线性代数

第六章　特征值和二次型

主讲人：张远征、张震峰、钱晓明

上海财经大学应用数学系

May 31, 2010

本章的主要内容

1. 矩阵的特征值与特征向量的概念及其性质;
2. 在相似的意义下讨论矩阵的化简, 特别是所谓的相似对角化问题, 这是矩阵特征值的核心问题.
3. 用矩阵的理论来研究二次型, 讨论二次型的标准形.

本章的主要内容

1. 矩阵的特征值与特征向量的概念及其性质;
2. 在相似的意义下讨论矩阵的化简, 特别是所谓的相似对角化问题, 这是矩阵特征值的核心问题.
3. 用矩阵的理论来研究二次型, 讨论二次型的标准形.

本章的主要内容

1. 矩阵的特征值与特征向量的概念及其性质;
2. 在相似的意义下讨论矩阵的化简, 特别是所谓的相似对角化问题, 这是矩阵特征值的核心问题.
3. 用矩阵的理论来研究二次型, 讨论二次型的标准形.

目录

1. 特征值与特征向量的概念

定义1

设A为n阶方阵，如果存在数λ以及一个n维非零列向量ξ，使得关系式

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1}$$

成立, 则称λ为ξ的一个**特征值**, 非零向量ξ为A的属于特征值λ的**特征向量**.

注1

(1) 若ξ为A的属于特征值λ的特征向量, 则$k\xi(k \neq 0)$也是属于特征值λ的特征向量;

(2) 若ξ_1, ξ_2为属于特征值λ的特征向量, 则它们的线性组合$k_1\xi_1 + k_2\xi_2(\neq 0)$也是属于特征值$\lambda$的特征向量;

(3) 属于特征值λ的特征向量的非零线性组合仍是λ的特征向量.

1. 特征值与特征向量的概念

定义1

设A为n阶方阵，如果存在数λ以及一个n维非零列向量ξ，使得关系式

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1}$$

成立, 则称λ为ξ的一个特征值, 非零向量ξ为A的属于特征值λ的特征向量.

注1

(1) 若ξ为A的属于特征值λ的特征向量, 则$k\xi(k \neq 0)$也是属于特征值λ的特征向量;

(2) 若ξ_1, ξ_2为属于特征值λ的特征向量, 则它们的线性组合$k_1\xi_1 + k_2\xi_2(\neq 0)$也是属于特征值$\lambda$的特征向量;

(3) 属于特征值λ的特征向量的非零线性组合仍是λ的特征向量.

1. 特征值与特征向量的概念

定义1

设A为n阶方阵，如果存在数λ以及一个n维非零列向量ξ，使得关系式

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1}$$

成立，则称λ为ξ的一个**特征值**，非零向量ξ为A的属于特征值λ的**特征向量**.

注1

(1) 若ξ为A的属于特征值λ的特征向量，则$k\xi(k \neq 0)$也是属于特征值λ的特征向量；

(2) 若ξ_1, ξ_2为属于特征值λ的特征向量，则它们的线性组合$k_1\xi_1 + k_2\xi_2(\neq 0)$也是属于特征值$\lambda$的特征向量；

(3) 属于特征值λ的特征向量的非零线性组合仍是λ的特征向量.

1. 特征值与特征向量的概念

定义1

设A为n阶方阵，如果存在数λ以及一个n维非零列向量ξ，使得关系式

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1}$$

成立，则称λ为ξ的一个特征值，非零向量ξ为A的属于特征值λ的特征向量.

注1

(1) 若ξ为A的属于特征值λ的特征向量，则$k\xi(k \neq 0)$也是属于特征值λ的特征向量;

(2) 若ξ_1, ξ_2为属于特征值λ的特征向量，则它们的线性组合$k_1\xi_1 + k_2\xi_2(\neq 0)$也是属于特征值$\lambda$的特征向量;

(3) 属于特征值λ的特征向量的非零线性组合仍是λ的特征向量.

1. 特征值与特征向量的概念

定义1

设A为n阶方阵，如果存在数λ以及一个n维非零列向量ξ，使得关系式

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1}$$

成立，则称λ为ξ的一个**特征值**，非零向量ξ为A的属于特征值λ的**特征向量**.

注1

(1) 若ξ为A的属于特征值λ的特征向量，则$k\xi(k \neq 0)$也是属于特征值λ的特征向量；

(2) 若ξ_1, ξ_2为属于特征值λ的特征向量，则它们的线性组合$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 (\neq 0)$也是属于特征值$\lambda$的特征向量；

(3) 属于特征值λ的特征向量的非零线性组合仍是λ的特征向量.

设A是一个n阶方阵，λ是一个未知量.

- 特征矩阵: $\lambda I - A$
- 特征多项式: $|\lambda I - A| \overset{def}{=} f(\lambda)$
- 特征方程: $|\lambda I - A| = 0$

常用术语

设A是一个n阶方阵，λ是一个未知量.

- 特征矩阵:　$\lambda I - A$
- 特征多项式:　$|\lambda I - A| \stackrel{def}{=} f(\lambda)$
- 特征方程:　$|\lambda I - A| = 0$

常用术语

设A是一个n阶方阵，λ是一个未知量.

- 特征矩阵: $\lambda I - A$
- 特征多项式: $|\lambda I - A| \overset{def}{=} f(\lambda)$
- 特征方程: $|\lambda I - A| = 0$

常用术语

设A是一个n阶方阵，λ是一个未知量.

- 特征矩阵: $\lambda I - A$
- 特征多项式: $|\lambda I - A| \overset{def}{=} f(\lambda)$
- 特征方程: $|\lambda I - A| = 0$

2. 特征值和特征向量的计算

步骤:

(1) 特征值: 求出A的特征方程$|\lambda I - A| = 0$ 的全部根λ, 它们就是A的所有特征值.

(2) 特征向量: 对于A的每一个特征值λ, 求齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$的基础解系$\xi_1, , \cdots, \xi_{n-r}$. 则$A$的属于$\lambda$的全部特征向量为

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$是不全为零的任意数.

2. 特征值和特征向量的计算

步骤:

(1) 特征值: 求出A的特征方程$|\lambda I - A| = 0$ 的全部根λ, 它们就是A的所有特征值.

(2) 特征向量: 对于A的每一个特征值λ, 求齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$的基础解系$\xi_1, , \cdots, \xi_{n-r}$. 则$A$的属于$\lambda$的全部特征向量为

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$是不全为零的任意数.

步骤:

(1) **特征值**: 求出A的特征方程$|\lambda I - A| = 0$ 的全部根λ, 它们就是A的所有特征值.

(2) **特征向量**: 对于A的每一个特征值λ, 求齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$的基础解系$\xi_1, , \cdots, \xi_{n-r}$.
则A的属于λ的全部特征向量为

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$是不全为零的任意数.

例题

例1 求上三角阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$的特征值。

例2 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

例3 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

例题

例1 求上三角阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$的特征值。

例2 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

例3 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

例题

例1 求上三角阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$的特征值。

例2 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

例3 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

3.矩阵特征值与特征向量的性质

性质1 方阵A与其转置矩阵A^T有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

($虽然A与A^T有相同特征值，特征向量却不一定相同.$)

性质2 (Vieta定理) 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$n$阶方阵$A$的$n$个特征值，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A),$$
$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

推 论 矩阵A可逆的充分必要条件是A的特征值都不为零.

性质3 可逆矩阵A与A^{-1}的特征值互为倒数.

性质1 方阵A与其转置矩阵A^T有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

(虽然A与A^T有相同特征值，特征向量却不一定相同.)

性质2 (Vieta定理) 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$n$阶方阵$A$的$n$个特征值，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A),$$
$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|.$$

推论 矩阵A可逆的充分必要条件是A的特征值都不为零.

性质3 可逆矩阵A与A^{-1}的特征值互为倒数.

3.矩阵特征值与特征向量的性质

性质1 方阵A与其转置矩阵A^T有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

(虽然A与A^T有相同特征值，特征向量却不一定相同.)

性质2 (Vieta定理) 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$n$阶方阵$A$的$n$个特征值，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A),$$
$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

推 论 矩阵A可逆的充分必要条件是A的特征值都不为零.

性质3 可逆矩阵A与A^{-1}的特征值互为倒数.

3.矩阵特征值与特征向量的性质

性质1 方阵A与其转置矩阵A^T有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

(虽然A与A^T有相同特征值，特征向量却不一定相同.)

性质2 (Vieta定理) 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$n$阶方阵$A$的$n$个特征值，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A),$$
$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

推论 矩阵A可逆的充分必要条件是A的特征值都不为零.

性质3 可逆矩阵A与A^{-1}的特征值互为倒数.

3. 矩阵特征值、特征向量的性质(续)

性质4 设λ是矩阵A的特征值, ξ是对应的特征向量, $g(x)$是一个多项式, 则$g(\lambda)$是$g(A)$的特征值, 且ξ仍是对应的特征向量.

性质5 不同特征值所对应的特征向量线性无关.

推 论 如果n阶矩阵A有n个不同的特征值, 则A有n个线性无关的特征向量.

性质6 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的$s$个互不相同的特征值, 而$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}$是$A$的分别对应于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量组, 则向量组

性质4 设λ是矩阵A的特征值, ξ是对应的特征向量, $g(x)$是一个多项式, 则$g(\lambda)$是$g(A)$的特征值, 且ξ仍是对应的特征向量.

性质5 不同特征值所对应的特征向量线性无关.

推 论 如果n阶矩阵A有n个不同的特征值, 则A有n个线性无关的特征向量.

性质6 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的$s$个互不相同的特征值, 而$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}$是$A$的分别对应于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量组, 则向量组

性质4 设λ是矩阵A的特征值, ξ是对应的特征向量, $g(x)$是一个多项式, 则$g(\lambda)$是$g(A)$的特征值, 且ξ仍是对应的特征向量.

性质5 不同特征值所对应的特征向量线性无关.

推 论 如果n阶矩阵A有n个不同的特征值, 则A有n个线性无关的特征向量.

性质6 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的$s$个互不相同的特征值, 而$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}$是$A$的分别对应于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量组, 则向量组

3. 矩阵特征值、特征向量的性质(续)

性质4 设λ是矩阵A的特征值, ξ是对应的特征向量, $g(x)$是一个多项式, 则$g(\lambda)$是$g(A)$的特征值, 且ξ仍是对应的特征向量.

性质5 不同特征值所对应的特征向量线性无关.

推 论 如果n阶矩阵A有n个不同的特征值, 则A有n个线性无关的特征向量.

性质6 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的$s$个互不相同的特征值, 而$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}$是$A$的分别对应于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量组, 则向量组

3. 矩阵特征值、特征向量的性质(续)

性质4 设λ是矩阵A的特征值, ξ是对应的特征向量, $g(x)$是一个多项式, 则$g(\lambda)$是$g(A)$的特征值, 且ξ仍是对应的特征向量.

性质5 不同特征值所对应的特征向量线性无关.

推 论 如果n阶矩阵A有n个不同的特征值, 则A有n个线性无关的特征向量.

性质6 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的$s$个互不相同的特征值, 而$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}$是$A$的分别对应于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量组, 则向量组

例题

例4 设A是三阶奇异矩阵, $|A+I|=0, |A-I|=0$, 求$A+2I$的特征值, 并求$|A+2I|$.

例5 设$|A|=0$, 求$(A^*)^2+I$的一个特征值.

例6 设n阶矩阵A适合一个多项式$g(x)$, 即$g(A)=0$. 证明: A的特征值λ也适合$g(\lambda)=0$.

例7 设$A^k=O$, 证明: A的特征值全为零.

例题

例4 设A是三阶奇异矩阵, $|A+I|=0, |A-I|=0$, 求$A+2I$的特征值, 并求$|A+2I|$.

例5 设$|A|=0$, 求$(A^*)^2+I$的一个特征值.

例6 设n阶矩阵A适合一个多项式$g(x)$, 即$g(A)=0$. 证明: A的特征值λ也适合$g(\lambda)=0$.

例7 设$A^k=O$, 证明: A的特征值全为零.

例题

例4 设A是三阶奇异矩阵, $|A+I|=0, |A-I|=0$, 求$A+2I$的特征值, 并求$|A+2I|$.

例5 设$|A|=0$, 求$(A^*)^2+I$的一个特征值.

例6 设n阶矩阵A适合一个多项式$g(x)$, 即$g(A)=0$. 证明: A的特征值λ也适合$g(\lambda)=0$.

例7 设$A^k=O$, 证明: A的特征值全为零.

例题

例4 设A是三阶奇异矩阵, $|A+I|=0, |A-I|=0$, 求$A+2I$的特征值, 并求$|A+2I|$.

例5 设$|A|=0$, 求$(A^*)^2+I$的一个特征值.

例6 设n阶矩阵A适合一个多项式$g(x)$, 即$g(A)=0$. 证明: A的特征值λ也适合$g(\lambda)=0$.

例7 设$A^k=O$, 证明: A的特征值全为零.

目录

本节的内容

本节在相似的意义下讨论n阶矩阵A的化简问题，特别是化为对角矩阵的问题。

1. 矩阵相似的定义和简单性质

定义1

设A, B都是n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵A与B**相似**，记为$A \sim B$. 如果P为正交矩阵，则称A与B**正交相似**.

矩阵相似的简单性质

(1) 自身性：$A \sim A$.

(2) 对称性：若$A \sim B$，则$B \sim A$.

(3) 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

1. 矩阵相似的定义和简单性质

定义1

设A, B都是n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵A与B相似，记为$A \sim B$．如果P为正交矩阵，则称A与B正交相似.

矩阵相似的简单性质

(1) 自身性: $A \sim A$.

(2) 对称性: 若$A \sim B$，则$B \sim A$.

(3) 传递性: 若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

1. 矩阵相似的定义和简单性质

定义1

设A, B都是n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵A与B**相似**，记为$A \sim B$. 如果P为正交矩阵，则称A与B**正交相似**.

矩阵相似的简单性质

(1) 自身性: $A \sim A$.

(2) 对称性: 若$A \sim B$，则$B \sim A$.

(3) 传递性: 若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

1. 矩阵相似的定义和简单性质

定义1

设A, B都是n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵A与B相似，记为$A \sim B$. 如果P为正交矩阵，则称A与B正交相似.

矩阵相似的简单性质

(1) 自身性: $A \sim A$.

(2) 对称性: 若$A \sim B$，则$B \sim A$.

(3) 传递性: 若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

1. 矩阵相似的定义和简单性质

定义1

设A, B都是n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵A与B**相似**，记为$A \sim B$．如果P为正交矩阵，则称A与B**正交相似**.

矩阵相似的简单性质

(1) **自身性**: $A \sim A$.

(2) **对称性**: 若$A \sim B$，则$B \sim A$.

(3) **传递性**: 若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

相似矩阵的共性

命题1

相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

注

这个结论的逆命题不成立。即便A与B有相同的特征多项式，A与B不一定相似.

推论

相似矩阵有相同的行列式和迹.

相似矩阵的共性

命题1

相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

注

这个结论的逆命题不成立。即便A与B有相同的特征多项式，A与B不一定相似.

推论

相似矩阵有相同的行列式和迹.

相似矩阵的共性

命题1

相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

注

这个结论的逆命题不成立。即便A与B有相同的特征多项式，A与B不一定相似.

推论

相似矩阵有相同的行列式和迹.

例题

例1 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}$,

求x, y.

例2 设$g(x)$是任一多项式，若$A \sim B$,

则$g(A) \sim g(B)$.

例题

例1 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}$，
求x,y.

例2 设$g(x)$是任一多项式，若$A\sim B$，
则$g(A)\sim g(B)$.

矩阵可对角化的条件

定理2

n阶方阵A可对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

推论（充分条件）

若n阶矩阵A有n个不同的特征值，则A可相似对角化.

例3 对第一节的例1和例2的两个矩阵判断它们是否相似于对角矩阵. 如果相似于对角矩阵，求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵，并写出相应的对角矩阵Λ.

矩阵可对角化的条件

定理2

n阶方阵A可对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

推论（充分条件）

若n阶矩阵A有n个不同的特征值，则A可相似对角化.

例3 对第一节的例1和例2的两个矩阵判断它们是否相似于对角矩阵. 如果相似于对角矩阵，求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP = \Lambda$为对角矩阵，并写出相应的对角矩阵Λ.

矩阵可对角化的条件

定理2

n阶方阵A可对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

推论（充分条件）

若n阶矩阵A有n个不同的特征值，则A可相似对角化.

例3 对第一节的例1和例2的两个矩阵判断它们是否相似于对角矩阵. 如果相似于对角矩阵，求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP = \Lambda$为对角矩阵，并写出相应的对角矩阵Λ.

例5 已知$A=\begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & y & 1 \end{pmatrix}$相似于$\mathrm{diag}(1,1,-2)$，求$y$的值。

例6 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，问$k$为何值时，存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵，求出$P$及对角阵。

例5 已知$A=\begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & y & 1 \end{pmatrix}$相似于diag$(1,1,-2)$，求$y$的值。

例6 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，问$k$为何值时，存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵，求出$P$及对角阵。

目录

实对称矩阵的性质

性质

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数;

(2) 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交;

(3) 实对称矩阵必与某个对角矩阵正交相似. 即对任意实对称矩阵A, 存在正交矩阵Q, 使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值.

实对称矩阵的性质

性质

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数;

(2) 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交;

(3) 实对称矩阵必与某个对角矩阵正交相似. 即对任意实对称矩阵A, 存在正交矩阵Q, 使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值.

实对称矩阵的性质

性质

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数;

(2) 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交;

(3) 实对称矩阵必与某个对角矩阵正交相似. 即对任意实对称矩阵A, 存在正交矩阵Q, 使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值.

正交相似对角化的具体方法

1^o 求出n阶矩阵A的所有特征值:$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

2^o 求对应的n个线性无关的特征向量:$\xi_1, \cdots, \xi_n$;

3^o 对特征向量Schmidt正交化, 标准化: $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$.

令$Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, 则

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

正交相似对角化的具体方法

1^o 求出n阶矩阵A的所有特征值:$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

2^o 求对应的n个线性无关的特征向量:$\xi_1, \cdots, \xi_n$;

3^o 对特征向量Schmidt正交化, 标准化: $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$.

令$Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, 则

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

正交相似对角化的具体方法

1^o 求出n阶矩阵A的所有特征值:$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

2^o 求对应的n个线性无关的特征向量:$\xi_1, \cdots, \xi_n$;

3^o 对特征向量Schmidt正交化, 标准化: $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$.

令$Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, 则

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

正交相似对角化的具体方法

1^o 求出n阶矩阵A的所有特征值:$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

2^o 求对应的n个线性无关的特征向量:$\xi_1, \cdots, \xi_n$;

3^o 对特征向量Schmidt正交化, 标准化: $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$.

令$Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, 则

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

例

例1 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵$Q$和对角阵$\Lambda$，使$Q^{-1}AQ=\Lambda$.

目录

1.实二次型

n个变量的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{array}{r} a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +a_{nn}x_n^2 \end{array}$$

称为关于变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一个n元二次型.

若$a_{ij}\in\mathbb{R},(i\le j)$, 则称其为实二次型.

1.实二次型

n个变量的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{array}{r} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ +a_{nn}x_n^2 \end{array}$$

称为关于变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一个n元二次型.

若$a_{ij} \in \mathbb{R}, (i \le j)$, 则称其为实二次型.

2.二次型的矩阵表达式

令$a_{ji} = a_{ij}, (i \leq j)$, 并记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中A是实对称矩阵, 即$A^T = A$. 则二次型就有矩阵表达式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$$

称实对称矩阵A为二次型矩阵. 矩阵A的秩为二次型的秩.

注 实对称矩阵A与二次型f成一一对应关系.

令$a_{ji}=a_{ij}, (i \le j)$, 并记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中A是实对称矩阵, 即$A^T=A$. 则二次型就有矩阵表达式:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$$

称实对称矩阵A为二次型矩阵. 矩阵A的秩为二次型的秩.

注 实对称矩阵A与二次型f成一一对应关系.

例

例1 求下列二次型对应的矩阵A.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$$

例2 设$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\-5&-2&1\\-1&3&3\end{pmatrix}$. 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TBX$的矩阵.

例

例1 求下列二次型对应的矩阵A.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$$

例2 设$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\-5&-2&1\\-1&3&3\end{pmatrix}$. 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TBX$的矩阵.

1. 标准形的定义

只含有平方项的二次型

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

称为二次型的标准形. 对应的矩阵为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

标准形的秩等于$d_1, d_2, \cdots, d_n$中非零元素的个数.

2. 线性替换

关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的一个**线性替换**. $C = (c_{ij})$称为**线性替换的系数矩阵**.

- 如果C可逆, 称为可逆(非退化)线性替换;
- 如果C为正交矩阵, 则称为正交线性替换.

线性替换的矩阵形式: $X = CY$

关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的一个线性替换. $C = (c_{ij})$称为线性替换的系数矩阵.

- 如果C可逆, 称为可逆(非退化)线性替换;
- 如果C为正交矩阵, 则称为正交线性替换.

线性替换的矩阵形式: $X = CY$

关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的一个线性替换. $C = (c_{ij})$称为线性替换的系数矩阵.

- 如果C可逆, 称为可逆(非退化)线性替换;
- 如果C为正交矩阵, 则称为正交线性替换.

线性替换的矩阵形式: $X = CY$

关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的一个线性替换. $C = (c_{ij})$称为线性替换的系数矩阵.

- 如果C可逆, 称为可逆(非退化)线性替换;
- 如果C为正交矩阵, 则称为正交线性替换.

线性替换的矩阵形式: $X = CY$

定义—合同

设A, B为n阶方阵. 如果存在可逆矩阵C, 使

$$C^T AC = B,$$

则称A与B合同.

简单性质

- 自反性: A与A合同;
- 对称性: 若A与B合同, 则B与A合同;
- 传递性: 若A与B合同, B与C合同, 则A与C合同.

3.矩阵的合同

定义—合同

设A, B为n阶方阵. 如果存在可逆矩阵C, 使

$$C^T AC = B,$$

则称A与B合同.

简单性质

- 自反性: A与A合同;
- 对称性: 若A与B合同, 则B与A合同;
- 传递性: 若A与B合同, B与C合同, 则A与C合同.

3.矩阵的合同

定义—合同

设A, B为n阶方阵. 如果存在可逆矩阵C, 使

$$C^TAC = B,$$

则称A与B合同.

简单性质

- 自反性：A与A合同;
- 对称性：若A与B合同, 则B与A合同;
- 传递性：若A与B合同, B与C合同, 则A与C合同.

3.矩阵的合同

定义—合同

设A, B为n阶方阵. 如果存在可逆矩阵C, 使

$$C^T AC = B,$$

则称A与B合同.

简单性质

- 自反性: A与A合同;
- 对称性: 若A与B合同, 则B与A合同;
- 传递性: 若A与B合同, B与C合同, 则A与C合同.

3.矩阵的合同

定义—合同

设A, B为n阶方阵. 如果存在可逆矩阵C, 使

$$C^T AC = B,$$

则称A与B合同.

简单性质

- 自反性: A与A合同;
- 对称性: 若A与B合同, 则B与A合同;
- 传递性: 若A与B合同, B与C合同, 则A与C合同.

3.矩阵的合同

定理

经过可逆(非退化)线性替换，原二次型矩阵与新二次型矩阵合同.

Table: 二次型化标准形与合同对角化比较

$f = X^T AX$	$A(A^T = A)$
线性替换: $X = CY$	可逆矩阵 C
标准型: $f = Y^T(C^T AC)Y = Y^T \Lambda Y$	合同对角化: $C^T AC = \Lambda$

方法1—正交线性替换法

定理

任意n元实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$, 都存在正交线性替换$X = QY$, 使二次型$f$化为标准形:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为实对称矩阵$A$的特征值.

方法:

(1) 写出二次型对应的矩阵A;

(2) 求出正交矩阵Q, 使

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n);$$

(3) 作正交线性替换$X = QY$, 则$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

方法1—正交线性替换法

定理

任意n元实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^TAX$, 都存在正交线性替换$X = QY$, 使二次型$f$化为标准形:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为实对称矩阵$A$的特征值.

方法:

(1) 写出二次型对应的矩阵A;

(2) 求出正交矩阵Q, 使

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n);$$

(3) 作正交线性替换$X = QY$, 则$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

方法1—正交线性替换法

定理

任意n元实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$，都存在正交线性替换$X = QY$，使二次型$f$化为标准形:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为实对称矩阵$A$的特征值.

方法:

(1) 写出二次型对应的矩阵A;

(2) 求出正交矩阵Q，使

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n);$$

(3) 作正交线性替换$X = QY$，则$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

方法1—正交线性替换法

定理

任意n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$, 都存在正交线性替换$X=QY$, 使二次型$f$化为标准形:

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为实对称矩阵$A$的特征值.

方法:

(1) 写出二次型对应的矩阵A;

(2) 求出正交矩阵Q, 使

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n);$$

(3) 作正交线性替换$X=QY$, 则$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

方法1—正交线性替换法

定理

任意n元实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^TAX$, 都存在正交线性替换$X = QY$, 使二次型$f$化为标准形:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为实对称矩阵$A$的特征值.

方法:

(1) 写出二次型对应的矩阵A;

(2) 求出正交矩阵Q, 使

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n);$$

(3) 作正交线性替换$X = QY$, 则$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

例3 用正交线性替换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形，并求出替换矩阵.

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1, \cdots, x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1, \cdots, x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 16x_2x_3$;
2. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

方法2—配方法

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1, \cdots, x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1, \cdots, x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 16x_2x_3$;
2. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1,\cdots,x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1,\cdots,x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-16x_2x_3$;
2. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3$;
3. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

方法2—配方法

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1,\cdots,x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1,\cdots,x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-16x_2x_3$;
2. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3$;
3. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1,\cdots,x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1,\cdots,x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-16x_2x_3$;
2. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3$;
3. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1, \cdots, x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1, \cdots, x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 16x_2x_3$;
2. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

方法2—配方法

配方法是一种配完全平方的初等方法.

(1) $f(x_1,\cdots,x_n)$中有平方项: 直接配完全平方;

(2) $f(x_1,\cdots,x_n)$中无平方项: 先化成有平方项的二次型, 然后再配完全平方.

例4 用配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-16x_2x_3$;
2. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3$;
3. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

方法3—初等变换法

构造矩阵$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$, 对$A$施行初等行变换, 对$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$作完全同类型的初等列变换, 经过有限次的这样成对初等行列变换:

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

则Λ为标准形矩阵, C为可逆替换矩阵.

例5 用初等变换法化二次型为标准形.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

方法3—初等变换法

构造矩阵$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$, 对$A$施行初等行变换, 对$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$作完全同类型的初等列变换, 经过有限次的这样成对初等行列变换:

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

则Λ为标准形矩阵, C为可逆替换矩阵.

例5 用初等变换法化二次型为标准形.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

形如

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

的标准形称为二次型的规范形.

惯性定理

任何一个实二次型都可以经过实系数的可逆线性替换化为规范形，且规范形是唯一的.

5.二次型的规范形

形如

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

的标准形称为二次型的规范形.

惯性定理

任何一个实二次型都可以经过实系数的可逆线性替换化为规范形, 且规范形是唯一的.

续

定义

规范形中正平方项的数目p称为正惯性指数; 负平方项的数目$r-p$称为负惯性指数; 正惯性指数与负惯性指数之差$2p-r$称为二次型的符号差; r称为二次型的秩.

注 标准形中正(负)系数的个数为正(负)惯性指数.

定义

规范形中正平方项的数目p称为**正惯性指数**; 负平方项的数目$r-p$称为**负惯性指数**; 正惯性指数与负惯性指数之差$2p-r$称为二次型的**符号差**; r称为二次型的**秩**.

注 标准形中正(负)系数的个数为正(负)惯性指数.

惯性定理的推论

推论

两个同阶实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数.

例6 求二次型的正负惯性指数.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

惯性定理的推论

推论

两个同阶实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数.

例6 求二次型的正负惯性指数.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

定义—正定二次型

设A为实对称矩阵, 对应的二次型为$f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$. 如果对任意一组不全为零的实数$c_1,\cdots,c_n$都有$f(c_1,\cdots,c_n)>0$, 则称二次型f为正定二次型. 二次型的矩阵A为正定矩阵.

注 正定矩阵一定是对称矩阵.

定义—正定二次型

设A为实对称矩阵, 对应的二次型为$f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$. 如果对任意一组不全为零的实数$c_1,\cdots,c_n$都有$f(c_1,\cdots,c_n)>0$, 则称二次型f为**正定二次型**. 二次型的矩阵A为**正定矩阵**.

注 正定矩阵一定是对称矩阵.

简单性质

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
   (合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A+B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A|>0$.

简单性质

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
   (合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A+B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A|>0$.

简单性质

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
   (合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A + B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A| > 0$.

简单性质

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
   (合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A+B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A|>0$.

简单性质

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
   (合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A+B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A|>0$.

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
(合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A+B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A|>0$.

简单性质

简单性质

1. 非退化线性替换不改变二次型的正定性;
   (合同不改变对称矩阵的正定性)
2. 若A, B为正定矩阵, 则$A+B$为正定矩阵;
3. 若A为正定矩阵, 则A^{-1}, A^*为正定矩阵;
4. 若A为正定矩阵, 则$|A|>0$.

正定性的判定定理

定理

二次型$f = X^TAX$(或实对称矩阵A) 正定的充分必要条件是下列之一成立:

1. A的特征值全大于零;
2. f的正惯性指数为n;
3. A与单位矩阵合同; 即存在可逆矩阵C, 使得$A = C^TC$
4. A的各阶顺序主子式均大于零.

正定性的判定定理

定理

二次型$f = X^TAX$(或实对称矩阵A) 正定的充分必要条件是下列之一成立:

1. A的特征值全大于零;
2. f的正惯性指数为n;
3. A与单位矩阵合同; 即存在可逆矩阵C, 使得$A = C^TC$
4. A的各阶顺序主子式均大于零.

正定性的判定定理

定理

二次型$f = X^T AX$(或实对称矩阵A) 正定的充分必要条件是下列之一成立:

1. A的特征值全大于零;
2. f的正惯性指数为n;
3. A与单位矩阵合同; 即存在可逆矩阵C, 使得$A = C^T C$
4. A的各阶顺序主子式均大于零.

正定性的判定定理

定理

二次型$f = X^TAX$(或实对称矩阵A) 正定的充分必要条件是下列之一成立:

1. A的特征值全大于零;
2. f的正惯性指数为n;
3. A与单位矩阵合同; 即存在可逆矩阵C, 使得$A = C^TC$
4. A的各阶顺序主子式均大于零.

定理

二次型$f = X^TAX$(或实对称矩阵A) 正定的充分必要条件是下列之一成立:

1. A的特征值全大于零;
2. f的正惯性指数为n;
3. A与单位矩阵合同; 即存在可逆矩阵C, 使得$A = C^TC$
4. A的各阶顺序主子式均大于零.

例

例1 t取何值时, 下列二次型为正定的.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

例2 设实对称矩阵A满足$A^2 - 2A - 3I = 0$, 证明: $A + 2I$正定.

例3 设A为$m \times n$阶实矩阵, 证明:A^TA正定当且仅当$r(A) = n$.

例

例1 t取何值时, 下列二次型为正定的.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

例2 设实对称矩阵A满足$A^2 - 2A - 3I = 0$, 证明: $A + 2I$正定.

例3 设A为$m \times n$阶实矩阵, 证明:$A^T A$正定当且仅当$r(A) = n$.

例1 t取何值时, 下列二次型为正定的.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

例2 设实对称矩阵A满足$A^2 - 2A - 3I = 0$, 证明: $A + 2I$正定.

例3 设A为$m \times n$阶实矩阵, 证明:$A^T A$正定当且仅当$r(A) = n$.