第五章　数字特征

（上）

杨勇制作

我们已经知道，分布函数（或概率分布、密度函数）全面地描述了随机变量的统计规律。

但是无论从理论或者应用的角度来看，从某些侧面粗线条地描述随机变量的统计规律仍是十分必要的。

首先，全面地反映与描述就导致没有突出重点；其次，在实际应用中要全部掌握一个随机变量的分布是一个困难的问题。

事实上，只要能了解几个充分反映出分布特点的数值指标往往已经能解决问题，已经够用了。这样的数值指标就是随机变量的数字特征，它们是本章要讨论的主要内容。

数学期望：随机变量的平均取值

X

方差：离散程度

（偏离数学期望的程度）

X与Y的相关系数：

描述X和Y线性相关程度

杨勇制作

第一节　数学期望

一、数学期望的定义

我们先通过一个例子，引出离散型随机变量数学期望值的定义。

假设 X 是只取有限个值的离散型随机变量，它的概率分布为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

现在对 X 进行 N 次观测，得到 N 个观测值 $a_1, a_2, \cdots, a_N$，其中每个 a_i 只能取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的某个数。

以 $v_N(x_i), i=1,2,\cdots,n$ 表示在 N 次观测中 x_i 出现的次数。

算术平均值 $\bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k$ 反映了 X 取值的平均值，又

$$\bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i v_N(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{v_N(x_i)}{N},$$

由频率具有稳定性

$$\frac{v_N(x_i)}{N} \xrightarrow{N\to\infty} p_i,$$

则 $$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{v_N(x_i)}{N} \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

由此可知，$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 反映了随机变量 X 取值的平均值。

注：$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 是个常数，而 $\bar{a}$ 是波动的。

由上述讨论的启发，我们引出离散型随机变量数学期望的定义。

定义5-1　设 X 是离散型随机变量，其概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，

则称该级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望（mathematical expectation）(或均值（mean value）)，

记作 EX，即 $EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$。

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 不是绝对收敛，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k = \infty$$

则称 X 的数学期望不存在。

随机变量 X 的数学期望反映了 X 取值的平均值，它由分布完全决定。

注1：当分布给定时，数学期望为一数值(常数)。

注2：我们假定级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，因而保证了级数的和与求和的次序无关。

注3：级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$发散或者条件收敛，数学期望不存在。

例5—1 若随机变量 X 服从0—1分布，试求它的数学期望 EX 。

解：$EX = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ 。

例5—2 设随机变量 X 服从参数为 λ 的普阿松分布，即 $X \sim P(\lambda)$ ，试求 X 的数学期望 EX 。

解：因为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,\cdots,(\lambda > 0),$$

杨勇制作

于是 $$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$\overset{j=k-1}{=}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{j!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda。$$

例5-3 设随机变量 X 服从参数为 p 几何分布，即 $X \sim G(p)$ ，求 X 的数学期望 EX 。

解： X 服从几何分布 $G(p)$ ，则 X 的概率分布为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots,(0<p<1)$$

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$$

由微积分可知，

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, |x|<1,$$

两边同时求导得

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

令 $x=1-p$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2},$$

故 $$EX=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}。$$

例5-4 有一游戏，在一袋中有形状大小完全一样的20个球，其中红、白球各10个，记红球为10分，白球为5分。游戏的规则为：某人从袋中随机地抽取10个球，并且将10个球的分值相加，根据相加的分值由以下的表进行奖罚：

分值	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50
奖(元)	50	30	20	10	-3	-5	-3	10	20	30	50

其中三项负的表示应罚的金额。

请问：你认为这样的游戏方式对他有利吗？试分析说明。

解：设 X 表示抽取10个球中红球的个数，显然 X 服从超几何分布，即

$$X \sim H(10, 20, 10),$$

则有

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^{k} C_{10}^{10-k}}{C_{20}^{10}}, k = 0, 1, \cdots, 10,$$

经计算得

$$P(X=0)=P(X=10)=\frac{C_{10}^{0}C_{10}^{10}}{C_{20}^{10}}\approx 0.00054\%,$$

$$P(X=1)=P(X=9)=\frac{C_{10}^{1}C_{10}^{9}}{C_{20}^{10}}\approx 0.054\%,$$

同理，我们还可以依次计算出：

$$P(X=2)=P(X=8)\approx 1.096\%,$$

$$P(X=3)=P(X=7)\approx 7.794\%,$$

$$P(X=4)=P(X=6)\approx 23.87\%,$$

$$P(X=5)\approx 34.37\%。$$

再设 Y 表示每次游戏所奖的金额数(单位为元)，所以 Y 的概率分布为

Y	-5	-3	10	20	30	50
P	34.37%	47.74%	15.59%	2.191%	0.108%	0.001%

则由数学期望的定义可得

$$EY=-1.12（元）。$$

由以上分析可知，平均每进行一次这样的游戏就要输1.12元，也即这样的游戏方式对他是不利的。

下面我们将通过简单的讨论，引出连续型随机变量数学期望的定义。

假设 X 是一个连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$ 。

取分点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$，

记 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\cdots,n$ ，则 X 落在区间 $(x_i, x_{i+1}]$ 中的概率为

$$P(X \in (x_i, x_{i+1}]) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx$$

$$\overset{\Delta x_i\text{很小}}{\approx} \quad p(x_i)\Delta x_i, i = 0,1,\cdots,n$$

此时，概率分布为

X'	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
P	$p(x_0)\Delta x_0$	$p(x_1)\Delta x_1$	$\cdots$	$p(x_n)\Delta x_n$

的离散型随机变量 X' 可以看作是 X 的一种近似，而这个离散型随机量 X' 的数学期望为

$$EX' = \sum_{i=0}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i \ ,$$

EX'近似地表达了连续型随机变量 X 取值的平均值 。

当分点愈密时， 即 $\max\limits_{0\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$,

这种近似也就愈好，由定积分的理论可知，

$$EX = \lim_{\substack{\max\{\Delta x_i\}\to 0 \\ 0\le i\le n}} \sum_{i=0}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx ,$$

这个直观的讨论启发我们引出如下定义。

定义5-2 设 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$ 。若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 绝对收敛，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)dx < \infty,$$

则称 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 为随机变量 X 的数学期望(或均值)，仍记作 EX ，即

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx 。$$

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 不是绝对收敛，

即 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)dx = \infty$，

则称 X 的数学期望不存在。

同离散型情形一样，**连续型随机变量 X 的数学期望 EX 仍反映 X 取值的平均值。**

当分布给定时，数学期望为一数值(常数)。

注：若 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 发散或者条件收敛，

数学期望不存在。

例5-5 设 X 服从均匀分布，即 $X \sim U[a,b]$，试求 X 的数学期望。

解：
$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b$$

$$= \frac{a+b}{2},$$

它正好是 $[a,b]$ 的中点。

例5-6 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，即 $X \sim Exp(\lambda)$，试求 X 的数学期望。

解：

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} xd(e^{-\lambda x})$$

$$= -\left[xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right]$$

$$=\frac{1}{\lambda}。$$

例5-7 设 X 服从正态分布，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 X 的数学期望。

解：

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\mu。$$

其中前一个积分为0，后一个积分为1 。

二、随机变量函数的数学期望

对于随机变量 X 的函数 $Y=f(X)$，由于 $Y=f(X)$ 也是随机变量，则也可利用数学期望的定义来求 $EY=Ef(X)$。

当已知随机变量 X 的概率分布或密度函数时，可先求出 $Y=f(X)$ 的概率分布或密度函数，再由数学期望的定义的求 EY，但是，这样做往往比较烦锁。

我们可以应用下列的定理，直接利用 X 的概率分布或密度函数去求出 $EY=Ef(X)$，从而避免了求解 $Y=f(X)$ 的分布的过程。

定理5-1 设 $Y=f(X)$ 为随机变量 X 的函数，且 $f(X)$的数学期望存在。

(1)若X 为离散型随机变量，其概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,m,\cdots,$$

则

$$EY=Ef(X)=\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k。$$

(2)设 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$，若 $f(X)$ 也是连续型随机变量，则

$$EY=Ef(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx。$$

证明：(1)因为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,m,\cdots,$$

所以，$Y=f(X)$的概率分布为

$Y=f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_m)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	$\cdots$

其中 $f(x_1), f(x_2),\cdots, f(x_m),\cdots$，中可以有相同的，没有将它们合并，但这不影响证明。

由数学期望的定义可知，$Y=f(X)$取值的平均值(即 $EY=Ef(X)$)为

$$EY=Ef(X)=\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k)p_k\text{。}$$

(2)连续型情况的严格证明已超出本书范围，但可以来说明一下，类似于引出连续型随机变量数学期望的定义前的一段说明，离散型随机变量 X' 可以看作是 X 的一种近似，

也即离散型随机变量 $f(X')$ 可看作是 $f(X)$ 的一种近似，由本定理(1)可知，

$$E[f(X')]=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)p(x_i)\Delta x_i\ ,$$

当然 $E[f(X')]$ 为 $E[f(X)]$的近似值，并且当 $\max\limits_{0\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}EY &= E[f(X)] \\ &= \lim_{\max\limits_{0\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)p(x_i)\Delta x_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx\text{。}\end{aligned}$$

注：$Ef(X)$为$f(X)$取值的平均值。

对于随机向量 (X,Y) 的函数 $Z=f(X,Y)$ 我们有以下类似的结论。

定理5-2 设 $Z=f(X,Y)$ 为随机向量 (X,Y) 的函数，且 $EZ=Ef(X,Y)$ 存在。

(1) 若 (X,Y) 为离散型随机向量，其联合概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m,\cdots \\ j=1,2,\cdots,n,\cdots \end{matrix},$$

则 $$EZ=E[f(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) 设(X,Y)为连续型随机向量，其联合密度函数为 $p(x,y)$，若 $Z=f(X,Y)$ 为连续性随机变量，则

$$EZ=E[f(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)p(x,y)dxdy\text{。}$$

注：$Ef(X,Y)$为$f(X,Y)$取值的平均值。

定理5-1和定理5-2在理论上和实用上都有重大意义，这里我们举一些例子说明其应用。

例5—8 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，即 $X \sim P(\lambda)$ ，试求 X^2 的数学期望 $E(X^2)$ 。

解：由定理5—1(1)可知，

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

杨勇制作

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)+1]\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \right]$$

$$\overset{j=k-1}{=} \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^{j}}{j!} e^{-\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!} e^{-\lambda} \right]$$

$$= \lambda(\lambda+1)\text{。}$$

例5-9 设随机变量 X 服从参数为 p 几何分布，即 $X \sim G(p)$，求 X^2 的数学期望。

解： X 的概率分布为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots,$$

由定理5—1(1)可知，

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}$$

由微积分可知，

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, |x|<1,$$

两边同时求导得

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

两边乘x，而后再求导

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

令 $x=1-p$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}=\frac{2-p}{p^3},$$

从而 $$E(X^2)=\frac{2-p}{p^2}。$$

例5-10 设 X 服从均匀分布，即 $X \sim U[a,b]$，试求 X^2 的数学期望。

解：由定理5-1，(2)可知，

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Bigg|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3} 。$$

例5-11 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，即 $X \sim Exp(\lambda)$，试求 X^2的数学期望。

解：由定理5－1(2)可知，

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\int_0^{\infty} x^2 d(e^{-\lambda x})$$

$$= -\left[x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} 。$$

例5-12 设(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求$E(XY)$。

解：

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}$$

$$=(1\times1)\times\frac{1}{6}+(1\times2)\times\frac{1}{9}+(1\times3)\times\frac{1}{18}$$

$$+(2\times1)\times\frac{1}{3}+(2\times2)\times\frac{2}{9}+(2\times3)\times\frac{1}{9}$$

$$=\frac{25}{9}。$$

例5-13 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从 $N(0,1)$ 分布，试求

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)。$$

解：因为 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，

且 X,Y 独立，则 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\bullet\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

则

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

$$\overset{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$= \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= -\int_0^{\infty} r d\left(e^{-\frac{r^2}{2}} \right)$$

$$= -[r e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} dr]$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} 。$$

例5-14 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上均匀分布的随机变量，而经销商店的进货数量为$[10,30]$中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利500元；若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损100元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利300元。为使商店所获利润期望值达到最大，试确定进货量。

解：设进货量为 a，$10 \le a \le 30$，

且用 Y 表示利润，则

$$Y = \begin{cases} 500a + (X-a)300, a < X \le 30 \\ 500X - (a-X)100, 10 \le X \le a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 300X + 200a, a < x \le 30 \\ 600X - 100a, 10 \le X \le a \end{cases},$$

显然 Y 为 X 的函数，记 $Y = f(X)$ ，

从而期望利润为

$$EY = Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

$$= \int_{10}^{30} f(x)\frac{1}{20}dx$$

$$= \frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x - 100a)dx + \frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x + 200a)dx$$

$$= \frac{1}{20}(600\frac{x^2}{2} - 100ax)\Big|_{10}^{a} + \frac{1}{20}(300\frac{x^2}{2} + 200ax)\Big|_{a}^{30}$$

$$= -7.5a^2 + 350a + 5250\,,$$

$$\left(EY\right)' = -15a + 350 = 0\,, \qquad a = 23.33\,,$$

故为使利润期望值达最大，最佳进货量为23单位。

教材$P110$, 例5-15

例5-15 某商店按照合同每月可从某工厂得到数量为X的商品。由于各种因素的随机影响，X服从在$[10, 20]$(单位：箱)上的均匀分布，而该商店每月实际卖出的商品数量Y服从在$[10,15]$上的均匀分布。若商店能从这工厂得到足够的商品供应，则每卖出一箱商品可获利2千元；若商店不能从这工厂得到足够的商

品供应，则要通过其他途径进货时，每卖出一箱商品只能获利1千元。求该商店每月的平均利润。

解： 设商店每月的利润为Z,由题设条件知,

$$Z=f(X,Y)=\begin{cases}2Y, Y\le X\\ 2X+(Y-X), Y>X\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2Y, Y\le X\\ X+Y, Y>X\end{cases},$$

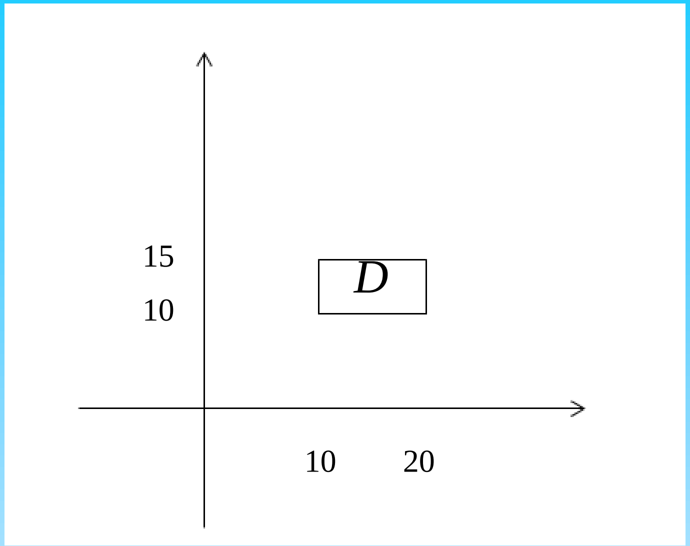
我们可以认为X和Y相互独立，则(X,Y)的联合密度函数为

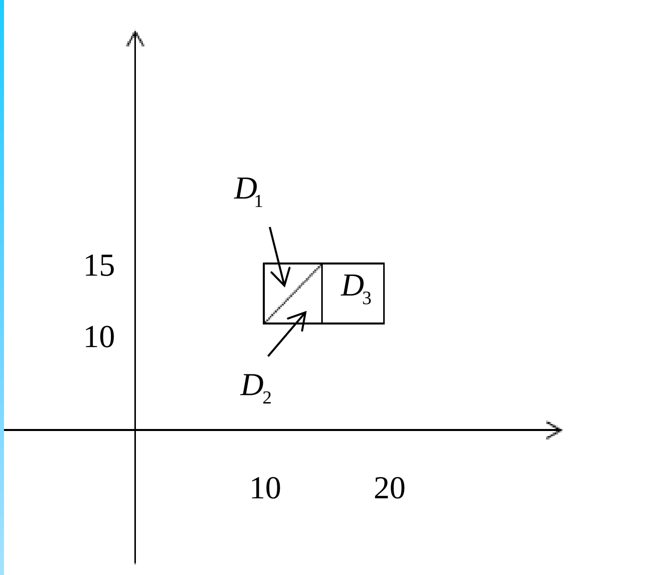
$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{50},10\le x\le 20,10\le y\le 15\\ 0\quad,\quad otherwise\end{cases},$$

则期望利润为

$$EZ=Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)dxdy$$

$$= \iint_D f(x,y)\frac{1}{50}dxdy$$





$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

$$= \iint_{D_1} (x+y)\frac{1}{50}dxdy + \iint_{D_2} 2y\frac{1}{50}dxdy + \iint_{D_3} 2y\frac{1}{50}dxdy$$

$$= \frac{1}{50}\int_{10}^{15} dx \int_{x}^{15} (x+y)dy + \frac{1}{50}\int_{10}^{15} dx \int_{10}^{x} 2ydy + \frac{1}{50}\int_{15}^{20} dx \int_{10}^{15} 2ydy$$

$$=\frac{1}{50}\left[\int_{10}^{15}\left(-\frac{3}{2}x^2+15x-\frac{225}{2}\right)dx+\int_{10}^{15}(x^2-100)dx+\int_{15}^{20}125dx\right]$$

$$=\frac{1}{50}\left(312.5+291.667+625\right)=24.58(\text{千元})。$$

三、数学期望的性质

随机变量的数学期望具有下述基本性质，其中假设性质中的数学期望均存在。

性质5-1 设 c 为常数，则

(1) $Ec = c$;

(2) $E(X + c) = EX + c$;

(3) $E(cX) = cEX$。

证明：(1) 常数 c 可看作特殊的随机变量，即 $X \equiv c$，则其概率分布为 $P(X=c)=1$，从而

$$E(c)=cP(X=c)=c。$$

(2) 仅证连续性 情形。

$$E(X+c)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+c)p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx+c\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx$$

$$=EX+c。$$

(3) 仅证离散性情形。

$$E(cX)=\sum_{k=1}^{\infty}cx_k p_k=c\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k=cEX\text{。}$$

性质5-1可概括为：$E(aX+b)=aEX+b$，其中 a,b 为常数。

性质5-2 $E(X+Y)=EX+EY$。

证明：

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy\right)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y)dy$$

$$= EX + EY。$$

性质5-2可推广为：

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i。$$

性质5-2的推广提供了求数学期望的方法。

由归纳法易证。更一般地，

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i \ ,$$

其中 $c_i, i = 1, \cdots, n$ 为常数。

性质5-3 若 X 与 Y 相互独立，则

$$E(XY) = EX \cdot EY \ 。$$

证明： 因为X和Y独立，所以，

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, \forall i, j$$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i y_j p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i y_j p_{i\bullet} p_{\bullet j}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\bullet}\left(\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\bullet j}\right)$$

$$=EY\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\bullet}$$

$$=EX\cdot EY$$

性质5-3可推广为：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = EX_1EX_2\cdots EX_n\text{。}$$

定理5-3 (柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式)

$$\left(E(XY)\right)^2 \le E(X^2)\cdot E(Y^2)\text{。}$$

证明：对任意的实数 t ，考虑

$$E(tX+Y)^2 = E(t^2X^2 + 2tXY + Y^2)$$

$$= t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2)$$

由于对于任意的实数 t 恒有

$$E(tX+Y)^2 \geq 0,$$

即 $t^2E(X^2)+2tE(XY)+E(Y^2)\geq 0$,

故判别式 $\Delta \leq 0$，即

$$\Delta = 4\left(E(XY)\right)^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0,$$

从而

$$\left(E(XY)\right)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)。$$

例5-16 设 X 服从二项分布，即 $X \sim B(n,p)$，试求 EX。

解：由第三章二项分布可知，X 可看作 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，且 $P(A)=p$，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次试验}A\text{发生}\\ 0, & \text{第}i\text{次试验}A\text{没发生}\end{cases}, i=1,2,\cdots,n,$$

则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从参数为 p 的0-1分布。易知有

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

故由性质5-2的推广知，

$$EX = EX_1 + \cdots + EX_n$$

$$= np。$$