第2章　极限与连续

§ 2.1 数列极限

2.1.1 数列极限的定义

无穷多个按自然数编号$1, 2, \cdots$ 排列的一列数：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为**数列**, 记为$\{a_n\}$. 数列中每一个数称作是数列的**项**. a_n 称为数列的**通项** 或**一般项**; 正整数n 称为a_n 的下标.

例如：

1. $1, 1, 1, \cdots, \quad 1, \cdots$; 通项：$a_n = 1$,
2. $1, -1, 1, \cdots, -1, \cdots, 1, -1, \cdots$; 通项：$a_n = (-1)^{n-1}$,
3. $1, 2, 3, \cdots, \quad n, \cdots$; 通项：$a_n = n$,
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$; 通项：$a_n = \frac{1}{n}$,
5. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$, 通项：$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

注 2.1　数列对应着数轴上一点列.可看作一动点在数轴上依次取

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots.$$

注 2.2 数列x_n 可视为定义在自然数集$\mathbf{N}$ 上的函数:

$$x_n = f(n).$$

我们研究当下标n 无限增大时，数列$\{x_n\}$ 的变化规律，即这个动点最终的一个趋势.

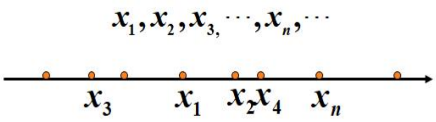


图 2.1 数列的几何表示

定义 2.1 数列的极限(easy mode)

如果n 在正整数集$\mathbf{N}_+$ 中变化, 且无限增大时, 数列$\{a_n\}$ 的通项a_n 无限趋于一个确定的数a, 则称数列$\{a_n\}$ 收敛于a, 或称a 为数列$\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或者$a_n \to a(n \to \infty$ 时) 否则, 称数列$\{a_n\}$ 发散, 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例如：

1. $1, 1, 1, \cdots, \quad 1, \cdots$; 极限：1,
2. $1, -1, 1, \cdots, -1, \cdots, 1, -1, \cdots$; 极限：不存在,
3. $1, 2, 3, \cdots, \quad n, \cdots$; 极限：不存在(无穷)
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$; 极限：0.
5. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$, 极限：0.

定义 2.2 数列的极限(hard mode)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数$N, \forall n > N$, 有$|a_n - a| < \varepsilon$.

注 2.3 为了表达方便,引人记号“$\forall$ ”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”, 记号“$\exists$ ”表示“存在”.

> 注 2.4　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的几何意义是任意给定一个a的邻域(任意性由ε的任意性决定)，至多有限个数列中的项落在给定的邻域外面(第N项之后的所有项落在邻域里因为$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$).

> 注 2.5　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall$ 正整数$N, \exists n > N$，有$|a_n - a| > \varepsilon$. 即数轴的动点最终会被这个邻域吸进去。

例 2.1　证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

的极限是1.

证明　$|a_n - a| = \left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$，

$\forall\varepsilon > 0$, 为了使$|x_n - a| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ 或} n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

这个$\frac{1}{\varepsilon}$ 是一个确定的实数, 而对于任何一个实数都有无穷多个大于它的正整数存在,所以,任取一个大于$\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数作为N (如取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$), 则当$n > N$ 时,就有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$$

例 2.2　已知$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明数列$\{a_n\}$ 的极限是0 .

证明　$|a_n - a| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$.

$\forall\varepsilon > 0$ 为了使$|a_n - a| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

这个$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是一个确定的实数,大于它的正整数有无穷多个存在, 任取其中一个作为N,则当$n > N$ 时,就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

例 2.3 已知$a_n=\frac{3n^3+n}{2n^3+1}$, 证明数列$\{a_n\}$ 的极限是$\frac{3}{2}$.

证明 $|a_n-a|=\left|\frac{3n^3+n}{2n^3+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{2n-3}{2(2n^3+1)}<\frac{2n}{2(2n^3)}=\frac{1}{n^2}$.
$\forall\varepsilon>0$ 为了使$|a_n-a|<\varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n^2}<\varepsilon \quad 或 \quad n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

例 2.4 设$|q|<1$, 证明等比数列

$$1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$$

的极限是0.

证明 $\forall\varepsilon>0$ (设$\varepsilon<1$), 因为

$$|a_n-0|=\left|q^{n-1}-0\right|=|q|^{n-1},$$

要使$|a_n-0|<\varepsilon$, 只要

$$|q|^{n-1}<\varepsilon.$$

取自然对数,得$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 因$|q|<1,\ln|q|<0$,故

$$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取$N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当$n>N$ 时,就有

$$\left|q^{n-1}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0.$$

2.1.2 数列极限的运算

求数列$\{a_n\}$ 的极限, 对于简单情形，可通过观察得出. 对于比较复杂的情形，一般方法是将a_n 进行变形,直到我们能观察出其趋势为止. 在求数列极限时利用数列极限的四则运算法则和数列的函数的极限性质会更方便.

定理 2.1　数列极限四则运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\alpha} b_n = b$, 那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} a_n = Ca$, 其中$C$ 是与n 无关的常数;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$;

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

性质 2.1　设$f(x)$ 是基本初等函数, $a_n, a \in D(f), n = 1, 2, \cdots$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

例 2.5　求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3 - 2n + 1}{n^3 + n^2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n - 3^{n+1}}{2^{2n+1} + 3^n}$.

解　(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3 - 2n + 1}{n^3 + n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} = 3.(Why\ the\ second\ equation\ holds)$$

(2) 由于

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = \frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}.$$

(3) 由

$$\frac{4^n-3^{n+1}}{2^{2n+1}+3^n}=\frac{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-3^{n+1}}{2^{2n+1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{1}{2}.$$

2.1.3 数列极限的性质

收敛数列有唯一性，有界性，保号性，子列收敛等性质. 以下性质的详细证明见详见[1], p23.

定理 2.2 极限的唯一性

如果数列$\{a_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

定义 2.3 有界数列

如果存在常数$M>0$, 使得数列$\{a_n\}$满足:

$$|a_n|\leqslant M, n=1,2,\cdots$$

则称$\{a_n\}$是有界数列;如果对任何正数M,至少有某一项a_n,满足$|a_n|>M$, 则称$\{a_n\}$是无界数列.

定理 2.3 收敛数列的有界性

如果数列$\{a_n\}$收敛,那么数列$\{a_n\}$一定有界.

(数列对应数轴上的动点，动点最后会被a的任意邻域吸收，领域外只有有限项。)

注 2.6 如果数列$\{a_n\}$无界, 那么数列$\{a_n\}$一定发散. 但是, 如果数列$\{a_n\}$有界,却不能断定数列$\{a_n\}$一定收敛,例如数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

有界,但这数列是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

定理 2.4 收敛数列的保号性

如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,且$a > 0$ (或$a < 0$), 那么存在正整数N, 当$n > N$ 时,都有$a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

(数列无限趋于一个大于零的数，一个大于零的数附近的数也会大于零，即使a非常小也是这样的.)

推论 2.1 如果数列$\{a_n\}$ 从某项起有$a_n \geqslant 0$ (或 $a_n \leqslant 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 那么$a \geqslant 0$ (或$a \leqslant 0$).

注 2.7 如果数列$\{a_n\}$ 从某项起有$a_n > 0$ (或 $a_n < 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 并得不到极限$a > 0$. 例如，$a_n = \frac{1}{n}$.

定义 2.4 子列

设在数列$\{a_n\}$ 中,第一次抽取a_{n_1},第二次在a_{n_1} 后抽取a_{n_2},第三次在a_{n_2} 后抽取a_{n_3}, $\cdots\cdots$, , 这样无休止地抽取下去,得到一个数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots,$$

这个数列$\{a_{n_k}\}$ 就是数列$\{a_n\}$ 的一个子数列.

定理 2.5 收敛数列与其子数列间的关系

如果数列$\{a_n\}$ 收敛于a, 那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

性质 2.2 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$(这里$k$ 是任何整数).

由此我们知道数列$\{a_n\}$ 的敛散性与其最初的有限项无关.

性质 2.3 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$.

性质 2.4 设数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 收敛, 且有正整数N_0, 使得$n \geqslant N_0$ 时, $x_n \geqslant y_n$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

定理 2.6 夹逼定理

假设存在正整数N_0, 使得$n \geqslant N_0$ 时, 数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足不等式

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 那么数列$\{x_n\}$ 收敛. 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

例 2.6 求下列数列的极限:

(1) $x_n = \frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n}$;

(2) $y_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}$.

解 (1) 由于

$$\frac{1}{2n^2+n} \le \frac{1}{2n^2+k} \le \frac{1}{2n^2+1}, \quad 1 \le k \le n$$

因此

$$\frac{n^2}{2n^2+n} \le x_n \le \frac{n^2}{2n^2+1}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$ 由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 注意到

$$3 \le \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$, 因此由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} = 3.$$

定义 2.5 单调数列

一个数列$\{a_n\}$ 如果满足:

$$a_n \leqslant a_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$$

则称$\{a_n\}$ 是单调递增的数列, 类似地可以定义单调递减的数列. 单调递增数列和单调递减数列统称为**单调数列**.

定理 2.7　单调数列收敛性

单调有界数列必收敛. 更精确地说，单调递增有上界的数列必收敛; 单调递减有下界的数列必收敛.

例 2.7　利用单调有界性可证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}, \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 都收敛且极限相同. 其极限是自然对数的底e.

例 2.8　设$x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}, n=1,2,3,\cdots$。证明数列$\{x_n\}$ 收敛, 并求它的极限.

解　首先有$0<x_1<3$。设$0<x_k<3$, 则$0<x_{k+1}=\sqrt{3+2x_k}<3$, 由数学归纳法, 可知对一切$n$, 成立

$$0<x_n<3\text{。}$$

由于$x_{n+1}-x_n=\sqrt{3+2x_n}-x_n=\frac{(3-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{3+2x_n}+x_n}>0$, 数列$\{x_n\}$ 单调增加且有上界, 由定理2. 4.1 可知$\{x_n\}$ 收敛。设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 对$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$ 两边求极限, 得到$a=\sqrt{3+2a}$, 解此方程, 得到$a=3$, 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

§ 2.2 函数极限

2.2.1 函数极限的定义

因为数列$\{a_n\}$ 可看作自变量为n 的函数: $x_n = f(n), n \in \mathbf{N}_+$, 所以,数列$\{a_n\}$ 的极限为a, 就是: 当自变量n 取正整数而无限增大(即$n \to \infty$) 时,对应的函数值$f(n)$ 无限接近于确定的数a. 把数列极限概念中的函数为$f(n)$ 而自变量的变化过程为$n \to \infty$ 等特殊性撇开,这样可以引出函数极限的一般概念:在自变量的某个变化过程中,如果对应的函数值无限接近于某个确定的数,那么这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 自变量的变化过程主要有：

- 双侧：
  1. x 趋于x_0 但$x \neq x_0$. 简记为$x \to x_0$;
  2. $|x|$ 趋于无穷大,简记为$x \to \infty$;
- 单侧：
  1. $x > x_0$ 且x 趋于x_0, 简记为$x \to x_0^+$;
  2. $x < x_0$ 且x 趋于x_0, 简记为$x \to x_0^-$;
  3. x 沿数轴正方向趋于无穷大,简记为$x \to +\infty$;
  4. x 沿数轴负方向趋于无穷大,简记为$x \to -\infty$;

注 2.8 我们只关心自变量某个变换过程时函数的趋势，跟函数所在极限点处的定义无关.

以后为了叙述方便,我们用记号$x \to X$ 来统一表示上面6 种极限过程中的任一种过程.

定义 2.6 函数极限(easy mode)

如果在极限过程$x \to X$ 下$f(x)$ 极限趋于一个确定的数A, 则称$x \to X$ 时， $f(x)$ 收敛于A, 或称A 是$f(x)$ 在$x \to X$ 下的极限,记为 $\lim\limits_{x \to X} f(x) = A$ 或$f(x) \to A(x \to X$ 时);

如果在极限过程$x \to X$ 下$f(x)$ 不能够无限趋于实数A, 则称$x \to X$ 时,$f(x)$ 不收敛于A,或称A 不是$f(x)$ 在$x \to X$ 下的极限,记为

$$\lim_{x \to X} f(x) \neq A \text{ 或 } f(x) \nrightarrow A(x \to X \text{ 时});$$

如果任何实数A 都不是$f(x)$ 在$x \to X$ 下的极限,则称$f(x)$ 在$x \to X$ 时发散或极限 $\lim\limits_{x \to X} f(x)$ 不存在.

对应六个极限过程的记号分别为：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

其中 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 为右极限，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 为左极限,而它们统称为单侧极限.

对于一些简单的函数，可以观察其图像得到函数的极限.

例 2.9

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+x}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sin x,\ \lim_{x\to-\infty}\sin x\text{不存在}.$$

稍微复杂一点，可通过化简观察函数值求极限.

例 2.10

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{2+\frac{1}{x}}\right]=-\frac{1}{2}.$$

引理 2.1　函数双侧极限存在的充要条件是对应的两个单侧极限存在且相等，即：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

由上述引理可知，例2.10 中，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$不存在.

例 2.11　设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1 & x>0.\end{cases}$$

证明: 当$x\to 0$时$f(x)$的极限不存在.

证明 易知$x\to 0$时$f(x)$的左极限

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

而右极限

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

因为左极限和右极限存在但不相等,所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

定义 2.7 函数极限(hard mode)

有限: 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A,对于任意给定的正数ε (不论它多么小),总存在正数δ, 使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (\text{当 } x\to x_0).$$

无穷: 设函数$f(x)$当$|\,x\,|$大于某一正数时有定义. 如果存在常数A,对于任意给定的正数ε (不论它么小), 总存在着正数X, 使得当x满足不等式

$|x|>X$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或$f(x)\to A($当$x\to\infty)$.

例 2.12 证明$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

证明 这里$|f(x)-A|=|x-x_0|$, 因此$\forall\varepsilon>0$, 总可取$\delta=\varepsilon$, 当$0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ (去心邻域) 时, 能使不等式$|f(x)-A|=|x-x_0\,|<\varepsilon$成立. 所以$\lim x=x_0$.

例 2.13 证明$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证明 由于

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|,$$

为了使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, $\forall\varepsilon>0$, 可取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 则当$x$ 适合不等式

$$0<|x-1|<\delta$$

时,对应的函数值$f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x)-1|=|(2x-1)-1|<\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

例 2.14 证明$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明 这里,函数在点$x=1$ 是没有定义的,但是函数当$x\to 1$ 时的极限存在或不存在与它并无关系. 事实上, $\forall\varepsilon>0$,将不等式

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

约去非零因子$x-1$ 后,就化为

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon,$$

因此, 只要取$\delta=\varepsilon$, 那么当$0<|x-1|<\delta$ 时, 就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

例 2.15 证明: $\lim\limits_{x\to 1} x^4=1$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 因为由例1.3 知如果$|x-1|\leqslant 1$, 则

$$|f(x)-A|=\left|x^4-1\right|\leqslant 15\,|x-1|\,.$$

要使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要$|x-1|<\frac{\varepsilon}{15}$ 且$|x-1|\leqslant 1$. 因此取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{15},1\}$，则当$x$ 适合不等式$0<|x-1|<\delta$ 时,对应的函数值

$$\left|x^4-1\right|\leqslant 15\delta=\varepsilon.$$

例 2.16 证明: 当$x_0>0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 因为

$$|f(x)-A|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x-x_0|\,,$$

要使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$ 且$x\geqslant 0$, 而$x\geqslant 0$ 可用$|x-x_0|\leqslant x_0$ 保证, 因此取$\delta=\min\left\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\right\}$ (这式子表示, δ 是x_0 和$\sqrt{x_0}\varepsilon$ 两个数中较小的那个数),则当x 适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$ 时,对应的函数值$\sqrt{x}$ 就满足不等式

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

例 2.17 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 要证$\exists X>0$, 当$|x|>X$ 时, 不等式成立. 因这个不等式相当于

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon \text{ 或} |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

由此可知,如果取$X=\frac{1}{\varepsilon}$, 那么当$|x|>X=\frac{1}{\varepsilon}$ 时, 不等式$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立, 这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

2.2.2 函数极限的运算

对于初等函数，我们有如下结论：

引理 2.2 $f(x)$ 是初等函数, x_0 在 $f(x)$ 的定义域内, 那么 $x \to x_0$ 时(有时候只能是单侧过程) $f(x) \to f(x_0)$, 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 2.18 考察极限 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} \right)$.

解

$$f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

是初等函数, 但 $x = 1$ 不在 $f(x)$ 的定义域内,因此不能用 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ 来求极限 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. 但是 $x \to 1$ 时, $x \neq 1$, 这时 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, 即

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x}$$

由于 $\frac{x+1}{x}$ 是初等函数, $x = 1$ 在其定义域内, 可得

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x} = 2.$$

函数极限的运算法则与数列极限的运算法则一致.

定理 2.8 函数极限四则运算法则

设 $\lim\limits_{x \to X} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to X} g(x) = B$, 则, 那么

(1) $\lim\limits_{x \to X} (Cf(x)) = C \lim\limits_{x \to X} f(x) = CA$, 其中 C 是与 x 无关的常数;

(2) $\lim\limits_{x \to X} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to X} f(x) \pm \lim\limits_{x \to X} g(x) = A \pm B$;

(3) $\lim\limits_{x \to x} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to X} f(x) \lim\limits_{x \to X} g(x) = AB$;

(4) $\lim\limits_{x \to X} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to X} f(x)}{\lim\limits_{x \to X} g(x)} = \frac{A}{B}$(这里要求 $B \neq 0$).

推论 2.2 $\lim\limits_{x \to X} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = c_1 \lim\limits_{x \to X} f_1(x) + c_2 \lim\limits_{x \to X} f_2(x) + \cdots + c_n \lim\limits_{x \to X} f_n(x)$.

例 2.19

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+3\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\cdot 2+3}$$

$$=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=\frac{7}{-3}=-\frac{7}{3}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}\xlongequal{\text{分子分母同时除以}x^3}\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}\xlongequal{\text{分子分母同时除以}x^3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}\xlongequal{\text{分子分母同时除以}x^3}\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\left(=\frac{2}{0}\right)=\infty.$$

注 2.9 设$F(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$ 和$G(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$ 分别是m 次和n 次多项式$(a_0\neq 0, b_0\neq 0)$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\begin{cases}\frac{F(x_0)}{G(x_0)},\ \text{当}G(x_0)\neq 0,\\ \\ \text{化简约掉}x-x_0\text{ 项再带入, 当}G(x_0)=0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\begin{cases}0,\ \text{当}n>m,\\ \frac{a_0}{b_0},\ \text{当}n=m,\\ \infty,\ \text{当}n<m.\end{cases}$$

注 2.10 注意函数极限运算的条件，以下是不对的:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}x(x-1)}.$$

定理 2.9 函数的复合运算法则

若 $\lim\limits_{x\to X}g(x)=A($ 这里A 可以是无穷大)且$g(x)\neq A$ (不可省略), $\lim\limits_{x\to A}f(x)=B$, 则

$$\lim_{x\to X}f[g(x)]=\lim_{x\to A}f(x)=B.$$

注 2.11 用另一批符号更清楚：若$y=f(u)\to A(u\to u_0)$, $u=g(x)\to u_0(x\to X)$，因为在$x\to X$时，$g(x)$ 整体趋于u_0，因此$y=f(g(x))\to A(x\to X)$.

注 2.12 定理2.9 的严格证明:

设函数$y=f[g(x)]$ 是由函数$u=g(x)$ 与函数$y=f(u)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且存在$\delta_0>0$, 当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时, 有$g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证按函数极限的定义, 要证: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$$

成立.

由于 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A,\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$, 当$0<|u-u_0|<\eta$ 时, $|f(u)-A|<\varepsilon$ 成立.

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, 对于上面得到的$\eta>0,\exists\delta_1>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, $|g(x)-u_0|<\eta$ 成立.

由假设, 当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时,$g(x)\neq u_0$. 取$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|g(x)-u_0|<\eta$ 及$|g(x)-u_0|\neq 0$ 同时成立, 即$0<\mathrm{l}\,g(x)-u_0\,|<\eta$ 成立, 从而

$$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$$

成立. 证毕.

例 2.20 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

例 2.21 设$f(x)=\begin{cases}1,x\neq 1\\0,x=1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, $\lim\limits_{u\to 1}f(u)$.

解 因为: $f[g(x)]=\begin{cases}0, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f[g(x)]=0$. 此外, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$, $\lim\limits_{u\to 1} f(u)=1$.
此例中的复合函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f[g(x)]\neq \lim\limits_{u\to 1} f(u)$! 其原因在于当 $x\to 0$ 时,虽然 $g(x)\to 1$ 但也取到等于1.
复合函数极限运算法则定理等式的两个方向可以理解为求极限的变量替换方法:

定理 2.10 变量替换

$\lim\limits_{t\to X} g(t)=A$(这里 A 可以是无穷大)且 $g(t)\neq A$ (不可省略).
若 $\lim\limits_{t\to A} f(t)=B$, 则

$$\lim_{t\to X} f[g(t)] \xlongequal[x\to A\Leftrightarrow t\to X]{x=g(t)} \lim_{x\to A} f(x)=B.$$

若 $\lim\limits_{t\to A} f[g(t)]=B$, 则

$$\lim_{x\to A} f(x) \xlongequal[x\to A\Leftrightarrow t\to X]{x=g(t)} \lim_{t\to X} f[g(t)]=B.$$

例 2.22 已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

则由定理2.10,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin t} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

例 2.23

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)}{(\sqrt{x^2+9}-3)}\frac{(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+9}+3)}\frac{(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}\\
&\xlongequal{x\to 0\text{ 但是 }x\neq 0}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

例 2.24 1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+1/x^2}}{3+1/x}=-2/3.$

2.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^2+2})\\
&\xlongequal{\text{有理化}} \lim_{x\to-\infty}\frac{x(x+\sqrt{x^2+2})(-x+\sqrt{x^2+2})}{-x+\sqrt{x^2+2}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-1-\sqrt{1+2/x^2}}=-1.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt[3]{x}-1}\\
&\xlongequal{\text{有理化}} \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt[3]{x}-1}\frac{\sqrt{2x+7}+3}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{2x+7}+3}=1.
\end{aligned}
$$

4.

$$
\lim_{x\to1}\frac{x^{11}-1}{x^{10}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)}{(x-1)(x9+x^8+\cdots+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^9+\cdots+x+1}{x^9+x^8+\cdots+x+1}=\frac{11}{10}.
$$

$$
(x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1))
$$

2.2.3 函数极限的性质

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 是指: x 在x_0 的某一去心邻域$O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 中变化时的趋势. 它只跟函数$f(x)$在$x=x_0$附近的取值有关并且与函数在$x=x_0$处的取值无关。讨论 $\lim\limits_{x\to X} f(x)$ 存在时$f(x)$ 的性质, 就是讨论$f(x)$ 在极限过程$x\to X$ 所允许的邻域内的性质，即函数在x_0的某一去心邻域内的局部性质. 我们称函数在某一点的去心邻域内的性质为函数在这个点的局部性质.

定义 2.8　局部性质

函数$f(x)$ 称为在$x=x_0$ 处局部具有性质P, 如果有一个x_0 的去心邻域$O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, $f(x)$ 在其中具有性质P, 即存在$\delta>0$, 使得$x\in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 时, 函数$f(x)$具有性质P.

例如$f(x)$ 在$x=x_0$ 处局部有界:$\Leftrightarrow$ 存在常数$M>0$ 和$\delta>0$, 使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有$|f(x)|\leqslant M$.

我们以$x\to x_0$ 为例，列举函数极限的性质. 一般极限过程$x\to X$ 的极限性质，只需将对应条件改为在极限过程$x\to X$ 所允许的某个领域内满足即可.

定理 2.11　极限的唯一性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛,那么它的极限唯一.

定理 2.12 局部有界性

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $f(x)$ 在$x = x_0$ 处局部有界(:$\Leftrightarrow$存在常数$M > 0$ 和$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有$|f(x)| \leqslant M$).

证明 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 所以取$\varepsilon = 1$, 则$\exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f(x) - A| + |A| < |A| + 1,$$

记$M = |A| + 1$, 则定理得证.

定理 2.13 局部保号性

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 且$A > 0$ (或 $A < 0$), 那么$f(x)$ 在$x = x_0$ 处局部保号(:$\Leftrightarrow$ 存在常数$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有$f(x) > 0$ (或$f(x) < 0$)).

定理 2.14 局部下界

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A (A \neq 0)$, 那么就存在着$x_0$ 的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$,

当$x \in \mathring{U}(x_0)$ 时, 就有$|f(x)| > \frac{|A|}{2}$.

与数列极限性质类似，局部保号性有下面两个推论：

推论 2.3 如果在x_0 的某去心邻域内$f(x) \geqslant 0$ (或 $f(x) \leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 那么$A \geqslant 0$ (或$A \leqslant 0$).

推论 2.4 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 且在极限过程$x \to x_0$ 下,$f(x) >$ $g(x)$, 则$A \geqslant B$.

注 2.13 等号有可能取到, 例如$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = 2$. 在$x = 1$ 附近, $f(x) > g(x)$, 但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 2$.

定理 2.15 函数极限与数列极限的关系

如果极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数$f(x)$ 的定义域内任一收敛于x_0 的数列, 且满足:

$x_n \neq x_0\,(n \in \mathbf{N}_+)$, 那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

注 2.14　把数列$\{x_n\}$ 看做是函数，则定理是复合函数极限定理的特殊情况. 把数列$\{x_n\}$ 看作$x \to x_0$ 的一个子列，则类比收敛数列子列也收敛的结论.

定理 2.16　夹逼定理

如果

(1) 若存在$\delta > 0, \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, (或存在$M > 0, \forall\ |x| > M$),

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x);$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = A,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = A,$

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在,且等于A.

定理 2.17　一个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

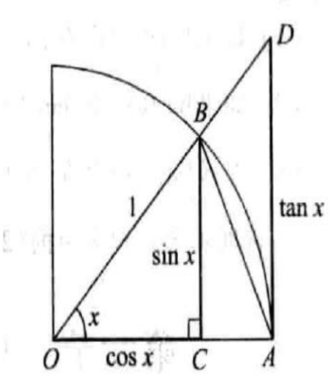


图 2.2　$\frac{\sin x}{x}$ 的极限图示

证明　首先注意到,函数$\frac{\sin x}{x}$ 对于一切$x \neq 0$ 都有定义.

在图2.2 所示的四分之一的单位圆中,设圆心角$\angle AOB = x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, 点$A$ 处的切线与OB 的延长线相交于D, 又$BC \perp OA$, 则

$$\sin x = CB, \quad x = \overset{\frown}{AB}, \quad \tan x = AD$$

因为

$$\triangle AOB \text{ 的面积} < \text{扇形}AOB \text{ 的面积} < \triangle AOD \text{ 的面积},$$

所以

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\sin x < x < \tan x.$$

不等号各边都除以$\sin x$, 就有

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

或

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{2.1}$$

因为当x 用$-x$ 代替时, $\cos x$ 与$\frac{\sin x}{x}$ 都不变, 所以上面的不等式对于开区间$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 内的一切x 也是成立的. 为了对式子(2.1) 应用夹逼定理下面来证

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

事实上, 当$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

即

$$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$

当$x \to 0$ 时, $\frac{x^2}{2} \to 0$, 由夹逼定理有$\lim\limits_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, 由不等式(2.1) 及夹逼定理, 即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

定理 2.18 另一个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

推论 2.5 如果$\lim_{x\to X}\varphi(x) = 0$, 则

$$\lim_{x\to X}\frac{\sin\boxed{\varphi(x)}}{\boxed{\varphi(x)}} = 1.$$

$$\lim_{x\to X}\left(1+\boxed{\varphi(x)}\right)^{\frac{1}{\boxed{\varphi(x)}}} = e.$$

证明 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. 及变量替换定理2.9 直接可得.

例 2.25 求下面极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 = 2.$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$ (因$x\to 1$时, $x-1\to 0$, 可用公式).
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\cdot(x+1) = 2.$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1.$

§ 2.3 无穷小量与无穷大量

2.3.1 无穷小量与无穷大量的定义和性质

无穷小量和无穷大量在函数求极限中有非常重要的应用.

定义 2.9　无穷小量

若 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=0$, 则称$f(x)$ 是极限过程$x\to X$ 下的无穷小量, 简记为

$$f(x)=o(1)\quad (x\to X)$$

例 2.26 : $\sqrt{x}=o(1)\,(x\to 0^+)\,;\ln x=o(1)(x\to 1);\mathrm{e}^x=o(1)(x\to -\infty)$.

注 2.15
- 以零为极限的数列称为$n\to\infty$ 时的无穷小量.
- 无穷小量不是指很小的数而是指一个变量, 除0 以外任何很小的常数都不是无穷小量.
- 无穷小量是相对于自变量的某一变化过程而言的.

定理 2.19　无穷小与函数极限的关系

$\lim\limits_{x\to X} f(x)=A$ 的充要条件是

$$f(x)-A=o(1)\quad (x\to X).$$

(也说, $f(x)=A+o(1)$, 即$f(x)$ 等于极限A 加上一个无穷小量.)

证明　必要性:由 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=A$ 及极限的四则运算法则知道 $\lim\limits_{x\to X}[f(x)-A]=0$, 从而$f(x)-A$ 是$x\to X$ 下的无穷小量.

充分性: 由$f(x)-A=o(1)(x\to X)$ 知道

$$\lim_{x\to X}[f(x)-A]=0$$

由极限四则运算法则知道

$$\lim_{x\to X} f(x) = \lim_{x\to X}[f(x) - A + A] = \lim_{x\to X}[f(x) - A] + \lim_{x\to X} A = A.$$

定义 2.10 无穷大量

若 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to X$ 时的无穷大量.

例 2.27 $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

注 2.16

- 以 $x \to x_0$ 严格来说, 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷大.

- $\lim\limits_{x\to X} f(x) = \infty$ 只是一个记号, 其含义是极限 $\lim\limits_{x\to x} f(x)$ 不存在且 $x \to X$ 时, $f(x)$ 趋于无穷大.
- 此定义对于数列极限也成立.
- 无穷大量不是指很大的数而是指一个变量.
- 无穷大量是一个特殊的无界变量，反之未必.例如数列 $0, 1, 0, 2, 0, 3, \cdots, 0, n, \cdots$ 是无界数列但不是无穷大量.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, 并 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

定理 2.20 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证明 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$. $\forall \varepsilon > 0$. 根据无穷大的定义, 对于 $M = \frac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$$

即

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ 所以$\frac{1}{f(x)}$ 为当$x \to x_0$ 时的无穷小. 反之, 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 且$f(x) \neq 0$. $\forall M > 0$. 根据无穷小的定义, 对于$\varepsilon = \frac{1}{M}$, $\exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{M}$$

由于当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时$f(x) \neq 0$, 从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$$

所以$\frac{1}{f(x)}$ 为当$x \to x_0$ 时的无穷大. 类似地可证当$x \to \infty$ 时的情形.

定理 2.21 无穷小量的运算

1. 若$f(x) = o(1), g(x) = o(1)$, 则$f(x) + g(x) = o(1)$(两个无穷小的和是无穷小).
2. 若$f(x) = o(1), |g(x)| \leq M$, 则$f(x)g(x) = o(1)$(有界函数和无穷小的积是无穷小).

证明 对于(2), 首先我们有$-M|f(x)| \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$，根据夹逼定理，$\lim |f(x)g(x)| = 0$, 又因为$\lim f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim |f(x)| = 0$. 因此，$f(x)g(x) = o(1)$.

不难验证，$f(x) = o(1)$, 那么$f(x)$一定是有界(这里的有界是指局部有界). 因此，根据定理的第二部分，两个无穷小量的乘积是无穷小量. 定理推广到有限个无穷小量可以得到：

推论 2.6 若$f_1(x) = o(1), f_2(x) = o(1), \cdots, f_n(x) = o(1)$, 则(1) $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = o(1)$(有限个无穷小的和是无穷小). (2)$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = o(1)$ (有限个无穷小的积是无穷小).

注 2.17 利用无穷小可以比较容易地证明函数极限的四则运算法则, 详见[1], p39.

例 2.28 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当$x \to \infty$ 时,分子及分母的极限都不存在,故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把$\frac{\sin x}{x}$ 看作$\sin x$ 与$\frac{1}{x}$ 的乘积,由于$\frac{1}{x}$ 当$x \to \infty$ 时为无穷小,而$\sin x$ 是有界函数,则根据定理2.21, 有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

例 2.29　求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量，x 是无穷小量, 由定理2.21 知 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

2.3.2 无穷小的比较

无穷小量虽然都是趋于零的变量，但不同的无穷小量趋于零的速度都不一样，有时差别很大.

例 2.30　例：函数x, x^2, x^3 当$x\to 0$ 时都为无穷小量

x	1	0.5	0.1	0.01	$\cdots\to 0$
x^2	1	0.25	0.01	0.0001	$\cdots\to 0$
x^3	1	0.125	0.001	0.000001	$\cdots\to 0$

通过引入阶的概念刻画不同无穷小之间趋于零速度的快慢.

定义 2.11　无穷小量的比较

设$f(x)=o(1), g(x)=o(1)$, 且$g(x)\neq 0(x\to X)$. 若 $\lim\limits_{x\to X}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称$f(x)$ 是$g(x)$ 在$x\to X$ 下的高阶无穷小量,简记为$f(x)=o(g(x))(x\to X)$;

若 $\lim\limits_{x\to X}\frac{f(x)}{g(x)}=A(A\neq 0)$, 则称$f(x)$ 与$g(x)$ 是$x\to X$ 下的同阶无穷小量, 特别$A=1$ 时, 称$f(x)$ 与$g(x)$ 是$x\to X$ 下的等价无穷小量, 简记为$f(x)\sim g(x)(x\to X)$.

例 2.31

- $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$　$\therefore$ 当$n\to\infty$ 时,$\frac{1}{n}$ 是比$\frac{1}{n^2}$ 低阶无穷小, 记为$\frac{1}{n^2}=o(\frac{1}{n})$.
- $\because \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6, \therefore$ 当$x\to 3$ 时, x^2-9 与$x-3$ 是同阶无穷小.
- $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x}=1$　$x-x^2\sim x$　$(x\to 0)\therefore$ 当$x\to 0$ 时, $x-x^2$ 与x 是等价无穷小, 记为$x-x^2\sim x$.

注 2.18　$f(x)$ 是$g(x)$的高阶无穷小，则$f(x)$比$g(x)$趋于无穷的速度快; $f(x)$ 与$g(x)$的同阶无穷小，则$f(x)$与$g(x)$趋于无穷的速度相当; $f(x)$ 与$g(x)$的等价无穷小，则$f(x)$与$g(x)$趋于无穷的速度相同;

关于无穷大量, 在后面无穷小替换里用的比较少，且所有概念性质都可以通过倒数转化成无穷小量分析，这里不再展开，仅给出相关定义.

定义 2.12 无穷大量的比较

设 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to X} g(x)=\infty$,

若 $\lim\limits_{x\to X}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称$f(x)$ 是$g(x)$ 在$x\to X$ 下的低阶无穷大量,或者称$g(x)$ 是$f(x)$ 在$x\to X$ 下的高阶无穷大量,简记为$f(x)=o(g(x))(x\to X)$;

若 $\lim\limits_{x\to X}\frac{f(x)}{g(x)}=A(A\neq 0)$, 则称$f(x)$ 与$g(x)$ 在$x\to X$ 下是同阶无穷大量, 特别$A=1$ 时, 称$f(x)$ 与$g(x)$ 是$x\to X$ 下的等价无穷大量, 简记为$f(x)\sim g(x)(x\to X)$.

2.3.3 常用的等价无穷小关系

求极限有一个重要的方法是等价无穷小替换，首先给出常用的等价无穷小关系：

$x\to 0$ 时,

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$;

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$; $x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$;

$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$; $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0$ 是常数);

注 2.19 若$f(x)\sim g(x),(x\to X),\varphi(x)\to X,(x\to X')$, 则

$$f(\varphi(x))\sim g(\varphi(x)),(x\to X').$$

例如：当$x\to 0$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x$. 当$x\to 0$ 时, $x^2\to 0$, 因此

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2.$$

例 2.32 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

例 2.33 解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

例 2.34 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

解令$t=\arcsin x$, 则$x=\sin t$, 当$x\to 0$ 时, 有$t\to 0$. 于是由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

例 2.35 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

例 2.36 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$

证明 令$y=\mathrm{e}^x-1$, 则$x=\ln(1+y)$, 且$x\to 0$ 时, $y\to 0$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$

例 2.37 设$\alpha\neq 0$. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1.$

证明 证法1：当$\alpha\neq 0$ 时, 在$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}$ 中, 注意到$(1+x)^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha ln(1+x)}$, 且$x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\to 0$, 因此

$$(1+x)^\alpha-1=e^{\ln(1+x)}-1\sim\alpha\ln(1+x)(x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

证法2：令$(1+x)^\alpha-1=t$, 则当$x\to 0$ 时, $t\to 0$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+x)^\alpha}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}\right]\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.\end{aligned}$$

关于等价无穷小, 有两个重要的定理.

定理 2.22 等价无穷小替换

设$f(x)\sim\tilde{f}(x), g(x)\sim\tilde{g}(x)$, 且$\lim\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)}$ 存在, 则

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)}$$

证明 $\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\left(\frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}\cdot\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)}\cdot\frac{\tilde{f}(x)}{f(x)}\right)=\lim\frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}\cdot\lim\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)}\cdot\lim\frac{\tilde{f}(x)}{f(x)}=\lim\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)}.$

例 2.38 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当$x \to 0$时, $\tan 2x \sim 2x, \sin 5x \sim 5x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

例 2.39 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 当$x \to 0$时, $\sin x \sim x$, 无穷小x^3+3x与它本身显然是等价的,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(x^2+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

例 2.40 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解 当$x \to 0$时, $\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}x^2, \cos x-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

定理 2.23 无穷小的主部

$g(x)$ 与$f(x)$ 是等价无穷小($x \to X$ 时)的充分必要条件为

$$g(x)=f(x)+o(f(x)).$$

称$f(x)$ 是$g(x)$ 的主部. 因此，函数和其主部是等价无穷小.

证明 必要性: 设$f(x) \sim g(x)$, 则

$$\lim\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}=\lim\left(\frac{g(x)}{f(x)}-1\right)=\lim\frac{g(x)}{f(x)}-1=0$$

因此$g(x)-f(x)=o(f(x))$, 即$g(x)=f(x)+o(f(x))$.

充分性: 设$g(x)=f(x)+o(f(x))$, 则

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\frac{f(x)+o(f(x))}{f(x)}=\lim\left(1+\frac{o(f(x))}{f(x)}\right)=1$$

因此$f(x) \sim g(x)$.

例 2.41 $f(x)=x$是$g(x)=x+x^2+x^3$的主部. 主部其实就是决定无穷小量趋于零速度的那一部分.

注 2.20 函数的主部并不唯一，例如$f(x)=x$和$f(x)=x+x^2$ 都是$g(x)=x+x^2+x^3$的主部.

例 2.42 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}+2x-x^2}$.

解 $x\to 0$ 时, $\sqrt[3]{x}\to 0, \sin\sqrt[3]{x}\sim\sqrt[3]{x}$, 因此$2\sin\sqrt[3]{x}-x$ 的主部为$2\sin\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x}+2x-x^2$ 的主部为$\sqrt[3]{x}$ (趋于0的速度由这一项决定), $\sqrt[3]{x}+2x-x^2$的主部是$\sqrt[3]{x}$ (趋于0的速度由这一项决定), 因此$2\sin\sqrt[3]{x}-x\sim 2\sin\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x}+2x-x^2\sim\sqrt[3]{x}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}+2x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\xlongequal{y=\sqrt[3]{x}}2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2.$$

多项式比值的极限也可以用类似方法处理：

例 2.43 $3x^3+4x^2+2$趋于无穷的速度由主部$3x^3$决定，$7x^3+5x^2-3$由主部$7x^3$决定。因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{7x^3}=\frac{3}{7}.$$

注 2.21 无穷小量趋于0的速度由趋于0速度最慢的那一部分决定。无穷大量趋于无穷的速度由趋于无穷速度最快的那一部分决定.

注 2.22 我们可以将$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型的极限看做是比较两个无穷量趋于0或∞的速度. 用主部作无穷小替换求极限就是抓住事物的主要矛盾，忽略次要矛盾, 将决定趋于速度的量保留.

注 2.23 利用主部进行无穷小替换时，肯定是选最简单，最利于极限计算的主部.

注 2.24 利用主部进行无穷小替换的问题，都可以按照之前讲的，分子分母同除以某一个量的方式求解。其实除以的这个量就是它的一个同阶无穷小(大)量.

注 2.25 因式代替规则: 若$\alpha(x)\sim\beta(x)$, 且$\varphi(x)$ 极限存在或有界, 则 $\lim\alpha(x)\varphi(x)=\lim\beta(x)\varphi(x)$

例 2.44

$$\lim_{x\to 0}\arcsin x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 2.45 求$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$.

特别注意以下做法是错误 的：

因为$\tan x\sim\sin x\sim x$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

注 2.26

$$f(x)\sim\tilde{f}(x), g(x)\sim\tilde{g}(x)\nRightarrow f(x)\pm g(x)\sim\tilde{f}(x)\pm\tilde{g}(x)!!!$$

注 2.27 只有乘除时可以做等价无穷小替换，加减时不可以。

§ 2.4 函数的连续性

2.4.1 连续的定义

我们之前提到过，函数的极限跟函数在极限点处的函数值没有关系，而连续性则将函数极限和函数在极限点的函数值联系起来.

定义 2.13 连续

设函数$y=f(x)$ 的定义域为$D, x_0 \in D$, 若

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f\left(x_0\right),$$

则称$f(x)$ 在x_0 点连续, x_0 称为$f(x)$ 的一个连续点; 否则称$f(x)$ 在x_0 点不连续(又称为间断), 这时x_0 称为$f(x)$ 的一个不连续点(又称为间断点); 若$f(x)$ 在D 中每一点都连续, 则称$f(x)$ 在D 上连续(又称为$f(x)$ 是D 上的连续函数).

注 2.28 $\lim_{x \to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$ 等价于

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right]=0.$$

或者

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y=0,$$

其中, $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$ 称作函数增量.

函数的连续性可以这样描述:如果当自变量增量Δx 趋于零时,函数的对应增量Δy 也趋于零.

定义 2.14 右连续

若$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=f\left(x_0\right)$, 则称$f(x)$ 在x_0 点右连续.

定义 2.15 左连续

若$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=f\left(x_0\right)$, 则称$f(x)$ 在x_0 点左连续.

注 2.29 左极限和右极限有时也分别记为记为$f(x_0-)$, $f(x_0+)$.

定理 2.24 连续与左右连续

$f(x)$ 在x_0 点连续的充要条件是$f(x)$ 在x_0 点既左连续又右连续，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0+) = f(x_0) = f(x_0-).$$

定理 2.25 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内处处连续,初等函数在其定义区间（含在定义域内的最大区间）内处处连续,其中区间端点处的连续性:是指相应的单侧连续性.

推论 2.7 每一段都是初等函数的分段函数的间断点只可能在分段点处.

例 2.46 讨论$f(x) = \begin{cases} 1+\cos x, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在$x = 0$ 处的连续性.

解

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1+\cos x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$$

$$f(0) = 2$$

$\therefore f(x)$ 在$x = 0$ 处连续.

2.4.2 间断点的分类

连续函数的几何特点就是它的函数曲线可以一笔画画出来，如果在某一个点间断，则整个曲线就在这个点断开了。不同类型的间断点断开的方式不同。函数的间断点分为第一类间断点和第二类间断点. 第一类间断点又分为可去间断点和跳跃间断点, 第二类间断点又分为无穷间断点和振荡间断点.

定义 2.16 间断点分类

- 第一类间断点:$f(x_0+)$ 与$f(x_0-)$ 都存在且不全等于$f(x_0)$
  1. 可去间断点: $f(x_0+) = f(x_0-)$ 且不等于$f(x_0)$，或函数$f(x)$ 在x_0 处无定义.

2. 跳跃间断点$f(x_0+) \neq f(x_0-)$, 称$f(x_0+) - f(x_0-)$ 为函数$f(x)$ 在x_0 处的跳跃度.

- 第二类间断点: $f(x_0+)$ 与$f(x_0-)$ 中至少有一个不存在.
  1. 无穷间断点: $f(x_0+)$ 与$f(x_0-)$ 中至少有一个为无穷.
  2. 振荡间断点: $f(x_0+)$ 与$f(x_0-)$ 都不存在且不等于无穷.

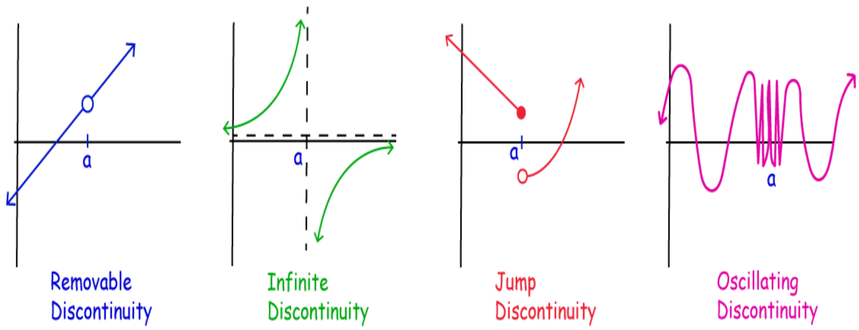


图 2.3 间断点图示：从左往右依次为可去, 无穷, 跳跃, 振荡

例 2.47 1.正切函数$y = \tan x$ 在$x = \frac{\pi}{2}$ 处没有定义, 所以点$x = \frac{\pi}{2}$ 是函数$\tan x$ 的间断点. 因

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty,$$

点$x = \frac{\pi}{2}$ 为函数$\tan x$ 的无穷间断点.

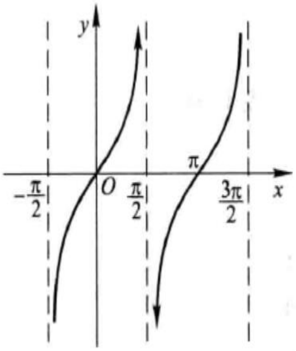
2.函数$y = \sin \frac{1}{x}$ 在点$x = 0$ 没有定义;当$x \to 0$ 时, 函数值在-1 与+1 之间变动无限多次, 所以点$x = 0$ 为函数$\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

3. 函数$y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在点$x = 1$ 没有定义, 所以函数在点$x = 1$ 为不连续. 但这里

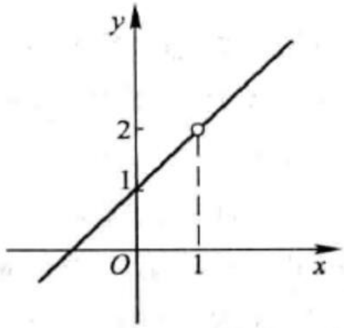
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

如果补充定义:令$x = 1$ 时$y = 2$, 那么所给函数在$x = 1$ 成为连续. 所以$x = 1$ 称为该函数的可去间断点.

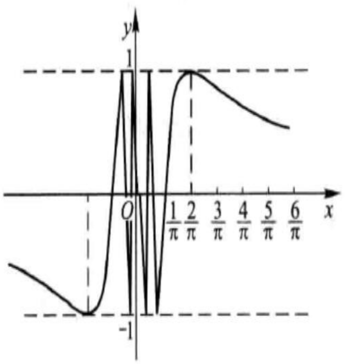
4. 函数



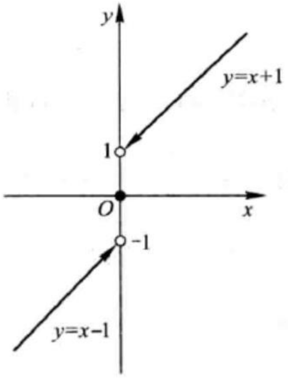
(a) $y = \tan x$



(b) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$



(c) $y = \sin \frac{1}{x}$



(d) $f(x) = x - 1, x < 0, = 0, x = 0, = x + 1, x > 0$

图 2.4　间断点举例

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$$

这里,当$x\to 0$时,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

左极限与右极限虽都存在,但不相等,$x=0$为函数$f(x)$的跳跃间断点.

例 2.48　设$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \\ \frac{x^2-1}{x-1}, & 0<|x-1|\le 1 \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$ 求$f(x)$的间断点,并判别出它们的类型.

解　$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup[0,1)\cup(1,2]\cup(2,+\infty)$,且在$(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,+\infty)$中$f(x)$都是初等函数,因而$f(x)$的间断点只可能在$x_1=0,x_2=1,x_3=2$处. 由于$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\infty$,因此$x_1=0$是$f(x)$的第二类间断点$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,且$f(x)$在$x_2=1$处无定义,因此$x_2=1$是$f(x)$的可去间断点;

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{x-1}=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x-1)=3,\quad f(2)=3$$

因此$x_3=2$是$f(x)$的连续点.

2.4.3 连续函数的局部性质

由于$f(x)$在x_0点连续就是极限关系$\lim f(x)=f(x_0)$,因此由函数极限的性质可以得到连续点处函数的局部性质：

性质 2.5　若$f(x)$在x_0点连续,且$f(x_0)>0$,则在x_0的某一小邻域$O_\delta(x_0)$内$f(x)>0$.

性质 2.6　若$f(x),g(x)$在x_0点连续,那么

$Cf(x)(C$ 为常数$), f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ (要求 $g(x_0) \neq 0$)
在 x_0 点连续.

性质 2.7 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $Cf(x), f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0, x \in [a,b])$ 在 $[a,b]$ 上连续.

性质 2.8 若 $f(x)$ 在 $x = A$ 点连续, $\lim_{x \to X} g(x) = A$, 则

$$\lim_{x \to X} f[g(x)] = f(A).$$

特别是若 $g(x)$ 在 x_0 点连续, $f(x)$ 在 $A = g(x_0)$ 点连续,那么 $f[g(x)]$ 在 x_0 点连续.

性质2.8 是求极限代入法的理论基础.

例 2.49 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$

例 2.50 利用函数连续性求极限 $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

解 $x \to \infty$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. 由于 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} (x \to \infty)$, 因此 $\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x \frac{1}{x} = 1$ 而 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续因此

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

.

利用第二个重要的极限求解过程可以求解 1^∞ 型幂指函数的极限.

例 2.51 求下列函数的极限:

(1) $\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)^x$;

(3) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x} \ln(1-2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}(-2x)} = \mathrm{e}^{-2}.$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{1-2x}{3-2x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{x\left(\frac{1-2x}{3-2x} - 1\right)} = \mathrm{e} (x \to 1, \ln x \sim x - 1).$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x} \ln \frac{1-2x}{1+2x}} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(\frac{1-2x}{1+2x} - 1\right)} = \mathrm{e}^{-4}.$

性质 2.9　若$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则$\lim_{n\to\infty} f(n)=A$.

例 2.52　求极限$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n$.

解　由于$\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{2x+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

因此可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1\frac{1}{2n+1}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例 2.53　求极限$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$.

解　由于$n\to\infty$ 时, $\frac{\pi}{n}\to 0, \sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty} n\frac{\pi}{n}=\pi.$$

例 2.54　连续复利问题

设A_0 是本金, 年利率为r, 则一年后的本息之和为$A_0(1+r)$. 连续复利就是计息的时间间隔任意小,前期的利息归人本期的本金进行重复计息.假设一年计息n 次.则每次利率为$\frac{r}{n}$. 一年后的本息之和为$A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$,当$n$ 无限增大时就得到连续复利下一年的本息之和

$$A(r)=\lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=A_0\mathrm{e}^r.$$

由此我们得到:连续复利中, 本金为A_0, 年利率为r, 则一年之后的本息为$A(r)=A_0\mathrm{e}^r$,t 年后的本息之和为$A_t(r)=A_0e^{tr}$ (其中A_0 又秒为A_0e^{tr} 的现值).

2.4.4 闭区间上连续函数的性质

前面讲了连续函数的局部性质, 本节我们来看连续函数的整体性质.

定理 2.26　有界性定理

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 那么$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界.

定理 2.27　最值定理

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 那么$f(x)$ 在$[a,b]$ 上必有最大值M 和最小值m, 即存在$x_1,x_2\in[a,b]$, 使得$f(x_1)=M, f(x_2)=m$, 且$m\le f(x)\le M, x\in[a,b]$.

注 2.30 非闭区间上的连续函数, 定理的结论不一定成立. 例如: $y = x$ 在$[0,1]$ 上有最小值0 和最大值1; 但在$(\mathbf{0},1)$ 上既无最大值亦无最小值。

注 2.31 闭区间上的非连续函数, 定理的结论不一定成立. 例如:函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

在闭区间$[0,2]$ 上有间断点$x = 1$, 这函数$f(x)$ 在闭区间$[0,2]$ 上虽然有界, 但是既无最大值又无最小值(图2.5)。

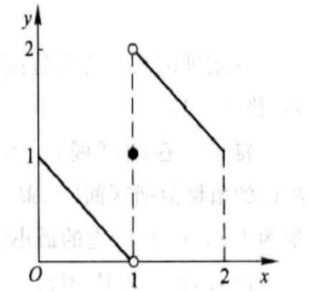


图 2.5 闭区间上的不连续函数

定理 2.28 零点存在定理

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 且$f(a)f(b) < 0$, 则一定存在$x_0 \in (a,b)$, 使得$f(x_0) = 0$ (称使得$f(x) = 0$ 的x 为$f(x)$ 的零点).

注 2.32 零点存在定理只能证明零点存在，零点可以有多个，零点的位置并不能由此定理确定(图2.6).

定理 2.29 介值定理

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,且设m, M 分别为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最小值和最大值, 则对任何$c \in [m,M]$,一定存在: $x_0 \in [a,b]$, 使得$f(x_0) = c$, 由此可知$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的值域为$[m,M]$.

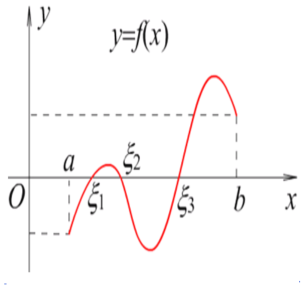


图 2.6　函数的零点

证明　不妨设$m < M$, 且$x_1, x_2 \in [a,b], f(x_1) = m, f(x_2) = M$, 则$x_1 \neq x_2$, 不妨设$x_1 < x_2$, 则$[x_1, x_2] \subset [a,b]$. 对任何$c \in [m,M]$, 当$c = m$ 和$c = M$ 时结论正确; 当$c \in (m,M)$ 时, 令$F(x) = f(x) - c$, 这时$F(x)$ 在$[x_1, x_2]$ 上连续, 且$F(x_1) = m - c < 0, F(x_2) = M - c > 0$, 由零点存在定理知道必有$x_0 \in (x_1, x_2)$, 使得$F(x_0) = 0$, 而这就说明存在$x_0 \in [a,b]$, 使得$f(x_0) = c$. 综上所述, 对任何$c \in [m,, M]$, 必有$x_0 \in [a,b]$, 使得$f(x_0) = c$, 这同时说明$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的值域$\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = [m,M]$.

例 2.55　设$f(x)$ 在(a,b) 内连续, 证明: 对任何$x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$, 任何$c \in [f(x_1), f(x_2)]$ (当$f(x_2) < f(x_1)$ 时. 对任何$c \in [f(x_2), f(x_1)]$), 必有$x_0 \in [x_1,, x_2]$, 使得$f(x_0) = c$.

证明　由于$f(x)$ 在(a,b) 内连续,则对任何$x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$, $f(x)$ 在$[x_1, x_2]$ 上连续, 由定理2.5 知道$f(x)$ 在$[x_1, x_2]$ 上有最小值m 和最大值M, 且$[f(x_1), f(x_2)] \subset [m,M]$, 因此对任何$c \in [f(x_1), f(x_2)], c \in [m,M]$, 由介值定理可得,必有$x_0 \in [x_1, x_2]$, 使得$f(x_0) = c$.

例 2.56　设$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 且满足$0 < f(x) < 1, x \in [0,1]$. 证明:存在$x_0 \in (0,1)$, 使得$f(x_0) = x_0$.

证明　令$F(x) = f(x) - x$, 由于$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续,因此$F(x)$ 在$[0,1]$ 上连续,且$F(0) = f(0), F(1) = f(1) - 1$, 注意到$0 < f(0) < 1, 0 < f(1) < 1$, 则$F(0) > 0, F(1) < 0$, 由零点存在定理可知,一定存在$x_0 \in (0,1)$, 使得$F(x_0) = 0$, 即$f(x_0) = x_0$.

定理 2.30　反函数连续性定理

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,如果$f(x)$ 在$[a, b]$ 上严格单增.那么$y = f(x)$ 在$[a,b]$ 上存在反函数$x = \varphi(y)$, 且$x = \varphi(y)$ 在$[f(a), f(b)]$ 上连续且严格单增. 当$f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单减时, 也有相应的结论.

下面用两种算法计算I_n

算法A：递推关系，$I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}, I_0 = \ln\frac{6}{5} \approx 0.182\,322$

计算定积分

```
x=0.182 322 2
for n=1:20     n     x=-5*x+1/n    end
```

按算法A自$n=1$计算到$n=20$产生如下计算结果(见表2.1) 由表2.1可见，该算法产生的数

表 2.1　计算结果

n	I_n	n	I_n	n	I_n	n	I_n
1	0.088 4	6	0.034 4	11	-31.392 5	16	9.814 5e+4
2	0.581 0	7	-0.029 0	12	157.045 7	17	-4.907 3e+5
3	0.043 1	8	0.270 1	13	-785.151 6	18	2.453 6e+6
4	0.347 0	9	-1.239 3	14	3.925 8e+3	19	-1.226 8e+7
5	0.026 5	10	0.296 7	15	-1.962 9e+4	20	6.134 1e+7

值解自$n=7$开始出现负值，且绝对值逐渐增加，这显然与I_n 固有的性质相矛盾，因此本算法所得的数值解不符合问题的要求.究其原因，在构造算法时未能充分考虑原积分模型的性态，即由公式(??)，其计算从I_{n-1}到I_n每向前推进一步，其计算值的舍入误差(见1.3节内容)便增长5倍，误差由此积蓄传播导致最终数值解与原问题相悖的结果.为了克服这一缺点改进算法A为算法 B：

算法B：递推关系，$I_{n-1} = -\frac{1}{5}I_n + \frac{1}{5n}, I_{20} \approx \dfrac{\frac{1}{6\times 21} + \frac{1}{5\times 21}}{2} = 0.008\,730\,16$

计算定积分

```
x=0.008 730 16
for n=20:-1:1   n-1   x=-(1/5)*x+1/(5*n)    end
```

第二步用递推公式

$$I_{n-1} = -\frac{1}{5}I_n + \frac{1}{5n} \tag{2.2}$$

自$n=20$计算到$n=1$. 由于该算法每向后推一步，其舍入误差便减少5倍，因此获得符合原积分模型性态的数值结果(见表2.2)

习题一

表 2.2　计算结果

n	I_n	n	I_n	n	I_n	n	I_n
19	0.008 3	14	0.011 2	9	0.016 9	4	0.034 3
18	0.008 9	13	0.012 0	8	0.018 8	3	0.043 1
17	0.009 3	12	0.013 0	7	0.021 2	2	0.058 0
16	0.009 9	11	0.014 1	6	0.024 3	1	0.088 4
15	0.010 5	10	0.015 4	5	0.028 5	0	0.182 3

1.古代数学家祖冲之曾以$\dfrac{355}{113}$作为圆周率的近似值，问此近似值具有多少位有效数字？

2.按四舍五入原则，将下列各数舍成5位有效数字.

816.856 7,　6.000 015,　17.322 50,　1.235 651,　93.182 13,　0.015 236 23

3.下列各数是按四舍五入原则得到的近似值，它们各有几位有效数字？

81.897,　0.008 13,　6.320 05,　0.180 0

4.若$\dfrac{1}{4}$用0.25表示，问它有多少位有效数字？

5.计算$\sqrt{10}-\pi$的值，精确到5位有效数字.

6.若$a^*=1.106\,2, b^*=0.947$是经过四舍五入得到的近似值，问a^*+b^*, a^*b^*有几位有效数字？

7.设$x_1^*=0.986\,3, x_2^*=0.006\,2$是经过四舍五入得到的近似值，问$\dfrac{1}{x_1^*}, \dfrac{1}{x_2^*}$的计算值和真值的相对误差限及$x_1^*, x_2^*$和真值的相对误差限.

8.改变下列各式，使计算结果比较准确：

(1) $\ln x_1-\ln x_2, x_1\approx x_2$;

(2) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}, |x|\ll 1$;

(3) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}, 1\ll x$;

(4) $\dfrac{1-\cos x}{x}, x\neq 0, |x|\ll 1$;

(5) $\dfrac{1}{x}-\cot x, x\neq 0, |x|\ll 1$;

(6) $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$, n充分大时.