例10－1 设$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ y+z=a\end{cases}(a>0)$，求$\oint_L y^2ds$.

解 将$z=a-y$代入$x^2+y^2+z^2=a^2$，得

$$x^2+y^2+(y-a)^2=a^2 \Rightarrow x^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}a)^2=(\frac{1}{\sqrt{2}}a)^2$$

令$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,\sqrt{2}y-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta$，则将$L$化成参数式：

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta,\ z=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$$

$$\therefore ds=\sqrt{(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta)^2+(\frac{a}{2}\cos\theta)^2+(-\frac{a}{2}\cos\theta)^2}d\theta=\frac{a}{\sqrt{2}}d\theta$$

$$\therefore \oint_L y^2ds=\int_0^{2\pi}(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta)^2\frac{a}{\sqrt{2}}d\theta$$

$$=\frac{a^3}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)^2\frac{a}{\sqrt{2}}d\theta$$

$$=\frac{3\pi a^3}{4\sqrt{2}}.$$

例10－2 求$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds$， L：四叶玫瑰线$(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$在第一象限的一支.

解 将四叶玫瑰线写成坐标形式，有

$$r=a\sin 2\theta(0\le\theta\le\pi)$$

$$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\sqrt{(a\sin 2\theta)^2+(a\sin 2\theta)'^2}d\theta$$

$$=a\sqrt{(\sin 2\theta)^2+4(\cos 2\theta)^2}d\theta$$

$$\therefore \oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin 2\theta\cdot a\sqrt{(\sin 2\theta)^2+4(\cos 2\theta)^2}d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3(\cos 2\theta)^2}\sin 2\theta d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}dt\quad(t=\sqrt{3}\cos 2\theta)$$

$$=\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]a^2.$$

例10－3 求$\oint_L x^2ds$， L：圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0\end{cases}$

解 $\oint_L x^2ds=\oint_L y^2ds=\oint_L z^2ds$

$$\therefore \oint_L x^2ds=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\frac{1}{3}\oint_L a^2ds=\frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a.$$

例10－4 求$\int_L xdy-ydx$， L：沿摆线$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，从$O(0,0)$到$A(2\pi,0)$的一段.

解 $\int_L xdy-ydx=\int_0^{2\pi}\left[(t-\sin t)\cdot\sin t-(1-\cos t)^2\right]dt$

$$=\int_0^{2\pi}(t\sin t-2+2\cos t)dt$$

$$=-6\pi.$$

例10－5 求$\int_L \frac{x}{2}dx+ydy+zdz$,

L: 圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y=z\end{cases}$在第一卦限从$A(1,0,0)$到$B(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$一段.

解 $x=\cos t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\quad t:0\to\frac{\pi}{2}$.

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos t\cdot(-\sin t)+\frac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\cos t\right]dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt=\frac{1}{4}$

例10－6 求$\oint_L xy^2dy-x^2ydx$,

L: 圆$x^2+y^2=a^2(a>0)$依逆时针一周.

解 $P(x,y)=-x^2y,\ Q(x,y)=xy^2$,

记$D: x^2+y^2\le a^2$,利用格林公式,得

原式$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)-\frac{\partial}{\partial y}(-x^2y)\right]dxdy$

$=\iint_D(x^2+y^2)dxdy\ =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\pi a^4$

例10－7 求$\int_{ANO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$,

ANO: 从$A(a,0)$到$O(0,0)$的上半圆周$(a>0)$.

解 补充$\overline{OA}$. 显然在$\overline{OA}$上的积分值为0,于是有

$$\int_{ANO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\oint_{ANOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le ax}\left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-m)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-my)\right]dxdy$$

$$=\iint_{\substack{x^2+y^2\le ax\\ y\ge 0}}(e^x\cos y-e^x\cos y+m)dxdy$$

$$=m\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2m}{8}$$

例10－8 求$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,

$L: x^2+y^2=a^2(a>0)$逆时针一周.

解 先将x^2+y^2替换为a^2,再用格林公式.

原式$=\oint_L\frac{xdy-ydx}{a^2}=\frac{1}{a^2}\oint_L xdy-ydx$

$=\frac{1}{a^2}\iint_{x^2+y^2\le a^2}2dxdy=\frac{1}{a^2}\cdot 2\pi a^2=2\pi$

例10－9 求$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, L: 以点$(1,0)$为中心,$R(R>0)$为半径的圆周,取逆时针方向.

解 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad(4x^2+y^2\ne 0)$$

取$\gamma: 4x^2+y^2=\delta^2(\delta>0)$使此椭圆含于$L$内,

取逆时针一周,记$D: 4x^2+y^2\le\delta^2$,则有

原式$=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_L xdy-ydx\ =\frac{1}{\delta^2}\iint_D 2dxdy$

$=\frac{1}{\delta^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\delta}{2}\cdot\delta=\pi$

例10－10 求$\int_L\frac{yzdx+zxdy+xydz}{1+x^2y^2z^2}$,

L: 从$(1,1,1)$到$(1,1,\sqrt{3})$的直线段.

解 $\because\ \frac{yzdx+zxdy+xydz}{1+x^2y^2z^2}=\frac{d(xyz)}{1+(xyz)^2}$

$=d\left[\arctan(xyz)+C\right]$

$\therefore u=\arctan(xyz)+C$

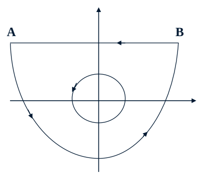
$\therefore$ 原式$=\arctan(xyz)\Big|_{(1,1,1)}^{(1,1,\sqrt{3})}=\frac{\pi}{12}$

例10−11 求 $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$,

L: 抛物线 $y=2x^2-1$ 从 $A(-1,1)$ 到 $B(1,1)$ 一段弧.

解 $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x+y}{4x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$



补充直线段 $\overline{BA}$, 在 $\overline{BA}$ 上,

$y=1$, x 从1变到-1,

取以原点为心, 半径 $\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圆 γ 逆时针一周, 则

$$\int_{BA}=\int_1^{-1}\frac{x-1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{原式}=\oint_\gamma-\int_{BA}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{[(\varepsilon\cos t-\varepsilon\sin t)(-\varepsilon\sin t)+(\varepsilon\cos t+\varepsilon\sin t)(\varepsilon\cos t)]}{\varepsilon^2}dt-\frac{\pi}{2}$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$ ▮

例10−12 求 $\int_L\left[x\sin\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{4}+(y-1)^2+4y\right]ds$,

L: 椭圆 $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$.

解 由于积分弧段关于y轴对称, 被积函数关于x为连续的奇函数, 故 $\int_L x\sin\sqrt{x^2+y^2}\,ds=0$

又 $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$

故 $\int_L\left[\frac{x^2}{4}+(y-1)^2\right]ds=L$ (L为椭圆的全长)

而 $\int_L 4yds=4\int_L yds$

又 L的重心在$(0,1)$.由公式 $\bar{y}=\frac{\int_L yds}{\int_L ds}$,得

$$\int_L yds=\bar{y}L=1\cdot L$$

$$\int_L 4yds=4L$$

总之, 原式 $=0+L+4L=5L$

又 $L=\pi\left[1.5(a+b)-\sqrt{ab}\right]$,且$a=2,b=1$ 得

$$L=\pi\left[1.5(2+1)-\sqrt{2\cdot 1}\right]=\pi\left(4.5-\sqrt{2}\right)$$

$\therefore$ 原式 $=5\pi\left(4.5-\sqrt{2}\right)$ ▮

例10−13 求 $\iint_\Sigma zds$, Σ: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部分.

解 记 $D:(x-1)^2+y^2\le 1$

$\because z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$ds=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

$$\iint_\Sigma zdS=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{32}{9}\sqrt{2}$$ ▮

例10−14 求 $\oiint_\Sigma\left(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2\right)dS$,

Σ: 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

解 注意到 $\oiint_\Sigma x^2dS=\oiint_\Sigma y^2dS=\oiint_\Sigma z^2dS$

$$\text{原式}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\oiint_\Sigma x^2dS$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}\oiint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}\oiint_\Sigma a^2dS$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 4\pi a^2=\frac{7}{3}\pi a^4$$ ▮

例10－15 求$\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|)^2 dS$，

Σ:八面体$|x|+|y|+|z|\le 1$ 的表面.

解 设Σ_1是Σ在第一卦限的部分,则Σ_1的方程为

$z=1-x-y$， Σ_1在xOy面上投影域

$D: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x,$

则$dS=\sqrt{3}dxdy$

$$\therefore \oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|)^2 dS=8\oiint\limits_{\Sigma_1}(|x|+|y|)^2 dS$$

$$=8\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+2xy)dS$$

$$=8\left[\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+xy)dS+\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2+xy)dS\right]$$

$$=16\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+xy)dS$$

$$=16\sqrt{3}\iint\limits_{D}(x^2+xy)dxdy$$

$$=16\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+xy)dy$$

$$=16\sqrt{3}\int_0^1\frac{1}{2}(x-x^3)dx=2\sqrt{3}$$ ▮

例10－16 求$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{e^z dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$， Σ:锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$, $z=2$所围成的立体表面的外侧.

解 将Σ分成$\Sigma_1: z=2\ \ \left(x^2+y^2\le 4\right)$,取上侧;

$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}\ \left(1\le x^2+y^2\le 4\right)$,取下侧;

$\Sigma_3: z=1\ \ \left(x^2+y^2\le 1\right)$,取下侧,

再记

$D_1: x^2+y^2\le 4$, $D_2: 1\le x^2+y^2\le 4$, $D_3: x^2+y^2\le 1$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{e^z dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{e^z dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{e^z dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\iint\limits_{D_1}\frac{e^2 dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\iint\limits_{D_2}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{e dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=e^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{1}{r}\bullet r dr+\left(-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^r dr\right)+\left(-e\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\right)$$

$$=4\pi e^2+2\pi\left(e-e^2\right)+\left(-2\pi e\right)=2\pi e^2$$ ▮

例10－17 求$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x}dydz+\dfrac{1}{y}dzdx+\dfrac{1}{z}dxdy$，

Σ:椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧$\left(a>0,b>0,c>0\right)$

解 此题不可用高斯公式,因为不满足公式条件.

设Σ_1,Σ_2为上半椭球面的上侧和下半球面的下侧,

则两曲面在xOy面上投影域为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$.

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dxdy=\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{1}{z}dxdy+\oiint\limits_{\Sigma_2}\frac{1}{z}dxdy$$

$$=\frac{2}{c}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{2}{c}\bullet 4\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$=\frac{8}{c}\int_0^a\left[\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\Bigg|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right]dx=\frac{4\pi abc}{c^2}$$

类似地,有$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{dydz}{x}=\dfrac{4\pi abc}{a^2}$， $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{dzdx}{y}=\dfrac{4\pi abc}{b^2}$.

$\therefore$ 原式$=4\pi abc\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$. ▮

例10－18 求$\oiint\limits_{\Sigma}\left|x-\frac{a}{3}\right|dydz+\left|y-\frac{2b}{3}\right|dzdx+\left|z-\frac{c}{4}\right|dxdy$,

Σ:六面体$0\le x\le a$,$0\le y\le b$,$0\le z\le c$的外表面.

解 $I_1=\oiint\limits_{\Sigma}\left|x-\frac{a}{3}\right|dydz=\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}\left(a-\frac{a}{3}\right)dydz-\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}\left|0-\frac{a}{3}\right|dydz$

$=\frac{2}{3}a\cdot bc-\frac{1}{3}a\cdot bc=\frac{1}{3}abc$.

类似地,有$I_2=\oiint\limits_{\Sigma}\left|y-\frac{2b}{3}\right|dzdx=-\frac{abc}{3}$,

$I_3=\oiint\limits_{\Sigma}\left|z-\frac{c}{4}\right|dxdy=\frac{abc}{2}$.

$\therefore$ 原式$=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{2}abc$. ▌

例10－19 求$\oiint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$,

Σ:球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外侧.

解 记 $\Omega:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$

利用高斯公式,有

原式$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$

作坐标平移,令 $x=\xi+a$, $y=\eta+b$, $z=\zeta+c$,

原式$=2\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le R^2}(\xi+\eta+\zeta+a+b+c)d\xi d\eta d\zeta$

$=2\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le R^2}(a+b+c)d\xi d\eta d\zeta$

$=\frac{8\pi}{3}R^3(a+b+c)$. ▌

例10－20 求$\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$,

Σ:曲面$z=x^2+y^2+1$ $(1\le z\le 2)$的下侧.

解 补充 $\Sigma_1:\begin{cases}z=2\\x^2+y^2\le 1\end{cases}$取上侧,

原式$=\left\{\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\right\}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$

$=\iiint\limits_{\Omega}dv-\iint\limits_{D_{xy}}(9-2^3)dxdy$

$=\int_1^2\pi(z-1)dz-\pi=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$. ▌

例10－21 求$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{a}(x^4+y^4+z^4)dS$,

$\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.

解 Σ上点(x,y,z)处外法线方向余弦为

$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{a}$, $\cos\beta=\frac{y}{a}$, $\cos\gamma=\frac{z}{a}$.

原式$=\oiint\limits_{\Sigma}(x^3\frac{x}{a}+y^3\frac{y}{a}+z^3\frac{z}{a})dS$

$=\oiint\limits_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$

$=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2}(x^2+y^2+z^2)dv=\frac{12}{5}\pi a^5$. ▌

例10－22 求$\oint\limits_{L}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,

L:平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从z轴正向看去,L取逆时针方向.

解 记Σ为$x+y+z=2\ (|x|+|y|\le 1)$,取上侧.$D:|x|+|y|\le 1$.

原式

$=\iint\limits_{\Sigma}(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$

$=\iint\limits_{\Sigma}(-2y-4z,-2z-6x,-2x-2y)\cdot(1,1,1)dxdy$

$=\iint\limits_{\Sigma}(-8x-4y-6z)dxdy=\iint\limits_{D}\left[-8x-4y-6(2-x-y)\right]dxdy$

$=-2\iint\limits_{D}(x-y+6)dxdy=-12\iint\limits_{D}dxdy=-24$. ▌

例10－23 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ:包围原点的一闭合曲面,取外侧.

解 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则$P=xr^{-3}$,$Q=yr^{-3}$,$R=zr^{-3}$,

则$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=r^{-3}+x\cdot(-3)r^{-4}\cdot\frac{x}{r}+r^{-3}+y\cdot(-3)r^{-4}\cdot\frac{y}{r}$

$+r^{-3}+z\cdot(-3)r^{-4}\cdot\frac{z}{r}$

$=3r^{-3}-\frac{3}{r^3}=0$

取充分小的闭合球面$\Sigma_0: x^2+y^2+z^2=a^2$使之完全含于$\Sigma$内,取外侧.　记$\Omega_0: x^2+y^2+z^2\le a^2$

$$\text{原式}=\oiint_{\Sigma_0}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint_{\Sigma_0}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega_0}3dv=\frac{3}{a^3}\bullet\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi.$$

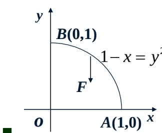
例10-24 在方向依纵轴负方向,且大小等于作用点的横坐标平方的力场上,求质量为***m***的质点沿抛物线$1-x=y^2$从$A(1,0)$移到$B(0,1)$(第一象限内)所做的功.

解　依题意,

力场　$F(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}=0\vec{i}-x^2\vec{j}$,

做功为　$W=\int_{AB}0dx-x^2dy$

$$=-\int_0^1\left(1-y^2\right)^2dy=-\frac{8}{15}$$



例10-25 设螺旋形弹簧一圈方程为

$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$　$(0\le t\le 2\pi)$,

其线密度等于点到原点距离的平方,求此线对z轴的转动惯量.

解 依题意, 线密度函数为$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,

$$I_x=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds=\int_L(x^2+y^2)\bullet(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2\right]\left[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2\right]$$

$$\bullet\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2\left(a^2+k^2t^2\right)\bullet\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\left(2\pi a+\frac{8\pi^3}{3}k^2\right)$$

例10-26 求柱面$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$在球面$x^2+y^2+z^2=1$内的侧面积.

解 要求的是柱面的侧面积,因此用对弧长的曲线积分计算方便,由于对称性,有

$$A=8\int_L zds=8\int_L\sqrt{1-x^2-y^2}ds\quad\left(\int_L zds\text{为第一卦限面积}\right)$$

其中$L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$,其参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\quad\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right),$$

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=3\sin t\cos tdt$$

$$A=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^6 t-\sin^6 t}\bullet 3\sin t\cos tdt$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin^2 t\cos^2 t}\bullet\sin t\cos tdt$$

$$=24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt$$

$$=6\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

例10-27 设Σ为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分,点$P(x,y,z)\in\Sigma$, Π为Σ在点P处的切平面,$\rho(x,y,z)$为点$O(0,0,0)$到平面Π的距离,求$\iint_\Sigma\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

解　$\Sigma: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$, $\vec{n}=(x,y,2z)$.

过点$P(x,y,z)$的切平面为

$$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0.$$

注意到　$x^2+y^2+2z^2=2$

上述方程写成　$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$

原点到此平面的距离为

$$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

代入$z^2=1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$,则

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$dS=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}$$

又 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$ ， $D:x^2+y^2\le 2$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$$

$$=\iint_D\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3}{2}\pi$$

例10－28　设有半径为R的空心球,完全置于水中,球面与水面平齐相切,求球面所承受的总压力.

解 在水深h处的点所受水压力的压强为kN/m^2,取球心为原点,轴垂直向下.

则球面上点$M(x,y,z)$离水面深度为$h=z+R$.

总压力为$P=\oiint_{\Sigma}(z+R)gdS$，式中$\Sigma:x^2+y^2+z^2=R^2$

由对称性，$\oiint_{\Sigma}zgdS=0$.

$\therefore\ P=\oiint_{\Sigma}(z+R)gdS=\oiint_{\Sigma}RgdS=4\pi gR^3\,(kN)$.