第二周学习提纲：

- **学习内容**：同学们结合慕课视频（P3--P6）和电子版教材（第四版）学习本PPT中的内容，并注意以下问题：
  1. 如何利用模型对核军备竞赛中的一些现象作出合理的解释，例如安全线的提出与分析；
  2. 如何评价天气预报模型之间的优劣，从而给出模型的评价与改进。
- **作业**：
  1. 物体定位测量问题 (见下页)，完成小报告。
  2. 小报告必须以LaTeX软件编译成PDF文档，并在 3月23日23:00之前 发送到 sufe_math_model@163.com。
  3. 邮件标题请注明：队号2020x000，第1次作业：作业标题
  4. TeX/LaTeX作业模板的使用可参考教学视频：https://www.bilibili.com/video/av93880251

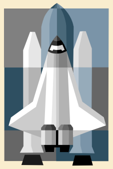
物体定位测量问题

- 背景：物体定位测量是指由测量仪器测量物体表面的某些特征点的位置，从而确定物体所在的空间方位，或者物体的结构信息。物体定位有着广泛的应用，例如工业检测、地貌勘测、军事侦察等。它与计算机技术相结合成为计算机视觉技术的一个主要组成部分，主要用于三维物体的定位与结构扫描。
- 常用的定位方式由两台定位测量仪组测成，从两个不同的角度获得物体与测量仪之间的相对位置，从而确定物体的准确方位。

- 问题：请利用初等的几何与代数知识建立数学模型，给出定位方法，并讨论改进方法。

第二章 初等模型

2.7 核军备竞赛



背景与问题

- 冷战时期美苏声称为了保卫自己的安全, 实行“核威慑战略”, 核军备竞赛不断升级.
- 随着前苏联的解体和冷战的结束, 双方通过了一系列核裁军协议.
- 在什么情况下双方的核军备竞赛不会无限扩张, 而存在暂时的平衡状态.
- 估计平衡状态下双方拥有的最少的核武器数量, 这个数量受哪些因素影响.
- 当一方采取加强防御、提高武器精度、发展多弹头导弹等措施时, 平衡状态会发生什么变化.

模型假设

以双方(战略)核导弹数量描述核军备的大小.

假定双方采取如下同样的核威慑战略:

- 认为对方可能发起所谓第一次核打击，即倾其全部核导弹攻击己方的核导弹基地;
- 己方在经受第一次核打击后，应保存足够的核导弹，给对方重要目标以毁灭性的打击.

在任一方实施第一次核打击时，假定一枚核导弹只能攻击对方的一个核导弹基地.

摧毁这个基地的可能性是常数，它由一方的攻击精度和另一方的防御能力决定.

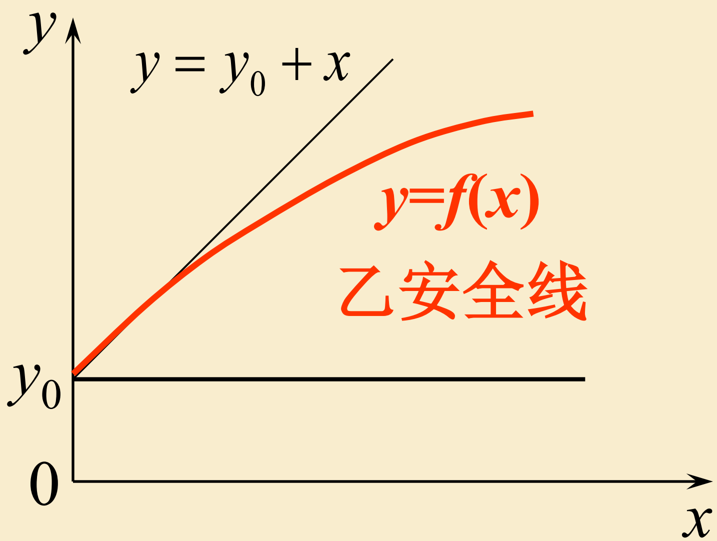
图的模型

$y=f(x)$~甲有x枚导弹,乙所需的最少导弹数(乙安全线)

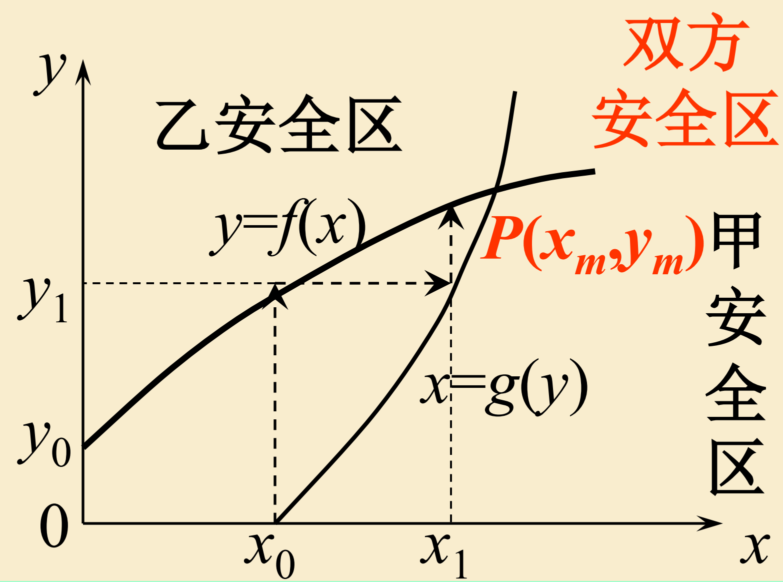
$x=g(y)$~乙有y枚导弹,甲所需的最少导弹数(甲安全线)

当 $x=0$时 $y=y_0$，y_0~乙方的威慑值

y_0~甲方实行第一次打击后已经没有导弹，乙方为毁灭甲方工业、交通中心等目标所需导弹数.



$$y_0 < y = f(x) < y_0 + x$$



P~平衡点(双方最少导弹数)

分析模型

乙方**残存率** s ~甲方一枚导弹攻击乙方一个基地，基地未被摧毁的概率.

$x<y$

甲方以 x 枚导弹攻击乙方 y 个基地中的 x 个，sx 个基地未被摧毁，$y-x$ 个基地未被攻击.

$y_0=sx+y-x \Rightarrow y=y_0+(1-s)x$

$x=y$

$y_0=sy \Rightarrow y=y_0/s$

$y<x<2y$

乙的 $x-y$ 个基地被攻击2次，$s^2(x-y)$ 个未被摧毁；

$y-(x-y)=2y-x$ 个被攻击1次，$s(2y-x)$ 个未被摧毁.

$y_0=s^2(x-y)+s(2y-x) \Rightarrow y=\dfrac{y_0}{s(2-s)}+\dfrac{1-s}{2-s}x$

$x=2y$

$y_0=s^2y \Rightarrow y=y_0/s^2$

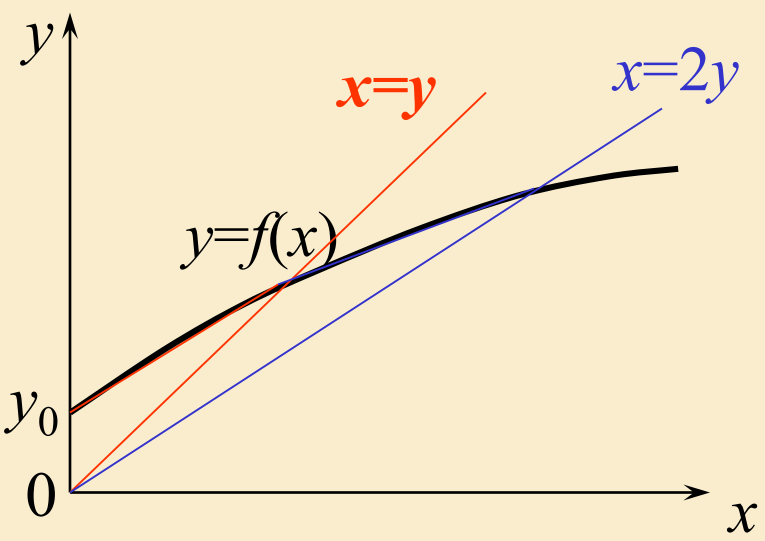
分析模型

$x<y$, $y=y_0+(1-s)x$　　$y<x<2y$, $y=\dfrac{y_0}{s(2-s)}+\dfrac{1-s}{2-s}x$

$x=y$, $y=y_0/s$　　$x=2y$, $y=y_0/s^2$

$x=a\,y$, $y=\dfrac{y_0}{s^a}=\dfrac{y_0}{s^{x/y}}$

y_0~威慑值　　s~残存率



利用微积分知识可知 y是一条上凸的曲线，且

- y_0变大，曲线上移、变陡.
- s变大，y减小，曲线变平.

模型解释

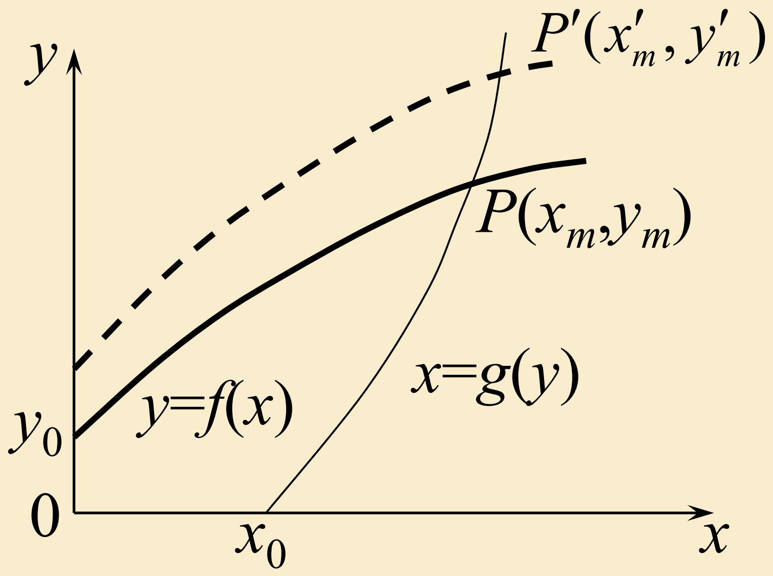
- 甲方增加经费保护及疏散工业、交通中心等目标.

⇨ 乙方威慑值 y_0变大（其他因素不变）

⇨ 乙安全线 $y=f(x)$上移

⇨ 平衡点$P\to P'$

⇨ $x_m' > x_m,\ y_m' > y_m$



甲方的被动防御也会使双方军备竞赛升级.

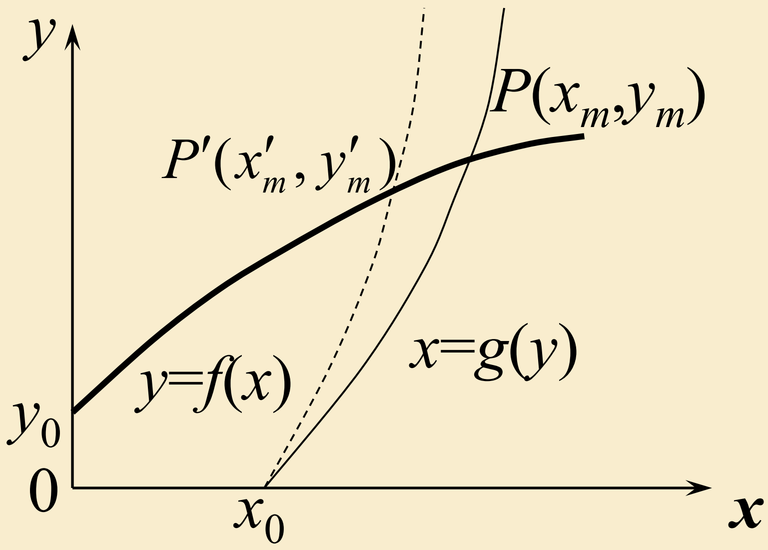
模型解释

- 甲方将固定核导弹基地改进为可移动发射架.

⇨ 乙安全线$y=f(x)$不变

甲方残存率变大

威慑值x_0不变



⇨ x减小，甲安全线$x=g(y)$向y轴靠近

⇨ $P \to P'$　　$x'_m < x_m,\ y'_m < y_m$

甲方这种单独行为，会使双方的核导弹减少.

模型解释

- 双方发展多弹头导弹，每个弹头可以独立地摧毁目标.

(x, y仍为双方核导弹的数量)

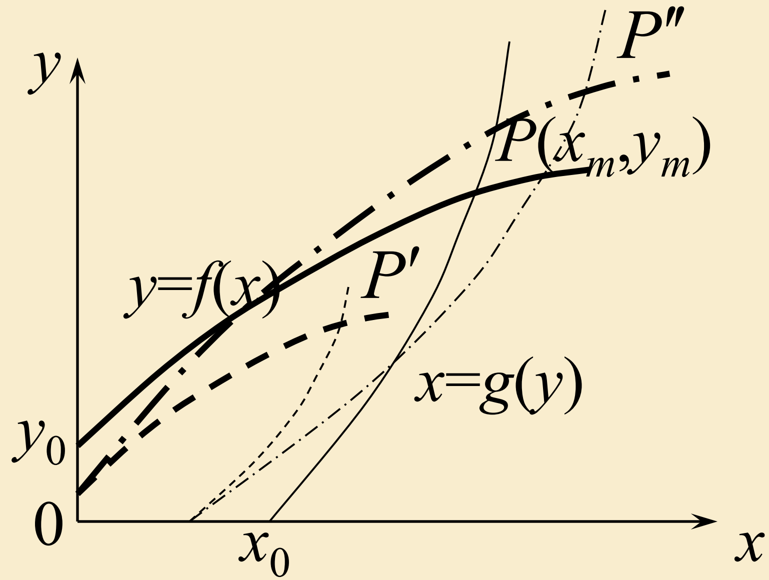
⇨ 双方威慑值x_0, y_0和残存率s均减小.

乙安全线 $y=f(x)$

y_0减小 → y下移且变平

s变小 → y增加且变陡

⇨ $P \rightarrow P'$? $P \rightarrow P''$?



双方导弹增加还是减少，需要更多信息及更详细的分析.

核 军 备 竞 赛

- 对“核威慑战略”做一些合理、简化假设，用图的模型描述双方核武器相互制约、达到平衡的过程.

- 提出安全曲线概念，给出它的一般形式.

- 通过更精细的分析找到影响安全线的参数：威慑值和残存率，给出安全线的分析表达式.

- 利用模型对核军备竞赛中的一些现象作出合理解释.

2.9 天气预报的评价

问题 明天是否下雨的天气预报以有雨概率形式给出. 已得到某地一个月4种预报方法的有雨概率预报，和实际上有雨或无雨的观测结果.

日期	预报A(%)	预报B (%)	预报C (%)	预报D (%)	实测(有雨=1,无雨=0)
1	90	30	90	60	1
2	40	30	50	80	1
…	…	30	…	…	…
15	10	30	20	10	0
…	…	30	…	…	…
31	80	30	50	10	0

全相同

9天有雨

22天无雨

怎样根据这些数据对4种预报方法给以评价

计数模型

明天有雨概率>50% ⇒ 预报有雨

明天有雨概率<50% ⇒ 预报无雨

有雨概率=50%
毫无意义，不予统计

根据明天是否有雨的实测，统计预报的正确率

预报A

正确率 0.57

预报\实测	有雨	无雨
有雨	6	10
无雨	3	11

预报B X

正确率 0.71

预报\实测	有雨	无雨
有雨	0	0
无雨	9	22

预报C

正确率 0.81

预报\实测	有雨	无雨
有雨	5	3
无雨	2	17

预报D √

正确率 0.93

预报\实测	有雨	无雨
有雨	6	0
无雨	2	21

计数模型 从实用角度看，更重要的是误报率.

预报有雨而实测无雨的概率P_1 ⇨ 造成预防费用浪费

预报无雨而实测有雨的概率P_2 ⇨ 预防不足导致损失

设两种后果的损失之比为1 : 2 ⇨ 误报率$P=P_1/3+2P_2/3$

预报A

预报＼实测	有雨	无雨
有雨	6	10
无雨	3	11

$P_1=10/16$ $P_2=3/14$

误报率$P=P_1/3+2P_2/3=0.35$

预报C

预报＼实测	有雨	无雨
有雨	5	3
无雨	2	17

误报率 $P=0.20$

预报＼实测	有雨	无雨
有雨	6	0
无雨	2	21

预报D √

误报率 $P=0.06$

缺点：未考虑预报概率的具体值

记分模型　将预报有雨概率与实测结果比较并记分

模型1

实测有雨：

预报有雨概率>0.5 ⇒ 得到相应的正分

预报有雨概率<0.5 ⇒ 得到相应的负分

p_k~第k天预报有雨概率　v_k=1~第k天有雨，　v_k=0~无雨

第k天的预报得分

$$s_k=\begin{cases} p_k-0.5, & v_k=1 \\ 0.5-p_k, & v_k=0 \end{cases}$$

对k 求和得到预报的分数S_1

S_1越大越好

S_1(A)=1.0，　S_1(B) = 2.6，　S_1(C) = 7.0，　S_1(D) = 6.7

记分模型　p_k~第k天预报有雨概率

v_k=1~第k天有雨，　v_k=0~无雨

模型2　第k天的预报得分　$s_k = |p_k - v_k|$

对k 求和得到预报的分数S_2　　S_2越小越好

S_2(A) =14.5，S_2 (B) = 12.9，　S_2 (C) = 8.5，　S_2 (D) = 8.8

模型3　第k天的预报得分　$s_k = (p_k - v_k)^2$

对k 求和得到预报的分数S_3　　S_3越小越好

S_3(A) =8.95，S_3 (B) = 6.39，　S_3 (C) =4.23，　S_3 (D) =3.21

记分模型 p~预报有雨概率 v=1~有雨， v=0~无雨

S_1(A)=1.0， S_1(B) = 2.6， S_1(C) = 7.0， S_1(D) = 6.7

S_2(A)=14.5， S_2(B) = 12.9， S_2(C) = 8.5， S_2(D) = 8.8

S_3(A)=8.95， S_3(B) = 6.39， S_3(C) =4.23， S_3(D) =3.21

模型1, 2对4种预报的优劣排序、相对分差都相同 ⇨ 等价!

比较模型3与模型2的优劣 f~理论上的有雨概率

模型3的期望分数 $P(v=1)=f$, $P(v=0)=1-f$

$$E(S)=E[(p-v)^2]=f(p-1)^2+(1-f)p^2=f(1-f)+(p-f)^2$$

$p=f$时 $E(S)$最小

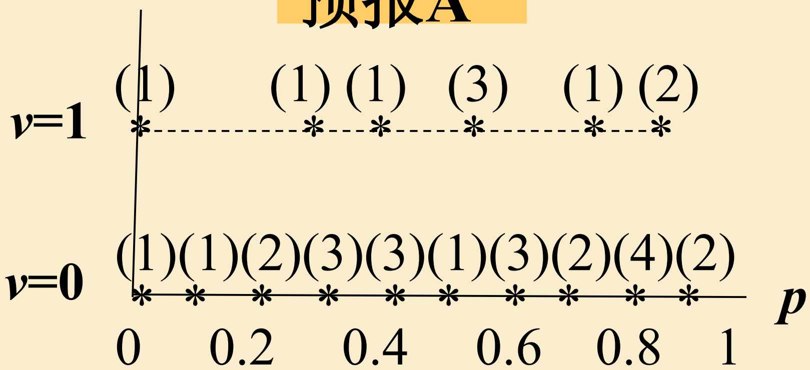
考察一般模型 $S=(|p-v|)^n$ 求$E(S)$的极值

⇨ 仅当n=2时$p=f$才能$E(S)$最小 此意义下模型3最佳!

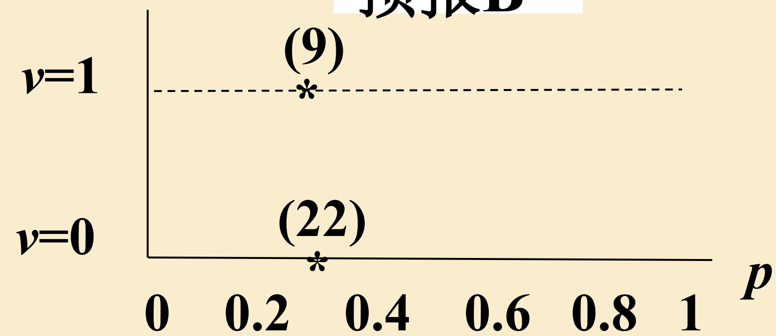
图形模型 模型1

*上( )中数字是坐标在*的天数

预报A



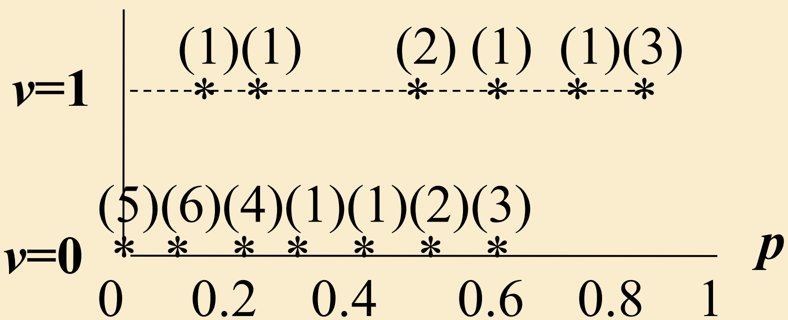
预报B



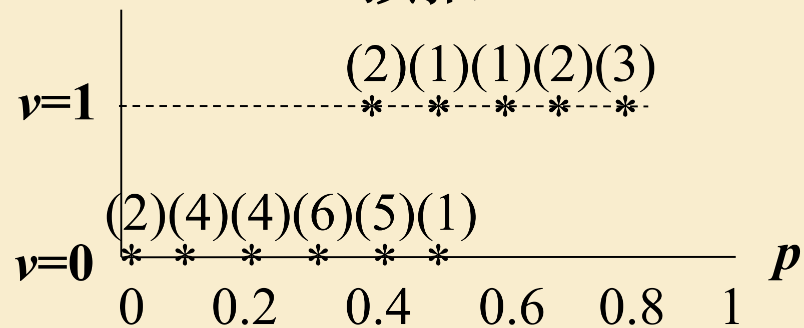
*号几乎随机分布, 预报效果很差

*号的p没有变化, 毫无用途

预报C



预报D



v=0*号在p=0.6左边,无雨预报较好; v=1 *号分散 ,有雨预报较差

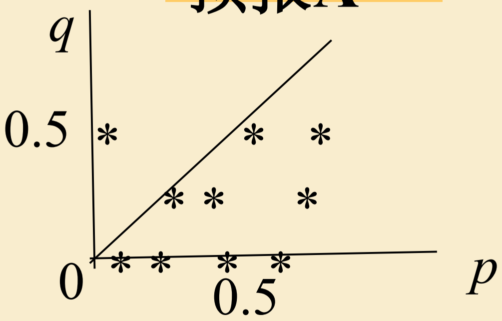
v=0 *号在p=0.5左边,v=1 *号在p=0.4右边,无雨、有雨预报都好

图形模型 **模型2** p ~预报有雨概率, q~实测有雨天数比例

p和q越接近越好

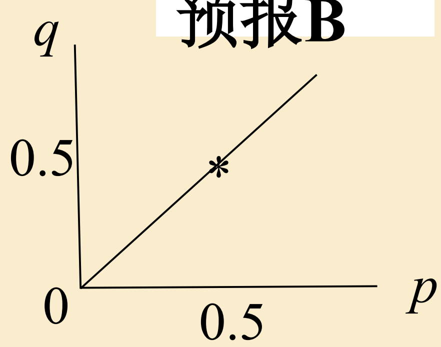
*离对角线越近越好

预报A



*几乎均匀分布,
明显不好

预报B



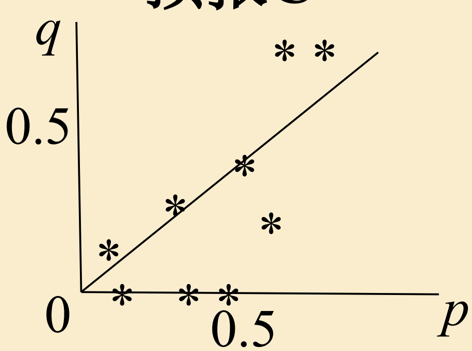
只有一个*,
几乎在q=p上

模型缺陷

• 不能用于预报B的情况

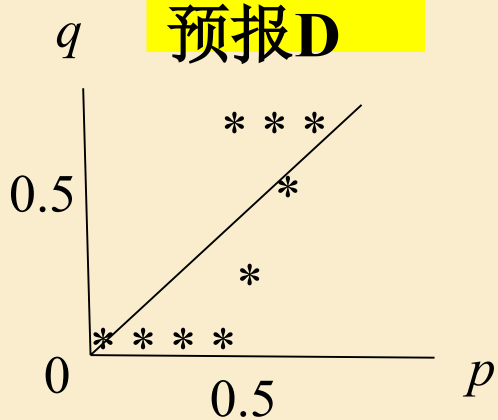
• 数据量小可能是预报D未得到正确评价的原因

预报C



比A好一些

预报D



未显示出优势

用*与q=p的竖直距离度量模型的优劣, 并考虑各个*的权重，模型2可量化为分数模型 .

深入讨论 评价预报的优劣，需制定评价标准

没有统一看法, 提出三类层次、内涵不但相互关联的标准

第一类标准：预报者本身的一致性

指预报者根据知识、信息和经验对预报的事件做出的判断，与他对外发布的预报之间的关系.

不完全一致

- 预报者没有利用全部判断，只从使用者的需要出发.
- 出于预报效益等考虑，对判断作了适当改变.

一致性受预报者控制，外界通常难以掌握

在预报以概率形式给出的情况下，当预报与预报者的判断一致时，才会得到与实际观测最相符的结果.

深入讨论

第二类标准：根据预报和实测间的关系，评价预报的品质

利用预报(随机变量x)与观测(随机变量y)的联合分布$F(x, y)$

可靠性

将特定预报x下观测y的条件均值与x之差对所有x平均，作为可靠性的数量指标.

越小越好

决定性

将特定预报x下观测y的条件均值与y的无条件均值之差对所有x平均，作为决定性的数量指标.

越大越好

由条件分布$F(y|x)$ 和边际分布$F(x)$ 计算得到

深入讨论

第二类标准：根据预报和实测间的关系，评价预报的品质

分辨度

- 将特定观测y下预报x的条件均值与y之差对所有y平均，作为分辨度的数量指标.

越小越好

- 将这个条件均值与y的无条件均值之差对所有y平均，作为分辨度的又一数量指标.

越大越好

由条件分布$F(x|y)$ 和边际分布$F(y)$ 计算得到

敏锐性　　如预报有雨概率多数接近1或0.

预报本身的敏锐，与事件无关．由边际分布$F(x)$决定.

深入讨论

第二类标准：根据预报和实测间的关系，评价预报的品质

不确定性

实际事件发生的不确定，与预报无关.

会给预报带来困难

由边际分布$F(y)$决定

计数、记分、图形模型都从某一侧面反映第二类标准.

第三类标准：利用预报所实现的效益或带来的费用

- 用决策分析法估计预报的效益或费用的期望值，与不用预报(做先验估计)相比.
- 与预报的品质，即第二类标准密切相关.

在谷物种植、耕种计划、水果保护等领域有广泛应用.