

## 第9章 差分方程

微分方程是自变量连续取值的问题, 这种变量称为**连续性变量**. 但在很多实际问题中, 有些变量不是连续取值的. 例如, 经济变量收入、储蓄等都是时间序列, 自变量取值为 $0, 1, 2, \dots$ , 这种变量称为**离散型变量**. 根据客观事物运行的机理和规律, 我们可以得到在不同取值点上的各离散变量之间的关系, 如递推关系, 时滞关系. 描述各离散变量之间关系的数学模型称为离散型模型. 本章将简单介绍在经济学和管理科学中最常见的一种以整数列为自变量的函数以及相关的离散型数学模型——差分方程.

### § 9.1 差分方程的基本概念

#### 9.1.1 差分概念

连续性变量用导数来刻画因变量对自变量的(瞬时)变化速度. 离散型变量通常用**差商**来描述因变量对自变量的变化速度. 特别地, 整数集上离散型变量可以用**差分**来描述变量的变化速度.

##### 定义 9.1 差分

设 $y = f(n)$  是定义在在整数集上的函数, 一般记为 $y_n = f(n), n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . 函数 $y_n = f(n)$  在 $n$  时刻的**一阶差分**定义为

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(n+1) - f(n).$$

函数 $y_n = f(n)$  在 $n$  时刻的**二阶差分**定义为一阶差分的差分, 即

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

函数 $y_n = f(n)$  在 $n$  时刻的**三阶差分**定义为二阶差分的差分, 即

$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+2} - 2\Delta y_{n+1} + \Delta y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n.$$

一般地,  $k$  阶差分定义为

$$\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n) = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{n+k-i}, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中  $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ .

**例 9.1** 设  $y_n = n^2 - 3n$ , 求  $\Delta y_n, \Delta^2 y_n$ .

**解**  $\Delta y_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - (n^2 - 3n) = 2n - 2$ .  $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = 2(n+1) - 2 - (2n - 2) = 2$ .

我们可以通过差分表的形式来计算在特定  $n$  点处的各阶差分.

**例 9.2** 设  $y_n = f(n)$  表示某辆汽车外出在第  $n$  小时汽车里程表显示的公里数, 且前 6 个读出数为  $\{f(n)\} = \{1425, 1455, 1510, 1554, 1595, 1630\}$ , 其中  $f(1)$  表示开车时里程表的读数,  $f(2)$  表示行驶 1 小时后里程表的读数, 以此类推, 可将  $y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n$  各值列表显示, 并称为函数  $y_n$  的差分表.

$n$	$y_n$	$\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
1	1425	30	25	-36
2	1455	55	-11	8
3	1510	44	-3	-3
4	1554	41	-6	
5	1595	35		
6	1630			

在本例中,  $\Delta y_n$  表示汽车在第  $n$  小时走过的路程, 也可看作汽车在第  $n$  小时行驶的平均速度, 而  $\Delta^2 y_n$  表示第  $n+1$  小时与第  $n$  小时平均速度之差, 可看作在第  $n$  小时的平均加速度.

可以看到, 函数  $y_n$  的一阶和二阶差分反映了  $y_n$  的变化特征. 一般来说, 当  $\Delta y_n > 0$  时, 说明  $y_n$  在逐渐增加; 当  $\Delta y_n < 0$  时, 说明  $y_n$  在逐渐减少. 又当  $\Delta^2 y_n > 0$  时, 说明  $y_n$  的变化速度在增大; 当  $\Delta^2 y_n < 0$  时, 说明  $y_n$  的变化速度在减小.

**注 9.1** 微分与差分都是描述变量变化的状态, 前者描述的是连续变化过程, 后者描述的是离散变化过程. 差分可看作连续变化的一种近似. 在取单位时间为 1, 且单位时间间隔很小的情况

下,

$$\Delta y = f(x+1) - f(x) \approx dy = \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{dy}{dx}$$

不仅如此, 差分具有微分类似的运算性质:

性质 9.1 设  $a, b, C$  是常数,  $y_n, z_n$  是整数集上的函数时, 有以下结论成立:

$$(1) \Delta(C) = 0;$$

$$(2) \Delta(Cy_n) = C\Delta(y_n);$$

$$(3) \Delta(ay_n + bz_n) = a\Delta(y_n) + b(\Delta z_n);$$

$$(4) \Delta(y_n z_n) = z_{n+1} \Delta y_n + y_n \Delta z_n = y_{n+1} \Delta z_n + z_n \Delta y_n;$$

$$(5) \Delta\left(\frac{y_n}{z_n}\right) = \frac{z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n}{z_n z_{n+1}} = \frac{z_{n+1} \Delta y_n - y_{n+1} \Delta z_n}{z_n z_{n+1}}.$$

### 9.1.2 差分方程

首先我们通过一个引例给出差分方程的概念.

例 9.3 设某种商品  $t$  时期的供给量  $S_t$  与需求量  $D_t$  都是这一时期价格  $P_t$  的线性函数:

$$S_n = -a + bP_n \quad (a, b > 0), \quad D_n = c - dP_n \quad (c, d > 0).$$

则  $n+1$  时期的价格  $P_{n+1}$  由  $n$  时期的价格  $P_n$  与供给量及需求量之差  $S_n - D_n$  按以下关系确定

$$P_{n+1} = P_n - \lambda(S_n - D_n) \quad (\lambda \text{ 为常数}),$$

即

$$P_{n+1} - [1 - \lambda(b + d)]P_n = \lambda(a + c),$$

或

$$\Delta P_n + \lambda(b + d)P_n = \lambda(a + c).$$

#### 定义 9.2 差分方程

含有自变量  $n$ , 未知函数  $y_n$ , 以及  $y_n$  的差分  $\Delta y_n, \Delta^2 y_n, \dots$  的函数方程, 称为常差分方程, 简称为差分方程. 出现在差分方程中的差分的最高阶数, 称为差分方程的阶.

由差分方程定义,  $k$  阶差分方程的一般形式为

$$F(n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n) = 0 \quad (9.1)$$

其中  $F(n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n)$  为  $n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n$  的已知函数, 且至少  $\Delta^k y_n$  要在式中出现.

利用差分定义式, 差分方程(9.1) 可转化为函数  $y_n$  在不同时刻的取值的关系式, 于是差分方程可以定义为

### 定义 9.3 差分方程函数值

含有自变量  $n$  和未知函数的两个或两个以上函数值  $y_n, y_{n+1}, \dots$  的函数方程, 称为(常) 差分方程. 出现在差分方程中的未知函数下标的最大差, 称为差分方程的阶.

由差分方程函数值 定义,  $k$  阶差分方程的一般形式为

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \quad (9.2)$$

其中  $F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k})$  是  $n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$  的已知函数, 且  $y_n$  和  $y_{n+k}$  一定出现.

### 例 9.4

$$P_{n+1} - [1 - \lambda(b + d)]P_n = \lambda(a + c),$$

和

$$\Delta P_n + \lambda(b + d)P_n = \lambda(a + c).$$

都是一差分方程.

按照差分方程函数值 定义,

$$\Delta^2 y_n + n^2 y_n = 5, \Delta^2 y_n + \Delta y_n = 0$$

$$\Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + y_n = 0, \Delta^2 y_n = n$$

均为二阶差分方程, 而由差分方程函数值 定义,

$$y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 2, y_{n+3} + 3y_{n+1} = n^2 + 1$$

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0, y_{n+4} + 2^n y_{n+2} = 4n$$

也同为二阶差分方程, 而关系式

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n, y_n = 2^{n+1}$$

按定义都不是差分方程.

**注 9.2** 差分方程的两个定义不是完全等价的, 例如方程

$$\Delta^2 y_n - y_n = 0$$

按照定义差分方程<sub>差分</sub>定义, 为二阶差分方程, 若改写为

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n - y_n &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n - y_n \\ &= y_{n+2} - 2y_{n+1} = 0\end{aligned}$$

按照定义差分方程<sub>函数值</sub>定义, 则应为一阶差分方程.

**注 9.3** 将差分方程中的 $n$ 整体替换为 $n+k, k=\pm 1, \pm 2, \dots$ 得到的差分方程与原方程等价. 例如 $y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 2$ 与 $y_{n+3} + y_{n+2} + y_{n+1} = 2$ 等价. 这是因为方程在变形过程中各项之间的时间差没有改变, 也即差分方程的时滞结构没有变化. 求解差分方程时, 可以按需要将方程作适当整理.

本章我们仅讨论差分方程<sub>函数值</sub>定义形式下的差分方程.

形如

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = f(n) \quad (9.3)$$

的差分方程, 称为 $k$ 阶线性差分方程, 其中 $a_1(n), \dots, a_k(n)$ 和 $f(n)$ 均为已知函数, 且 $a_k(n) \neq 0$ . 如果 $f(n) \neq 0$ , 则(9.3)又称为 $k$ 阶非齐次线性差分方程, 如果 $f(n) \equiv 0$ , 则(9.3)变为

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = 0 \quad (9.4)$$

称之为 $k$ 阶齐次线性差分方程. 有时也称(9.4)为(9.3)的对应齐次方程.

#### 定义 9.4 差分方程的解

如果将已知函数 $y_n = \varphi(n)$ 代入方程(9.2), 使其对 $n = 0, 1, 2, \dots$ 成为恒等式, 则称 $y_n = \varphi(n)$ 为方程(9.2)的解. 如果方程(9.2)的解中含有 $k$ 个独立的任意常数, 则称这样的解为方程(9.2)的通解. 而通解中给任意常数以确定值的解, 称为方程(9.2)的特解.

确定通解中任意常数的条件称为微分方程的定解条件. 由微分方程和定解条件确定特解的问题称为差分方程的定解问题.

差分方程(9.2)常见的定解条件是

$$y_0 = a_0, y_1 = a_1, \dots, y_{k-1} = a_{k-1} \quad (9.5)$$

(9.5)又称为初始条件、初值条件, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ 为给定常数. 相应的定解问题又称为差分方程的初值问题.

**例 9.5** 设差分方程 $y_{n+1} - 3y_n = 3^n$ , 验证 $y_n = C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n$ 是否为差分方程的通解, 并求满足条件 $y_0 = 5$ 的特解.

**解** 将 $y_n = C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n$ 带入方程

$$\text{左边} = C3^{n+1} + \frac{1}{3}(n+1)3^{n+1} - 3\left(C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n\right) = 3^n = \text{右边}$$

所以,  $y_n = C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n$  是方程的解, 且含任意常数  $C$ , 故为方程的通解. 将  $y_0 = 5$  代入得  $C = 5$ , 于是所求特解为  $y = 5 \cdot 3^n + \frac{1}{3}n3^n$ .

由差分、微分导数的概念及运算性质以及差分、微分方程定义的相似性, 不难想到, 差分方程和微分方程无论在方程结构, 解的结构, 还是在求解方法上, 有很多相似的地方.

#### 定理 9.1 线性差分方程解的线性性质

如果函数  $y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)$  均为  $k$  阶齐次线性差分方程(9.4) 的解, 则

$$y(n) = C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \dots + C_m y_m(n)$$

也是方程(9.4)的解, 其中  $C_1, C_2, \dots, C_m$  是任意常数.

#### 定理 9.2 齐次线性差分方程解的结构

如果函数  $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$  是  $k$  阶齐次线性差分方程的  $k$  个线性无关的特解, 则

$$y(n) = C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \dots + C_k y_k(n)$$

是方程(9.4)的通解, 其中  $C_1, C_2, \dots, C_k$  是任意常数.

#### 定理 9.3 非齐次线性差分方程解的结构

如果  $y^*(n)$  是  $k$  阶非齐次差分方程(9.3) 的一个特解,  $y$  是对应齐次方程(9.4) 的通解, 则  $y(n) = y + y^*(n)$  是方程(9.3) 的通解.

## § 9.2 一阶常系数线性差分方程的解法

### 9.2.1 一阶常系数齐次线性差分方程的解法

一阶常系数齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{n+1} + ay_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

方程可改写为

$$y_{n+1} = -ay_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

这是等比数列所满足的关系式, 由等比数列通项公式可以得到

$$y_n = (-a)^n y_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

从而得到方程(9.6)的通解

$$y_n = C(-a)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $C$ 为任意常数.

### 9.2.2 一阶常系数非齐次线性差分方程的解法

一阶常系数非齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{n+1} + ay_n = f(n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.7)$$

其中 $f(n) \neq 0$ . 根据非齐次线性差分方程解的结构可知方程(9.7)的通解为

$$y_n = C(-a)^n + y^*(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $y^*(n)$ 是方程(9.7)的待求特解. 这里我们也用待定系数法求特解, 下面给出右端项 $f(n)$ 在两种特殊形式下的特解形式.

#### 9.2.2.1 $f(n) = p_m(n)$ 型

其中 $p_m(n)$ 为 $n$ 的 $m$ 次多项式. 方程

$$y_{n+1} + ay_n = p_m(n) \quad (9.8)$$

具有形如 $y^*(n) = n^k Q_m(n)$ 的特解. 其中 $Q_m(n)$ 是与 $P_m(n)$ 同幂次( $m$ 次)的多项式. 根据 $a$ 是否等于 $-1$ ,  $k$ 分别取 $1, 0$ , 即

$$y^*(n) = n^k Q_m(n) = \begin{cases} Q_m(n), & (a \neq -1) \\ nQ_m(n), & (a = -1). \end{cases}$$

**例 9.6** 求差分方程 $y_{n+1} - y_n = n + 3$ 的通解.

**解** 因 $a = -1$ , 对应齐次方程的通解为

$$y_n = C \cdot 1^n = C$$

设 $y^*(n) = a_0 n^2 + a_1 n$ , 代入原方程, 有

$$a_0(n+1)^2 + a_1(n+1) - a_0 n^2 - a_1 n = n + 3$$

比较系数得 $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{5}{2}$ , 所以 $y^*(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$ , 所给方程通解为

$$y(n) = C + \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$$

其中 $C$ 为任意常数.

**例 9.7** 求差分方程 $y_{n+1} - 2y_n = 2n^2 - 1$ 的通解.

**解** 因  $a = -2$ , 对应齐次方程的通解为  $y_n = C(2)^n = C2^n$ . 设  $y^* = a_0n^2 + a_1n + a_2$ , 代入原方程, 有

$$-a_0n^2 + (2a_0 - a_1)n + (a_0 + a_1 - a_2) = 2n^2 - 1.$$

比较系数得  $a_0 = -2, a_1 = -4, a_2 = -5$ , 所以得  $y^*(n) = -2n^2 - 4n - 5$ , 从而所给方程的通解为  $y(n) = C2^n - 2n^2 - 4n - 5$ , 其中  $C$  为任意常数.

### 9.2.2.2 $f(n) = bd^n$ 型

其中  $b > 0, d \neq 1$ . 方程

$$y_{n+1} + ay_n = bd^n \quad (9.9)$$

具有形如

$$y^*(n) = An^k d^n$$

的特解. 根据  $a$  是否等于  $d, k$  分别取  $1, 0$ . 即

$$y^*(n) = An^k d^n = \begin{cases} Ad^n & (a \neq d), \\ And^n & (a = d). \end{cases}$$

两种情况下分别带入得当  $a \neq -d$  时, 特解为

$$y^*(n) = \frac{b}{a+d} d^n.$$

当  $a = -d$  时, 特解为

$$y^*(n) = \frac{b}{d} n d^n.$$

因此方程(9.9)的通解为

$$y_n = \begin{cases} C(-a)^n + \frac{b}{a+d} d^n, & a \neq -d; \\ (C + \frac{b}{d}n) d^n, & a = -d, \end{cases}$$

其中  $C$  为任意常数.

**例 9.8** 求方程  $y_{n+1} + 2y_n = 3 \cdot 2^n$  满足初始条件  $y_0 = 4$  的特解.

**解** 对应齐次方程的通解为

$$y_n = C(-2)^n$$

又设  $y_n^* = A2^n$ , 代入方程, 有

$$A2^{n+1} + 2A2^n = 3 \cdot 2^n$$

从而解得  $A = \frac{3}{4}, y_n^* = \frac{3}{4} \cdot 2^n$ . 所给方程的通解为

$$y_n = C(-2)^n + \frac{3}{4} \cdot 2^n.$$



由  $y_0 = 4$ , 得  $C = \frac{13}{4}$ , 于是所给方程满足条件的特解为

$$y_n = \frac{13}{4}(-2)^n - \frac{3}{4} \cdot 2^n = \frac{1}{4}[3 + (-1)^n \cdot 13]2^n.$$

### 9.2.3 二阶常系数齐次线性差分方程的解法

二阶常系数齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

其中  $p, q$  是常数.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (9.11)$$

为差分方程(9.10)的特征方程. 方程(9.11)的两个根  $\lambda_1, \lambda_2$  称为差分方程(9.10)的特征根. 同二阶常系数齐次线性微分方程类似, 方程(9.10)的通解根据它的特征根  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的可能情形有以下三种形式:

(1)  $\lambda_1, \lambda_2$  是两个不同的实根时, 方程(9.10)的通解为

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n,$$

$C_1, C_2$  是任意常数.

(2)  $\lambda_1 = \lambda_2$  是重根时, 方程(9.10)的通解为

$$y_n = (C_1 + C_2 n) \lambda^n,$$

其中  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2, C_1, C_2$  是任意常数.

(3)  $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$  是一对共轭复根时,  $\lambda_1, \lambda_2$  可以写成复指数形式:

$$\lambda_1 = re^{i\theta}, \lambda_2 = re^{-i\theta}.$$

方程(9.10)的通解为

$$y_n = r^n (C_1 \cos \theta n + C_2 \sin \theta n),$$

其中  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\alpha \neq 0$  时,  $\theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$ ;  $\alpha = 0, \beta > 0$  时,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ;  $\alpha = 0, \beta < 0$  时,  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $C_1, C_2$  是任意常数.

**例 9.9** 求差分方程  $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 0$  的通解.

**解** 特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0.$$

解得两个相异实根  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$ , 于是所给方程的通解为

$$y(n) = C_1 1^n + C_2 (-5)^n.$$

例 9.10 求方程  $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 0$  的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0.$$

解得特征根  $\lambda = 5$  (二重), 于是, 所给方程的通解为

$$y_n = (C_1 + C_2 n) 5^n.$$

例 9.11 求方程  $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$  的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

解得特征根  $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$ , 因此, 所给方程的通解为

$$y(n) = r^n (C_1 \cos \theta n + C_2 \sin \theta n),$$

其中  $r = \sqrt{5}, \theta = \arctan 2$ .

KAILIU, NAU