线性代数——先修课

第三章 矩 阵

§3.5 初等矩阵

内容提要

- 初等矩阵的引入与概念
- 初等矩阵的性质
- 初等矩阵与矩阵初等变换的关系
- 分块矩阵的初等变换

回顾：矩阵的三种初等变换.

- **倍乘**变换：用一个非零数乘k到某一行(列)

$$kr_i \to r_i \ (k \neq 0)$$
$$kc_i \to c_i \ (k \neq 0)$$

- **倍加**变换：将一行(列)的k倍加到另一行(列)

$$kr_i + r_j \to r_j$$
$$kc_i + c_j \to c_j$$

- **对换**变换：交换两行(列)的位置

$$r_i \leftrightarrow r_j$$
$$c_i \leftrightarrow c_j$$

矩阵的三种初等行变换和三种初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

矩阵的初等变换是线性代数课程中最重要的算法和工具之一.

- **来源：** 线性方程组的三种同解变换.
- **作用：** (1) 将矩阵化为阶梯形矩阵；(2) 化简行列式
- **表示方法：** 若矩阵A经过初等变换变为矩阵B，则

$$A \xrightarrow[r_s \leftrightarrow r_t]{kr_i + r_j} B \quad 或 \quad A \to B$$

但一定不能表示为 $A = B$

- **问题：** 如果矩阵 A 经过一次初等变换变为矩阵B, 那么 A 与 B 之间究竟有何种关系?

（一） 初等矩阵的概念

定义1 单位矩阵I经过一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵.

(1) 单位矩阵 I 的第 i 行乘以非零数 k (倍乘行变换)所得矩阵, 记为 $E_i(k)$. 它同时也是 I 的第 i 列乘以非零数 k (倍乘行变换) 所得矩阵.

$$I_n \xrightarrow[(kc_i)]{kr_i} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} := E_i(k)$$

称为: 倍乘矩阵

(2) 将单位矩阵 I 第 i 行的 k 倍加到第 j 行, 所得矩阵记为 $E_{i,j}(k)$.

它也是是将 I 第 j 列的 k 倍加到第 i 列，所得的矩阵.

$$\begin{array}{rc} \begin{array}{r} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccccc} & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & & \end{array} \end{array} := E_{i,j}(k)$$

称为: 倍加矩阵

注意：$E_{i,j}(k)$中k的位置为(j,i), 即$a_{ji}=k$.

(3) 交换单位矩阵 I 的第 i 行与第 j 行，所得的矩阵记为 $E_{i,j}$.

它也是交换 I 的第 i 列与第 j 列，所得的矩阵.

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix}\text{第 } i \text{ 行}\\ \updownarrow \\ \text{第 } j \text{ 行}\end{matrix}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} := E_{i,j}
\\
\text{第 } i \text{ 列} \longleftrightarrow \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}$$

$E_{i,j}$ 称为: 对换矩阵

（二）初等矩阵的性质

1、初等矩阵的转置

$$E_i(k)^T = E_i(k).$$

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{i,j}^T$$

故，倍乘矩阵、对换矩阵转置不变(对称阵)，转置后仍为初等矩阵.

设 $i<j$，则

$$E_{i,j}(k)=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & \text{(i,j)位置} & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & k & \cdots & 1 \\ & \text{(j,i)位置} & & & \ddots \\ & & & & & 1\end{bmatrix}=E_{j,i}(k)^T$$

故，倍加矩阵转置仍为倍加矩阵，但下标顺序交换.

2、初等矩阵的行列式

易知 $\left|E_i(k)\right| = k \neq 0;\quad \left|E_{i,j}(k)\right| = 1,$ 而

$$
\left|E_{i,j}\right| = \begin{vmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
& & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
& & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)} a_{11}\cdots a_{i-1,i-1}a_{ij}a_{i+1,i+1} \\
&\qquad \cdots a_{j-1,j-1}a_{ji}a_{j+1,j+1}\cdots a_{nn} \\
&= (-1)\times 1\times\cdots\times 1 = -1
\end{aligned}
$$

3、初等矩阵的分块表示

设 $\vec{e}_i=(0,\cdots 0,\underbrace{1}_{\boxed{\text{第}i\text{位}}},0,\cdots,0)^T$ 为列矩阵(列向量), 则

$$I_n=(\vec{e}_1,\cdots,\underline{\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_j},\cdots,\vec{e}_n),\quad \text{或}\quad I_n=I_n^T=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^T\\ \vdots\\ \vec{e}_i^T\\ \vdots\\ \vec{e}_n^T\end{bmatrix}$$

从而，由初等矩阵的定义，有

$$E_{i,j}=E_{i,j}^T=(\vec{e}_1,\cdots,\underline{\vec{e}_j,\cdots,\vec{e}_i},\cdots,\vec{e}_n),$$

$$E_i(k) = E_i(k)^T = (\vec{e}_1,\cdots,k\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_n), \quad (k \neq 0).$$

$$E_{i,j}(k) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{e}_i^{\,T} \\ \vdots \\ k\vec{e}_i^{\,T} + \vec{e}_j^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{e}_m^{\,T} \end{bmatrix} = (\vec{e}_1,\cdots,k\vec{e}_j + \vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_j,\cdots,\vec{e}_n)$$

（三）初等矩阵与初等变换的关系

回顾问题： 如果矩阵 A 经过一次初等变换变为 B，那么 A 与 B 之间究竟有何种关系?

考虑用初等矩阵分别左(右)乘任意(可乘)矩阵.

$$\underbrace{E_i(k)}_{m\times m}\overbrace{A}^{m\times n}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&k&&\\&&&&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

故，左乘倍乘矩阵 $E_i(k)$，相当于对 A 的第 i 行做k倍的倍乘变换.

反过来，矩阵A右乘倍乘矩阵，得

$$\overset{m\times n}{A}\underset{n\times n}{E_i(k)}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

故，右乘倍乘矩阵$E_i(k)$，相当于对 A 的第 i 列做k倍的倍乘变换. 综上

$$A\xrightarrow{kr_i}B \quad\Leftrightarrow\quad B=E_i(k)A; \qquad A\xrightarrow{kc_i}B \quad\Leftrightarrow\quad B=AE_i(k).$$

设 $\vec{e}_i=(0,\cdots 0,\underset{\boxed{\text{第}i\text{位}}}{1},0,\cdots,0)^T$， 则 $I_n=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_j,\cdots,\vec{e}_n)$,

$E_{i,j}=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_j,\cdots,\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_n)$.

于是， $A\,I_n=A(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_n)=(A\vec{e}_1,\cdots,A\vec{e}_i,\cdots,A\vec{e}_n)=A$

故， $A\vec{e}_i$ 等于A的第 i 列.

又因为， $I_mA=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}A\end{bmatrix}=A$ 故， $\vec{e}_i^{\,T}A$ 等于A的第 i 行.

考虑，矩阵A左乘对换矩阵，得

$$\underset{m\times m}{E_{i,j}}\underset{m\times n}{A}=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_j^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_j^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

故，左乘对换矩阵 $E_{i,j}$ ，相当于对 A 的第 i,j 行做对换变换.

反过来，矩阵A右乘对换矩阵，得

$$\underset{m\times n}{A}\underset{n\times n}{E_{i,j}} = A(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_j,\cdots,\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_n) = (A\vec{e}_1,\cdots,A\vec{e}_j,\cdots,A\vec{e}_i,\cdots,A\vec{e}_n)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

故，右乘对换矩阵 $E_i(k)$，相当于对 A 的第 i, j 列做对换变换. 综上

$$\boxed{A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \quad \Leftrightarrow \quad B = E_{i,j}A; \qquad A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B \quad \Leftrightarrow \quad B = AE_{i,j}.}$$

考虑，矩阵A左乘倍加矩阵，得

$$E_{i,j}(k)_{m\times m}A_{m\times n}=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}\\ \vdots\\ k\vec{e}_i^{\,T}+\vec{e}_j^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}A\\ \vdots\\ (k\vec{e}_i^{\,T}+\vec{e}_j^{\,T})A\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,T}A\\ \vdots\\ \vec{e}_i^{\,T}A\\ \vdots\\ \underline{k\vec{e}_i^{\,T}A+\vec{e}_j^{\,T}A}\\ \vdots\\ \vec{e}_m^{\,T}A\end{bmatrix}$$

故，左乘倍加矩阵$E_{i,j}(k)$，相当于对A做第i行的k倍加到第j行上的倍加变换.

反过来，矩阵A右乘倍加矩阵，得

$$A_{m\times n}E_{i,j}(k)_{n\times n}=A(\vec{e}_1,\cdots,k\vec{e}_j+\vec{e}_i,\cdots,\vec{e}_j,\cdots,\vec{e}_n)$$
$$=(A\vec{e}_1,\cdots,A(k\vec{e}_j+\vec{e}_i),\cdots,A\vec{e}_j,\cdots,A\vec{e}_n)$$
$$=(A\vec{e}_1,\cdots,\underline{kA\vec{e}_j+A\vec{e}_i},\cdots,A\vec{e}_j,\cdots,A\vec{e}_n)$$

故，右乘倍加矩阵$E_{i,j}(k)$，相当于对A做第j列的k倍加到第i列上的倍加变换. 即

$$A\xrightarrow{kr_i+r_j}B\iff B=E_{i,j}(k)A;\qquad A\xrightarrow{kc_j+c_i}B\iff B=AE_{i,j}(k).$$

左乘:从左到右做倍加.

右乘:从右到左做倍加.

例1 用初等矩阵与初等变换的关系，再次验证行列式的性质

验证: (1) 逐行保数乘 $A \xrightarrow{kr_i} B \Leftrightarrow B = E_i(k)A;$

$\Rightarrow |B| = |E_i(k)| \cdot |A| = k|A|;$

(2) 交错性 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}A;$

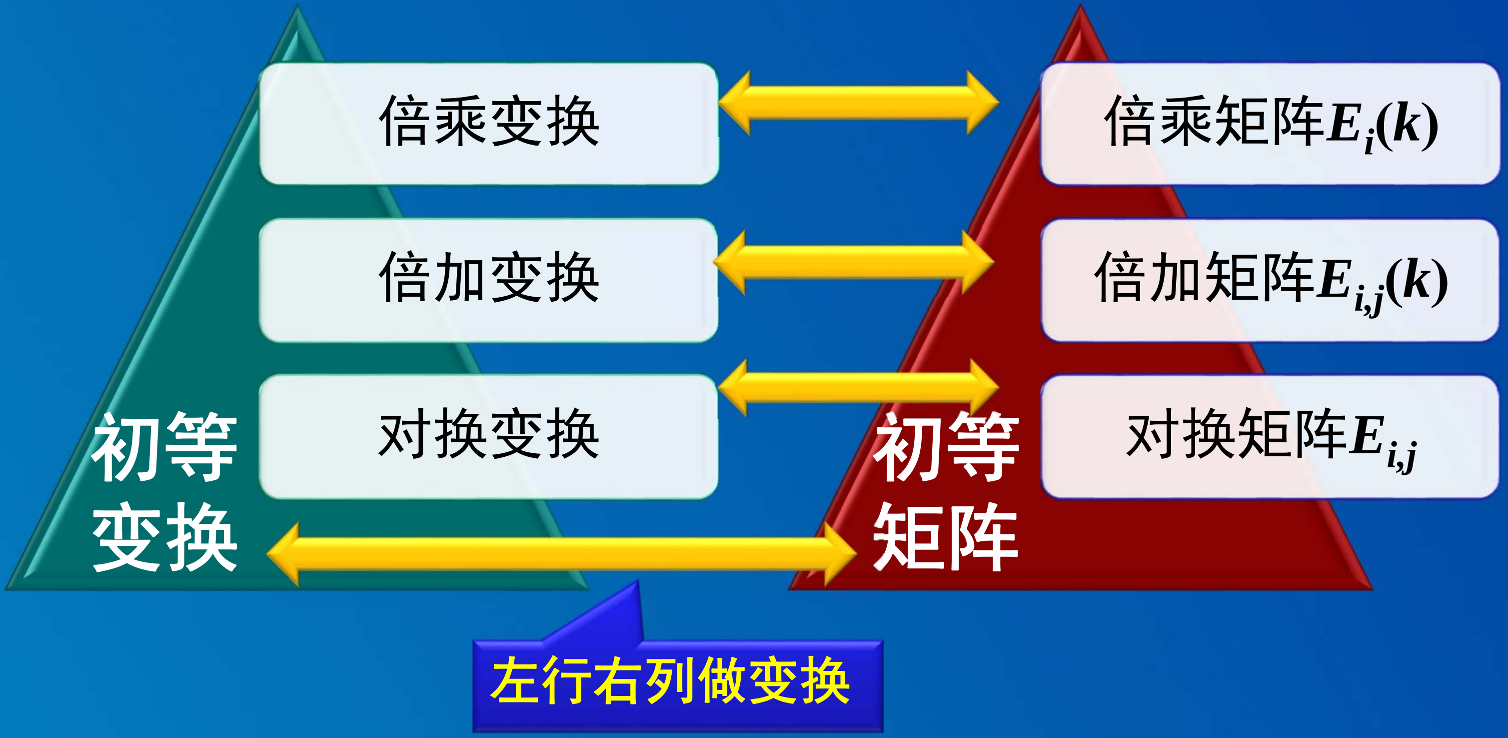
$\Rightarrow |B| = |E_{i,j}| \cdot |A| = (-1)|A| = -|A|;$

(3) 倍加不变性 $A \xrightarrow{kr_i + r_j} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}(k)A;$

$\Rightarrow |B| = |E_{i,j}(k)| \cdot |A| = 1 \cdot |A| = |A|;$

定理1 用初等矩阵左乘矩阵A，相当于对A进行一次相应的初等行变换.

用初等矩阵右乘矩阵A, 相当于对A进行一次相应的初等列变换.



（四） 分块矩阵的初等变换

对分块矩阵同样可以引进初等变换和初等矩阵的概念. 我们只以分成4块的情况简单解释. 设

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

定义2 下面三种针对分块矩阵 M 的变形，统称为<u>分块矩阵的初等变换</u>:

(1) **倍乘**：用特定矩阵 P 左(右)乘 M 的某一“行 (列)”；

(2) **倍加**：用矩阵 Q 乘 M 的某“行 (列)”加到另外一“行 (列)”；

(3) **对换**：交换 M 的两“行”或“列”.

注：
- 这里要假定运算满足可行性原则.
- 加引号的“行”，“列”表示由子块组成的行、列.
- 对应一般倍乘矩阵的$k\neq 0$, 分块情形的“特定”为什么要求？

定义3 将单位矩阵分块成准对角形矩阵 $I=\mathrm{diag}(I_s, I_t)$, 对其进行一次初等变换, 得到的分块矩阵称为<u>分块初等矩阵</u>:

(1) 分块倍乘矩阵: $\begin{bmatrix} P & O \\ O & I_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & P \end{bmatrix}$ (其中P为特定方阵);

(2) 分块倍加矩阵: $\begin{bmatrix} I_s & O \\ Q & I_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & Q \\ O & I_t \end{bmatrix}$;

(3) 分块对换矩阵: $\begin{bmatrix} O & I_t \\ I_s & O \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & I_s \\ I_t & O \end{bmatrix}$.

定理2 对分块矩阵进行一次初等行(列)变换, 相当于给它左(右)乘以一个相应的分块初等矩阵.

证明: 验证行变换

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} I & O \\ O & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ PC & PD \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & Q \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} QC+A & QD+B \\ C & D \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} I & O \\ Q & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ QA+C & QB+D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}.$$

验证列变换：

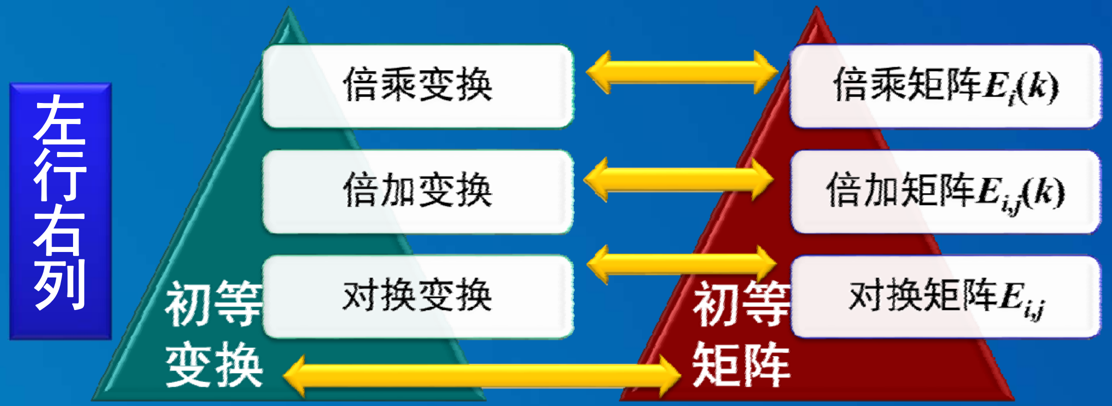
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AP & B \\ CP & D \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ O & P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & BP \\ C & DP \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ Q & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} QB+A & B \\ QD+C & D \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Q \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & AQ+B \\ C & CQ+D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}.$$

本讲小结

- 初等矩阵及其性质：单位阵$I \xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 初等矩阵
  - 行列式，转置，按行按列分块表示
- 初等矩阵与矩阵初等变换的关系



分块倍乘矩阵

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

“特定”矩阵是什么要求？

- 分块矩阵的初等矩阵与初等变换