第九章

第四节 重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的质心

四、物体的转动惯量

五、物体的引力

1. 能用重积分解决的实际问题的特点

所求量是 $\begin{cases}\text{分布在有界闭域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性}\end{cases}$

2. 用重积分解决问题的方法

- 用微元分析法 (元素法)
- 从定积分定义出发 建立积分式

3. 解题要点

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、定出积分分限、计算要简便

一、立体体积

- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$, 则其体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 占有**空间有界域 Ω** 的立体的体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例1. 求曲面 $S_1: z=x^2+y^2+1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z=x^2+y^2$ 所围立体的体积 V.

解: 曲面 S_1 在点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2$$

它与曲面 $z=x^2+y^2$ 的交线在 xoy 面上的投影为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1 \quad (\text{记所围域为} D)$$

$$\therefore\ V=\iint_D[2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2-x^2-y^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[1-((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

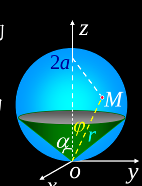
令 $x-x_0=r\cos\theta,\ y-y_0=r\sin\theta$

$$=\pi-\iint_D r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\pi-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

例2. 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积.

解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le 2a\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\alpha \\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

则立体体积为

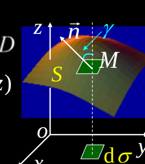
$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\alpha\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^\alpha\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$$

二、曲面的面积

设光滑曲面 $S: z=f(x,y),(x,y)\in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x,y,z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成. 设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

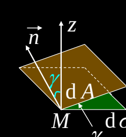


$$\mathrm{d}\sigma=\cos\gamma\cdot\mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)



故有曲面面积公式

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即 $$\boxed{A=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

若光滑曲面方程为 $x=g(y,z),\,(y,z)\in D_{yz}$, 则有

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y=h(z,x),\,(z,x)\in D_{zx}$, 则有

$$A=\iint_{D_{zx}} \sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial z})^2+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$, 且 $F_z\neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

$$\therefore\ A=\iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}+F_z^{\,2}}}{|F_z|}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3. 计算双曲抛物面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截出的面积 A.

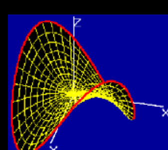
解: 曲面在 xoy 面上投影为 $D: x^2+y^2\le R^2$, 则

$$A=\iint_D \sqrt{1+z_x^{\,2}+z_y^{\,2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi[(1+R^2)^{3/2}-1)]$$



例4. 计算半径为 a 的球的表面积.

解: 方法1 利用球坐标方程.

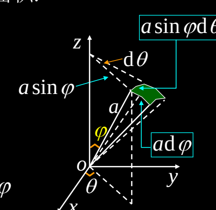
设球面方程为 $r=a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A=a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\ A=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi a^2$$



方法2 利用直角坐标方程.

三、物体的质心

设空间有n个质点, 分别位于 (x_k,y_k,z_k), 其质量分别为 $m_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, 由力学知, 该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^n z_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

设物体占有空间域 Ω, 有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$, 则采用 “大化小, 常代变, 近似和, 取极限” 可导出其质心公式, 即:

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点, 此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x}\approx\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda\to 0$, 即得

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $\bar{y} = \dfrac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时，则得形心坐标：

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad \bar{y} = \frac{\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}\quad (V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \text{ 为}\Omega\text{的体积})$$

若物体为占有xoy面上区域D的平面薄片，其面密度为$\mu(x,y)$，则它的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{M_x}{M}$$

M_x — 对 x 轴的静矩

M_y — 对 y 轴的静矩

$\rho=$常数时，得D的形心坐标：

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}\quad (A \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

例5. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.

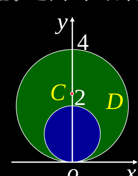
解: 利用对称性可知 $\bar{x}=0$

而 $\bar{y} = \dfrac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

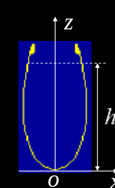
$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{56}{9\pi}\int_0^\pi \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7}{3}$$



例6. 一个炼钢炉为旋转体形，剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2,\ 0\le z<3$，若炉内储有高为 h 的均质钢液，不计炉体的自重，求它的质心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上，故其坐标为

$$\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

采用柱坐标，则炉壁方程为 $9r^2 = z(3-z)^2$，因此

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9}z(3-z)^2\mathrm{d}z$$

$$V = \frac{\pi}{9}h^3\left(\frac{9}{2} - 2h + \frac{1}{4}h^2\right)$$

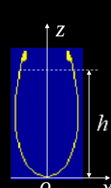
$$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^h \frac{\pi}{9}z^2(3-z)^2\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{9}h^3\left(3 - \frac{3}{2}h + \frac{1}{5}h^2\right)$$

$$\therefore\quad \bar{z} = h\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$



四、物体的转动惯量

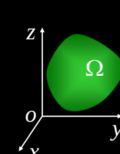
因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和，故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω，有连续分布的密度函数 $\rho(x,y,z)$. 该物体位于(x,y,z)处的微元对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I_z = (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\ \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\ \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_o = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\ \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

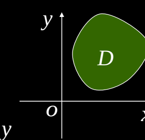
如果物体是平面薄片, 面密度为 $\mu(x,y),\ (x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

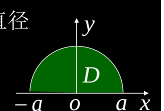
$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_o = \iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例7.求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0\end{cases}$

$$\therefore I_x = \iint_D \mu y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

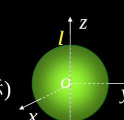
$$= \mu\int_0^\pi \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$= \frac{1}{4}M a^2$$

例8. 求均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为$\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$, 则



$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{(用球坐标)}$$

$$= \rho\iiint_\Omega \underline{(r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta)}\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{5}a^2 M$$

球体的质量 $M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$

五、物体的引力

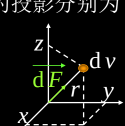
设物体占有空间区域 Ω, 其密度函数 $\rho(x,y,z)$连续, 物体对位于原点的单位质量质点的引力$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$

利用元素法, 引力元素在三坐标轴上的投影分别为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\rho(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\rho(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\rho(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}v$$



$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

G 为引力常数

在Ω上积分即得各引力分量:

$$F_x = G\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$F_y = G\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}v$$

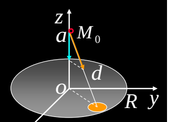
$$F_z = G\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}v$$

对 xoy 面上的平面薄片D ,它对原点处的单位质量质点的引力分量为

$$F_x = G\iint_D \frac{\mu(x,y)x}{\rho^3}\mathrm{d}\sigma,\quad F_y = G\iint_D \frac{\mu(x,y)y}{\rho^3}\mathrm{d}\sigma$$

$$(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$$

例9. 设面密度为μ ,半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2$, $z=0$,求它对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>0)$ 处的单位质量质点的引力.



解: 由对称性知引力 $\vec{F}=(0,0,F_z)$

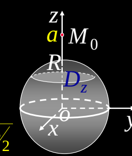
$$dF_z=-G\frac{\mu\,d\sigma}{d^2}\cdot\frac{a}{d}=-Ga\mu\frac{d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\ F_z=-Ga\mu\iint_D\frac{d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=-Ga\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+a^2)^{3/2}}=2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

例10. 求半径 R 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$的单位质量质点的引力.

解: 利用对称性知引力分量$F_x=F_y=0$



$$F_z=\iiint_\Omega G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}dv$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)dz\iint_{D_z}\frac{dx\,dy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\,dr}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$F_z=\cdots=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\,dr}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=2\pi G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)dz$$

$$=2\pi G\rho\left[-2R-\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\,d\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]$$

$$=-G\frac{M}{a^2}$$

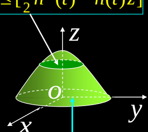
$M=\dfrac{4\pi R^3}{3}\rho$ 为球的质量

备用题

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9), 问高度为130 cm 的雪堆全部融化需要多少小时? **(2001考研)**

提示: $D_z: x^2+y^2\le[\frac{1}{2}h^2(t)-h(t)z]$

记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ,则



$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D_z}dx\,dy$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]dz=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$$

$D_0: x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t)$

$$=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dx\,dy \quad \text{(用极坐标)}$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,r\,dr=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

$$V=\frac{\pi}{4}h^3(t),\qquad S=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

由题意知 $\dfrac{dV}{dt}=-0.9S$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Longrightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

令 $h(t)\to 0$, 得 $t=100$ (小时)

因此高度为130cm的雪堆全部融化所需的时间为100小时.