第9章　重积分

一、内容提要

（一）主要定义

1. $f(x, y)$ 是定义在 xOy面上有界闭区域D上的有界函数，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在，称此极限为 $f(x, y)$ 在D上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \quad 或 \quad \iint_D f(x,y)dxdy$$

极限式中 $\Delta\sigma_i$ 为将D任意分成n个小区域中第i个小区域的面积，点(ξ_i, η_i) 为第i个小区域上任取的一点，λ 为n个小区域 $\Delta\sigma_i$ (i = 1,2,3, ⋯)中的最大直径.

2. $f(x, y, z)$是定义在空间有界闭区域 Ω上的有界函数，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

存在，称此极限为$f(x, y, z)$在Ω 上的三重积分，记作

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \quad 或 \quad \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

（二）主要结论

1. f，g在D上可积，则二重积分有如下性质：

(1) $\iint_D d\sigma = A$ （A为D的面积）

(2) $\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$ （$D = D_1 + D_2$）

(3) $\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma$ （k为常数）

(4) $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma$

(5) 在D上若有$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

特殊地有

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$$

(6) $mA \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MA$

其中M,m分别是 $f(x, y)$在D上的最大与最小值, A是D的面积

(7)(二重积分中值定理) 设 $f(x, y)$在有界闭区域D上连续, 则至少存在一点$(\xi, \eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A \quad (A为D的面积)$$

注：三重积分有与之完全平行的性质

2. 化重积分为累次积分计算公式：

（1）二重积分

当 $f(x, y)$在有界闭区域D上连续，有

① $D: a\le x\le b, c\le y\le d$. 若$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = [\int_a^b \varphi(x)dx][\int_c^d \psi(y)dy]$$

② D：$a\le x\le b$，$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

③ D：$\varphi_1(y)\le x\le \varphi_2(y)$，$c\le y\le d$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

④ D：$\alpha\le\theta\le\beta$，$r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

特别地, 当$r_1(\theta)=0$时,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

当$\alpha=0, \beta=2\pi, r_1(\theta)=0$时,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

（2）三重积分

当 $f(x, y, z)$在有界闭区域 Ω 上连续时

① Ω：$a\le x\le b$, $c\le y\le d$, $p\le z\le q$,

若$f(x,y,z)=\varphi(x)\psi(y)\omega(z)$, 则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$

$$=\left[\int_a^b \varphi(x)dx\right]\left[\int_c^d \psi(y)dy\right]\left[\int_p^q \omega(z)dz\right]$$

② D为Ω 在xOy面上的投影区域，以D的边界为准线作母线平行于z轴的柱面，将 Ω 的边界曲面分成上、下两部分

$z=z_1(x,y)$ 及 $z=z_2(x,y)$ 且 $z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$

D: $a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

③D: $\alpha\le\theta\le\beta$，$r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$,

其中D与Ω的关系同 ①，则有柱坐标变换公式

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}rdr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,dz$$

④ Ω: $\alpha\le\theta\le\beta$，$\varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\ r_1(\theta,\varphi)\le r\le r_2(\theta,\varphi)$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(r,\theta)}^{r_2(r,\theta)}f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr$$

3. 重积分的应用

(1)空间立体的体积:

设V是以连续曲面$z=f(x,y)$ ($f(x,y)\ge 0$)为顶，以xOy面上区域D为底的曲顶柱体的体积，则有

$$V=\iint_D f(x,y)d\sigma \quad 或 \quad V=\iiint_\Omega dv$$

其中Ω是该立体所占有的空间区域

(2)曲面面积

设光滑曲面$\sum$的方程为$z=z(x,y)$，则$\sum$的面积A为

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \quad ;$$

若曲面$\sum$的方程为$x=x(y,z)$，则

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz \quad ;$$

若曲面$\sum$的方程为$y=y(z,x)$，则

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dzdx$$

其中D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}分别是$\sum$在xOy, yOz, zOx平面上的投影区域

（三）结论补充

1. 连续函数$z=f(x,y)$关于y为奇函数，积分域D关于x轴对称，则有 $\iint_D f(x,y)d\sigma=0$

2. 连续函数$z=f(x,y)$关于y为偶函数，积分域D关于x轴对称，D_1 表示D的位于x 轴上方的部分，则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma$$

3. 连续函数$u=f(x,y,z)$关于z为奇函数，积分域Ω关于xOy面对称，则有 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=0$

4. 连续函数$u=f(x,y,z)$关于z为偶函数，积分域Ω关于xOy面对称，Ω_1表示Ω的位于xOy面上方部分，则有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)dv$$