第8章　微分方程初步

微积分研究的对象是函数关系, 但在实际问题中, 往往很难直接得到所研究的变量之间的函数关系, 却很容易建立这些变量与它们的导数或微分之间的联系, 从而得到一个关于未知函数的导数或微分的方程, 即微分方程. 通过求解方程, 可以找到未知的函数关系. 本章主要介绍微分方程的一些基本概念, 常见方程类型及其解法, 微分方程在经济学中简单的应用.

§ 8.1 微分方程的基本概念

在物理学、经济学等领域，可以看到很多微分方程的例子.

例 8.1　一曲线通过$(0,1)$ 点, 其上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标加1 , 求这条曲线的方程.

解　设所求曲线为$y=f(x)$,

$$y'=x+1,\ 且\ y|_{x=0}=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2+x+C, C=1.$$

故所求曲线为$y=\frac{1}{2}x^2+x+1$.

例 8.2　列车在平直路上以20 m/s 的速度行驶, 制动时获得加速度$a=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$, 求制动后列车的运动规律.

解　设列车制动后t 秒行驶了s 米, 即求$s=s(t)$.
已知

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \\ s|_{t=0}=0,\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 \end{cases}$$

对第一个式子两次积分可得: $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$, 利用第二个式子可得: $C_1=20, C_2=0$, 因此所求运动规律为: $s=-0.2t^2+20t$.

定义 8.1 微分方程

含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分) 的函数方程, 称为**微分方程**.

例 8.3 $y' = xy$, $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^x$, $\left(t^2 + x\right)\mathrm{d}t + x\,\mathrm{d}x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = x + y$, 都是微分方程. 与代数方程不同的，微分方程的未知数是函数.

未知函数都是一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 未知函数都是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**. 本课程只讨论常微分方程，后面提到的微分方程都是指常微分方程.

定义 8.2 微分方程的阶

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数或微分的阶数, 称为微分方程的阶.

例 8.4 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ 是一阶微分方程; $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 是四阶微分方程; $3y^{(n)} - 5 = 0$ 是n 阶常微分方程.

n 阶(常) 微分方程的一般形式是

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{8.1}$$

其中x 为自变量, y 为未知函数, $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right)$ 是$x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的已知函数, 且$y^{(n)}$ 在方程中一定出现.

可表示为如下形式:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{8.2}$$

的微分方程称为n 阶**线性常微分方程**, 其中$a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 和$f(x)$ 均为自变量x 的已知函数. 不能表示成形如(8.2) 形式的微分方程,统称为**非线性方程**.

例 8.5 $y' = x + 1$, $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4$ 是线性微分方程. $(y')^2 = 3x, y'y + 3x^2 = 0$ 是非线性方程.

定义 8.3 微分方程的解

设函数$y = \varphi(x)$ 在区间I 上存在n 阶导数. 如果将$y = \varphi(x)$ 代入方程(8.1) 后, 使方程在I 上为恒等式, 则称函数$y = \varphi(x)$ 是方程(8.1)在I 上的解. 如果关系式$\Phi(x, y) = 0$ 确定的隐函数$y = \varphi(x)$ 是方程(8.1) 的解, 则称$\Phi(x, y) = 0$ 是方程(8.1) 在区间I 上的隐式解.

例 8.6 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + C, y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 都是$y' = x + 1$ 的解, 其中C 为任意常数. $s = -0.2t^2 + 20t, s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$ 都是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4$ 的解, 其中C_1, C_2 为任意常数.

: 通常如果常数C_1, C_2 不能合并, 这时称他们为相互独立的. 如果可以合并, 则不是相互独立的, 如$s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2 t \ldots$

一般来说，微分方程通过积分求解，n 阶微分方程需要积分n 次，因此会出现n 个积分常数。回忆不定积分与原函数的关系，一个函数的不定积分就是函数的全体原函数. 如果方程(8.1) 的解中含有n 个独立的任意常数, 则这个解就概括了方程(8.1) 所有的解，此时称这样的解为方程(8.1) 的**通解**. 而通解中给任意常数以确定值的解, 称为方程(8.1) 的**特解**. 确定通解中任意常数的条件称为微分方程的**定解条件**. 由微分方程和定解条件确定特解的问题称为**微分方程的定解问题**。
微分方程(8.1) 常见的定解条件是

$$y\left(x_0\right)=y_0, y'\left(x_0\right)=y_1, \cdots, y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_{n-1} \tag{8.3}$$

(8.3) 又称为初始条件、**初值条件**, 其中$y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 为给定常数. 相应的定解问题又称为**微分方程的初值问题**.

例 8.7　列车在平直路上以20 m/s 的速度行驶, 制动时获得加速度$a=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$, 求制动后列车的运动规律.

解　设列车制动后t 秒行驶了s 米, 即求$s=s(t)$. 得到如下微分方程初值问题：
已知

$$\begin{cases} \overbrace{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4}^{\text{微分方程}} \\ \underbrace{\left.s\right|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20}_{\text{定解条件}} \end{cases}$$

对第一个式子两次积分可得: $s=-0.2t^2+C_1 t+C_2$ (通解), 利用第二个式子可得: $C_1=20, C_2=0$, 因此所求运动规律为: $s=-0.2t^2+20t$ (特解).

§ 8.2 一阶微分方程

一阶微分方程一般形式可表为$F\left(x, y, y'\right)=0$，其中$F\left(x, y, y'\right)$ 是x, y, y' 的已知函数. 下面介绍一阶微分方程的初等解法. 一阶微分方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题，也称为初等积分法.

8.2.1 可分离变量微分方程

若一阶微分方程可写成这样的对称形式: $f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$, 则称此方程为**可分离变量的微分方程**. 可分离变量方程的特点是方程经过适当变形, 可以将含有同一变量的函数与微分分离到等式的同一端.

例 8.8　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x^2y^{\frac{4}{5}}\Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}\,\mathrm{d}y=2x^2\,\mathrm{d}x.$

可分离变量的微分方程的解法:

(1) 分离变量, 将方程变形成$f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$.

(2)两边分别对各自的自变量积分$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(y)\mathrm{d}y$, 得方程的通解$F(x)=G(y)+C$ (为一个隐式通解), 其中函数$F(x)$ 和$G(y)$ 依次为$g(y)$ 和$f(x)$ 的一个原函数.

例 8.9　求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2(x-1)^2\left(1+y^2\right)$ 的通解.

解　分离变量, 得

$$\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=2(x-1)^2\,\mathrm{d}x.$$

两边积分, 得

$$\int\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=2\int(x-1)^2\,\mathrm{d}x.$$

即得通解

$$\arctan y=\frac{2}{3}(x-1)^3+C\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

例 8.10　求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+4x^2}$ 的通解.

解　该方程为可分离变量的方程. 当$y\neq 0$ 时, 作变量分离得$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$, 两端积分$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$, 即

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\arctan 2x+C_1\Rightarrow y=\pm\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan 2x+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{\arctan 2x}}=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan 2x},$$

$$\left(C=\pm\mathrm{e}^{C_1}\neq 0\right)$$

当$y=0$ 时, $\because y\equiv 0, \therefore y'\equiv 0$, 使方程恒成立, 此时$y=0$ 为方程的奇解. 这个解也包含在通解的结果内($C=0$), 因此方程通解为

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan 2x}.$$

注 8.1　对于微分方程$y'=F(x,y)$, 如果$F(x,y_0)\equiv 0$, 则$y=y_0$ 是微分方程$y'=F(x,y)$的解, 这个解称为奇解.

例 8.11　求方程$y'\sin x=y\ln y$ 在初始条件$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$ 下的特解.

解　分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, 两边积分得$\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, 即$\int\frac{\mathrm{d}\ln y}{\ln y}=\int\csc x\,\mathrm{d}x$, 得$\ln|\ln y|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln|C_1|=\ln\left|C_1\tan\frac{x}{2}\right|\Rightarrow\ln y=\pm C_1\tan\frac{x}{2}=C\tan\frac{x}{2}$, 即$y=\mathrm{e}^{C\tan\frac{x}{2}}$, 因为$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$, 所以$\mathrm{e}=\mathrm{e}^{C\tan\frac{\pi}{4}}\Rightarrow C=1$, 所以$y=e^{\tan\frac{x}{2}}$ 即为所求特解.

8.2.2 齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.4}$$

的一阶微分方程, 称为齐次微分方程, 简称为**齐次方程**. 齐次方程是可以通过变量代换化为可分离变量的方程来求解的一种重要方程类型.

齐次方程的解法:

(1) 作变量代换: 令$u=\frac{y}{x}$, 即$y=xu$, 则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ (u 是新的未知函数);

(2) 代入方程(8.4) 中得$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u)$, 得到可分离变量的方程$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{f(u)-u}{x}$.

(3) 分离变量法求解$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\ln|x|+C$, 将$u=\frac{y}{x}$ 回代即得通解($f(u)-u\neq 0$).

注 8.2　若$f(u_0)-u_0=0$, 则$u=u_0$ 是新方程的解, 代回原方程, 得齐次方程(8.4)的奇解$y=u_0x$.

例 8.12　求方程$y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解.

解　所给方程为齐次方程, 令$u=\frac{y}{x}$, 代人原方程, 得

$$xu'+u=u+\tan u$$

即

$$\frac{x\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$$

分离变量, 得

$$\cot u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分,得

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln C=\ln|xC|$$

即

$$\sin u=Cx$$

将$u=\frac{y}{x}$ 代人上式. 即得方程通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx$$

$$y=x\arcsin Cx$$

其中C 为任意常数(奇解$y=0$ 也包含在通解公式中).

例 8.13 解微分方程

$$y^2 + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

解 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

因此是齐次方程. 令 $\frac{y}{x} = u$, 则

$$y = xu, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程变为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{u-1}.$$

分离变量,得

$$\left(1 - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分, 得

$$u - \ln|u| + C_1 = \ln|x|,$$

或写为

$$\ln|xu| = u + C_1.$$

以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的u, 便得所给方程的通解为

$$\ln|y| = \frac{y}{x} + C_1 \text{ 或} y = C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\ (C = \pm\mathrm{e}^{c_1}).$$

例 8.14 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$, 显然为齐次方程.

$$\text{令} u = \frac{y}{x}, \text{则} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \text{故原式为} u + xu' = \frac{2u^2-u}{1-u+u^2},$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}\right) - \frac{2}{u-2} + \frac{1}{u-1}\right]\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\ln|u-1| - \frac{3}{2}\ln|u-2| - \frac{1}{2}\ln|u| = \ln|x| + \ln|C_1|, \text{即} \frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}} = Cx.$$

微分方程的解为$(y-x)^2 = Cy(y-2x)^3$.

8.2.3 一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{8.5}$$

的一阶微分方程, 称为**一阶线性微分方程**, 其中, 若$Q(x) \equiv 0$, 方程变为

$$y' + P(x)y = 0 \tag{8.6}$$

称方程(8.6) 为**一阶齐次线性方程**, 若$Q(x)$ 不恒等于零, 则称方程(8.5) 为**一阶非齐次线性方程**.

例 8.15 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sin t + t^2$, 为线性非齐次方程; $yy' - 2xy = 3$, $\quad y' - \cos y = 1$, 非线性方程.

通过分离变量法求解一阶齐次线性方程(8.6):
分离变量$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$, 两边积分得$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln|C_1|$$

齐次方程的通解为:

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)dx}$$

其中$C = \pm C_1$ 为任意常数，$\int P(x)dx$ 为函数$P(x)$ 的任意一个原函数.

一阶非齐次线性方程(8.5) 可以利用常数变易法求解. 把齐次方程通解中的任意常数变易为待定函数，并通过确定待定函数而求得方程解的方法，称为**常数变易法**. 即将非齐次方程对应的齐次方程(8.6) 通解中的C 换成x 的末知函数$u(x)$.

一阶非齐次线性方程的常数变易法:

(1) 作变换

$$y(x) = u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{8.7}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - uP(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

(2) 带入原方程

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - uP(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)dx} + P(x)u\mathrm{e}^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

化简得

$$u' = Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}.$$

(3) 两端积分求解u 得

$$u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

(4) 将u 带入(8.7) 得非齐次线性方程(8.5) 的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

注 8.3　非齐次线性方程(8.5) 的通解展为两项之和:

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

上式右端第一项$C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是对应的齐次线性方程(8.6) 的通解; 第二项

$$\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

是非齐次线性方程(8.5) 的一个特解(取$C=0$, 便得此特解). 这就是一阶线性非齐次方程通解的结构: 一阶线性非齐次方程的通解等于对应的线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和.

例 8.16　求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解.

解　这是一个非齐次线性方程. 先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\,\mathrm{d}x}{x+1},$$

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+C_1,$$

$$y=C(x+1)^2\,(C=\pm\mathrm{e}^{c_1}).$$

用常数变易法, 把C 换成u, 即令

$$y=u(x+1)^2, \tag{8.8}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x+1)^2+2u(x+1),$$

代如所给非齐次方程, 得

$$u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

两端积分, 得

$$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

再把上式代入式(8.8), 即得所求方程的通解为

$$y = (x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right].$$

例 8.17 求微分方程$\begin{cases} x^2\,\mathrm{d}y + (2xy - x + 1)\mathrm{d}x = 0 \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$ 的特解.

解 原方程变形为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y = \frac{x-1}{x^2}$, 化为一阶线性非齐次方程, 其中$P(x) = \frac{2}{x}$,$Q(x) = \frac{x-1}{x^2}$, 所以原方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{dx}}\left(\int \frac{x-1}{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x}\mathrm{dx}}\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int \frac{x-1}{x^2}\cdot x^2\,\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + C\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

又因为$y|_{x=1} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$, 故所求特解为$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.

伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}(\alpha \neq 0, 1). \tag{8.9}$$

当$\alpha = 0$ 时, 方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$, 即为一阶线性非齐次微分方程; 当$\alpha = 1$ 时，方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (P(x) - Q(x))y = 0$ 为一阶线性齐次微分方程; 当$\alpha \neq 0, 1$ 时, 方程为非线性微分方程, 通过变量代换它也可化为线性的.

伯努利(Bernoulli)方程(8.9) 两端除以y^{α}, 得

$$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x) \tag{8.10}$$

其中$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{1-\alpha}$ 只差一个常数因子$1-\alpha$. 作变量代换, 令$z = y^{1-\alpha}$, 则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 方程(8.10) 两边同乘$1-\alpha$, 得

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)P(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)Q(x),$$

以z, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$$

上式为关于未知函数z 的一阶线性微分方程, 求出其通解后, 将$z=y^{1-\alpha}$ 代回原变量, 得到伯努利方程的通解

$$y^{1-\alpha}=z=e^{-\int(1-\alpha)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-\alpha)e^{\int(1-\alpha)P(x)dx}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

例 8.18 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解 令$z=y^{1-\alpha}=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$, 则$y=z^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 代入原方程得

$$2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}z^2=x^2z,\ \text{即}\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x^2,$$

由一阶线性非齐次方程通解公式得$z=e^{-\int-\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{1}{2}x^2e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$, 解得$z=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)$, 即$y=x^4\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$.

§ 8.3 二阶常系数线性微分方程

一般来说，高阶微分方程的求解是十分困难的。本节我们只讨论二阶常系数线性微分方程的求解方法。

8.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程

形如

$$y''+py'+qy=0 \tag{8.11}$$

的方程, 称为**二阶常系数齐次线性微分方程**, 其中p,q 为已知常数. 关于方程(8.11)解的结构，我们有

定理 8.1 二阶常系数齐次线性微分方程解的线性性质

设$y_1(x),y_2(x)$ 是方程(8.11) 的两个解, 则

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是方程(8.11) 的解, 其中C_1,C_2 为任意常数.

定理 8.2 二阶常系数齐次线性微分方程解的结构

设$y_1(x), y_2(x)$ 是方程(8.11) 的两个**线性无关**的解, 则

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

是方程(8.11) 的通解, 其中C_1, C_2 为任意常数.

两个函数$y_1(x), y_2(x)$ **线性无关**是指对任意常数k, $y_1(x) \neq ky_2(x)$ (或$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq Const$).

求解二阶常系数齐次线性微分方程的关键就是找到两个线性无关解。观察猜想方程(8.11) 具有指数形式的特解$y = e^{rx}$ (r 为待定常数) 代入方程中有

$$\lambda^2e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

代数方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{8.12}$$

称为微分方程(8.11) 的**特征方程**, 其中λ^2, λ 的系数及常数项恰好依次是方程(8.11) 中y'', y' 及y 的系数. 其根

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ 和} \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

称为微分方程(8.11) 的**特征根**.

令$\Delta = p^2 - 4q$, 下面根据特征根的取值情况, 给出方程(8.11) 的通解.

1. 当$\Delta > 0$ 时, 特征方程(8.12) 有两个相异实根λ_1 和λ_2. 这时方程(8.11) 有两个特解

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

由于

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot} \neq \text{ 常数}$$

所以y_1 与y_2 线性无关, 故方程(8.11) 的通解为

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_{12}} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

其中C_1, C_2 为任意常数.

2. 当$\Delta = 0$ 时, 方程(8.12) 有重根$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. 这时方程(8.11)有两个特解

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

和

$$y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x}$$

由于

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \text{ 常数}$$

所以, y_1 与y_2 线性无关, 故方程(8.11) 的通解可表为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中C_1, C_2 为任意常数.

3. 当$\Delta < 0$ 时. 方程(8.12) 有两个共轭复根$\lambda_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}, \lambda_2 = \alpha - \beta\mathrm{i}$ 其中$\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. 这时, 方程(8.11) 有两个特解

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

是, 且y_1 与y_2 线性无关, 故方程(8.11) 的通解可表为

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

其中C_1, C_2 为任意常数.

特征方程$r^2 + pr + q = 0$ 的两个根λ_1, λ_2	微分方程$y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根λ_1, λ_2	$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
两个相等的实根$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$
一对共轭复根$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\,(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

例 8.19　求方程$y'' - 3y' - 4y = 0$ 的通解.

解　特征方程为$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, 有两个不同的实根$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$, 故所求通解为$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$.

例 8.20　求解初值问题$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y|_{x=0} = 4,\ y'|_{x=0} = -2 \end{cases}$.

解　特征方程为$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, 有相同实根$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 故所求通解为$y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-x}$. 利用初始条件得$C_1 = 4, C_2 = 2$, 所求初值问题的解为: $y = (4 + 2x)e^{-x}$.

例 8.21　求方程$y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解　特征方程为$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, 有一对共轭复根$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, 故所求通解为$y = e^{-x}\,(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

8.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

形如

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{8.13}$$

的方程, 称为**二阶常系数非齐次线性方程**, 其中p, q 为已知常数, $f(x) \neq 0$, 称方程(8.11) 为方程(8.13) 的对应齐次方程. 关于方程(8.13) 的通解结构, 我们有：

定理 8.3　二阶常系数非齐次线性方程通解结构

如果$y^*(x)$ 是方程(8.13) 的一个特解, Y 是方程(8.13) 对应齐次方程(8.11) 的通解, 则方程(8.13) 的通解为

$$y(x) = Y + y^*(x).$$

齐次方程(8.11) 的通解Y 的求解已得到解决, 故这里只需求出方程(8.13) 的一个特解y^*. 特解y^* 与方程(8.13) 右端函数$f(x)$ 的形式有关, 在实际应用中$f(x)$ 多为多项式函数、指数函数和三角函数等. 我们采用待定系数法求解y^*, 即根据$f(x)$ 的特殊形式, 给出特解y^* 的待定形式, 代入原方程比较两端表达式以确定待定系数. 我们不加证明地给出$f(x)$ 两种不同形式下的特解形式.

8.3.2.1　$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$ 型

其中λ 是常数, $P_m(x)$ 是x 的一个m 次多项式. 方程(8.13) 具有形如

$$y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

的特解, 其中$Q_m(x)$ 是与$P_m(x)$ 同幂次(m 次) 的多项式, 而k 按λ 不是特征方程的根、是特征单根、是特征重根依次取$0, 1, 2$, 即

$$y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = \begin{cases} Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, & \text{当}\lambda\text{ 不是特征方程的根} \quad (k=0) \\ xQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, & \text{当}\lambda\text{ 是特征方程的单根} \quad (k=1) \\ x^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, & \text{当}\lambda\text{ 是特征方程的重根} \quad (k=2) \end{cases}$$

特别地, $f(x) = P_m(x)$ 时, 方程有特解

$$y^* = x^k Q_m(x) = \begin{cases} Q_m(x), & \text{当0 不是特征方程的根} \quad (k=0) \\ xQ_m(x), & \text{当0 是特征方程的单根} \quad (k=1) \\ x^2Q_m(x), & \text{当0 是特征方程的重根} \quad (k=2) \end{cases}$$

例 8.22　求方程$y'' - 2y' + y = x^2$ 的一个特解.

解　方程右端为$P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, 其中$P_m(x) = x^2, \lambda = 0$. 其对应的特征方程: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, 特征根$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda = 0$ 不是特征根, 设特解$y^* = Ax^2 + Bx + C$, 则$y^{*\prime} = 2Ax + B, y^{*\prime\prime} = 2A$, 将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入方程, 得

$$2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2$$

即

$$Ax^2+(B-4A)x+2A-2B+C=x^2$$

比较同幂次项的系数, 得$A=1, B=4, C=6$, 原方程特解为$y^*=x^2+4x+6$.

例 8.23　求方程$y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解　方程右端为$P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, 其中$P_m(x)=x, \lambda=2$. 其对应的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$, 特征根$\lambda_1=1, \lambda_2=2$, 从而对应齐次方程的通解为$Y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{2x}$ 由于$\lambda=2$ 是单根, 故设方程的特解$y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$, 则

$$y^{*\prime}=\left(2Ax^2+2Ax+2Bx+B\right)\mathrm{e}^{2x}$$

$$y^{*\prime\prime}=(4Ax+2A+2B)\mathrm{e}^{2x}+2\left(2Ax^2+2Ax+2Bx+B\right)\mathrm{e}^{2x}$$

将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入原方程, 得$2Ax+B+2A=x$, 即$\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$, 于是$y^*=x\left(\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{e}^{2x}$. 故原方程通解为$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{e}^{2x}$.

例 8.24　求方程$y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解.

解　方程右端为$P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, 其中$P_m(x)=1, \lambda=1$. 其对应的特征方程: $\lambda^2-2\lambda+1=0$, 特征根$\lambda_1=\lambda_2=1$, 从而对应齐次方程的通解为$Y=(c_1+c_2x)\,\mathrm{e}^x$. 由于$\lambda=1$ 是特征方程的二重根, 设$y^*=Ax^2\mathrm{e}^x$, 即$Q(x)=Ax^2$, 则$Q'(x)=2Ax, Q''(x)=2A$. 因为$\lambda^2+p\lambda+q=1-2+1=0$, 且$2\lambda+p=2-2=0$, 代入原方程得$2A+0\cdot 2Ax+0\cdot Ax^2=1$, 所以$2A=1, A=\frac{1}{2}$, 故原方程的一个特解为$y^*=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$. 因此原方程的通解为$y=(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$.

8.3.2.2　$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

其中λ, ω 是常数, $P_l(x), P_n(x)$ 分别是x 的l 次、n 次多项式, 其中某一个可为零. 方程(8.13) 具有形如

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

的特解. 其中$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是待定的m 次多项式, $m=\max\{l, n\}$. 而k 按$\lambda\pm i\omega$ 不是特征方程的根、是特征单根、依次取$0, 1$, 即

$$y^*=\begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right], & \text{当}\lambda\pm i\omega\text{ 不是特征方程的根}\quad (k=0) \\ x\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right], & \text{当}\lambda\pm i\omega\text{ 是特征方程的单根}\quad (k=1) \end{cases}$$

例 8.25　求微分方程$y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

解　$f(x)$ 属于$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型, 其中$\lambda=0,\omega=2,P_l(x)=x,P_n(x)=0$. 对应的齐次方程为$y''+y=0$, 特征方程为$r^2+1=0$. 由于$\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根, 所以设原方程特解为$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$, 计算$y^{*\prime\prime},y^{*n}$ 并将其代入原方程得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

比较两端同类项的系数得$\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\-3c=0\\-(3d+4a)=0\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{3},b=0,c=0,d=\frac{4}{9}$. 于是求得方程的一个特解$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

例 8.26　求微分方程$y''-y'-2y=10\cos x$ 的通解.

解　$f(x)$ 属于$e^{2x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型, 其中$\lambda=0,\omega=1,P_l(x)=10,P_n(x)=0$. 对应的齐次方程为$y''-y'-2y=0$, 特征方程为$r^2-r-2=0,r_1=2,r_2=-1$, 从而对应的齐次方程的通解为$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$. 因为$\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程的根，故设原方程的特解为$y^*=a\cos x+b\sin x$, 则$y^{*\prime}=-a\sin x+b\cos x,y^{*\prime\prime}=-a\cos x-b\sin x$, 将其代入原方程得

$$-(a\cos x+b\sin x)-(-a\sin x+b\cos x)-2(a\cos x+b\sin x)=10\cos x,$$

比较两端同类项的系数得$\begin{cases}-3a-b=10\\a-3b=0\end{cases}\Rightarrow a=-3,b=-1$，故求得原方程的一个特解为$y^*=-3\cos x-\sin x$ 因此原方程的通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-3\cos x-\sin x$.

例 8.27　求方程$y''+y=4\sin x$ 的通解.

解　$f(x)$ 属于$e^{2x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型, 其中$\lambda=0,\omega=1,P_l(x)=0,P_n(x)=4$ 对应齐次方程$y''+y=0$ 的特征方程及特征根为$r^2+1=0,r_1=i,r_2=-i$, 从而对应齐次方程的通解$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. $\because\lambda+\omega i=i$ 是特征方程单根, 故设$y^*=x(a\cos x+b\sin x)$, 代入原方程, 得$-2a\sin x+2b\cos x+x(-a\cos x-b\sin x)+x(a\cos x+b\sin x)=4\sin x$, 比较两端同类项系数, 得$\begin{cases}-2a=4\\2b=0\end{cases}$, $a=-2,b=0$, 所求非齐次方程的一个特解为$y^*=-2x\cos x$, 因此原方程通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$.