第7章　多元函数微积分学

本章介绍多元函数微积分学. 它是一元函数微积分学的直接推广和发展, 我们将会看到多元函数微积分学与一元函数微积分学既有密切的联系, 同时又有较大的区别, 其内容比一元函数微积分学更丰富. 对于多元函数, 我们将主要讨论二元函数. 在掌握了二元函数的有关理论和研究方法后, 不难把它们推广到一般的多元函数中去.

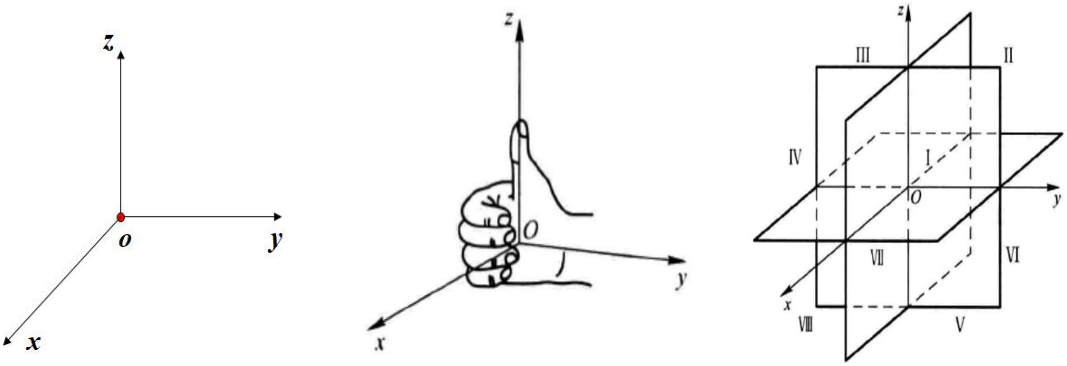
§ 7.1 预备知识

7.1.1 空间直角坐标系

在空间任取一点o 作为原点, 过o 作三条互相垂直的数轴, 分别称为x (横) 轴、y (纵) 轴、z (竖) 轴, 统称为**坐标轴**. 三轴的正方向符合**右手法则**：以右手握住z 轴, 当右手的四指从x 轴的正向转动$\frac{\pi}{2}$ 的角度后指向y 轴正向时, 大拇指的指向就是z 轴的正向. 满足上述条件的三条坐标轴构成了空间直角坐标系, o 称为**原点**. 三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为**坐标面**. x 轴及y 轴所确定的坐标面叫做xoy 面, 另两个由y 轴及z 轴和由z 轴及x 轴所确定的坐标面,分别叫做yoz 面及zox 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限. 这八个卦限分别用字母I 、II、III、IV、V、VI、VII、VIII表示, 每一个卦限上点的坐标符号情况为

$$\mathrm{I}(+,+,+), \mathrm{II}(-,+,+), \mathrm{III}(-,-,+), \mathrm{IV}(+,-+),$$
$$\mathrm{V}(+,+,-), \mathrm{VI}(-,+,-), \mathrm{VII}(-,-,-), \mathrm{VIII}(+,-,-)$$

设P 是空间中任意一点, 过P 点作垂直于xoy 平面的直线, 交xoy 平面于点P_{xy}, 再过P_{xy} 点在xoy 面上分别作垂直于ox 轴、oy 轴的直线, 分别交ox 轴于P_x 点、交oy 轴于P_y 点. 连接OP_{xy}, 过P 点作直线平行于OP_{xy}, 必交oz 轴于一点，记为P_z. 如图所示. 设点P_x, P_y, P_z 在ox 轴、oy 轴、oz 轴上的坐标分别为x_0, y_0, z_0, 分别称x_0, y_0, z_0 为点P 的x 坐标, y 坐标和z 坐标, 而称点P 的**坐标**为(x_0, y_0, z_0).
坐标轴及坐标面上点的特征:



(a) 空间直角坐标系 (b) 右手法则 (c) 八个卦限

图 7.1

xoy 面: $z=0$, yoz 面: $x=0$, zox 面: $y=0$,

x 轴: $y=z=0$, y 轴: $x=z=0$, z 轴: $x=y=0$.

设点M 的坐标为$M(x,y,z)$, 则其对称点的坐标:

关于xoy 面: $(x,y,-z)$, 关于x 轴: $(x,-y,-z)$,

关于yoz 面: $(-x,y,z)$, 关于y 轴: $(-x,y,-z)$,

关于zox 面: $(x,-y,z)$, 关于z 轴: $(-x,-y,z)$, 关于原点的对称点: $(-x,-y,-z)$.

设点M_1, M_2 的坐标分别为$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则如图7.1.1 (b)所示,

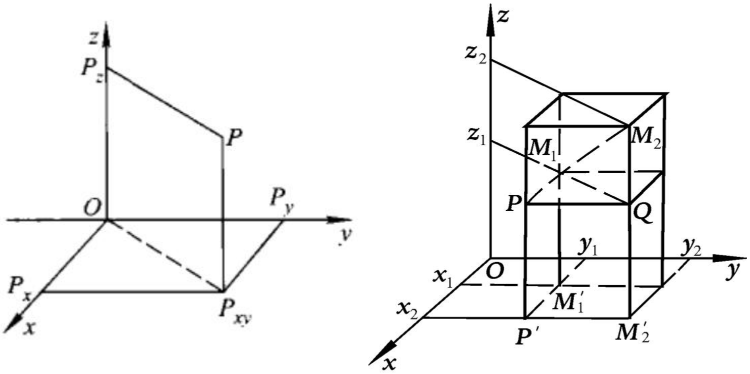
$$\begin{aligned}
|M_1M_2|^2 &= |M_2|^2 + |QM_2|^2 \\
&= |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 \\
&= |M_2'P'|^2 + |P'M_2'|^2 + |QM_2|^2 \\
&= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2
\end{aligned}$$

即M_1, M_2的距离公式：

$$\boxed{|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.}$$

7.1.2 空间直角坐标系中的向量

向量的概念



(a) 坐标　(b) 距离

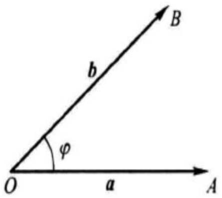
图 7.2

数学上, 常用一条有向线段来表示**向量**. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 有时也用一个黑体字母(书写时, 在字母上面加箭头) 来表示向量, 例如$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}, \vec{r}, \vec{v}, \vec{F}$ 等.

如果两个向量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 的大小相等, 且方向相同, 我们就说向量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ **相等**, 记作$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后会重合.

向量的大小叫做向量的**模**. 向量$\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}$ 和$\vec{a}$ 的模依次记作$|\overrightarrow{AB}|, |\boldsymbol{a}|$ 和$|\vec{a}|$. 模等于1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量, 记作0 或$\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看做是任意的.

设有两个非零向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 任取空间一点$O$, 作$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 规定不超过$\pi$ 的$\angle AOB$ (设$\varphi = \angle AOB, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) 称为向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的**夹角**, 记作$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ 或$(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$, 即$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \varphi$. 如果向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量, 规定它们的夹角可以在0 到π 之间任意取值.



(a) 夹角

图 7.3

如果$(\widehat{a, b}) = 0$ 或π, 就称向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ **平行**, 记作$\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$. 如果$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{2}$, 就称向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ **垂直**, 记作$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在0 到$\pi$ 之间任意取值, 因此可以认为零向量与任何

向量都平行, 也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此, 两向量平行, 又称两向量**共线**.

类似还有向量共面的概念. 设有$k(k \geqslant 3)$ 个向量, 当把它们的起点放在同一点时, 如果k 个终点和公共起点在一个平面上, 就称这k 个向量共面.

向量的运算

设有两个向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$, 任取一点A, 作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, 再以$B$ 为起点, 作$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 连接$AC$, 那么向量$\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量a 与b 的**和**, 记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即

$$c = a + b.$$

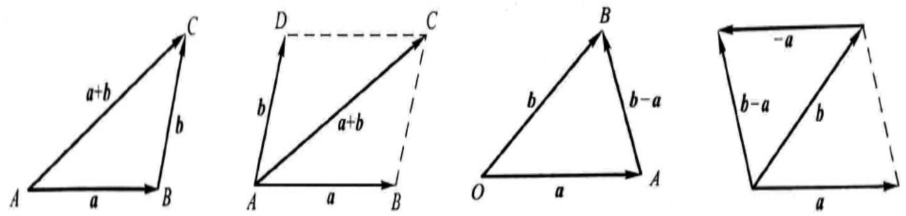
上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**.

我们也有向量相加的**平行四边形法则**. 这就是: 当向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 不平行时, 作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, 以$AB, AD$ 为边作一平行四边形$ABCD$, 连接对角线AC, 显然向量$\overrightarrow{AC}$ 即等于向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

设$\boldsymbol{a}$ 为一向量, 与$\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做a 的**负向量**,记作$-a$. 由此, 我们规定两个向量b 与a 的**差**

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量$-\boldsymbol{a}$ 加到向量$\boldsymbol{b}$ 上, 便得$\boldsymbol{b}$ 与$\boldsymbol{a}$ 的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.



(a) 加法的三角形法则　(b) 加法的平行四边形法则　(c) 减法的三角形法则　(d) 减法的平行四边形法则

图 7.4

向量的加法满足下列运算规律:

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) 零向量：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;

(4) 负向量：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

(5) 三角不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及} |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

数乘：向量a 与实数λ 的乘积记作λa, 规定λa 是一个向量, 它的模

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

它的方向当$\lambda > 0$ 时与$\boldsymbol{a}$ 相同, 当$\lambda < 0$ 时与$\boldsymbol{a}$ 相反. 当$\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即λa 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当$\lambda = \pm 1$ 时, 有$1a = a, (-1)a = -a$.

数与向量的乘积(数乘)满足下列运算规律:

(1) 结合律：$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = \mu(\lambda \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律1：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(3) 分配律2：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(4) 单位1：$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$. 一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量, 即与非零向量$\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

定理 7.1 两向量平行

设向量$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 则向量$\boldsymbol{b}$ 平行于$\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数λ, 使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

向量的坐标表示

两向量平行定理, 是建立数轴理论的基础, 给定一个点、一个方向及单位长度, 就确定了一条数轴. 因此, 给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点o 及单位向量$\boldsymbol{i}$ 确定了数轴ox, 对于轴上任一点P, 对应一个向量$\overrightarrow{OP}$, 由于$\overrightarrow{OP}//\boldsymbol{i}$, 则必有唯一的实数$x$, 使$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$, 并且$\overrightarrow{OP}$ 与实数x 一一对应. 于是

$$\text{点}P \longleftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i} \longleftrightarrow \text{实数}x$$

从而轴上的点P 与实数x 有一一对应的关系. 据此, 定义实数x 为轴上点P 的坐标. 由此可知, 轴上点P 的坐标为x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}.$$

在空间直角坐标系中，我们用记号$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示空间直角坐标系中x 轴y 轴z 轴的单位向量。它们之间两两垂直, 且模都是1.

起点在原点O, 终点为M 的向量$\overrightarrow{OM}$ 称为点M 的**向径**. 记为$\boldsymbol{r}$ 或$\overrightarrow{OM}$. 如图7.6所示, 有

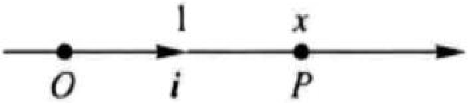


图 7.5　数轴与向量

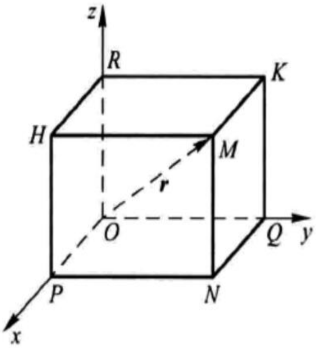


图 7.6　向量坐标表示，模

$$r=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量$\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式, $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j}$ 和$z\boldsymbol{k}$ 称为向量$\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量. 于是点M 、 向量$\boldsymbol{r}$ 与三个有序数x,y,z 之间有一一对应的关系

$$M\longleftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,y,z),$$

有序数x,y,z 称为向量$\boldsymbol{r}$ (在坐标系$Oxyz$ 中) 的**坐标**, 记作$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$; 有序数x,y,z 也称为点M (在坐标系$Oxyz$ 中) 的坐标, 记作$M(x,y,z)$. 此坐标定义与本节开头定义的坐标一致.

设点M_1,M_2 的坐标分别为$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}.$$

今后我们就用向量的坐标表示空间直角坐标系中的向量： $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

空间直角坐标系中x 轴y 轴z 轴的单位向量可表示为:

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律, 有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\,\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\,\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\,\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\,\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\,\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\,\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\,\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\,\boldsymbol{k}\quad (\lambda\text{ 为实数}),$$

即

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)\,,\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)\,,\\ \lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\,.\end{aligned}}$$

由此可见, 对向量进行加、减及与数相乘, 只需对向量的各个坐标分别进行相应数量运算就行了. 向量$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$ 相当于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 坐标表示式为$(b_x,b_y,b_z)=\lambda\,(a_x,a_y,a_z)$. 即两向量平行, 对应坐标成比例:

$$\boxed{\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}\Longleftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.}$$

设向量$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, 如图7.6 所示, 有

$$r=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

于是得向量模的坐标表示式

$$\boxed{|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.}$$

设一物体在恒力$\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点M_1 移动到点M_2, 以$\boldsymbol{s}$ 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道, 力$\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中θ 为$\boldsymbol{F}$ 与$\boldsymbol{s}$ 的夹角.

从这个问题看出, 我们有时要对两个向量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 作这样的运算, 运算的结果是一个数, 它等于$|a|$, $|b|$ 及它们的夹角θ 的余弦的乘积. 我们把它叫做向量a 与$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**, 记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

由数量积的定义可以推得: (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$. (2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$. 数量积符合下列运算规律:

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 结合律: $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, λ 为数.

在空间直角坐标系下，根据向量的坐标表示，可以证明

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

这就是两个向量的数量积的坐标表示式, 此表达式下数量积称作向量的**点乘**或**内积**.

因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 所以当$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时, 有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

将数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式, 就得

$$\boxed{\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.}$$

两向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.}$$

平面直角坐标系下的向量概念与空间直角坐标系类似，不作展开.

§ 7.2 二元函数的概念

7.2.1 平面区域的概念及其解析表示

在引入二元函数的定义之前, 我们首先给出平面区域相关的一些概念。

由平面解析几何知道, 当在平面上引入了一个直角坐标系后, 平面上的点P 与有序二元实数组(x, y) 之间就建立了一一对应. 于是, 我们常把有序实数组(x, y) 与平面上的点P 视作是等同的。这种建立了坐标系的平面称为坐标平面. 二元的序实数组(x, y) 的全体, 即$R^2 = R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ 就表示坐标平面.

定义 7.1　平面点集

坐标平面上具有某种性质的点的集合, 称为平面点集, 记作

$$E = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ 具有性质} P\}$$

例如, 平面上以原点为中心、r 为半径的圆内所有点的集合是

$$C = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\right\}.$$

定义 7.2　邻域

设$P_0\left(x_0, y_0\right)$ 是xOy 平面上的一定点, δ 为一正数, 以P_0 为圆心、δ 为半径的圆的内部(即不含圆周) $O_\delta\left(P_0\right) = \{P \| P P_0 \mid < \delta\} \quad = \left\{(x, y) \middle| \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < \delta^2\right\}$ 称为点P_0 的δ-邻域. 上述邻域$O_\delta\left(P_0\right)$ 去掉中心P_0 后, 称为P_0 的去心邻域, 记为$O_\delta\left(P_0\right) \setminus \left\{P_0\right\}$.

定义 7.3　内点、外点、边界点

设D 是xOy 平面上的一点集, P 为xOy 平面上任一点, 则P 与D 的关系有以下三种:

(1) 若存在$\delta > 0$, 使得$O_\delta(P) \subset D$, 则称点P 是D 的**内点**.

(2) 若存在P 的某个邻域, 即存在$\delta > 0$, 使得$O_\delta(P) \cap D = \varnothing$, 则称点$P$ 是D 的**外点**.

(3) 若在P 的任何邻域内既含有属于D 的点, 又含有不属于D 的点, 则称P 为点集D 的**边界点**. D 的所有边界点集合称为D 的边界.

例 7.1　点集$D = \left\{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 < 9\right\}$, 满足$4 < x^2 + y^2 < 9$ 的点都是D 的内点; 满足$x^2 + y^2 = 4$ 的点均为D 的边界点, 它们都属于D; 满足$x^2 + y^2 = 9$ 的点也均为D 的边界点, 但它们都不属于D; D 的边界是圆周$x^2 + y^2 = 4$.

定义 7.4　聚点、孤立点

聚点: 设D 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果点P 的任何一个邻域内总有无限多个点属于点集E, 则称P 为D 的聚点. (即对$\forall \delta > 0$, 点P 的去心邻域$U(P, \delta)$ 内总有E 中的点, 则称P 为E 的聚点).

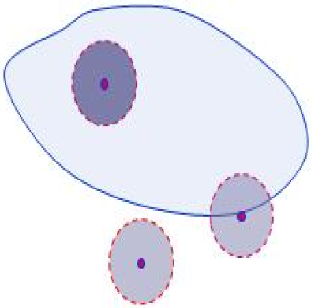


图 7.7 内点、外点、边界点

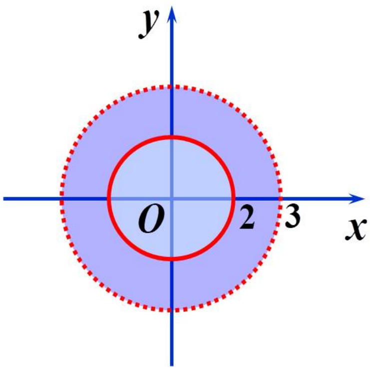


图 7.8

孤立点: $\exists\delta>0, O_\delta(P_0)\cap D=\{P_0\}$, 称$P_0$ 为D 的孤立点.

定义 7.5　开集

若点集D 的点都是内点, 则称D 为开集.

定义 7.6　连通集

设D 是开集, 若对于D 内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于D, 则称开集D 是连通的.

定义 7.7　开区域、闭区域

开区域: 连通的开集称为开区域或区域. 闭区域: 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

平面上的区域均可用含该区域内的点的坐标(x,y) 的二元不等式或不等式组来表示(称为平面区域的解析表示), 同一个区域有不同的表示形式.

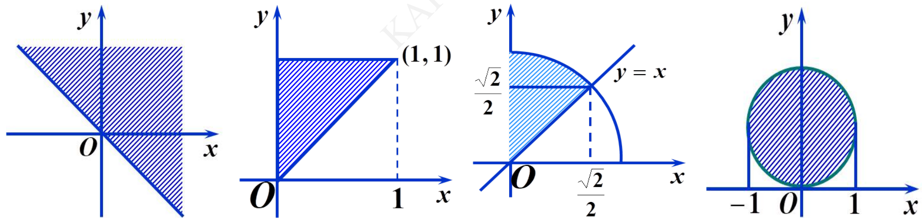


图 7.9

例 7.2　如图阴影部分,

$$D=\{(x,y)\mid x+y\geq 0\}$$

$$=\{(x,y)\mid y\geq -x\}$$

$$=\{(x,y)\mid x\geq -y\}$$

例 7.3　如图阴影部分,

$$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\}$$

$$=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1, 0\leq x\leq y\}$$

例 7.4　如图阴影部分,

$$D\left\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}, x\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\le x\le y\right\}\cup$$

$$\left\{(x,y)\mid \frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 1, 0\le x\le \sqrt{1-y^2}\right\}.$$

例 7.5　如图阴影部分,

$$D=\left\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le 2, -\sqrt{2y-y^2}\le x\le \sqrt{2y-y^2}\right\}.$$

7.2.2 二元函数的概念

我们给出二元函数的定义.

定义 7.8　二元函数

设D 是R^2 的一个非空子集, 称映射$f: D\to R$ ($\forall (x,y)\in D$, 按照某个对应法则f 总有唯一的数值与之对应) 为定义在D 上的二元函数, 通常记为$z=f(x,y),(x,y)\in D$ (或记为$z=f(P),P\in D$). 其中点集D 称为该函数的定义域, x,y 称为自变量, z 称为因变量, 函数值$f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数f 的值域, 记作$f(D)$, 即

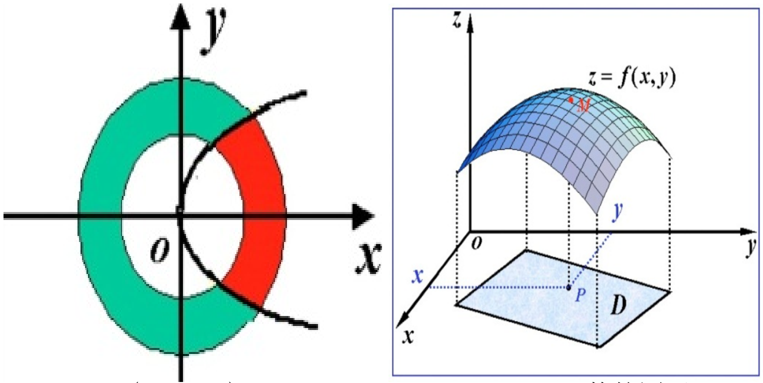
$$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

类似地可定义三元及三元以上函数。当$n\ge 2$ 时, n 元函数统称为多元函数。多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.

例 7.6　求$f(x,y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解　函数$f(x,y)$ 的定义域为

$$\begin{cases}\left|3-x^2-y^2\right|\le 1\\ x-y^2>0\end{cases}\text{即}\begin{cases}2\le x^2+y^2\le 4\\ x>y^2\end{cases}.$$



(a) $\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域 (b) 二元函数的图形

图 7.10

定义 7.9 二元函数$z = f(x, y)$ 的图形

设函数$z = f(x,y)$ 的定义域为D, 对于任意取定的$P(x,y) \in D$, 对应的函数值为$z = f(x,y)$, 这样, 以x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$, 当P 取遍D 上一切点时, 得一个空间点集

$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$, 这个点集称为二元函数的图形. 二元函数的图形通常是一张曲面.

例 7.7

定义 7.10 齐次函数

设有函数$y = f(x_1, x_2 \cdots, x_n)$, 若

$$f(tx_1, tx_2 \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2 \cdots, x_n),$$

则称f 为k 次齐次函数。

例 7.8 $z = x^3 + 2x^2y + 5y^3 \Rightarrow$ 为3 次齐次函数。 $z = x^3 + 2x^2y + 5y^3 + 2xy \Rightarrow$ 不为齐次函数。经济函数多为齐次函数, 如Douglas生产函数$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ 为$\alpha + \beta$ 次齐次函数。
(Y 为产量, K – 资本投入, L – 劳力投入, A, α, β 为正常数) .
$\alpha + \beta = 1$ 时, 称为规模报酬不变。 $\alpha + \beta > 1(\alpha + \beta < 1)$ 时,称为规模报酬递增(递减)。

7.2.3 二元函数的极限

与一元函数极限概念类似,二元函数的极限是反映函数值随自变量变化而变化的趋势.

定义 7.11 二元函数的极限(easy)

设函数$f(P)$ 在P_0 点的去心邻域内有定义, 如果存在实数A, 使得当P 无限趋近(任意方式)于P_0 时, 相应的$f(P)$ 无限地趋于数A, 则称A 是$f(P)$ 当$P \to P_0$ 时的极限, 也称$P \to P_0$ 时, $f(P)$ 收敛于A, 记为

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \text{ 或者 } f(P) \to A\,(P \to P_0)\,.$$

上面的极限若用点的坐标表示就是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

定义 7.12 二元函数的极限(hard)

设函数$z = f(x,y)$ 的定义域为D, $P_0\,(x_0, y_0)$ 是其聚点, 如果对于任意给定的正数ε, 总存在正数δ, 使得对于满足不等式$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 的一切点, 都有$|f(x,y) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称A 为函数$z = f(x,y)$ 当$P(x,y) \to P\,(x_0,y_0)$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ (或$f(x,y) \to A, (\rho \to 0)$ 这里$\rho = |PP_0|$)。

注 7.1 定义中$P \to P_0$ 的方式是任意的.

注 7.2 二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$).

多元函数的极限运算, 有与一元函数类似的极限运算法则.

例 7.9 求下列极限: (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$; (3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+xy)}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 原式$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{xy\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{y\to 2} y = 1 \cdot 2 = 2$;

(2) 因为$0 \le \frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{x+y}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$, 又 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right) = 0$, 由夹逼准则可知, $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$;

(3) 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}1+\frac{y}{x}}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{\ln(1+xy)}{y\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{xy}{y\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=1.$

例 7.10　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解　将原式转化为:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2y}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1,\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|\to0,\quad(x\to0)$$

所以由有界函数与无穷小的乘积是无穷小可得, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$

确定极限不存在的方法:

(1) 令$P(x,y)$ 沿$y=kx$ 趋向于$P\left(x_0,y_0\right)$, 若极限值与k 有关, 则可断言极限不存在;

(2) 找两种不同趋近方式, 使 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在, 但两者不相等, 此时也可断言$f(x,y)$ 在点$P\left(x_0,y_0\right)$ 处极限不存在.

例 7.11　证明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明　　取$y=kx^3$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=k^3}}\frac{x^3\cdot k^3}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}$, 其值随$k$ 的不同而变化, 故极限不存在.

7.2.4 二元函数的连续性

定义了二元函数的极限，我们现在可以给出连续性的定义.

定义 7.13　二元函数的连续

设二元函数$f(x,y)$ 的定义域为点集D, $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 是其聚点, 且$P_0\in D$, 如果

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f\left(x_0,y_0\right)=f\left(P_0\right)$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续. 若函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续, 则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数. 如果函数 $f(P)$ 在 P_0 处不连续, 则称 P_0 是函数 $f(P)$ 的间断点.

注 7.3　孤立点是函数 $z=f(x,y)$ 的不连续点.

注 7.4　沿 D 内某些曲线, 函数 $f(x,y)$ 没有定义, 则这些曲线上的点是函数的间断点. 例如: $z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 没有定义, 该圆周上各点均是间断点.

例 7.12　讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性.

解　方法一. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x+\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y\right)$,

由于 $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$ 有界, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x=0$ 是无穷小, 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=0$,

同理可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3}{x^2+y^2}=0$, 因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$.

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

方法二. 取 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\rho\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)\right|<2\rho,$$

因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho=0$, 所以由夹逼准则可得, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, 即函数在 $(0,0)$ 处连续.

例 7.13　讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 的连续性.

解　选取 $y=kx$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$, 其极限值随 k 的不同而变化, 极限不存在, 故函数在 $(0,0)$ 处不连续.

闭区间上连续的二元函数具有与一元函数类似的性质.

定理 7.2　最值定理

在有界闭区域D 上的多元连续函数, 必定在D 上有界, 且能取得它的最大值和最小值。即在D 上至少存在点P_1, P_2, 使得$\forall P \in D$, 有$f\left(P_2\right) \leq f(P) \leq f\left(P_1\right)$.

定理 7.3　介值定理

设$z=f(x, y)$ 在有界闭区域D 上连续, M 和m 分别是$f(x, y)$ 在D 上的最大值和最小值, 则对任何$c \in[m, M]$, 必存在一点$\left(x_0, y_0\right) \in D$, 使得$f\left(x_0, y_0\right)=c$.

定理 7.4　初等函数的连续性

由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫多元初等函数. 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的(定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域).

一般地, 求 $\lim\limits_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 时, 如果$f(P)$ 是初等函数, 且P_0 是$f(P)$ 的定义域的内点, 则$f(P)$ 在点P_0 处连续, 于是 $\lim\limits_{P \rightarrow P_0} f(P)=f\left(P_0\right)$.

例 7.14　求 $\lim\limits_{(x, y) \rightarrow(0,1)} \frac{2-x y}{x^2+y^2}$.

解　原式$=\frac{2-0}{0+1}=2$. (直接由连续性得)

例 7.15　求 $\lim\limits_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x y}{2-\sqrt{x y+4}}$.

解　原式$=\lim\limits_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x y(2+\sqrt{x y+4})}{4-x y-4}=\lim\limits_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}}-(2+\sqrt{x y+4})=-(2+2)=-4$.

§ 7.3　偏导数

设二元函数$z=f(x, y)$ 在$P_0\left(x_0, y_0\right)$ 的某邻域内有定义. 在$P_0\left(x_0, y_0\right)$ 处, 分别给x_0, y_0 一个改变量Δx 和Δy, 得到$f\left(x_0, y_0\right)$ 的相应改变量为

$$\Delta z=f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)$$

我们称这个改变量为函数$f(x, y)$ 在$P_0(x_0, y_0)$ 点的**全增量**。

回忆一元函数变化率的概念, 它是当自变量的改变量趋于零时, 函数的改变量与自变量的改变量之比的极限. 由于二元函数的自变量有两个, 这时因变量关于自变量的变化比较复杂。本节我们首先考虑函数关于一个自变量的变化率. 以二元函数$z=f(x, y)$ 为例, 如果只有自变量x 变

化, 而自变量y 固定(即看做常量), 这时它就是x 的一元函数, 这函数对x 的导数, 就称为二元函数$z=f(x,y)$ 对于x 的偏导数.

称

$$\Delta z_x = f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)$$

为函数$f(x,y)$ 在$P_0(x_0,y_0)$点的关于x 的**偏增量**。

称

$$\Delta z_y = f\left(x_0, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)$$

为函数$f(x,y)$ 在$P_0(x_0,y_0)$点的关于y 的**偏增量**。

定义 7.14 偏导数

设函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处对x 的偏导数, 记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或$f_x'\left(x_0,y_0\right)$, $f_1'\left(x_0,y_0\right)$ （也可记作z_x', f_x' ）, 即

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}.$$

类似地, 函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处对y 的偏导数定义为

$$f_y'\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $f_y'\left(x_0,y_0\right)$, $f_2'\left(x_0,y_0\right)$.

注 7.5 对二元函数$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处求偏导数$f_x'\left(x_0,y_0\right)$, 可固定$y=y_0$ 不变, 将$z=f\left(x,y_0\right)$ 看作x 的一元函数在$x=x_0$ 处求导数. 类似地, 可求偏导数$f_y'\left(x_0,y_0\right)$. 即

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}=\left.\frac{d}{dx}f\left(x,y_0\right)\right|_{x=x_0},$$

$$f_y'\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y}=\left.\frac{d}{dy}f\left(x_0,y\right)\right|_{y=y_0}.$$

注 7.6 如果函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内任一点(x,y) 处对x 或y 的偏导数都存在, 那么这个偏

导数就是x, y 的函数, 称为函数$z = f(x,y)$ 对自变量x 或y 的偏导函数（简称偏导数）. 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x, f'_x(x,y), f'_1(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y, f'_y(x,y), f'_2(x,y)$$

注 7.7　偏导数的概念可以推广到二元以上函数, 如$u = f(x,y,z)$ 在(x,y,z) 处

$$f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$f'_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

由偏导函数的概念可知, $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处对x 的偏导数$f'_x(x_0,y_0)$ 显然就是偏导函数$f'_x(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的函数值; $f'_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数$f'_y(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的函数值.

例 7.16　求$z = xy + x^3 + xy^2$ 在点$(-1,1)$ 处的偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 3x^2 + y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2xy$，$\therefore$　$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}} = 1+3+1 = 5$　，　$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}} = -1-2 = -3.$

例 7.17　设$z = (1+xy)^y$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1+xy)^{y-1}$,

令$z = e^{y\ln(1+xy)}$,

则$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y\ln(1+xy)} \cdot \left[\ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy}\right] = (1+xy)^y \cdot \left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}\right].$

例 7.18　求$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解　把y 和z 都看做常量, 得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}.$$

由于所给函数关于自变量的对称性, 所以$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$,　$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.

例 7.19 已知$f(x,y)=x^2+\left(y^2-1\right)\arctan\sqrt{xy}$, 求$f_x'(1,1)$.

解 方法一. $f_x'(x,y)=2x+\left(y^2-1\right)\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xy}}$, 所以$f_x'(1,1)=2$.

方法二. 令$y=1$ 得, $f(x,1)=x^2$, 所以$f_x'(1,1)=\left.2x\right|_{x=1}=2$.

例 7.20 设$u=y\cdot f\left(x^2-y^2\right)$, 其中$f(x)$ 可导, 证明: $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$

解

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}\cdot y\cdot f'\left(x^2-y^2\right)\cdot 2x=2y\cdot f'\left(x^2-y^2\right)(1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f\left(x^2-y^2\right)}{y}+f'\left(x^2-y^2\right)\cdot(-2y)(2)$$

(1) +(2) 得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f\left(x^2-y^2\right)}{y}=\frac{u}{y^2}$$

下面通过两个例子说明偏导数与连续的关系(没有关系).

例 7.21 设$f(x,y)=\begin{cases}0 & x=0\text{ 或}y=0\\ 1 & xy\neq 0\end{cases}$, 求$f_x'(0,0), f_y'(0,0)$.

解 分段函数的分段点处求偏导, 用定义求由于$f(x,0)=f(0,y)=0$, 故

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

容易验证函数在$(0,0)$ 处极限不存在故不连续($\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=1$).

例 7.22 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 连续, 但$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处对x 和y 的偏导数不存在.

解 因为$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$, 而且$f(0,0)=0$, 所以$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 连续.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{ 不存在,}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}\text{ 不存在,}$$

所以$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处对x 和y 的偏导数不存在.

注 7.8　偏导数存在, 函数未必连续. 函数连续，偏导数不一定存在.

偏导数几何意义：

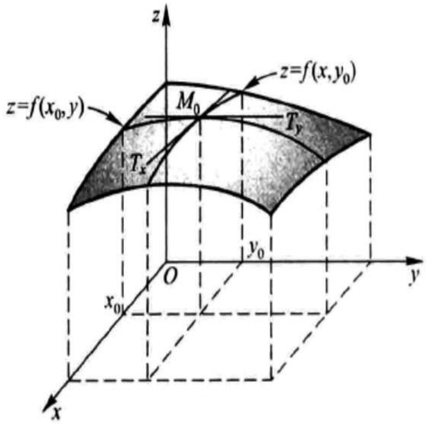


图 7.11　偏导数的几何意义

设$M_0\left(x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right)\right)$ 为曲面$z=f(x, y)$ 上一点, 如图.

$z=f\left(x, y_0\right)$ 可以看成是由方程组$\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 生成, 此曲线是曲面$z=f(x, y)$ 与平面$y=y_0$ 的交线, 因此$z=f\left(x, y_0\right)$ 位于平面$y=y_0$ 内.

偏导数$f_x^{\prime}\left(x_0, y_0\right)=\left.\frac{d}{d x} f\left(x, y_0\right)\right|_{x=x_0}$ 就是曲面被平面$y=y_0$ 所截得的曲线在点M_0 处的切线$M_0 T_x$ 对x 轴的斜率;

偏导数$f_y^{\prime}\left(x_0, y_0\right)=\left.\frac{d}{d y} f\left(x_0, y\right)\right|_{y=y_0}$ 就是曲面被平面$x=x_0$ 所截得的曲线在点M_0 处的切线$M_0 T_y$ 对y 轴的斜率.

§ 7.4 全微分

回顾一元函数微分的定义：函数$y=f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及$x_0+\Delta x$ 在这区间内, 如果

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=A \cdot \Delta x+o(\Delta x),$$

成立（其中A 是与Δx 无关的常数）, 则称函数$y=f(x)$ 在点x_0 可微, 并且称$A \cdot \Delta x$ 为函数$y=f(x)$ 在点x_0 相应于自变量增量Δx 的微分，记作$\left.d y\right|_{x=x_0}$ 或$d f\left(x_0\right)$, 即$\left.d y\right|_{x=x_0}=A \cdot \Delta x$.

对于二元函数$z=f(x,y)$, 函数对于x,y 的偏增量分别为$\Delta z_x,\Delta z_y$, 根据一元函数的微分, 可得:

$$\Delta z_x=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f'_x(x,y)\Delta x$$

$$\Delta z_y=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f'_y(x,y)\Delta y$$

上面两式右端分别叫做二元函数对x 和y 的偏微分. 在实际问题中, 有时需要研究多元函数全增量的问题.

例 7.23 设矩形长为x ,宽为y,则面积为xy. 受热膨胀后的矩形金属薄板, 长由x_0 增加Δx, 宽由y_0 增加Δy, 则面积变化

$$\Delta S=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0,\ \text{即}\Delta S=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y,$$

全增量ΔS 由三项组成, 当$\Delta x,\Delta y$ 很小时, 这三项均很小, 前两项是$\Delta x,\Delta y$ 的线性函数, 最后一项是比$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小.

定义 7.15 全微分

如果函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可以表示为

$$\Delta z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中A,B 不依赖于$\Delta x,\Delta y$ 而仅与x_0,y_0 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称函数$z=f(x_0,y_0)$ 在点(x_0,y_0) 可微分, $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数$z=f(x_0,y_0)$ 在点(x_0,y_0) 的全微分, 记为dz, 即

$$dz\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=A\Delta x+B\Delta y$$

如果函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内各点处都可微分, 那么称函数$z=f(x,y)$ 在D 内可微分, 或称函数$z=f(x,y)$ 是D 内的可微函数.

定理 7.5 可微偏导存在(必要条件)

如果函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微分, 则该函数在点(x,y) 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证明 如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分, $\forall P'(x+\Delta x,y+\Delta y)\in O_\delta(P)$, 总有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

特别地, 当$\Delta y=0$时, 上式仍成立, 此时$\rho=|\Delta x|$, $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|)$, 即$\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$, 故$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=A$, 即$A=f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}$, 同理可得$B=\frac{\partial z}{\partial y}$. 所以$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

注 7.9 类似于一元函数的微分, Δx 和Δy 分别是自变量x 和y 的微分$\mathrm{d}x$ 和$\mathrm{d}y$, 因此若$z=f(x,y)$ 在$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处可微, 则它的全微分可写成

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=z_x'\left(x_0,y_0\right)\mathrm{d}x+z_y'\left(x_0,y_0\right)\mathrm{d}y$$

当$z=f(x,y)$ 在区域D 内处处可微时. 则$z=f(x,y)$ 在D 内的全微分函数为

$$\mathrm{d}z=z_x'(x,y)\mathrm{d}x+z_y'(x,y)\mathrm{d}y$$

例 7.24 计算下列函数的全微分: (1) $z=xe^{2y}$; (2) $z=x^2-xy+y^2$

解 (1) $dz=e^{2y}dx+2xe^{2y}dy$; (2) $dz=(2x-y)dx+(2y-x)dy$.

例 7.25 设$z=\arctan\frac{x}{1+y^2}$, 求$dz|_{(1,1)}$.

解 因为$z_x'|_{(1,1)}=\left.\frac{\frac{1}{1+y^2}}{1+\left(\frac{x}{1+y^2}\right)^2}\right|_{(1,1)}=\frac{2}{5}$, $z_y'|_{(1,1)}=\left.\frac{-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}}{1+\left(\frac{x}{1+y^2}\right)^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{2}{5}$, 所以$dz|_{(1,1)}=\frac{2}{5}dx-\frac{2}{5}dy=\frac{2}{5}(dx-dy)$.

例 7.26 计算函数$u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz}$, 故所求全微分

$$du=dx+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)dy+ye^{yz}dz.$$

上一节得到多元函数在某点的偏导数存在并不能保证函数在该点处连续，但是根据上述微分定义，我们可以证明多元函数的可微与连续性有下述关系：

定理 7.6 可微必连续

如果函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微分, 则函数在该点必连续.

证明 如果函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微分, 则$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \lim_{\rho\to 0}\Delta z=0$, 从而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y),$$

因此, 函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续.

注意: 连续不一定可微分! 偏导数存在不一定可微! 看下例

例 7.27 函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$ 处连续，偏导数存在但全微分不存在. 因为在点$(0,0)$ 处有$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 则

$$\Delta z-\left[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y\right]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

而$\frac{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 当$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时, 极限不存在.

定理 7.7 偏导数连续可微(充分条件)

如果函数$z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 可微.

图 7.12

全微分在近似计算中的应用

当二元函数$z=f(x,y)$ 在点$P(x,y)$ 的两个偏导数$f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 连续, 且$|\Delta x|, |\Delta y|$ 都较小时, 有近似等式

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

也可写成

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

例 7.28 计算$(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解 设函数$f(x,y)=x^y$. 取$x=1,y=2,\Delta x=0.04,\Delta y=0.02$. $\because$ $f(1,2)=1$, $f'_x(x,y)=yx^{y-1}$, $f'_y(x,y)=x^y\ln x$ 所以$f'_x(1,2)=2$, $f'_y(1,2)=0$, 由公式得$(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$.

§ 7.5 多元复合函数求导法则

本节我们学习多元复合函数的求导法则.

定理 7.8 一元函数与多元函数复合求导

如果函数$u=\phi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t 可导, 函数$z=f(u,v)$ 在对应点(u,v) 具有连续偏导数, 则复合函数$z=f[\phi(t),\psi(t)]$ 在对应点t 可导, 且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

证明 设t 获得增量Δt, 则$\Delta u=\phi(t+\Delta t)-\phi(t)$, $\Delta v=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$; 由于函数$z=f(u,v)$ 在点(u,v) 有连续偏导数，则函数在该点可微分，从而

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho),\ 其中\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}.$$

$$当\Delta u\to 0,\Delta v\to 0\ 时, \rho\to 0, \frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t},$$

$$故\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}.$$

$$而\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta t}=0,\ 所以\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

注 7.10 公式可推广到中间变量为三个或更多的情况: 设$z=f(u,v,w)$ 是可微的, $u=u(t),v=v(t),w=w(t)$ 是可导的, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

例 7.29 设$z=\frac{y}{x}$, 而$x=\mathrm{e}^t,y=1-\mathrm{e}^{2t}$, 求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{y}{x^2}\cdot\mathrm{e}^t+\frac{1}{x}\cdot\left(-2\mathrm{e}^{2t}\right)=-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^t$.

例 7.30 设$z=uv+w$, 而$u=\mathrm{e}^t, v=\cos t, w=\sin t$, 求全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=v\mathrm{e}^t-u\sin t+\cos t=\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)+\cos t.$

定理 7.9 多元函数与多元函数的复合求导

如果$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y) 具有对x 和y 的偏导数, 且函数$z=f(u,v)$ 在对应点(u,v) 具有连续偏导数, 则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

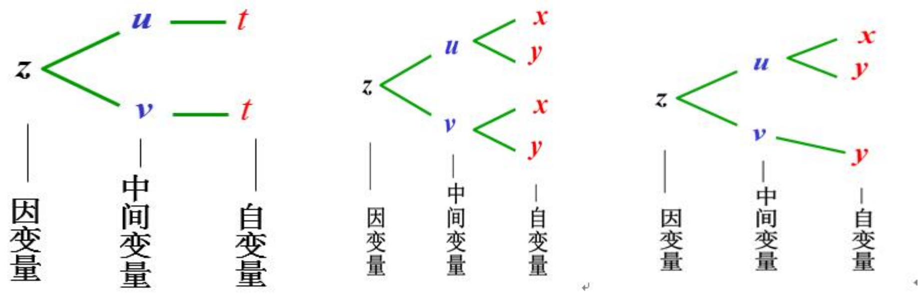


图 7.13 链式法则

注 7.11 公式可推广到中间变量为三个或更多的情况: 设$u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y), w=w(x,y)$ 都在点(x,y) 具有对x 和y 的偏导数, 复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),w(x,y)]$ 在点(x,y) 的两个偏导数存在, 且.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

例 7.31 设$z=\mathrm{e}^u\sin v$, 而$u=xy, v=x+y$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$ 和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\mathrm{e}^{u}\sin v\cdot y+\mathrm{e}^{u}\cos v\cdot 1$$

$$=\mathrm{e}^{u}(y\sin v+\cos v)=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\mathrm{e}^{u}\sin v\cdot x+\mathrm{e}^{u}\cos v\cdot 1$$

$$=\mathrm{e}^{u}(x\sin v+\cos v)=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

例 7.32　$z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　设$u=xy,v=\frac{x}{y}$，则$z=f(u,v),u=xy,v=\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'y+f_2'\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'x+f_2'\frac{-x}{y^2}$$

例 7.33　$u=f(x,xy,xyz)$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'y+f_3'yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2'x+f_3'xz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_3'xy.$

定理 7.10　中间变量既有一元函数，又有多元函数的复合函数求导

如果$u=\phi(x,y)$ 在点(x,y) 具有对x 和y 的偏导数，函数$v=\psi(y)$ 在点y 可导，函数$z=f(u,v)$ 在对应点(u,v) 具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\phi(x,y),\psi(y)]$ 在对应点(x,y) 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

一阶全微分的形式不变性：

设函数$z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，则有全微分$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v$；当$u=\phi(x,y),v=$

$\psi(x,y)$ 时, 有$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$. 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

全微分形式不变形的实质: 无论u 和v 是自变量还是中间变量, 函数$z=f(u,v)$ 的全微分形式是一样的.

注意多元函数全微分也有与一元函数微分完全相同的四则运算法则. 若$f(x,y)$ 与$g(x,y)$ 均可微, a,b 为常数, 则

(1) $\mathrm{d}[af(x,y)+bg(x,y)]=a\,\mathrm{d}f(x,y)+b\,\mathrm{d}g(x,y)$;

(2) $\mathrm{d}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=g(x,y)\mathrm{d}f(x,y)+f(x,y)\mathrm{d}g(x,y)$;

(3) $\mathrm{d}\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right)=\frac{g(x,y)\mathrm{d}f(x,y)-f(x,y)\mathrm{d}g(x,y)}{[g(x,y)]^2}(g(x,y)\neq 0)$.

例 7.34 求函数$z=x\ln(x-2y)$ 的偏导数和全微分.

解 由微分运算法则: $d(uv)=udv+vdu$

$$\begin{aligned}
dz&=\ln(x-2y)dx+xd\ln(x-2y)=\ln(x-2y)\mathrm{d}x+x\frac{\mathrm{d}(x-2y)}{x-2y}\\
&=\ln(x-2y)\mathrm{d}x+x\frac{\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y}{x-2y}=\left[\ln(x-2y)+\frac{x}{x-2y}\right]\mathrm{d}x-\frac{2x}{x-2y}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因此$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(x-2y)+\frac{x}{x-2y}$, $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{x-2y}$.

例 7.35 设$z=\mathrm{e}^u\sin v$, 而$u=xy, v=x+y$. 求dz.

解 方法一:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1\\
&=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1\\
&=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].
\end{aligned}$$

因此$dz = \mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx + \mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]dy.$

方法二：

$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^u \sin v\right) = \mathrm{e}^u \sin v\, \mathrm{d}u + \mathrm{e}^u \cos v\, \mathrm{d}v$, 因

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}(x+y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y,$$

代人后归并含$\mathrm{d}x$ 及$\mathrm{d}y$ 的项, 得$\mathrm{d}z = (\mathrm{e}^u \sin v \cdot y + \mathrm{e}^u \cos v)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^u \sin v \cdot x + \mathrm{e}^u \cos v)\,\mathrm{d}y$, 即

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}y.$$

§ 7.6 隐函数求导法则

前面我们利用一元复合函数求导法则介绍了由二元方程$F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数的求导方法, 但没有给出导数的一般公式. 本节我们先给出二元方程$F(x,y)=0$ 可确定隐函数的条件及隐函数可微的条件, 然后利用多元复合函数的微分法导出一元隐函数的导数公式, 并进一步将其推广到多元隐函数的情形.

定理 7.11　一元隐函数定理

设二元函数$F(x,y)$ 在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数, 且

$$F\left(x_0,y_0\right)=0, F_y'\left(x_0,y_0\right)\neq 0$$

则由方程$F(x,y)=0$ 在点(x_0,y_0) 的某一邻域内能惟一地确定一个有连续导数的函数$y=f(x)$, 它满足条件$y_0=f\left(x_0\right)$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)} = -\frac{F_x'}{F_y'}. \tag{7.1}$$

证明　以下仅对公式(7.1) 作证明.

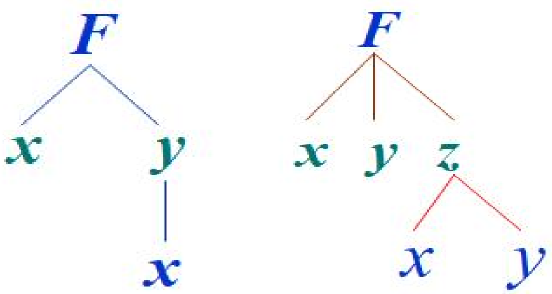
由于$y=f(x)$ 是方程$F(x,y(x))=0$ 确定的隐函数, 所以对方程$F(x,y(x))=0$ 两边同时对x 求导得$F_x + F_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, 解得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$.

注 7.12　二元方程$F(x,y)=0$ 确定一元隐函数$y=y(x)$, 求y_x' 的两个方法.

方法一: (1)写出$F(x,y)$;　(2) 求出F_x', F_y';　(3) 代入公式.

方法二: 两边关于x 求导, 解出y_x' (将公式推导过程直接应用到具体问题).

例 7.36　求下列隐函数的导数y_x' : (1)$e^{xy}=3xy^2$; (2)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



(a) 一元隐函数　　(b) 二元隐函数

图 7.14　隐函数推导链式法则

解　(1)方法一：令$F(x,y)=e^{xy}-3xy^2$,

$$F_x'=ye^{xy}-3y^2 \quad F_y'=xe^{xy}-6xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{ye^{xy}-3y^2}{xe^{xy}-6xy}.$$

方法二：两边关于x 求导,

$$e^{xy}(xy'+y)=3y^2+6xyy'.$$

(2) 方法一：令$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$,

$$F_x'=\frac{2x}{a^2} \quad F_y'=\frac{2y}{b^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{2x/a^2}{2y/b^2}=-\frac{xb^2}{ya^2}.$$

方法二：两边关于x 求导,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0.$$

下面我们给出由三元方程确定二元隐函数的定理.

定理 7.12　二元隐函数定理

设$F(x,y,z)$ 在$P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数, 且

$$F\left(x_0,y_0,z_0\right)=0, \quad F_z'\left(x_0,y_0,z_0\right)\neq 0.$$

则由方程$F(x,y,z)=0$ 在点$P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 的某一邻域内能惟一地确定一个具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$, 满足$z_0=f\left(x_0,y_0\right)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}. \tag{7.2}$$

证明　我们仅对公式(7.2) 作推导：由条件在方程$F(x,y,f(x,y))=0$ 两边同时对x 求偏导，得

$$F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

在方程$F(x,y,f(x,y))=0$ 两边对y 求偏导，得

$$F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

注 7.13　三元方程$F(x,y,z)=0$ 确定二元隐函数$z=f(x,y)$，求z'_x，z'_y 的两个方法.

方法一：(1)写出$F(x,y,z)$；　(2) 求出F'_x, F'_y, F'_z；　(3) 代入公式.

方法二：两边对$x(y)$ 求偏导，注意z 为x,y 的函数，解出z'_x, z'_y

例 7.37　设$x^2+y^2+z^2-4z=0$ 求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解　方法一：设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则$F_x=2x$，　$F_y=2y$，　$F_z=2z-4$，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z-2} = \frac{x}{2-z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{y}{2-z}.$$

方法二：

$$\text{等式两边对}x\text{ 求偏导: } 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 4\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z},$$

$$\text{等式两边对}y\text{ 求偏导: } 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 4\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2-z}.$$

例 7.38　设$xyz=a^3$，证明$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2z$.

证明　设$F(x,y,z)=xyz-a^3$，$\frac{\partial F}{\partial x}=yz$，$\frac{\partial F}{\partial y}=xz, v\frac{\partial F}{\partial z}=xy$.

$$\text{左边} = x \cdot \frac{-F'_x}{F'_z} + y \cdot \frac{-F'_y}{F'_z} = x \cdot \frac{-yz}{xy} + y \cdot \frac{-xz}{xy} = -2z.$$

例 7.39　设$F(x,y,z)=0$，证明$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1$.

证明　左边$= \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right) \cdot \left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right) \cdot \left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right) = -1$.

§ 7.7 高阶偏导数

设$z = f(x, y)$ 在区域D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数, 则称它们是$z = f(x, y)$ 的二阶偏导数.按求导顺序不同, 有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = f''_{11}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = f''_{12}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{vx}(x, y) = f''_{21}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{vg}(x, y) = f''_{22}(x, y).$$

注 7.14　其中$f''_{xy}(x, y)$ 与$f''_{xx}(x, y)$ 称为$f(x, y)$ 的二阶混合偏导数. $f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 表示的是函数$f(x, y)$ 先对x 求偏导数, 然后再对y 求偏导数, 而$f''{}_{yx}(x, y)$ 则是$f(x, y)$ 先对y 求偏导数,再对x 求偏导数.

注 7.15　二元函数$f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数$f''_{xy}(x, y)$ 与$f''_{yx}(x, y)$ 一般情况下是不同的,但是可以证明当$f''_{xy}(x, y)$ 与$f''_{yx}(x, y)$ 连续时, 它们就相等.

注 7.16　类似可以定义更高阶的偏导数. 例如, $z = f(x, y)$ 关于x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

$z = f(x, y)$ 关于x 的$n-1$ 阶偏导数, 再关于y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}.$$

例 7.40　求函数$z = x^3y^2 - x^2y^3 + xy$ 的二阶偏导数。

解 先求函数的一阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-2xy^3+y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-3x^2y^2+x.$$

再对$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别关于x,y 求偏导, 得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=6xy^2-2y^3,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=6x^2y-6xy^2+1.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=6x^2y-6xy^2+1,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2x^3-6x^2y.$$

例 7.41 求函数$z=e^{x+2y}$ 的二阶偏导数。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+2y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x+2y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2e^{x+2y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$.

例 7.42 设$z=f(x+y,x-y),f$ 具有二阶连续偏导数, 求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 令$u=x+y,v=x-y$, 则$z=f(u,v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 1=f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)=f_{11}''-f_{12}''+f_{21}''-f_{22}''.$$

注 7.17 为了记号简便，在计算偏导数时，有时会省略题目中函数的变量.

例 7.43 设$x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$, 则$F_x'=2x,F_z'=2z-4$. 当$z\neq 2$ 时, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}.$$

再一次对x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

例 7.44 混合偏导数不相等的例子：

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$f'_x(x,y)=\begin{cases} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$f'_y(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1,$$
$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

§ 7.8 方向导数与梯度

7.8.1 方向导数

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率. 实际中需要讨论函数$z=f(x,y)$ 在点P_0 处沿任意方向l 的变化率问题.

定义 7.16 方向导数

设l 是xOy 面上以$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 为始点的一条射线, $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{v}=\left(v_1,v_2\right)$ 是与射线l 同方向的单位向量, 则射线l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+tv_1,\\ y=y_0+tv_2\end{cases}\quad (t\geqslant 0).$$

设函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 的某邻域$O\left(P_0\right)$ 内有定义, $P\left(x_0+tv_1,y_0+tv_2\right)$ 为射线l 上另一点, 且$P\in O\left(P_0\right)$, 如果函数增量$f\left(x_0+tv_1,\ y_0+tv_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)$ 与P 到P_0 的距离$|PP_0|=t$ 的比值

$$\frac{f\left(x_0+tv_2,y_0+tv_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{t}$$

当P 沿着射线l 趋于P_0, 即$t\to 0^+$ 时, 极限存在, 则称这个极限为函数在点P_0 沿方向l 的方向导数, 记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(x_0+tv_1,y_0+tv_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{t}.$$

注 7.18　若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数存在, 则 $f(x,y)$ 在点 P_0 沿着 x 轴正向 $\boldsymbol{v}=\vec{i}=(1,0)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x'(x_0,y_0).$$

函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 沿着 $\boldsymbol{v}=-\vec{i}=(-1,0)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=-\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t,y_0)-f(x_0,y_0)}{-t}=-f_x'(x_0,y_0).$$

同理 y 轴方向有类似的结论.

注 7.19　$f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿着 x 轴正向 $\vec{i}=(1,0)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 存在, 但 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 未必存在.例如, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $P_0(0,0)$ 处沿方向 $l=\vec{i}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1$, 而 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 不存在. (这是与课本定义的不同之处，课本上采用的是极限，本定义采用的是右极限)

偏导数与方向导数的另一个关系由下面定理给出，该定理同时给出了求解方向导数的方法.

定理 7.13　用偏导数计算方向导数

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微, 则函数在该点沿任意方向 l (方向向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$) 的方向导数存在, 且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)v_1+f_y'(x_0,y_0)v_2.$$

证明　由于函数可微，则有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

令 $\Delta x=\rho v_1,\Delta y=\rho v_2$, 则 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho$, 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho v_1,y_0+\rho v_2)-f(x_0,y_0)}{\rho}\\&=\lim_{\rho\to 0^+}\left[f_x(x_0,y_0)\cdot v_1+f_y(x_0,y_0)\cdot v_2+\frac{o(\rho)}{\rho}\right]\\&=f_x'(x_0,y_0)\cdot v_1+f_y'(x_0,y_0)\cdot v_2,\end{aligned}$$

即得方向导数存在, 且有 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x'(x_0,y_0)\,v_1 + f_y'(x_0,y_0)\,v_2$.

例 7.45 求函数$z = xe^{2y}$ 在点$P(1,0)$ 处沿从点$P(1,0)$ 到点$Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解 这里方向1 即为$\overrightarrow{PQ} = (1,-1)$，与有1 同方向的单位向量为$\vec{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

因为函数可微, 且 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2$, 故所求方向导数为 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.8.2 梯度

与方向导数相关的另一个概念是梯度.

定义 7.17 梯度

设$z = f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$ 处存在偏导数$f_x'(x_0,y_0)$ 和$f_y'(x_0,y_0)$, 则称向量

$$\left(f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)\right)$$

为函数$f(x,y)$ 在点P_0 处的梯度, 记为

$$\nabla f|_{P_0}, \nabla f|_{(x_0,y_0)}, \nabla f(x_0,y_0) \text{或 } \operatorname{grad} f|_{P_0}, \operatorname{grad} f|_{(x_0,y_0)}, \operatorname{grad} f(x_0,y_0)$$

(或 $\nabla z|_{P_0}$, $\operatorname{grad} z|_{P_0}$), 即

$$\nabla f|_{p_0} = \operatorname{grad} f|_{P_0} = \left(f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)\right).$$

若$f(x,y)$ 在区域D 内处处存在偏导数, 则称$\nabla f = \left(f_x'(x,y), f_y'(x,y)\right)$ 为$f(x,y)$ 在D 内的梯度(函数). 梯度∇f 是一个向量, 其长度为

$$|\nabla f| = \sqrt{[f_x'(x,y)]^2 + [f_y'(x,y)]^2}.$$

当$|\nabla f| \neq 0$ 时, 称∇f 的方向为梯度方向.

设$z = f(x,y)$ 在$P_0(x_0,y_0)$ 处可微, $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2)$ $(|v| = 1)$ 是任一给定的方向, 则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{P_0} = f_x'(x_0,y_0)\,v_1 + f_y'(x_0,y_0)\,v_2 = \nabla f|_{p_0}\cdot \boldsymbol{v} = |\nabla f|_{P_0}\cos\theta.$$

其中θ 表示梯度与v 之间的夹角.

(1) 当$\theta = 0$, 即$\boldsymbol{v}$ 与$\nabla f|_{p_0}$ 方向相同时, $f(x,y)$ 增加最快. 此时方向导数最大, 有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left|\nabla f|_{p_0}\right|.$$

(2) 当$\theta=\pi$, 即$\boldsymbol{v}$ 与$\nabla f|_{p_0}$ 方向相反时, $f(x,y)$ 减少最快. 此时方向导数最小, 有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left|\nabla f|_{p_0}\right|.$$

(3) 当$\theta=\frac{\pi}{2}$, 即$\boldsymbol{v}$ 与$\nabla f|_{p_0}$ 方向垂直时, 函数的变化率为0 , 即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{(x_0,y_0)}=\left|\nabla f|_{p_0}\right|\cos\theta=0.$$

例 7.46　求grad $\frac{1}{x^2+y^2}$.

解　由$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ 得$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$, 有grad $\frac{1}{x^2+y^2}=\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

例 7.47　设$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, $P_0(1,1)$, 求

(1) $f(x,y)$ 在P_0 处增加最快的方向以及$f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数;

(2) $f(x,y)$ 在P_0 处减少最快的方向以及$f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数;

(3) $f(x,y)$ 在P_0 处的变化率为零的方向.

解　(1) $f(x,y)$ 在P_0 处沿$\nabla f(1,1)$ 的方向增加最快, 故所求方向可取为$l=\nabla f(1,1)=(1,1)$. 方向导数为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=|\nabla f(1,1)|=\sqrt{2}$.

(2) $f(x,y)$ 在P_0 处沿$-\nabla f(1,1)$ 的方向减少最快, 故所求方向可取为$l=-\nabla f(1,1)=-(1,1)$. 方向导数为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=-|\nabla f(1,1)|=-\sqrt{2}$.

(3) $f(x,y)$ 在P_0 处沿垂直于$\nabla f(1,1)$ 的方向变化率为零, 此方向可取为$(-1,1)$ 或$(1,-1)$.

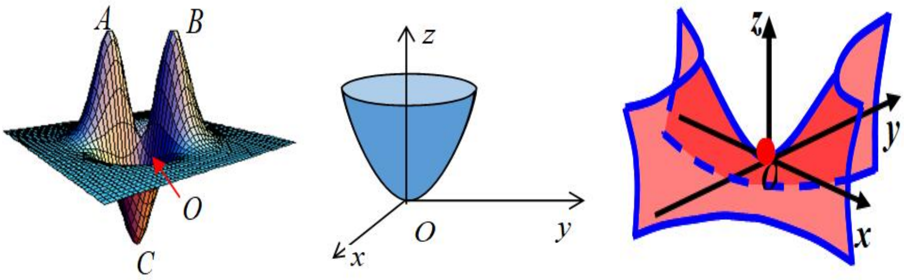
三元函数的方向导数、梯度等概念及性质很容易推广，这里不再赘述.

§ 7.9 多元函数的极值

7.9.1 极值

观察二元函数$z=-\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 的图形. A,B 均为局部最高点, C 为局部最低点, 原点O 既不是局部最低也不是局部最高点. 与一元函数类似, 我们可以定义多元函数的极值和最值，并且可以用多元函数微分法来求解极值和最值.

定义 7.18　二元函数的极值



(a) $z=-\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ (b) $z=3x^2+3y^2$ (c) $z=xy$

图 7.15 多元函数的极值

设$f(x,y)$ 在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 的某一邻域$O_\delta\left(P_0\right)$ 内有定义, 若

$$f(x,y)\geqslant f\left(x_0,y_0\right)\left(f(x,y)\leqslant f\left(x_0,y_0\right)\right),(x,y)\in O_\delta\left(P_0\right)$$

则称$f\left(x_0,y_0\right)$ 是$f(x,y)$ 的一个极小值(极大值), 这时称(x_0,y_0) 是$f(x,y)$ 的一个极小值点(极大值点). 极小值和极大值统称为极值.

二元函数极值也是局部性的概念.

例 7.48 讨论函数$z=3x^2+3y^2$ 的极值点.

解 函数图像为旋转抛物面, 开口向上. 因为点$(0,0)$ 的任一邻域内异于$(0,0)$ 点的函数值都为正, 而$(0,0)$ 处的函数值为0, 故$(0,0)$ 为它的极小值点.

例 7.49 判断原点是否为函数$z=xy$ 的极值点.

解 因为点$(0,0)$ 的任一邻域中既有函数值为正的点, 也有为负的点, 故在$(0,0)$ 处无极值.

定理 7.14 二元函数极值的必要条件

设$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的偏导数$f_x'\left(x_0,y_0\right),f_y'\left(x_0,y_0\right)$ 存在, 若(x_0,y_0) 是$f(x,y)$ 的极值点, 则必有

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=f_y'\left(x_0,y_0\right)=0.$$

其中称满足条件

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases}$$

的点(x,y) 为$f(x,y)$ 的驻点.

证明 不妨设$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处有极大值. 依照极大值的定义, 在点(x_0,y_0) 的某邻域内异于(x_0,y_0) 的点(x,y) 都适合不等式$f(x,y)<f(x_0,y_0)$. 特殊地, 在该邻域内取$y=y_0$ 而$x\neq x_0$ 的点, 也应适合不等式$f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$. 这表明一元函数$f(x,y_0)$ 在$x=x_0$ 处取得极大值, 因而必有$f'_x(x_0,y_0)=0$. 类似可证

$$f'_y(x_0,y_0)=0.$$

注 7.20 一阶偏导数存在的极值点必为驻点, 但驻点不一定是极值点. 例如, 原点$(0,0)$ 是函数$z=xy$ 的驻点, 但不是极值点.

注 7.21 如果函数在个别点偏导数不存在, 这些点也可能为极值点. 例如: 函数$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在$(0,0)$ 处有极大值, 但在$(0,0)$ 处偏导数不存在. **极值必在驻点和一阶偏导数不存在的点中取得.**

注 7.22 从几何上看, 这时如果曲面$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0,z_0) 处有切平面, 则切平面$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ 成为平行于xOy 坐标面的平面$z-z_0=0$.

定理 7.15 二元函数极值的充分条件

若函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 令$A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, 则:

(1) 当$B^2-AC<0$ 时, 具有极值$\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

(2) 当$B^2-AC>0$ 时, 没有极值.

(3) 当$B^2-AC=0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

具有二阶连续偏导数的函数$z=f(x,y)$ 极值的求法如下:

第一步解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 求出实数解, 得驻点;

第二步对于每一个驻点(x_0,y_0), 求出二阶偏导数的值A,B,C;

第三步根据定理定出$AC-B^2$ 的符号, 再判定是否是极值.

例 7.50 求函数$z=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值.

解 1. $\begin{cases} f'_x=2x-y-2=0 \\ f'_y=-x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$ 有唯一驻点$(1,0)$.

2. 求二阶偏导数: $f''_{xx}=2, f''_{xy}=-1, f''_{yy}=2$, 故$A=2>0, B=-1, C=2>0$, $B^2-AC=1-4=-3<0$.

3. $\because B^2-AC<0, A>0 \therefore (1,0)$ 为极小值点, 且$z_{极小值}=f(1,0)=-1$.

例 7.51 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解 令$\begin{cases} f'_x=3x^2+6x-9=0 \\ f'_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}$, 求得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$. 又$f''_{xx}=6x+6,\quad f''_{xy}=0,\quad f''_{yy}=-6y+6$.
在$(1,0)$ 处, $AC-B^2=12\times 6-0=72>0$ 且$A>0$, 所以在点$(1,0)$ 处有极小值$f(1,0)=-5$;
在$(1,2)$ 处, $AC-B^2=12\times(-6)=-72<0$, 所以在点$(1,2)$ 处无极值;
在$(-3,0)$ 处, $AC-B^2=[6\times(-3)+6]\times 6-0=-72<0$, 所以在点$(-3,0)$ 处无极值;
在$(-3,2)$ 处, $AC-B^2=(-12)\times(-6)=72>0$, 且$A=-12<0$, 所以在点$(-3,2)$ 处有极大值$f(-3,2)=31$.

7.9.2 最值

如果$f(x,y)$ 在有界闭区域D 上连续, 那么$f(x,y)$ 在D 上必定能取得最大值和最小值. 与一元函数相类似, 我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值. **求函数的最大值和最小值的一般方法是: 将函数$f(x,y)$ 在D 内部的所有驻点和偏导数不存在的点的函数值及在D 的边界上的最大值和最小值相互比较, 其中最大的就是最大值, 最小的就是最小值.**

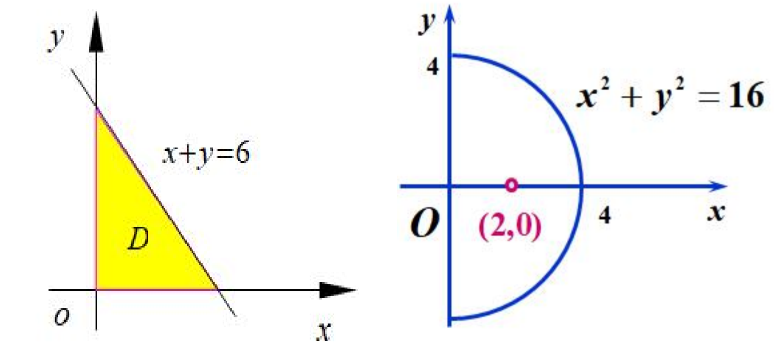
例 7.52 求二元函数$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线$x+y=6$, x 轴和y 轴所围成的闭区域D 上的最大值与最小值.

解 先求函数在D 内的驻点, 解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f'_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$ 得D 内唯一驻点$(2,1)$, 且$f(2,1)=4$. 再求$f(x,y)$ 在D 边界上的最值, 在边界$x=0$ 和$y=0$ 上$f(x,y)=0$; 在边界$x+y=6$ 上, $f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$, 令$f'_x=4x(x-6)+2x^2=0$, 得$x_1=0, y_1=6-x|_{x=0}=6, f(0,6)=0$. $x_2=4, y_2=6-x|_{x=4}=2$, 得$f(4,2)=-64$. 比较可知$f(2,1)=4$ 为最大值, $f(4,2)=-64$ 为最小值.

例 7.53 求$f(x,y)=3x^2+3y^2-x^3$ 在$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 16 \text{ 且} x\geq 0\}$ 上的最小值.

解 (1) 求出$f(x,y)$ 在D 内的极小值。

$$f'_x(x,y)=6x-3x^2=0, f'_y(x,y)=6y=0,$$



(a) $x+y=6, x$ 轴和y 轴所围成的区域 (b) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 16, x \geq 0\}$

图 7.16　多元函数的最值

计算得唯一驻点: $(2,0)$, $f(2,0)=4$.

(2) 求出$f(x,y)$ 在D 的边界$\{x^2+y^2 \leq 16$ 且$x \geq 0\}$ 上的最小值。

a. 限制在半园弧边界上时, 函数为$f(x)=48-x^3, x \in [0,4]$. $\because y'=-3x^2<0, x \in (0,4)$ $\therefore$ $f(x)$ 在$[0,4]$ 上单调递减。最小值为$f(4)=48-4^3=-16$.

b. 限制在y 轴上的直线段时, 函数为$f(y)=3y^2, y \in [-4,4]$. 故$f(y)$ 的最小值为$f(0)=0$.

结合(1),(2)的讨论可知, $f(x,y)$ 在$x=4$ 处取得最小值, 且最小值为-16 。

注 7.23　对于简单的边界条件，求解边界最值问题可以转化为求解闭区间上一元函数的最值。

在求解实际问题的最值时, 如果从实际意义知道所求函数最值存在, 且只有一个驻点P 时, 则该驻点就是函数所求的最值点。

例 7.54　某企业生产两种商品的产量分别为x 单位和y 单位, 利润函数为$L=64x-2x^2+4xy-4y^2+32y-14$ 求最大利润.

解　由极值的必要条件有:

$$\begin{cases} L'_x = 64-4x+4y=0 \\ L'_y = 32-8y+4x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{有唯一驻点}(40,24)$$

$$L''_{xx}=-4, A=-4<0, L''_{xy}=4, B=4, L''_{yy}=-8, C=-8<0, \Delta=B^2-AC=-16<0.$$

故点$(40,24)$ 为极大值点, 即最大值点。最大值为$L(40,24)=1650$, 则该企业生产两种产品产量分别为40 和24 单位时有最大利润为1650 单位.

7.9.3 条件极值

上面所讨论的极值问题, 对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内以外, 并无其他条件, 所以称为**无条件极值**. 但在实际问题中, 有时会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题. 像这种对自变量有附加条件的极值称为**条件极值**. 对于有些实际问题, 一种方法是将**条件极值转化成无条件极值**.

例 7.55 求表面积为a^2 而体积为最大的长方体的体积问题. 设长方体的三棱的长为x, y 与z, 则体积$V = xyz$. 又因假定表面积为a^2, 所以自变量x, y 与z 还必须满足附加条件$2(xy+yz+xz) = a^2$.

解 将z 表示成

$$z = \frac{a^2 - 2xy}{2(x+y)},$$

再把它代人$V = xyz$ 中, 于是问题就化为求

$$V = \frac{xy}{2}\left(\frac{a^2 - 2xy}{x+y}\right)$$

的无条件极值问题.

另一种方法是**拉格朗日乘数法**.

设$f(x,y), \varphi(x,y)$ 在区域D 内有二阶连续偏导数, 求$z = f(x,y)$ 在D 内满足条件$\varphi(x,y) = 0$ 的极值, 可以转化为求拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

的无条件极值。 函数$L(x,y)$ 称为拉格朗日函数, 参数λ 称为拉格朗日乘子. 分析：实际上, $L(x,y,\lambda)$ 的极值一定是$z = f(x,y)$ 在$\varphi(x,y) = 0$ 下的极值.

因为若$L(x,y,\lambda)$ 在点(x_0, y_0, λ_0) 处取得极大值, 则由极值的必要条件可知

$$\begin{cases} L_x'\left(x_0, y_0, \lambda_0\right) = f_x'\left(x_0, y_0\right) + \lambda_0 \varphi_x'\left(x_0, y_0\right) = 0 \\ L_y'\left(x_0, y_0, \lambda_0\right) = f_y'\left(x_0, y_0\right) + \lambda_0 \varphi_y'\left(x_0, y_0\right) = 0 \\ L_\lambda'\left(x_0, y_0, \lambda_0\right) = \varphi\left(x_0, y_0\right) = 0 \end{cases}$$

且在(x_0, y_0, λ_0) 的某一邻域内, 有

$$L(x,y,\lambda) \leqslant L\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)$$

即

$$f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \leqslant f\left(x_0, y_0\right) + \lambda_0 \varphi\left(x_0, y_0\right)$$

因此在条件$\varphi(x,y) = 0$ 下, 考虑到$\varphi\left(x_0, y_0\right) = 0$, 有

$$f(x,y) \leqslant f\left(x_0, y_0\right)$$

即$f(x,y)$ 在(x_0, y_0) 处取得条件$\varphi(x,y) = 0$ 下的极大值.

同理,若$L(x,y,\lambda)$ 在(x_0, y_0, λ_0) 处取得极小值,则$f(x,y)$ 在(x_0, y_0) 处取得条件$\varphi(x,y) = 0$ 下的极小值.

在约束条件$\varphi(x,y) = 0$ 下, 求函数$z = f(x,y)$ 极值的步骤.

1 . 构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$.

2. 解$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ 得驻点(x_0, y_0) 及λ_0.

3. (x_0, y_0) 是否极值点, 可由实际情况判断。

注 7.24 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件. 例如, 求函数$u = f(x, y, z)$ 在条件$\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

设$F = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi(x, y, z) + \lambda_2\psi(x, y, z)$ 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda_1\varphi_x + \lambda_2\psi_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda_1\varphi_y + \lambda_2\psi_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda_1\varphi_z + \lambda_2\psi_z = 0 \\ F'_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F'_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点.

例 7.56 求表面积为a^2 而体积最大的长方体体积.

解 设长方体的三棱长为x, y, z, 则问题就是在条件$\varphi(x, y, z) = 2(xy + yz + xz) - a^2 = 0$ 下, 求$V = xyz,\quad (x > 0, y > 0, z > 0)$ 的最大值. 作拉格朗日函数$F(x, y, z) = xyz + \lambda\left(2xy + 2yz + 2xz - a^2\right)$, 求

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

由于F 只有唯一的驻点, 且体积一定有个最大值, 故在驻点取得最大值为$V_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

例 7.57 设某工厂生产甲,乙两种产品, 产量分别为x 和y (单位:千件), 利润函数为

$$L(x, y) = 6x - x^2 + 16y - 4y^2 - 2 \text{ (单位: 万元)}$$

已知生产这两种产品时, 每千件产品均需消耗某种原料2000 kg, 现有该原料12000 kg, 并假设这些原料必须全部用完, 问两种产品各生产多少千件时, 总利润最大? 最大利润为多少?

解 解依题设有约束条件$2000(x + y) = 12000$ 即$x + y = 6$ 因此, 问题就是在$x + y = 6$ 的条件下求利润函数$L(x, y)$ 的最大值, 为此设拉格朗日函数为

$$F(x, y, \lambda) = 6x - x^2 + 16y - 4y^2 - 2 + \lambda(x + y - 6)$$

由方程组

$$\begin{cases} F_x' = 6 - 2x + \lambda = 0 \\ F_y' = 16 - 8y + \lambda = 0 \\ F_\lambda' = x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

求得惟一驻点$(x_0, y_0, \lambda_0) = \left(\frac{19}{5}, \frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)$. 因此中、乙两分品分别生产$\frac{19}{5}$ 和$\frac{11}{5}$ 千件时总利润最大.最大利润为

$$L\left(\frac{19}{5}, \frac{11}{5}\right) = \frac{111}{5}\ (\text{万元})\ .$$

§ 7.10 二重积分

7.10.1 二重积分的概念和性质

7.10.1.1 两个引例

例 7.58　设有一立体Ω, 底面是xOy 平面上一个有界的可求面积的闭区域D，侧面是以D 的边界曲线为准线、母线平行于z 轴的柱面, 其顶面是闭区域D 上连续的非负函数$z = f(x, y)$ 所表示的曲面, 这种立体称为**曲顶柱体**. 问：曲顶柱体体积= ?

解　由于体积具有可加性, 故求曲顶柱体的体积采用微元法, 即“分割、近似、求和、取极限”的方法. 步骤如下:

(1) **分割.** 将底面分割成n 个小闭区域$\Delta\sigma_i, i = 1, 2, \cdots, n$, $\Delta\sigma_i$ 也记为第i 个小闭区域面积, 以$\Delta\sigma_i$ 的边界曲线为准线, 作母线平行于z 轴的柱面, 原曲顶柱体分成n 个小曲顶柱体ΔV_i;

(2) **近似.** 当分割很细时, 小曲顶柱体可近似看成平顶柱体, 任取一点$(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 则

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

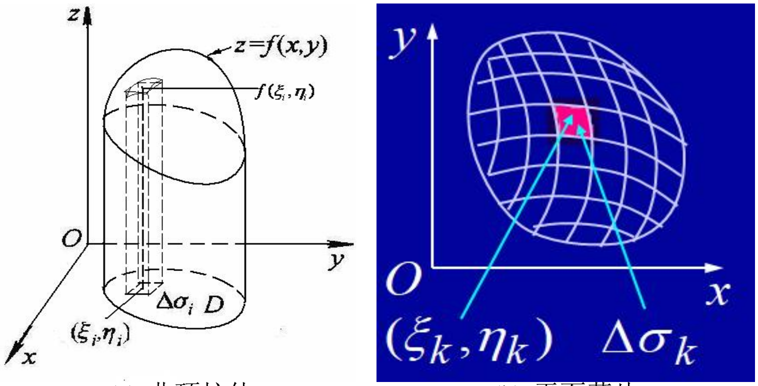
(3) **求和.**

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i$$

(4) **取极限.** 令$d = \max_{1 \le i \le n}\{d_i\}$, 其中$d_i$ 是$\Delta\sigma_i$ 的直径(指$\Delta\sigma_i$ 中任意两点距离的最大值),则

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i.$$

例 7.59　设有一平面薄片, 占有xoy 面上的闭区域D, 其面密度为闭区域D 上连续的非负函数$\mu(x, y)$, 则平面薄片的质量为多少?



(a) 曲顶柱体　　(b) 平面薄片

图 7.17

解　由于质量具有可加性, 此时平面薄片的质量也可采用微元法, 即 “分割、近似、求和、取极限” 的方法. 步骤如下:

(1) **分割.** 将薄片分割成若干小块$\Delta\sigma_i (i=1,2,\cdots,n)$, $\Delta\sigma_i$ 也记为第i 个小闭区域面积;

(2) **近似.** 当分割很细时, 小块薄片可近似看作均匀薄片, 则小块薄片质量$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$;

(3) **求和.**

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i;$$

(4) **取极限.** 令$d=\max_{1\le i\le n}\{d_i\}$, 其中$d_i$ 是$\Delta\sigma_i$ 的直径(指$\Delta\sigma_i$ 中任意两点距离的最大值), 则

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

7.10.1.2　二重积分的定义

还有许多实际问题都可以化为上述形式的和式的极限, 从中抽象概括就产生一个数学概念: 二重积分.

定义 7.19　二重积分

设二元函数$f(x,y)$ 定义在有界闭区域D 上, 将D 任意划分为n 个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$, 并以$\Delta\sigma_i$ 和d_i 分别表示第i 个小区域的面积和直径, $d=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 在每个小区域$\Delta\sigma_i$ 上任取一点(ξ_i,η_i) , $i=1,2,\cdots,n$. 若不论区域如何分割, (ξ_i,η_i) 取法如何, 当$d\to 0$ 时,

如果和式

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta\sigma_i$$

总趋于确定的极限I, 则称此极限为函数$f(x,y)$ 在区域D 上的二重积分, 记为$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta\sigma_i.$$

$f(x,y)$ 称为被积函数; $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式; $d\sigma$ 称为面积元素; x,y 称为积分变量; D 称为积分区域; $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta\sigma_i$ 称为积分和.
此时称函数$f(x,y)$ 在区域D 上可积.

注 7.25　二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 与积分区域D 的分割方式及点(ξ_i,η_i) 的取法无关.

注 7.26　二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是一个数值, 只与积分区域D 和被积函数有关, 而与积分变量用字母表示无关, 即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(u,v)d\sigma$$

.

注 7.27　当$f(x,y)\geq 0$, 被积函数$f(x,y)$ 看作曲顶柱体的顶在点(x,y) 处的竖坐标, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = V_{\text{曲顶柱体}};$$

若$f(x,y)<0$, 柱体在xoy 面下方, 二重积分的绝对值仍等于柱体体积, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = -V_{\text{曲顶柱体}};$$

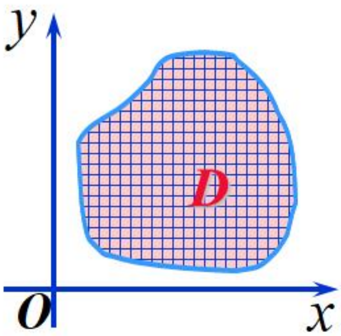
一般地, $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 是指柱体体积的代数和(二重积分的几何意义).

注 7.28　关于二元函数$f(x,y)$ 的可积性, 有以下结论成立:

(1) 若$f(x,y)$ 在有界闭区域D 上可积,则$f(x,y)$ 在D 上有界; (2) 若函数$z=f(x,y)$ 在有界闭区域D 上连续, 则它在D 上可积.

注 7.29　由于D 的划分是任意的, 所以通常用平行于坐标轴的直线网来划分区域D, 得到n 个小矩形闭区域$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \cdot \Delta y_k$, 故记面积微元$\mathrm{d}\sigma = dxdy$, 则直角坐标系下的二重积分可写为

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$



(a) 曲顶柱体

图 7.18　$\mathrm{d}\sigma = dxdy$

7.10.1.3 二重积分的性质

二重积分的性质与定积分的性质非常类似.

性质 7.1　线性性质: 设α 与β 为常数, 则

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x,y)d\sigma + \beta \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质 7.2　积分区域的可加性: 若闭区域D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域, 则在D 上的二重积分等于各部分闭区域上的二重积分的和. 即 若$D = D_1 \cup D_2$ 且$D_1 \cap D_2 = \varnothing$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质 7.3 几何意义：高为1 的平顶柱体体积在数值上等于柱体底面积. 即若σ 为D 的面积, 则

$$\sigma = \iint\limits_D 1 \cdot d\sigma = \iint\limits_D d\sigma.$$

性质 7.4 非负性：若在D 上$f(x,y) \geq 0$, 则$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq 0$.

推论 7.1 若在D 上$f(x,y) \leq g(x,y)$, 则有

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

特别地,

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质 7.5 设$M = \max_D f(x,y), m = \min_D f(x,y), \sigma$ 为D 的面积, 则有重积分估值不等式

$$m\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq M\sigma.$$

定理 7.16 二重积分中值定理

设函数$f(x,y)$ 在闭区域D 上连续, σ 为D 的面积, 则在D 上至少存在一点(ξ,η), 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta) \cdot \sigma.$$

证明 显然$\sigma \neq 0$, 所以有$m \leq \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma \leq M$, 由在闭区域上连续函数的介值定理知,$\exists(\xi,\eta) \in D$, 使得$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)$, 故得证.

例 7.60 不作计算, 估计$I = \iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值, 其中D 是椭圆闭区域: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a)$.

解 区域D 的面积$\sigma = ab\pi$, 在D 上, $\because 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, \therefore 1 = e^0 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^{a^2}$, 因此$\sigma \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma \leq \sigma \cdot e^{a^2}$,

$$ab\pi \leq \iint\limits_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma \leq ab\pi e^{a^2}.$$

例 7.61 比较积分$\iint_D \ln(x+y)d\sigma$ 与$\iint_D [\ln(x+y)]^2\, d\sigma$ 的大小, 其中D 是三角形闭区域, 三顶点各为$(1,0),(1,1),(2,0)$.

解 三角形斜边方程$x+y=2$, 在D 内有$1\leq x+y\leq 2<e$, 故$\ln(x+y)<1$, 于是$\ln(x+y)>[\ln(x+y)]^2$, 因此$\iint_D \ln(x+y)d\sigma > \iint_D [\ln(x+y)]^2\, d\sigma$.

7.10.1.4 二重积分的计算

计算二重积分的主要方法是将它化为两个定积分的计算，称为累次积分.

直角坐标系下二重积分的计算

为了便于讨论二重积分的计算方法, 先介绍两类简单闭区域: $X-$ 型区域与$Y-$ 型区域.

定义 7.20 $X-$ 型区域

若区域D 由曲线$y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x), x=a, x=b$ 围成, 可表示为

$$D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b, \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\}$$

则称这种形状的区域为$X-$ 型区域.

定义 7.21 $Y-$ 型区域

若区域D 由曲线$x=\psi_1(y), x=\psi_2(y), y=c, y=d$ 围成, 可表示为

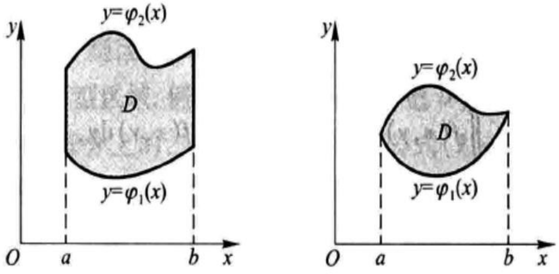
$$D=\{(x,y)\mid c\leq y\leq d, \psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)\}$$

称这种形状的区域称为$Y-$型区域.

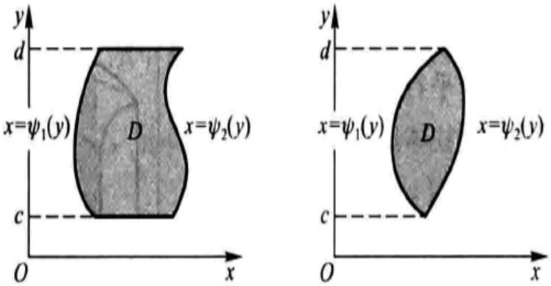
下面先通过对曲顶柱体体积的计算来推导积分区域为$X-$ 型区域时二重积分$\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的计算公式. 设$f(x,y)\geq 0$, 则$\iint_D f(x,y)d\sigma$ 表示以D 为底, 以曲面$z=f(x,y)$ 为顶面的曲顶柱体体积. 积分区域D 为: $\{a\leq x\leq b, \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\}$.

应用计算“平行截面面积为已知的立体求体积”的方法: 以平面$x=x_0$ 截该立体, 此平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间$[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底，曲线$z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形其面积为$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$, 故过$\forall x\in[a,b]$ 且平行于yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为:

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$



(a) $X-$ 型区域



(b) $Y-$ 型区域

图 7.19

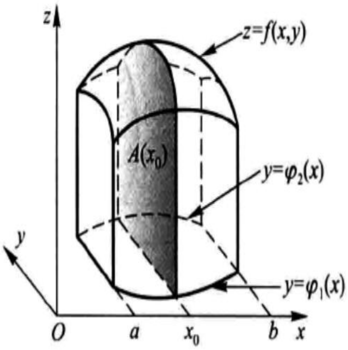


图 7.20

再应用平行截面面积为已知的立体体积公式: $V=\int_a^b A(x)dx$, 得曲顶柱体体积为:

$$V=\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

为了应用几何意义，推导中假设$f(x,y)\geq 0$，但可以证明公式的成立并不受此条件限制, 因此我们有

若积分区域D 为$X-$ 型区域

$$D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\},$$

则

$$\underbrace{\iint_D f(x,y)d\sigma}_{\text{二重积分}}=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \xlongequal{\text{也记为}} \underbrace{\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}_{\text{累次积分、二次积分}}.$$

注 7.30 对于X - 型区域而言, 将二重积分转换为两次定积分, 即先对y 、后对x 的二次积分. 就是先将x 看作常数, 把$f(x,y)$ 只看作y 的函数, 并对y 计算从$\varphi_1(x)$ 到$\varphi_2(x)$ 的定积分, 然后将所得结果(为x 的函数) 再对x 计算区间$[a,b]$ 上的定积分.

若积分区域D 为$Y-$ 型区域

$$D=\{(x,y)\mid c\leq y\leq d,\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)\},$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \xlongequal{\text{也记为}} \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注 7.31 对于$Y-$ 型区域而言，将二重积分转换为两次定积分，即先对x 、后对y 的二次积分. 就是先将y 看作常数, 把$f(x,y)$ 只看作x 的函数, 并对x 计算从$\varphi_1(y)$ 到$\varphi_2(y)$ 的定积分, 然后将所得结果(为y 的函数) 再对y 计算区间$[c,d]$ 上的定积分.

若区域D 既非$X-$ 型区域, 又非$Y-$ 型区域，则利用积分区域可加性，将D 适当分割成能用$D=\sum_{i=1}^n D_i$, 则$\iint_D f(x,y)d\sigma=\sum_{i=1}^n\iiint_{D_1} f(x,y)d\sigma$. 如图, 在分割后的三个区域上分别使用积分公式:

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}.$$

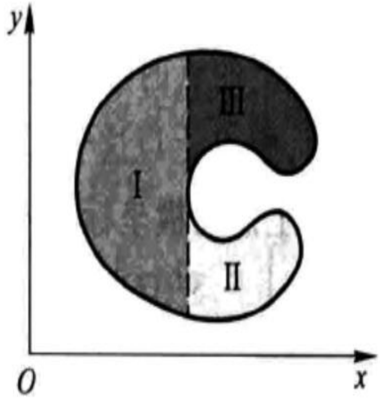


图 7.21 既非$X-$型又非$Y-$型区域

在直角坐标系下求二重积分可按以下步骤:

(1) 画出积分区域D;

(2) 确定D 是否为$X-$ 型或$Y-$ 型区域, 若都不是, 则可划分D 成几个$X-$ 型或$Y-$ 型, 且用不等式组表示每个$X-$ 型, $Y-$型区域; (关键：确定二次积分上下限)

(3)用公式化二重积分为二次积分;

(4) 计算二次积分的值.

例 7.62 计算$I=\iint_D xy\,d\sigma$, 其中D 是直线$y=1,x=2$, 及$y=x$ 所围的闭区域.

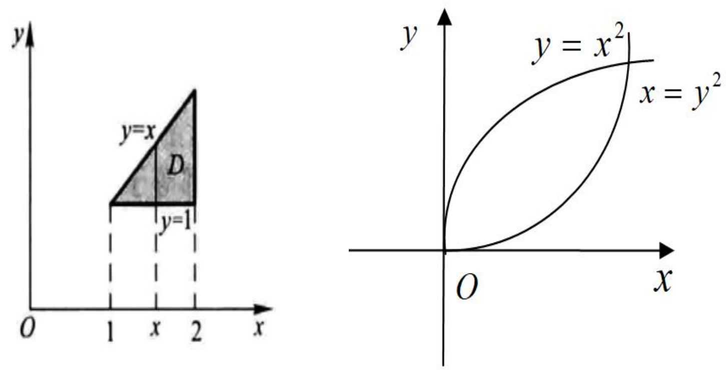
解 将D 看作X-型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\1\le x\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy=\int_1^2\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_1^x dx=\int_1^2\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right]dx=\frac{9}{8}.$$

将D 看作$Y-$型区域, 则$D:\begin{cases}y\le x\le 2\\1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 dy\int_y^2 xy\,dx=\int_1^2\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_y^2 dy=\int_1^2\left[2y-\frac{1}{2}y^3\right]dy=\frac{9}{8}.$$

例 7.63 求$\iint_D\left(x^2+y\right)dxdy$, 其中$D$ 是由抛物线$y=x^2$ 和$x=y^2$ 所围平面闭区域.



(a) $y=1, x=2$, 及$y=x$ 所围区域　(b) $y=x^2$ 和$x=y^2$ 所围区域

图 7.22

解　因为两曲线的交点$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0),(1,1), y=x^2$ 先画出积分区域.

D 是X - 型区域: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

则$\iint_D \left(x^2+y\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2+y\right) dy = \int_0^1 \left[x^2\left(\sqrt{x}-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^4\right)\right] dx = \frac{33}{140}$.

D 也可视为$Y-$ 型区域: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$,

故$\iint_D \left(x^2+y\right) dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x^2+y\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{4}{3}y\sqrt{y}-\frac{1}{3}y^6-y^3\right] dy = \frac{33}{140}$.

注 7.32　累次积分中第一次积分的上下限可以通过**穿线法**确定:

当D为$X-$型区域，则用一条平行于y轴的之前穿过区域内部，进入区域时穿过的边界为积分下限，离开区域时穿过的边界是积分上限.

当D为$Y-$型区域，则用一条平行于x轴的之前穿过区域内部，进入区域时穿过的边界为积分下限，离开区域时穿过的边界是积分上限.

例 7.64　计算$\iint_D \left(x^2+y^2-y\right) dxdy$, D 是由$y=x, y=\frac{1}{2}x, y=2$ 所围成的闭区域.

解　若选择$X-$ 型区域积分, 则区域$D=D_1+D_2$, 其中

$$D_1=\left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, \frac{x}{2} \le y \le x\right\}, \quad D_2=\left\{(x,y) \mid 2 \le x \le 4, \frac{x}{2} \le y \le 2\right\},$$

于是

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-y\right)dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-y\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-y\right)dxdy$$

$$=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x}\left(x^2+y^2-y\right)dy+\int_2^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{2}\left(x^2+y^2-y\right)dy$$

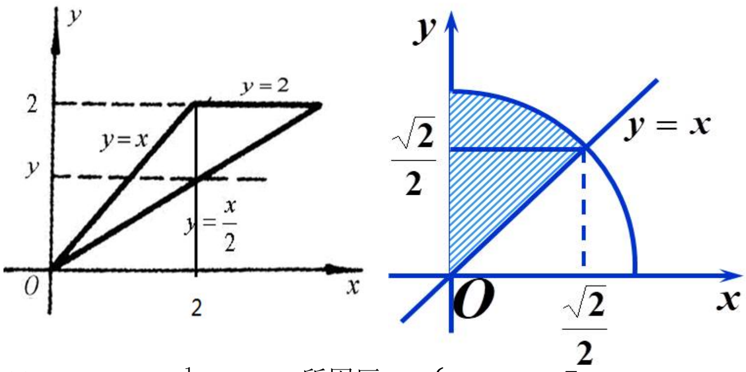
$$=\int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{x}dx+\int_2^4\left[x^2y+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{2}dx$$

$$=\int_0^2\left(\frac{-3}{8}x^2+\frac{19}{24}x^3\right)dx+\int_2^4\left(\frac{17}{8}x^2-\frac{13}{24}x^3+\frac{2}{3}\right)dx=\frac{13}{6}+\frac{17}{2}=\frac{32}{3}.$$

若选择$Y-$型区域, 先对x 积分, 则$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 2, y\le x\le 2y\}$, 则

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-y\right)dxdy=\int_0^2 dy\int_y^{2y}\left(x^2+y^2-y\right)dx$$

$$=\int_0^2\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2-yx\right]_y^{2y}dy=\int_0^2\left(\frac{10}{3}y^3-y^2\right)dy=\frac{32}{3}.$$



(a) $y=x, y=\frac{1}{2}x, y=2$ 所围区域 (b) $\left\{0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}, x\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$

图 7.23

例 7.65 设$f(x,y)$ 在区域D 上连续, D 是如图所示的区域, 将二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$ 按两种积分次序化为累次积分.

解 当D 采用$X-$ 型区域表示:

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2},x\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy\right]dx$$

当D 采用$Y-$ 型区域表示:

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2},0\le x\le y\right\}\cup\left\{(x,y)\mid\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 1,0\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\int_0^y f(x,y)dx\right]dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx\right]dy.$$

例 7.66 计算二重积分$\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是由直线$x=0,y=1,y=x$ 所围成的区域.

解 积分区域D 如图所示, 则D 有两种表示: $D:0\le x\le 1,x\le y\le 1$ 和$D:0\le y\le 1,0\le x\le y$. 若按第一种表示来计算, 则

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1\,dx\int_x^1 e^{-y^2}\,dy.$$

由于e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示, 因此$\int_x^1 e^{-y^2}\,dy$ 无法计算. 按照D 的第二种表示来计算,

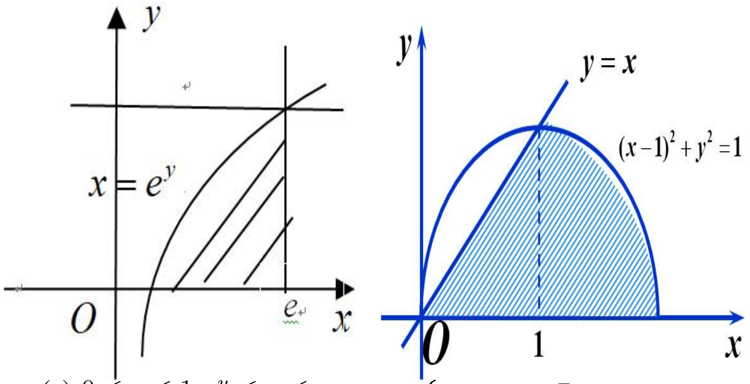
$$\iint\limits_D e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1\,dy\int_0^y e^{-y^2}\,dx=\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}.$$

> **注 7.33** 若D 既是$X-$ 型区域又是$Y-$ 型区域, 要根据计算两个不同顺序的定积分的难度和积分区域尽量分块多少做出选择.

例 7.67 改变积分$\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$ 的积分次序:

解 积分区域如图, D 为$Y-$ 型区域: $0\le y\le 1,e^y\le x\le e\Rightarrow X-$ 型区域: $1\le x\le e,0\le y\le\ln x$ 故, 原式$=\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$.

例 7.68 交换积分次序$\int_0^1\left[\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx\right]dy$.



(a) $0 \le y \le 1, e^y \le x \le e$　(b) $\left\{0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}, x \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$

图 7.24

解　题设累次积分中D 的表示为

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le 1 + \sqrt{1-y^2}\right\}$$

该区域的边界曲线为$y=0, y=1, y=x$ 和$x = 1+\sqrt{1-y^2}$, 由$x = 1+\sqrt{1-y^2}$, 可得$(x-1)^2 + y^2 = 1$. 它的另一种表示为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\} \cup \left\{(x,y) \mid 1 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}\right\}.$$

因此

$$\int_0^1 \left[\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y)dy\right] dx + \int_1^2 \left[\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right] dx.$$

极坐标系下二重积分的计算

有些二重积分, 积分区域D 的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便, 且被积函数用极坐标变量r, θ 表达比较简单. 这时, 就可以考虑利用极坐标来计算二重积分$\iint f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

首先我们回顾一下极坐标的概念.

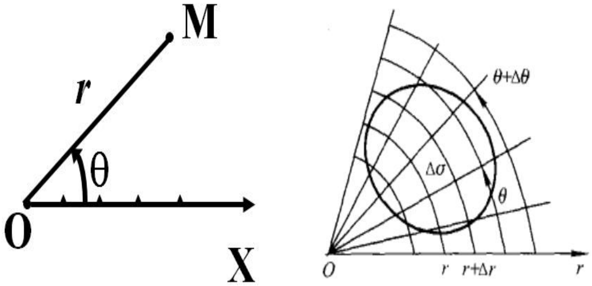
一、极坐标系的建立: 在平面内取一个定点O, 叫做极点。引一条射线OX, 叫做极轴。再选定一个长度单位和角度单位(通常取弧度)及它的正方向(通常取逆时针方向), 这就建立了极坐标系.

二、极坐标的确定:

对于平面上任意一点M, r 表示线段OM 的长度($r \ge 0$), θ 表示从OX (始边), 旋转到OM (终边)的角度, r 称为点M的极径, θ 称为点M 的极角, 有序数对(ρ, θ) 就叫做M 的极坐标。

三、极坐标与直角坐标相互转化:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$



(a) 极坐标　　(b) 极坐标系下的分割

图 7.25

在极坐标系中, 用一组以极点为圆心的同心圆($r=$ 常数) 和一组过极点的射线($\theta=$ 常数) 将积分区域D 分割为n 个小区域: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$. 其中任一小区域$\Delta\sigma$ 都是曲边四边形: $\Delta\sigma$ 分别由半径r 和$r+\Delta r$ 的两圆弧与极角为θ 和$\theta+\Delta\theta$ 的两射线所围成, 仍以$\Delta\sigma$ 表示这个小区域的面积,则由扇形面积公式知

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta,$$

$$\Delta\sigma \approx r\Delta r\Delta\theta.$$

从而得极坐标系下的面积元素为

$$d\sigma = rdrd\theta.$$

又由点的极坐标与直角坐标之间的关系, $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$, 得到被积函数$f(x,y)$ 用极坐标(r,θ) 的表示式为

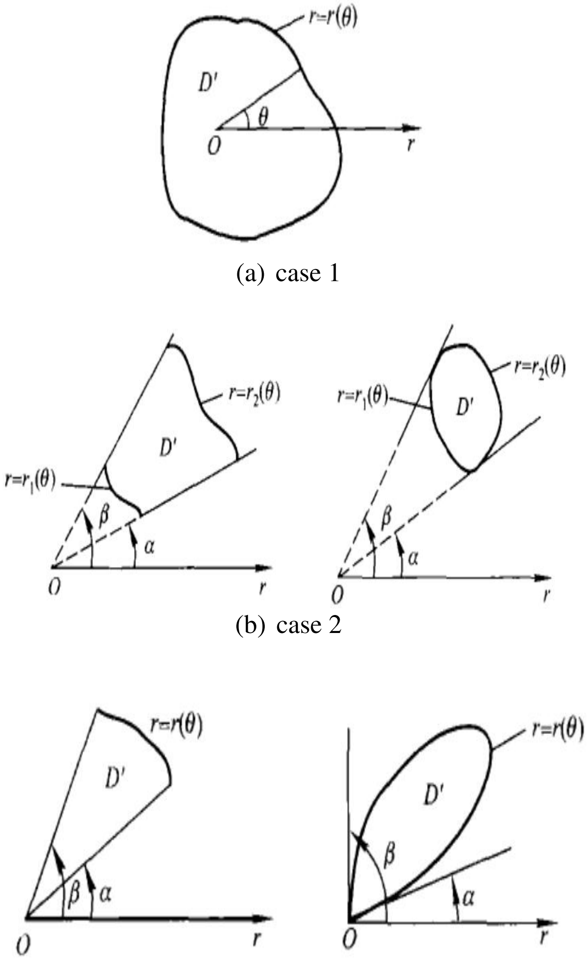
$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

故在极坐标系下,二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 成为

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,}$$

其中D' 表示区域D 的极坐标表示.

极坐标下的二重积分的计算也是利用对θ, r的累次积分完成，主要有下面三种情况：



(a) case 1

(b) case 2

(c) case 3

图 7.26　三种情形下的极坐标累次积分

(1) 若极点O 存积分区域D' 内, 且D' 的边界曲线为连续封闭曲线$r=r(\theta)$, 则

$$D' = |(r,\theta)|0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$$

$$\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

(2) 若极点O 在积分区域D' 外, 且D' 由射线$\theta=\alpha, \theta=\beta$ 和连续曲线$r=r_1(\theta), r=r_2(\theta)$ 所围成, 则

$$D' = \{(r,\theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)\}$$

$$\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

(3) 若极点O 在积分区域D' 的边界上,且D' 由射线$\theta=\alpha, \theta=\beta$ 与连续曲线$r=r(\theta)$ 所围成, 则

$$D' = \{(r,\theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$$

$$\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

注 7.34 极坐标系下的累次积分中第一次积分的上下限也可以通过**穿线法**确定:

则用一条从原点出发的射线穿过区域内部, 进入区域时穿过的边界为积分下限, 离开区域时穿过的边界是积分上限.

例 7.69 计算$\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D=\left\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.

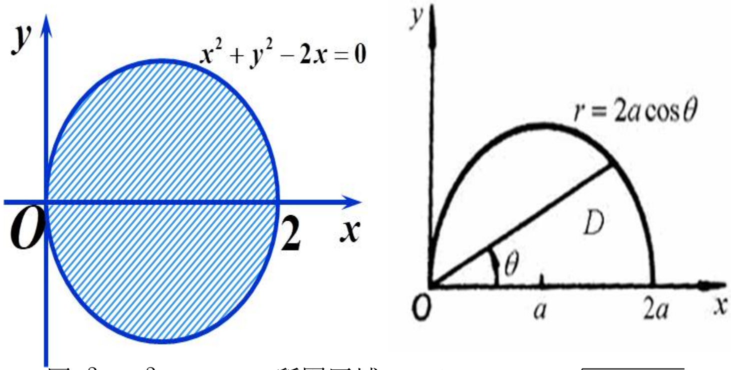
解 在极坐标系中, 积分区域可表示为$D:\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$, 故

$$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2\mathrm{d}\theta = \frac{15}{8}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right) = \frac{15}{4}\pi.$$

例 7.70 计算二重积分$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是由圆$x^2+y^2-2x=0$ 所围成的区域.

解 积分区域$D=D_1 \cup D_2$, 其中D_1, D_2 分别是位于x 轴上方和下方的半圆, 圆$x^2+y^2-2x=$



(a) 圆$x^2+y^2-2x=0$ 所围区域 (b) 半圆周$y=\sqrt{2ax-x^2}$ 及x 轴所围区域

图 7.27

0 的极坐标方程为$r=2\cos\theta$, 则

$$D_1'=\left\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta\right\}$$

$$D_2'=\left\{(r,\theta)\mid \frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 2\cos\theta\right\}$$

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D_1'}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta+\iint\limits_{D_2'}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}.$$

例 7.71 计算$\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D 是半圆周$y=\sqrt{2ax-x^2}$ 及x 轴所围成闭区域.

解 在极坐标系中, 区域D 可表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2a\cos\theta\right\},$$

于是

$$\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例 7.72　将下列二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 表示为极坐标系下的累次积分，其中D 分别为: (1) $x^2+y^2\le R^2$; (2) $x^2+y^2\le ax(a>0)$; (3) $x^2+y^2\le by(b>0)$; (4) $x^2+y^2\le ax$ 和$x^2+y^2\le ay(a>0)$ 的公共部分.

解　(1) $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(2) 令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则$D:\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} & (\because x>0)\\ 0\le r\le a\cos\theta\end{cases}$ 所以

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

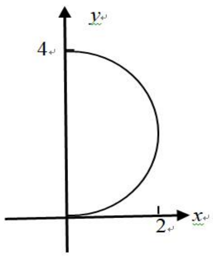
(3) 同上, 则$D:\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\ 0\le r\le b\sin\theta\end{cases}$ 所以$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{b\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(4) 两圆交于点$O(0,0)$ 和$A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ 处, 则

$$D_1:\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le r\le a\sin\theta\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le a\cos\theta\end{cases}$$

所以

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$



(a) $x^2+y^2=4y, x>0$

图 7.28

例 7.73　将极坐标系下的累次积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta}r^2\cdot r\mathrm{d}r$ 化为直角坐标系下的二次积分.

解　由极坐标系下方程$\theta_1=0$ 得直角坐标系下直线方程为$y=0$, 同理由$\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 得直线方程$x=0$. 由极坐标系下方程$r=4\sin\theta$ 得直角坐标系下方程为

$$x^2+y^2=4y,$$

而由方程$r=0$ 即为原点, 故在直角坐标系下积分区域如图所示: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta} r^2\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^4\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x$.

***利用积分区域的对称性简化二重积分的计算**

计算二重积分时，若利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性,则可简化计算.为应用方便,我们把常用的结论总结如下.

(1) 若$f(x,y)$ 为区域D 上的连续函数, 区域$D=D_1+D_2$, 且D_1 与D_2 关于y 轴对称, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,y).\end{cases}$$

(2) 若$f(x,y)$ 为区域D 上的连续函数, 区域$D=D_1+D_2$, 且D_1 与D_2 关于x 轴对称, 则

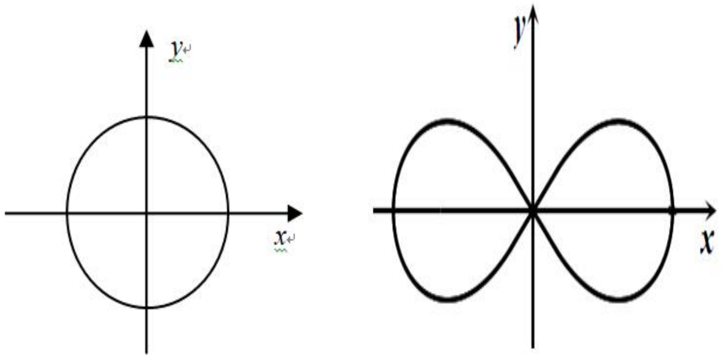
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & f(x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

(3) 若$f(x,y)$ 为区域D 上的连续函数, 区域$D=D_1+D_2$, 且D_1 与D_2 关于原点对称, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(-x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & f(-x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

(4) 若$f(x,y)$ 在D 上连续, 区域$D=D_1+D_2$, 且D_1 与D_2 关于直线$y=x$ 对称, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$



(a) $x^2+y^2=1$ 所围区域　　(b) $\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right)$ 所围区域

图 7.29

例 7.74　计算$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$ 由下列曲线围成: (1) $x^2+y^2=1$； (2) $\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right)$(图像不易画出时, 利用$-x$ 换x, $-y$ 换y 判断.).

解　(1) $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

(2) 由于$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2\left(x^2-y^2\right)$ 围成的区域关于x 轴y 轴均对称, 而被积函数xy 关于x (或y 轴) 为奇函数, 则有$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$;

7.10.2 无界区域上的反常二重积分

与一元函数在无限区间上的反常定积分类似地, 我们可以定义积分区域无界的反常二重积分.

定义 7.22　无界区域上的反常二重积分

设函数$f(x,y)$ 在无界区域D 上有定义, 用任意光滑或分段光滑曲线C 在D 中划出有界区域D_C, 如图所示, 若二重积分$\iint_{D_C} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在, 且当曲线C 连续变动, 使区域D_C 无限扩展而趋于区域D 时, 不论C 的形状如何, 也不论C 的扩展过程怎样, 极限$\lim_{D_C\to D}\iint_{D_C} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 总取相同的值I, 则称反常二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛于I, 即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{D_C\to D}\iint_{D_C} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = I.$$

否则称$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

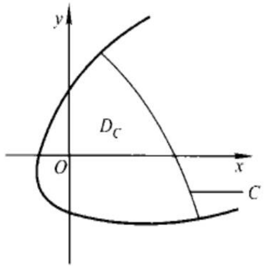


图 7.30　无界区域上的反常二重积分

反常二重积分的计算与有界区域上二重积分计算方法类似. 下面举例说明其计算方法.

例 7.75　计算$\iint_D x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ，其中D 是由直线$x=0, x=1$ 在第一象限所围成的无界区域.

解　D 是无界区域，由已知得$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y<+\infty\}$, 于是

$$\iint_D x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left[\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

例 7.76 计算$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 1\}$.

解 D 是无界区域, 因为D 的边界是圆, 被积函数是$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$, 故用极坐标来计算. D 用极坐标表示为$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leq\theta\leq 2\pi, 1\leq\rho<+\infty\}$, 于是

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left[\int_1^{+\infty}\frac{1}{\rho^4}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho^2}\right]_1^{+\infty}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta=\pi.$$

例 7.77 计算$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是$\frac{1}{4}$ 圆域: $x^2+y^2=R^2, x\geq 0, y\geq 0$.

解 在极坐标系下D 可表示为: $0\leq\rho\leq R, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. 所以

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)\Bigg|_0^R\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right).$$

若要求$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, 我们知道不能用初等函数表示出, 但现在我们可以利用上面的结果来计算概率论与数理统计及工程上常用的广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

例 7.78 求广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 记D_1 为xOy 面上第一象限的区域，即D_1 为: $\begin{cases}0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\\ 0\leq\rho<+\infty\end{cases}$, 则

$$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_D \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}\sigma=\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right)=\frac{\pi}{4},\ \text{其中} D: x^2+y^2\leq R^2$$

所以$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.