第二节 函数的求导法则

第二章

一、四则运算求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数求导法则

四、初等函数的求导问题

思路:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad (\text{构造性定义})$$

$\Downarrow$ 　　　　本节内容 $\Downarrow$ 求导法则

$$\left\{\begin{aligned}&(C)'=0\\&(\sin x)'=\cos x\\&(\ln x)'=\frac{1}{x}\end{aligned}\right.\quad \text{证明中利用了两个重要极限}$$

$\Downarrow$ 其它基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

一、四则运算求导法则

定理1. 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在 x 具有导数

$\Longrightarrow$ $u(x)$ 及 $v(x)$ 的和、差、积、商 (除分母为 0的点外) 都在点 x 可导, 且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$

下面分三部分加以证明, 并同时给出相应的推论和例题 .

---

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

证: 设 $f(x)=u(x)\pm v(x)$, 则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)\pm v(x+h)]-[u(x)\pm v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$=u'(x)\pm v'(x)$ 　　　故结论成立.

此法则可推广到任意有限项的情形. 例如,

例如, $(u+v-w)'=u'+v'-w'$

---

(2) $(uv)'=u'v+uv'$

证: 设 $f(x)=u(x)v(x)$, 则有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ 　　　故结论成立.

推论: 1) $(Cu)'=Cu'$ 　(C为常数)

2) $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

3) $(\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

例1. $y=\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)$, 求 y' 及 $y'\big|_{x=1}$.

解: $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}\,(3x^2+4\sin x)$$

$$y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

证: 设 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$，则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x) - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\right]$$

$$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$ 故结论成立.

推论: $\left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-Cv'}{v^2}$ （ C为常数 ）

例2. 求证 $(\tan x)' = \sec^2 x$，$(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

证: $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc x\cot x$$

类似可证: $(\cot x)' = -\csc^2 x$， $(\sec x)' = \sec x\tan x$.

二、反函数的求导法则

定理2. 设 $y = f(x)$为$x = f^{-1}(y)$的反函数，$f^{-1}(y)$ 在 y 的某邻域内单调可导，且 $[f^{-1}(y)]' \neq 0$ $\Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

证: 在 x 处给增量 $\Delta x \neq 0$，由反函数的单调性知

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0, \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta x \to 0$时必有$\Delta y \to 0$， 因此

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

例3. 求反三角函数及指数函数的导数.

解: 1) 设 $y = \arcsin x$，则 $x = \sin y$，$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore$ $\cos y > 0$，则

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用 $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

类似可求得

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2) 设 $y = a^x$ $(a>0, a\neq 1)$，则 $x = \log_a y$，$y \in (0, +\infty)$

$$\therefore \quad (a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x\ln a$$

特别当$a = \mathrm{e}$时，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

小结:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(a^x)' = a^x\ln a$ $\quad$ $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

三、复合函数求导法则

定理3. $u = g(x)$在点 x 可导，$y = f(u)$在点 $u = g(x)$ 可导 $\Longrightarrow$ 复合函数 $y = f[g(x)]$在点 x 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)g'(x)$$

证: $\because y = f(u)$在点 u 可导，故 $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$

$\therefore \Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha\Delta u$ （当 $\Delta u \to 0$时 $\alpha \to 0$ ）

故有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] = f'(u)g'(x)$$

推广： 此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如，$y = f(u)$，$u = \varphi(v)$，$v = \psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$= f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$$

$$\boxed{\begin{matrix} y \\ | \\ u \\ | \\ v \\ | \\ x \end{matrix}}$$

关键： 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

例4. 求下列导数：(1) $(x^{\mu})'$；(2) $(x^{x})'$；(3) $(\operatorname{sh} x)'$.

解： (1) $(x^{\mu})' = (e^{\mu\ln x})' = e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)' = x^{\mu}\cdot\frac{\mu}{x}$

$= \mu x^{\mu-1}$

(2) $(x^{x})' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^{x}(\ln x + 1)$

(3) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$

说明： 类似可得

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$；　$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$；　$(a^{x})' = a^{x}\ln a$.

$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$　　$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$　　$a^{x} = e^{x\ln a}$

例5. 设 $y = \ln\cos(e^{x})$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos(e^{x})}\cdot(-\sin(e^{x}))\cdot e^{x}$

$= -e^{x}\tan(e^{x})$

思考： 若 $f'(u)$ 存在，如何求 $f(\ln\cos(e^{x}))$ 的导数?

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(\ln\cos(e^{x}))\cdot(\ln\cos(e^{x}))' = \cdots$$

这两个记号含义不同　　$f'(u)\big|_{u=\ln\cos(e^{x})}$

练习： 设 $y = f(f(f(x)))$，其中 $f(x)$ 可导，求 y'.

例6. 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，求 y'.

解： $y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的反函数

记 $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，则

(反双曲正弦)

$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

四、初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数

$(C)' = 0$	$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
$(\sec x)' = \sec x\tan x$	$(\csc x)' = -\csc x\cot x$
$(a^{x})' = a^{x}\ln a$	$(e^{x})' = e^{x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2. 有限次四则运算的求导法则

$(u \pm v)' = u' \pm v'$　　$(Cu)' = Cu'$　（C为常数）

$(uv)' = u'v + uv'$　　$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$　　$(v \neq 0)$

3. 复合函数求导法则

$y = f(u)$，$u = \varphi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

4. 初等函数在定义区间内可导，且导数仍为初等函数

说明： 最基本的公式

$(C)' = 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

由定义证，其它公式用求导法则推出.

例7. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

解: ∵ $y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

∴ $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例8. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}$

$+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

例9. $y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y'.

解: $y'=(e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x)\arctan\sqrt{x^2-1}$

$+e^{\sin x^2}\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$

$=2x\cos x^2 e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$

$+\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}e^{\sin x^2}$

关键: 搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

例10. 设 $y=\dfrac12\arctan\sqrt{1+x^2}+\dfrac14\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，求 y'.

解: $y'=\dfrac12\dfrac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$+\dfrac14\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\dfrac12\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\dfrac{1}{2+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\dfrac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$

内容小结

求导公式及求导法则

注意: 1) $(uv)'\ne u'v'$，$\left(\dfrac uv\right)'\ne\dfrac{u'}{v'}$

2) 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导 .

思考与练习

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt x}}\right)'=\left(\left(\dfrac1x\right)^{\frac34}\right)' \cancel{=} \dfrac34\left(\dfrac1x\right)^{-\frac14}$ 对吗?

$=\dfrac34\left(\dfrac1x\right)^{-\frac14}\cdot\dfrac{-1}{x^2}$

2. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确?

因 $f'(x)\cancel{=}\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法:

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$

3. 求下列函数的导数

(1) $y=\left(\dfrac ax\right)^b$，　(2) $y=\left(\dfrac ab\right)^{-x}$.

解: (1) $y'=b\left(\dfrac ax\right)^{b-1}\cdot\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)=-\dfrac{a^b b}{x^{b+1}}$

(2) $y'=\left(\dfrac ab\right)^{-x}\ln\dfrac ab\cdot(-x)'=-\left(\dfrac ba\right)^x\ln\dfrac ab$

或 $y'=\left(\left(\dfrac ba\right)^x\right)'=\left(\dfrac ba\right)^x\ln\dfrac ba$

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解: 方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$
$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore\quad f'(0)=-99!$$

备用题 **1.** 设 $y=\cot\frac{\sqrt{x}}{2}+\tan\frac{2}{\sqrt{x}}$, 求 y'.

解: $$y'=-\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot 2(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}})$$
$$=-\frac{1}{4\sqrt{x}}\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}$$

2. 设 $y=f(f(f(x)))$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 y'.

解: $y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$