线性代数

第四章　线性方程组

主讲人：张远征、张震峰、钱晓明

上海财经大学应用数学系

May 31, 2010

本章主要内容

(1) 线性方程组解的判断;

(2) 在有无穷多解的情况下, 讨论解的结构.

本章主要内容

(1) 线性方程组解的判断;

(2) 在有无穷多解的情况下, 讨论解的结构.

目录

1. 线性方程组的表达形式

一般形式: $(I)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$

矩阵形式: $AX=\beta$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

向量形式: $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$, 其中 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$.

齐次线性方程组的表达形式

一般形式: $$(II)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

矩阵形式: $AX=0$,

向量形式: $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX = \beta$

  (1) $AX = \beta$无解$\Leftrightarrow$ β不能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示;

  (2) $AX = \beta$存在唯一解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示唯一;

  (3) $AX = \beta$有无穷多解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示无穷多.

- $AX = \mathbf{0}$

  (1) $AX = \mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关;

  (2) $AX = \mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX = \beta$
  - (1) $AX = \beta$无解$\Leftrightarrow \beta$不能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示;
  - (2) $AX = \beta$存在唯一解$\Leftrightarrow \beta$能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示唯一;
  - (3) $AX = \beta$有无穷多解$\Leftrightarrow \beta$能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示无穷多.
- $AX = \mathbf{0}$
  - (1) $AX = \mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关;
  - (2) $AX = \mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX=\beta$

  (1) $AX=\beta$无解$\Leftrightarrow\beta$不能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

  (2) $AX=\beta$存在唯一解$\Leftrightarrow\beta$能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示唯一;

  (3) $AX=\beta$有无穷多解$\Leftrightarrow\beta$能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示无穷多.

- $AX=\mathbf{0}$

  (1) $AX=\mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关;

  (2) $AX=\mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX = \beta$
  - (1) $AX = \beta$无解$\Leftrightarrow$ β不能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示;
  - (2) $AX = \beta$存在唯一解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示唯一;
  - (3) $AX = \beta$有无穷多解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示无穷多.
- $AX = \mathbf{0}$
  - (1) $AX = \mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关;
  - (2) $AX = \mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX=\beta$
  (1) $AX=\beta$无解$\Leftrightarrow\beta$不能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;
  (2) $AX=\beta$存在唯一解$\Leftrightarrow\beta$能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 且表示唯一;
  (3) $AX=\beta$有无穷多解$\Leftrightarrow\beta$能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 且表示无穷多.
- $AX=\mathbf{0}$
  (1) $AX=\mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关;
  (2) $AX=\mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX=\beta$

  (1) $AX=\beta$无解$\Leftrightarrow$ β不能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

  (2) $AX=\beta$存在唯一解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示唯一;

  (3) $AX=\beta$有无穷多解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示无穷多.

- $AX=\mathbf{0}$

  (1) $AX=\mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关;

  (2) $AX=\mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关.

2. 线性方程组与线性表示等之间的关系

- $AX=\beta$

  (1) $AX=\beta$无解$\Leftrightarrow$ β不能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

  (2) $AX=\beta$存在唯一解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示唯一;

  (3) $AX=\beta$有无穷多解$\Leftrightarrow$ β能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示无穷多.

- $AX=\mathbf{0}$

  (1) $AX=\mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关;

  (2) $AX=\mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关.

3. 解的存在定理

增广矩阵: $\bar{A} = (A \vdots \beta)$

定理1

对于线性方程组(I), 有下列结论:

(1) $r(A) = r(\bar{A}) = n \Leftrightarrow$方程组存在唯一解;

(2) $r(A) = r(\bar{A}) < n \Leftrightarrow$方程组有无穷多组解;

(3) $r(A) \neq r(\bar{A}) \Leftrightarrow$方程组无解.

定理2

对于齐次线性方程组(II), 有下列结论:

(1) $r(A) = n \Leftrightarrow$方程组只有零解;

(2) $r(A) < n \Leftrightarrow$方程组有非零解.

3. 解的存在定理

增广矩阵: $\bar{A} = (A \vdots \beta)$

定理1

对于线性方程组(I), 有下列结论:

(1) $r(A) = r(\bar{A}) = n \Leftrightarrow$方程组存在唯一解;

(2) $r(A) = r(\bar{A}) < n \Leftrightarrow$方程组有无穷多组解;

(3) $r(A) \neq r(\bar{A}) \Leftrightarrow$方程组无解.

定理2

对于齐次线性方程组(II), 有下列结论:

(1) $r(A) = n \Leftrightarrow$方程组只有零解;

(2) $r(A) < n \Leftrightarrow$方程组有非零解.

例

例1 判别线性方程组是否有解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 43x_4 = 3 \end{cases}$$

例2 当k取什么值时方程组有非零解.

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

例1 判别线性方程组是否有解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 43x_4 = 3 \end{cases}$$

例2 当k取什么值时方程组有非零解.

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

目录

线性方程组解的性质

- $AX=\mathbf{0}$解的性质:

  (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX=\mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1+\xi_2$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

  (2) 若ξ是$AX=\mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

  (3) 一般地, 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$AX=\mathbf{0}$的解, 则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

- $AX=\beta$解的性质:

  (1) 若η是$AX=\beta$的解, ξ是其导出组$AX=\mathbf{0}$的解, 则$\eta+\xi$是$AX=\beta$的解.

  (2) 若η_1和η_2是$AX=\beta$的两个解, 则$\eta_1-\eta_2$是其$AX=\mathbf{0}$的解.

线性方程组解的性质

- $AX=\mathbf{0}$解的性质:
  - (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX=\mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1+\xi_2$也是$AX=\mathbf{0}$的解.
  - (2) 若ξ是$AX=\mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX=\mathbf{0}$的解.
  - (3) 一般地, 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$AX=\mathbf{0}$的解,
    则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$也是$AX=\mathbf{0}$的解.
- $AX=\beta$解的性质:
  - (1) 若η是$AX=\beta$的解, ξ是其导出组$AX=\mathbf{0}$的解,
    则$\eta+\xi$是$AX=\beta$的解.
  - (2) 若η_1和η_2是$AX=\beta$的两个解, 则$\eta_1-\eta_2$是其$AX=\mathbf{0}$的解.

- $AX=\mathbf{0}$解的性质:

  (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX=\mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1+\xi_2$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

  (2) 若ξ是$AX=\mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

  (3) 一般地, 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$AX=\mathbf{0}$的解,
  则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

- $AX=\beta$解的性质:

  (1) 若η是$AX=\beta$的解, ξ是其导出组$AX=\mathbf{0}$的解,
  则$\eta+\xi$是$AX=\beta$的解.

  (2) 若η_1和η_2是$AX=\beta$的两个解, 则$\eta_1-\eta_2$是其$AX=\mathbf{0}$的解.

线性方程组解的性质

- $AX = \mathbf{0}$解的性质:
  - (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX = \mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1 + \xi_2$也是$AX = \mathbf{0}$的解.
  - (2) 若ξ是$AX = \mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX = \mathbf{0}$的解.
  - (3) 一般地, 若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$是$AX = \mathbf{0}$的解, 则$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$也是$AX = \mathbf{0}$的解.
- $AX = \beta$解的性质:
  - (1) 若η是$AX = \beta$的解, ξ是其导出组$AX = \mathbf{0}$的解, 则$\eta + \xi$是$AX = \beta$的解.
  - (2) 若η_1和η_2是$AX = \beta$的两个解, 则$\eta_1 - \eta_2$是其$AX = \mathbf{0}$的解.

线性方程组解的性质

- $AX = \mathbf{0}$解的性质:

  (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX = \mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1 + \xi_2$也是$AX = \mathbf{0}$的解.

  (2) 若ξ是$AX = \mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX = \mathbf{0}$的解.

  (3) 一般地, 若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$是$AX = \mathbf{0}$的解,
  则$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$也是$AX = \mathbf{0}$的解.

- $AX = \beta$解的性质:

  (1) 若η是$AX = \beta$的解, ξ是其导出组$AX = \mathbf{0}$的解,
  则$\eta + \xi$是$AX = \beta$的解.

  (2) 若η_1和η_2是$AX = \beta$的两个解, 则$\eta_1 - \eta_2$是其$AX = \mathbf{0}$的解.

线性方程组解的性质

- $AX = \mathbf{0}$解的性质:
  (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX = \mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1 + \xi_2$也是$AX = \mathbf{0}$的解.
  (2) 若ξ是$AX = \mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX = \mathbf{0}$的解.
  (3) 一般地, 若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$是$AX = \mathbf{0}$的解,
  则$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$也是$AX = \mathbf{0}$的解.
- $AX = \beta$解的性质:
  (1) 若η是$AX = \beta$的解, ξ是其导出组$AX = \mathbf{0}$的解,
  则$\eta + \xi$是$AX = \beta$的解.
  (2) 若η_1和η_2是$AX = \beta$的两个解, 则$\eta_1 - \eta_2$是其$AX = \mathbf{0}$的解.

线性方程组解的性质

- $AX=\mathbf{0}$解的性质:

  (1) 若ξ_1和ξ_2是$AX=\mathbf{0}$的两个解, 则$\xi_1+\xi_2$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

  (2) 若ξ是$AX=\mathbf{0}$的解, k是任意实数, 则$k\xi$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

  (3) 一般地, 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$AX=\mathbf{0}$的解,
  则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$也是$AX=\mathbf{0}$的解.

- $AX=\beta$解的性质:

  (1) 若η是$AX=\beta$的解, ξ是其导出组$AX=\mathbf{0}$的解,
  则$\eta+\xi$是$AX=\beta$的解.

  (2) 若η_1和η_2是$AX=\beta$的两个解, 则$\eta_1-\eta_2$是其$AX=\mathbf{0}$的解.

例

例1 若$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$是$AX=\beta$的解，
则$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$是$AX=\beta$的
解$\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

例2 若η_1, η_2, η_3是$AX=\beta$的解，
则$\eta_1+\eta_2+\eta_3$是__________的解；
$\eta_1-\eta_2+3\eta_3$是__________的解.

例

例1 若$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$是$AX = \beta$的解，
则$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$是$AX = \beta$的解$\Leftrightarrow k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$.

例2 若η_1, η_2, η_3是$AX = \beta$的解，
则$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$是__________的解；
$\eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3$是__________的解.

目录

1.齐次线性方程组的基础解系

定义1—基础解系

齐次线性方程组的一组解$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$称为它的一个**基础解系**，如果

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$线性无关；

(2) 方程组的任一解都可以表示成$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$的线性组合.

定理2

如果齐次线性方程组$AX = 0$的系数矩阵的秩$r(A) = r < n$，则$AX = 0$必有基础解系，并且基础解系所含向量的个数等于$n - r$.

定义1—基础解系

齐次线性方程组的一组解$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$称为它的一个**基础解系**，如果

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$线性无关;

(2) 方程组的任一解都可以表示成$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$的线性组合.

定理2

如果齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的系数矩阵的秩$r(A) = r < n$，则$AX = \mathbf{0}$必有基础解系，并且基础解系所含向量的个数等于$n - r$.

1. 齐次线性方程组的基础解系

定义1—基础解系

齐次线性方程组的一组解$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$称为它的一个**基础解系**，如果

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$线性无关;

(2) 方程组的任一解都可以表示成$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$的线性组合.

定理2

如果齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的系数矩阵的秩$r(A) = r < n$，则$AX = \mathbf{0}$必有基础解系，并且基础解系所含向量的个数等于$n - r$.

例

例1 求下列齐次线性方程组的通解.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$
3. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

例

例1 求下列齐次线性方程组的通解.

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

3. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

例

例1 求下列齐次线性方程组的通解.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$
3. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

例1 求下列齐次线性方程组的通解.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

3. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

非齐次线性方程组解的结构定理

定理3

设有非齐次线性方程组$AX=\beta$. 假定η是$AX=\beta$的任一特解, 导出组的基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$, 则其所有解都可表示成如下形状:

$$X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任何数.

例2 求下列齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4-10x_5=-1 \end{cases}$$

非齐次线性方程组解的结构定理

定理3

设有非齐次线性方程组$AX=\beta$. 假定η是$AX=\beta$的任一特解, 导出组的基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$, 则其所有解都可表示成如下形状:

$$X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任何数.

例2 求下列齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4-10x_5=-1 \end{cases}$$

目录

1. 判断与求解

例1 k为何值时，下列方程组有唯一解；无解；无穷多组解。有无穷多组解时，试写出全部解。

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ (k+1)x_1 + kx_2 + (k^2-1)x_3 = 0 \end{cases}$

注：当方程的个数等于未知量的个数时，先利用Cramer法则确定唯一解的情况.

例1 k为何值时，下列方程组有唯一解；无解；无穷多组解。有无穷多组解时，试写出全部解。

(1) $$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1+2x_2+kx_3=1 \\ -x_1+kx_2+x_3=k \\ (k+1)x_1+kx_2+(k^2-1)x_3=0 \end{cases}$$

注：当方程的个数等于未知量的个数时，先利用Cramer法则确定唯一解的情况.

1. 判断与求解

例1 k为何值时，下列方程组有唯一解；无解；无穷多组解。有无穷多组解时，试写出全部解。

(1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ (k+1)x_1 + kx_2 + (k^2-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

注：当方程的个数等于未知量的个数时，先利用Cramer法则确定唯一解的情况.

1. 判断与求解

例1 k为何值时，下列方程组有唯一解；无解；无穷多组解。有无穷多组解时,试写出全部解。

(1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ (k+1)x_1 + kx_2 + (k^2-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

注: 当方程的个数等于未知量的个数时，先利用Cramer法则确定唯一解的情况.

2. 利用解的性质求解

例2 设方程组$AX=\beta$的系数矩阵A的秩等于3，已知η_1,η_2,η_3是它的三个解向量，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\9\\8\\8\end{pmatrix}$$

求该方程组$AX=\beta$的全部解。

例3 设四元线性方程组$AX=\beta$的系数矩阵A的秩等于2，已知η_1,η_2,η_3是它的三个线性无关的解向量，求$AX=\beta$的全部解。

2. 利用解的性质求解

例2 设方程组$AX=\beta$的系数矩阵A的秩等于3，已知η_1,η_2,η_3是它的三个解向量，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\9\\8\\8\end{pmatrix}$$

求该方程组$AX=\beta$的全部解。

例3 设四元线性方程组$AX=\beta$的系数矩阵A的秩等于2，已知η_1,η_2,η_3是它的三个线性无关的解向量，求$AX=\beta$的全部解。

例4 设A为$m\times n$阶实矩阵，证明:

(1) $A^TAX=0$与$AX=0$同解;

(2) $r(A^TA)=r(A)$;

(3) *对任意β，方程组$A^TAX=A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A,B分别为$m\times n$和$n\times s$阶矩阵，如果$AB=O$，证明:

$$r(A)+r(B)\le n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2=A$，证明: $r(A)+r(I-A)=n$.

例7 证明: $r(A^*)=\begin{cases} n, & if\ r(A)=n; \\ 1, & if\ r(A)=n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$

例4 设A为$m\times n$阶实矩阵, 证明:

(1) $A^TAX=0$与$AX=0$同解;

(2) $r(A^TA)=r(A)$;

(3) *对任意β, 方程组$A^TAX=A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A,B分别为$m\times n$和$n\times s$阶矩阵, 如果$AB=O$, 证明:

$$r(A)+r(B)\le n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2=A$, 证明: $r(A)+r(I-A)=n$.

例7 证明: $$r(A^*)=\begin{cases} n, & if\ r(A)=n; \\ 1, & if\ r(A)=n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$$

例4 设A为$m \times n$阶实矩阵, 证明:

(1) $A^TAX = 0$与$AX = 0$同解;

(2) $r(A^TA) = r(A)$;

(3) *对任意β, 方程组$A^TAX = A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A, B分别为$m \times n$和$n \times s$阶矩阵, 如果$AB = O$, 证明:

$$r(A) + r(B) \leq n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(I - A) = n$.

例7 证明: $r(A^*) = \begin{cases} n, & if\ r(A) = n; \\ 1, & if\ r(A) = n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$

例4 设A为$m\times n$阶实矩阵，证明:

(1) $A^TAX=0$与$AX=0$同解;

(2) $r(A^TA)=r(A)$;

(3) *对任意β，方程组$A^TAX=A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A,B分别为$m\times n$和$n\times s$阶矩阵，如果$AB=O$，证明:

$$r(A)+r(B)\le n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2=A$，证明: $r(A)+r(I-A)=n.$

例7 证明: $r(A^*)=\begin{cases} n, & if\ r(A)=n; \\ 1, & if\ r(A)=n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$

3. 基础解系理论的应用

例4 设A为$m\times n$阶实矩阵, 证明:

(1) $A^TAX=0$与$AX=0$同解;

(2) $r(A^TA)=r(A)$;

(3) *对任意β, 方程组$A^TAX=A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A,B分别为$m\times n$和$n\times s$阶矩阵, 如果$AB=O$, 证明:

$$r(A)+r(B)\leq n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2=A$, 证明: $r(A)+r(I-A)=n$.

例7 证明: $r(A^*)=\begin{cases} n, & if\ r(A)=n; \\ 1, & if\ r(A)=n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$

3. 基础解系理论的应用

例4 设A为$m\times n$阶实矩阵, 证明:

(1) $A^TAX=0$与$AX=0$同解;

(2) $r(A^TA)=r(A)$;

(3) *对任意β, 方程组$A^TAX=A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A,B分别为$m\times n$和$n\times s$阶矩阵, 如果$AB=O$, 证明:

$$r(A)+r(B)\leq n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2=A$, 证明: $r(A)+r(I-A)=n$.

例7 证明: $r(A^*)=\begin{cases} n, & if\ r(A)=n; \\ 1, & if\ r(A)=n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$

例4 设A为$m\times n$阶实矩阵，证明：

(1) $A^TAX=0$与$AX=0$同解；

(2) $r(A^TA)=r(A)$;

(3) *对任意β，方程组$A^TAX=A^T\beta$有解(最小二乘法).

例5 设A,B分别为$m\times n$和$n\times s$阶矩阵，如果$AB=O$，证明：

$$r(A)+r(B)\leq n$$

例6 *设n阶矩阵A满足$A^2=A$，证明：$r(A)+r(I-A)=n$.

例7 证明：$r(A^*)=\begin{cases} n, & if\ r(A)=n; \\ 1, & if\ r(A)=n-1; \\ 0, & others. \end{cases}$

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX=\beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX=\mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX=\mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX=\beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX=\beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX=\beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX=\mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX=\mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX=\beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX=\beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX=\beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX=\mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX=\mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX=\beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX=\beta$解的判断及求解.

Summary

- 解的判断
  1. Cramer法则;
  2. $AX = \beta$(非齐次)解的判定定理;
  3. $AX = \mathbf{0}$(齐次)解的判定定理.
- 解的性质与结构
  1. $AX = \mathbf{0}$(齐次)的基础解系;
  2. $AX = \beta$(非齐次)的通解公式.
- 主要题型
  1. 求齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$的基础解系;
  2. 含参数的非齐次线性方程组$AX = \beta$解的判断及求解.