第12章　微分方程

一、内容精要

（一）主要定义

1.微分方程及微分方程的阶

含有自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程叫做微分方程；未知函数是一元函数的微分方程叫做常微分方程；未知函数是多元的微分方程叫做偏微分方程.

微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的阶.

2.微分方程的解

若将函数代入微分方程使其成为恒等式，则称为该方程的一个解；根据是显函数还是隐函数分别称之为显式解与隐式解；不被通解包含的解称为奇异解；若解中含有任意常数，当彼此独立的任意常数的个数正好等于常微分方程的阶数时，称该解为通解（或一般解）；不含有任意常数而能被通解所包含的解叫做特解.

3.定解条件

用来确定通解中任意常数的的条件称为定解条件，最常用的定解条件是初始条件.

（二）主要结论

1.如果函数 y_1与y_2是二阶齐次 线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的两个解，则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$也是它的解，其中C_1,C_2是任意常数.

2.若 y_1 与 y_2 是上述方程的两个线性无关解, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是该方程的通解.

3.若 y^* 是二阶非线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

的一个特解，而 Y 是它所对应的齐次方程的通解，则

$$y=y^*+Y$$

就是该非齐次方程的通解.

4.若在3中的方程的右边是几个函数的和，如

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

且 y_1与y_2^* 分别为非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解,则 $y^*=y_1^*+y_2^*$ 就是原方程的特解.

对于高阶线性方程也有与上述定理相对应的定理.

5.可分离变量的方程

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0,$$

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx=-\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy+C$$

其中 $N_1(x), M_2(y)\neq 0$.

6.齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+C,$$

其中　$u=\frac{y}{x}$.

7.一阶非齐次线性微分方程

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

的通解为　$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C].$

8.伯努利方程

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n\quad (n\neq 0,1)$$

的通解为

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C].$$

9.全微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,\quad (\text{满足}\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y})$$

的通解为　$u(x,y)=C.$

其中　$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy.$

10.可降阶的高阶方程及其通解

(1) $y^{(n)} = f(x)$

对方程两边连续积分 n 次，便可得到其含有n个任意常数的通解.

(2) 不显含 y 的二阶方程 $y'' = f(x, y')$.

设$y' = p(x)$,则$y'' = \dfrac{dp}{dx}$,代入方程有

$$p' = f(x, p).$$

积分后解之得 $p = \varphi(x, C_1)$

再积分 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$,则原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

(3) 不显含 x 的二阶方程

$$y'' = f(y, y').$$

设$y' = p(x)$,则$y'' = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$,代入方程有

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

解之得 $p = \varphi(y, C_1)$

再积分 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$,则原方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

11.二阶常系数线性方程

(1) 二阶常系数齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = 0.$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$		微分方程的通解
两个不相等的实特征根	$r_1 \neq r_2$,	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$,
两相等特征根	$r_1 = r_2$,	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$,
两共轭虚根	$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$,	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

(2) n 阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y + p_n = 0,$$

根据特征方程的根，可按下表写出通解形式.

特征方程的根	方程通解中对应的项
单实根 r	Ce^{rx},
k重实根 r	$e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$,
一对虚根 $r_{1,2}=\alpha \pm \beta$ i	$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$,
一对k 重虚根 $r_{1,2}=\alpha \pm \beta$ i	$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$.

(3) 二阶常系数非齐次线性方程及其特解形式

设 y^* 是方程 $y'' + py' + qy = f(x)$的一个特解，Y 是其对应齐次方程的通解，则

$$y = y^* + Y.$$

是它的通解, 下面给出上述非齐次线性方程的特解形式.

(I) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$型.

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根为 r_1, r_2.	方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$ 的特解形式
当$\lambda \neq r_1, r_2$,	$y^* = Q_m(x) e^{\lambda x}$,
当$\lambda = r_1, \lambda \neq r_2$,	$y^* = x Q_m(x) e^{\lambda x}$,
当$\lambda = r_1 = r_2$,	$y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$.

(II) $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x) \cos wx + P_n(x) \sin wx]$型.

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根为 r_1, r_2	方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x) \cos wx + P_n(x) \sin wx]$
当$r_{1,2} \neq \lambda \pm wi$	$y^* = e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x) \cos wx + R_m^{(2)}(x) \sin wx]$,
当$r_{1,2} = \lambda \pm wi$	$y^* = x e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x) \cos wx + R_m^{(2)}(x) \sin wx]$.

其中 $m = \max(l, n)$.

＊（三）结论补充

1. $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$

的通解是 $x=e^{-\int P(y)dy}[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C]$.

2.欧拉方程

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

可以通过变换 $x=e^t$,

用 D 表示 $\frac{d}{dt}$,则将方程写成算子形式，

$$x^k f^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$$

3.简单的常系数线性微分方程组的求解步骤

（1） 消去方程组中一些未知函数及其导数，得到只含有一个未知函数的高阶常系数线性微分方程.

（2） 解上述高阶方程，得到满足该方程的未知函数.

（3）把得到的函数代入原方程，求出其余的未知函数.

4.$P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ 的简单积分因子的求法

（1）如果 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})$与 y 无关，则有

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dx}.$$

（2）如果 $\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})$与 x 无关，则

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dy}.$$

一般地，若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$有积分因子$\mu(x,y)$,则 $\mu(x,y)$ 应该满足一阶偏微分方程

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\mu.$$

5. 可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}).$$

当$c = c_1 = 0$时，就是齐次方程;

当c , c_1中至少有一个不为零时，总可以做变换，使之转化为齐次方程;

当$ab_1-a_1b\neq 0$时, 令$x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$;

当$ab_1-a_1b=0$时，可令变换 $z=ax+by$.

6.若方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$中的 $p(x)$和 $q(x)$在区间 $[-R, R]$ $(R>0)$上可展成幂级数, 则该方程在此区间上有幂级数解

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, x\in(-R,R).$$

其中系数a_0, a_1, a_2, …;a_n, …可用待定系数法求出.

7.设$f(x, y)$, $f_y(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的某邻域内连续，则存在x_0的一个邻域，在该邻域内，定解问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

存在唯一解.此结论亦为柯西-毕卡(Cauchy-Picard)定理.

8.若$y_1=\varphi(x)$是微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的一个解，则该微分方程的通解为

$$y=\varphi(x)[C_1+C_2\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{\varphi^2(x)}dx].$$