第三章 随机变量及其分布（下）

第三节 连续型随机变量及其分布

一. 连续型随机变量和密度函数

定义3-10 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若存在非负可积函数 $p(x)$ ，使得对任意的实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt$$

则称 X 为连续型随机变量(continuous random variable),

其中 $p(x)$ 称为连续型随机变量 X 的概率密度函数(probability density function)，简称密度函数。

密度函数具有下列两个基本性质：

(1) $p(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

证明：(1)由定义即知。

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

密度函数 $p(x)$ 一定具有以上两个基本性质。反之，若函数 $p(x)$ 具有以上两个性质，则 $p(x)$ 一定可作为某一连续型随机变量的密度函数。

如果随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$ ，分布函数为 $F(x)$ ，则对任意的 $a,b(a<b)$ ，有

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} p(x)dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{b} p(x)dx + \int_{a}^{-\infty} p(x)dx$$

$$= \int_{a}^{b} p(x)dx$$

连续性随机变量X,有

$$P(a < X \le b) = \int_a^b p(x)dx$$

这一结果的几何意义为：X 落在$(a,b]$中的概率恰好等于在区间 $(a,b]$上由曲线 $y = p(x)$ 与 x 轴形成的曲边梯形的面积

而 $p(x)$ 的基本性质(2)表明：整个曲线 $y = p(x)$ 以下(x 轴以上)的面积为1。

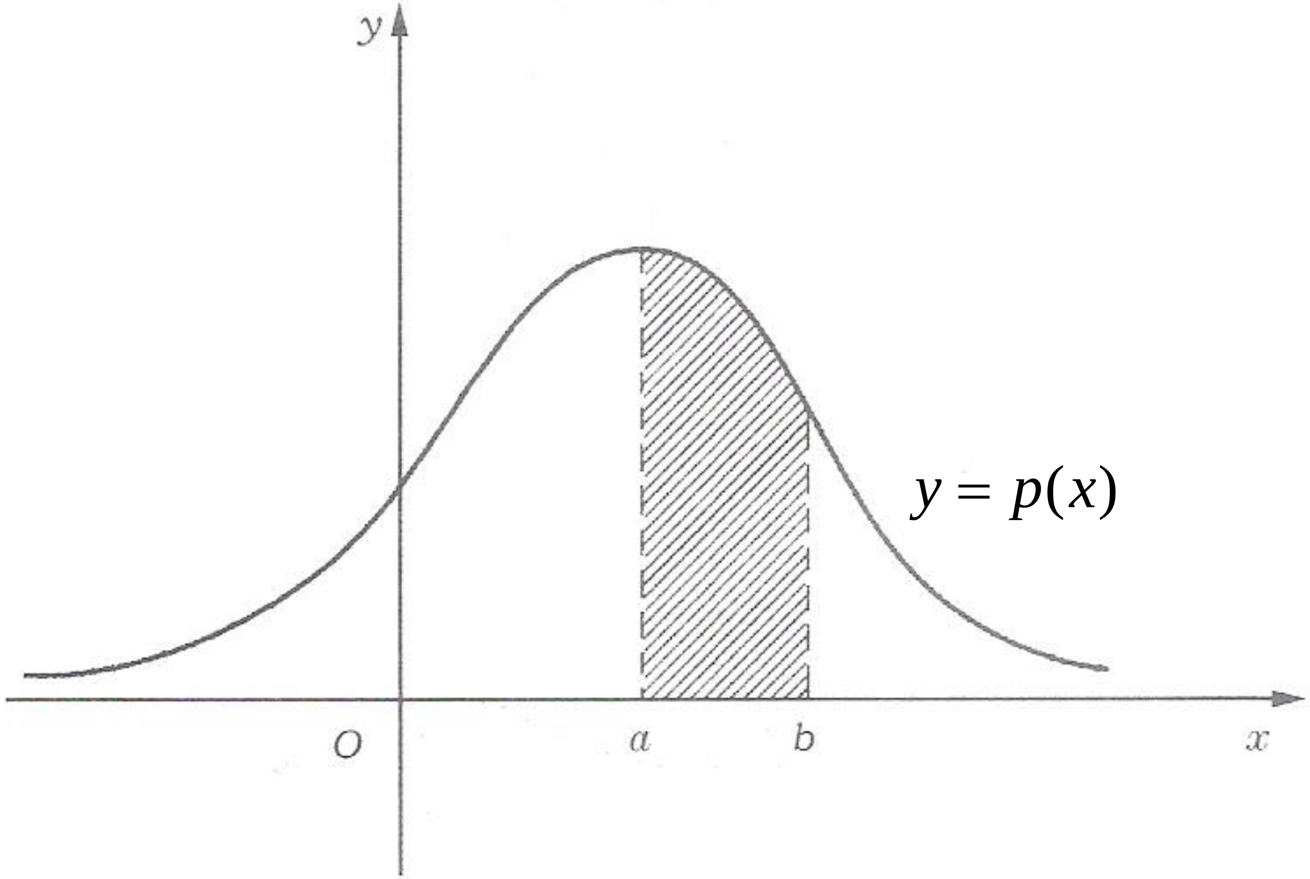


图 3—3　密度函数

下面我们来讨论连续型随机变量的一些性质。

性质3-2 设 $F(x)$ 为连续型随机变量 X 的分布函数，则 $F(x)$ 处处连续。

证明：设 x 为任意实数，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta F=\lim_{\Delta x\to 0}\left[F(x+\Delta x)-F(x)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{x}^{x+\Delta x}p(t)dt=0$$

由 x 的任意性知， $F(x)$ 是直线上的连续函数。

此性质是连续型随机变量的重要特征，连续型随机变量的名称也由此而得。

注：离散性随机变量的分布函数是阶梯型的

连续性随机变量的分布函数是连续性的

性质3-3 若 X 是连续型随机变量，则对任意实数 a，有 $P(X=a)=0$。

证明：任意 $h>0$，

$$0 \le P(X=a) \le P(a-h<X\le a)$$

$$=\int_{a-h}^{a} p(x)dx \to 0 (h\to 0^{+})$$

即

$$P(X=a)=0$$

因为连续型随机变量取任何一点的概率等于零，所以对连续型随机变量的描述不能像离散型随机变量那样一点一点描述。

对连续型随机变量而言，事件$\{X=a\}$是零概率事件，但这并不意味着事件$\{X=a\}$是不可能事件。

由性质3-3立即可得：对连续型随机变量而言，

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b)$$

$$= P(a < X \le b)$$

$$= P(a < X < b)$$

$$= \int_a^b p(x)dx$$

即在计算连续型随机变量 X 有关事件概率时，增加和减少一点或数点可不予以计较。这对以后概率计算和事件表示带来方便。

密度函数完整地描述了连续性随机变量的统计规律。

性质3-4 设 $F(x)$ 和 $p(x)$ 分别是连续型随机变量 X 的分布函数和密度函数，则在 $p(x)$ 的连续点 x 上，有

$$F'(x)=p(x)$$

证明：由高等数学中变上限积分的性质即知。

注：$\left(\int_a^{h(x)} f(t)dt\right)' = f(h(x))h'(x)$

性质3-4表明，对连续型随机变量 X 而言，当已知其分布函数 $F(x)$ 时，用导数可求得其密度函数 $p(x)$ 。

对 $p(x)$ 不连续点上, $p(x)$ 可任意定义有限值，因为在有限个点上改变密度函数值不会影响相应分布函数的值，当然也不影响我们计算任何概率。

例如，设$x_0 \in (a,b)$, $p(x)$在x_0上改变一个值，则

$$P(a < X \le b) = P(a < X \le x_0) + P(x_0 < X \le b)$$

$$= \int_a^{x_0} p(x)dx + \int_{x_0}^{b} p(x)dx$$

$$= \int_a^{b} p(x)dx$$

注：我们根本就不关心$p(x)$在x_0上取什么值

另外，已知连续型随机变量 X 的密度函数 $p(x)$，则可由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$ 求得分布函数。

因此，对连续型随机变量来说,$F(x)$ 和 $p(x)$是可以相互表示，和离散型随机变量常用概率分布描述一样，**连续型随机变量常用密度函数描述较方便**。

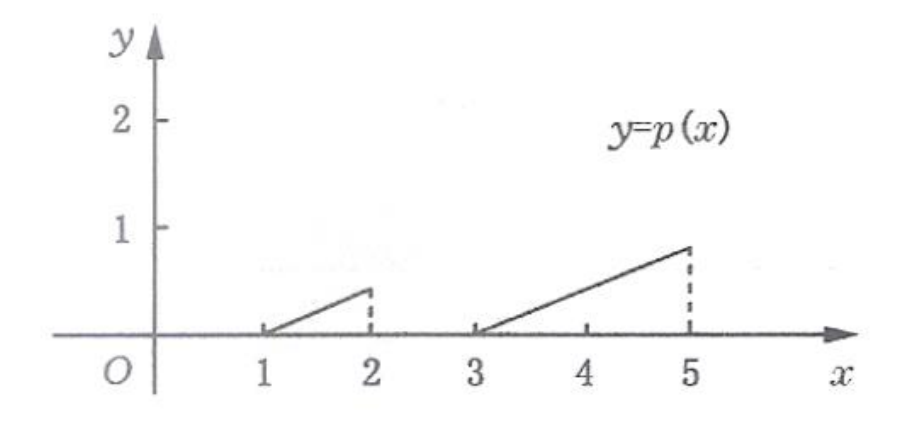
48页例3-11

例9 设连续性随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} A(x-1), 1\le x\le 2 \\ A(x-3), 3\le x\le 5 \\ \quad 0 \quad , \quad 其他 \end{cases}$$

试求： (1)常数A；(2) $P(X<4)$。

解：



$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} A(x-1)dx + \int_{2}^{3} 0dx$$

$$+\int_{3}^{5} A(x-3)dx + \int_{5}^{+\infty} 0dx$$

$$= A\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2 + A\frac{(x-3)^2}{2}\Big|_3^5 = \frac{5}{2}A$$

由性质$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$，　可得 $A = \dfrac{2}{5}$。

$$(2)P(X < 4) = \int_1^2 \frac{2}{5}(x-1)dx + \int_3^4 \frac{2}{5}(x-3)dx$$

$$= \frac{(x-1)^2}{5}\Big|_1^2 + \frac{(x-3)^2}{5}\Big|_3^4 = \frac{2}{5}$$

或者

$$P(X < 4) = 1 - P(X \geq 4) = 1 - \int_4^5 \frac{2}{5}(x-3)dx$$

$$= 1 - \frac{(x-3)^2}{5}\Big|_4^5 = \frac{2}{5}$$

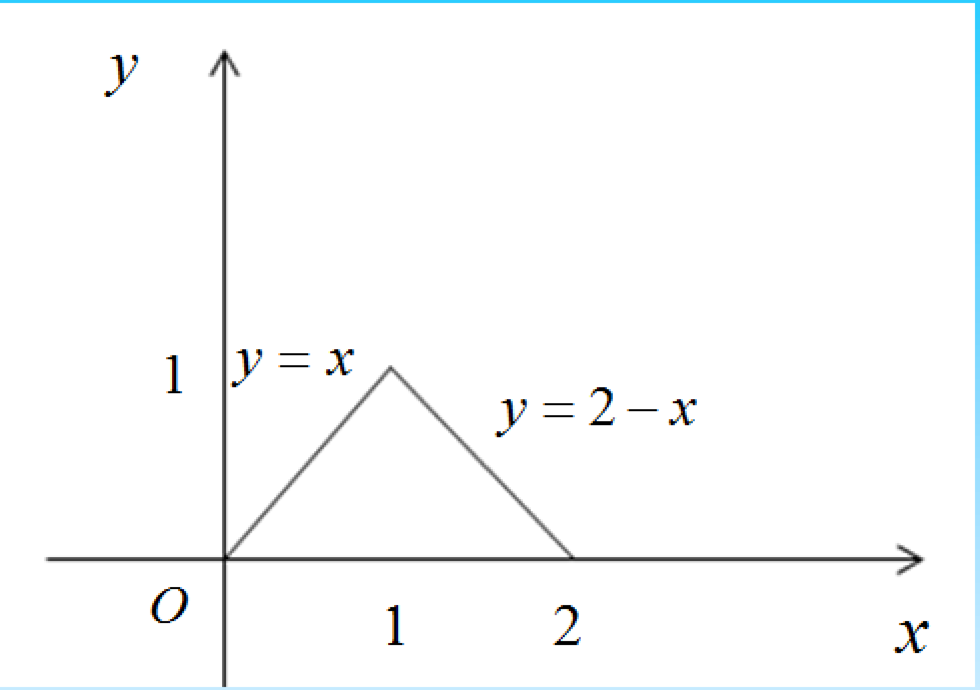
48页例3-12

例10 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x\ ,0\le x<1 \\ 2-x,1\le x<2 \\ 0\ ,\text{其他} \end{cases}$$

试求 X 的分布函数 。

解：



当 $x<0$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0,$$

当$0 \le x < 1$时

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} tdt = \frac{x^2}{2},$$

当$1 \le x < 2$时

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{1}^{x} (2-t)dt$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 2x - 1,$$

当$x \ge 2$时

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{1}^{2} (2-t)dt + \int_{2}^{x} 0dt$$

$$= 1$$

所以 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

49页例3-13

例11 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , \quad x<-a \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, -a\le x<a \\ 1 \quad , \quad x\ge a \end{cases}$$

其中 $a>0$, 试求

(1) 常数A和B; (2) $P(-\dfrac{a}{2}\le X\le\dfrac{a}{2})$;

(3) X 的密度函数$p(x)$。

解：（1）由于连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 处处连续，

在 $x=-a$ 连续，

$$0=\lim_{x\to -a^{+}}\left(A+B\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

在 $x=a$ 连续，

$$\lim_{x\to a^{-}}\left(A+B\arcsin\frac{x}{a}\right)=1$$

即

$$\begin{cases} 0 = A + B \cdot \arcsin\left(-\dfrac{a}{a}\right) \\ A + B \cdot \arcsin\left(\dfrac{a}{a}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - \dfrac{\pi}{2} B = 0 \\ A + \dfrac{\pi}{2} B = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

（2） $$P\left(-\frac{a}{2}\le X\le\frac{a}{2}\right)=P\left(-\frac{a}{2}< X\le\frac{a}{2}\right)$$

$$=F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{a/2}{a}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{-a/2}{a}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}$$

（3）由于 $F(x)$ 在 $-a$ 和 a 处导数不存在（即 $p(x)$ 在 $-a$ 和 a 处不连续），

因此，在 $-a$ 和 a 处，我们定义

$$p(x)=0$$

又

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<-a \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$$

故密度函数 $p(x)$ 为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a\\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$$

二、常用连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

定义3-11 若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中 $a<b$ ，则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布（uniform distribution），记作

$$X\sim U[a,b]$$

容易验证均匀分布的密度函数$p(x)$ 满足：

(1) $p(x) \geq 0, x \in \left(-\infty, +\infty\right);$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$。

以下我们将通过积分求出均匀分布的分布函数 $F(x)$：

当 $x < a$ 时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0,$$

当 $a \le x < b$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt$$

$$=\frac{x-a}{b-a},$$

当 $x \ge b$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x} 0dt$$

$=1$。

所以，

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b \\ 1\ , & x\ge b \end{cases}\text{。}$$

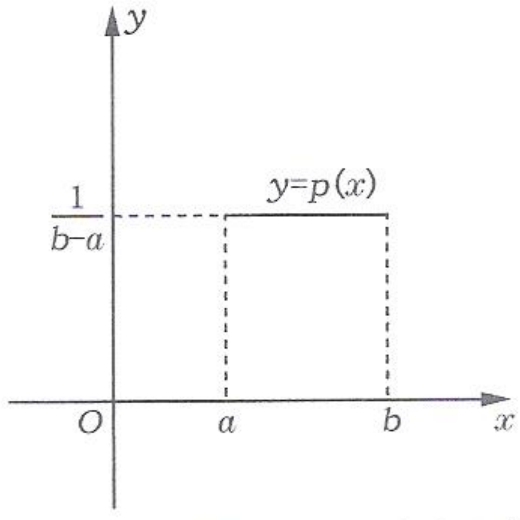


图 3—5 均匀分布的密度函数

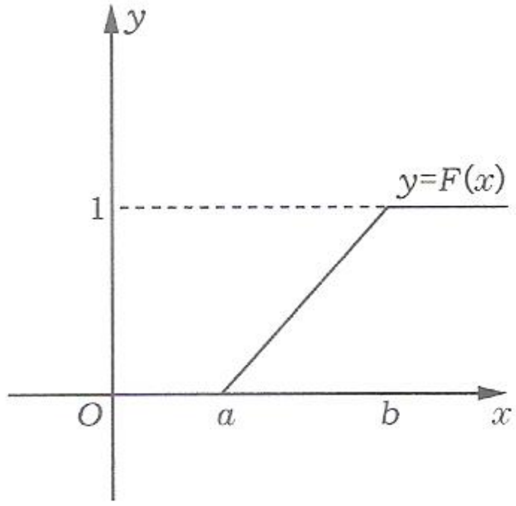


图 3—6 均匀分布的分布函数

设 $X \sim U[a,b]$，且 $F(x)$ 为 X 的分布函数。

若 $a \le c < c+d \le b$，则 X 落入区间 $[c, c+d]$ 内的概率为

$$P(c \le X \le c+d) = F(c+d) - F(c)$$

$$= \frac{c+d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a}$$

$$= \frac{d}{b-a}$$

由此可见，X 落入区间 $[c, c+d]$ 内的概率与区间的端点无关，仅与区间的长度 d 有关，即只要区间长度一样，则 X 落入这些区间内的概率是相等的。这就是“均匀”的含义。

均匀分布是相当重要的分布。计算机产生的随机数就是服从均匀分布 $U[0,1]$，在计算机模拟中有相当重要的作用。

51页例3-14

例12 在 $[0,1]$ 中任取一点 X ，求

$$P\left(X^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{8}\geq 0\right)$$

解：显然 $X\sim U[0,1]$，则

$$P\left(X^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{8}\geq 0\right)=P\left(\left\{X\geq\frac{1}{2}\right\}+\left\{X\leq\frac{1}{4}\right\}\right)$$

$$=P\left(X\geq\frac{1}{2}\right)+P\left(X\leq\frac{1}{4}\right)$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx+\int_{0}^{\frac{1}{4}} dx=\frac{3}{4}$$

2. 指数分布

定义3-12 若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，则称随机变量 X 服从指数分布(exponential distribution)，记作 $X\sim Exp(\lambda)$

容易验证指数分布的密度函数$p(x)$满足：

(1) $p(x)\ge 0, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1$

下面我们来求指数分布的分布函数$F(x)$：

当$x<0$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$$

当$x>0$时，

杨勇制作

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$=1-e^{-\lambda x}$$

所以，

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0 \quad , & x<0\end{cases}$$

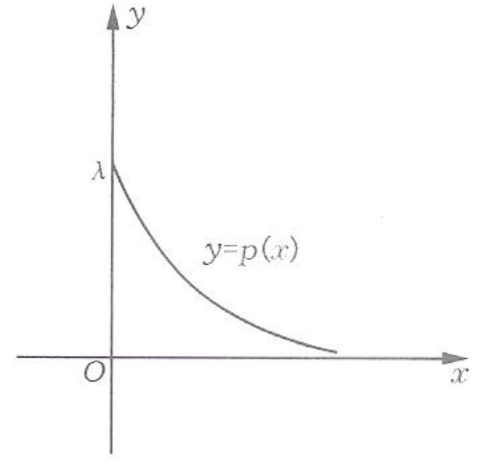


图 3—7　指数分布的密度函数

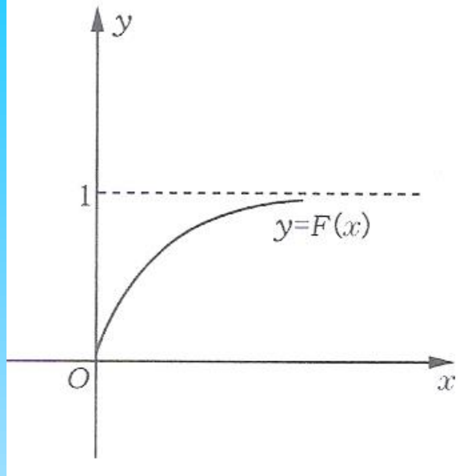


图 3—8　指数分布的分布函数

指数分布有很广泛的应用，我们常用它来作为各种“**寿命**”分布的近似。

例如，无线电元件的寿命，保险丝的寿命，以及电话问题中的通话时间，随机服务系统中的服务时间，某一复杂系统中两次故障的时间间隔等都近似地服从指数分布。

性质3-5 设 $X \sim Exp(\lambda)$，则对于任意 $s>0, t>0$ 有

$$P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$$

证明：设 $F(x)$ 为指数分布的分布函数，对于 $x>0$，有

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$

$$= 1 - F(x)$$

$$= e^{-\lambda x}$$

所以,

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(\{X > s + t\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)}$$

$$= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t} = P(X > t)。$$

设 X 表示产品的寿命，且 $X \sim Exp(\lambda)$，则上述性质3-5表明，如果已知产品工作了 s 小时，则它再工作 t 的概率与已工作过的时间 s 无关，而好像一个新产品开始工作那样。

指数分布这一重要性质称为指数分布具有无记忆性。所以在已知产品仍然完好的情况下就把它进行更换的做法是没有任何必要的。

连续性分布中只有指数分布具有无记忆性。

52页例3-15

例13 某一设备有4个同类型的三极管，它们的寿命 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{5000}}, x>0\\ 0 \quad , x\le 0\end{cases}$$

求(1)参数 λ 的值

(2)一个三极管寿命超过1250小时的概率；

(3)该设备在使用了1250小时后，需要更换三极管的概率。

解：(1)由密度函数 $p(x)$ 的基本性质知，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\frac{x}{5000}} dx$$

$$= -5000\lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{5000}} d\left(-\frac{x}{5000}\right) = 5000\lambda = 1$$

所以，
$$\lambda = \frac{1}{5000},$$

(2)一个三极管寿命超过1250小时的概率 p 为

$$p = P(X > 1250) = \int_{1250}^{+\infty} \frac{1}{5000} e^{-\frac{x}{5000}} dx$$

$$= e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.7788,$$

(3)设 Y 表示4个三极管中**损坏**的个数，则显然$Y \sim B(4,1-p)$。

又由于至少有一个三极管损坏就需要更换，则需要更换的概率p'为

$$p' = P(Y \geq 1) = \sum_{i=1}^{4} C_4^i (1-p)^i p^{4-i}$$

$$= 1 - p^4 \approx 0.6321$$

3. 正态分布

定义3-13 若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in(-\infty,+\infty)$$

其中 μ 和 σ 均为常数，且$\sigma>0$，则称随机变量 X 服从正态分布（normal distribution），记作

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

下面验证定义3-13中的 $p(x)$ 满足密度函数两个基本性质：

(1) $p(x)\geq 0, x\in(-\infty,+\infty)$，是显然的；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$。

证明： 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

其中作变换 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ，

所以，只要验证：$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ 即可。

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr$$

$$= \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

又被积函数非负，所以积分也是非负，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

这表明正态分布的 $p(x)$ 确为密度函数。

正态分布的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, x \in (-\infty, +\infty)$$

注：以上的被积函数是可积的，但是正态分布的分布函数不能用初等函数表示。

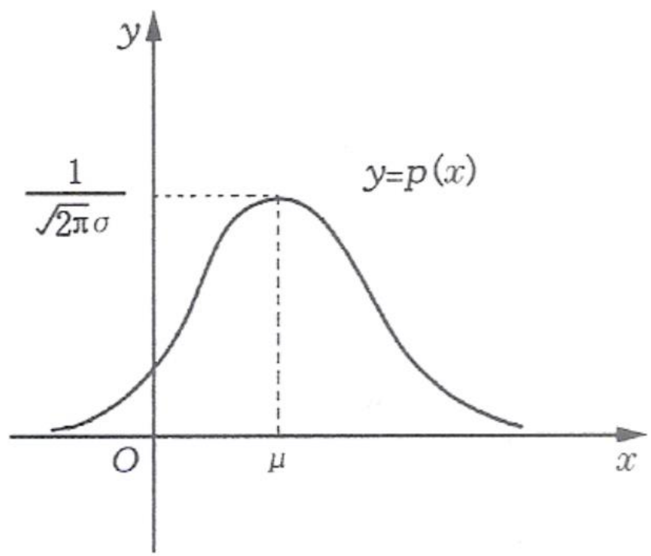


图 3—9　正态分布的密度函数

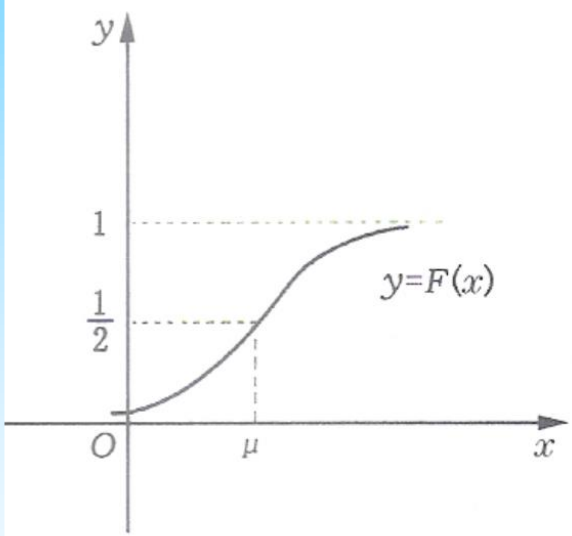


图 3—10　正态分布的分布函数

特别地，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布称为标准正态分布，记作 $N(0,1)$。

相应的密度函数和分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示。即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,,\,x\in(-\infty,+\infty)$$

正态分布是概率论中最重要的分布。它表现在以下几个方面：

（1）正态分布是最常见的一个分布。例如，测量的误差，钢的含碳量，人的生理特证和尺寸：身高、体重，农作物的收获量，工厂产品的尺寸：直径、长度、宽度、高度等均近似地服从正态分布。

（2）一般地，若影响某一数量指标的随机因素很多，而每个因素所起的作用均不太大，则这个指标近似地服从正态分布，这就是概率论中的中心极限定理比较直观的描述。这也说明正态分布在理论研究中的重要性。

（3）正态分布有许多优良的性质，许多分布在一定的条件下可用正态分布来近似。例如，二项分布。

（4）在数理统计中有着重要应用的分布。例如，$t-$分布、χ^2-分布、$F-$分布等均可由正态分布派生出来。

由正态分布的定义知，它有以下一些特点：

（1）正态分布的密度函数 $p(x)$ 在直角坐标系内的图形呈钟形（见图3-9），并且以 x 轴为其渐近线。

（2）正态分布的密度函数 $p(x)$ 在 $x=\mu$ 处达到极大，极大值为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ ，并且 $p(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称，即

$$p(\mu - x) = p(\mu + x)$$

（3）正态分布的随机变量落入相等长度区间内的概率越靠近 μ 就越大。

（4）正态分布的参数 μ (σ固定) 决定其密度函数 $p(x)$ 图形的中心位置，因此有时也称 μ 为正态分布的位置参数。如图3-11所示。

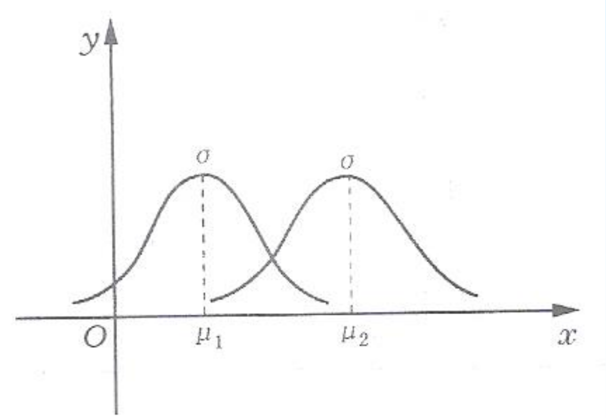


图 3—11　正态分布的位置

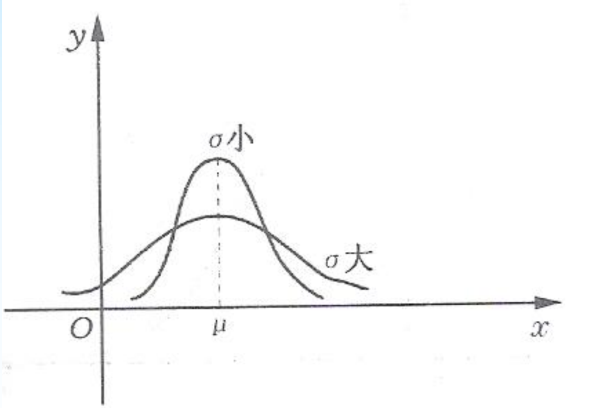


图 3—12　正态分布的形状

（5）正态分布的参数 σ (μ 固定) 决定其密度函数 $p(x)$ 图形的形状，因此有时也称 σ 为正态分布的形状参数。如图3-12所示。

其中我们可以看到：σ 越小，$p(x)$ 在 $x=\mu$ 的两侧越陡峭，表示相应的随机变量取值越集中于 $x=\mu$ 附近；σ 越大，$p(x)$ 在 $x=\mu$ 的两侧越平坦，表示相应的随机变量取值越分散。

为了计算正态的随机变量 X 落入区间 (a,b) 内的概率，我们有必要揭示一般正态分布与标准正态分布之间的关系。

性质3-6 如果 $X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，且它们的密度函数分别为 $\varphi(x)$ 和 $p(x)$，分布函数分别为 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$。则

(1) $p(x)=\dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

(2) $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$。

杨勇制作

证明：（1）

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

（2）

$$F(x) = P(Y \le x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)dt$$

$$\overset{y=\frac{t-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma}\varphi(y)\sigma dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \varphi(y)dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

现在我们来计算服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X 落入区间 (a,b) 内的概率。

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，则

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

由此可见，一般正态分布的随机变量落在某区间内的概率，可以利用标准正态分布来计算。

正态分布是概率论和数理统计中最常用的一个分布，为计算方便，编制了**标准正态分布**的分布函数表以供查用。

由以上的性质可知，有了标准正态分布的分布函数表以后，一般正态分布的计算就迎刃而解了。

不过，标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的值，在 $x \geq 0$ 的范围内是有表可查的，对于的 $x < 0$ 的值，可以由以下的性质3-7解决。

性质3-7 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

证明： $\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\varphi(t)dt$

$$=1-\int_{-x}^{+\infty}\varphi(t)dt$$

$$\overset{y=-t}{=}1-\int_{x}^{-\infty}\varphi(-y)d(-y)$$

$$=1-\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy$$

$$=1-\Phi(x)$$

概括起来，有

$$\Phi(x)=\begin{cases}\text{查表}, x>0\\ \dfrac{1}{2}, x=0\\ 1-\Phi(-x), x<0\end{cases}$$

性质3-8 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 0.6826$;

(2) $P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0.9546$;

杨勇制作

(3) $P(|X-\mu|<3\sigma)\approx 0.9974$。

证明：

$$P(|X-\mu|<k\sigma)=P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)$$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+k\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-k\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi(k)-\Phi(-k)$$

$$=2\Phi(k)-1$$

将 $k=1,2,3$ 代入，并且查表即得结果。

由性质3-8可知，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 落在 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 内的概率为95%，即在一次试验里 X **基本上**落在区间 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 中。而 X 落在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为99.7%，即在一次试验里 X 几乎都落在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 中。这个性质在标准制度、质量管理等许多方面有着广泛的应用。这种近似的说法被一些实际工作都称为“ 3σ 原则”。

56页例3-16

例14　设 $X \sim N(3,4)$，试求

(1) $P(2 \le X < 5)$;

(2) 决定c,使得 $P(X > c) = P(X < c)$。

解：（1）

$$P(2 \le X < 5) = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-0.5)$$

$$= \Phi(1) + \Phi(0.5) - 1$$

$$\approx 0.8413 + 0.6915 - 1$$

$$= 0.5328,$$

（2） $P(X > c) = 1 - P(X \le c)$

又 $P(X \le c) = P(X < c)$,

则 $P(X \le c) = 0.5$,

即 $\Phi\left(\dfrac{c-3}{2}\right) = 0.5$, 也即 $\dfrac{c-3}{2} = 0$,

所以 $c = 3$

或者根据正态分布密度函数的对称性，在 $x=\mu$ 两边概率应相等，所以 $c=\mu=3$ 。

第四节 随机变量函数的分布

在实际问题中，我们常对某些随机变量的函数更感兴趣。

例如，某商品的单价为 a ，销售量 X 是随机变量，则销售收入 Y 是 X 的函数，即 $Y = aX$ 。

如果 X 的分布已知，则想知道 Y 的分布。

$$\text{已知 } X \begin{cases} p_i\text{，当}X\text{为离散性随机变量} \\ p(x)\text{，当}X\text{为连续性随机变量} \end{cases}$$

$$Y = f(X)$$

求Y的分布

(1) 当X为离散性随机变量时，则Y一定是离散性随机变量。

(2) 当X为连续性随机变量时，$\begin{cases} Y\text{可能为离散性随机变量} \\ Y\text{可能为连续性随机变量} \end{cases}$

先讨论

当X为连续性随机变量时，Y可能为离散性随机变量

设$x_1 < x_2$，且y_1, y_2, y_3互不相等

X的密度函数为$p_X(x)$，$Y = f(X)$，且

$$f(x)=\begin{cases} y_1, & x \le x_1 \\ y_2, & x_1 < x < x_2 \\ y_3, & x \ge x_2 \end{cases}$$

则

$$P(Y=y_1)=P(X \le x_1)=\int_{-\infty}^{x_1} p_X(x)dx$$

$$P(Y=y_2)=P(x_1 < X < x_2)=\int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx$$

$$P(Y=y_3)=P(X \ge x_2)=\int_{x_2}^{+\infty} p_X(x)dx$$

(1) 当X为离散性随机变量时，则Y 一定是离散性随机变量。

若X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

此时$Y = f(X)$的取值为$f(x_k), k = 1, 2, \cdots, n, \cdots$

(a) 当$f(x_k)$的值互不相等时，

因为 $$\{Y = f(x_k)\} = \{X = x_k\}$$

则 $P(Y=f(x_k))=P(X=x_k), k=1,2,\cdots,n,\cdots$

即

$$Y=f(X)\sim\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) 当$f(x_k)$的值有相等时，

则应先把那些相等的值分别合并，同时把它们所对应的概率相加，即得出 $Y=f(X)$ 的概率分布。

例如，仅有$f(x_1)=f(x_2)$且$f(x_1), f(x_3),\cdots,$ $f(x_n),\cdots$均互不相等，

则
$$\{Y=f(x_1)\}=\{X=x_1\}+\{X=x_2\}$$

$$P(Y=f(x_1))=P(X=x_1)+P(X=x_2)$$

$$=p_1+p_2$$

其余

$$P(Y=f(x_k))=P(X=x_k)=p_k, k=3,4,\cdots,n,\cdots$$

$$Y=f(X)\sim\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_3) & \cdots & f(x_n) & \cdots \\ p_1+p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

若还有其它 $f(x_k)$ 有相等的情况，按照上述方法一样处理。

57页例3-18

例15 设 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

求$Y = X^3 - 3X^2 + 2X$的概率分布。

解：由于$Y = X(X-1)(X-2)$，所以

Y的所有可能取值为$0, 6$。

$$P(Y=0) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{7}{8}$$

$$P(Y=6)=P(X=3)=\frac{1}{8}$$

则

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(2) 当X为连续性随机变量时，Y 为连续性随机变量一般有二个方法：分布函数法和公式法。

1. 分布函数法（一般方法）

59页例3-20

例16 设随机变量X的密度函数为$p_X(x)$，试求$Y = X^2$的密度函数。

解：先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 。

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = 0$

当 $y \geq 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

当 $y > 0$ 时，

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$= p_X\left(\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} - p_X\left(-\sqrt{y}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(p_X\left(\sqrt{y}\right) + p_X\left(-\sqrt{y}\right)\right)$$

于是，$Y = X^2$ 的密度函数为

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(p_X\left(\sqrt{y}\right) + p_X\left(-\sqrt{y}\right)\right), & y > 0 \\ 0\text{，} & y \le 0 \end{cases}$$

59页例3-21

杨勇制作

例17 设随机变量 Θ 的密度函数为

$$p_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

且令 $X=\sin\Theta$，$Y=\cos\Theta$， 试分别求 X 和 Y 的密度函数。

解：易知 $\Theta\sim U\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且

$$F_\Theta(\theta)=\begin{cases} 0\quad, & \theta<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x+\dfrac{\pi}{2}}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}\le\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ 1\quad, & \theta\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

首先，求 X 的密度函数，为此先求 X 的分布函数。

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(\sin\Theta\le x)$$

当 $x < -1$ 时，

$$F_X(x) = P(\sin\Theta \le x) = 0\,,$$

当 $-1 \le x < 1$ 时，

$$F_X(x) = P(\sin\Theta \le x)$$

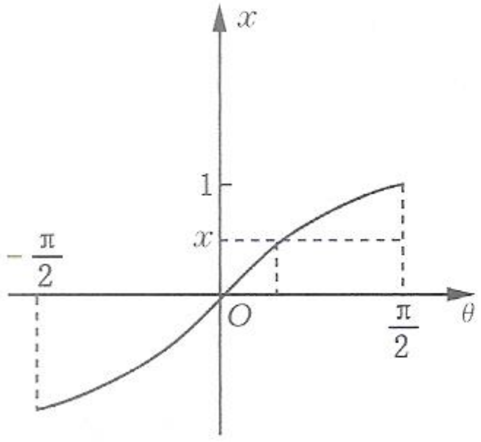


图 3—13

$$= P\left(-\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \arcsin x\right)$$

$$= F_{\Theta}(\arcsin x) - F_{\Theta}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= F_{\Theta}(\arcsin x),$$

当 $x \geq 1$ 时，

$$F_X(x) = P(\sin \Theta \leq x) = 1$$

当$-1<x<1$时，

$$p_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

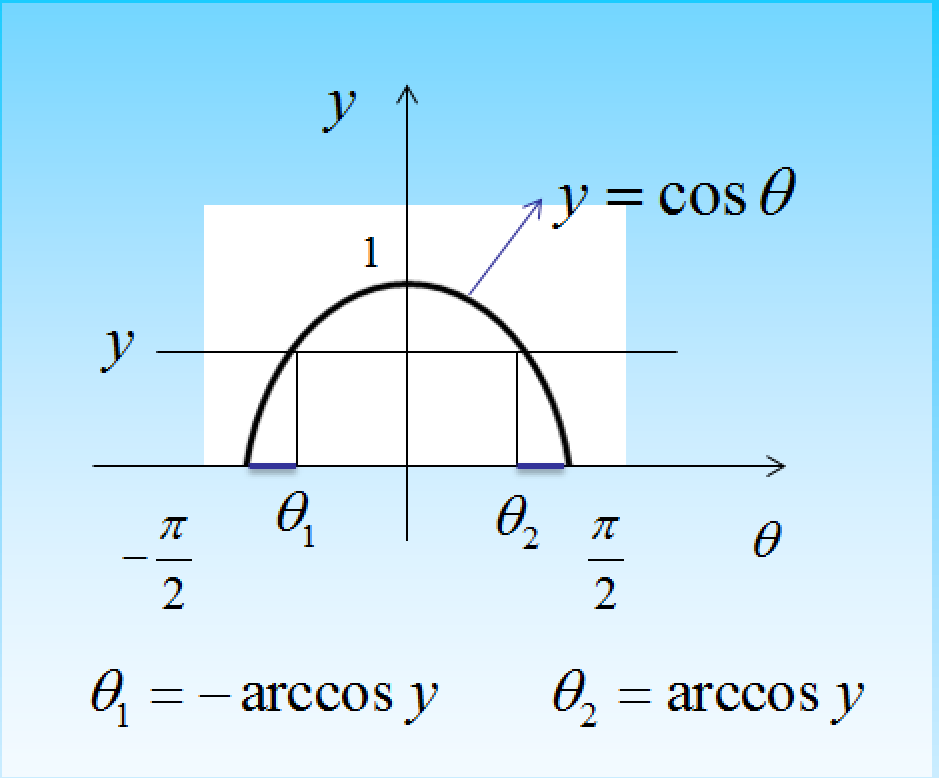
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{d(\arcsin x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

所以，

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1\\ 0\;, & 其他\end{cases}\quad。$$

其次求Y的密度函数，



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\cos\Theta\le y)$$

当$y<0$时，

$$F_Y(y)=P(\cos\Theta\le y)=0$$

当$0\le y<1$时，

$$F_Y(y)=P(\cos\Theta\le y)$$

$$=P\left(-\frac{\pi}{2}\le\Theta\le-\arccos y\right)+P\left(\arccos y\le\Theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=F_\Theta(-\arccos y)-F_\Theta\left(-\frac{\pi}{2}\right)+F_\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)-F_\Theta(\arccos y)$$

$$=F_\Theta(-\arccos y)-F_\Theta(\arccos y)+1$$

当$y\ge 1$时，

$$F_Y(y)=P(\cos\Theta\le y)=1$$

当$0<y<1$时，

$$p_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$=\frac{1}{\pi}\times\frac{d(-\arccos y)}{dy}-\frac{1}{\pi}\times\frac{d(\arccos y)}{dy}$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, 0 < y < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$ 。

2．公式法

定理3-3 设 X 是一个连续型随机变量，其密度函数为 $p_X(x)$，又函数 $y=f(x)$ 严格单调，其反函数 $x=h(y)$ 有连续导数，则 $Y=f(X)$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases} p_X\left(h\left(y\right)\right)\cdot\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\left\{f\left(-\infty\right), f\left(+\infty\right)\right\}$，$\beta=\max\left\{f\left(-\infty\right), f\left(+\infty\right)\right\}$。

证明：不妨设 $f(x)$是严格单调上升函数，这时它的反函数$h(y)$ 也是严格单调上升函数，于是，

当 $f(-\infty)<y<f(+\infty)$时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)$$

$$=P(f(X)\le y)$$

$$=P(X\le h(y))$$

$$=F_X(h(y))$$

$$p_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$=p_X(h(y))\cdot h'(y)$$

在其他范围， $p_Y(y)=0$

所以，

$$p_Y(y)=\begin{cases} p_X(h(y))\cdot h'(y), & f(-\infty)<y<f(+\infty) \\ 0 \quad , & 其他 \end{cases}$$

当 $f(x)$ 严格单调下降时，

这时它的反函数 $h(y)$ 也是严格单调下降函数，于是，

当 $f(+\infty) < y < f(-\infty)$ 时，

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

$$= P(f(X) \le y)$$

$$= P(X \ge h(y))$$

$$= 1 - P(X < h(y))$$

$$=1-P(X \le h(y))$$

$$=1-F_X(h(y))$$

$$p_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$=-p_X(h(y))\cdot h'(y)$$

在其他范围， $p_Y(y)=0$

所以，

$$p_Y(y)=\begin{cases}-p_X(h(y))\cdot h'(y), & f(+\infty)<y<f(-\infty)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

综上所述，

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X\left(h\left(y\right)\right)\cdot\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

61页例3-22

例18 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $a \neq 0$，则

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)。$$

证明：设 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ 分别表示 X 和 Y 的密度函数。 $y = f(x) = ax + b$ 的反函数为 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$，所以，

$$p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\left|\left(\frac{y-b}{a}\right)'\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2\sigma^2 a^2}}$$

所以,

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

这是正态分布的一个重要性质，即正态随机变量的线性函数仍服从正态分布。

注：2个不同的随机变量，可以有相同的分布，

例如， $X \sim N(0,1), -X \sim N(0,1)$