第1章　函数

微积分包含微分、积分两个运算，其作用对象是函数。

§ 1.1 绝对值，区间，邻域

狭义的说，函数就是将一个数集变为另一个数集的一个规则，因此我们首先回顾一下数集相关概念。

有理数和无理数统称为实数. 全体实数所组成的集合称为实数系. 数轴是一条有原点、正方向和长度单位的直线. 实数和数轴上的点之间具有一一对应的关系. 通常，我们不作严格区分，

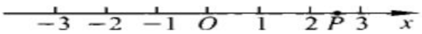


图 1.1　实数与数轴

把点P与其坐标x视为等同，即点P也称为点x, 数x 也称为点x.

定义 1.1　绝对值

设x 是一个实数，则x 的绝对值的定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

注 1.1　绝对值的几何意义就是点P到原点的距离. $|x-y|$ 则表示点x与点y之间的距离.

很多将要讲到的数集都是用绝对值的不等式表示的。

性质 1.1 设x 和y 是任意两个实数，则
1. $|x| \geqslant 0$; 2. $|-x| = |x|$; 3. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ 4. $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$;
5. $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$; 6. $|xy| = |x||y|$; 7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}(y \neq 0)$.

证明 性质4的证明：我们只就$|x+y| \leqslant |x| + |y|$ 来证. 由性质3 可得

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

因此

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

这等价于

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

性质5 的证明：由性质4 得

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$$

因此

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|$$

在上式中交换x 与y 的位置可得

$$|y| - |x| \leqslant |y - x|$$

即

$$|x| - |y| \geqslant -|x - y|$$

从而证得

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

即

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

数集就是一个集合。

定义 1.2 集合

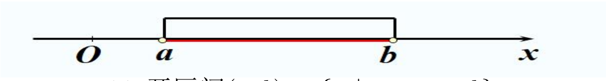
具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**.

一般地，我们用大写英文字母表示集合，小写英文字母表示元素. $a \in A$ 表示元素a 在集合A中. $a \notin A$ 表示元素a 不在集合A中. 若$x \in A$, 则必$x \in B$, 就说A 是B 的子集或称作A 包含于B (B 包含A), 记作$A \subset B$. 集合有两种表示方法：枚举法和描述法。

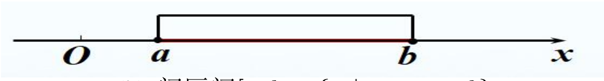
- 自然数的集: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$;

- 整数集　$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$;
- 有理数集$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N},q\neq\mathbf{0}\text{, 且}p\text{ 与}q\text{ 互质}\right\}$;
- 实数集$\mathbf{R}$.

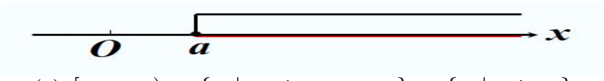
可以看到，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.



(a) 开区间$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$



(b) 闭区间$[a,b=\{x\mid a\leq x\leq b\}$



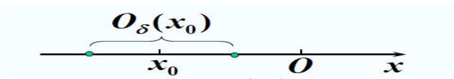
(c) $[a,+\infty)=\{x\mid a\leq x<+\infty\}=\{x\mid x\geq a\}$

(d) $(-\infty,a)=\{x\mid -\infty<x<a\}=\{x\mid x<a\}$

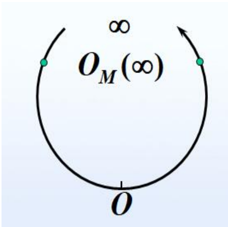
图 1.2　不同类型的区间

设$\delta>0,M>0$ 我们称

- $O_\delta\left(x_0\right)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$为$x_0$ 的δ 邻域
- $O_\delta\left(x_0\right)/\left\{x_0\right\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为x_0 的δ 去心邻域
- $(x_0-\delta,x_0)$ 为x_0 的左邻域
- $(x_0,x_0+\delta)$ 为x_0 的右邻域
- $O_M(\infty)=\{x\mid\mid x\mid>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ 为∞ 点的M 邻域
- $(-\infty,-M)$ 是∞ 的左邻域
- $(M,+\infty)$ 是∞ 的右邻域



(a) $O_\delta\left(x_0\right)$



(b) $O_M(\infty)$

图 1.3　邻域

例 1.1　解不等式$|x+2|<|x-1|$, 并用区间表示该不等式的解集.

解　由绝对值的几何意义, 待解不等式要求的点x 的集合为: 到-2 的距离小于它到1 的距离. 当$x<-\frac{1}{2}$ 时, x 到-2 的距离小于x 到1 的距离. 故所给不等式的解集为$\left\{x \mid x<-\frac{1}{2}\right\}$, 用区间表示为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

例 1.2　证明$|a-b| \leqslant|a-c|+|c-b|$.

解　$|a-b|=|a-c+c-b| \leqslant|a-c|+|c-b|$ (由性质1.1 (4)).

例 1.3　证明:若$|x-1| \leqslant 1$, 则$\left|x^{4}-1\right| \leqslant 15|x-1|$.

解　由不等式$|a+b| \leqslant|a|+|b|$ 得

$$|x|=|(x-1)+1| \leqslant|x-1|+1$$

证明：由于$|x| \leqslant|x-1|+1 \leqslant 2,\left(x^{2}+1\right)(|x|+1) \leqslant 15$, 故

$$\begin{aligned}\left|x^{4}-1\right| &=\left|x^{2}+1\right| \cdot|x+1| \cdot|x-1| \\ & \leqslant\left(x^{2}+1\right)(|x|+1)|x-1| \leqslant 15|x-1| .\end{aligned}$$

§ 1.2 函数概念

在某一过程中不断变化的量称为**变量**. 例如

- 自由落体运动$s=\frac{1}{2}gt^2$,
- 复利问题 $a_k=k_0\cdot 1.02^t,\quad t=1,2,3,\cdots$
- 圆的面积 $S=\pi r^2$,

在某一变化过程中始终保持不变的量称为**常量**, 变量的取值范围称为该变量的变域. 变量的变域是区间，称这种变量为连续取值变量, 变量的变域不是区间，称这种变量为离散取值变量.

我们可以看出,在同一问题中所涉及的诸变量之间都按一定的规律相联系,其中一个变量的变化将会引起另一变量的变化, 当前者(又称为自变量)的值确定后, 后者（又称为因变量)的值按照一定的关系相应被确定. 变量之间的这种相互确定的依赖关系抽象出来就是函数的概念.

定义 1.3 函数

设有两个变量x 与y, 变量x 属于某实数集合D. 如果存在一个确定的法则(也说对应规则) f,使得对于每一个$x\in D$, 都有惟一的一个实数y 与之对应,则称这个对应法则f 为定义在实数集合D 上的一个一元函数,简称函数. D 称为f 的定义域.

函数f 的定义域D 通常记为$D(f)$. 当$x\in D(f)$ 时, 称函数f 在x 处有定义;否则称f 在x 处无定义. 对于每个$x\in D(f)$, 由法则f 所对应的实数y 称为f 在点x 处的函数值,常记为$f(x)$. 全体函数值的集合称为函数f 的值域,记为$R(f)$，即

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}.$$

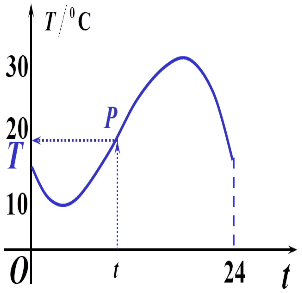
注 1.2 函数的两要素为定义域和定义法则. 两个函数相同的充要条件是它们有相同的定义域和定于法则.

函数的表示方法共有三种：表格法，图示法和解析法. 下面分别举例说明。

例 1.4 据统计20 世纪60 年代世界人口增长情况如下表所示：

年份t	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口n/ 百万	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

从表中可以看出，世界人口数n 是年份t 的函数,其定义域为$\{1960,1961,\cdots\}$, 值域为$\{2972,3061,\cdots\}$. 这种用表格表示函数关系的方法就称为**表格法**.



例 1.5　某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况. 设某天24 小时的气温变化曲线如下图所示.

图中曲线描述了一天中的温度T 随时间t 变化的规律. T 是t 的函数. 曲线上点P 的横坐标为t_0, 纵坐标T_0 就是曲线所描述的函数在点t_0 的函数值. 其定义域为$[0, 24]$, 值域为$[10, 35]$. 这种用图形表示函数的方法称为**图示法**.

例 1.6　设有一个半径为r 的半圆形铁皮,将此铁皮做成一个圆雉形容器, 问该圆锥形容器的体积V 是多少?

解　易知圆锥形容器的底圆半径$r_1 = \frac{1}{2}r$, 圆锥形容器的高$h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, 故其容积

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi r^3$$

上式表示了体积V 与r 之间的关系. V 随着r 的变化而变化. V 是r 的函数. 其定义域为$[0, \infty)$, 值域为$[0, \infty)$. 这种用**解析表达式**(简称为解析式) 表示函数关系的方法称为解析法.

如果解析表达式是从实际问题中得到的，其定义域根据实际含义来确定(如上例1.6 中的r). 如果仅仅给出一个具体的函数解析表达式，则称使函数表达式有意义的自变量取值的全体为该函数的**自然定义域**.

例 1.7　求函数$f(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域.

解　要使$f(x)$ 有意义,必须有

$$x - 1 > 0 \text{ 且} x^2 - 1 > 0$$

由$x-1>0$ 得$x>1$, 即$x \in (1, +\infty)$. 由$x^2-1>0$ 得$x>1$ 或$x<-1$, 即$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. 综上可知,函数$f(x)$ 的定义域为

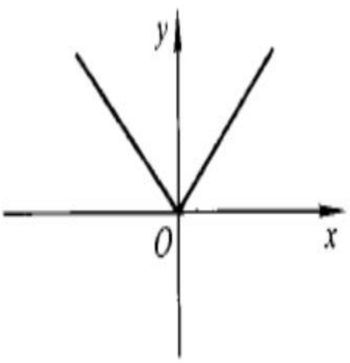
$$D(f) = (1, +\infty) \cap [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)] = (1, +\infty).$$

在用解析法表示函数时,有一种特别的情形, 即,有些函数在它的定义域的不同部分,其表达式不同,亦即用多个解析式表示一个函数,这类函数称为**分段函数**. 如绝对值函数

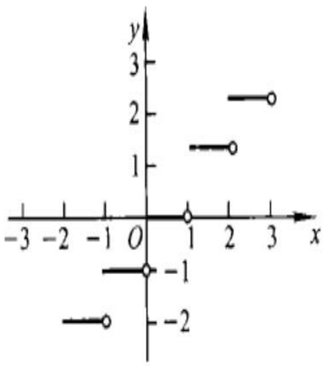
$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

取整函数$y = [x] = n, n \leqslant x < n + 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$, 即$[x]$ 表示不超过x 的最大整数；狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$



(b) 绝对值函数



(c) 取整函数

图 1.4　绝对值函数和取整函数

§ 1.3 函数的几何特征

函数的几何特性主要包括单调性，有界性，奇偶性，周期性等.

定义 1.4　单调性

设函数$f(x)$ 在实数集D 上有定义,对于D 内的任意两数$x_1, x_2, x_1 < x_2$,
若总有$f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 成立, 则称$f(x)$ 在D 内是单调递增(简称为单增) 的;
若总有$f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 成立,则称$f(x)$ 在D 内是单调递减(简称为单减)的;
若总有$f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则称$f(x)$ 在D 内是严格单增的;
若总有$f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称$f(x)$ 在D 内是严格单减的.
严格单增(单减) 也是单增(单减).当$f(x)$ 在D 内是单调递增(单调递减)时, 又称$f(x)$ 是D 内的单调递增(单调递减)函数. 单调递增函数或单调递减函数统称为单调函数.

例 1.8　函数$f(x) = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调递增的.

解　因为

$$
\begin{aligned}
x_1^3 - x_2^3 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\
&= (x_1 - x_2)\left((x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right).
\end{aligned}
$$

当$x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$.

例 1.9　用单调函数的定义证明:函数$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ 在区间$[2, 4]$ 为严格单减函数.

解　任取$x_1, x_2 \in [2, 4]$, 且设$x_1 < x_2$,

$$
f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{4x_1 - x_1^2} - \sqrt{4x_2 - x_2^2} = \frac{(4x_1 - x_1^2) - (4x_2 - x_2^2)}{\sqrt{4x_1 - x_1^2} + \sqrt{4x_2 - x_2^2}}
$$

$$
= \frac{4(x_1 - x_2) - (x_1^2 - x_2^2)}{\sqrt{4x_1 - x_1^2} + \sqrt{4x_2 - x_2^2}} = \frac{(x_1 - x_2)[4 - (x_1 + x_2)]}{\sqrt{4x_1 - x_1^2} + \sqrt{4x_2 - x_2^2}}.
$$

因为$2 \leqslant x_1 \leqslant 4, 2 \leqslant x_2 \leqslant 4, x_1 < x_2$, 所以

$$
4 < x_1 + x_2 < 8, x_1 - x_2 < 0, (x_1 - x_2)(4 - (x_1 + x_2)] > 0,
$$

故$f(x_1) - f(x_2) > 0$ 亦即$f(x_1) > f(x_2)$. 由定义知: $f(x)$ 在$[2, 4]$ 上为严格单减函数.

定义 1.5 有界性

设函数$f(x)$ 在集合D 内有定义, 若存在正数M, 使得对每一个$x \in D$, 都有

$$|f(x)| \le M$$

成立, 则称$f(x)$ 在D 内有界, 或称$f(x)$ 为D 内的有界函数; 否则称$f(x)$ 在D 内无界, 或称$f(x)$ 为D 内的无界函数.

定义 1.6 上界, 下界

设函数$f(x)$ 在集合D 内有定义, 若存在数A (或B), 使得对每一个$x \in D$, 都有

$$f(x) \le A\ (\text{或} f(x) \ge B)$$

成立, 则称$f(x)$ 在D 内有上界(或有下界), 也称$f(x)$ 是D 内有上界(或有下界)的函数.

性质 1.2 有界的函数必有上界和下界, 反之亦然.

证明 若函数$f(x)$ 有界，则存在$M > 0$ 满足$|f(x)| \le M$, 因此$f(x) \ge -M$ 且$f(x) \le M$, 即函数$f(x)$ 有下界和上界.
反之，若函数$f(x)$ 有下界和上界，则存在$A, B \in \mathbf{R}$ 满足$f(x) \ge B$ 且$f(x) \le A$. 取$M = \max\{|A|, |B|\}$, 则

$$-M \le B \le f(x) \le A < M.$$

有界函数的几何图形完全落在两条平行于x 轴的直线之间, 见图1.5.

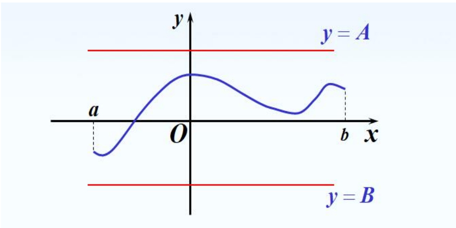


图 1.5 有界函数几何特征

例 1.10 函数$y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内有界, 函数$y = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内有下界但无上界, 因此$y = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数. 但函数$y = x^2$ 在$x \in [-1, 1]$ 上是有界函数.

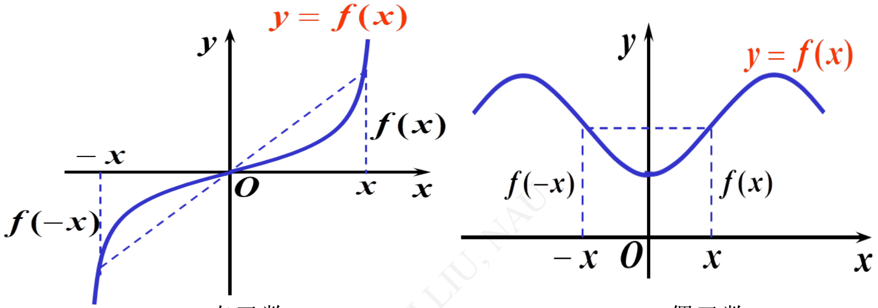
定义 1.7　奇偶性

设函数$f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集合D 内有定义,若对每一个$x \in D$ (此时必有$-x \in D$), 都有

$$f(-x) = -f(x)(\text{ 或} f(-x) = f(x))$$

则称$f(x)$ 为D 内的奇(或偶)函数.

性质 1.3　奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于y 轴对称.



(a) 奇函数　(b) 偶函数

图 1.6　奇偶函数的几何图形

例 1.11　$y = x^{2k+1}$ (k 为整数) 为奇函数, $y = x^{2k}$(k 为整数) 为偶函数, $y = \sin x$ 是奇函数, $y = \cos x$ 是偶函数, $y = C$(C 为非零常数) 是偶函数, $y = 0$ 既是奇函数又是偶函数, $y = x^2 + x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 1.12　判断下列函数的奇偶性:

$$(1)\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right); \quad (2)\ g(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{x} - \mathrm{I}, \quad x > 0 \end{cases}$$

解

$$(1)\ f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \ln\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -f(x)$$

所以$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ 是奇函数.

(2) 因

$$g(-x)=\begin{cases}1-e^{-(-x)}, & -x\leqslant 0\\ e^{-x}-1, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{x},x\geqslant 0\\ e^{-x}-1,x<0\end{cases}=-g(x)$$

因此$g(x)$ 为奇函数.

定义 1.8 周期性

设函数$f(x)$ 在集合D 内有定义,如果存在非零常数T,使得对任. 意的$x\in D$, 恒有$x+T\in D$, 且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$ 为周期函数. 满足上式的最小正数T_0,称为$f(x)$ 的基本周期,简称周期.

例 1.13 函数$f(x)=C$ 是周期函数,但它没有基本周期;
三角函数$\sin x$ 和$\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$, 是以$2\pi$ 为周期的周期函数;
$\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 是以$\pi$ 为周期的周期函数;
函数$f(x)=x-[x], x\in(-\infty,+\infty)$ 是以1 为周期的周期函数.

注 1.3 有的周期函数不存在基本周期，如常数函数，狄利克雷函数.

例 1.14 设$f(x)$ 是以$T(T>0)$ 为周期的周期函数,若$x\in[a,a+T)$ 时$f(x)=3x+2$, 求$f(x)$ 在$[a+T,a+3T]$ 内的表达式.

解 当$x\in[a+T,a+2T)$ 时, $x-T\in[a,a+T)$, 这时

$$f(x-T)=3(x-T)+2$$

由于$f(x-T)=f(x)$, 故

$$f(x)=3(x-T)+2, x\in[a+T,a+2T)$$

当$x\in[a+2T,a+3T)$ 时, $x-2T\in[a,a+T)$, 这时

$$f(x-2T)=3(x-2T)+2$$

由于$f(x-2T)=f(x)$, 故

$$f(x)=3(x-2T)+2, x\in[a+2T,a+3T)$$

当$x=a+3T$ 时, $f(a+3T)=f(a)=3a+2$. 综上所述

$$f(x)=\begin{cases}3(x-T)+2, & x\in[a+T,a+2T)\\ 3(x-2T)+2, & x\in[a+2T,a+3T)\\ 3a+2, & x=a+3T.\end{cases}$$

§ 1.4 反函数

反函数的定义如下：

定义 1.9 反函数

设函数$y=f(x)$ 的定义域是$D(f)$,值域是$R(f)$, 如果对每一个$y\in R(f)$,都有惟一确定的$x\in D(f)$ 与之对应且满足$y=f(x)$, 则x 是定义在. $R(f)$ 上以y 为自变量的函数,记此函数为

$$x=f^{-1}(y), y\in R(f)$$

并称其为函数$y=f(x)$ 的反函数.

注 1.4 $x=f^{-1}(y)$ 与$y=f(x)$ 互为反函数,且$x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别为$y=f(x)$ 的值域和定义域.

注 1.5 $y=f(x)$反函数存在的充要条件是定义域和值域上的点是一一对应的.

注 1.6 习惯上，我们记$y=f(x)$ 的反函数为$y=f^{-1}(x)$，因此我们有,

$$f^{-1}[f(x)]=x, x\in D(f)$$

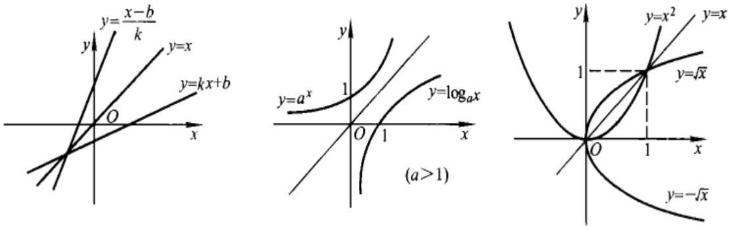
$$f\left[f^{-1}(x)\right]=x, x\in R(f)$$

注 1.7 在平面直角坐标系xOy 中,函数$y=f(x)$ 的图形与其反函数$y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线$y=x$ 对称.

性质 1.4 $y=f^{-1}(x)$ 与$y=f(x)$具有相同的单调性.

证明 假设$y=f(x)$ 单调递增，往证$y=f^{-1}(x)$ 单调递增. 任取$y_1<y_2\in R(f)$, 令$x_1=f^{-1}(y_1), x_2=f^{-1}(y_2)$, 则$y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$，因为$y=f(x)$ 单调递增且$x_1<x_2$，故$y=f^{-1}(x)$ 单调递增.

例 1.15 函数$y=kx+b(k\neq 0)$ 的反函数为$y=\frac{x-b}{k}$; 函数$y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的反函数是$y=\log_\alpha x$; 函数$y=x^2, x\in(0,+\infty)$ 的反函数是$y=\sqrt{x}$. 而函数$y=x^2$, $x\in(-\infty,0)$ 的反函数是$y=-\sqrt{x}$. 这几个函数及其反函数的图形见图1.7.



(a) (b) (c)

图 1.7 几个反函数

例 1.16 求下面函数的反函数：(1) $y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$; (2) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; (3) $y=\frac{2x-1}{x+1}$.

解 (1) 由$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

解之得

$$\mathrm{e}^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

因$\mathrm{e}^x>0$, 故$\mathrm{e}^x=y-\sqrt{y^2+1}$ 应舍去. 从而有$\mathrm{e}^x=y+\sqrt{y^2+1}$, 求得$x=\ln(y$ $+\sqrt{y^2+1}\Big)$.

因此$y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的反函数为

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) 由(1) 可知$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数为

$$y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) 由$y=\frac{2x-1}{x+1}$ 得

$$xy+y=2x-1$$

整理得

$$x(y-2)=-y-1$$

于是

$$x = \frac{y+1}{2-y}$$

故所求反函数为

$$y = \frac{x+1}{2-x}(x \neq 2).$$

§ 1.5 复合函数

复合函数的定义如下：

定义 1.10 复合函数

已知函数

$$y = f(u), u \in D(f), y \in R(f)$$

$$u = g(x), x \in D(g), u \in R(g)$$

如果$D(f) \cap R(g) \neq \varnothing($ 空集$)$,则称函数

$$y = f[g(x)], x \in \{x \mid g(x) \in D(f)\}$$

为由函数$y = f(u)$ 和$u = g(x)$ 复合而成的复合函数. 其中y 称为因变量x 称为自变量,而u 称为中间变量. 集合$\{x|g(x) \in D(f)\}$ 即为复合函数$y = f[g(x)]$ 的定义域.

注 1.8 复合函数中，$D(f) \cap R(g)$ 必须非空.

注 1.9 可以多个函数依次复合，如$y = f(u), u = g(v), v = h(x)$, 则$f(g(h(x)))$ 为三个函数的复合.

例 1.17 设$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求$f[1 + f(x)]$.

解

$$f[1 + f(x)] = \frac{1 - (1 + f(x))}{1 + (1 + f(x))} = \frac{-f(x)}{2 + f(x)} = -\frac{1-x}{1+x} \Big/ \left(2 + \frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= \frac{x-1}{x+3}.$$

例 1.18 已知$f(\ln x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1, \\ \ln x, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ 求$f(x)$.

解 令$u = \ln x$. 则$x = e^u$. 因此，

$$f(u) = \begin{cases} e^v - 1, & e^u > 1 \\ u, & 0 < e^1 \leqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^u - 1, & u > 0 \\ u, & u \leqslant 0 \end{cases}$$

由此可得

$$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$$

注 1.10 由$f(g(x))$的表达式求$f(x)$的一般方法是令$u=g(x)$ 从中解出$x=g^{-1}(u)$, 将它带入$f(g(x))$ 可得$f(u)$.

§ 1.6 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为**基本初等函数**.

定义 1.11 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并且在其定义域内具有统一的解析表达式，这样的函数统称为初等函数.

注 1.11 若 $f(x), g(x)$ 为基本初等函数，则幂指函数 $[f(x)]^{g(x)}$ 是初等函数, 因为

$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

例 1.19 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}(x>0)$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}(1+x>0)$, $x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x\ln x}(x>0)$ 均为幂指函数.

形如

$$y = x^2, y = \ln x, y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

的函数称为显函数.

定义 1.12 隐函数

若二元方程 $F(x,y)=0$ 对于某一实数集合 D 内的每一个 x, 均有惟一确定的 y 与之对应(此处的 y 与 x 一起满足方程)，则称由方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个定义在 D 上的隐函数.

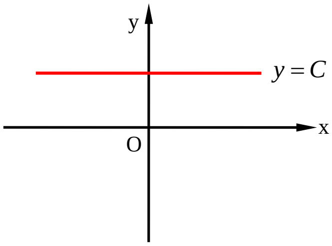
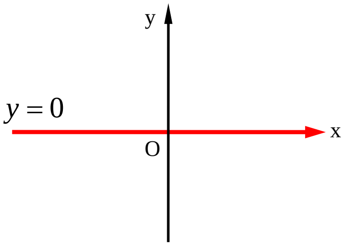
性质 1.5 若形式地记此隐函数为 $y=f(x), x\in D$, 则必有恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0, x\in D$.

例 1.20 由方程 $x^2+2xy-1=0$ 可确定一个定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内的隐函数 $y=f(x)$. 解方程可得

$$y=f(x)=\frac{1-x^2}{2x}, x\neq 0.$$

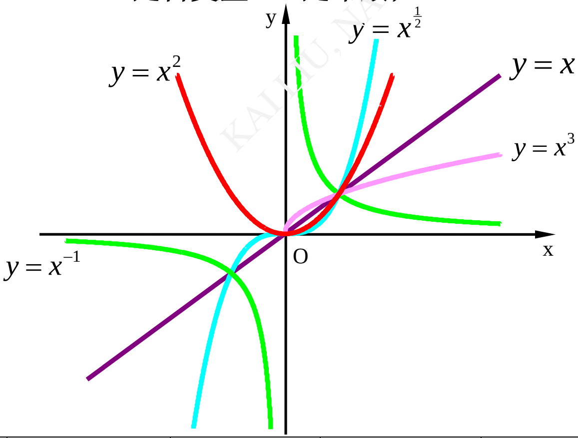
六大基本初等函数图像及其性质

一、常值函数（也称常数函数） y =C（其中 C 为常数）；

常数函数（ $y=C$ ）	
$C\neq 0$	$C=0$
	
平行于 x 轴的直线	y 轴本身
定义域 **R**	定义域 **R**

二、幂函数 $y=x^{\alpha}$ ，x 是自变量，α 是常数；

1. 幂函数的图像：



2. 幂函数的性质：

性质 / 函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	R	R	R	[0,+∞)	{x|x≠0}
值域	R	[0,+∞)	R	[0,+∞)	{y|y≠0}
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	[0,+∞) 增 (-∞,0] 减	增	增	(0,+∞) 减 (-∞,0) 减
公共点	（1,1）				

1）当α为正整数时，函数的定义域为区间为$x \in (-\infty,+\infty)$，他们的图形都经过原点，并当α>1时在原点处与x轴相切。且α为奇数时，图形关于原点对称；α为偶数时图形关于y轴对称；

2）当α为负整数时。函数的定义域为除去x=0的所有实数；

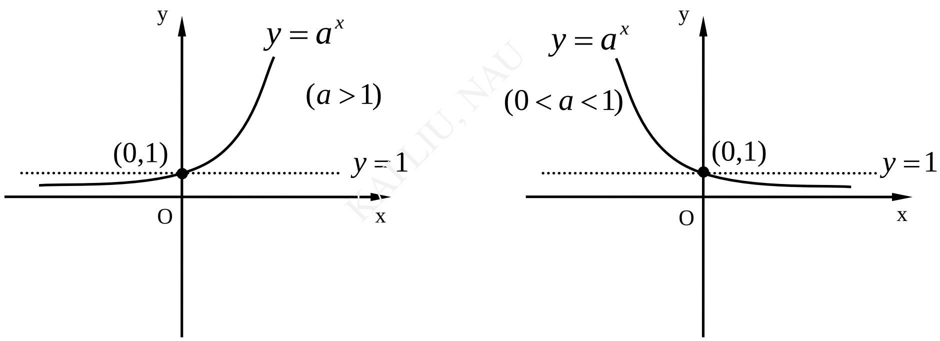
3）当α为正有理数$\frac{m}{n}$时，n为偶数时函数的定义域为（0, +∞），n为奇数时函数的定义域为（-∞,+∞），函数的图形均经过原点和（1 ,1）；

4）如果m>n图形于x轴相切，如果m<n,图形于y轴相切，且m为偶数时，还跟y轴对称；m，n均为奇数时，跟原点对称；

5）当α为负有理数时，n为偶数时，函数的定义域为大于零的一切实数；n为奇数时，定义域为去除x=0以外的一切实数。

三、指数函数$y=a^x$（x是自变量，a是常数且$a>0$，$a\neq1$），定义域是R；[无界函数]

1.指数函数的图象：



2.指数函数的性质；

性质 函数	$y=a^x\ (a>1)$	$y=a^x\ (0<a<1)$
定义域	R	
值域	(0，+∞)	
奇偶性	非奇非偶	
公共点	过点(0，1)，即$x=0$时，$y=1$	
单调性	在$(-\infty,+\infty)$是增函数	在$(-\infty,+\infty)$是减函数

1）当$a>1$时函数为单调增，当$0<a<1$时函数为单调减；

2）不论x为何值，y总是正的，图形在x轴上方；

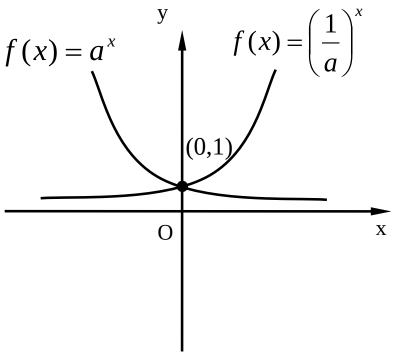
3）当$x=0$时，$y=1$，所以它的图形通过(0, 1)点。

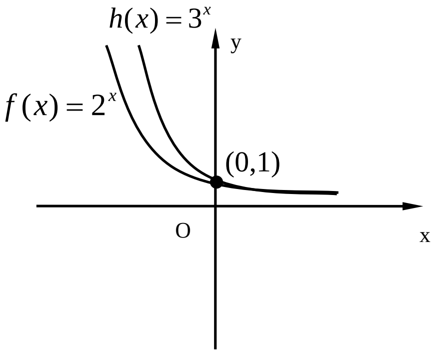
3.（选，补充）指数函数值的大小比较 $a \in \mathrm{N}^*$；

a. 底数互为倒数的两个指数函数

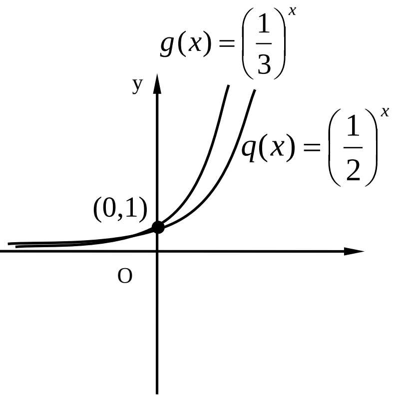
$f(x)=a^x$，$f(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

的函数图像关于 y 轴对称。





b.1. 当 $a>1$ 时，a 值越大，$y=a^x$ 的图像越靠近 y 轴；



b.2. 当 $0<a<1$ 时，a 值越大，$y=a^x$ 的图像越远离 y 轴。

4. 指数的运算法则（公式）；

a. 整数指数幂的运算性质 $(a \ge 0, m, n \in Q)$；

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3) $\left(a^m\right)^n = a^{nm} = \left(a^n\right)^m$

(4) $(ab)^n = a^n b^n$

b. 根式的性质；

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ；(2) 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

c. 分数指数幂；

(1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \; (a>0, m, n \in Z^*, n>1)$

(2) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \; (a>0, m, n \in Z^*, n>1)$

四、对数函数$y=\log_a x$（a是常数且$a>0,a\neq 1$），定义域$x\in(0,+\infty)$ [无界]

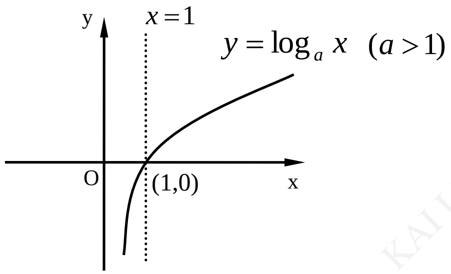
1. 对数的概念： 如果 a(a>0，a≠1)的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作$\log_a N=b$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数，式子$\log_a N$叫做对数式。

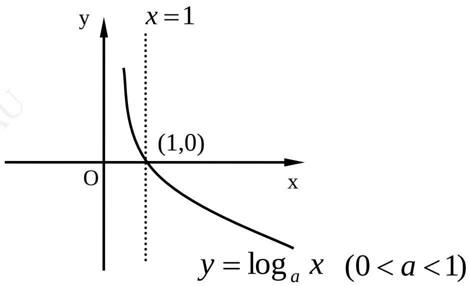
对数函数$y=\log_a x$与指数函数$y=a^x$互为反函数，所以$y=\log_a x$的图象与$y=a^x$的图象关于直线$y=x$对称。

2. 常用对数： $\log_{10} N$的对数叫做常用对数，为了简便，N 的常用对数记作$\lg N$。

3. 自然对数： 使用以无理数$e=2.7182$为底的对数叫做自然对数，为了简便，N 的自然对数$\log_e N$简记作$\ln N$。

4. 对数函数的图象：





5. 对数函数的性质；

性质 / 函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$
定义域	(0，+∞)	
值域	R	
奇偶性	非奇非偶	
公共点	过点(1，0)，即$x=1$时，$y=0$	
单调性	在(0,+∞)上是增函数	在(0,+∞)上是减函数

1）对数函数的图形为于 y 轴的右方，并过点(1,0)；

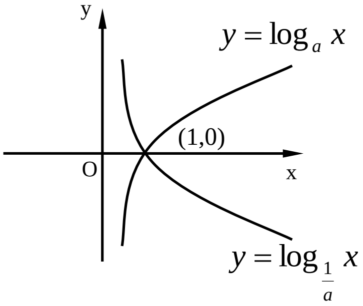
2）当$a>1$时，在区间(0,1)，y 的值为负，图形位于 x 的下方；在区间(1, +∞)，y 值为正，图形位于 x 轴上方，在定义域是单调增函数。$a<1$在实际中很少用到。

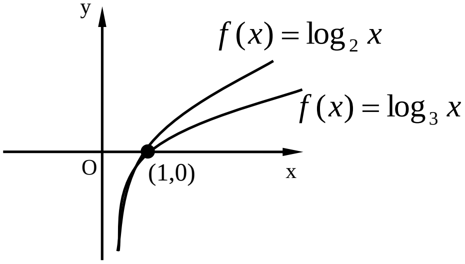
6.（选，补充）对数函数值的大小比较 $a \in \mathrm{N}^*$；

a. 底数互为倒数的两个对数函数

$y=\log_a x$， $y=\log_{\frac{1}{a}} x$

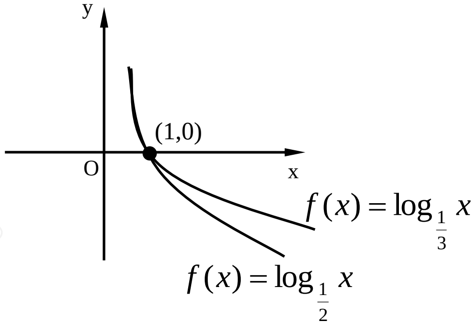
的函数图像关于 x 轴对称。





b.1. 当 $a>1$ 时，a 值越大， $f(x)=\log_a x$ 的图像越靠近 x 轴；

b.2. 当 $(0<a<1)$ 时，a 值越大， $f(x)=\log_a x$ 的图像越远离 x 轴。



7. 对数的运算法则（公式）；

a. 如果 a＞0，a≠1，M＞0，N＞0，那么：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^n=n\log_a M$$

b. 对数恒等式：

$$a^{\log_a N}=N \quad (a>0\text{且}a\neq 1,\ N>0)$$

c. 换底公式：

(1) $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ （$a>0, a\neq 1$，一般常常换为 e 或 10 为底的对数, 即 $\log_b N=\dfrac{\ln N}{\ln b}$ 或 $\log_b N=\dfrac{\lg N}{\lg b}$ ）

(2) 由公式和运算性质推倒的结论：

$$\log_{a^n} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$$

d. 对数运算性质

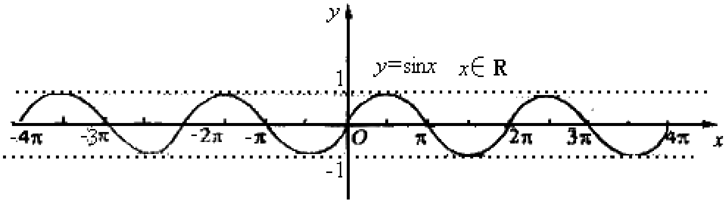
(1) 1 的对数是零，即 $\log_a 1=0$；同理 $\ln 1=0$ 或 $\lg 1=0$

(2) 底数的对数等于 1，即 $\log_a a=1$；同理 $\ln e=1$ 或 $\lg 10=1$

五、三角函数

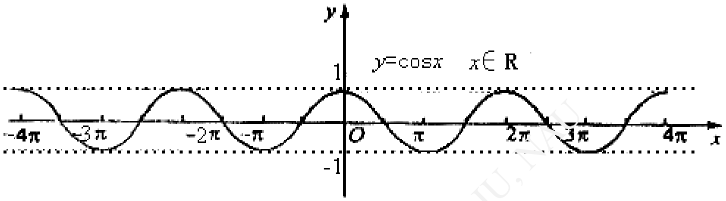
1. 正弦函数 $y=\sin x$，有界函数，定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $y\in[-1,+1]$

图象：五点作图法：0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π



2. 余弦函数 $y=\cos x$，有界函数，定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $y\in[-1,+1]$

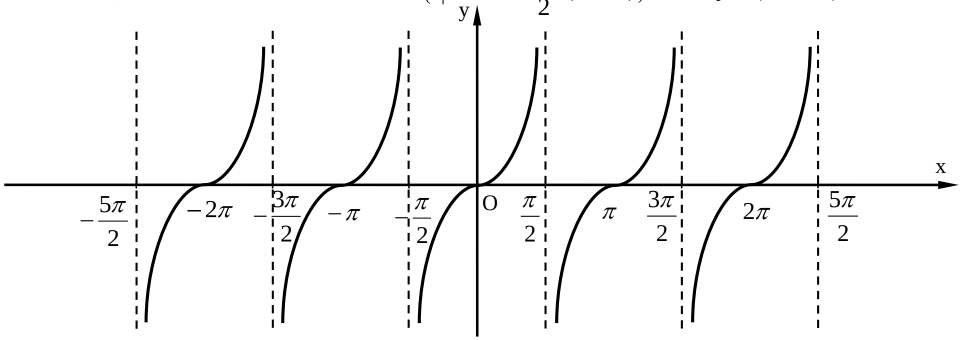
图象：五点作图法：0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π



3. 正、余弦函数的性质；

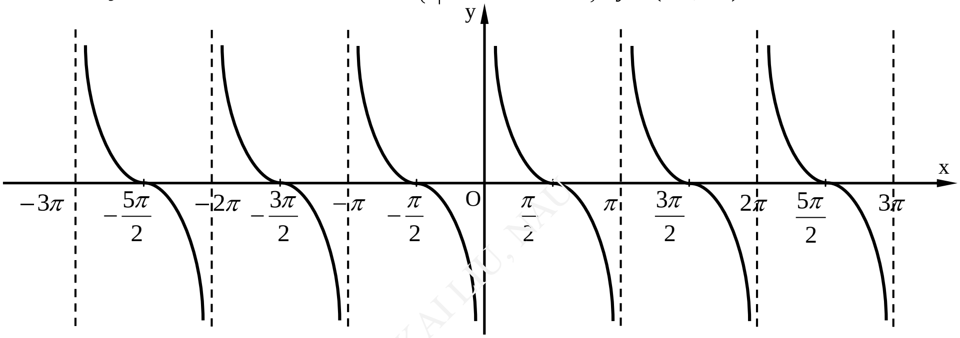
性质 / 函数	$y=\sin x$ $(k\in Z)$	$y=\cos x$ $(k\in Z)$
定义域	R	
值域	[-1,1]	[-1,1]
奇偶性	奇函数	偶函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$
对称中心	$(k\pi,0)$	$(k\pi\frac{\pi}{2},0)$
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$
单调性	在 $x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数 在 $x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数	在 $x\in[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 上是增函数 在 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上是减函数
最值	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=1$ $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\min}=-1$	$x=2k\pi$ 时，$y_{\max}=1$ $x=2k\pi+\pi$ 时，$y_{\min}=-1$

4. 正切函数 $y=\tan x$，无界函数，定义域 $\left\{x \middle| x \neq k\pi+\frac{\pi}{2},(k\in Z)\right\}$，值域 $y\in(-\infty,+\infty)$



$y=\tan x$ 的图像

5. 余切函数 $y=\cot x$，无界函数，定义域 $\left\{x \middle| x \neq k\pi, k\in Z\right\}$，$y\in(-\infty,+\infty)$

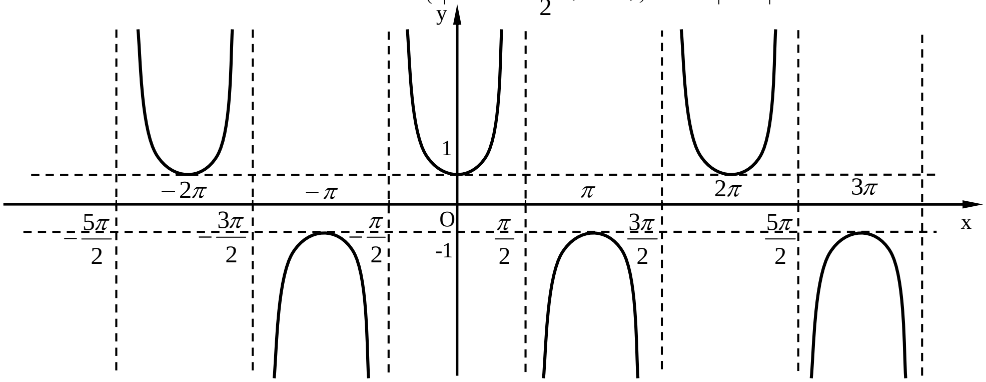


$y=\cot x$ 的图像

6.正、余切函数的性质：

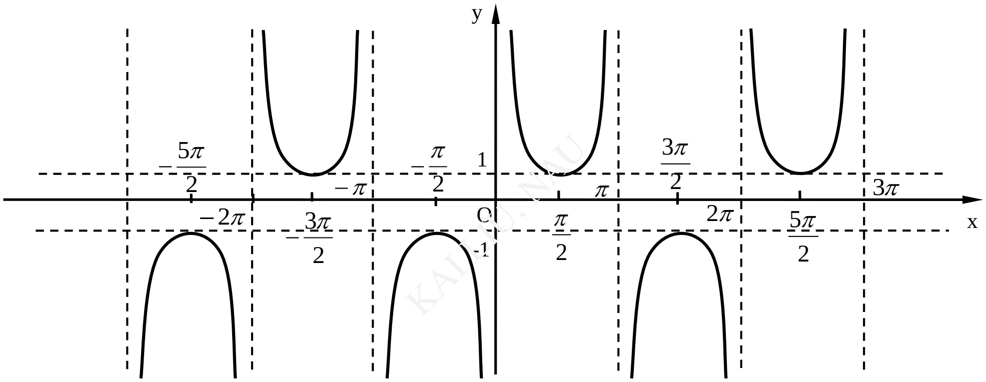
性质 / 函数	$y=\tan x\ (k\in Z)$	$y=\cot x\ (k\in Z)$
定义域	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x\neq k\pi$
值域	R	R
奇偶性	奇函数	奇函数
周期性	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	在 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ 上都是增函数	在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 上都是减函数
对称中心	$(\frac{k\pi}{2},0)$	$(\frac{k\pi}{2},0)$
零点	$(k\pi,0)$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$

7. 正割函数 $y=\sec x$，无界函数，定义域 $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},(k\in Z)\right\}$，值域 $|\sec x|\geq 1$



$y=\sec x$ 的图像

8. 余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，无界函数，定义域 $\left\{x\middle|x\neq k\pi,(k\in Z)\right\}$，值域 $|\csc x|\geq 1$



$y=\csc x$ 的图像

9. 正、余割函数的性质；

性质 函数	$y=\sec x\ (k\in Z)$	$y=\csc x\ (k\in Z)$
定义域	$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\left\{x\middle|x\neq k\pi\right\}$
值域	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
奇偶性	偶函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$
单调性	$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi)\cup(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 减 $(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})\cup(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi)$ 增	$(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})\cup(2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi)$ 减 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi)\cup(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 增

续表：

性质 函数	$y=\sec x\ (k\in Z)$	$y=\csc x\ (k\in Z)$
对称中心	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$	$(k\pi,0)$
对称轴	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
渐近线	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$

六、反三角函数

1. 反正弦函数 $y=\arcsin x$，无界函数，定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$

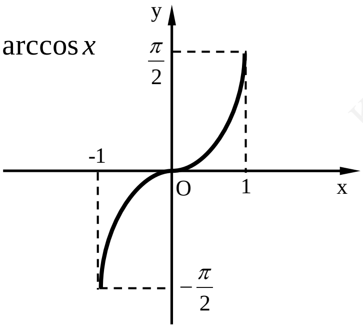
A. 反正弦函数的概念：正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数称为反正弦函数，记为

$y=\arcsin x$

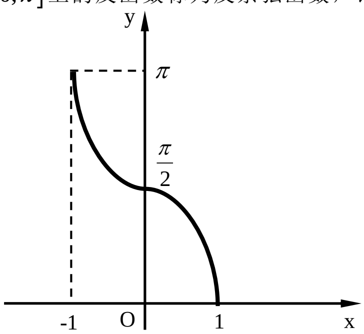
2. 反余弦弦函数 $y=\arccos x$，无界函数，定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$

B. 反余弦函数的概念：余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数称为反余弦函数，记为

$y=\arccos x$



$y=\arcsin x$ 的图像



$y=\arccos x$ 的图像

3. 反正、余弦函数的性质；

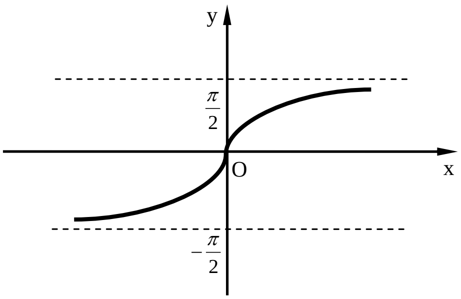
性质 函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
定义域	[-1,1]	[-1,1]
值域	$[0,\pi]$	$[0,\pi]$
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数
单调性	增函数	减函数

4. **反正切函数** $y=\arctan x$ **，有界函数，定义域** $x\in(-\infty,+\infty)$ **, 值域** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

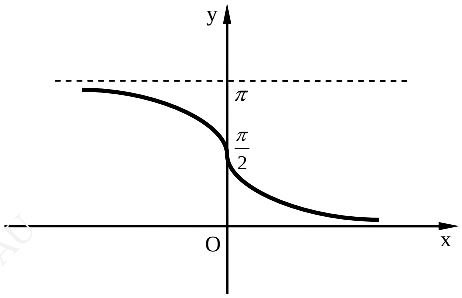
C. 反正切函数的概念： 正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数，记为 $y=\arctan x$

5. **反余切函数** $y=arc\cot x$ **，有界函数，定义域** $x\in(-\infty,+\infty)$ **, 值域** $(0,\pi)$

D. 反余切函数的概念： 余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数，记为 $y=arc\cot x$



$y=\arctan x$ 的图像



$y=arc\cot x$ 的图像

6. **反正、余弦函数的性质；**

函数 性质	$y=\arctan x$	$y=arc\cot x$
定义域	R	
值域	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
奇偶性	奇函数	非奇非偶
单调性	增函数	减函数

三角函数公式汇总

一、任意角的三角函数

在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，记：$r=\sqrt{x^2+y^2}$。

正弦：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$　余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$

正切：$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$　余切：$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$

正割：$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$　余割：$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$

二、同角三角函数的基本关系式

倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

三、诱导公式

x轴上的角，口诀：函数名不变，符号看象限；

y轴上的角，口诀：函数名改变，符号看象限。

四、和角公式和差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

五、二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

二倍角的余弦公式常用变形：（规律：降幂扩角，升幂缩角）

$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$　　$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$　　$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2}$，$\tan\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

六、三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3 = 4\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 - 3\cos\alpha = 4\cos\alpha\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)\tan(\frac{\pi}{3}+\alpha)$$

七、和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

八、辅助角公式

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

其中：角 φ 的终边所在的象限与点 (a,b) 所在的象限相同，

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

九、三角函数的周期公式

函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$， $x\in R$ 及函数 $y = A\cos(\omega x+\varphi)$， $x\in R$（A，ω,φ，为常数，且 $A\neq 0,\omega>0$）

周期： $T = \frac{2\pi}{\omega}$

函数 $y = A\tan(\omega x+\varphi)$， $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k\in Z$（A，$\omega,\varphi$，为常数，且 $A\neq 0,\omega>0$）

周期： $T = \frac{\pi}{\omega}$

十、正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$（R 为 ΔABC 外接圆半径）

十一、余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C$$