例1 设$f(x)$连续，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(x)dx$，求$f(x)$的非积分表达式.

解 设$\int_0^1 f(x)dx=k$，则 $f(x)=x+2k$，

两边积分得：

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x+2k)dx$$

$$k=\int_0^1 (x+2k)dx$$

$$k=-\frac{1}{2}.$$

于是 $f(x)=x-1$.

例2 设$f(x)$适合 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)dx$，求$f(x)$.

解 设$\int_0^1 f^2(x)dx=c$，则

$$f(x)=3x-c\sqrt{1-x^2},$$

$$c=\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1 (3x-c\sqrt{1-x^2})^2dx$$

$$c=\frac{2}{3}c^2-2c+3$$

$$\therefore c_1=3, c_2=\frac{3}{2}.$$

$$\therefore f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$$

或$f(x)=3x-\dfrac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$.

例3 设$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$，求$f(x)$.

解 设$\int_0^1 f(x)dx=a$，$\int_0^2 f(x)dx=b$，则

$f(x)=x^2-bx+2a$，两边分别积分：

$$a=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^2-bx+2a)dx=\frac{1}{3}-\frac{b}{2}+2a,$$

$$b=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^2-bx+2a)dx=\frac{8}{3}-2b+4a,$$

解之 $a=\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{4}{3}$.

故 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

例4 计算$\int_{-2}^2 \max\{1,x^2\}dx$.

解 显然 $\max\{x^2,1\}=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ x^2, & 1\le |x|\le 2\end{cases}$，

于是 $\int_{-2}^2 \max\{1,x^2\}dx=\int_{-2}^{-1}x^2dx+\int_{-1}^1 dx+\int_1^2 x^2dx$.

$$=\frac{20}{3}.$$

或用偶函数的性质

$$\text{原式}=2\left[\int_0^1 dx+\int_1^2 x^2dx\right]=\frac{20}{3}.$$

例5 若 $f'(e^x)=xe^x$，且$f(1)=0$，计算 $\int_1^2 [2f(x)+\frac{1}{2}(x^2-1)]dx$.

解 设 $e^x=t$，则$x=\ln t$，$f'(t)=t\ln t$，

$$f(t)=\int t\ln t dt=\frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{1}{4}t^2+C,$$

$$\because f(1)=0, \therefore C=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}.$$

$$\text{原式}=\int_1^2 [2(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}(x^2-1)]dx$$

$$=\int_1^2 x^2\ln x dx=\frac{8\ln 2}{3}-\frac{7}{9}.$$

例6 写出函数 $f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|dt\ (0\le x\le 2)$ 的非积分表达式，并计算$\int_0^2 f(x)dx$.

解 当 $0\le x\le 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}.$$

当 $1\le x\le 2$ 时，$f(x)=\int_0^1 t(x-t)dt=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dt=\int_0^1 (\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3})dx+\int_1^2 (\frac{1}{2}x-\frac{1}{3})dx=\frac{7}{12}.$$

例 7 计算

$$\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})\frac{\pi}{n^2}+(1+\frac{2}{n})\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})\frac{(n-1)\pi}{n^2}].$$

解 原式 $=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n})+$

$$\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2})$$

$$=\pi\int_0^1 xdx+\pi\int_0^1 x^2dx$$

$$=\frac{5\pi}{6}.$$

例8 求 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

解 为去掉根号，设 $x=\tan t$,则

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos tdt}{1+4\sin^2 t}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(2\sin t)}{1+(2\sin t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)dt\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

例9 求 $\int_{e^{-2}}^{e^2}\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx.$

解

原式 $\underline{\underline{\text{设}\sqrt{x}=e^t}}\int_{-1}^{1}\frac{2|t|2e^{2t}dt}{e^t}$

$$=4\int_0^1 te^tdt+4\int_{-1}^0(-te^t)dt$$

$$=8-\frac{8}{e}.$$

例10 求 $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx.$

解 用分部积分法

原式= $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ \Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$$=3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\int_0^3\frac{1+(\sqrt{x})^2-1}{(\sqrt{x})^2+1}d(\sqrt{x})$$

$$=3\cdot\frac{\pi}{3}-\sqrt{x}\ \Big|_0^3+\arctan\sqrt{x}\ \Big|_0^3$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

例11 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx.$

解 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xd\tan x$

$$=\sec x\tan x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\sec xdx$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx+\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 xdx$$

故 原式= $\frac{1}{2}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$

例12 若 $f(\pi)=1$,且 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=3$, 求 $f(0)$.

解 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx$

$$=\int_0^{\pi}[f''(x)\sin x-f(x)(\sin x)'']dx$$

$$=\int_0^{\pi}[\sin xf'(x)-f(x)(\sin x)']'dx$$

$$=[\sin xf'(x)-\cos xf(x)]\ \Big|_0^{\pi}$$

$$=f(\pi)+f(0)$$

$\therefore f(\pi)+f(0)=3$， 又 $f(\pi)=1$

$\therefore f(0)=2$

例13 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x^3+5x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 注意到 $\frac{2x^3+5x}{\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，

$$\text{原式}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x^3+5x}{\sqrt{1-x^2}}dx+2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=0+4\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\pi}{3}.$$

例14 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 xdx}{1+e^x}.$

解 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}]\sin^4 xdx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx$$

$$=\frac{3\pi}{16}.$$

例15 求 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

解 原式$=-\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}\frac{d(x^{-5})}{\sqrt{1+x^{-5}+(x^{-5})^2}}$

$$\overset{u=x^{-5}}{=\!=\!=}\frac{1}{5}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\ln(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2})\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{5}\ln(1+\frac{2}{\sqrt{3}}).$$

例16 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$

解 原式$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+\frac{1}{2})}{[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}$

$$\overset{u=x+\frac{1}{2}}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{[u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}$$

$$\overset{u=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t}{=\!=\!=}\frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt$$

$$=\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt\quad=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

例 17 当 $x>0$ 且 n 为正整数，$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}tdt$，则 $f(x)\le\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$

证 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$，令$f'(x)=0$，

则 $x=0$，$x=1$，$x=k\pi$ (k是≥1的整数)，

由于 $f(0)=0$，

$$f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}tdt$$

$$\le\int_0^1(t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

$$f(k\pi)=f(1)+\int_1^{k\pi}(t-t^2)\sin^{2n}tdt\le f(1).$$

综上所述，$f(1)$ 是$f(x)$ 的最大值，于是

$$f(x)\le f(1)\le\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

例18 若$f(x)$在$[0,1]$上连续可微，$f(0)=0$，$f(1)=1$，则

$$\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\ge\frac{1}{e}.$$

证 只要注意到 $f'(x)-f(x)=e^x[e^{-x}f(x)]'$，则

$$\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx=\int_0^1e^x|[e^{-x}f(x)]'|dx$$

$$\ge\int_0^1|[e^{-x}f(x)]'|dx$$

$$\ge\int_0^1[e^{-x}f(x)]'dx$$

$$=e^{-x}f(x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{e}.$$

例19 若$f(x)$在$[0，1]$上可导, 且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$, 试证：存在$\zeta\in(0,1)$, 使得 $f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)=0$.

证 设 $\varphi(x)=x f(x)$, 则 $\varphi(1)=f(1)$. 又由积分中值定理, $\exists\eta\in(0,\frac{1}{2})$，则 $\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=\eta f(\eta)\cdot\frac{1}{2}$.

$$\eta f(\eta)=\varphi(\eta)=f(1)=\varphi(1),$$

使用罗尔定理，则

$$\exists\zeta\in(\eta,1)\subset(0,1)，\text{使得}$$

$$\varphi'(\zeta)=0,$$

即
$$f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)=0.$$

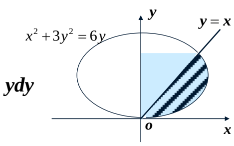
例 20 直线 $y=x$ 将椭圆 $x^2+3y^2=6y$分成两部分，求较小的一部分图形的面积.

解 直线$y=x$ 与椭圆$x^2+3y^2=6y$相交于(0，0)，(3/2，3/2),于是面积

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{6y-3y^2}-y)dy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-(y-1)^2}dy-\int_0^{\frac{3}{2}}ydy$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{4}.$$



例21 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与x轴围成图形的面积.

解 显然 x 轴，即 $y=0$ 为其水平渐进线，所求面积为

$$A=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin xdx+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}e^{-x}\sin xdx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-k\pi}(1+e^{-\pi})$$

$$=(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\pi})\cdot\frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

例22 求由曲线 $y=e^x, y=\sin x(0\leq x\leq 1)$ 所围成的图形绕x轴旋转一周的旋转体的体积.

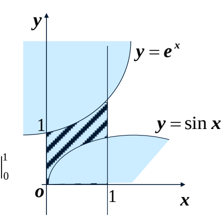
解 如图所示

$$V=\pi\int_0^1[(e^x)^2-\sin^2 x]dx$$

$$=\pi\int_0^1 e^{2x}dx-\pi\int_0^1\sin^2 xdx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\pi(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4})\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi e^2}{2}+\frac{\pi\sin 2}{4}-\pi.$$



例 23 求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}dt$ 的全长.

解 由于 $\cos t$ 非负，则 $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$,

即要求 $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 的曲线全长为

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$=4\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4.$$