第十一章

第二节 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: “$\Longrightarrow$” 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\{S_n\}$收敛，故有界.

“$\Longleftarrow$” $\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界，故 $\{S_n\}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且存在 $N \in Z^+$，对一切 $n > N$，有 $u_n \leq k v_n$ (常数 $k > 0$)，则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性，故不妨设对一切 $n \in Z^+$，都有 $u_n \leq k v_n$，

令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数和强级数的部分和，则有

$$S_n \leq k \sigma_n$$

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in Z^+$，有 $S_n \leq k\sigma$

由定理 1 可知，弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$，这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

例1. 讨论 p 级数 $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ (常数 $p > 0$) 的敛散性.

解: 1) 若 $p \leq 1$, 因为对一切 $n \in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散 .

2) 若 $p > 1$, 因为当 $n-1 \leq x \leq n$ 时, $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$，故

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p} \mathrm{d}x$$

$$\leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right]$$

$$\boxed{\left[1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right] + \left[\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}} \right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

故强级数收敛，由比较审敛法知 p 级数收敛 .

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

若存在 $N\in Z^+$, 对一切 $n\ge N$,

(1) $u_n\ge\frac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(2) $u_n\le\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

例2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\ge\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散.

定理3. (比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$, 则有

(1) 当 $0<l<\infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon\quad(l\ne\infty)$$

$$(l-\varepsilon)v_n\le u_n\le(l+\varepsilon)v_n\qquad(n>N)$$

(1) 当 $0<l<\infty$ 时, 取 $\varepsilon<l$, 由定理 2 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l=0$ 时, 利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n$ $(n>N)$, 由定理2 知若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=\infty$ 时, 存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, $\frac{u_n}{v_n}>1$, 即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

$\sum u_n,\sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

(1) 当 $0<l<\infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散.

特别取 $v_n=\frac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得如下结论:

$$\lim_{n\to\infty}n^p u_n=l\quad\begin{cases}p\le1,\ 0<l\le\infty\Longrightarrow\sum u_n\text{ 发散}\\ p>1,\ 0\le l<\infty\Longrightarrow\sum u_n\text{ 收敛}\end{cases}$$

例3. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

$\boxed{\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}}$

解: $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例4. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性. $\boxed{\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}}$

解: $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

定理4. 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho<1$ 时, 取 ε 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

知存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$

$$\therefore\ u_{n+1}<(\rho+\varepsilon)u_n<(\rho+\varepsilon)^2u_{n-1}<\cdots$$
$$<(\rho+\varepsilon)^{n-N}u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^k$ 收敛 , 由比较审敛法可知 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时,必存在 $N\in Z_+$, $u_N\neq0$, 当 $n\geq N$ 时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 从而

$$u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\geq u_N\neq0$, 所以级数发散.

说明: 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases}p>1, \text{级数收敛} ;\\ p\leq1, \text{级数发散} .\end{cases}$

例5. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解: $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}=x$

根据定理4可知:

当 $0<x<1$ 时, 级数收敛 ;

当 $x>1$ 时, 级数发散 ;

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

定理5. 根值审敛法 (Cauchy判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 时, 级数发散 .

证明提示: $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, $\therefore$ 对任意给定的正数 ε

($\varepsilon<|1-\rho|$), 存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\rho-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon$$

即 $(\rho-\varepsilon)^n<u_n<(\rho+\varepsilon)^n$

$\rho<1\Longrightarrow\rho+\varepsilon<1$

$\rho>1\Longrightarrow\rho-\varepsilon>1$

分别利用上述不等式的左,右部分, 可推出结论正确.

说明 : $\rho=1$ 时 , 级数可能收敛也可能发散 .

例如 , $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$:

$$u_n=\frac{1}{n^p}\ ,\ \sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to1\ \ (n\to\infty)$$

但 $\begin{cases}p>1, \text{级数收敛} ;\\ p\leq1, \text{级数发散} .\end{cases}$

例6. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ 收敛于 S , 并估计以部分和 S_n 近似代替和 S 时所产生的误差 .

解: $\because\ \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}=\dfrac{1}{n}\to0\ \ (n\to\infty)$

由定理5可知该级数收敛 . 令 $r_n=S-S_n$, 则所求误差为

$$0<r_n=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots$$
$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^n}$$

二、交错级数及其审敛法

设 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为**交错级数** .

定理6 . (Leibnitz 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛 , 且其和 $S \le u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \le u_{n+1} .$$

证: $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \ge 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \le u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列, 故 $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n} = S \le u_1$

又 $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n} = S$

故级数收敛于S, 且 $S \le u_1$, S_n 的余项:

$$r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \le u_{n+1}$$

用Leibnitz **判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots +$

2) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10} - \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} - \frac{4}{10^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n} + \cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛 ?

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 发散 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; 收敛 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$. 收敛

三、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 , 则称原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 ;

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 .

例如 : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛 .

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $v_n \ge 0$, 且 $v_n \le |u_n|$, 根据比较审敛法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2 v_n - |u_n|$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 v_n$ 收敛

$\Downarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

例7. 证明下列级数绝对收敛 :

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$.

证: (1) $\because \left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right| \le \frac{1}{n^4}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛 ,

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right|$ 收敛

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

(2) 令 $u_n=\dfrac{n^2}{e^n}$,

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}<1$$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

绝对收敛级数与条件收敛级数具有完全不同的性质.

***定理8.** 绝对收敛级数不因改变项的位置而改变其和.
(P203 定理9)

***定理9.** (绝对收敛级数的乘法)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都绝对收敛，其和分别为 S,σ,

则对所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 也绝对收敛，其和为 $S\sigma$. (P205 定理10)

说明: 证明参考 P203～P206, 这里从略.

但需注意条件收敛级数不具有这两条性质.

内容小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性
2. 利用正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

↓ 满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

$\rho=1$ 不定 → 用它法判别：比较审敛法、部分和极限、积分判别法

$\rho<1$ ↓ 收 敛　　$\rho>1$ ↓ 发 散

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

(2) 若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a(b_n>0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$

证明 设 $a_1=b_1,a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}},(n=2,3,\cdots)$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=a$. 由上题得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$,

则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$.

这说明凡能由比式判别法鉴别收敛性的级数，它也能由根式判别法来判断，而且可以说，根式判别法较之比式判别法更有效.

例如，级数 $\sum\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的.

例如，级数 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$. 由于

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{3}{2^{2m}}}{\frac{1}{2^{2m-1}}}=\frac{3}{2},$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2m+1}}}{\frac{3}{2^{2m}}}=\frac{1}{6},$$

故由比式判别法无法鉴别此级数的收敛性. 但应用根式判别法来考察这个级数，可知此级数是收敛的.

3. 任意项级数审敛法

概念：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收敛级数

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

Leibniz判别法:

$\left.\begin{array}{l} u_n\ge u_{n+1}>0 \\ \lim_{n\to\infty}u_n=0\end{array}\right\}$ → 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

思考与练习

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛？

提示: $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2}{u_n}=\lim_{n\to\infty}u_n=0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛 .

注意: 反之不成立. 例如,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 .

备用题

p－级数 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

1. 判别级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

不是 p–级数

解: (1) $\because\ \ln(n+1)<n$， $\therefore\ \frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散 .

(2) $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散 .

2. 设 $u_n\ne 0\,(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ (C).

(A) 发散； (B) ~~绝~~对收敛;

(C) 条件收敛； (D) 收敛性根据条件不能确定.

分析: 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，知 $\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n}$，

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\ge\frac{1}{u_n}$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{n}}=1$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散. $\therefore$ (B) 错；

又 $S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_4}}+\frac{1}{u_5}\right)$

$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$