

第三节 三重积分

第九章

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

一、三重积分的概念

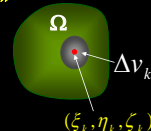
引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质, 密度函数为 $\mu(x, y, z) \in C$, 求分布在 Ω 内的物质的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

可得

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$$



定义. 设 $f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega$, 若对 Ω 作任意分割: $\Delta v_k (k=1, 2, \dots, n)$, 任意取点 $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$, 下列“乘积和式”极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k \stackrel{\text{记作}}{=} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的**三重积分**.

dv 称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $dx dy dz$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta) V$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x, y, z) \geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数, 通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1. 投影法 (“先一后二”)

方法2. 截面法 (“先二后一”)

方法3. 三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\Omega: \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

细长柱体微元(线密度-单位长度质量)的质量为

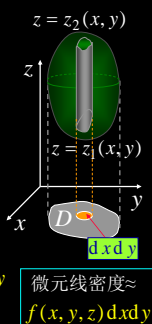
$$\left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$= \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

$$\stackrel{\text{记作}}{=} \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$



微元线密度 $\approx f(x, y, z) dx dy$

方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$\Omega: \begin{cases} (x, y) \in D_z \\ a \leq z \leq b \end{cases}$$

以 D_z 为底, dz 为高的柱形薄片质量为

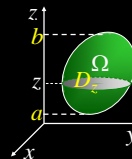
$$\left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$= \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

$$\stackrel{\text{记作}}{=} \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$



面密度(单位面积物质的质量) \approx

$$f(x, y, z) dz$$

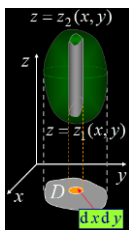
线密度-单位长度质量

单位长度(高, 取1)×底面积($dxdy$)

=体积= $dxdy$

质量(线密度)=体积($dxdy$)×密度 $f(x, y, z)$
= $f(x, y, z)dxdy$

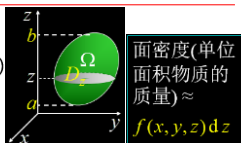
微元线密度≈
 $f(x, y, z)dxdy$



单位面积1×高 dz =体积

体积($1 \times dz$)×密度($f(x, y, z)$)

=质量(面密度)= $f(x, y, z) dz$



方法3. 三次积分法

设区域 $\Omega: \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D: \begin{cases} y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果, 把二重积分化成二次积分即得:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

投影法

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{|f(x, y, z)| + f(x, y, z)}{2} - \frac{|f(x, y, z)| - f(x, y, z)}{2} \\ &= f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

均为非负函数

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dxdy$$

方法3. “三次积分”

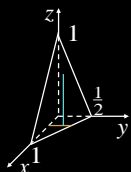
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域.

解: $\Omega: \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x - 2y \\ 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

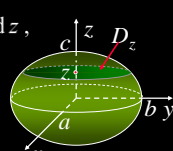
$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{48} \end{aligned}$$



例2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$,

其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解: $\Omega: \begin{cases} -c \leq z \leq c \\ D_z: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \end{cases}$



用“先二后一”

$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dxdy \\ &= 2 \int_{-c}^c z^2 \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3 \end{aligned}$$

2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 将 x, y 用极坐标 ρ, θ 代替, 则 (ρ, θ, z) 就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

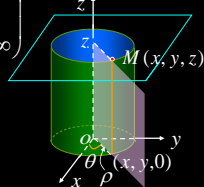
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

坐标面分别为

$\rho = \text{常数}$ \longrightarrow 圆柱面

$\theta = \text{常数}$ \longrightarrow 半平面

$z = \text{常数}$ \longrightarrow 平面



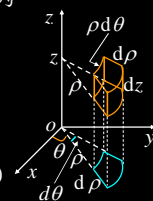
如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$

因此 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$

$$= \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

其中 $F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$



适用范围:

- 1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单;
- 2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

例3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ 其中 Ω 为由柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 及平面 $z = 0, z = a (a > 0), y = 0$ 所围成半圆柱体.

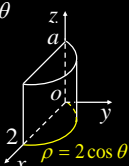
解: 在柱面坐标系下 $\Omega: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq a \end{cases}$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} z \rho^2 d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^a z dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho$$

$$= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{9} a^3$$

$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$



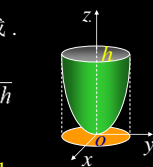
例4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{1 + x^2 + y^2}$, 其中 Ω 由抛物面 $x^2 + y^2 = 4z$ 与平面 $z = h (h > 0)$ 所围成.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega: \begin{cases} \frac{\rho^2}{4} \leq z \leq h \\ 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{h} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{h}} \int_{\frac{\rho^2}{4}}^h \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\rho dz$$

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1 + \rho^2} (h - \frac{\rho^2}{4}) d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4} [(1 + 4h) \ln(1 + 4h) - 4h]$$



3. 利用球坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 其柱坐标为 (ρ, θ, z) , 令 $|\overrightarrow{OM}| = r$, $\angle ZOM = \varphi$, 则 (r, θ, φ) 就称为点 M 的球坐标.

直角坐标与球面坐标的关系

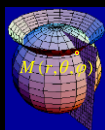
$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

坐标面分别为

$r = \text{常数}$ \longrightarrow 球面

$\theta = \text{常数}$ \longrightarrow 半平面

$\varphi = \text{常数}$ \longrightarrow 锥面



$$\rho = r \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

因此有

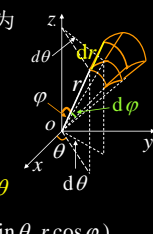
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

其中 $F(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$

适用范围:

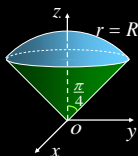
- 1) 积分域表面用球面坐标表示时方程简单;
- 2) 被积函数用球面坐标表示时变量互相分离.



例5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\therefore \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr$$

$$= \frac{1}{5} \pi R^5 (2 - \sqrt{2})$$

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

例6. 求曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ ($a > 0$) 所围立体体积.

解: 由曲面方程可知, 立体位于 xoy 面上部, 且关于 xoz yoz 面对称, 并与 xoy 面相切, 故在球坐标系下所围立体为

$$\Omega: 0 \leq r \leq a \sqrt[3]{\cos \varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

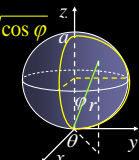
利用对称性, 所求立体体积为

$$V = \iiint_{\Omega} dv$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 dr$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3$$

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$



内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$dx dy dz$	积分区域多由坐标面
柱面坐标系	$\rho d\rho d\theta dz$	围成;
球面坐标系	$r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$	被积函数形式简洁, 或 变量可分离.

*** 说明:**

三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式**:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} F(u, v, w) |J| du dv dw$$

对应雅可比行列式为 $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$

思考与练习

1. 将 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 用三次积分表示, 其中 Ω 由六个平面 $x=0, x=2, y=1, x+2y=4, z=x, z=2$ 所围成, $f(x, y, z) \in C(\Omega)$.

$$\text{提示: } \Omega: \begin{cases} x \leq z \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 dx \int_1^{2-\frac{1}{2}x} dy \int_x^2 f(x, y, z) dz$$

2. 设 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$$

提示: 利用对称性

$$\text{原式} = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dz$$

$$= 0$$

奇函数

3. 设 Ω 由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围成, 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dv$.

提示:

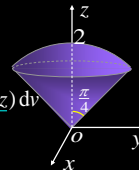
$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) dv$$

利用对称性

$$= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

用球坐标

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r^4 dr = \frac{64}{5} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \pi$$

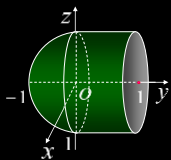


备用题 1. 计算 $I = \iiint_{\Omega} y \sqrt{1-x^2} dx dy dz$, 其中 Ω 由 $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}, x^2+z^2=1, y=1$ 所围成.

分析: 若用“先二后一”, 则有

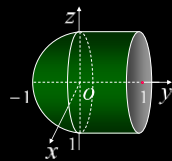
$$I = \int_{-1}^0 y dy \iint_{D_y} \sqrt{1-x^2} dx dz + \int_0^1 y dy \iint_{D_y} \sqrt{1-x^2} dx dz$$

计算较繁! 采用“三次积分”较好.



解: Ω 由 $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}, x^2+z^2=1, y=1$ 所围, 故可表为

$$\Omega: \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y dy$$

$$= \dots = \frac{28}{45}$$

思考: 若被积函数为 $f(y)$ 时, 如何计算简便?

2. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2+y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 由 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2), z=1, z=4$ 围成.

解: $I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz + 5 \iiint_{\Omega} xy^2 \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$

利用对称性

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz + 0$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 21\pi$$

