习题课 重积分的计算及应用

第九章

一、 重积分计算的基本方法

二、重积分计算的基本技巧

三、重积分的应用

一、重积分计算的基本方法

—— 累次积分法

1. 选择合适的坐标系

使积分域多为坐标面(线)围成;

被积函数用此坐标表示简洁或变量分离.

2. 选择易计算的积分序

积分域分块要少, 累次积分易算为妙 .

3. 掌握确定积分限的方法

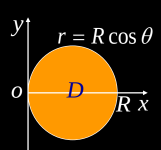
$\begin{cases}\text{图示法}\\ \text{列不等式法}\end{cases}$ (从内到外: 面、线、点)

例1. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

其中D 为圆周 $x^2+y^2=Rx$所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D:\begin{cases} 0\le r\le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$



$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

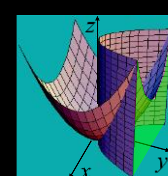
$$=\frac{1}{3}R^3(\pi-\frac{4}{3})$$

例2. 把积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分,

其中Ω由曲面$z=x^2+y^2$, $y=x^2$及平面 $y=1$, $z=0$

所围成的闭区域 .

提示: 积分域为



$$\Omega:\begin{cases} 0\le z\le x^2+y^2\\ x^2\le y\le 1\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

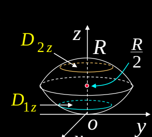
例3. 计算积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是两个球

$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$

($R>0$)的公共部分.

提示: 由于被积函数缺 x , y ,

利用"**先二后一**" 计算方便 .



$$\text{原式}=\int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{1z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{2z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{R/2} z^2\cdot\pi(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R} z^2\cdot\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

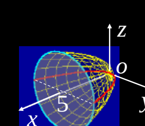
$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

例4. 计算三重积分 $\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$是由

xoy平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面

$x=5$ 所围成的闭区域 .

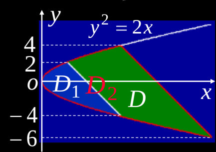
提示: 利用柱坐标 $\begin{cases} x=x\\ y=r\cos\theta\\ z=r\sin\theta\end{cases}$



$$\Omega:\begin{cases}\frac{1}{2}r^2\le x\le 5\\ 0\le r\le\sqrt{10}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}} r^3\,\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x=\frac{250}{3}\pi$$

例5. 计算积分 $\iint_D (x+y)d\sigma$，其中D 由 $y^2=2x$，$x+y=4$，$x+y=12$ 所围成 .



提示: 如图所示 $D=D_2\setminus D_1$，$f(x,y)=x+y$ 在 D_2 内有定义且连续，所以

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_2}(x+y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-6}^{4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\,\mathrm{d}x-\int_{-4}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}(x+y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=543\frac{11}{15}$$

二、重积分计算的基本技巧

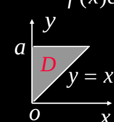
1. 交换积分顺序的方法
2. 利用对称性或重心公式简化计算
3. 消去被积函数绝对值符号 $\left\{\begin{array}{l}\text{分块积分法}\\ \text{利用对称性}\end{array}\right.$
4. 利用重积分换元公式

例6. 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$$

提示: 左端积分区域如图,

交换积分顺序即可证得.



例7. 求 $\iiint_\Omega \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域 .

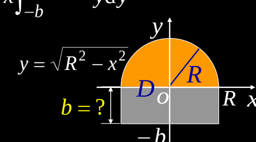
提示: 被积函数在对称域 Ω上关于 z 为奇函数，利用对称性可知原式为 0.

例8. 在均匀的半径为R的圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，使整个薄片的重心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片的另一边长度应为多少?

提示: 建立坐标系如图. 由对称性知 $\bar{y}=0$，即有

$$0=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}R^3-Rb^2$$



由此解得 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}R$

例9. 计算二重积分 $I=\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中:

(1) D为圆域 $x^2+y^2\le 1$;

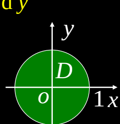
(2) D由直线 $y=x$，$y=-1$，$x=1$ 围成 .

解: (1) 利用对称性.

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$



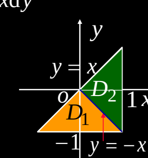
(2) 积分域如图: 添加辅助线 $y=-x$，将D 分为D_1，D_2，利用对称性，得

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1}xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2}xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+0+0$$

$$=\frac{2}{3}$$



例10. 计算二重积分 $\iint_D (5x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是由曲线 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 所围成的平面域 .

解: $I=5\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

积分区域 $(x+1)^2+(y-2)^2\le 3^2$

其形心坐标为: $\bar{x}=-1,\ \bar{y}=2$

面积为: $A=9\pi$

$=5\cdot\bar{x}A+3\cdot\bar{y}A$

$=[5\cdot(-1)+3\cdot 2]A=9\pi$

形心坐标

$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

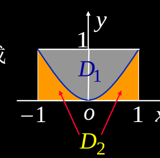
$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例11. 计算二重积分

(1) $I=\iint_D \operatorname{sgn}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$

(2) $I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 为圆域 $x^2+y^2\le 1$在第一象限部分.

解: (1) 作辅助线 $y=x^2$ 把与D 分成 D_1, D_2两部分, 则



$I=\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

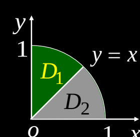
$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

(2) 提示:

$I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

作辅助线 $y=x$ 将D 分成 D_1 , D_2 两部分



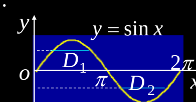
$=2\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\cdots=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$

说明: 若不用对称性, 需分块积分以去掉绝对值符号.

例12. 交换下列二次积分的顺序:

$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$



解: 如图所示

$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$

$=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

$-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

例13. 设 $f(u)\in C,\ f(0)=0,\ f'(0)$存在, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}F(t)$, 其中 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

解: 在球坐标系下

$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r$

$=4\pi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r$

$F(0)=0$

利用洛必达法则与导数定义, 得

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$

三、重积分的应用

1. 几何方面

面积 (平面域或曲面域) , 体积 , 形心

2. 物理方面

质量, 转动惯量, 质心, 引力

3. 其它方面

证明某些结论等

例14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

证: 左端 $=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D [f^2(x)+f^2(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D:\begin{cases}a\le x\le b\\ a\le y\le b\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right)$$

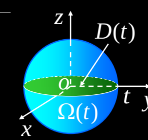
$$=\frac{b-a}{2}\left(\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b f^2(y)dy\right)$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx = \text{右端}$$

例15. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$



其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$. (03考研)

解: (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t)=2\frac{t f(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$, 故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 问题转化为证 $t>0$ 时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$$

即证 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2>0$

因 $\quad g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增, 又因 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故有

$\quad g(t)>g(0)=0 \quad (t>0)$

因此 $t>0$ 时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$.

例16. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解法1 利用“先二后一”计算.

$$D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^c \mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$

***解法2** 利用三重积分换元法. 令

$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\varphi$

则

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi,\quad \Omega':\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}|J|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=abc\iiint_{\Omega'} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc$$