第二节 极限的概念与性质

一、数列极限的定义与几何意义

按照一定的顺序排列的一列数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

称为一个数列．其中第n项a_n称为数列的通项．我们通常把这一数列简记为$\{a_n\}$.

例如：(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$

(2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(3) $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, \cdots.(-1)^n, \cdots$

(4) $\{3n\}: 3, 6, 9, \cdots, 3n, \cdots$

(5) $\left\{\frac{1+2^n}{2^n}\right\}: \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \cdots, \frac{1+2^n}{2^n}, \cdots$

都是数列，它们的通项公式依次写在 " {} " 内．数列$\{a_n\}$可看作是定义在自然数集上的函数：$a_n = f(n), n = 1, 2\cdots$. 这样的函数习惯上称之为整标函数.

现考察当自变量n无限增大时，通项a_n的变化趋势．不难看出，上面数列(1)，(2)和(5)中，通项a_n无限趋向于某个确定的数；而数列(3)与(4)中，通项a_n不趋向于某个确定的数.

一般地，数列的极限有如下的定义：

设数列$\{a_n\}$，当项数n无限增大时，如果通项a_n无限趋近于某个常数A，则称A为数列$\{a_n\}$的极限．记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

于是我们可得前述的三个极限为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{2^n} = 1$．而$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$和$\lim_{n\to\infty}3n$均不存在.

我们也称极限存在的数列为收敛数列；称极限不存在的数列为发散数列．如：$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$和$\left\{\frac{1+2^n}{2^n}\right\}$都是收敛的数列；$\{(-1)^n\}$和$\{3n\}$都是发散数列.

下面对数列极限的概念作进一步分析．所谓a_n无限趋近于A，即$|a_n - A|$无限趋近于零．以数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$为例作如下分析：它的一般项随项数$n$的无限增大而无限接近于数1，就是指$n$无限增大时，$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$可以任意小．即无论给定一个多么小的正数$\varepsilon$，从某项起，以后各项都满足$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$小于给定的正数$\varepsilon$．由于

$$|a_n - A| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

若要$|a_n - 1| < \frac{1}{100}$，即$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$，得$n > 99$，这表示从数列的第100项起，以后各项与1之差的绝对值都小于$\frac{1}{100}$；也就是说，如果给定一个正数$\varepsilon = \frac{1}{100}$，则可以找到项号99，当项数$n > 99$时(即从100项开始)，以后各项都满足$|a_n - 1| < \frac{1}{100}$.

若要$|a_n - 1| < \frac{1}{1000}$，即$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$，得$n > 999$，这表示从数列的第1000项起，以后各项与1之差的绝对值都小于$\frac{1}{1000}$.

一般地，若要$|a_n - 1| < \varepsilon$(ε是任意给定的一个充分小的正数)，即$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$，得$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$，这表示对于项数$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$的以后各项，总有$|a_n - 1| < \varepsilon$成立．由于$\varepsilon$是任意给定的充分小的正数，不等式$|a_n - 1| < \varepsilon$就刻划了数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限为1这个事实.

定义1.8（$\varepsilon - N$分析定义）对于任意给定的充分小正数ε，总存在一个正整数N，当项数$n > N$时，$|a_n - A| < \varepsilon$恒成立，则称A是数列$\{a_n\}$的极限．记作$\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

上述定义可叙述如下(“∀” 表示任给的(或任意的)，“∃” 表示存在)：

$\forall \varepsilon > 0$，∃正整数N，当$n > N$时，有$|a_n - A| < \varepsilon$．则$\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

在上述定义中，值得注意的是：ε是任意给定的小正数，N随ε变化而变化且不唯一，事实上，如果当$n > N$时，有$|a_n - A| < \varepsilon$成立，那么当$n > N + 1$，$n > N + 2$，$\cdots$，显然也有$|a_n - A| < \varepsilon$成立，可见N的取法并不唯一，只要它存在就可以.

例1 用定义验证$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n - 1}{10^n} = 1$.

证：$\forall \varepsilon > 0$，要使$\left|\frac{10^n - 1}{10^n} - 1\right| < \varepsilon$成立，即$10^n > \frac{1}{\varepsilon}$，得$n > \lg\frac{1}{\varepsilon}$．取$N = \max\{1, [\lg\frac{1}{\varepsilon}]\}$，可见，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \max\{1, [\lg\frac{1}{\varepsilon}]\}$，当$n > N$时，有$\left|\frac{10^n - 1}{10^n} - 1\right| < \varepsilon$成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n - 1}{10^n} = 1.$$

例2'. 已知 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证: $|x_n - 0| = \left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon} - 1]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - 0| < \varepsilon$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$

也可由 $|x_n - 0| = \frac{1}{(n+1)^2}$

取 $N = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1]$

说明: N 与 ε 有关, 但不唯一.
不一定取最小的 $\boldsymbol{N}$.
$|x_n - 0| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, 故也可取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$

例2 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1$.

证: $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 成立，即

$$\sqrt{n^2+n} + n > \sqrt{n^2} + n = 2n > \tfrac{1}{\varepsilon}$$

成立，只要 $2n > \frac{1}{\varepsilon}$ 成立即可．取 $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，可见，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 成立，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1$.

例3 设 $|q| < 1$，证明等比数列

$$1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$$

的极限为0.

证: 对任意给定的常数 ε(可设 $\varepsilon < 1$)，要使

$$|q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon$$

取自然对数得

$$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon.$$

因为 $|q| < 1$ 即 $\ln|q| < 0$，则只要

$$n - 1 > \tfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},$$

即

$$n > 1 + \tfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此，对于任给的 $\varepsilon > 0$，取 $N = [1 + \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$，当 $n > N$ 时，就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon$$

恒成立，故当 $|q| < 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$.

例4 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 故存在 N_0, 使得当 $n > N_0$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$N > \max\{N_0, \frac{2|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A|}{\varepsilon}\},$$

则当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A}{n} + \frac{(a_{N_0+1} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}\right| \\
\leqslant\ & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \\
\leqslant\ & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 A|}{N} + \frac{n - N_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
<\ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$. □

例4 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$.

证: $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，故 $\exists$ 正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

记 $M = |a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{N_1} - A|$，因此，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0$. 于是 $\exists$ 正整数 N_2 时，当 $n > N_2$ 时，有 $\frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - A\right| \\
&= \tfrac{|a_1-A+a_2-A+\cdots+a_{N_1}-A+a_{N_1+1}-A+\cdots+a_n-A|}{n} \\
&\leq \tfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{N_1}-A|}{n} + \tfrac{|a_{N_1+1}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n} \\
&< \tfrac{M}{n} + \tfrac{n-N_1}{n}\cdot\tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

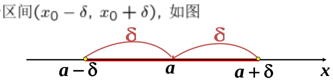
即得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A.$$

在此，先复习一下邻域的概念，然后再说明数列极限的几何意义.

定义1.8 设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域.

显然，点 x_0 的 δ 邻域即表示以点 x_0 为中心，δ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$，如图



因为不等式$|x_n - A| < \varepsilon$与不等式$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$等价，因此，我们可以得出数列极限的几何意义.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$在几何上表示凡是下标$n$大于$N$的各项$a_n$所对应的无穷多个点$a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$全都落在点$A$的$\varepsilon$邻域之内，而在邻域之外至多只有$N$ 个点.