## 习题课

第三章

# 中值定理及导数的应用

一、 微分中值定理及其应用

二、 导数应用

## 一、 微分中值定理及其应用

**1. 微分中值定理及其相互关系**

罗尔定理 $\xrightarrow{f(a)=f(b)}$ 拉格朗日中值定理

$f'(\xi)=0$

$F(x)=x$

$f(a)=f(b)$

柯西中值定理 ⟶ 泰勒中值定理

$F(x)=x$

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$n=0$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\tfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

**2. 微分中值定理的主要应用**

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

**3. 有关中值问题的解题方法**

利用**逆向思维**，设辅助函数． 一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用**罗尔定理**，可用原函数法找辅助函数．

(2) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用**柯西中值定理**．

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须**多次应用中值定理．**

(4) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用**泰勒公式**，有时也可考虑**对导数用中值定理．**

(5) 若结论为不等式，要注意**适当放大**或**缩小**的技巧.

**例1.** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导，且 $|f'(x)|\le M$，证明 $f(x)$在 $(a,b)$内有界.

**证:** 取点 $x_0\in(a,b)$，再取异于 $x_0$ 的点 $x\in(a,b)$，对 $f(x)$在以 $x_0, x$ 为端点的区间上用拉氏中值定理，得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\quad(\xi\text{ 界于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |f(x)|&=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|\\&\le|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|\\&\le|f(x_0)|+M(b-a)=K\quad(\text{定数})\end{aligned}$$

可见对任意 $x\in(a,b)$，$|f(x)|\le K$，即得所证．

**例2.** 设 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

**证:** 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

**例3.** 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 在$(a,b)$内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

**证:** 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$, 即要证 $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件, 故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因$f(x)$及$x^2$在$[a,b]$上满足柯西定理条件，故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\quad \xi,\eta\in(a,b)$

**例4.** 设实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足下述等式

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 .

**证:** 令 $F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则可设

$$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

显然, $F(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且 $F(0)=F(1)=0$, 由罗尔定理知存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根 $\xi$.

**例5.** 设函数 $f(x)$ 在$[0, 3]$ 上连续, 在$(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$, 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$. (03考研)

**证:** 因 $f(x)$ 在$[0, 3]$上连续, 所以在$[0, 2]$上连续, 且在$[0, 2]$上有最大值 $M$ 与最小值 $m$, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \Longrightarrow m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because$ $f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$在$[c,3]$上连续, 在$(c,3)$内可导, 由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

**例6.** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$, 且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

**证:** $\forall x\in[0,1]$，由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\tfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\tfrac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得 $0=f'(x)+\tfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\tfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$\therefore\ |f'(x)|=\left|\tfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\tfrac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le\tfrac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\tfrac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le(1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\le 1,\quad x\in[0,1]$$

## 二、 导数应用

1. 研究函数的性态:
   增减 , 极值 , 凹凸 , 拐点 , 渐近线 , 曲率
2. 解决最值问题
   - 目标函数的建立与简化
   - 最值的判别问题
3. 其他应用 : 求不定式极限 ; 几何应用 ; 相关变化率; 证明不等式 ; 研究方程实根等.
4. 补充定理 (见下页)

**定理.** 设函数 $f(x),g(x)$在 $(a,+\infty)$上具有$n$ 阶导数, 且 (1) $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$

(2) $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)\ (x>a)$

则当 $x>a$ 时 $f(x)>g(x)$.

**证:** 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, 则

$$\varphi^{(k)}(a)=0\ (k=0,1,\cdots,n-1);\quad \varphi^{(n)}(x)>0\ (x>a)$$

利用$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处的 $n-1$ 阶泰勒公式得

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n>0 \quad (a<\xi<x)$$

因此 $x>a$ 时 $f(x)>g(x)$.

**例7. 填空题**

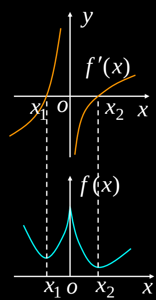
(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导数图形如图所示，则 $f(x)$ 的

单调减区间为 $\underline{(-\infty,\ x_1),\ (0,\ x_2)}$；

单调增区间为 $\underline{(x_1,0),\ (x_2,+\infty)}$；

极小值点为 $\underline{x_1,\ x_2}$；

极大值点为 $\underline{x=0}$ .

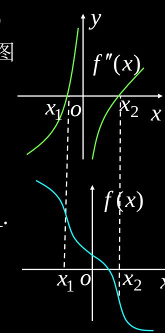



**提示:** 根据 $f(x)$ 的连续性及导函数的正负作 $f(x)$ 的示意图.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f''(x)$ 的图形如图所示，则函数 $f(x)$ 的图形在区间 $\underline{(x_1,0),\ (x_2,+\infty)}$ 上是凹弧；

在区间 $\underline{(-\infty,\ x_1),\ (0,\ x_2)}$ 上是凸弧；

拐点为 $\underline{(x_1,\ f(x_1)),\ (x_2,\ f(x_2)),\ (0,\ f(0))}$ .




**提示:** 根据 $f(x)$ 的可导性及 $f''(x)$ 的正负作 $f(x)$ 的示意图.

**例8.** 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

**证:** $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\underline{[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]}$$

令 $F(t)=\ln t$，在 $[x,x+1]$ 上利用拉氏中值定理，得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\qquad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

**例9.** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)+f'(x)>0$，证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

**证:** 设 $\varphi(x)=e^x f(x)$

则 $\quad\varphi'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]>0$

故 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续单调递增，从而至多只有一个零点 .

又因 $e^x>0$，因此 $f(x)$ 也至多只有一个零点 .

**思考:** 若题中 $f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$，其它不变时，如何设辅助函数? $\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$

**例10.** 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

**证:** 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\ge 1)$，用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=e$，列表判别:

极大值

| $x$ | $[1,e)$ | $e$ | $(e,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | $e^{\frac{1}{e}}$ | ↘ |

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大点 $x=e$，因此在 $x=e$ 处 $f(x)$ 也取最大值 .

又因 $2<e<3$，且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$，故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项 .

**例11.** 证明 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad(x>0)$.

**证:** 设 $\varphi(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=1+\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}>0\qquad(x>0)$$

故 $x>0$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加，从而 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$

即 $\quad\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad(x>0)$

**思考:** 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}\ (0<x<1)$ 时，如何设辅助函数更好？

**提示:** $\varphi(x)=(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

**例12.** 设 $f(0)=0$, 且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在，且单调递减，证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

**证:** 设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$ 时, $\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$, 得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立 .

**例13.** 证明:当 $0<x<1$ 时, $e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

**证:** 只要证 $(1-x)e^{2x}-1-x<0 \quad (0<x<1)$

设 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x$, 则 $f(0)=0$

$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$, $\quad f'(0)=0$

$f''(x)=-4xe^{2x}<0 \quad (0<x<1)$

利用一阶泰勒公式, 得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=-2\xi e^{2\xi}x^2<0 \quad (0<\xi<x<1)$$

故原不等式成立.

**例14.** 证明当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$ .

**证:** 令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, 则 $f(1)=0$

$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x}-2(x-1)$, $\quad f'(1)=0$

$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}$, $\quad f''(1)=2>0$

$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$

**法1** 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶泰勒公式，得

$$f(x)=\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

$$=(x-1)^2+\frac{\xi^2-1}{3\xi^3}(x-1)^3 \ge 0 \quad (x>0, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 1 之间})$$

故所证不等式成立 .

$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, $\quad f(1)=0$

$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2$, $\quad f'(1)=0$

$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1$, $\quad \boxed{f''(1)=2>0}$

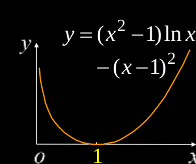
**法2** 利用**极值第二判别法**.

易知 $x=1$ 是 $f'(x)=0$ 的唯一根，

且 $f''(1)>0$, $\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一极小点，故 $f(1)=0$ 也是最小值，

因此当 $x>0$ 时 $f(x)\ge 0$, 即

$$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$$




**例15.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}) \quad (a\ne 0)$

**解法1** 利用中值定理求极限

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}) \quad (\xi \text{ 在 } \frac{a}{n} \text{ 与 } \frac{a}{n+1} \text{ 之间})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{a}{1+\xi^2}$$

$$=a$$

**解法2** 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore \quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty} n^2\left\{[\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n^2})]-[\frac{a}{n+1}+o(\frac{1}{(n+1)^2})]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}\right]=a$$

**解法3** 利用罗必塔法则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a \neq 0)$$