第5章　不定积分

在微分学中, 我们主要考虑, 对给定的函数$F(x)$, 求其导数$F'(x)$ 或微分$dF(x)$. 对于给定的函数$f(x)$, 要求找出$F(x)$, 使$F'(x)=f(x)$, 或$dF(x)=f(x)dx$, 这就是不定积分要完成的任务.

§ 5.1 原函数与不定积分的概念

5.1.1 原函数的概念和性质

首先我们给出原函数的定义.

定义 5.1　原函数

设$f(x)$ 是定义在区间I (有限或无穷) 内的已知函数,如果存在函数$F(x)$, 使得对区间I 内任一点x, 恒有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx$$

则称$F(x)$ 是$f(x)$ 在区间I 内的一个原函数.

例 5.1　因为$(\sin x)'=\cos x$, 所以$\sin x$ 是$\cos x$ 在$\mathbf{R}$ 上的一个原函数.

显然$(\sin x+3)'=(\sin x)'+(3)'=\cos x$, 所以$\sin x+3$ 也是$\cos x$ 在$\mathbf{R}$ 上的一个原函数.

又如当$x\in(0,+\infty)$ 时, 因为$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sqrt{x}+C)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 所以$\sqrt{x}$ 和$\sqrt{x}+C$ 都是$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 的原函数.

问题: 1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在? (存在定理) 2. 若原函数存在, 它如何表示? (不定积分)

第一个问题可以由下面定理回答(下一章证明).

定理 5.1 原函数存在

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上必存在可导函数 $F(x)$, 使对 $\forall x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$.

性质 5.1 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则对任何常数 C, $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.

证明 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则对任何常数 C, 有 $[F(x)+C]' = f(x)$,

即对任何常数 C, 函数 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数.

注: 若 $f(x)$ 有一个原函数, 则 $f(x)$ 就有无穷多个原函数.

性质 5.2 若 $F(x), G(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的两个原函数, 则存在某个常数 C, 使得 $G(x) = F(x)+C$.

证明 若 $F(x), G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F'(x) = G'(x) = f(x)$, 即 $[F(x)-G(x)]' = 0$. 所以 $F(x)-G(x) = C$ (C 为某个常数). 这表明 $F(x)$ 与 $G(x)$ 之间只相差一个常数.

我们现在可以回答问题二:

定理 5.2 全体原函数

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 内的一个原函数,则集合 $\{F(x)+C \mid C \in \mathbf{R}\}$ 是由 $f(x)$ 的原函数全体构成的集合, 其中 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的原函数的一般表达式.

5.1.2 不定积分的概念

我们用不定积分表示原函数的全体.

定义 5.2 不定积分

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)$ 的原函数的一般表达式 $F(x)+C$ (C 为任意常数) 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记作 $\int f(x)dx$, 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, C 称为积分常数, $\int$ 称为积分号(它是一种运算符号).

注 5.1 若$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数, 则$F(x)+C$ 是$f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

注 5.2 $f(x)$ 的不定积分$\int f(x)dx$ 是函数族, 它可表示$f(x)$ 的全体原函数.

例 5.2 求$\int x^2dx$

解 因为$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, 所以$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

例 5.3 求$\int a^x dx (a > 0, a \neq 1)$

解 因为$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$, 所以$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

例 5.4 求$\int \frac{1}{x}dx$

解 当$x > 0$ 时, 因为$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以在$(0, +\infty)$ 内, $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$;

当$x < 0$ 时, 因为$(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$, 所以在$(-\infty, 0)$ 内, $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$.

把上面的结果合起来, 可写作$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

例 5.5 求$\int \frac{-1}{1+x^2}dx$

解 因为$(-\arctan x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, 所以$\int \frac{-1}{1+x^2}dx = -\arctan x + C$, 又因为$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, 所以$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccot} x + C_1$,

事实上, 由于$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$,

所以$\int \frac{-1}{1+x^2}dx = \operatorname{arccot} x + C_1 = -\arctan x + C_1 + \frac{\pi}{2} = -\arctan x + C$.

同一函数的不定积分的结果形式可能不同, 但它们最多相差一个常数.

例 5.6 设曲线通过点$(1, 2)$, 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线方程.

解 设曲线方程为$y = f(x)$, 根据题意知$\frac{dy}{dx} = 2x$,

即$f(x)$ 是$2x$ 的一个原函数. $\because \int 2xdx = x^2 + C, \therefore f(x) = x^2 + C$,

由曲线通过点$(1, 2) \Rightarrow C = 1$, 所求曲线方程为$y = x^2 + 1$.

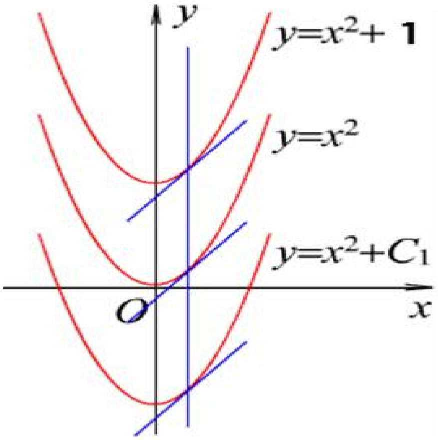

图 5.1 函数$f(x)=2x$ 的积分曲线

注 5.3 不定积分的几何意义:

若$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数, 则称$F(x)$ 的图形是$f(x)$ 的积分曲线.

因为$F(x)+C$ 都是$f(x)$ 的原函数, 每一个C 对应一条确定的积分曲线, 所以$\int f(x)dx$ 的图形为$f(x)$ 的一族积分曲线$y=F(x)+C$, 称为积分曲线族. 在每一条积分曲线在横坐标相同的点x 处的切线彼此平行.

5.1.3 不定积分的性质

积分运算和导数运算是互逆关系.

性质 5.3 (1) $\left[\int f(x)dx\right]'=\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ 或$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$ 先积后导, 不积不导.

(2) $\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或$\int dF(x)=F(x)+C$ 先导后积，加上常数.

当记号“$\int$ ”与“d ”连在一起时, 或抵消, 或抵消后差一个常数, 即导数运算与不定积分运算是互逆的.

性质 5.4 设函数$f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

性质 5.5 设函数$f(x)$与$g(x)$的原函数存在, 则

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

推论 5.1 若函数$f_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的原函数都存在, $k_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为非零常数, 且$f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$,

$$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx$$

为了有效地计算不定积分, 必须掌握一些基本积分公式. 由于积分法与微分法互为逆运算, 故有以下积分结果.

(1) $\int kdx = kx + C$ (k 是常数);

(2) $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$;

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos xdx = \sin x + C$;

(7) $\int \sin xdx = -\cos x + C$;

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = \tan x + C$;

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan xdx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$; (12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例 5.7 计算下列不定积分

(1) $\int (e^x - 3\cos x)\, dx = \int e^x dx - 3\int \cos xdx = e^x - 3\sin x + C$

(2) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

(3) $\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} + C = \frac{a^x e^x}{1+\ln a} + C$

(4) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx = \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$

(5) $\int \tan^2 x dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + C$

(6) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C.$

(7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$ (巧用1)

(8) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{9-9x^2}}\right) dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}\, dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 3\arctan x - \frac{2}{3}\arcsin x + C$

(9) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2} dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)+1}{1+x^2} dx$

$$= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

例 5.8 设$f(x) = e^{|x|}$, 求$\int f(x)dx$.

解 $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, 因为$f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内连续, 所以$f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内必存在原函数$F(x)$.

当$x \geq 0$ 时, $\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C_1$,

当$x < 0$ 时, $\int f(x)dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_2$, 即有$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, & x \geq 0 \\ -e^{-x} + C_2, & x < 0 \end{cases}$.

又$F'(x) = f(x)$, 故$F(x)$ 也在$(-\infty, +\infty)$ 上连续, 特别地$F(x)$ 在$x = 0$ 处连续.

由$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = F(0)$, 得$C_1 = C_2 - 1$, 则

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_2 - 1, & x \geq 0 \\ -e^x + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

§ 5.2 换元积分法

5.2.1 第一类换元法(凑微分法)

问题: $\int \cos 2x dx = ?$

解: 方法一: 由于$\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \cos 2x$, 故$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

方法二: 利用复合函数, 设置中间变量. 令$t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$,

故$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

2. 在一般情况下:

设$F'(u)=f(u), u=\varphi(x)$ 可导, 则有$dF[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 且$\int f(u)du=F(u)+C$,

$\therefore \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C=F(u)+C|_{u=\varphi(x)}=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$, 由此可得换元法定理

定理 5.3 第一类换元公式(凑微分法)

设$f(u)$ 具有原函数, $u=\varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

注 5.4 此定理中, 将被积表达式中的dx 看作是变量x 的微分, 从而有微分等式$\varphi'(x)dx=d\varphi(x)=du$, 这一步我们称为凑微分. 所以第一类换元法也称为凑微分法.

注 5.5 应用第一类换元法的过程:

$$\int g(x)dx \overset{\text{变形}}{=} \int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx \overset{\text{凑微分}}{=} \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \overset{\text{令}u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du$$

$$=F(u)+C \overset{\text{代回原变量}}{=} F[\varphi(x)]+C.$$

注 5.6 求积分时常用的几个微分性质:

$$(1)\ ad\varphi(x)=d[a\varphi(x)];\ (2)\ d\varphi(x)=d[\varphi(x)\pm b];\ (3)\ \varphi'(x)dx=d\varphi(x)$$

例 5.9 求$\int\frac{1}{2+3x}dx$.

解 因为$\frac{1}{2+3x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2+3x}\cdot(2+3x)'$,

$$\text{故}\int\frac{1}{2+3x}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{2+3x}\cdot(2+3x)'dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}\ln|u|+C=\frac{1}{3}\ln|2+3x|+C$$

例 5.10 求$\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

解 分析: 联想公式$\int \frac{du}{1+u^2} = arctanu + C.$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}$, 令$u = \frac{x}{a}$, 则有$du = \frac{1}{a}dx$,

$$\text{原式} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

例 5.11 求$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解 分析: 联想公式$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$.

$$\text{原式} = \int \frac{1}{a}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \overset{u=\frac{x}{a}}{=} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

凑微分的方法熟练后, 也可以不展示换元的过程.

例 5.12 求$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$.

解 分析: 注意到被积函数的分母是平方差, 可以利用裂项法将被积函数拆成两个容易积分的简单函数.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right] \\ &= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}d(x-a) - \int \frac{1}{x+a}d(x+a)\right] \\ &= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\end{aligned}$$

例 5.13 求$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx$.

解 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx = \int\left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right]d(1+x)$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C$$

例 5.14 求$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx = \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}d\left(\frac{x-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3} + C$$

例 5.15　求$\int \frac{1}{x\ln x}dx$.

解　$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}d(\ln x) \xlongequal{u=\ln x} \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$.

例 5.16　求$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

解　$\because \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2}$，

$\therefore \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int e^{x+\frac{1}{x}}d\left(x+\frac{1}{x}\right) = e^{x+\frac{1}{x}} + C$

例 5.17　求$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx$.

解　$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}\,d\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = \ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C$$

例 5.18　求$\int \frac{1}{1+\cos x}dx$.

解　方法一$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \sec^2\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2} + C$.

方法二$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x)$$

$$= -\cot x + \csc x + C$$

注: 事实上, $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$.

例 5.19　求$\int \cos^3 x dx$.

解　$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)$

$$= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

类似可得, $\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

例 5.20　求$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

解　$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)^2 d(\sin x) \\
&= \int \left(\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x\right) d(\sin x) \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C
\end{aligned}
$$

例 5.21 求$\int \sin^2 x dx$.

解 $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right)$

$$
= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C
$$

类似可得, $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

例 5.22 求$\int \cos 3x \cos 2x dx$.

解 因为$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$,

$$
\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)
$$

$$
\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.
$$

注 5.7 (1) 对形如$\int \sin^m x \cos^n x dx$ 的积分:

(i) 若m, n 中至少有一个为奇数, 如$n = 2k+1$, 则

$$
\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x d\sin x \\
&= \int \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^k d(\sin x) = \int u^m \left(1 - u^2\right)^k du
\end{aligned}
$$

(ii) 若m, n 均为偶数, 则可用倍角公式降幂次$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

(2) 形如$\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ 可用积化和差公式.

例 5.23 求$\int \tan x dx$.

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C.$

注: 类似可推出, $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$.

例 5.24 求$\int \csc x dx$.

$$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$$

解 方法一
$$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + C$$

注: 三角函数恒等变形$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$.

方法二$\int \csc x dx = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx$

$$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{1}{\csc x - \cot x} d(\csc x - \cot x)$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + C$$

方法三$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$$= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x} d(\cos x)$$

令$u = \cos x$, 则原式 $= -\int \frac{1}{1-u^2} du = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

注: 类似地, 可推出$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)dx}{\sec x + \tan x} = \int \frac{1}{\sec x + \tan x} d(\sec x + \tan x)$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

例 5.25 求$\int \tan^3 x \cdot sec^5 x dx$.

解 $\int \tan^3 x \cdot \sec^5 x dx = \int \tan^2 x \cdot \sec^4 x \cdot \tan x \sec x dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^4 x d(\sec x) = \int \left(\sec^6 x - \sec^4 x\right) d(\sec x)$$

$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

例 5.26 设$f'\left(\sin^2 x\right)=\cos^2 x$, 求$f(x)$.

解 令$u=\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x=1-u$,

故$f'(u)=1-u$, 因此$f(u)=\int(1-u)du=u-\frac{1}{2}u^2+C$，

所以$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C$.

注 5.8 凑微分的过程就像是在做多位数的竖式除法，在多位数的竖式除法里，我们需要找一个恰好的数，使得这个数与除数的乘积等于或接近被除数的某几位的值。这个过程需要非常熟悉乘法运算的结果才能很快地找到这个数。凑微分也是如此，必须非常熟悉求导运算的结果才能很快的凑出来。

扩充自己的函数库：

(1) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

(2) $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$

(4) $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+C$

(5) $\int \cot x dx=\ln|\sin x|+C$

(6) $\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(7) $\int \csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$

在利用凑微分法求不定积分时，以下的凑微分情形是经常出现的：

(1) $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)(a\neq 0)$;

(2) $\int f\left(e^x\right)e^x\,dx=\int f\left(e^x\right)de^x$;

(3) $\int f\left(x^\mu\right)x^{\mu-1}\,dx=\frac{1}{\mu}\int f\left(x^\mu\right)dx^\mu(\mu\neq 0)$;

(4) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\,dx=\int f(\ln x)d\ln x$;

(5) $\int f(\cos x)\sin x\,dx=-\int f(\cos x)d\cos x$

(6) $\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d\sin x$;

(7) $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int f(\arcsin x)d\arcsin x$;

(8) $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int f(\arctan x)d\arctan x$;

(9) $\int f(\tan x)\sec^2 x\,dx=\int f(\tan x)d\tan x$;

(10) $\int f(\cot x)\csc^2 x\,dx=-\int f(\cot x)d\cot x$;

(11) $\int f\left(\sqrt{1+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int f\left(\sqrt{1+x^2}\right)d\sqrt{1+x^2}$

例 5.27

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{1+\ln x} d \ln x$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \int \frac{1}{x^2+3x+5} d\left(x^2+3x+5\right)$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{1+x^3} d\left(x^3+1\right)$$

$$\int e^x \sin\left(e^x\right) dx = \int \sin\left(e^x\right) de^x$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int \sin \sqrt{t} d \sqrt{t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x)}{\sqrt{1-(5x)^2}}$$

$$\int e^{4x^2+\ln x} dx = \frac{1}{8} \int e^{4x^2} d\left(4x^2\right)$$

$$\int \frac{1}{e^x-1} dx = \int \frac{1-e^x+e^x}{e^x-1} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tan \sqrt{1+x^2} dx = \int \tan \sqrt{1+x^2} d\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

5.2.2 第二类换元法(变量代换)

问题: $\int x^5 \sqrt{1-x^2} dx =?$

解决方法: 改变中间变量的设置方法.

令$x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t dt$,

$$\int x^5 \sqrt{1-x^2} dx = \int (\sin t)^5 \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sin^5 t \cos^2 t dt$$

再应用“凑微分”即可求出结果.

定理 5.4 第二类换元法

设$x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数, 并且$\psi'(t)\neq 0$, 又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数$F(t)$, 则

$$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}=F\left[\psi^{-1}(x)\right]+C,$$

其中$\psi^{-1}(x)$ 是$X=\psi(t)$ 的反函数.

证明　由题设知$F'(t)=f[\psi(t)]\psi'(t)$, 令$G(x)=F\left[\psi^{-1}(x)\right]$, 则

$$G'(x)=\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\frac{1}{\psi'(t)}=f[\psi(t)]=f(x)$$

即$G(x)$ 为$f(x)$ 的一个原函数. 从而结论得证.

三角代换

例 5.28　求$\int\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$.

解　令$x=a\sin t, dx=a\cos t dt$,$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\cdot a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt$$

$$=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\text{sint cost}+C$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

所以$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$

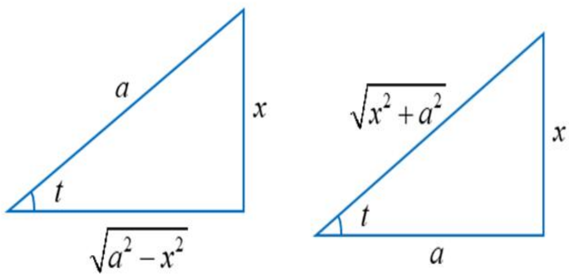

图 5.2　三角代换

例 5.29　求$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0)$.

解　利用$1+\tan^2 t=\sec^2 t$ 来化去根式.

令$x=a\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sec t, dx=a\sec^2 tdt$,

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 tdt=\int\sec tdt=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

由图$\tan t=\frac{x}{a}, \sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$, 且$\sec t+\tan t>0$

故$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$, 其中$C_1=C-\ln a$.

例 5.30　求$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$

解　令$x=2\sin t \quad dx=2\cos tdt \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx=\int(2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt$$

$$=32\int\sin^3 t\cos^2 tdt=32\int\sin t\left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 tdt$$

$$=-32\int\left(\cos^2 t-\cos^4 t\right)d\cos t$$

$$=-32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5+C.$$

例 5.31　求$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0)$.

解　令$x=a\sec t, \quad dx=a\sec t\tan tdt \quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}dt$$

$$=\int\sec tdt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C.$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

更严谨的步骤:

解 (1) 当$x > a$ 时, 令$x = a\sec t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$有\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\tan t,$$

$$dx = a\sec t\tan t dt, \text{ 于是}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,$$

其中$C = C_1 - 2\ln a$.

(2) 当$x < -a$ 时, 令$t = -x$, 则由(1)可得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}}dt = -\ln\left|t + \sqrt{t^2 - a^2}\right| + C_2$$

$$= -\ln\left|-x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_2 = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C\text{，其中}C = C_2 - 2\ln a$$

综上可得, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

注: 当$x < -a$ 时, 也可以继续采用三角函数代换处理, 过程如下:

当$x < -a$ 时, 令$x = a$ sect, 此时$t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 且$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = -a\tan t$，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \int \frac{a\sec t\tan t}{-a\tan t}dt = -\int \sec t dt = -\ln|\sec t + \mathrm{tant}| + C_1$$

$$= -\ln\left|x - \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,$$

其中$C = C_1 - 2\ln a$.

注 5.9 三角代换的目的是化掉根式. 一般规律如下: 当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$, 可令$x=a\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$, 可令$x=a\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$, 可令$x=a\sec t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

根式代换

积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定.另一种更常用的方法是直接把根式设为变量。

例 5.32 求$\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解 令$t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow x^2=t^2-1, xdx=tdt$,

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}tdt=\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2+C}.$$

注 5.10 被积函数中含$(ax+b)^{\frac{1}{n}}(a\neq 0, n$ 为正整数)因子时，令$t=(ax+b)^{\frac{1}{n}}$ 即$x=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right)$.

例 5.33 求$\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

解 令$t=\sqrt{1+e^x}\Rightarrow e^x=t^2-1, x=\ln\left(t^2-1\right), dx=\frac{2t}{t^2-1}dt, \int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt$ $=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$

例 5.34 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解 令$x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt, \int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt=6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$ $6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6[t-\arctan t]+C=6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$

注 5.11 当被积函数含有两种或两种以上的根式$\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令$x=t^n$ (其中n 为各根指数的最小公倍数)

倒代换

被积函数是分式且分母比分子的幂次高得多时, 可采用倒代换$x=\frac{1}{t}$.

例 5.35 求$\int\frac{1}{x(x^7+2)}dx$.

解 方法一: 令$x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\int\frac{1}{x\left(x^7+2\right)}dx=\int\frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C=-\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

方法二: 凑微分

$$\int\frac{1}{x\left(x^7+2\right)}dx=\int\frac{x^6}{x^7\left(x^7+2\right)}dx=\frac{1}{7}\int\frac{1}{x^7\left(x^7+2\right)}dx^7$$

$$\overset{u=x^7}{=}\frac{1}{7}\int\frac{1}{u(u+2)}du$$

$$=\frac{1}{14}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+2}\right)du=\frac{1}{14}(\ln|u|-\ln|u+2|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{14}\ln\left|x^7+2\right|+C.$$

方法三: 因式分解+凑微分.

$$\int\frac{1}{x\left(x^7+2\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2+x^7-x^7}{x\left(x^7+2\right)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^6}{x^7+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{14}\ln\left|x^7+2\right|+C$$

例 5.36 求$\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx$.

解 令$x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \left(\frac{1}{t}\right)^4 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dx = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2 \xlongequal{u=t^2} -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-1-u}{\sqrt{1+u}}du = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u}\right)d(1+u) \\
&= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3 + \sqrt{1+u} + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C
\end{aligned}
$$

§ 5.3 分部积分法

问题: $\int xe^x dx$

解决思路: 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u=u(x)$ 和$v=v(x)$ 具有连续导数, 则$(uv)'=u'v+uv'$,

移项得$uv'=(uv)'-u'v$, 两边积分得

定理 5.5　分部积分法

设$u=u(x), v=v(x)$ 有连续的导数, 则有分部积分公式

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \text{或} \int udv = uv - \int vdu.$$

对于上述问题，我们有

$$\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

注 5.12　使用分部积分法时, 选u, dv, 或v' 选取注意:

(1) v 要容易求得; (2) $\int vdu$ 比$\int udv$ 容易积出.

(3)分部积分法选u 优先原则: 反对幂三指

反三角函数，对数函数，幂函数(代数函数)，三角函数，指数函数

(4) 分部积分法常用于被积函数是两种不同类型函数乘积的积分, 例如

$\int x^n a^x dx, \int x^n \sin \beta x dx, \int x^n \arctan x dx, \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$

例 5.37 求积分 $\int x \cos x dx$.

解 解法一：令 $u = \cos x, xdx = \frac{1}{2} dx^2 = dv$ ，

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$$

显然, u, v' 选择不当, 积分更难进行.

解法二：令 $u = x,\quad \cos x dx = d \sin x = dv$

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

例 5.38 求积分 $\int x^2 e^x dx$.

解 令 $u = x^2, e^x dx = de^x = dv$ ，

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad u = x, e^x dx = dv(\text{再次使用分部积分法})$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) + C$$

注 5.13 若被积函数是幂函数和三角函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为 u, 用分部积分可使其降幂一次. 一般来说幂函数是几次就需要几次分部积分.

例 5.39 求积分 $\int x \arctan x dx$.

解 令 $u = \arctan x, xdx = d\frac{x^2}{2} = dv$

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + \text{ C.}
\end{aligned}$$

例 5.40 求积分 $\int x^3 \ln x dx$.

解 $u=\ln x, x^3dx=d\frac{x^4}{4}=dv$，

$$\int x^3\ln xdx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

例 5.41 求$\int\arccos xdx$.

解

$$令u=\arccos x, v'=1,\ 则v=x$$

$$\begin{aligned}原式&=x\arccos x-\int xd\arccos x\\&=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=x\arccos x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)\\&=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

另外, 我们在分部积分法时还可能需要结合其他技巧, 如下面几例的方法就比较典型。

例 5.42 (还原法或回归法) 求积分$\int e^x\sin xdx$.

解 $\int e^x\sin xdx=\int\sin xde^x=e^x\sin x-\int e^xd(\sin x)$

$$\begin{aligned}&=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx\\&=e^x\sin x-\int\cos xde^x\\&=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\int e^xd\cos x\right)\\&=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx\quad(注意循环形式)\\&\therefore\int e^x\sin xdx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C.\end{aligned}$$

例 5.43 求$\int\sec^3xdx$.

解 $\int\sec^3xdx=\int\sec x\cdot\sec^2xdx=\int\sec xd\tan x$

$$
\begin{aligned}
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx
\end{aligned}
$$

所以$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$.

类似地有$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}(\csc x \cdot \cot x - \ln|\csc x - \cot x|) + C$.

例 5.44 求$I_n = \int x^n e^x dx$ 的递推公式, 其中n 为非负整数; 并求I_3.

解

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int x^n e^x dx = \int x^n de^x = x^n e^x - \int e^x dx^n \\
&= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dxd = x^n e^x - n I_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\because I_0 = \int e^x dx = e^x + C
$$

$$
I_1 = \int x e^x dx = x e^x - I_0 = (x-1)e^x + C
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore I_2 &= \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C \\
&= \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + C
\end{aligned}
$$

$$
I_3 = \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_2 = \cdots
$$

例 5.45 $I_n = \int \sin^n x dx (n \geq 2$, 自然数), 试导出递推关系.

解

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n (n \geq 2, n \in N) \\
&\text{故} I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
&\text{同理} J_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}
\end{aligned}
$$

例 5.46 求$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 其中$n$ 为正整数.

解 $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$; 当$n > 1$ 时, 用分部积分法, 有

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} &= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n} dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n} \right] dx
\end{aligned}
$$

即$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left(I_{n-1} - a^2 I_n\right)$, 于是$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right]$ 以此作为递推公式, 并由$I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ 即可得I_n.

例 5.47 求$\int e^{\sqrt{x}} dx$.

解 令$x = t^2$, 则$dx = 2tdt$, 于是

$$
\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int te^t dt = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C
$$

例 5.48 求积分$\int \sin(\ln x) dx$.

解 本题将换元积分法和分部积分法结合使用. 令$u = \ln x$, 则$x = e^u, dx = e^u du$,

$$
\int \sin(\ln x) dx = \int e^u \sin u du(\text{ 分部积分且循环}) = \frac{e^u}{2}(\sin u - \cos u) + C
$$

例 5.49 求积分$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

解

$$\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

例 5.50 求积分 $\int x\left(1+x^2\right)e^{x^2}dx$

解

$$\int x\left(1+x^2\right)e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)de^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)e^{x^2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(1+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)e^{x^2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{x^2} + C$$

例 5.51 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\cos x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$.

解 由题设 $f(x) = \left(\frac{\cos x}{x}\right)'$，所以

$$\int f(x)dx = \frac{\cos x}{x} + C_1$$

$$\text{故} \int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C = -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C.$$

§ 5.4 有理函数的积分

5.4.1 有理函数的积分

有理函数的定义: 两个多项式的商表示的函数称为有理函数, 即

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$

其中$m!n$ 都是非负整数; $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 及$b_0,b_1,\cdots,b_m$ 都是实数, 且$a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式，则

(1) $n<m$, 有理函数是真分式; (2) $n\geq m$, 有理函数是假分式;

利用多项式除法, 假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

例: $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$. 多项式的积分容易, 比较难的是真分式的积分.

难点: 将有理函数化为部分分式之和, 考虑真分式的积分.

方法: 有理真分式必定可化成若干个部分分式之和(称为**部分分式分解**).

有理真分式化成若干个部分分式之和的一般步骤:

第一步对分母在实系数内作因式分解:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{\mu_t},$$

其中$b_0=1,\lambda_1,\mu_j(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$ 均为自然数, 且.

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_1+2\sum_{j=1}^{t}\mu_j=m;p_j^2-4q_j<0(j=1,2,\cdots,t)$$

第二步根据分母的各个因式分别写出与之相应的部分分式: (1) 分母中若有因式$(x-a)^k$, 则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},\text{其中}A_1,A_2,\cdots,A_k\text{ 都是常数.}$$

特殊地: $k=1$ 分解后为$\frac{A}{x-a}$.

(2) 分母中若有因式$\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中$p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i, N_i 都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$. 特殊地: $k=1$ 分解后为$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

第三步用待定系数法确定各个部分分式中的相应系数.

说明: 将有理函数化为部分分式之和后, 只出现三类形式:

(1) 多项式; (2) $\frac{A}{(x-a)^k}$; (3) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

对于(2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, 有

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx=\begin{cases} A\ln|x-a|+C, & k=1\\ \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C, & k>1\end{cases}$$

对于(3) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

由$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$, 令$x+\frac{p}{2}=t$, 记$x^2+px+q=t^2+a^2, Mx+N=Mt+b$, 则$a^2=q-\frac{p^2}{4}, b=N-\frac{Mp}{2}$,

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}dt+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

1) $k=1, \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C$;

2) $k>1, \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt$, 其中$\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt$ 的计算例5.46 .

例 5.52 求$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$.

解 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$,

$$\because x+3=A(x-3)+B(x-2),\quad \therefore\quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1,\\ -(3A+2B)=3,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5\\ B=6\end{cases},\quad \therefore \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

所以

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)dx=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C$$

例 5.53 求积分$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

解 由$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$, 得1= $A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$

代入特殊值来确定系数A, B, C, 取$x=0 \Rightarrow A=1$, 取$x=1 \Rightarrow B=1$; 取$x=2$, 并将A, B 值代入(1)

$\Rightarrow C=-1$. $\quad \therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$

或: $1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A+C=0 \\ -2A+B-C=0, \\ A=1 \end{array}\right.$ 得$\left\{\begin{array}{c} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{array}\right.$.

所以,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx & =\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right] dx \\
& =\int \frac{1}{x} dx+\int \frac{1}{(x-1)^2} dx-\int \frac{1}{x-1} dx \\
& =\ln |x|-\frac{1}{x-1}-\ln |x-1|+C
\end{aligned}
$$

例 5.54 求$\int \frac{x+2}{x^2+2x+4} dx$.

解 $\int \frac{x+2}{x^2+2x+4} dx=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+4} dx=\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx+\int \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

$$
\begin{aligned}
& =\frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4}+\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2} \\
& =\frac{1}{2} \ln \left(x^2+2x+4\right)+\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}
$$

练习: $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx=\int\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$

$$
=\frac{1}{2} \ln |x-1|+\frac{1}{2} \ln |x+1|+\frac{1}{x+1}+C.
$$

例 5.55 求积分$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx$.

解 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$,
$1=A\left(1+x^2\right)+(Bx+C)(1+2x)$, 整理得$1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A$,

$$
\left\{\begin{array}{l}
A+2B=0, \\
B+2C=0, \\
A+C=1,
\end{array}\right. \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5}. \quad \therefore \frac{1}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}
$$

所以, $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}dx$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

练习: 求$\int \frac{3}{x^3+1}dx$.

$\int \frac{3}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx = \ln|x+1| - \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

例 5.56 求$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$.

分析被积函数是假分式时, 先将其分解成多项式和真分式之和, 再根据有理函数的积分计算.

解: $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x(x-1)}dx = \int \frac{x^2(x-1)+4x(x-1)+7x+1}{x(x-1)}dx$

$$= \int \left[x+4+\frac{8}{x-1}-\frac{1}{x}\right]dx = \frac{1}{2}x^2+4x+8\ln|x-1|-\ln|x|+C$$

注 5.14 有理函数的原函数都是初等函数.

注意: 用求有理真分式的最简分式分解式的方法求其积分往往比较麻烦. 所以在求有理函数积分时, 应尽可能先考虑是否有其它更简便的解法.

如: $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{x^9dx}{x^{10}(x^{10}+1)} = \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{x^{10}+1}\right)d\left(x^{10}\right) = \frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1} + C.$

5.4.2 可化为有理函数的积分

5.4.2.1 三角函数有理式的积分

三角函数有理式的定义: 由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称三角函数有理式, 一般记为$R(\sin x, \cos x)$.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

三角函数有理式的积分方法: 令$u=\tan\frac{x}{2}, x=2\arctan u$ (**万能有理置换公式**), 则

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du,$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

例 5.57 求积分$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

解 由万能有理置换公式, 令$u=\tan\frac{x}{2}, \sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}, dx=\frac{2}{1+u^2}du$, 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx &= \int \frac{2u}{(1+u)\left(1+u^2\right)}du = \int\left[\frac{1+u}{1+u^2} - \frac{1}{1+u}\right]du \\
&= \int \frac{1}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}du - \int \frac{1}{1+u}du \\
&= \arctan u + \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) - \ln|1+u| + C \\
&= \frac{x}{2} + \ln\left|\sec\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.
\end{aligned}$$

例 5.58 求积分$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$.

解 解一: 由万能有理置换公式, 令$u=\tan\frac{x}{2}$, 则$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}, dx=\frac{2}{1+u^2}du$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^4 x}dx &= \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}du = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} + 3u + \frac{u^3}{3}\right] + C \\
&= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 + C
\end{aligned}$$

解二: 修改万能有理置换公式, 令$u=\tan x$, 则$\sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{u^2}{1+u^2}, dx=\frac{1}{1+u^2}du$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^4 x}dx &= \int \frac{(1+u)^2}{u^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}du = \int \frac{1+u^2}{u^4}du \\
&= -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C
\end{aligned}$$

解三: 凑微分法.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^4 x}dx &= \int \csc^4 x dx = \int \csc^2 x\left(1+\cot^2 x\right)dx \\ &= \int \csc^2 x dx + \int \cot^2 x \csc^2 x dx \\ &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C\end{aligned}$$

注 5.15 比较以上三种解法, 可知万能有理置换未必是最佳方法, 故三角函数有理式的积分计算中先考虑其它方法, 不得已才用万能有理置换.

5.4.2.2 简单无理函数的积

简单无理函数的类型: $R(x, \sqrt[n]{ax+b}), R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$ $(ad-bc\neq 0)$.

解决方法: 作变量代换去掉根式, 令$t=\sqrt[n]{ax+b}$ 或$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}$, 化成有理函数的积分.

例 5.59 计算积分$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 令$t=\sqrt[3]{x+2}$, 则$x=t^3-2$, $dx=3t^2dt$, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} &= \int \frac{1}{1+t}\cdot 3t^2dt = 3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt \\ &= 3\int\left[t-1+\frac{1}{1+t}\right]dt = \frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|1+t|+C \\ &= \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C\end{aligned}$$

例 5.60 求积分$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

解 令$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$, 则$x=\frac{1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$. 有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx &= -\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt = -2\int\frac{t^2dt}{t^2-1} = -2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt \\ &= -2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C = -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C\end{aligned}$$