第三周学习提纲

学习内容：同学们结合慕课视频（P7—P12）和电子版教材（第四版）学习本ppt中的内容，并注意以下问题：

1、如何确定优化问题的目标函数?

2、允许缺货与不允许缺货的存贮模型有何区别与联系?

3、如何利用能量最小原则确定血管分叉的半径与角度?

4、在冰山运输中，如何通过收集数据来分析优化总费用的建模思路?

作业：本周没有作业，请未组队的同学抓紧组队。

提醒：第一次作业（上周已布置）ddl为3月23日23:00，请同学们准时提交。

第三章 简单的优化模型

——静态优化模型

简单的优化模型(静态优化)

• 现实世界中普遍存在着优化问题.

• 静态优化问题指最优解是数(不是函数).

• 建立静态优化模型的关键之一是根据建模目的确定恰当的目标函数.

• 求解静态优化模型一般用微分法.

3.1 存贮模型

问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费．该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出．

已知某产品日需求量100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元．试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小．

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系．

问题分析与思考

日需求100件，准备费5000元，贮存费每日每件1元.

- 每天生产一次, 每次100件,无贮存费,准备费5000元.

每天费用5000元

- 10天生产一次, 每次1000件，贮存费900+800+…+100 =4500元，准备费5000元，总计9500元.

平均每天费用950元

- 50天生产一次,每次5000件, 贮存费4900+4800+…+100 =122500元，准备费5000元，总计127500元.

平均每天费用2550元

10天生产一次,平均每天费用最小吗?

问题分析与思考

- 周期短，产量小 ⇨ 贮存费少，准备费多
- 周期长，产量大 ⇨ 准备费少，贮存费多

⇨ **存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小.**

- 这是一个优化问题，关键在建立目标函数.

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数.

目标函数——每天总费用的平均值.

模型假设

1. 产品每天的需求量为常数 r;

2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2;

3. T天生产一次（周期）, 每次生产Q件，当贮存量为零时，Q件产品立即到来（生产时间不计）；

4. 为方便起见，时间和产量都作为连续量处理.

建模目的

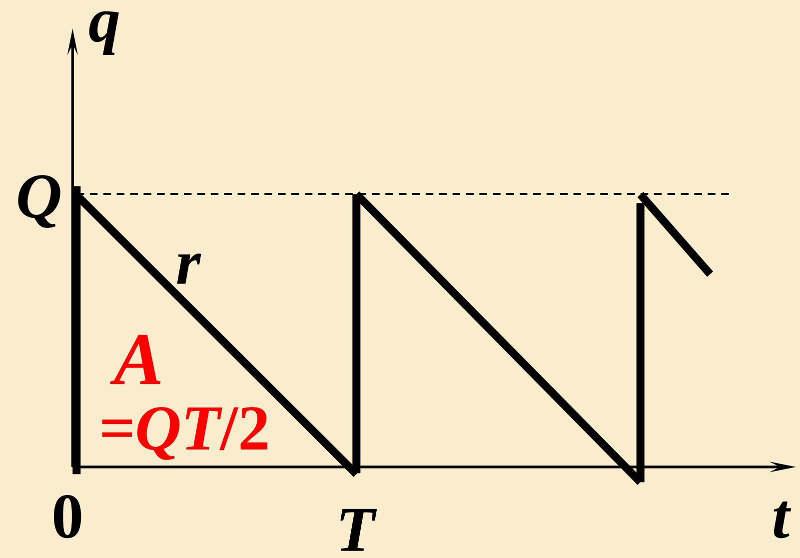
设 r, c_1, c_2 已知，求T, Q 使每天总费用的平均值最小.

模型建立

离散问题连续化

贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

t=0生产Q件，$q(0)=Q$, $q(t)$以需求速率r递减，$q(T)=0$.



$$\Rightarrow \quad Q = rT$$

一周期贮存费为

$$c_2\int_0^T q(t)dt = c_2\frac{QT}{2}$$

一周期总费用

$$\tilde{C} = c_1 + c_2\frac{QT}{2} = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2}$$

模型求解 求 T 使 $C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2}\to Min$

$$\frac{dC}{dT}=0 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型解释

定性分析 $c_1\uparrow\Rightarrow T,Q\uparrow$ $c_2\uparrow\Rightarrow T,Q\downarrow$ $r\uparrow\Rightarrow T\downarrow,Q\uparrow$

敏感性分析 参数 c_1,c_2,r 的微小变化对 T,Q 的影响

T 对 c_1 的(相对)敏感度

$$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}c_1}\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}$$

c_1 增加1%，T 增加0.5%

$S(T,c_2)=-1/2$, $S(T,r)=-1/2$ c_2 或 r 增加1%, T 减少0.5%

模型应用

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

- 回答原问题 $c_1=5000$，$c_2=1$，$r=100$

$\Rightarrow$ $T=10$(天), $Q=1000$(件), $C=1000$(元)

思考: 为什么与前面计算的$C=950$元有差别?

- 用于订货供应情况: 每天需求量 r，每次订货费 c_1，每天每件贮存费 c_2，T天订货一次(周期)，每次订货Q件，当贮存量降到零时，Q件立即到货.

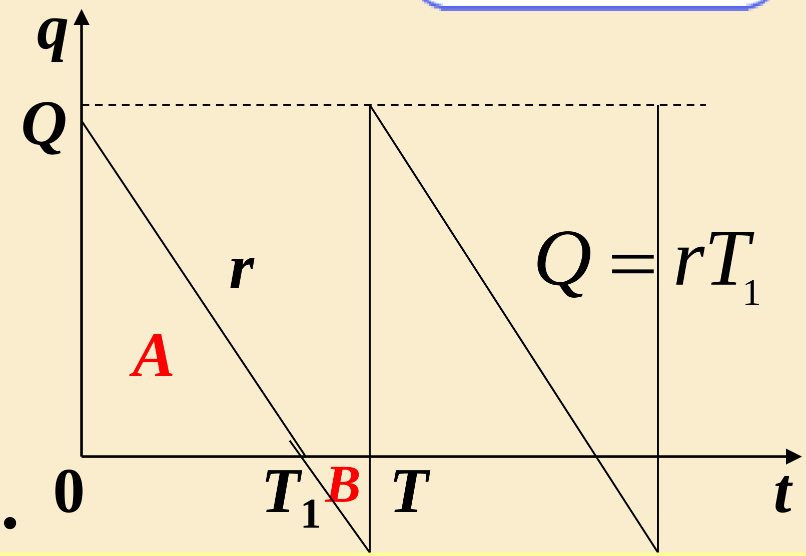
经济批量订货公式（EOQ公式）

不允许缺货的存贮模型

允许缺货的存贮模型

当贮存量降到零时仍有需求*r*,出现缺货，造成损失.

原模型假设：贮存量降到零时*Q*件立即生产出来(或立即到货).



现假设：允许缺货, 每天每件缺货损失费 c_3 , 缺货需补足.

周期*T*, $t=T_1$贮存量降到零

一周期贮存费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2 A$

一周期缺货费 $c_3\int_{T_1}^{T} |q(t)|dt = c_3 B$

一周期总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{QT_1}{2} + c_3\frac{r(T-T_1)^2}{2}$$

允许缺货的存贮模型

一周期总费用 $\overline{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2QT_1 + \frac{1}{2}c_3r(T-T_1)^2$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T,Q) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT}$$

求 T,Q 使 $C(T,Q) \to Min$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$$

为与**不允许缺货的存贮模型相比，T记作T', Q记作Q'.**

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}} \qquad Q' = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

允许缺货模型

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q'=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

不允许缺货模型

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

记 $\mu=\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$

$$T'=\mu T,\quad Q'=\frac{Q}{\mu}$$

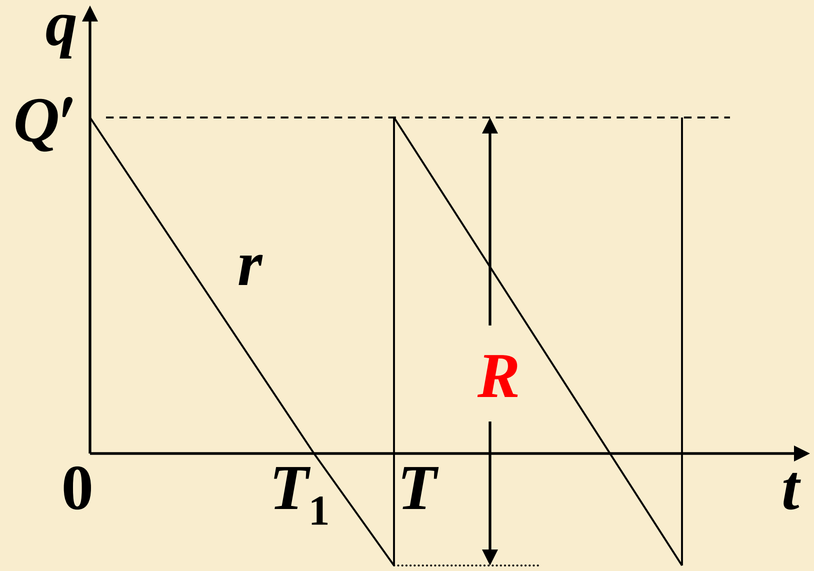
$$\mu>1 \Rightarrow T'>T,\quad Q'<Q \qquad c_3\uparrow \Rightarrow \mu\downarrow$$

不允许缺货 $\Leftrightarrow$ $c_3\to\infty \Rightarrow \mu\to 1$ $\Rightarrow$ $T'\to T,\ Q'\to Q$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q′~每周期初的存贮量

每周期的生产量
R（或订货量）

$$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$R = \mu Q > Q$$

Q~不允许缺货时的产量(或订货量)

存贮模型

• 存贮模型(EOQ公式)是研究批量生产计划的重要理论基础, 也有实际应用.

• 建模中未考虑生产费用, 为什么?在什么条件下可以不考虑(习题1)?

• 建模中假设生产能力为无限大(生产时间不计), 如果生产能力有限(大于需求量的常数), 应作怎样的改动(习题2)?

3.6 血管分支

背景

机体提供能量维持血液在血管中的流动.

给血管壁以营养. 克服血液流动的阻力.

消耗能量与取决于血管的几何形状.

在长期进化中动物血管的几何形状已经达到能量最小原则.

问题

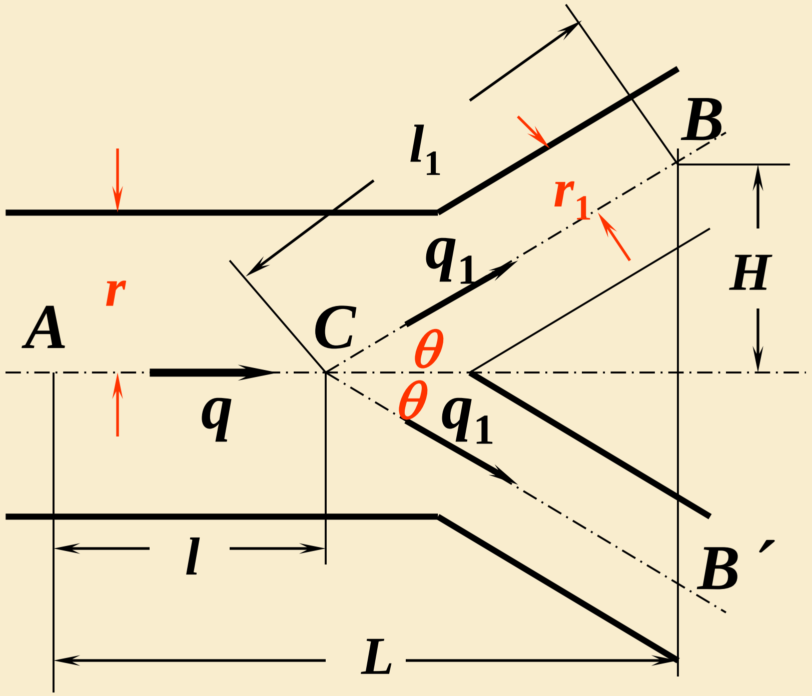
研究在能量最小原则下，血管分支处粗细血管半径比例和分岔角度.

模型假设

一条粗血管和两条细血管在分支点对称地处于同一平面.

血液流动近似于粘性流体在刚性管道中的运动.

血液给血管壁的能量随管壁的内表面积和体积的增加而增加，管壁厚度d近似与血管半径r成正比.



考察血管AC与CB, CB′

$q=2q_1$

$r/r_1,\ \theta$?

模型假设

粘性流体在刚性管道中运动

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\mu l}$$

Δp~A,C压力差，μ~粘性系数

克服阻力消耗能量E_1

$$E_1 = q\Delta p = \frac{8\mu q^2 l}{\pi r^4}$$

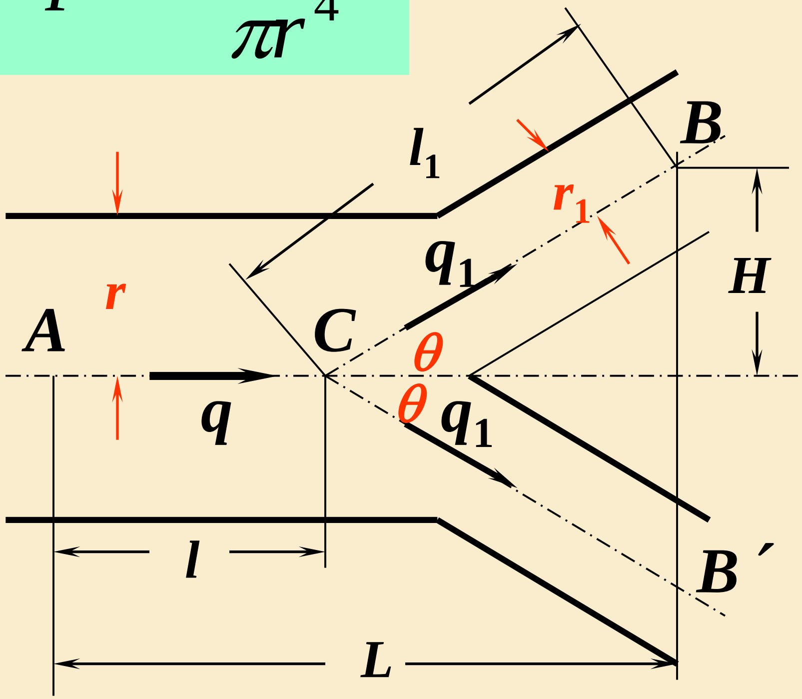
提供营养消耗能量E_2

管壁内表面积 $2\pi rl$

管壁体积$\pi(d^2+2rd)l$,

管壁厚度d与r成正比

$$E_2 = br^\alpha l, 1 \le \alpha \le 2$$



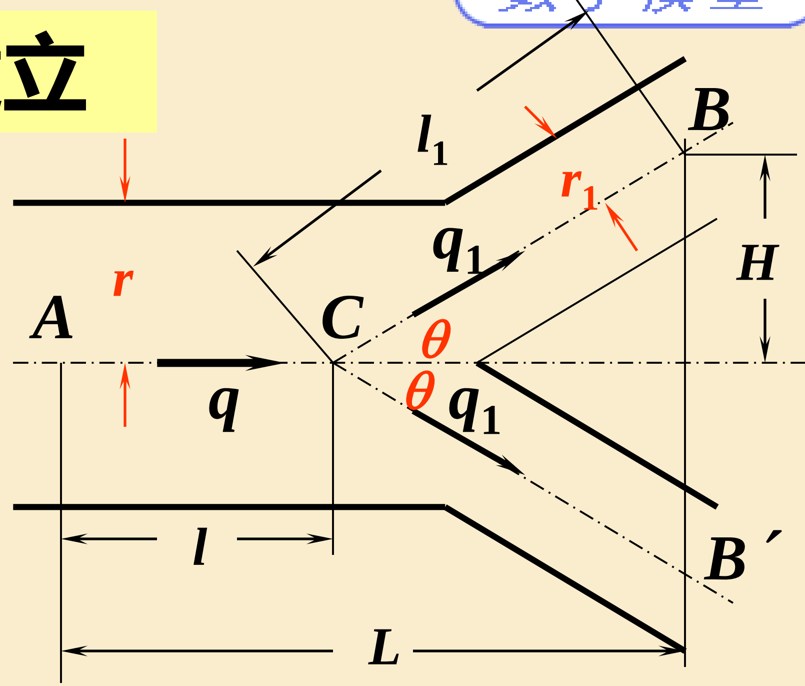
模型建立

克服阻力消耗能量

$$E_1 = q\Delta p = \frac{8\mu q^2 l}{\pi r^4}$$

提供营养消耗能量

$$E_2 = br^{\alpha} l, 1 \le \alpha \le 2$$



机体为血流提供能量

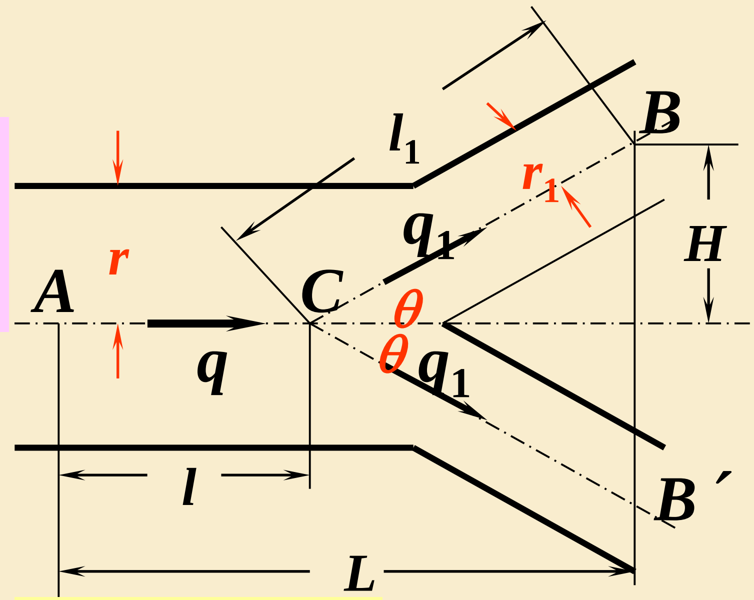
$$l = L - H/tan\theta/ \quad l_1 = H/sin\theta$$

$$E = E_1 + E_2 = (kq^2/r^4 + br^{\alpha})l + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^{\alpha})2l_1$$

$$E(r, r_1, \theta) = (kq^2/r^4 + br^{\alpha})(L - H/tan\theta) + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^{\alpha})2H/sin\theta$$

模型求解

$$E(r,r_1,\theta)=(kq^2/r^4+br^\alpha)(L-H/\tan\theta)+(kq_1^2/r_1^4+br_1^\alpha)2H/\sin\theta$$



$$\frac{\partial E}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial r_1}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b\alpha r^{\alpha-1}-4kq^2/r^5=0 \\ b\alpha r_1^{\alpha-1}-4kq_1^2/r_1^5=0 \end{cases}$$

$$\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=2\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4}$$

$$\cos\theta=2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

$$1\le\alpha\le 2$$

$$1.26\le r/r_1\le 1.32,\quad 37^0\le\theta\le 49^0$$

模型解释

$$\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$1.26 \le r/r_1 \le 1.32$$

$$37^0 \le \theta \le 49^0$$

生物学家：结果与观察大致吻合

推论 大动脉到毛细血管有**n**次分岔 ***n*=?**

大动脉半径r_{max}, 毛细血管半径r_{min}

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}}=4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

观察：狗的血管

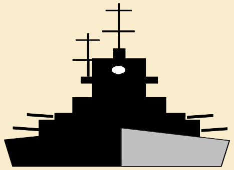
$$r_{\max}/r_{\min}\approx 1000\approx 4^5$$

$$n\approx 5(\alpha+4) \qquad 1\le\alpha\le 2 \qquad n\approx 25\sim 30$$

血管总条数

$$2^n\approx 2^{25}\sim 2^{30}\approx 3\times 10^7\sim 10^9$$

3.7 冰山运输



背景

- 波斯湾地区水资源贫乏，淡化海水的成本为每立方米0.1英镑.
- 专家建议从9600千米远的南极用拖船运送冰山，取代淡化海水.
- 从经济角度研究冰山运输的可行性.

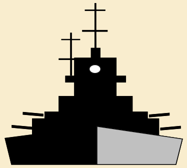
建模准备

1. 日租金和最大运量

船　　型	小	中	大
日租金（英镑）	4.0	6.2	8.0
最大运量（米^3）	5×10^5	10^6	10^7

建模准备

2. 燃料消耗（英镑/千米）



船速(千米/小时) \ 冰山体积(米³)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

3. 融化速率（米/天）

船速(千米/小时) \ 与南极距离 (千米)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

建模目的

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立方米水的费用最低，并与淡化海水的费用比较

模型假设

- 航行过程中船速不变，总距离9600千米.
- 冰山呈球形，球面各点融化速率相同.
- 到达目的地后,每立方米冰可融化0.85立方米水.

建模分析

总费用 ⇐ 燃料消耗 ⇐ 船型, 船速

总费用 ⇐ 租金 ⇐ 船型

目的地水体积 ⇐ 目的地冰体积 ⇐ 初始冰山体积 ⇐ 船型

目的地冰体积 ⇐ 运输过程融化规律 ⇐ 船型, 船速

模型建立

1. 冰山融化规律

船速u (千米/小时)

与南极距离d(千米)

融化速率r(米/天）

u \ d, r	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

r是 u 的线性函数

d<4000时u与d成正比

d>4000时u与d无关

$$r = \begin{cases} a_1 d(1+bu), & 0 \le d \le 4000 \\ a_2(1+bu), & d > 4000 \end{cases}$$

$$a_1 = 6.5\times 10^{-5}, a_2 = 0.2, b = 0.4$$

航行 t 天, d=24ut

第t天融化速率

$$r_t = \begin{cases} 1.56\times 10^{-3} u(1+0.4u)t, & 0 \le t \le \dfrac{1000}{6u} \\ 0.2(1+0.4u), & t > \dfrac{1000}{6u} \end{cases}$$

1. 冰山融化规律

冰山初始半径R_0，航行t天时半径 $R_t = R_0 - \sum_{k=1}^{t} r_k$

冰山初始体积 $V_0 = \dfrac{4\pi}{3} R_0^3$ t天时体积 $V_t = \dfrac{4\pi}{3} R_t^3$

选定u, V_0, 航行t天时冰山体积

$$V(u,V_0,t) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^{t} r_k\right)^3$$

总航行天数 $T = \dfrac{9600}{24u} = \dfrac{400}{u}$

到达目的地时冰山体积

$$V(u,V_0) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{t=1}^{T} r_t\right)^3$$

2. 燃料消耗

燃料消耗 q_1(英镑/千米)

u \ V (q_1)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

q_1对u线性, 对$\lg V$ 线性

$$q_1 = c_1(u+c_2)(\lg V + c_3),$$

$$c_1 = 0.3, c_2 = 6, c_3 = -1$$

选定u, V_0, 航行第t天燃料消耗 q (英镑/天)

$$q(u,V_0,t) = 24u\cdot c_1(u+c_2)[\lg V(u,V_0,t)+c_3]$$

$$= 7.2u(u+6)\left[\lg\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-\sum_{k=1}^{t} r_k\right)^3 - 1\right]$$

燃料消耗总费用

$$Q(u,V_0) = \sum_{t=1}^{T} q(u,V_0,t)$$

3. 运送每立方米水费用

冰山初始体积V_0的日租金 $f(V_0)$（英镑）

V_0	5×10^5	10^6	10^7
$f(V_0)$	4.0	6.2	8.0

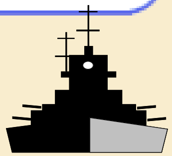
航行天数 $T=\dfrac{400}{u}$

拖船租金费用 $R(u,V_0)=f(V_0)\cdot\dfrac{400}{u}$

总燃料消耗费用

$$Q(u,V_0)=\sum_{t=1}^{T}7.2u(u+6)\left[\lg\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-\sum_{k=1}^{t}r_k\right)^3-1\right]$$

冰山运输总费用 $S(u,V_0)=R(u,V_0)+Q(u,V_0)$



3. 运送每立方米水费用

到达目的地时冰山体积

$$V(u,V_0)=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-\sum_{t=1}^{T}r_t\right)^3$$

冰山到达目的地后得到的水体积

$$W(u,V_0)=0.85V(u,V_0)$$

冰山运输总费用

$$S(u,V_0)=R(u,V_0)+Q(u,V_0)$$

运送每立方米水费用

$$Y(u,V_0)=\frac{S(u,V_0)}{W(u,V_0)}$$

模型求解

选择船型和船速,使冰山到达目的地后每立方米水的费用最低 ⇨ 求 u,V_0使 $Y(u,V_0)$最小

V_0只能取离散值
经验公式很粗糙

⇨ 取几组（V_0，u）用枚举法计算

V_0 \ u	3	3.5	4	4.5	5
10^7	0.0723	0.0683	0.0649	0.0663	0.0658
5×10^6	0.2251	0.2013	0.1834	0.1842	0.1790
10^6	78.9032	9.8220	6.2138	5.4647	4.5102

⇨ u=4~5(千米/小时)，V_0= 10^7 (米^3)， $Y(u,V_0)$最小

结果分析

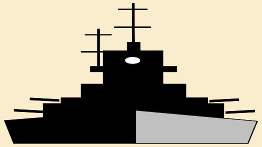
大型拖船V_0= 10^7 (米^3),船速 u=4~5(千米/小时),冰山到达目的地后每立方米水的费用 $Y(u,V_0)$约0.065(英镑).

虽然0.065英镑略低于淡化海水的成本0.1英镑，但是模型假设和构造非常简化与粗糙.

由于未考虑影响航行的种种不利因素，冰山到达目的地后实际体积会显著小于$V(u,V_0)$.

有关部门认为，只有当计算出的$Y(u,V_0)$显著低于淡化海水的成本时，才考虑其可行性.

冰 山 运 输



- 模型来自实际问题的可行性研究.

- 收集数据是建模的重要准备工作.

- 根据数据得到的经验公式是建模的基础.

- 冰山形状的球形假设简化了计算, 这个假设的合理性如何?如果改变它呢?