第三章

第二节 洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、其他未定式

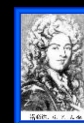
微分中值定理 $\left\{\begin{array}{l}\text{函数的性态} \\ \quad\updownarrow \\ \text{导数的性态}\end{array}\right.$

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ ($\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

$\downarrow$ 转化　洛必达法则

导数之商的极限 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$



一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 1.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\mathring{U}(a)$内可导, 且$F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$　　(洛必达法则)

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\mathring{U}(a)$内可导, 且$F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

证: 无妨假设 $f(a) = F(a) = 0$, 在指出的邻域内任取 $x \neq a$, 则 $f(x), F(x)$在以 x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件, 故

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x, a \text{ 之间})$$

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \overset{3)}{=\!=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}}$

推论1. 定理 1 中$x \to a$ 换为

$x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

推论 2. 若 $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x), F'(x)$满足定理1条件, 则

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{F''(x)}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

$\frac{0}{0}$ 型

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{3}{2}$

注意: 不是未定式不能用洛必达法则 !

$$\lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} \neq \lim_{x\to 1} \frac{6}{6} = 1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. $\boxed{\frac{0}{0}\text{ 型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}}$

$=\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$

思考: 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数) ?

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2.

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|F(x)|=\infty$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ (洛必达法则)

证: 仅就极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 存在的情形加以证明 .

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}\neq 0$ 的情形 $\boxed{\frac{0}{0}\text{ 型}}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-1}{F^2(x)}F'(x)}{\frac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\frac{F'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore\quad 1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

从而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=0$ 的情形. 取常数 $k\neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}+k\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+kF(x)}{F(x)}=k\neq 0$, 可用 1) 中结论

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+kF'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}+k\right]$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\infty$ 时, 结论仍然成立. (证明略)

说明: 定理中 $x\to a$ 换为

$x\to a^+$, $\quad x\to a^-$, $\quad x\to\infty$,

$x\to+\infty$, $\quad x\to-\infty$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理仍然成立.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ $(n>0)$. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{e^{\lambda x}}$ $(\mu>0,\lambda>0)$. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}}$

解: (1) μ 为正整数的情形.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu!}{\lambda^\mu e^{\lambda x}}=0$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}\ (\mu>0,\lambda>0).$

(2) μ 不为正整数的情形.

存在正整数 k , 使当 $x>1$ 时,

$$x^k<x^{\mu}<x^{k+1}$$

从而 $\dfrac{x^k}{e^{\lambda x}}<\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}<\dfrac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$ 用夹逼准则

由(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}=0$

说明:

1) 例3 , 例4 表明 $x\to+\infty$ 时,

$\ln x,\ \ x^n\ (n>0),\ \ e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快 .

2) 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题 . 例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=1$

3) 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\ne\infty)$ 时,

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}\ne\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例如, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\ne\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 极限不存在

$\|$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1$

三、其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^{\infty},\ \infty^0$ 型

解决方法:

$\infty-\infty$ $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}$ $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}$ $0\cdot\infty$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}$ 0^0, 1^{∞}, ∞^0

例5. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x\ (n>0).$ $0\cdot\infty$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(-\dfrac{x^n}{n})=0$

$\infty-\infty$ $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}$ $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}$ $0\cdot\infty$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}$ 0^0, 1^{∞}, ∞^0

例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x).$ $\infty-\infty$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x})=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=0$

$\infty-\infty$ $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}$ $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}$ $0\cdot\infty$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}$ 0^0, 1^{∞}, ∞^0

例7. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x.$ 0^0 型

解: $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}$

利用 例5

$=e^0=1$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x^2\sin x}$. $\boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$

解: 注意到 $\sin x \sim x$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$ $\boxed{\sec^2 x = 1+\tan^2 x}$

$=\frac{1}{3}$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$. $\boxed{\infty\cdot0\text{型}}$

法1 用洛必达法则

分析: 为用洛必达法则，必须改求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

但对本题用此法计算很繁！

法2 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ $\sqrt[n]{n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}\to1$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}$ $\boxed{e^u-1\sim u}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$

内容小结

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y=f^g$
取对数

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty-\infty$ 型

$0\cdot\infty$ 型

$f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{f}}$

$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$

思考与练习

1. 设 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 是未定式极限，如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，是否 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在？ 举例说明.

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\frac{3}{2}}$

$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$

分析: 原式 $=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(3+0)$

3. $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \underline{\frac{1}{6}}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$ $\boxed{\sin x\sim x}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\cos x=1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ $\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: 令 $t=\frac{1}{x}$，则

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{1}{4}$

备用题 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ （令 $t=\frac{1}{x}$）

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\frac{1}{x^2}$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}$$ （用洛必达法则）

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}$$ （继续用洛必达法则）

$$=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解: $\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$