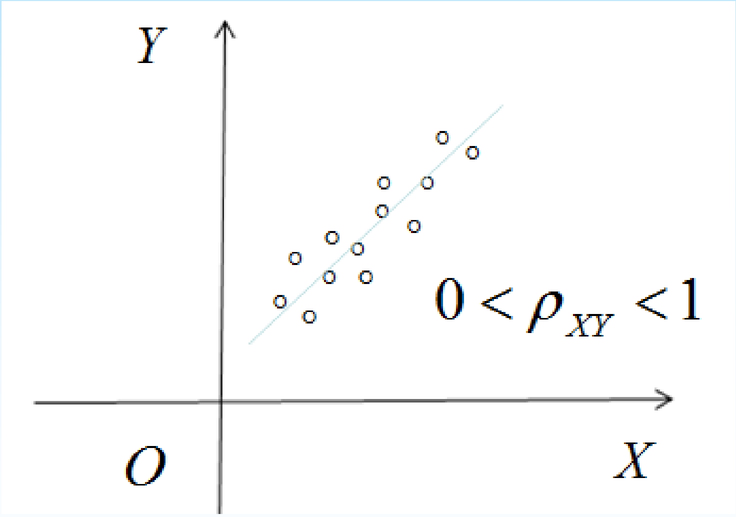
当 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X与 Y是不相关的，即它们是不线性相关的。

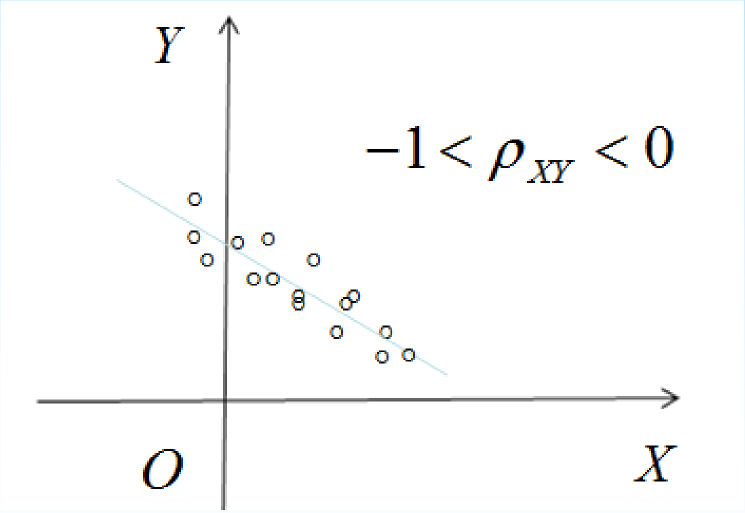
由此可知，相关系数 ρ_{XY}：
（1）描述随机变量之间线性关系强弱程度的一个数字特征。

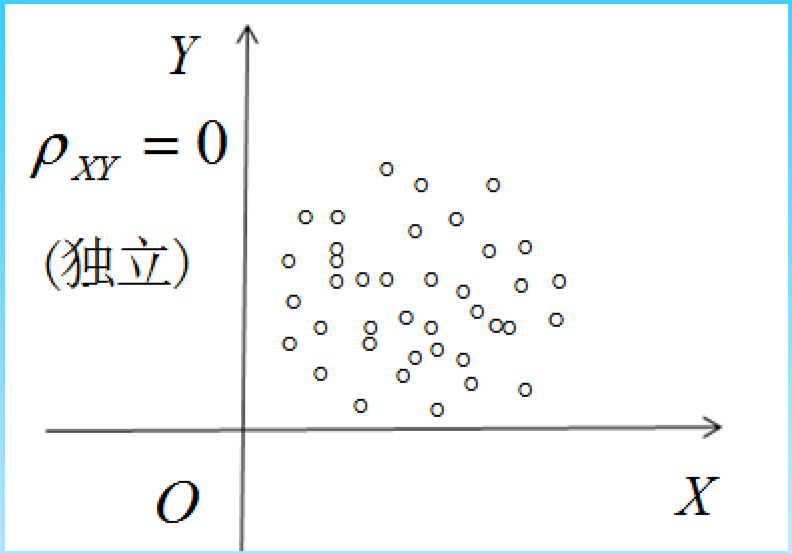
（2）这种线性相关的程度随着$|\rho_{XY}|$的减小（变大）而减弱（变强）。


Y
$\rho_{XY} = 1$
O
X

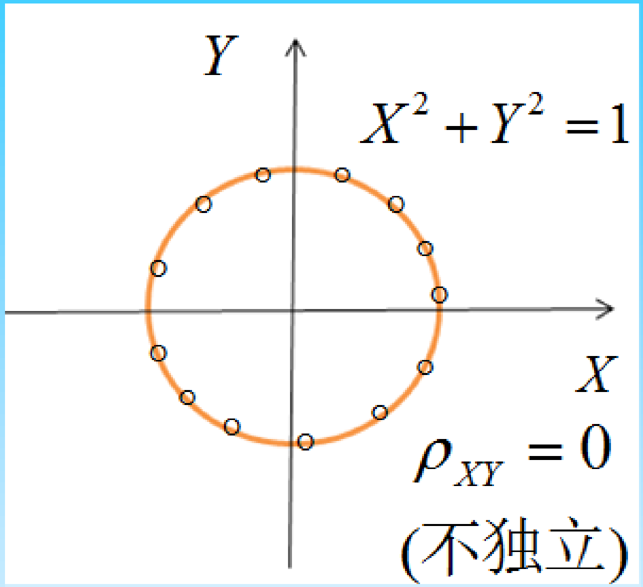

Y
$\rho_{XY} = -1$
O
X


Y
$0 < \rho_{XY} < 1$
O
X


Y
$-1 < \rho_{XY} < 0$
O
X



Y
$\rho_{XY} = 0$
(独立)
O
X



Y
$X^2 + Y^2 = 1$
X
$\rho_{XY} = 0$
(不独立)

定理5-6 若随机变量 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 不相关；反之不然。

证明：由于 X 与 Y 独立，即知

$$E(XY) = EX \cdot EY \, ,$$

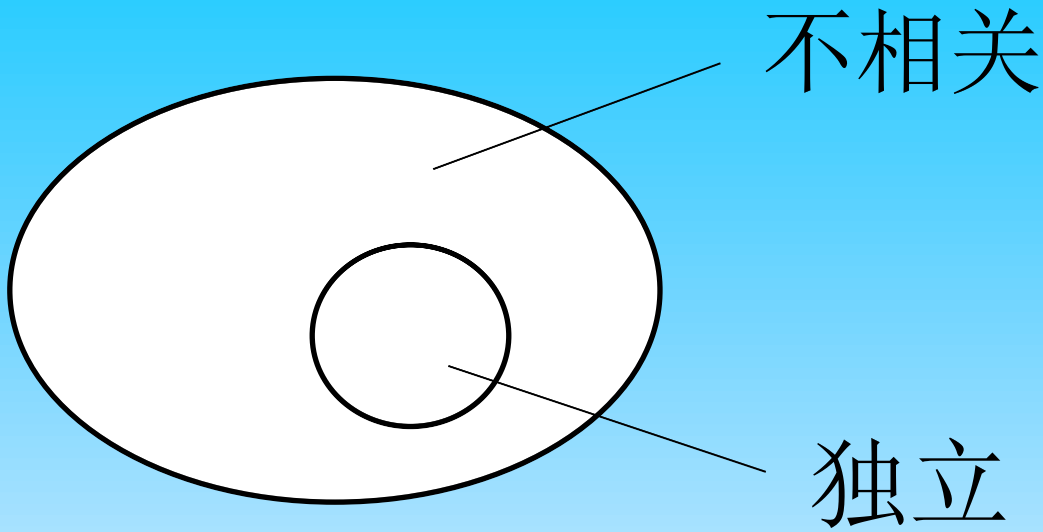
所以，

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = 0 \, ,$$

从而可知， $\rho_{XY} = 0$,

即 X 与 Y 不相关。

杨勇制作



但当 X 与 Y 不相关时，X 与 Y 却不一定独立。反例参见下面的例5-26。

例5-26 设随机变量 Θ 的密度函数为

$$p_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

且令 $X=\sin\Theta, Y=\cos\Theta,$

证明：（1） X 与 Y 不相关；

（2） X 与 Y 不独立。

证明：(1)由随机变量函数的期望公式知，

$$EX = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \frac{1}{\pi} d\theta = 0,$$

$$EY = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{1}{\pi} d\theta = \frac{2}{\pi},$$

$$E(XY) = E(\sin\Theta\cos\Theta)$$

$$= \frac{1}{2} E(\sin 2\Theta)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\pi} d\theta = 0,$$

于是，$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = 0$，

又显然 $DX > 0, DY > 0$ ， 即知 $\rho_{XY} = 0$,

可见 X 与 Y 是不相关的。

(2)设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，

则

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = P\left(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right)$$

$$=P\left(\sin\Theta\le\frac{1}{2},\cos\Theta\le\frac{1}{2}\right)$$

$$=P\left(-\frac{\pi}{2}\le\Theta\le-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}p(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[-\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{6},$$

其中由 $\sin\Theta\le\frac{1}{2}$ 可得 $-\frac{\pi}{2}\le\Theta\le\frac{\pi}{6}$ ，

由 $\cos\Theta \le \frac{1}{2}$ 可得 $-\frac{\pi}{2} \le \Theta \le -\frac{\pi}{3}$ 或

$\frac{\pi}{3} \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$，　再由第三章例3－21知，

$$F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2}{3},$$

$$F_Y\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3},$$

从而可知，

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\neq F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Y\left(\frac{1}{2}\right),$$

即知 X 与 Y 不独立。

注：此时X与Y存在函数关系：$X^2+Y^2=1$。

定理5-6和例5-26说明：二个随机变量之间的独立与不相关是二个不同的概念。“不相关”只说明二个随机变量之间没有线性关系，但可能存在其它函数关系，也可能相互独立，而“独立”说明二个随机变量之间既无线性关系，也无非线性关系，所以“独立”必导致“不相关”，反之不然。

例5-27 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 X 与 Y 不相关。

证明：显然只要证明充分性即可。

设 X 与 Y 不相关，由二维正态分布的性质可知，$\rho_{XY}=\rho=0$，且

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

则当 $\rho=0$ 时的二维正态分布的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$=p_X(x)p_Y(y),$$

这说明 X 与 Y 相互独立。

我们知道，在一般情况下，X 与 Y 相互独立可以推得 X 与 Y 不相关，反之不成立。但是，对于二维正态随机向量 (X,Y) 而言，“X 与 Y 相互独立”和“X 与 Y 不相关”是等价的。

性质：设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

(1) $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；

(2) $\rho_{XY} = \rho$；

(3)“X与Y不相关”和“X与Y独立”等价。

例5-28 设随机向量 (X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}15xy^2, 0\le y\le x\le 1\\ 0, \text{其它}\end{cases},$$

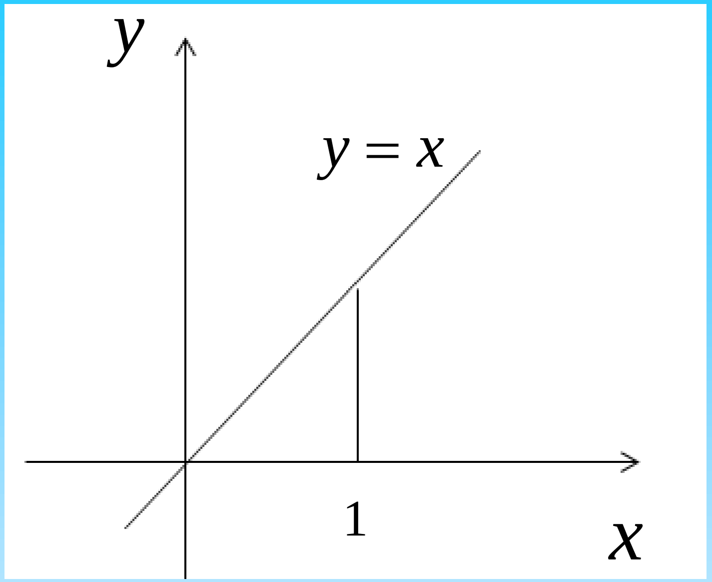
求(1) ρ_{XY}； (2) $D(2X-3Y+7)$ 。

解：(1) 由于相关系数ρ_{XY} 由 DX,DY 和 $Cov(X,Y)$确定，所以，先计算 DX,DY 和 $Cov(X,Y)$ 。

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 15xy^2dy, 0\le x\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$$

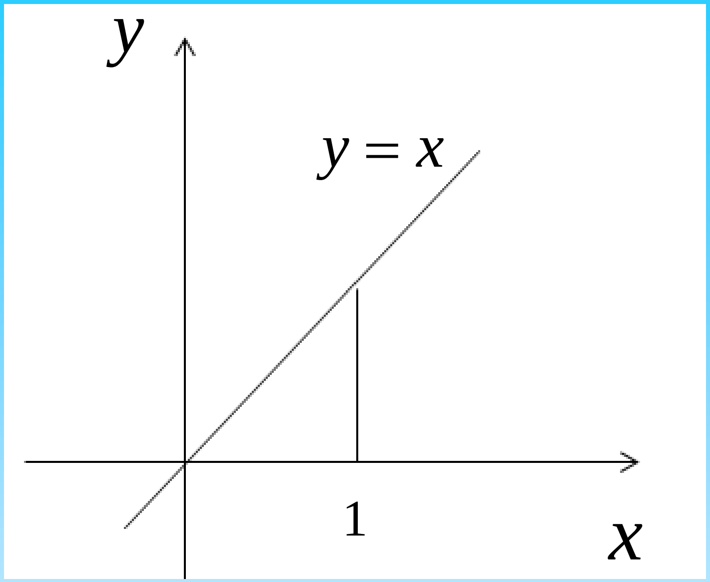
$$=\begin{cases}5x^4, 0\le x\le 1\\ 0, 其它\end{cases},$$



$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 15xy^2dx, 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{15}{2}y^2(1-y^2), 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases},$$



$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 5x^4 dx = \frac{5}{6},$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y)dy = \int_0^1 y \cdot \frac{15}{2} y^2(1-y^2)dy = \frac{5}{8},$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 5x^4 dx = \frac{5}{7},$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y)dy = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{15}{2} y^2(1-y^2)dy = \frac{3}{7},$$

杨勇制作

所以，$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{252},$$

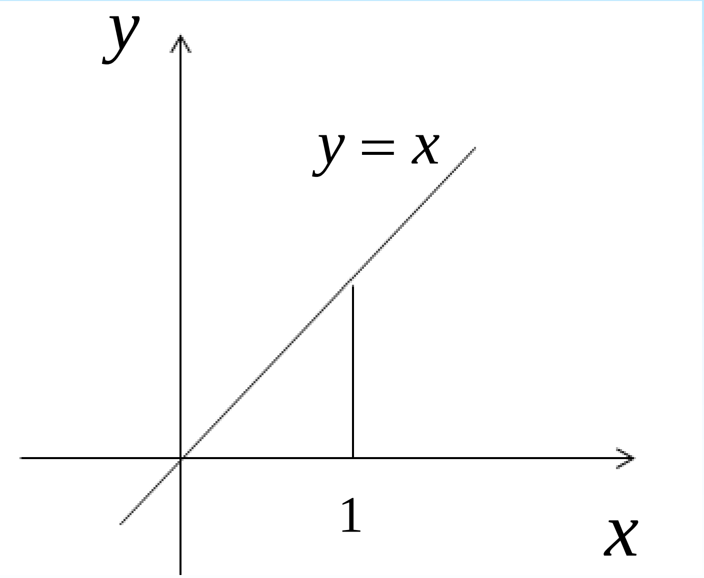
$$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{17}{448}。$$

又

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 15xy^2dy$$

$$=\frac{15}{28}。$$



从而

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$$

$$=\frac{5}{336},$$

现再来计算相关系数 ρ_{XY}，得

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$=\frac{\frac{5}{336}}{\sqrt{\frac{5}{252}}\sqrt{\frac{17}{448}}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{17}}\approx 0.542。$$

（2）由性质5-8和性质5-9知，

$$D(2X-3Y+7)=D(2X-3Y)$$

$$=D(2X)+D(-3Y)+2Cov(2X,-3Y)$$

$$=4DX+9DY-12Cov(X,Y)$$

$$=4\times\frac{5}{252}+9\times\frac{17}{448}-12\times\frac{5}{336}\approx 0.2423。$$

注：若X和Y不相关，则$D(X+Y)=DX+DY$。

反之也成立。