第十二章

微分方程与差分方程简介

已知 $y' = f(x)$, 求 y —— **积分问题**

推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程 , 求 y

—— **微分方程问题**

第一节 微分方程的基本概念

引例 $\begin{cases}\text{几何问题}\\ \text{物理问题}\end{cases}$

微分方程的基本概念

引例 一曲线通过点(1,2)，在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程 .

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,dx = x^2 + C$ (C为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

微分方程的基本概念

微分方程

含未知函数的导数或微分的方程叫做**微分方程** .

例如:

$$y' = xy, \qquad y'' + 2y' - 3y = e^x,$$

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

注: 微分方程不一定含未知函数自身 .

常微分方程，偏微分方程

微分方程的阶

方程中所含未知函数**导数的最高阶数**叫做微分方程的阶

一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$, $y' = f(x, y)$;

高阶 (n 阶) 微分方程

一般地 , n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

微分方程的**解** — 使方程成为恒等式的函数.

设 $y = \varphi(x)$ 在区间I上有n阶导数,

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

微分方程的解的分类:

通解 — 微分方程的解中含有任意常数, 且独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.

例 $y' = y$, 通解 $y = Ce^x$;

$y'' + y = 0$, 通解 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

特解 — 确定了通解中任意常数以后的解.

即不含任意常数的解.

$y''+y=0$, $y=C_1\sin x+\cos x$ 即不是通解也不是特解 .

$y=C_1\sin x+C_2\sin x$ 即不是通解也不是特解 .

说明: 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)\,y'=0$ 有解

$y=-x$ 及 $y=C$

后者是通解 , 但不包含前一个解 .

解的图象: 微分方程的积分曲线.

通解的图象: 积分曲线族.

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的**初始条件**

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题.

引例 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \\ y\big|_{x=1}=2\end{cases}$ 通解: $y=x^2+C$ 特解: $y=x^2+1$

例 判断下列微分方程的阶数

$(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=xy$ 一阶

$\dfrac{d}{dx}[x(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})]=xy'$ 二阶

$xy''-(xy')'=xy$ 一阶

$(xy^2)'=y'+x$ 一阶

例 验证函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ (C_1,C_2为常数)

是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$ 的通解, 并求满足初始条件

$x\big|_{t=0}=A\,,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$ 的特解 .

解: $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-C_1k^2\cos kt\ -C_2k^2\sin kt$

$=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)=-k^2x$

这说明 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是方程的解 .

C_1,C_2 是两个独立的任意常数, 故它是方程的通解.

利用初始条件易得: $C_1=A,\ C_2=0$, 故所求特解为

$x=A\cos kt$

例 已知曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分, 求曲线所满足的微分方程 .

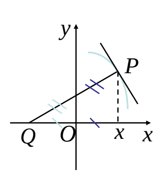
解: 如图所示, 点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

令 $Y=0$, 得 Q 点的横坐标

$$X=x+yy'$$

$\therefore\ \ x+yy'=-x$, 即 $yy'+2x=0$



第十二章

第二节 可分离变量微分方程

可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x+N_1(x)\ N_2(y)\,\mathrm{d}y=0$$

转化

解分离变量方程 $M(y)\,dy=N(x)\,dx$

可分离变量方程的解法:

将方程分离变量得 $\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \quad (g(y)\neq 0)$

两端分别积分，得 $\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$

得通解 $G(y) = F(x)+C$

其中 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别是 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的一个原函数, C为任意常数.

若存在 y_0 使 $g(y_0)=0$, 则 $y=y_0$ 也是方程的一个解.

因此, 方程除了通解之外，还可能有一些常数解.

例 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2\,\mathrm{d}x$ $\boxed{(y\neq 0)}$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3x^2\,\mathrm{d}x$

说明: 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

得 $\ln|y| = x^3 + C_1$ **或** $\ln|y| = x^3 + \ln|C|$

即 $y = \pm e^{x^3 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^3}$

令 $C = \pm e^{C_1}\ (C\neq 0)$

$y = C e^{x^3}$ (C 为任意常数)

(此式含分离变量时丢失的解 $y = 0$)

例 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

解: 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ (C 为任意常数)

由初始条件得 $C = 1$, 故所求特解为

$y\sqrt{x^2+1} = 1$

例 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y}$ 的通解.

解: 分离变量 $e^{-y}\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x$ 积分 $-e^{-y} = e^x + C$

即 $(e^x + C)e^y + 1 = 0$ ($C<0$)

例 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解.

解: 分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$

积分 $\ln|y| = \ln|x| - x + \ln|C|$ ($C\neq 0$)

即通解为 $y = Cxe^{-x}$ (C 为任意常数)

例 求下列方程的通解 :

(1) $(x+xy^2)\,\mathrm{d}x - (x^2y+y)\mathrm{d}y = 0$

(2) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

提示: (1) 分离变量 $\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow 1+y^2 = C(1+x^2) \quad (C>0)$

(2) 方程变形为 $y' = -2\cos x\sin y$

分离变量 $\frac{1}{\sin y}\mathrm{d}y = -2\cos x\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$

例 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1) = ?$ **(08-09, 二(6))**

解: 由题 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x}$, 两边取极限得 $y' = \frac{y}{1+x^2}$,

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 积分得 $\ln|y| = \arctan x + \ln|C|$

即 $y = Ce^{\arctan x}$ (C 为任意常数) 由初始条件得 $C = \pi$,

故所求特解为 $y = \pi e^{\arctan x}$, 所以 $y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

例 $f(x)$在$[0,1]$内有连续的导数，$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy = \iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$

其中$D_t = \{(x,y) \mid 0 \le x \le t, 0 \le y \le t, 0 \le x+y \le t\}\ (0 < t \le 1)$，

且 $f(0)=1$，求 $f(x)$

解: 由题 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy = \int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y)dy$

$$= \int_0^t [f(t) - f(x)]dx = tf(t) - \int_0^t f(x)dx$$

$$\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy = \frac{1}{2}t^2 f(t)$$

则 $tf(t) - \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}t^2 f(t), \quad f(0)=1$

即 $f(t) + tf'(t) - f(t) = tf(t) + \frac{1}{2}t^2 f'(t), \quad f(0)=1$

$$(2-t)f'(t) = 2f(t), \quad f(0)=1$$

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \frac{2}{2-t}dt, \quad f(t) = \frac{C}{(2-t)^2},$$

由初值 $f(0)=1$，得 $C=4$，

所以 $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$

例 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x-y+1)$$

变量替换

解: 令 $u = x-y+1$，则

$$u' = 1 - y'$$

代入方程，得 $u' = 1 - \sin^2 u \Longrightarrow \dfrac{du}{dx} = \cos^2 u$

即 $\sec^2 u\, du = dx$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解: $\tan(x-y+1) = x + C$ （C 为任意常数）

例 求方程 $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ 的通解.

解: 令 $u = x+y$，则 $u' = 1 + y'$

故有 $u' = 1 + e^u$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+e^u}du = dx$$

积分 $\displaystyle\int \frac{du}{1+e^u} = x + C$ $\quad \displaystyle\int \frac{(1+e^u) - e^u}{1+e^u} du$

$$u - \ln(1+e^u) = x + C$$

所求通解: $\ln(1+e^{x+y}) = y - C$ （C 为任意常数）

例 求方程 $f(xy)ydx + g(xy)xdy = 0$ 的通解.

解: 令 $u = xy$，则 $\dfrac{du}{dx} = y + x\dfrac{dy}{dx}$，$dy = \dfrac{du - ydx}{x}$，

于是 $f(u)ydx + g(u)xdy$

$$= f(u)ydx + g(u)x \cdot \frac{du - ydx}{x}$$

$$= (f(u) - g(u))\frac{u}{x}dx + g(u)du = 0$$

即 $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{g(u)du}{u(f(u) - g(u))}$

通解为 $\ln|x| = -\displaystyle\int \frac{g(u)du}{u(f(u)-g(u))} + C$ （C 为任意常数）

内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

说明: 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)y' = 0$ 有解

$$y = -x \quad 及 \quad y = C$$

后者是通解，但不包含前一个解 .

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数 .

3. 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微元关系列方程

(2) 确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.