

第四章

不定积分

微分法: $F'(x) = (?)$
积分法: $(?)' = f(x)$ } 互逆运算

第一节

第四章

不定积分的概念与性质

- 一、原函数与不定积分的概念
- 二、基本积分表
- 三、不定积分的性质

一、原函数与不定积分的概念

引例: 一个质量为 m 的质点, 在变力 $F = A \sin t$ 的作用下沿直线运动, 试求质点的运动速度 $v(t)$.

根据牛顿第二定律, 加速度 $a(t) = \frac{F}{m} = \frac{A}{m} \sin t$
因此问题转化为: 已知 $v'(t) = \frac{A}{m} \sin t$, 求 $v(t) = ?$

定义 1. 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

如引例中, $\frac{A}{m} \sin t$ 的原函数有 $-\frac{A}{m} \cos t, -\frac{A}{m} \cos t + 3, \dots$

问题:

1. 在什么条件下, 一个函数的原函数存在?
2. 若原函数存在, 它如何表示?

定理 1. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数. (下章证明)

初等函数在定义区间上连续



初等函数在定义区间上有原函数

定理 2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)$ 的所有原函数都在函数族 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 内.

证: 1) $\because (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

$\therefore F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数

2) 设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数, 即

$$\Phi'(x) = f(x)$$

又知

$$F'(x) = f(x)$$

$$\therefore [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

故 $\Phi(x) = F(x) + C_0$ (C_0 为某个常数)

即 $\Phi(x) = F(x) + C_0$ 属于函数族 $F(x) + C$.

定义 2. $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)dx$, 其中

\int — 积分号; $f(x)$ — 被积函数;
 x — 积分变量; $f(x)dx$ — 被积表达式.

若 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

例如, $\int e^x dx = e^x + C$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

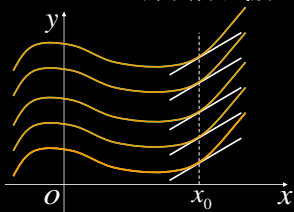
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

C 称为积分常数
不可丢!

不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的 **积分曲线**.

$\int f(x) dx$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例1. 设曲线通过点 $(1, 2)$, 且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解: $\because y' = 2x$

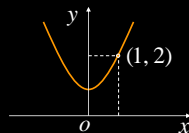
$$\therefore y = \int 2x dx = x^2 + C$$

所求曲线过点 $(1, 2)$, 故有

$$2 = 1^2 + C$$

$$\therefore C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$



例2. 质点在距地面 x_0 处以初速 v_0 垂直上抛, 不计阻力, 求它的运动规律.

解: 取质点运动轨迹为坐标轴, 原点在地面, 指向朝上, 质点抛出时刻为 $t = 0$, 此时质点位置为 x_0 , 初速为 v_0 .

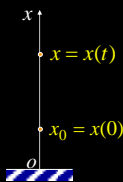
设时刻 t 质点所在位置为 $x = x(t)$, 则

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad (\text{运动速度})$$

再由此求 $x(t)$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g \quad (\text{加速度})$$

先由此求 $v(t)$



先求 $v(t)$. 由 $\frac{dv}{dt} = -g$, 知

$$v(t) = \int (-g) dt = -gt + C_1$$

由 $v(0) = v_0$, 得 $C_1 = v_0$, 故

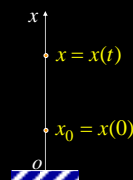
$$v(t) = -gt + v_0$$

再求 $x(t)$. 由 $\frac{dx}{dt} = -gt + v_0$, 知

$$x(t) = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

由 $x(0) = x_0$, 得 $C_2 = x_0$, 于是所求运动规律为

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$



从不定积分定义可知:

$$(1) \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x) \quad \text{或} \quad d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$$

$$(2) \int F'(x) dx = F(x) + C \quad \text{或} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

二、基本积分表

利用逆向思维

$$(1) \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 为常数})$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \begin{matrix} x < 0 \text{ 时} \\ (\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x} \end{matrix}$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \text{或} \quad -\arccot x + C$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{或} \quad -\arccos x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(12) \int e^x dx = e^x + C$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(13) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(14) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(15) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

例3. 求 $\int \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$.

解: 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$
 $= -3x^{-\frac{1}{3}} + C$

例4. 求 $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$.

解: 原式 $= \int \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$

三、不定积分的性质

$$1. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0)$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

推论: 若 $f(x) = \sum_{i=1}^n k_i f_i(x)$, 则

$$\int f(x) dx = \sum_{i=1}^n k_i \int f_i(x) dx$$

例5. 求 $\int 2^x (e^x - 5) dx$.

解: 原式 $= \int [(2e)^x - 5 \cdot 2^x] dx$
 $= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} - 5 \frac{2^x}{\ln 2} + C$
 $= 2^x \left[\frac{e^x}{\ln 2 + 1} - \frac{5}{\ln 2} \right] + C$

例6. 求 $\int \tan^2 x dx$.

解: 原式 $= \int (\sec^2 x - 1) dx$
 $= \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + C$

例7. 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解: 原式 $= \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx$
 $= \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$
 $= \arctan x + \ln|x| + C$

例8. 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解: 原式 $= \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2} dx$
 $= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2} dx$
 $= \int (x^2-1) dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$
 $= \frac{1}{3} x^3 - x + \arctan x + C$

内容小结

1. 不定积分的概念

- 原函数与不定积分的定义
- 不定积分的性质
- 基本积分表

2. 直接积分法:

利用**恒等变形**、**积分性质**及**基本积分公式**进行积分.

常用恒等变形方法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{分项积分} \\ \text{加项减项} \\ \text{利用三角公式, 代数公式, } \cdots \end{array} \right.$

思考与练习

1. 证明 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$, $e^x \operatorname{ch} x$ 都是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$ 的原函数.

提示: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数, 则

$$\int x^2 f(\ln x) dx = \frac{-1}{2} x^2 + C$$

提示: $f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$

$$f(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$$

3. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数, 则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = \frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C$$

提示: 已知 $f'(x) = e^{-x}$

$$\therefore f(x) = -e^{-x} + C_0$$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C_0$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$$

4. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 (B).

(A) $1 + \sin x$; (B) $1 - \sin x$;

(C) $1 + \cos x$; (D) $1 - \cos x$.

提示: 已知 $f'(x) = \sin x$

求 (?)' = $f(x)$

即 (?)'' = $\sin x$

或由题意 $f(x) = -\cos x + C_1$, 其原函数为

$$\int f(x) dx = -\sin x + C_1 x + C_2$$

5. 求下列积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}; \quad (2) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

提示:

$$(1) \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$(2) \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ = \sec^2 x + \csc^2 x$$

6. 求不定积分 $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx \\ &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C \end{aligned}$$

7. 已知 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = Ax\sqrt{1-x^2} + B \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

求 A, B .

解: 等式两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= A\sqrt{1-x^2} - \frac{Ax^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{B}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(A+B)-2Ax^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$