第四章 随机向量及其分布

（下）

下面介绍二个常用二维连续型随机向量。

杨勇制作

1. 二维均匀分布

定义4-8 设 G 是平面 xOy 上的一个有界区域，其面积记为 $S_G(>0)$ 。若二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G},(x,y)\in G\\ 0,(x,y)\notin G\end{cases}$$

则称 (X,Y) 服从区域 G 上的二维均匀分布（2-dimensional uniform distribution）.

容易验证 $p(x,y)$ 满足联合密度函数的二个基本性质。

若二维随机向量 (X,Y) 服从区域 G 上的二维均匀分布，且 $D\subset G$ 则

$$P\left(\left(X,Y\right)\in D\right)=\iint_D p(x,y)dxdy$$

$$=\iint_D \frac{1}{S_G}dxdy$$

$$=\frac{1}{S_G}\iint_D dxdy=\frac{S_D}{S_G}$$

其中 S_D 是区域 D 的面积。

上式表明，二维随机向量 (X,Y) 落在区域 D 内的概率与 D的面积成正比，而与 D 在 G 中的位置和形状无关。这也是二维均匀分布名称的由来。

如果我们在一个面积为 S_G 的平面区域 G 上“等可能”地投点，令 (X,Y) 表示落点的坐标，则 (X,Y) 服从区域 G 上的二维均匀分布。

因此，二维均匀分布实际上就是平面上几何概型的随机向量描述。这样，平面上几何概型问题皆可利用二维均匀分布解决。

特别地，当 G 为矩形区域时，即

$$G=\{(x,y)|a\le x\le b,c\le y\le d\}$$

则此二维均匀分布的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b,c\le y\le d\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}$$

79页例4-5

例4-5 在区间 $(0,a)$ 的中点两边随机地选取两点，求两点间的距离小于 $a/3$ 的概率。

解：以 X 表示中点左边所取的随机点到端点 O 的距离，Y 表示中点右边所取的随机点到端点 O 的距离，即

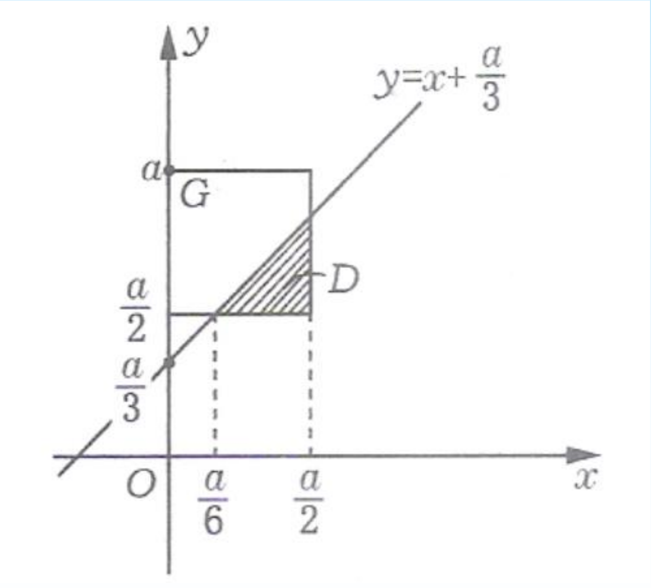
$$G: 0 < X < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < Y < a$$

(X,Y)服从区域 G 上的二维均匀分布，所以，(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{a^2},0<x<\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}<y<a\\ 0\quad,\quad 其他\end{cases}$$

$$P\left(Y-X<\frac{a}{3}\right)=\iint_D p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{3}+x}\frac{4}{a^2}dy=\frac{2}{9}\text{。}$$



2. 二维正态分布

定义4-9 若二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

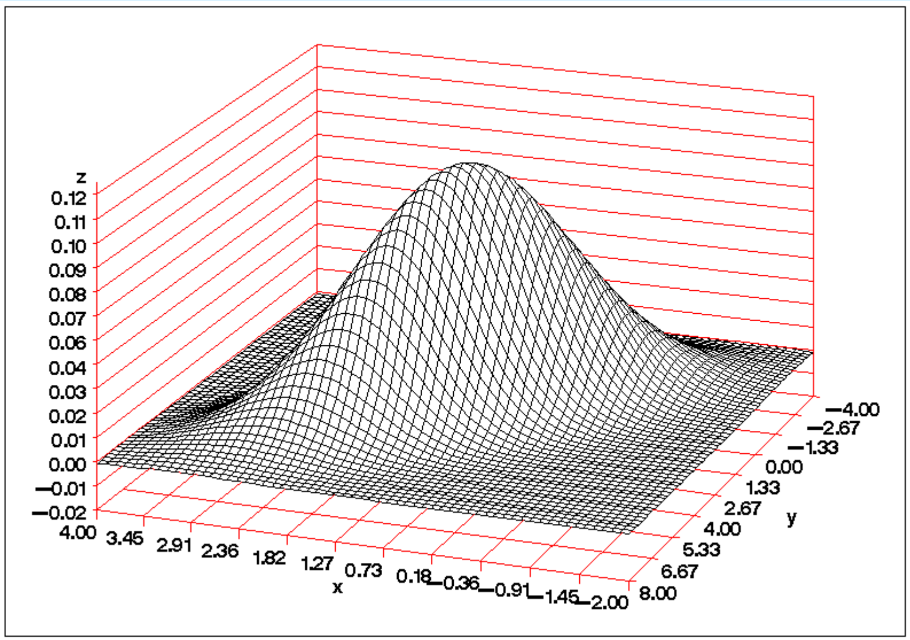
其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数，且

$$-\infty<\mu_1<+\infty,-\infty<\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1,$$

则称 (X,Y) 服从二维正态分布（2-dimensional normal distribution），记作

$$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)。$$

二维正态分布的联合密度函数的图形



可以验证二维正态分布的联合密度函数满足：

(1) $p(x,y)\ge 0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$。

其中(2)可由性质4-4验证。

性质4-4 若 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$ ，

则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

证明 令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,

则 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((v-\rho u)^2+u^2(1-\rho^2)\right)}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

即 $p_X(x)$ 为正态分布 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ 的密度函数，所以 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}\right)$；

同理可证： $Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ 。

第二节 随机变量的独立性

在上一节中，我们曾经指出，二维随机向量 (X,Y) 的联合概率分布或联合密度函数不仅描述了 X 与 Y 各自的统计规律，而且还包含了 X 与 Y 相互之间关系的信息。

当随机变量 X 与 Y 取值的规律互不影响时，称 X 与 Y 独立，这是本节讨论的重点。

定义4-10 设$F(x,y)$为二维随机向量(X,Y) 的联合分布函数，$F_X(x),F_Y(y)$ 分别为二维随机向量 (X,Y) 的二个边际分布函数。若对于任意实数 x,y ，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

或 $P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立（independent）。否则称随机变量X与 Y 不独立（not independent）。

把不独立写成定义就是：

如果存在x_0, y_0，使得

$$F(x_0, y_0) \neq F_X(x_0) F_Y(y_0)$$

则称随机变量 X 与 Y 不独立。

对于二维离散型随机向量，随机变量 X 与 Y 相互独立，可由以下定义4-11等价定义。

定义4-11 设二维离散型随机向量(X,Y)的联合概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad \begin{array}{l} i=1,\cdots,m,\cdots \\ j=1,\cdots,n,\cdots \end{array}$$

若对于任意的正整数 i,j ，有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

即

$$p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}$$

则称离散型随机变量X与Y相互独立，否则称X与Y不独立。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$p_{m\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet n}$	$\cdots$	1

把不独立写成定义就是：

如果存在i_0, j_0,使得

$$p_{i_0 j_0} \neq p_{i_0 \bullet} \cdot p_{\bullet j_0}$$

则称随机变量 X 与 Y 不独立。

对于二维连续型随机向量，随机变量 X 与 Y 相互独立也可由以下定义4-12等价定义。

定义4-12 设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，$p_X(x), p_Y(y)$ 分别是 (X,Y) 的二个边际密度函数。若

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

则称连续型随机变量 X 与 Y 相互独立。

注：由于密度函数$p_X(x)$ 和$p_Y(y)$ 改变有限个点的函数值，联合密度函数改变有限个点或者改变一条曲线的函数值，都不影响概率的计算结果，

所以在定义4-12中，对所有x, y均成立,应该理解为通过适当调整这些函数值，可以对所有x, y均成立。

也就是说，必须在面积大于0的区域上，有$p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$,才能证明$X$和$Y$不独立。

例如，存在(x_0, y_0),使得$p(x_0, y_0) \neq p_X(x_0)p_Y(y_0)$，这并不能说明$X$和$Y$不独立。

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y), \forall x,y$$

$$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}, \forall i,j$$

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y), \forall x,y$$

81页例4-7

例4-7 设 (X,Y) 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

问 α,β 取什么值时，X 与 Y 相互独立？

解：把所有6个概率加起来应该等于1，可得

$$\alpha+\beta=\frac{1}{3},$$

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

又

$$P(Y=2)=\frac{1}{9}+\alpha,$$

$$P(X=1)=\frac{1}{3},$$

及 X 与 Y 独立，则

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$$

即

$$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\cdot\frac{1}{3},$$

$$\alpha=\frac{2}{9},\beta=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

将 α, β 的值代入联合概率分布，可以验证 X 与 Y 相互独立。

问题：

联合概率分布中出现取某一对数的概率为0，讨论X和Y的独立性。

杨勇制作

二维均匀分布的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, a\le x\le b, c\le y\le d \\ 0 \quad , \quad \text{其他}\end{cases},$$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)}dy, a\le x\le b \\ 0 \quad , \quad \text{其他}\end{cases}$$

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

同理

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, c\le y\le d\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$$

所以，服从矩形上的二维均匀分布的(X,Y)，X,Y独立。

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x\le b\\ 0, 其他\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, c\le y\le d\\ 0, 其他\end{cases}$$

此时，$p(a,c)\neq p_X(a)\cdot p_Y(c)$，

不能说：X和Y不独立。

82页例4-9

例4-9 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in D\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

其中区域 D 是由 x 轴，y 轴及直线 $2x+y=2$ 所围成。求

（1）边际密度函数 $p_X(x),p_Y(y)$ ；

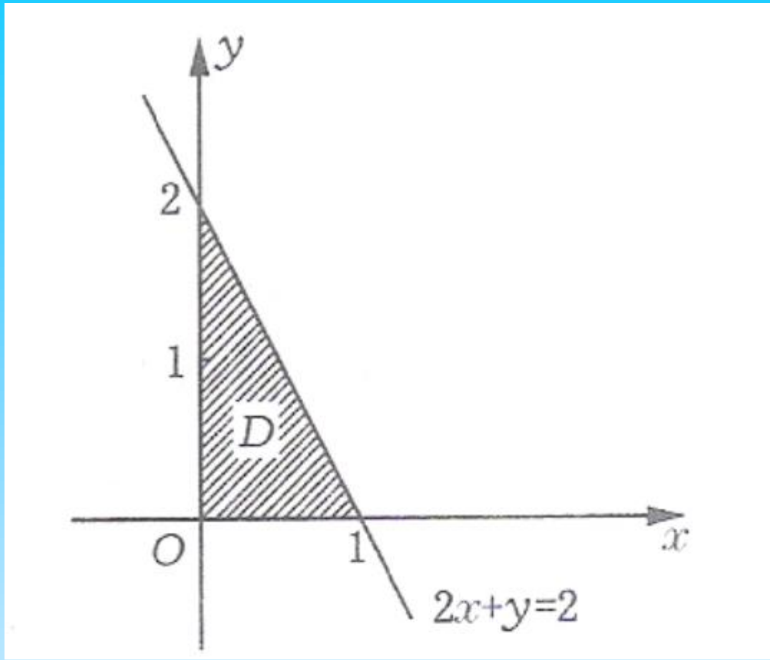
（2） X 与 Y 是否独立？

解：（1）

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2-2x}1dy, 0\le x\le 1\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2-2x, 0\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases},$$



$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^{1-\frac{y}{2}} 1dx, 0 \le y \le 2 \\ 0 \quad ,\text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{y}{2}, 0 \le y \le 2 \\ 0, \text{其他} \end{cases};$$

（2）显然，当 (x, y) 落在区域 D 中时，

$p(x, y) \ne p_X(x)p_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

我们已经知道，通过联合分布，可求得边际分布，而在一般情况下由边际分布不能唯一确定联合分布。但当 X 与 Y 相互独立时，则由边际分布可以确定联合分布。

83页例4-10

例4-10 假设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X 与 Y 独立，求 (X, Y)的联合密度函数。

解：由独立性定义知，(X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

由此可知，(X,Y)服从二维正态分布

$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$。

第三节 二维随机向量函数的分布

设 (X,Y) 是一个二维随机向量, $z=f(x,y)$ 是二元的连续函数或分段连续函数，则 $Z=f(X,Y)$ 仍然是一个**一维**随机变量。我们需要由 (X,Y) 的联合分布直接求出 $Z=f(X,Y)$ 的分布。

(X,Y)

p_{ij}，二维离散性随机向量

$p(x,y)$，二维连续性随机向量

一维

$Z = f(X,Y)$

求 $Z = f(X,Y)$ 的分布。

(1) 当(X,Y)为二维离散性随机向量时，

则Z一定是（一维）离散性随机变量。

(2) 当(X,Y)为二维连续性随机向量时，

$$\text{则}\begin{cases} Z\text{可能为（一维）离散性随机变量} \\ Z\text{可能为（一维）连续性随机变量} \end{cases}$$

先讨论

当(X,Y)为连续性随机向量时，

Z 可能为离散性随机变量

设整个平面分成3块D_1, D_2, D_3，其中

$D_1+D_2+D_3=\mathbb{R}^2$，且z_1, z_2, z_3互不相等

(X,Y)的联合密度函数为$p(x,y)$，

$Z=f(X,Y)$，且

$$f(x,y)=\begin{cases} z_1,(x,y)\in D_1 \\ z_2,(x,y)\in D_2 \\ z_3,(x,y)\in D_3 \end{cases}$$

$$P(Z=z_1)=P((X,Y)\in D_1)=\iint_{D_1} p(x,y)dxdy$$

$$P(Z=z_2)=P((X,Y)\in D_2)=\iint_{D_2} p(x,y)dxdy$$

$$P(Z=z_3)=P((X,Y)\in D_3)=\iint_{D_3} p(x,y)dxdy$$

一. 当(X,Y)为二维离散性随机向量时，

则Z一定是（一维）离散性随机变量。

84页例4-12

例4-12 已知(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

求 $X+Y$ 的概率分布。

解： 设$Z = X + Y, Z$的取值表

$X \backslash Z \backslash Y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

Z 的概率分布为

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}+\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}+\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

即

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

二. 当(X,Y)为二维连续性随机向量时，

Z可能为（一维）连续性随机变量

一般方法就是先求分布函数，再求导数。

86页例4-13

例4-13 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，试求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的密度函数 $p_Z(z)$。

解：由于 X 和 Y 相互独立，且 X，Y 服从 $N(0,1)$，则 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

当 $z<0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=0,$$

当 $z\ge 0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)$$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\overset{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr$$

$$= \int_0^z r e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^z$$

$$= 1 - e^{-\frac{z^2}{2}},$$

当 $z > 0$ 时，

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = ze^{-\frac{z^2}{2}},$$

所以，

$$p_Z(z) = \begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}}, z > 0 \\ 0 \quad\ , z \le 0 \end{cases}$$ 。

86页例4-14

例4-14 设 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$， 求 $Z=X+Y$的密度函数。

解：为了求 Z 的密度函数，先求 Z 的分布函数，

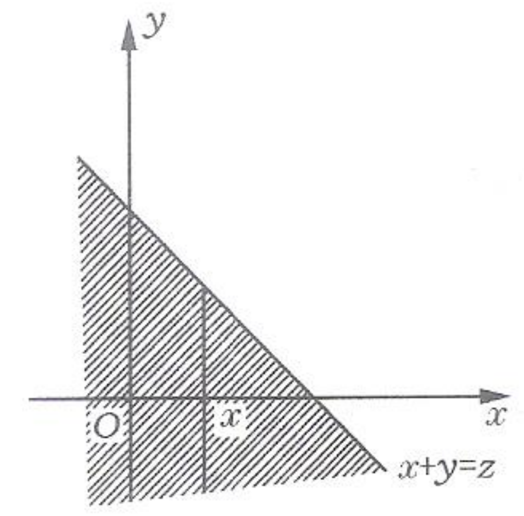


图 4—12

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy \right] dx$$

$$\overset{y=t-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} p(x, t-x) dt \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t-x) dx \right] dt$$

则 Z 的密度函数 $p_Z(z)$ 为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x) dx$$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx$$

著名的卷积公式。

卷积公式为求 $Z = X + Y$ 的密度函数的一般公式，可以直接使用。

特别地，当 X 和 Y 相互独立时，则 $Z = X + Y$ 的密度函数公式为

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x)dx$$

87页例4-15

例4-15 设随机向量 (X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, 0<x<y \\ 0, 其他 \end{cases}$$

求（1）$Z=X+Y$ 的密度函数；

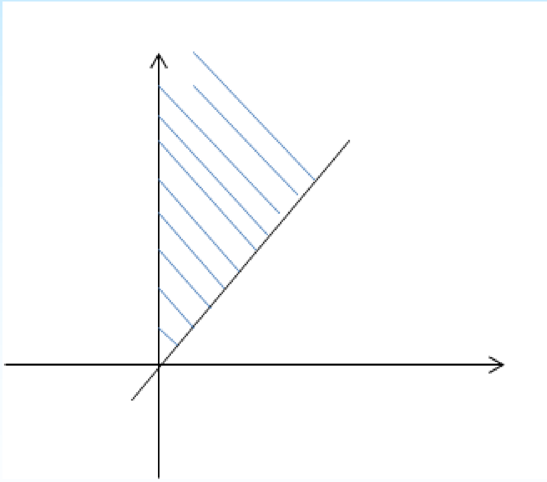
（2）$U=\max\{X,Y\}$ 和 $V=\min\{X,Y\}$ 的密度函数。

解：（1） 当 $p(x,z-x)=xe^{-(z-x)}$ 时，

必须要求 $0<x<z-x$， 即 $0<x<\dfrac{z}{2}$，

当 $z<0$ 时，显然 $p_Z(z)=0$，

当 $z\geq 0$ 时， $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx$



$$=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{\frac{z}{2}}xe^{-(z-x)}dx+\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty}0dx$$

$$=e^{-z}\int_{0}^{\frac{z}{2}}xe^{x}dx=\left(\frac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z},$$

所以，

$$p_Z(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}, z\geq 0\\ 0, z<0\end{cases}$$。

（2）先求 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数，

$$F_U(u)=P(U\leq u)$$

$$=P(\max\{X,Y\}\leq u)$$

$$=P(X\leq u, Y\leq u)$$

当 $u<0$ 时，

显然 $F_U(u)=0$，

当 $u\geq 0$ 时，

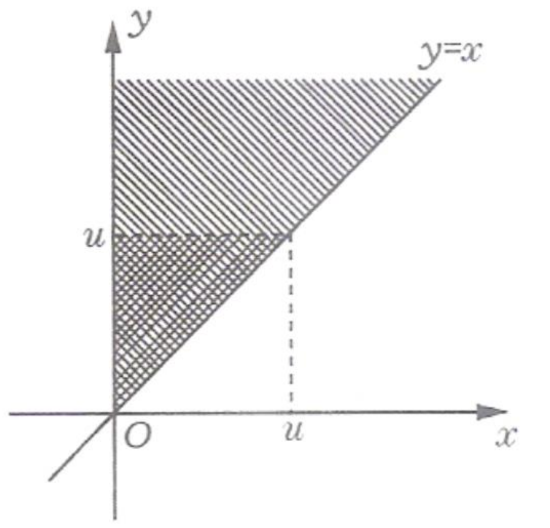


图 4—14

$$F_U(u)=P(X\leq u, Y\leq u)$$

$$=\int_0^u dx\int_x^u xe^{-y}dy$$

$$=\int_0^u x(e^{-x}-e^{-u})dx$$

$$=\int_0^u xe^{-x}dx-e^{-u}\int_0^u xdx$$

$$= (-ue^{-u} - e^{-u} + 1) - \frac{u^2}{2} e^{-u}$$

$$= 1 - \left(\frac{u^2}{2} + u + 1 \right) e^{-u} \ ,$$

所以，

$$F_U(u) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{u^2}{2} + u + 1 \right) e^{-u}, u \geq 0 \\ 0, u < 0 \end{cases},$$

然后，再对分布函数 $F_U(u)$ 求 u 的导数，

则 $U=\max\{X,Y\}$ 的密度函数为

$$p_U(u)=\begin{cases}\dfrac{u^2}{2}e^{-u}, u>0\\ 0, u\le 0\end{cases}。$$

现再求 $V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数，

$$F_V(v)=P(V\le v)$$

$$=1-P(V>v)$$

$$=1-P(\min\{X,Y\}>v)$$

$$=1-P(X>v,Y>v),$$

当 $v<0$ 时，

显然 $F_V(v)=0$，

当 $v\geq 0$ 时，

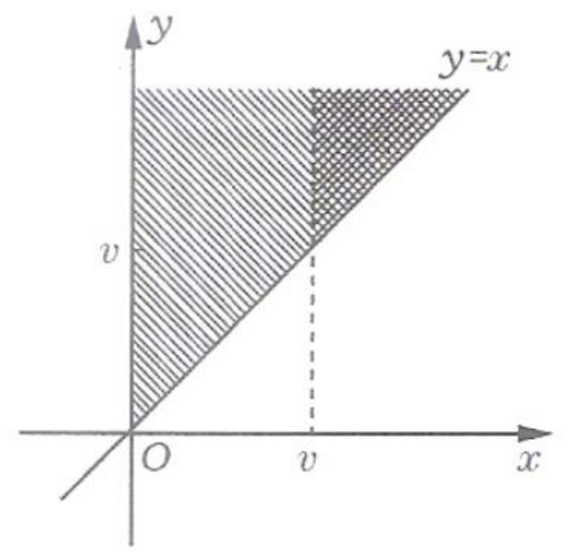


图 4—15

$$F_V(v)=1-P(X>v,Y>v)$$

$$=1-\int_v^{+\infty}dy\int_v^y xe^{-y}dx$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_v^{+\infty}(y^2-v^2)e^{-y}dy$$

$$=1-(v+1)e^{-v},$$

所以，

$$F_V(v)=\begin{cases}1-(v+1)e^{-v}, v\geq 0\\ 0, v<0\end{cases},$$

然后，再对分布函数 $F_V(v)$ 求 v 的导数，则 $V=\min\{X,Y\}$ 的密度函数为

$$p_V(v)=\begin{cases}ve^{-v}, v>0\\ 0, v\leq 0\end{cases}。$$

注1： $\left\{\max\left\{X,Y\right\}\le a\right\}=\left\{X\le a,Y\le a\right\}$，

$\left\{\min\left\{X,Y\right\}> a\right\}=\left\{X> a,Y> a\right\}$，

注2： $\max\left\{X,Y\right\}=\dfrac{X+Y+\left|X-Y\right|}{2}$，

$\min\left\{X,Y\right\}=\dfrac{X+Y-\left|X-Y\right|}{2}$。

88页例4-16

例4-16 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1 和 L_2 连接而成，联接方式分别为（1）串联，（2）并联，（3）备用（当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 开始工作），如图4-16所示。

设 L_1 和 L_2 的寿命分别服从指数分布 $Exp(\alpha)$ 和 $Exp(\beta)$，其中 $\alpha, \beta > 0$，且 $\alpha \neq \beta$ 。

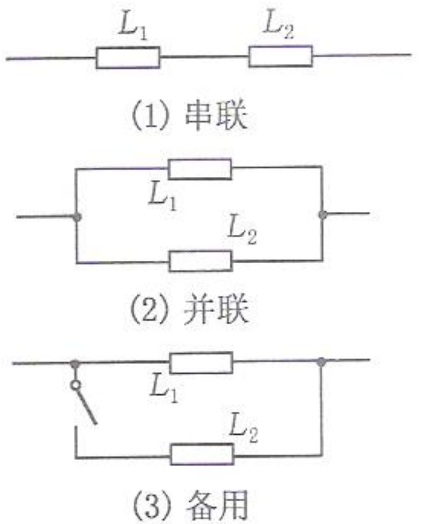


图 4—16

试分别就以上三种联接方式求出 L 的寿命 Z 的密度函数。

解：设 X,Y 分别表示 L_1和L_2 的寿命。

（1）当串联时，只要 L_1 和 L_2 其中之一损坏时，系统 L 就停止工作，则 L 的寿命为

$$Z=\min\{X,Y\},$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min\{X,Y\}\le z)$$

杨勇制作

当 $z<0$ 时，显然 $F_Z(z)=0$，

当 $z\geq 0$ 时，$F_Z(z)=P(\min\{X,Y\}\leq z)$

$=1-P(\min\{X,Y\}>z)$

$=1-P(X>z,Y>z)$

$=1-P(X>z)P(Y>z)$

$=1-e^{-\alpha z}\bullet e^{-\beta z}$

$=1-e^{-(\alpha+\beta)z}$，

当 $z>0$ 时，$p_Z(z)=F_Z'(z)=(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$，

所以，$Z=\min\{X,Y\}$的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}。$$

(2) 当并联时， 只有L_1 和 L_2都损坏时，系统 L 才停止工作，则系统 L的寿命为

$$Z=\max\{X,Y\},$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max\{X,Y\}\le z)$$

当 $z<0$ 时， 显然 $F_Z(z)=0$，

当 $z\geq 0$ 时， $F_Z(z)=P(\max\{X,Y\}\leq z)$

$$=P(X\leq z,Y\leq z)$$

$$=P(X\leq z)P(Y\leq z)$$

$$=(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}),$$

当 $z>0$ 时，

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z},$$

所以， $Z=\max\{X,Y\}$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$ 。

（3）当备用时，L_1 损坏时，L_2 才开始工作，则系统 L 的寿命为

$$Z=X+Y,$$

当 $z\le 0$ 时， 显然 $p_Z(z)=0$，

由于 X 与 Y 相互独立，则由卷积公式得

当 $z \geq 0$ 时，

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx$$

$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \cdot \beta e^{-\beta(z-x)} dx$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right),$$

其中，$x > 0, z - x > 0$， 即 $0 < x < z$，

所以，$Z=X+Y$的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right), & z>0\\ 0\qquad\qquad\qquad, & z\le 0\end{cases}$$

。

三．可加性

定义4-13 设 $X \sim F(x;\theta_1)$ ，$Y \sim F(x;\theta_2)$，且 X 与 Y 相互独立。若 $X+Y \sim F(x;\theta_1+\theta_2)$ ，则称分布 $F(x;\theta)$ 具有可加性（additivity）或再生性(regeneration)。

定义4-13中 $F(x;\theta_1)$和 $F(x;\theta_2)$表示分布类型相同，只是其中的参数分别为 θ_1 和 θ_2 。

90页例4-17

例4-17 设 $X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)。$$

即二项分布具有可加性。

证明：因为 $X \sim B(n_1, p)$，

则存在相互独立的$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$，且都服从参数为 p 的0-1分布，使得

$$X=\sum_{i=1}^{n_1} X_i \ ,$$

又因为 $Y \sim B(n_2, p)$，

则存在相互独立的 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$，且都服从参数为 p 的0-1分布，使得

$$Y=\sum_{j=1}^{n_2} Y_j \ ,$$

因 X 与 Y 独立，所以，$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 独立，

故 $$X+Y=\sum_{i=1}^{n_1}X_i+\sum_{j=1}^{n_2}Y_j\ ,$$

这个随机变量就是n_1+n_2个相互独立的0-1分布, 且参数都是p, 则

$$X+Y\sim B(n_1+n_2,p)。$$

由归纳法也即可得以下推广。

推广：若 $X_1,\cdots,X_m$ 相互独立，且 $X_i \sim B(n_i, p), i=1,2,\cdots,m,$ 则

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)。$$

90页例4-18

例4-18 设 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ ，且 X 与 Y 相互独立，则

$$X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)。$$

即普阿松分布具有可加性。

证明：因为

$$P(X = i) = \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1}, i = 0, 1, \cdots,$$

$$P(Y = j) = \frac{\lambda_2^j}{j!} e^{-\lambda_2}, j = 0, 1, \cdots,$$

所以，

$$P(X+Y=k)=P(X=0,Y=k)+P(X=1,Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k,Y=0)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\left(X=m,Y=k-m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\left(X=m\right)P\left(Y=k-m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-m}}{(k-m)!}e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} C_k^m \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, k = 0,1,\cdots,$$

所以， $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。

由归纳法应即可得以下推广。

推广：设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim P(\lambda_i), i = 1, 2, \cdots, n$ ，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)。$$

杨勇制作

91页例4-19

例4-19 设有一批玻璃瓶，瓶上每个气泡看作是一个缺陷。从该批玻璃瓶中随机地抽取30个，规定当其中缺陷总数不超过6个时接收此批产品，否则拒收。根据经验已知此种玻璃瓶的缺陷个数近似服从参数 $\lambda = 0.1$ 的泊松分布，求这批产品被拒收的概率。

解：设 X_i 表示第 i 个玻璃瓶上的缺陷个数，则 $X_i \sim P(0.1), i=1,2,\cdots,30,$

且可以认为 $X_1,\cdots,X_{30}$ 相互独立。

记 $X=\sum_{i=1}^{30} X_i$，则由可加性知，$X \sim P(3)$。

因此，拒收此批产品的概率为

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{6} \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

$$\approx 0.0335,$$

即具有这种质量的一批产品约有3.35%的概率将被拒收。

91页 例4-20

例4-20 设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)。$$

即正态分布具有可加性。

证明：令 $Z = X + Y$，

且X,Y独立，由卷积公式

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{\sigma_1^2}+\frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2}\right]}du$$

其中令 $u=x-\mu_1, v=z-(\mu_1+\mu_2)$,

又

$$\frac{u^2}{\sigma_1^2}+\frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}u^2-\frac{2uv}{\sigma_2^2}+\frac{v^2}{\sigma_2^2}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}u-\frac{\sigma_1 v}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right]^2+\frac{v^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

再令

$$t=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}u-\frac{\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}v,$$

从而

$$dt=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}du$$

将上述三式代入 $p_Z(z)$ 中得

$$p_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{v^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)}\cdot\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{v^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{v^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{\left[z-\left(\mu_1+\mu_2\right)\right]^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}},$$

所以， $Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

由归纳法立即可得以下推广。

推广：若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n,$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)。$$

由此推广和例3-22可得以下推论1。

杨勇制作

推论1 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)。$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 不全为0。

注：$a_i X_i \sim N\left(a_i\mu_i, a_i^2\sigma_i^2\right), i=1,2,\cdots,n,$

$a_1X_1,\cdots,a_nX_n$ 独立，再由可加性即得。

推论1表明，独立正态随机变量的线性函数们服从正态分布。

在推论1中，令 $a_i = \frac{1}{n}, i = 1,2,\cdots,n,$ 可得以下推论2。

推论2 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，$i = 1,2,\cdots,n$，则

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)。$$

注：独立同分布。

92页例4-21

例4-21 水泥厂生产的袋装水泥的重量服从正态分布 $N(50,4)$（单位：千克）。

（1）任取一袋水泥，求重量大于48千克且小于52千克的概率；

（2）任抽3袋水泥，求至少有一袋的重量大于48千克且小于52千克的概率；

（3）任抽4袋水泥，其平均重量大于48千克且小于52千克的概率为多少？

解：设 X 表示袋装水泥的重量，则

$X \sim N(50,4)$ 。

（1）所求的概率为

$$p_1 = P(48 < X < 52)$$

$$= \Phi\left(\frac{52-50}{2}\right) - \Phi\left(\frac{48-50}{2}\right)$$

$$= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.683,$$

（2）设 Y 表示所抽3袋水泥中重量在48~52千克之间的袋数，则所求概率为

$$p_2 = P(Y \geq 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} C_3^i p_1^i (1 - p_1)^{3-i}$$

$$= 1 - (1 - p_1)^3 \approx 0.968,$$

注：$Y \sim B(3, p_1)$

（3）$\overline{X}=\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i \sim N(50,1)$ ，其中 $X_1,\cdots,X_4$ 相互独立，且 $X_i \sim N(50,4), i=1,2,3,4$ 。则所求概率为

$$p_3 = P(48 < \overline{X} < 52)$$

$$=\Phi\left(\frac{52-50}{1}\right)-\Phi\left(\frac{48-50}{1}\right)$$

$$=2\Phi\left(2\right)-1\approx 0.9546。$$