

第二节

第五章

微积分的基本公式

一、引例

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿-莱布尼兹公式

一、引例

在变速直线运动中, 已知位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有关系:

$$s'(t) = v(t)$$

物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1)$$

这里 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数.

这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性.

二、积分上限的函数及其导数

定理1. 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

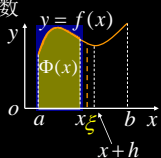
是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

证: $\forall x, x+h \in [a, b]$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi) \quad (x < \xi < x+h) \end{aligned}$$

$\because f(x) \in C[a, b]$

$$\therefore \Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$$



说明:

1) 定理1 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路.

2) 变限积分求导: $\frac{d}{dx} \int_a^b f(t) dt = -f(x)$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left[\int_{\psi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right] \\ &= f[\varphi(x)] \varphi'(x) - f[\psi(x)] \psi'(x) \end{aligned}$$

例1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$ $\frac{0}{0}$

解: 原式 $= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \frac{1}{2e}$

例2. 确定常数 a, b, c 的值, 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2) dt} = c \quad (c \neq 0).$$

解: $\because x \rightarrow 0$ 时, $ax - \sin x \rightarrow 0, c \neq 0, \therefore b = 0.$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c$$

$c \neq 0$, 故 $a = 1$. 又由 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 得 $c = \frac{1}{2}.$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $f(x) > 0$, 证明

$$F(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

只要证
 $F'(x) > 0$

在 $(0, +\infty)$ 内为单调递增函数.

$$\begin{aligned} \text{证: } F'(x) &= \frac{\overbrace{\int_0^x f(t) dt}^x \cdot \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t) f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} = \frac{f(x) \cdot (x-\xi) f(\xi) x}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} > 0 \quad (0 < \xi < x) \end{aligned}$$

$\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内为单调递增函数.

三、牛顿-莱布尼兹公式

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ (牛顿-莱布尼兹公式)

证: 根据定理1, $\int_a^x f(x) dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 故

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C$$

令 $x = a$, 得 $C = F(a)$, 因此 $\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, 得

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \stackrel{\text{记作}}{=} [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b$$

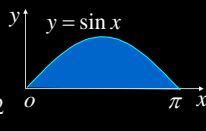
例4. 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi \end{aligned}$$

例5. 计算正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的面积.

$$\text{解: } A = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -[-1-1] = 2$$



例6. 汽车以每小时 36 km 的速度行驶, 到某处需要减速停车, 设汽车以等加速度 $a = -5 \frac{m}{s^2}$ 刹车, 问从开始刹车到停车走了多少距离?

解: 设开始刹车时刻为 $t = 0$, 则此时刻汽车速度

$$v_0 = 36 \left(\frac{km}{h} \right) = \frac{36 \times 1000}{3600} \left(\frac{m}{s} \right) = 10 \left(\frac{m}{s} \right)$$

刹车后汽车减速行驶, 其速度为

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t$$

当汽车停住时, $v(t) = 0$, 即 $10 - 5t = 0$, 得 $t = 2(s)$

故在这段时间内汽车所走的距离为

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left[10t - \frac{5}{2}t^2 \right]_0^2 = 10(m)$$

内容小结

1. 微积分基本公式

设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $F'(x) = f(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = \underbrace{F'(\xi)(b-a)}_{\text{微分中值定理}} = F(b) - F(a)$$

牛顿-莱布尼兹公式

2. 变限积分求导公式

备用题

1. 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$.

解: 定积分为常数, 故应用积分法定此常数.

设 $\int_0^1 f(x) dx = a$, $\int_0^2 f(x) dx = b$, 则

$$f(x) = x^2 - bx + 2a$$

$$a = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$$

$$b = \int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

2. 求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$ 的递推公式(n 为正整数).

解: 由于 $I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2(n-1)x}{\sin x} dx$, 因此

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x \sin x}{\sin x} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)x dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I_n = I_{n-1} + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

$$\text{其中 } I_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos x dx = 2$$