第三节 高阶导数

第二章

一、高阶导数的概念

引例：变速直线运动 $s = s(t)$

速度 $v = \frac{ds}{dt}$， 即 $v = s'$

加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt})$

即 $a = (s')'$

定义. 若函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 可导, 则称 $f'(x)$的导数为 $f(x)$的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$y'' = (y')' \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，依次类推，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作

$$y''',\quad y^{(4)},\quad \cdots,\quad y^{(n)}$$

或 $$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\quad \cdots,\quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

例1. 设 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$

$y'' = 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$

依次类推，可得

$$y^{(n)} = n!a_n$$

思考: 设 $y = x^\mu$ (μ为任意常数), 问 $y^{(n)} = ?$

$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

例2. 设 $y = e^{ax}$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, $y''' = a^3e^{ax}$, $\cdots$,

$y^{(n)} = a^ne^{ax}$

特别有: $\boxed{(e^x)^{(n)} = e^x}$

例3. 设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \frac{1}{1+x}$, $y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $y''' = (-1)^2\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$,

$\cdots$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

规定 $0! = 1$

$y' = -\frac{1}{1-x}$

$y'' = -\frac{1}{(1-x)^2}$

思考: $y = \ln(1-x)$, $y^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

例4. 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$

$= \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2})$

$y''' = \cos(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2})$

一般地， $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$

类似可证:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

例5. 设 $y = e^{ax}\sin bx$ (a, b为常数), 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$

$= e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$

$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,[ae^{ax}\sin(bx+\varphi) + be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$

例6. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n =$ **2** .

分析: $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \ge 0 \\ 2x^3, & x < 0 \end{cases}$

$\because f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x} = 0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x} = 0$

$\therefore f'(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \ge 0 \\ 6x^2, & x < 0 \end{cases}$

又 $f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x} = 0$

$f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x} = 0$

$\therefore f''(x) = \begin{cases} 24x, & x \ge 0 \\ 12x, & x < 0 \end{cases}$

但是 $f'''_-(0) = 12$, $f'''_+(0) = 24$, $\therefore f'''(0)$ 不存在 .

二、高阶导数的运算法则

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都有 n 阶导数 , 则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ (C为常数)

3. $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$

莱布尼兹(Leibniz) 公式

例7. $y = x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解: 设 $u = e^{2x}$, $v = x^2$, 则

$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \quad (k = 1, 2, \cdots, 20)$

$v' = 2x$, $v'' = 2$,

$v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 20)$

代入莱布尼兹公式 , 得

$y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}\cdot x^2 + 20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x + \frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot 2$

$= 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$

例8. 设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y' = 1$

用莱布尼兹公式求 n 阶导数

$(1+x^2)\,y^{(n+1)} + n\cdot 2x\,y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-1)} = 0$

令 $x = 0$, 得 $y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)\,y^{(n-1)}(0) \quad (n = 1, 2, \cdots)$

由 $y(0) = 0$, 得 $y''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 0$, $\cdots$, $y^{(2m)}(0) = 0$

由 $y'(0) = 1$, 得 $y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!\,y'(0)$

即 $y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m(2m)!, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$

内容小结

高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

如, $\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$

$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

(4) 利用莱布尼兹公式

思考与练习

1. 如何求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\frac{1-x}{1+x}$ **解:** $y=-1+\frac{2}{1+x}$

$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

(2) $y=\frac{x^3}{1-x}$ **解:** $y=-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}$

$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $n\ge 3$

(3) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$

提示: 令 $\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$

$A=(x-2)\cdot$原式$\Big|_{x=2}=1$

$B=(x-1)\cdot$原式$\Big|_{x=1}=-1$

$\therefore\ y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

(4) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解: $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

2. (填空题) (1) 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$, 则

$f^{(n)}(2)=$ $\underline{n!\frac{\sqrt{2}}{2}}$

提示: $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$

各项均含因子 ($x-2$)

$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$ $+\cdots\cdots\cdots$

(2) 已知 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 $n\ge 2$ 时 $f^{(n)}(x)=\underline{n![f(x)]^{n+1}}$

提示: $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2f'(x)=3![f(x)]^4$

……

3. 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出 $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$.

解: $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$

$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$

同样可求 $\frac{d^3x}{dy^3}$

备用题

设 $y=x^2f(\sin x)$ 求 y'', 其中 f 二阶可导.

解: $y'=2x\cdot f(\sin x)+x^2\cdot f'(\sin x)\cdot\cos x$

$y''=(2xf(\sin x))'+(x^2f'(\sin x)\cos x)'$

$=2f(\sin x)+2x\cdot f'(\sin x)\cdot\cos x$

$+2xf'(\sin x)\cos x+x^2f''(\sin x)\cos^2 x$

$+x^2f'(\sin x)(-\sin x)$

$=2f(\sin x)+(4x\cos x-x^2\sin x)f'(\sin x)$

$+x^2\cos^2 xf''(\sin x)$