线性代数

第一章　　行列式

主讲人：张远征、张震峰、钱晓明

上海财经大学应用数学系

May 31, 2010

本章的研究内容

本章的研究内容

1. n阶行列式的定义;
2. 行列式的计算;
3. Cramer法则

本章的研究内容

本章的研究内容

1. n阶行列式的定义;
2. 行列式的计算;
3. Cramer法则

本章的研究内容

本章的研究内容

1. n阶行列式的定义;
2. 行列式的计算;
3. Cramer法则

目录

1. 二阶和三阶行列式

定义1.1—二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

数学背景: 当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解可用二阶行列式表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

三阶行列式的定义

定义1.1—三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

注1 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

三阶行列式的定义

定义1.1—三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

注1 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

2. n阶排列与逆序数

定义1.2—排列

把n个不同的元素排成一排，叫做这n个元素的全排列，也称n级**全排列**(简称**排列**).

注2 n个不同的元素的所有排列种数$= n!$.

定义1.3—逆序与逆序数

在n个不同元素的排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**,记为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

2. n阶排列与逆序数

定义1.2—排列

把n个不同的元素排成一排，叫做这n个元素的全排列，也称n级**全排列**(简称**排列**).

注2 n个不同的元素的所有排列种数$= n!$.

定义1.3—逆序与逆序数

在n个不同元素的排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**,记为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

2. n阶排列与逆序数

定义1.2—排列

把n个不同的元素排成一排，叫做这n个元素的全排列，也称n级全排列(简称排列).

注2 n个不同的元素的所有排列种数$= n!$.

定义1.3—逆序与逆序数

在n个不同元素的排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序. 一个排列中逆序的总数叫做这个排列的逆序数,记为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

例

例1 计算$\tau(21435)$, $\tau(23415)$.

例2 计算$\tau(12\cdots n)$, $\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1)$.

例3 设$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = k$, 说明$\tau(j_n j_{n-1} \cdots j_1) = C_n^2 - k$.

例

例1 计算$\tau(21435)$, $\tau(23415)$.

例2 计算$\tau(12\cdots n)$, $\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1)$.

例3 设$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = k$, 说明$\tau(j_n j_{n-1} \cdots j_1) = C_n^2 - k$.

例

例1 计算$\tau(21435)$, $\tau(23415)$.

例2 计算$\tau(12\cdots n)$, $\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1)$.

例3 设$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = k$, 说明$\tau(j_n j_{n-1} \cdots j_1) = C_n^2 - k$.

排列的分类

定义1.4—偶排列与奇排列

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

定理1.1

所有n级排列中$(n \geq 2)$，奇排列与偶排列各占一半.

排列的分类

定义1.4—偶排列与奇排列

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

定理1.1

所有n级排列中$(n \geq 2)$，奇排列与偶排列各占一半.

排列的对换

定义1.5—对换

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换.

定理1.2

一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

排列的对换

定义1.5—对换

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换.

定理1.2

一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

3阶排列:

(1) 3阶排列共有$3! = 6$种;

(2) 偶排列: 123, 231, 312; 奇排列: 321, 213, 132.

3阶行列式:

(1) 3阶行列式共有6项;

(2) 行指标按次序排列, 列指标取遍所有的排列(123,231,312; 321,213,132). 其中偶排列的项均取"$+$"号, 奇排列的项取"$-$"号.

比较—3阶排列vs三阶行列式

3阶排列:

(1) 3阶排列共有$3! = 6$种;

(2) 偶排列: 123, 231, 312; 奇排列: 321, 213, 132.

3阶行列式:

(1) 3阶行列式共有6项;

(2) 行指标按次序排列, 列指标取遍所有的排列(123,231,312; 321,213,132). 其中偶排列的项均取"$+$"号, 奇排列的项取"$-$"号.

3. n阶行列式的定义

三阶行列式的等价定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

定义1.6—n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

3. n阶行列式的定义

三阶行列式的等价定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

定义1.6—n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n阶行列式定义的注解

注解:

1. n阶行列式共有$n!$项;
2. 每一项是n个元素的乘积, 且这n个元素取自不同的行不同的列.
3. 每一项中行指标按次序排列, 那么列指标的逆序数确定该项的符号.
4. 约定: 一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$.

例4 决定k, l使$a_{2k}a_{41}a_{1l}a_{33}$为四阶行列式中符号是负的项.

n阶行列式定义的注解

注解:

1. n阶行列式共有$n!$项;
2. 每一项是n个元素的乘积, 且这n个元素取自不同的行不同的列.
3. 每一项中行指标按次序排列, 那么列指标的逆序数确定该项的符号.
4. 约定: 一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$.

例4 决定k, l使$a_{2k}a_{41}a_{1l}a_{33}$为四阶行列式中符号是负的项.

n阶行列式定义的注解

注解:

1. n阶行列式共有$n!$项;
2. 每一项是n个元素的乘积, 且这n个元素取自不同的行不同的列.
3. 每一项中行指标按次序排列, 那么列指标的逆序数确定该项的符号.
4. 约定: 一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$.

例4 决定k, l使$a_{2k}a_{41}a_{1l}a_{33}$为四阶行列式中符号是负的项.

n阶行列式定义的注解

注解:

1. n阶行列式共有$n!$项;
2. 每一项是n个元素的乘积, 且这n个元素取自不同的行不同的列.
3. 每一项中行指标按次序排列, 那么列指标的逆序数确定该项的符号.
4. 约定: 一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$.

例4 决定k, l使$a_{2k}a_{41}a_{1l}a_{33}$为四阶行列式中符号是负的项.

n阶行列式定义的注解

注解:

1. n阶行列式共有$n!$项;
2. 每一项是n个元素的乘积，且这n个元素取自不同的行不同的列.
3. 每一项中行指标按次序排列，那么列指标的逆序数确定该项的符号.
4. 约定: 一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$.

例4 决定k, l使$a_{2k}a_{41}a_{1l}a_{33}$为四阶行列式中符号是负的项.

4. 特殊行列式—重要公式

1. 上三角形及下三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots \end{vmatrix}$$

注: 既是上三角又是下三角的行列式成为对角形行列式. 其值等于主对角元素的连乘积.

特殊行列式(续)

2. 斜三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

Summary

1. n级排列的逆序数$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$;
2. n阶行列式的定义;
3. 三角形行列式的值.

Summary

1. n级排列的逆序数$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$;
2. n阶行列式的定义;
3. 三角形行列式的值.

Summary

1. n级排列的逆序数$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$;
2. n阶行列式的定义;
3. 三角形行列式的值.

homework

$P27.1(4),(5);4;p28.8$

目录

1. 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^T 为 D 的**转置行列式**.

行列式的性质

1. 行列式转置值不变, 即 $D=D^T$.

1. 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称D^T为D的转置行列式.

行列式的性质

1. 行列式转置值不变, 即$D=D^T$.

行列式的性质(续)

行列式的性质

2. 互换行列式的某两行(列)元素，行列式变号.

推论1 若行列式中有两行(列)元素对应相同，则行列式的值为零.

3. 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数k，等于用k去乘此行列式.

推论2 若行列式中某行(列)的元素全为零，则行列式的值为零.

推论3 行列式中若有两行(列)对应元素成比例，其值为零.

行列式的性质(续)

行列式的性质

2. 互换行列式的某两行(列)元素, 行列式变号.

   推论1 若行列式中有两行(列)元素对应相同, 则行列式的值为零.

3. 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数k, 等于用k去乘此行列式.

   推论2 若行列式中某行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

   推论3 行列式中若有两行(列)对应元素成比例, 其值为零.

行列式的性质(续)

行列式的性质

2. 互换行列式的某两行(列)元素，行列式变号.

推论1 若行列式中有两行(列)元素对应相同，则行列式的值为零.

3. 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数k，等于用k去乘此行列式.

推论2 若行列式中某行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

推论3 行列式中若有两行(列)对应元素成比例，其值为零.

行列式的性质(续)

行列式的性质

2. 互换行列式的某两行(列)元素, 行列式变号.

推论1 若行列式中有两行(列)元素对应相同, 则行列式的值为零.

3. 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数k, 等于用k去乘此行列式.

推论2 若行列式中某行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

推论3 行列式中若有两行(列)对应元素成比例, 其值为零.

行列式的性质(续)

行列式的性质

2. 互换行列式的某两行(列)元素，行列式变号.

推论1 若行列式中有两行(列)元素对应相同，则行列式的值为零.

3. 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数k，等于用k去乘此行列式.

推论2 若行列式中某行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

推论3 行列式中若有两行(列)对应元素成比例，其值为零.

行列式的性质(续)

行列式的性质

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 把某一行(列)元素的k倍加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变.

行列式的性质(续)

行列式的性质

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 把某一行(列)元素的k倍加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变.

例1 计算行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$的值.

方法 将D化至上三角行列式. 这一过程一般是从左到右逐列进行.

例2 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{vmatrix}$的值.

特征 每一行或列的元素之和相等.

方法 将第$2, 3, \cdots, n$列都加到第1列.

例

例1 计算行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$的值.

方法 将D化至上三角行列式. 这一过程一般是从左到右逐列进行.

例2 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{vmatrix}$的值.

特征 每一行或列的元素之和相等.

方法 将第$2, 3, \cdots, n$列都加到第1列.

例

例1 计算行列式$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$的值.

方法 将D化至上三角行列式. 这一过程一般是从左到右逐列进行.

例2 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{vmatrix}$的值.

特征 每一行或列的元素之和相等.

方法 将第$2,3,\cdots n$列都加到第1列.

例

例1 计算行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$的值.

方法 将D化至上三角行列式. 这一过程一般是从左到右逐列进行.

例2 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{vmatrix}$的值.

特征 每一行或列的元素之和相等.

方法 将第$2,3,\cdots n$列都加到第1列.

例3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}$ 的值.

方法 某行(或某列)元素全为1, 可以用这行(或列)的适当倍数加到其他行(或列).

例4 证明: $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = 0 (n \geq 3)$.

例(续)

例3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}$ 的值.

方法 某行(或某列)元素全为1, 可以用这行(或列)的适当倍数加到其他行(或列).

例4 证明: $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = 0(n \geq 3).$

例(续)

例3 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}$$
的值.

方法 某行(或某列)元素全为1, 可以用这行(或列)的适当倍数加到其他行(或列).

例4 证明:
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = 0(n \geq 3).$$

2.代数余子式的定义

定义2.1—余子式及代数余子式

- 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行第j列划去后，余下的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij};
- $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做元素a_{ij}的代数余子式.

代数余子式的符号规律:

(1) 正负号交错变化;

(2) 对角线元素的符号均为正，即代数余子式就是余子式本身.

2.代数余子式的定义

定义2.1—余子式及代数余子式

- 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行第j列划去后，余下的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij};
- $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做元素a_{ij}的代数余子式.

代数余子式的符号规律:

(1) 正负号交错变化;

(2) 对角线元素的符号均为正，即代数余子式就是余子式本身.

2.代数余子式的定义

定义2.1—余子式及代数余子式

- 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行第j列划去后，余下的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij};
- $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做元素a_{ij}的代数余子式.

代数余子式的符号规律:

(1) 正负号交错变化;

(2) 对角线元素的符号均为正，即代数余子式就是余子式本身.

3. 行列式按一行或一列展开

定理2.1—展开定理

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) 按第i行展开: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(2) 按第j列展开: $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k)$;

(2) $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$.

3. 行列式按一行或一列展开

定理2.1—展开定理

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) 按第i行展开: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(2) 按第j列展开: $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k)$;

(2) $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$.

3. 行列式按一行或一列展开

定理2.1—展开定理

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

(1) 按第i行展开：$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(2) 按第j列展开：$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

(1) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k)$;

(2) $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$.

3. 行列式按一行或一列展开

定理2.1—展开定理

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) 按第i行展开: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(2) 按第j列展开: $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

(1) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k)$;

(2) $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$.

3. 行列式按一行或一列展开

定理2.1—展开定理

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) 按第i行展开: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(2) 按第j列展开: $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

(1) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k)$;

(2) $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$.

3. 行列式按一行或一列展开

定理2.1—展开定理

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

(1) 按第i行展开: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(2) 按第j列展开: $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论

行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

(1) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k)$;

(2) $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$.

例

例5 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$的值.

例6 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$的值.

- 一般地, 应选取零元素最多的行或列进行展开;
- 利用行列式的性质, 将某一行或列的元素尽可能多的化为零, 然后按这一行或列进行展开.

例

例5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

例6 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值.

- 一般地，应选取零元素最多的行或列进行展开；
- 利用行列式的性质，将某一行或列的元素尽可能多的化为零，然后按这一行或列进行展开.

例

例5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

例6 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值.

- 一般地, 应选取零元素最多的行或列进行展开;
- 利用行列式的性质, 将某一行或列的元素尽可能多的化为零, 然后按这一行或列进行展开.

例

例5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

例6 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值.

- 一般地, 应选取零元素最多的行或列进行展开;
- 利用行列式的性质, 将某一行或列的元素尽可能多的化为零, 然后按这一行或列进行展开.

Vandermonde行列式

例7 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

注

当$x_1, x_2, \cdots, x_n$互不相等时, Vandermonde行列式不等于零.

Vandermonde行列式举例

例8 $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$

例9 利用Vandermonde行列式计算 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ 的值.

Vandermonde行列式举例

例8 $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$

例9 利用Vandermonde行列式计算$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$的值.

Summary

基本理论

1. 性质: 互换两行(列)变号; 某行(列)提出公因子; 将某行(列)的适当倍数加到另一行(列).
2. 行列式的展开定理.

基本方法

1. 利用行列式的性质化行列式为三角形行列式;
2. 结合性质, 将行列式按某行(列)展开.

基本题型

1. 每行(或列)之和相等的行列式;
2. 每行(或列)的元素全为1的行列式;
3. Vandermonde型的行列式.

Summary

基本理论

1. 性质：互换两行(列)变号；某行(列)提出公因子；将某行(列)的适当倍数加到另一行(列).
2. 行列式的展开定理.

基本方法

1. 利用行列式的性质化行列式为三角形行列式；
2. 结合性质，将行列式按某行(列)展开.

基本题型

1. 每行(或列)之和相等的行列式；
2. 每行(或列)的元素全为1的行列式；
3. Vandermonde型的行列式.

Summary

基本理论

1. 性质: 互换两行(列)变号; 某行(列)提出公因子; 将某行(列)的适当倍数加到另一行(列).
2. 行列式的展开定理.

基本方法

1. 利用行列式的性质化行列式为三角形行列式;
2. 结合性质, 将行列式按某行(列)展开.

基本题型

1. 每行(或列)之和相等的行列式;
2. 每行(或列)的元素全为1的行列式;
3. Vandermonde型的行列式.

目录

(I) 含有n个未知量n个方程的线性方程组一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

其中$a_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$称为方程组的系数;
$b_i(i=1,\cdots,n)$称为常数项.

(II) 常数项为零的线性方程组称为n元齐次线性方程组.

系数行列式

由系数$a_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$构成的行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做方程组的系数行列式. 记

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cramer法则

定理3.1—Cramer法则

如果线性方程组(I)式的系数行列式$D \neq 0$, 那么它有唯一解, 其解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

推论

若齐次线性方程组(II)的系数行列式$D \neq 0$, 则它只有唯一零解.

(如果齐次线性方程组(II)有非零解，则它的系数行列式等于零)

Cramer法则

定理3.1—Cramer法则

如果线性方程组(I)式的系数行列式$D \neq 0$, 那么它有唯一解, 其解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

推论

若齐次线性方程组(II)的系数行列式$D \neq 0$, 则它只有唯一零解.

(如果齐次线性方程组(II)有非零解，则它的系数行列式等于零)

例

例 下列齐次方程组中的参数λ为何值时，方程组有非零解

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+(6-\lambda)x_2=0 \\ 2x_1+(4-\lambda)x_3=0 \end{cases}.$$