## 第四节 反常积分

第五章

常义积分 $\begin{cases}\text{积分限有限}\\ \text{被积函数有界}\end{cases}$

⇓ 推广

反常积分（广义积分）

一、无穷限的反常积分

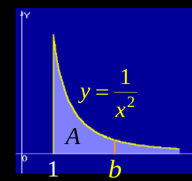
二、无界函数的反常积分

---

## 一、无穷限的反常积分

**引例.** 曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 $x$ 轴所围成的开口曲边梯形的面积 可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$




其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

---

**定义1.** 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 取 $b>a$, 若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限**反常积分**，记作

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地，若 $f(x)\in C(-\infty,b]$, 则定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

---

若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

（ $c$ 为任意取定的常数 ）

只要有一个极限不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

无穷限的反常积分也称为**第一类反常积分**.

**说明:** 上述定义中若出现 $\infty-\infty$, 并非不定型，它表明该反常积分发散 .

---

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^b=F(b)-F(-\infty)$$

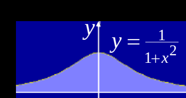
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

---

**例1.** 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**解:** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$




**思考:** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

**分析:** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散！

**注意:** 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用"偶倍奇零" 的性质否则会出现错误 .

**例2.** 证明第一类 $p$ 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；$p\le 1$ 时发散．

**证:** 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 反常积分收敛，其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$；

当 $p\le 1$ 时, 反常积分发散．

**例3.** 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t\ (p>0)$.

**解:** 原式 $= -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{p^2}$$

## 二、无界函数的反常积分

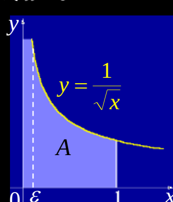
**引例:** 曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $x$ 轴, $y$ 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$




**定义2.** 设 $f(x)\in C(a,b]$, 而在点 $a$ 的右邻域内无界, 取 $\varepsilon>0$, 若极限 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

类似地，若 $f(x)\in C[a,b)$, 而在 $b$ 的左邻域内无界, 则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续, 而在点 $c$ 的邻域内无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作**第二类反常积分**, 无界点常称为**瑕点(奇点)**．

**说明:** 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点, 则本质上是常义积分, 而不是反常积分.

例如, $\int_{-1}^1\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(x+1)\mathrm{d}x$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的的计算表达式：

若 $b$ 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b^-)-F(a)$

若 $a$ 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a^+)$

若 $a$ , $b$ 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b^-)-F(a^+)$$

**注意:** 若瑕点 $c\in(a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)\underline{-F(c^+)+F(c^-)}-F(a)$$

可相消吗?

**例4.** 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

**解:** 显然瑕点为 $a$ , 所以

$$\text{原式} = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

**例5.** 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

**解:** $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = \infty$

所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

**例6.** 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛 ; $q\geq 1$ 时发散 .

**证:** 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该广义积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$ ;

当 $q\geq 1$ 时, 该广义积分发散 .

**例7.** 设 $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$ , 求 $I = \int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

**解:** $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点, 故 $I$ 为反常积分.

$$I = \int_{-1}^0 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)} = \arctan f(x) + C$$

$$= \left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-} + \left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-} + \left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] + \left[\arctan\frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}\right] = \arctan\frac{32}{27} - 2\pi$$

## 内容小结

**1.** 反常积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{array}\right\}$ —— 常义积分的极限

**2.** 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p\leq 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1 \end{cases} \quad (a>0)$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q\geq 1 \end{cases}$$

**说明: (1)** 有时通过换元 , 反常积分和常义积分可以互相转化 .

例如 , $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \quad$ (令 $x = \sin t$)

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \qquad (\text{令 } t = x-\frac{1}{x})$$

**(2)** 当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间, 分别讨论每一区间上的反常积分.

(3) 有时需考虑主值意义下的反常积分. 其定义为

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (c\text{为瑕点}, a<c<b)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right]$$

**注意:** 主值意义下反常积分存在不等于一般意义下反常积分收敛 .

**备用题** 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$，并求其值.

**解:** $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\overset{\text{令 } t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\int_{+\infty}^0\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$