# 第3章　导数与微分

微积分的创始人是英国的数学家Newton 和德国的数学家Leibniz。导数思想最早由法国数学家Ferma 在研究极值问题中提出.

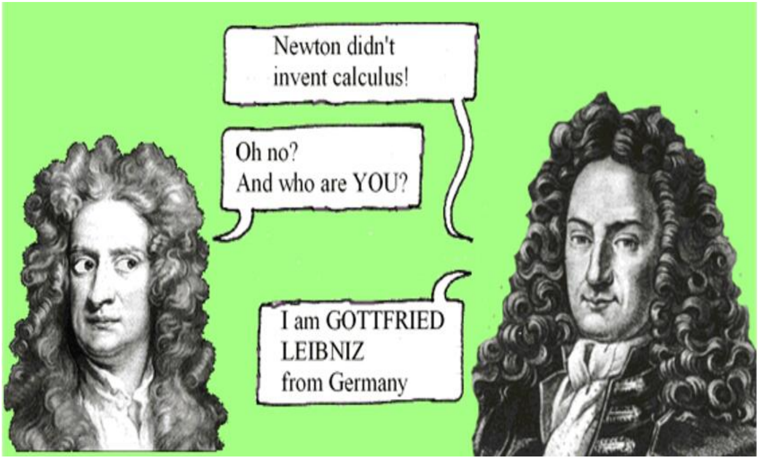


图 3.1　牛顿和莱布尼兹

## § 3.1 导数的概念

### 3.1.1 两个引例

为了说明导数的概念，我们先讨论两个问题：速度问题和切线问题。这两个问题与导数概念的形成有密切的联系。

例 3.1 设某质点沿直线运动.在直线上规定了原点、正方向和单位长度, 使直线成为数轴. 此外,再取定一个时刻作为测量时间的零点. 设质点于时刻$t$ 在直线上的位置的坐标为$s$ (简称位置$s$). 这样,该质点的运动完全由某个函数

$$s=f(t)$$

所确定. 此函数对运动过程中所出现的$t$ 值有定义,称为位置函数. 在最简单的情形,该质点所经过的路程与所花的时间成正比. 就是说,无论取哪一段时间间间, 比值

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} \tag{3.1}$$

总是相同的. 这个比值就称为该质点的速度,并说该质点做匀速运动. 如果运动不是匀速的,那么在运动的不同时间间隔内,比值(3.1) 会有不同的值. 这样, 把比值(3.1) 笼统地称为该质点的速度就不合适了,而需要按不同时刻来考虑. 那么, 这种非匀速运动的质点在某一时刻（设为$t_0$ ) 的速度应如何理解而又如何求得呢?

首先取从时刻$t_0$ 到$t_0+\Delta t$ 这样一个时间间隔, 在这段时间内, 质点从位置$s_0=f\left(t_0\right)$ 移动到$s=f(t_0+\Delta t)$. 这时由(3.1) 式算得的比值

$$\frac{s-s_0}{\Delta t}=\frac{f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0\right)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

可认为是质点在上述时间间隔内的平均速度. 如果时间间隔选得较短,这个比值(3.2) 在实践中也可用来说明质点在时刻$t_0$ 的速度. 但对于质点在时刻$t_0$ 的速度的精确概念来说,这样做是不够的,而更确切地应当这样: 令$\Delta t\to 0$, 取式(3.2)的极限, 如果这个极限存在, 设为$v$, 即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

这时就把这个极限值$v$ 称为质点在时刻$t_0$ 的(瞬时) 速度.

以自由落体瞬时速度问为例，自由落体的位移函数

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

(这里取$s$ 的方向为垂直向下的方向）,在$t_0$ 时刻的位移$s\left(t_0\right)=\frac{1}{2}gt_0^2$, 给$t_0$ 一个改变量$\Delta t$ 得到位移改变量

$$\Delta s=s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)=\frac{1}{2}g\left[\left(t_0+\Delta t\right)^2-t_0^2\right]=\frac{1}{2}g\left[2t_0\Delta t+(\Delta t)^2\right]$$

这时

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t$$

是$t_0$ 到$t_0+\Delta t$ 这段时间内自由落体的平均速度$\bar{v}$ (即这段时间内位移变量$s$ 相对于时间变量$t$ 的平均变化率), 当$\Delta t\to 0$ 时, $\frac{\Delta s}{\Delta t}\to gt_0$, 它是自由落体在$t_0$ 时刻的瞬时速度.

例 3.2　切线问题

圆的切线可定义为 “与曲线只有一个交点的直线” . 但是对于其他曲线, 用“与曲线只有一个交点的直线” 作为切线的定义就不一定合适. 例如,对于抛物线$y=x^2$, 在原点$O$ 处两个坐标轴都符合上述定义,但实际上只有$x$ 轴是该抛物线在点$O$ 处的切线. 下面给出切线的定义.

设有曲线$C$ 及$C$ 上的一点$M$, 在点$M$ 外另取$C$ 上一点$N$,作割线$MN$. 当点$N$ 沿曲线$C$ 趋于点$M$ 时, 如果割线$MN$ 绕点$M$ 旋转而趋于极限位置$MT$, 直线$MT$ 就称为曲线$C$ 在点$M$ 处的切线.这里极限位置的含义是:只要弦长$|MN|$ 趋于零, $\angle NMT$ 也趋于零.

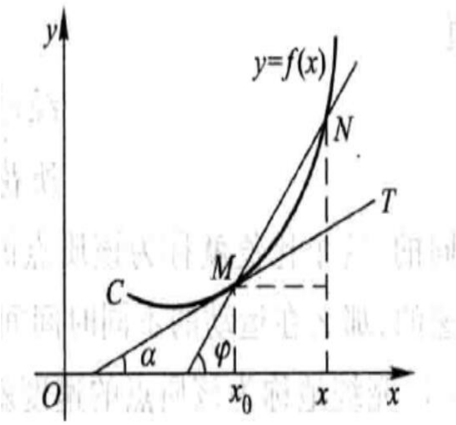


图 3.2　切线问题

设函数$y=f(x)$ 对应的曲线为$C$. $M(x_0,y_0)$ 是曲线$C$ 上的一个点(图3.2), 则$y_0=f(x_0)$. 根据上述定义要定出曲线$C$ 在点$M$ 处的切线,只要定出切线的斜率就行了.为此,在点$M$ 外另取$C$ 上的一点$N(x,y)$, 于是割线$MN$ 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

其中$\varphi$ 为割线$MN$ 的倾角. 当点$N$ 沿曲线$C$ 趋于点$M$ 时, $x\to x_0$. 如果当$x\to x_0$ 时,上式的极限存在,设为$k$, 即

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

那么$k$ 是割线斜率的极限, 也就是切线的斜率. 这里$k = \tan\alpha$, 其中$\alpha$ 是切线$MT$ 的倾角. 于是, 通过点$M(x_0, f(x_0))$ 且以$k$ 为斜率的直线$MT$ 便是曲线$C$ 在点$M$ 处的切线. 事实上, 由$\angle NMT = \varphi - \alpha$ 以及$x \to x_0$ 时$\varphi \to \alpha$, 可见$x \to x_0$ 时（这时$|MN| \to 0$), $\angle NMT \to 0$. 因此直线$MT$ 确为曲线$C$ 在点$M$ 处的切线.

如果令$x = x_0 + \Delta x$，则上式变为

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

### 3.1.2 导数的定义

两个问题都是变化率的问题，都涉及到函数增量与自变量增量之比的极限. 类似问题还有:

- 加速度：速度增量与时间增量之比的极限
- 角速度：转角增量与时间增量之比的极限
- 线密度：质量增量与长度增量之比的极限
- 电流强度：电量增量与时间增量之比的极限

因此我们将此极限抽象为一个数学概念—导数。



**定义 3.1 导数**

设$y = f(x)$ 在$x_0$ 的某一邻域内有定义,在该邻域中任意给定$x_0$ 一个改变量$\Delta x$. 得到函数值$f(x_0)$ 的一个改变量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称$y = f(x)$ 在$x_0$ 点可导,并且称上面的极限为$f(x)$ 在$x_0$ 点的导数, 用$f'(x_0)$ ( 或$y'|_{x=x_0}$, 或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ ) 表示.

注 3.1 导数的极限形式有两种，增量有时也用$h$ 来代替$\Delta x$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

上面讲的是函数在一点处可导. 如果函数$y = f(x)$ 在区间$I$ 内的每点处都可导,那么就称函数$f(x)$ 在区间$I$ 内可导. 这时,对于任一$x \in I$, 都对应着$f(x)$ 的一个确定的导数值. 这样就构成了

一个新的函数, 这个函数叫做原来函数$y=f(x)$ 的导函数(导数), 记作$y'$, $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. 在极限的定义中把$x_0$ 换成$x$, 即得导函数的定义式

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

注 3.2 1. $x$ 可以取区间$I$ 内的任何数值,但在极限过程中, $x$ 是常量, $\Delta x$ 是变量.

2. 函数$f(x)$ 在点$x_0$ 处的导数$f'(x_0)$ 就是导函数$f'(x)$ 在点$x=x_0$ 处的函数值,即

$$f'(x_0)=\left.f'(x)\right|_{x=x_0}.$$

3. $f'(x_0)=\left.f'(x)\right|_{x=x_0}\neq\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$.

例 3.3 $f(x)=C$ ($C$ 为常数)的导函数.

解 $f'(x)=(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$.

例 3.4 求$f(x)=x$ 的导函数.

解 $f'(x)=(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1, x\in(-\infty,+\infty)$.

例 3.5 求$y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导函数, 并求它在$x=2$ 处的值.

解

$$y'=f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

因此

$$\left.y'\right|_{x=2}=f'(2)=\left.\left(\frac{1}{x}\right)'\right|_{x=2}=-\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=2}=-\frac{1}{4}.$$

例 3.6 求$y=x^\mu$($\mu\neq 0$ 为常数) 的导函数.

解

$$(x^\mu)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\mu-x^\mu}{\Delta x}=x^\mu\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu-1}{\Delta x}$$

$$\xlongequal{t=\frac{\Delta x}{x}}x^{\mu-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\mu-1}{t}=\mu x^{\mu-1}.$$

**例 3.7** 求$y=a^x(a>0,a\neq 1$ 为常数) 的导函数.

**解** $(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\xlongequal{a^{\Delta x}-1\sim\Delta x\ln a}a^x\ln a.$

**例 3.8** 求$y=\sin x$ 的导函数.

**解**

$$
\begin{aligned}
(\sin x)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.
\end{aligned}
$$

**例 3.9** 求$y=\cos x$ 的导函数.

**解** $(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\sin x.$

**注 3.3** 此处用到和差化积公式:

$$
\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

$$
\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

在应用导数定义时，一定要严格按照定义中的极限形式.

**例 3.10** 设$f'(x_0)$ 存在, 求极限$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

**解** 错误的做法:

令$t=x_0-h$, 则原式$=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+2h)-f(t)}{2h}=\lim_{h\to 0}f'(t)=f'(x_0)$.

正确的做法：原式等于

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]\\
&=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0).
\end{aligned}
$$

例 3.11 1. 设$f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\underline{-f'(x_0)}.$$

2. 已知$f(0)=0, f'(0)=k_0$, 则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\underline{k_0}$.

### 3.1.3 函数可导点的局部性质

函数的极限有左极限与右极限的概念。函数的导数也有左导数右导数的概念。

**定义 3.2 左导数与右导数**

设$y=f(x)$ 在$x_0$ 的某一邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在,则称$f(x)$ 在$x_0$ 点右可导,且称上面的极限为$f(x)$ 在$x_0$ 点的右导数,用$f'_+(x_0)$ 表示;若极限

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在,则称$f(x)$ 在$x_0$ 点左可导,且称上面的极限为$f(x)$ 在$x_0$ 点的左导数, 用$f'_-(x_0)$ 表示.

根据左右极限与极限的关系，我们有

**性质 3.1** 函数$f(x)$ 在$x_0$ 点可导的充要条件是$f(x)$ 在$x_0$ 点既左可导又右可可导, 且

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

例 3.12 设

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^3}, & x\geqslant 0\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x<0\\ \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}, & x<-1\end{cases}$$

判别$f(x)$ 在$x=0$ 利$x=-1$ 处是否可导?

**解** 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^3}}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=+\infty$$

因此$f(x)$ 在$x=0$ 点不可导.

又由于

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

因此$f(x)$ 在$x=-1$ 点可导, 且$f'(-1)=\frac{1}{3}$.

例 3.13　判别$f(x)=|x|$ 在$x=0$ 点是否可导.

**解**　由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1.$$

$f'_+(0)\neq f'(0)$, 因此$f(x)=|x|$ 在$x=0$ 点不可导.

由上面两个例子，我们发现, $f(x)$ 在$x_0$ 点连续,但$f(x)$ 在$x_0$ 点末必可导. 关于可导与连续我们有如下定理。

**定理 3.1　可导与连续的关系**

函数$f(x)$ 在$x_0$ 点连续是$f(x)$ 在$x_0$ 点可导的必要条件但不是充分条件.

证明　设$f(x)$ 在$x_0$ 点可导, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

存在, 因此

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+o(1).$$

由此可得

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0)&=f'(x_0)(x-x_0)+o(1)(x-x_0)\\ &=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad (x\to x_0). \end{aligned}\tag{3.3}$$

因此$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，说明$f(x)$ 在$x_0$ 点连续.

注 3.4 方程 (3.3) 常称为函数在可导点处的有限增量公式.由此可知，当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, $f'(x_0)(x-x_0)$ 是 $f(x)-f(x_0)$ 的主部, 因此

$$f(x)-f(x_0) \sim f'(x_0)(x-x_0) \quad (x \to x_0).$$

这说明 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点附近的性质与 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 的性质很相近. 事实上，$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线.

**定理 3.2 局部单调性**

设 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导.且 $f'(x_0)>0\,(f'(x_0)<0)$, 则在 $x_0$ 的某一邻域 $O_\delta(x_0)$ 中，

$x>x_0$ 时, $f(x)>f(x_0)\,(f(x)<f(x_0))$;

$x<x_0$ 时, $f(x)<f(x_0)\,(f(x)>f(x_0))$.

因此, 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, 使得当 $x\in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 时, $f(x)-f(x_0)\neq 0$.



证明 由函数极限的局部保号性. 存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, 使得 $x\in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 时,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

因此 $x>x_0$ 时, $f(x)>f(x_0)$; $x<x_0$ 时, $f(x)<f(x_0)$. 对 $f'(x_0)<0$ 的情形类似可证.

## 3.1.4 导数的几何意义

由引例3.2 可知，函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即

$$f'(x_0)=\tan\alpha,$$

其中 $\alpha$ 是切线的倾角.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 $M$ 处的法线. 如果 $f'(x_0)\neq 0$, 法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$, 从而法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

如果$y = f(x)$ 在点$x_0$ 处的导数为无穷大,那么这时曲线$y = f(x)$ 在点$M(x_0,, f(x_0))$ 处具有垂直于$x$ 轴的切线$x = x_0$.

例 3.14　求曲线$y = x^2 + 1$ 在点$(2, 5)$ 处的切线方程和法线方程。

解　由导数的几何意义得切线斜率

$$k = f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2 + 1 - 2^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4.$$

所以曲线在点$(2, 5)$ 的切线斜率: $k = f'(2) = 4$,

切线方程: $y - 5 = 4(x - 2) \Leftrightarrow 4x - y - 3 = 0.$

法线方程: $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow x + 4y - 22 = 0.$

# § 3.2 导数运算和公式



## 3.2.1 导数的四则运算法则

由极限的四则运算法则可以退出导数的四则运算法则.

**定理 3.3　导数的四则运算法则**

如果函数$f = f(x)$ 及$g = g(x)$ 都在点$x$ 具有导数, 那么它们的数乘、和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点$x$ 具有导数, 且

(1) $[Cf(x)]' = Cf'(x)$, 其中, $C$ 是一个常数;

(2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

(3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}(g(x) \neq 0)$.

证明　$(1)[Cf(x)]'$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} C\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Cf'(x).$$

法则(1) 可简单地表示为

$$(Cf)' = Cf'.$$

(2)$[f(x) \pm g(x)]'$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)] - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) \pm g'(x).$$

法则(2) 可简单地表示为

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

(3) $[f(x)g(x)]'$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

其中$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$ 是由于$g'(x)$ 存在,故$g(x)$ 在点$x$ 连续. 法则(3) 可简单地表示为

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

法则(4) 可简单地表示为

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

法则(4) 中取$f \equiv 1$ 可得

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

定理3.3 中的法则(1), (2), (3) 可推广到任意有限个可导函数的情形. 例如, 设$f = f(x), g = g(x)!h = h(x)$ 均可导, 则有

$$(c_1 f + c_2 g - c_3 h)' = c_1 f' + c_2 g' - c_3 h',$$



$$(fgh)' = [(fg)w]' = (fg)'w + (fg)w' = (f'g + fg')\,h + fgh',$$

即

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

更一般地，我们有

**推论 3.1**　如果函数$f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x), \cdots, f_n = f_n(x)$ 都在点$x$ 具有导数, 那么

(1) $(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \cdots + c_n f_n'$.

(2) $(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$.

**例 3.15**　$y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$, 求$y'$.

**解**

$$y' = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 7\right)' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + (3x)' - (7)'$$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3$$

**例 3.16** $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$, 求$f'(x)$ 及$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

**解** $f'(x)=3x^2-4\sin x$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi^2-4$.

**例 3.17** $y=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$, 求$y'$.

**解** $y'=(\mathrm{e}^x)'(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)'=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=2\mathrm{e}^x\cos x$.

**例 3.18** 求下列函数的导函数:

(1) $y=\sec x$; (2) $y=\csc x$; (3) $y=\tan x$; (4) $y=\cot x$.

**解** (1) $(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$.

(2) $(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x$.

(3) $(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$.

(4) $(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

## 3.2.2 反函数的导数

反函数和原函数的导数有如下定理.



**定理 3.4 反函数的求导法则**

设$y=f(x)$ 在$(a,b)$ 内严格单调且可导,则有反函数$x=\varphi(y)$, 当$f'(x)\neq 0$ 时, $x=\varphi(y)$ 可导, 且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

简记为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

**证明** 设$\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$, 这时有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

当$\Delta y\neq 0$ 时. $\Delta x\neq 0$, 且$\Delta y\to 0$ 时, 由$x=\varphi(y)$ 的连续性(参见第二章反函数与原函数连续性定理) 可得$\Delta x\to 0$, 从而

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\frac{1}{f'(x)}.$$

注 3.5 定理中的自变量可以自由选择, 如$x=f(y)$, 有反函数$y=\varphi(x)$, 则

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'(y)}.$$

例 3.19 求下列函数的导数:

(1) $y=\log_a x(a>0,a\neq 1$ 是常数); (2) $y=\arcsin x$; (3) $y=\arccos x$;

(4) $y=\arctan x$; (5) $y=\operatorname{arccot} x$.

解 (1) 由于$y=\log_a x$ 是$x=a^y$ 的反函数, 因此

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

(2) 由$y=\arcsin x$ 是$x=\sin y$ 的反函数, 且$x\in(-1,1),y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 这时$\cos y>0$, 则

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) 由$y=\arccos x$ 是$x=\cos y$ 的反函数, 且. $x\in(-1,1),y\in(0,\pi)$, 这时$\sin y>0$, 则

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(4) $y=\arctan x$ 是$x=\tan y$ 的反函数, $x\in(-\infty,+\infty),y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

(5) $y=\operatorname{arccot} x$ 是$x=\cot y$ 的反函数, $x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi)$,

$$(\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{(\cot y)'}=\frac{1}{-\csc^2 y}=-\frac{1}{1+\cot^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

### 3.2.3 导数的基本公式

我们把基本初等函数的导函数表达式归纳起来, 就得到下面的导数基本公式.

(1) $(C)'=0$; (2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$; (3) $(a^x)'=a^x\ln a, (e^x)'=e^x, (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, (\ln x)'=\frac{1}{x}$
(4) $(\sin x)'=\cos x, (\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=\sec^2 x, (\cot x)'=-\csc^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x, (\csc x)'=-\csc x\cot x$.
(5) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}, (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

**例 3.20** 求下列函数的导数:

(1) $y=x\ln x$;

(2) $y=-xe^x+\ln 2$;

(3) $y=\frac{\tan x}{x+\sin x}+3\sqrt[3]{x}\arctan x$.

**解** (1) $(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=1+\ln x$.

(2) $(-xe^x+\ln 2)'=-(xe^x)'+(\ln 2)'=-(x)'e^x-x(e^x)'=-(x+1)e^x$.

(3)
$$\left(\frac{\tan x}{x+\sin x}+3\sqrt[3]{x}\arctan x\right)'=\left(\frac{\tan x}{x+\sin x}\right)'+3(\sqrt[3]{x}\arctan x)'$$
$$=\frac{\sec^2 x}{x(x+\sin x)-\tan x(1+\cos x)}(x+\sin x)^2+x^{-\frac{2}{3}}\arctan x+\frac{3\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$$



## 3.2.4 复合函数求导法则

关于复合函数求导，我们有如下定理：

**定理 3.5 链式法则**

设$u=g(x)$ 在$x_0$ 点可导, 而$y=f(u)$ 在$u_0=g(x_0)$ 点可导, 则$y=f[g(x)]$ 在$x_0$ 点可导, 且
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=(f[g(x)])'|_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)=f'[g(x_0)]g'(x_0)$$
写成导函数的形式为
$$\frac{dy}{dx}=(f[g(x)])'=f'[g(x)]g'(x)$$
简写为
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

思路：令
$$\Delta u=g(x_0+\Delta x)-g(x_0),\quad \Delta u\to 0(\Delta x\to 0)$$
则
$$u_0=f(x_0),\quad g(x_0+\Delta x)=u_0+\Delta u.$$

因此

$$
\begin{aligned}
(f[g(x)])'|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(u_0+\Delta u\right)-f\left(u_0\right)}{\Delta u}\frac{g\left(x_0+\Delta x\right)-g\left(x_0\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f\left(u_0+\Delta u\right)-f\left(u_0\right)}{\Delta u}\lim_{\Delta u\to 0}\frac{g\left(x_0+\Delta x\right)-g\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'(u_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

证明 给$x_0$ 一个改变量$\Delta x$, 设

$$\Delta u=g\left(x_0+\Delta x\right)-g\left(x_0\right),$$

则

$$g\left(x_0+\Delta x\right)=g(x_0)+\Delta u=u_0+\Delta u,$$

$$\Delta y=f\left[g\left(x_0+\Delta x\right)\right]-f\left[g\left(x_0\right)\right]=f\left(u_0+\Delta u\right)-f\left(u_0\right)$$

当$g'\left(x_0\right)\neq 0$ 时, 由保号性定理可知，存在去心邻域$O_\delta\left(x_0\right)\setminus\{x_0\}$. 使得$x_0+\Delta x\in O_\delta\left(x_0\right)\setminus\{x_0\}$ 时,

$$\Delta u=g\left(x_0+\Delta x\right)-g\left(x_0\right)\neq 0$$

这时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(u_0+\Delta u\right)-f\left(u_0\right)}{\Delta u}\frac{g\left(x_0+\Delta x\right)-g\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

由于$g(x)$ 在$x_0$ 点可导一定连续,则$\Delta x\to 0$ 时, $\Delta u=g\left(x_0+\Delta x\right)-g\left(x_0\right)\to 0$, 从而由$f(u)$ 在$u_0$ 点可导可得$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u_0+\Delta u)-f(u_0)}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'\left(u_0\right)g'\left(x_0\right).$

当$g'\left(x_0\right)=0$ 时, 由式(3.3) 可得

$$g\left(x_0+\Delta x\right)=g\left(x_0\right)+o(1)\Delta x\quad(\Delta x\to 0)$$

根据$f(u)$ 在$u_0=g\left(x_0\right)$ 处可导,利用式(3.3) 可得

$$
\begin{aligned}
f\left[g\left(x_0+\Delta x\right)\right]-f\left[g\left(x_0\right)\right] &= f\left[u_0+o(1)\Delta x\right]-f\left(u_0\right)\\
&= f'\left(u_0\right)o(1)\Delta x+o(1)o(1)\Delta x\quad(\Delta x\to 0)
\end{aligned}
$$

因此由导数定义式可得

$$(f[g(x)])'|_{x=x_0}=0=f(g(x_0))g'(x_0).$$



例 3.21 设$y=\mathrm{e}^{x^3}$, 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解** $y=\mathrm{e}^{x^3}$ 可看作由$y=\mathrm{e}^u, u=x^3$ 复合而成,因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 3x^2=3x^2\mathrm{e}^{x^3}$$

**例 3.22** 设$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$, 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解** $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$ 可看作由$y=\sin u, u=\frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成. 因

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2\left(1+x^2\right)-(2x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}$$

对复合函数分解比较熟悉后，就不用再写出中间变量.



**例 3.23** 求下列函数的导数:

(1) $y=\mathrm{e}^{ax}(a\neq 0$ 为常数$)$;

(2) $y=(1-2x)^{10}$;

(3) $y=(\arcsin\sqrt{x-1})^2$;

(4) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

**解** (1) $y'=\left(\mathrm{e}^{ax}\right)'=\mathrm{e}^{ax}(ax)'=a\mathrm{e}^{ax}$.

(2) $y'=\left((1-2x)^{10}\right)'=10(1-2x)^9(1-2x)'=-20(1-2x)^9$

(3)

$$\begin{aligned}
y'&=\left[(\arcsin\sqrt{x-1})^2\right]'=2\arcsin\sqrt{x-1}(\arcsin\sqrt{x-1})'\\
&=2\arcsin\sqrt{x-1}\frac{(\sqrt{x-1})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x-1})^2}}=\frac{\arcsin\sqrt{x-1}}{\sqrt{-2+3x-x^2}}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}\right)' - \frac{1}{2}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1}+x\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right] - \frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 我们以两个中间变量为例, 设$y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

而$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, 故复合函数$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$



## 3.2.5 对数函数求导

**例 3.24** 求$y=\ln|x|$ 的导数.

**解** $x\in(0,+\infty)$ 时, $y=\ln x, y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

$x\in(-\infty,0)$ 时, $y=\ln(-x)$

$$y'=(\ln(-x))'=(\ln u)'|_{u=-x}\cdot(-x)'=\left.\frac{1}{u}\right|_{u=-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

因此

$$\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).}$$

**例 3.25** 设$f(x)$ 可导,求$y=\ln|f(x)|$ 在$f(x)\neq 0$ 处的导数.

**解** 当$f(x)\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
y' &= (\ln|f(x)|)' = (\ln|u|)'|_{u=f(x)}\cdot f'(x) \\
&= \left.\frac{1}{u}\right|_{u=f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.
\end{aligned}$$

由例3.25 我们有对数求导公式

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'}$$

注 3.6 由于对数运算能够变乘除运算为加减运算, 且加减运算的导数比乘除运算的导数简便, 对数求导公式可用来求幂指函数, 多个函数乘除的导数.

例 3.26 设$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2+x}$, 求$f'(x)$.

解

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2+x}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| - \ln|x| - \ln|2x+1|\right)' \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2+x}\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}\right) \\ &= \frac{1+4x-2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(2x^2+x)^2} \end{aligned}$$

例 3.27 设$y = [u(x)]^{v(x)}$, 求$y'$, 其中$u(x) > 0, u(x), v(x)$ 可导.

解 由取对数求导法可得

$$\begin{aligned} y' &= [u(x)]^{v(x)}\left(\ln[u(x)]^{v(x)}\right)' = [u(x)]^{v(x)}(v(x)\ln u(x))' \\ &= [u(x)]^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right) \end{aligned}$$

例 3.28 (1) $\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)' = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left(\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|\right)'$

$= x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}\right) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left[\frac{x^2-x-1}{x(x+1)(x-1)}\right] = \frac{x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}(x-1)}$.

(2)

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^x\left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\right]' &= \left(\frac{b}{a}\right)^x\left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\left(x\ln\frac{b}{a} + a\ln|x| - a\ln b + b\ln a - b\ln|x|\right)' \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^x\left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\left(\ln\frac{b}{a} + \frac{a-b}{x}\right). \end{aligned}$$

(3) $\left[x^{\sin x}\right]' = x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

### 3.2.6 隐函数求导法

形如$y=\sin x, y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 的函数，其等号左端是因变量的符号,而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内任一值时,由这式子能确定对应的函数值. 用这种方式表达的函数叫做**显函数**.

有些函数的表达方式却不是这样, 例如, 方程

$$x+y^3-1=0$$

表示一个函数, 因为当变量$x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内取值时, 变量$y$ 有确定的值与之对应.例如,当$x=0$ 时, $y=1$; 当$x=-1$ 时, $y=\sqrt[3]{2}$, 等等. 这样的函数称为隐函数.

一般地, 如果变量$x$ 和$y$ 满足一个方程$F(x,y)=0$, 在一定条件下, 当$x$ 取某区间内的任一值时,相应地总有满足这方程的唯一的$y$ 值存在,那么就说方程$F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个**隐函数**.

把一个隐函数化成显函数, 叫做**隐函数的显化**. 例如从方程$x+y^3-1=0$ 解出$y=\sqrt[3]{1-x}$,就把隐函数化成了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的,甚至是不可能的. 下面通过具体例子来说明如何求解隐函数导数.

例 3.29　求由方程$\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}=0$ 所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　我们把方程两边分别对$x$ 求导数, 方程左边对$x$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

方程右边对$x$ 求导得

$$(0)'=0$$

因此

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}\qquad\left(x+\mathrm{e}^y\neq0\right).$$

**注 3.7** 隐函数求导最终计算出的结果形式上可能不一样，但是可以通过确定隐函数的方程关系互相转化.例如上例做出的结果是$-\frac{y}{x+e^y}$，也有可能是$-\frac{y}{x+e-xy}$，形式不同但是两者相等。

**注 3.8** 假设方程$F(x,y)=0$确定一个函数$y=y(x)$，把$y=y(x)$代人方程便得恒等式$F[x,y(x)]\equiv 0$. 因此,这里说的方程两边对$x$求导，是指恒等式两边对$x$求导.

**例 3.30** 求由方程$y^5+2y-x-3x^7=0$所确定的隐函数在$x=0$处的导数$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

**解** 解法一：把方程两边分别对$x$求导,由于方程两边的导数相等,所以

$$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因为当$x=0$时，从原方程得$y=0$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

解法二：把方程两边分别对$x$求导,由于方程两边的导数相等,所以

$$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0$$

因为当$x=0$时，从原方程得$y=0$，带入上式方程得：

$$5\cdot 0^4\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}+2\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}-1-21\cdot 0^6=0$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

因此，隐函数求具体点处的导数值，先带值再整理更简单些.

**例 3.31** 求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点$\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$处的切线方程.

**解** 由导数的几何意义知道，所求切线的斜率为

$$k=y'|_{x=2}$$

椭圆方程的两边分别对$x$ 求导,有

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{9x}{16y}$$

当$x=2$ 时, $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 代人上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

于是所求的切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2),$$

即

$$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$



对$\ln|y|=\ln|f(x)|$ 应用隐函数求导法可以得到对数求导公式. 在求解幂指函数等对数求导公式适用的函数时，可直接用取对数然后隐函数求导法求解.

例 3.32　求$y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

**解**　这函数是幂指函数. 为了求这函数的导数, 可以先在等式两边取对数, 得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

上式两边对$x$ 求导,注意到$y=y(x)$, 得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

于是

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

## 抽象函数及分段函数求导

例 3.33 求$y=f\left(e^{x}\right)e^{f(x)}$ 的导数$y'$, 其中$f(x)$ 为可导函数.

解 $y'=\left[f\left(e^{x}\right)\right]'e^{f(x)}+f\left(e^{x}\right)\left[e^{f(x)}\right]'=f'\left(e^{x}\right)\cdot e^{x}\cdot e^{f(x)}+f\left(e^{x}\right)e^{f(x)}\cdot f'(x)$

例 3.34 设$y=f(f(f(x)))$, 其中$f(x)$ 可导, 求$y'$.

解 $y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$.

例 3.35 $y=f\left(\sin^{2}x\right)+f\left(\cos^{2}x\right)$, 求$y'$.

解 $y'=f'\left(\sin^{2}x\right)2\sin x\cos x-f'\left(\cos^{2}x\right)2\sin x\cos x$.

注 3.9 $(f(x^{2}))'$ 是对$y=f(u)$ 和$u=x^{2}$ 的复合函数求导数, $f'(x^{2})$ 是对函数$f(u)$ 求导然后将$x^{2}$ 带入.



例 3.36 设

$$f(x)=\begin{cases}x^{2}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求$f'(x)$ 的表达式,并判别$f'(x)$ 在$x=0$ 点是否连续?

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

因此$f'(0)=0$. $x\neq 0$ 时, $f(x)=x^{2}\sin\frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(x^{2}\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^{2}\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'\\&=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\end{aligned}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

另外,由$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在, 可知$\lim_{x\to 0}f'(x)$ 不存在, 从而$f'(x)$ 在$x=0$ 点不连续,且$x=0$ 是$f'(x)$ 的第二类间断点.

# § 3.3 函数的微分

在测量问题中一般来说往往是测量一些容易得到的量，然后通过计算得到最后结果。

例 3.37 测算边长为$x_0$ 的正方形面积时, 假设测量的边长为$x_0+\Delta x$, 其中$\Delta x$ 为测量误差。则它的面积为

$$S\left(x_0+\Delta x\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

与真实面积$S\left(x_0\right)=x_0^2$ 的误差为

$$\begin{aligned}\Delta S&=S\left(x_0+\Delta x\right)-S\left(x_0\right)\\&=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.\end{aligned}$$

误差由两部分组成:

(1) $\Delta x$ 的线性函数,且为$\Delta S$ 的主要部分; (2) 当$|\Delta x|$ 很小时, $(\Delta x)^2$ 可忽略不计.

$$S\left(x_0+\Delta x\right)\approx S\left(x_0\right)+2x_0\Delta x.$$

**定义 3.3 微分**

设$y=f(x)$ 在$x_0$ 的某一邻域内有定义,若在其中给$x_0$ 一个改变量$\Delta x$, 相应的函数值的改变量$\Delta y$ 可表示如下:

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\rightarrow 0)$$

其中$A$ 与$\Delta x$ 无关, 则称$y=f(x)$ 在$x_0$ 点可微, 且称$A\Delta x$ 为$f(x)$ 在$x_0$ 点的微分, 记为

$$\left.\mathrm{d}y\right|_{x=x_0}=\left.\mathrm{d}f\right|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

注 3.10 (1) 当$A\neq 0$ 时, 微分$\left.\mathrm{d}y\right|_{x=x_0}$ 是函数值改变量$\left.\Delta y\right|_{x=x_0}$ 的主部.

(2) 若$f(x)$ 在$(a,b)$ 内处处可微, 则称$f(x)$ 在$(a,b)$ 内可微, 且称$f(x)$ 是$(a,b)$ 内的可微函数. 这时微分

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A(x)\Delta x$$

是两个独立变量$x$ 和$\Delta x$ 的二元函数.

在例3.37 中, $dS = 2xdx$, 它是面积改变量$\Delta S$ 的主部.

**定理 3.6 一元函数微分与导数的关系**

$y = f(x)$ 在$x_0$ 点可微的充要条件是$f(x)$ 在$x_0$ 点可导,当$f(x)$ 在$x_0$ 点可导时

$$\mathrm{d}f|_{x=x_0} = f'(x_0)\,\Delta x.$$

**证明** 充分性: 设$y = f(x)$ 可导, 则由(3.3), 得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x) \quad (x \to x_0).$$

由微分的定义知$\mathrm{d}f|_{x=\mathrm{x}_0} = f'(x_0)\,\Delta x$.

必要性:设$y = f(x)$ 在$x_0$ 点可微,则

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

这时有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

从而$f(x)$ 在$x_0$ 点可导, 且$f'(x_0) = A$. 因此

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = \mathrm{d}f|_{x=x_0} = f'(x_0)\,\Delta x.$$

因此, $f(x)$ 在$x_0$ 点可微且$|\Delta x|$ 很小时

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x} \tag{3.4}$$

这是近似计算$f(x_0 + \Delta x)$ 的常用公式.

**例 3.38** 求$\sqrt[5]{0.99}$ 的近似值.

**解** 设$y = f(x) = \sqrt[5]{x}$, 由于$f(x) = \sqrt[5]{x}$ 在$x = 1$ 点可微, 因此由公式(3.4) 得

$$\sqrt[5]{0.99} = f(1 - 0.01) \approx f(1) + f'(1)(-0.01) = 1 - \frac{1}{5} \times 0.01 = 0.998.$$

在测量问题中一般来说往往是测量一些容易得到的量，然后通过计算得到最后结果。这时使用微分可以对绝对误差和相对误差作出估计.

例 3.39　假定用测量球的直径来得到求的体积。为了所得到的球体积的相对误差不超过1%, 问测量直径的相对误差不超过多少才行？

解　从直径$D$ 计算球体积V 的公式是因此有

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi}{2}D^2\,\mathrm{d}D.$$

我们看到, 由于用了微分代替增量, 公式就很简单, 而且一定是线性的. 这样就有

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = 3\frac{\mathrm{d}D}{D}.$$

因此为了所得到的球体积的相对误差不超过1%, 在测量直径时的相对误差应当控制在0.33% 之内.

例 3.40　求函数$y = x^3$ 当$x = 2, \Delta x = 0.02$ 时的微分.

解　先求函数在任意点$x$ 的微分

$$\mathrm{d}y = \left(x^3\right)'\Delta x = 3x^2\Delta x$$

再求函数当$x = 2, \Delta x = 0.02$ 时的微分

$$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = \left(3x^2\Delta x\right)\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3\cdot 2^2\cdot 0.02 = 0.24.$$

例 3.41　求函数$y = x$的微分.

解

$$dy = dx = 1\cdot\Delta x = \Delta x.$$

即,

$$\boxed{dx = \Delta x.}$$

注 3.11　通常把自变量$x$ 的增量$\Delta x$ 称为自变量的微分, 记作$\mathrm{d}x$, 即$\mathrm{d}x = \Delta x$. 于是函数$y = f(x)$ 的微分又可记作

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

这就是说, 函数的微分$\mathrm{d}y$ 与自变量的微分$\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数. 因此, 导数也叫做“微

商”.

根据导数的运算法则，可以得到导数的微分运算法则.

**定理 3.7 微分的四则运算法则**

(1) $\mathrm{d}(C)=0$($C$ 为常数)； (2) $\mathrm{d}(Cf(x))=C\,\mathrm{d}f(x)$($C$ 为常数);

(3) $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm \mathrm{d}g(x)$;

(4) $\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$;

(5) $\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq 0)$.

**证明** 以乘法法则为例证明。根据函数微分的表达式,有

$$\mathrm{d}(fg)=(fg)'\mathrm{d}x$$

再根据乘积的求导法则, 有

$$(fg)'=f'g+fg'$$

于是

$$\mathrm{d}(fg)=(f'g+fg')\,\mathrm{d}x=f'g\,\mathrm{d}x+fg'\mathrm{d}x$$

由于

$$f'\mathrm{d}x=\mathrm{d}f,g'\mathrm{d}x=\mathrm{d}g$$

所以

$$\mathrm{d}(fg)=g\,\mathrm{d}f+f\,\mathrm{d}g.$$

**定理 3.8 复合函数的微分**

设$y=f[g(x)]$ 是由可微函数$y=f(u)$ 和$u=g(x)$ 复合而成,则$y=f[g(x)]$ 关于$x$ 可微, 且

$$\mathrm{d}(f[g(x)])=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=f'[g(x)]\mathrm{d}g(x).$$

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

**性质 3.2** 将$u$ 看作是自变量(即函数$y=f(u)$ 的自变量), 则函数微分为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

将$u$看作中间变量(复合函数的$f(g(x))$的中间变量), 仍有微分形式$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$. 这一性质称为**微分形式不变性**. 即,当变换自变量时, 微分形式$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$并不改变.

利用一阶微分的微分形式不变性可以得到参数方程求导法则.

**定理 3.9 参数方程求导公式法则**

设参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$$

中$x(t),y(t)$关于$t$可导,且$x'(t)\neq 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}, t\in[\alpha,\beta].$$

证明 由于

$$\mathrm{d}y=y'(t)\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x=x'(t)\mathrm{d}t, x'(t)\neq 0$$



因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)\mathrm{d}t}{x'(t)\mathrm{d}t}=\frac{y'(t)}{x'(t)}, t\in[\alpha,\beta].$$

例 3.42 $y=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)$, 求$\mathrm{d}y$.

解

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)\right)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\left(x^2\right)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

例 3.43 设$y=f(u)$可微, 求下列函数的微分

(1) $y=f(2x+1)$; (2) $y=f(\sin x)$;

解 (1)

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}[f(2x+1)]=f'(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=2f'(2x+1)\mathrm{d}x$$

(2)

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}[f(\sin x)]=f'(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)=f'(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

例 3.44 求由方程$y\sin x-\cos(x-y)=0$确定的隐函数的微分$\mathrm{d}y$.

解 利用一阶微分形式不变性, 有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

例 3.45 (1) $\mathrm{d}(\quad)=xdx$; (2) $\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t(\omega\neq 0)$.

解 (1)

$$\mathrm{d}\left(x^2\right)=2x\,\mathrm{d}x$$

可見

$$x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left(x^2\right)=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=x\,\mathrm{d}x$$

一般地, 有

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=x\,\mathrm{d}x\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

或

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

一般地,有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t(C\text{ 为任意常数}, \omega\neq 0).$$

# § 3.4 高阶导数

## 3.4.1 高阶导数的定义

变速直线运动的速度$v(t)$ 是位置函数$s(t)$ 对时间$t$ 的导数, 即

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \text{或} v=s',$$

而加速度$a$ 又是速度$v$ 对时间$t$ 的变化率,即速度$v$ 对时间$t$ 的导数:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \text{ 或} a=(s')' \ .$$

这种导数的导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$ 或$(s')'$ 叫做$s$ 对$t$ 的二阶导数, 记作

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \text{ 或} s''(t).$$

**定义 3.4 高阶导数**

若$y'=f'(x)$ 在$x_0$ 点可导, 则称$y=f(x)$ 在$x_0$ 点二阶可导, 且称$y'=f'(x)$ 在$x_0$ 点的导数为$y=f(x)$ 在$x_0$ 点的二阶导数, 用$f''(x_0)$ ( 或 $y''|_{x=x_0}$, 或 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$, 或 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$ )表示.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4y}{dx^4}$.

一般地,函数$f(x)$ 的$n-1$ 阶导数的导数称为函数$f(x)$ 的$n$ 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或} \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数. 相应地, $f(x)$ 称为零阶导数; $f'(x)$ 称为一阶导数.

## 3.4.2 高阶导数求解举例

直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数

例 3.46 设$y=\arctan x$, 求$f''(0), f'''(0)$.

**解**

$$y'=\frac{1}{1+x^2},\quad y''=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ y'''=\left(\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$f''(0)=\left.\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x=0}=0,\ \ f'''(0)=\left.\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\right|_{x=0}=-2.$$

**例 3.47** 设$xy+\ln y=1$, 求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

**解** 先求$y'$：两边对隐函数方程的$x$ 求导, 则

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0 \tag{3.5}$$

从而

$$y'=-\frac{y^2}{1+xy} \tag{3.6}$$

再求$y''$:

方法一：两边对(3.5) 关于$x$ 求导, 则

$$y'+y'+xy''+\frac{-y'}{y^2}y'+\frac{1}{y}y''=0.$$

整理得

$$y''=\frac{\frac{(y')^2}{y^2}-2y'}{x+\frac{1}{y}}\xlongequal{\text{代入}y'}(1+xy)^3+2xy^4.$$

方法二：对(3.6)关于$x$ 求导，

$$y''=\cdots=\frac{y^3+y'\left(xy^2-2y-2xy^2\right)}{(1+xy)^2}\xlongequal{\text{代入}y'}(1+xy)^3+2xy^4.$$

**例 3.48** 设$y=f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$ 求$y''$.

**解** $y'=f'\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}f'\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$. 从而

$y''=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)'f'\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\left(f'\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)\right)'$

$=\cdots=\frac{x^2}{a^2+x^2}f''\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)+\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}f'\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$

**例 3.49** 求$(1)y=xe^{x^2}$ $(2)y=\ln\left(1-x^2\right)$ 的二阶导数.

$(1)y''=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}$. (2) $y''=\frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2}$.

逐阶求导，寻求规律，写出通式，归纳证明

**例 3.50** 指数函数$y=\mathrm{e}^x$ 的$n$ 阶导数.

**解** $y'=\mathrm{e}^x,\quad y''=\mathrm{e}^x,\quad y'''=\mathrm{e}^x,\quad y^{(4)}=\mathrm{e}^x.$

一般地，可得

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.}$$

**例 3.51** 求正弦函数与余弦函数的$n$ 阶导数.

**解** $y=\sin x,$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)}=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{4\pi}{2}\right)$$

若

$$y^{(k)}=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),$$

则

$$y^{(k+1)}=\left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right),$$

因此

$$\boxed{(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).}$$

用类似方法，可得

$$\boxed{(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).}$$

例 3.52 设$y = x^\alpha (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

**解** $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = \left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boxed{(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (n \geq 1).}$$

若$\alpha$ 为自然数$n$, 则

$$\boxed{(x^n)^{(n)} = n!, \quad (x^n)^{(n+1)} = (n!)' = 0.}$$

例 3.53 设$y = \ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

**解**

$$y' = \frac{1}{1+x} \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3} \quad y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boxed{(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1, 0! = 1).}$$

由此可得,

$$\boxed{\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.}$$

## 高阶导数运算法则

如果函数$u = u(x)$ 及$v = v(x)$ 都在点$x$ 处具有$n$ 阶导数,那么$u \pm v$, $uv$ 在点$x$ 处具有$n$ 阶导数, 且

**性质 3.3**

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

注 3.12　上式称为莱布尼茨(Leibniz) 公式, 展开式为

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} =& u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \\ & \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

其形式与$(u+v)^n$ 按二项式定理展开

$$(u+v)^n = u^n v^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2 + \cdots + u^0 v^n$$

相同. 记号$\sum$ 表示对同一类型诸项求和. 例如, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{n-k} v^k$ 表示在$\mathrm{C}_n^k u^{n-k} v^k$ 中依次令$k = 0, 1, \cdots, n$, 然后对这样得到的$n+1$ 项求和.



例 3.54　$y = x^2 \mathrm{e}^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解　设$u = \mathrm{e}^{2x}, v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 2^k \mathrm{e}^{2x} (k = 1, 2, \cdots, 20),$$
$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, 4, \cdots, 20),$$

代人莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned}y^{(20)} &= \left(x^2 \mathrm{e}^{2x}\right)^{(20)} = 2^{20}\mathrm{e}^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18}\mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20}\mathrm{e}^{2x}\left(x^2 + 20x + 95\right).\end{aligned}$$

间接法：利用已知的高阶导数公式，通过四则运算，变量代换等方法，求出n阶导数

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(1)\ (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x \\
&(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&(4)\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \\
&(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}
\end{aligned}
}
$$

例 3.55 设$y = \frac{1}{x^2-1}$，求$y^{(5)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \\
y^{(5)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6} - \frac{-5!}{(x+1)^6}\right] \\
&= 60\left[\frac{1}{(x+1)^6} - \frac{1}{(x-1)^6}\right]
\end{aligned}
$$

例 3.56 设$y = \sin^6 x + \cos^6 x$，求$y^{(n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 \\
&= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right) \\
&= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \\
\therefore y^{(n)} &= \frac{3}{8}\cdot 4^n \cdot \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

# § 3.5 导数与微分在经济学中的应用

## 3.5.1 边际分析

边际概念是与导数密切相关的概念，它反映了一种经济变量$y$ 相对于另一种经济变量$x$ 的变化率.

1. 边际成本
   设厂商的成本函数为$C = C(q)$ ($q$ 为产量)，则边际成本为
   $$MC = C'(q) = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}.$$
   经济含义: $C(q+1) - C(q) \approx C'(q)$. 在产量$q$ 的基础上增加1 单位的产量近似花费的成本.
2. 边际收益
   设厂商的需求函数为$P = P(q)$ （$q$ 是产量, $P$ 为产品的销售价格），则厂商的收益为$R = R(q) = qP(q)$. 边际收益为
   $$MR = R'(q) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}.$$
   经济含义: $R(q+1) - R(q) \approx R'(q)$, 在销售量为$q$ 时, 多销售1 个单位产品近似增加的收入.
3. 边际利润
   厂商的利润函数为$L(q) = R(q) - C(q) = qP(q) - C(q)$. 则边际利润为
   $$ML = L'(q) = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q}.$$
   经济含义: $L(q+1) - L(q) \approx L'(q)$, 因此边际利润$ML = L'(q)$ 表示销售量为$q$ 时, 多销售1 个单位产品近似增加的利润.

例 3.57　例设某产品的需求方程为$p + 0.1x = 80$($p$ 是价格, $x$ 是需求量), 成本函数为$C(x) = 5000 + 20x$ 元, 求边际利油函数$L'(x)$, 并分别求$x = 150, 300$ 和400 时的边际利润.

解　$R(x) = px = (80-0.1x)x = 80x-0.1x^2$ $L(x) = R(x)-C(x) = 80x-0.1x^2-(5000+20x) = -0.1x^2 + 60x - 5000.$　$L'(x) = -0.2x + 60$ $L'(150) = 30, L'(300) = 0, L'(400) = -20.$

销售第151 个产品时, 利润会近似增加30 元;

销售第301 个产品时, 不增加利润.

销售第401 个产品时,利润将会近似减少20 元.

### 3.5.2 弹性分析

例 3.58 比较下面3 种商品的需求量因涨价而下降的程度大小:

甲) 单价10 元,市场需求量100 万单位.若↑ 1 角,需求量下降1 万单位.

乙) 单价10 元,市场需求量50 万单位. 若↑ 1 角,需求量下降1 万单位.

丙) 单价0.2 元,市场需求量1.6 万单位. 若↑ 1 角,需求量下降1 万单位.

三者的需求量因涨价而引起的绝对变化率均相同$\left(\frac{1万}{1角}\right)$, 但由于各自的价格, 需求量的基数不同,其受影响程度为丙> 乙> 甲.

绝对变化量: $\Delta x, \Delta y$, 平均绝对量变化率: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 相对变化量: $\frac{\Delta x}{x_0}, \frac{\Delta y}{y_0}$, 平均相对量变化率: $\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$. 如果考虑顺时变化，在上式中取极限即可.

弧弹性, 点弹性, 弹性函数

- 对经济函数$y = f(x), x_0 \neq 0$, 且$f(x_0) = y_0 \neq 0$, 则$\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 称为函数$y = f(x)$ 在$x_0$ 与$x_0 + \Delta x$ 之间的**弧弹性**.
- 函数$y = f(x)$, 如果极限$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0} = f'(x_0)\frac{x_0}{y_0}$ 存在, 则称此极限为函数$y = f(x)$ 在$x_0$ 处的**点弹性**, 记为 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x_0}$.
- 如果经济函数$y = f(x)$ 在区间$(a, b)$ 内可导, 且$f(x) \neq 0$, 则称$f'(x)\frac{x}{f(x)}$ 为函数$y = f(x)$ 在$(a, b)$ 内的**弹性函数**. 记为$\frac{Ey}{Ex}$, 即$\frac{Ey}{Ex} = f'(x)\frac{x}{f(x)}$.

注 3.13 经济解释:

1. 弧弹性反映了经济变量$y$ 的变动百分比与经济变量$x$ 的变动百分比的比值, 其结果与采用的单位无关, 即“无量纲”.

2. 当$|\Delta x|$ 较小时, 则(点弹性) $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x_0} \approx \frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$( 弧弹性记为$K$) 即

$$\frac{\Delta y}{y_0} \approx K\frac{\Delta x}{x_0}$$

则当$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{100}$($x$ 变动1%)时，有$\frac{\Delta y}{y_0} \approx K\%$($y$ 变动$K\%$)} 即点弹性$K = \left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x_0}$ 表示了当$x$ 在$x_0$ 基础上变动1% 时, 相应的$y$ 在原$y_0$ 基础上近似变动了$K\%$.

例 3.59 分别求出线性需求函数$Q = -2p + 3$ 在$p = 0.5, p = 1$ 处的弹性, 并给出经济解释.

**解**

$$\frac{EQ}{Ep}=Q'(p)\frac{p}{Q}=(-2)\frac{p}{-2p+3},$$

$$\left.\frac{EQ}{Ep}\right|_{p=0.5}=(-2)\frac{0.5}{-2\times 0.5+3}=-0.5,$$

$$\left.\frac{EQ}{Ep}\right|_{p=1}=(-2)\frac{1}{-2\times 1+3}=-2.$$

$\left.\frac{EQ}{Ep}\right|_{p=1}=-2$ 表示了当价格$p$ 在1 基础上变动1%(上涨)时, 相应的需求量$Q$ 在原$Q(1)$ 基础上近似变动了$-2\%$( 减少).

## 需求弹性分析

对于需求函数$Q=Q(p)$, 其弹性函数称为需求价格弹性,简称为需求弹性, 即

$$\frac{EQ}{Ep}=Q'(p)\frac{p}{Q}\text{记为}\varepsilon_p$$

一般地, $\varepsilon_p<0$. 需求价格弹性表明: 当价格上涨(或下跌) 1% 时, 需求量近似减少(或增加) $\longrightarrow|\varepsilon_p|\%$. 经济学上,为简便起见,通常将非负值$|\varepsilon_p|$ 称为**需求弹性**.

$|\varepsilon_p|>1$ : 高弹性(富有弹性), 价格变动对商品需求量影响较大(可有其他代替品的商品)

$|\varepsilon_p|<1$ : 低弹性(缺乏弹性), 价格变动对商品需求量影响不大(必须的但无其他代替品的商品)

$|\varepsilon_p|=1$ : 单位弹性.

例,电、食盐等商品缺乏弹性, 而如猪肉等为高弹性商品.

商品经济中, 商品经营者关心的是提价($\Delta p>0$) 或降价($\Delta p<0$) 对总收入的影响。现考察当$p$ 发生微小涨价$\Delta p$ 时收入的变化, 即

$$\begin{aligned}\Delta R\approx dR=d(p\cdot Q)&=[Q+pQ'(p)]\,dp=Q\left[1+\frac{p}{Q}Q'(p)\right]dp\\&=Q\left(1+\varepsilon_p\right)dp=Q\left(1+\varepsilon_p\right)\Delta p.\end{aligned}$$

由于$Q,\Delta p$ 均$>0$, 从而

$$\begin{cases}1+\varepsilon_p>0\text{ 时}, \rightarrow \Delta R>0\longrightarrow R\uparrow, & |\varepsilon_p|<1\\ 1+\varepsilon_p<0\text{ 时}, \rightarrow \Delta R<0\rightarrow R\downarrow, & |\varepsilon_p|>1\\ 1+\varepsilon_p=0\text{ 时}, \rightarrow \Delta R=0\longrightarrow R\text{ 不变}. & |\varepsilon_p|=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{缺乏弹性, 涨价增加总收入,} \\ \text{富有弹性, 降价增加总收入,} \longrightarrow \text{薄利多销政策} \\ \text{单位弹性, 价格变动对总收入无甚影响} \end{cases}$$

例 3.60 设某种商品的需求函数$Q=400-100p$, 求$p=1,2,3$ 时的需求弹性.并给以适当的经济解释.

解 $\varepsilon_p=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=\frac{p}{400-100p}\cdot(-100)=\frac{-100p}{400-100p}$.

当$p=1$ 时, $\varepsilon_p=-\frac{1}{3}$, 为低弹性,此时降价总收益减少，提价总收益将增加;

当$p=2$ 时, $\varepsilon_p=-1$, 为单位弹性, 提价或降价对总收益均无明显影响;

当$p=3$ 时, $\varepsilon_p=-3$, 为高弹性, 降价总收益将增加.

例 3.61 已知某商品需求弹性在$1.3\sim 2.1$ 之间, 若该商品降价10%. 试问该商品的销售量预期会增加多少(百分比)? 总收益会增加多少（百分比）?

解 由前面的分析可知: $\varepsilon_p=Q'(p)\frac{p}{Q}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta p}\frac{p}{Q}$, 于是

$$\varepsilon_p\approx\frac{\Delta Q}{\Delta p}\frac{p}{Q}\Rightarrow\frac{\Delta Q}{Q}\approx\varepsilon_p\frac{\Delta p}{p}$$

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{\Delta R}{pQ}\approx\frac{Q\left(1+\varepsilon_p\right)\Delta p}{pQ}\approx\left(1+\varepsilon_p\right)\frac{\Delta p}{p}.$$

于是有:

$$\begin{aligned} &\text{当}\ |\varepsilon_p|=1.3\ \text{时},\ \frac{\Delta Q}{Q}\approx(-1.3)\times(-0.1)=13\% \\ &\frac{\Delta R}{R}\approx(1-1.3)\times(-0.1)=3\% \\ &\text{当}\ |\varepsilon_p|=2.1\ \text{时},\ \frac{\Delta Q}{Q}\approx(-2.1)\times(-0.1)=21\% \\ &\frac{\Delta R}{R}\approx(1-2.1)\times(-0.1)=11\% \end{aligned}$$

可见, 降价10% 时, 商品销售量预期增加约$13\%\sim 21\%$; 总收益预期增加$3\%\sim 11\%$。