第6章　定积分

一元函数的积分学包含两的基本问题：不定积分和定积分。本章我们介绍定积分。

§ 6.1 定积分的概念和性质

6.1.1 两个引例

例 6.1　我们知道图中矩形和梯形的面积分别等于ah 和$\frac{(a+b)h}{2}$, 如何计算曲边梯形的面积？所谓曲边梯形是指由连续曲线$y = f(x)$　$(f(x) \geq 0)$ 及x 轴, 以及两直线$x = a, x = b$ 所围成的图形。

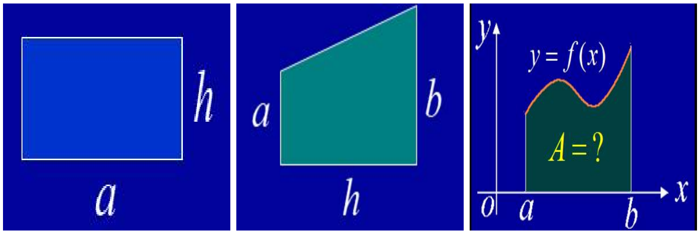


图 6.1　矩形、梯形、曲边梯形

解　解决步骤：

(1) **分割**. 在区间$[a, b]$ 中任意插入$n - 1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线$x = x_i$ 将曲边梯形分成n 个小曲边梯形;

(2) **近似(以直代曲)**. 在第i 个窄曲边梯形上任取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 作以$[x_{i-1}, x_i]$ 为底, $f(\xi_i)$ 为高的小矩形, 并以此小梯形面积近似代替相应窄曲边梯形面积ΔA_i, 得

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n).$$

(3) **求和**.

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

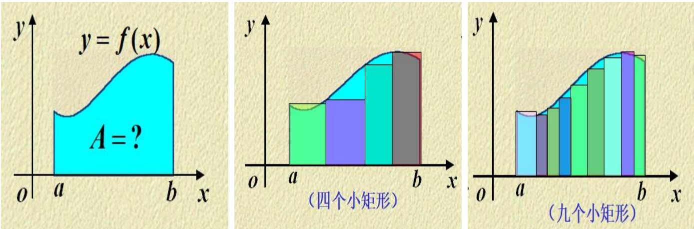


图 6.2　曲边梯形面积近似

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积．要想精确等于则取极限。

(4) **取极限**. 令$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$, 则曲边梯形面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

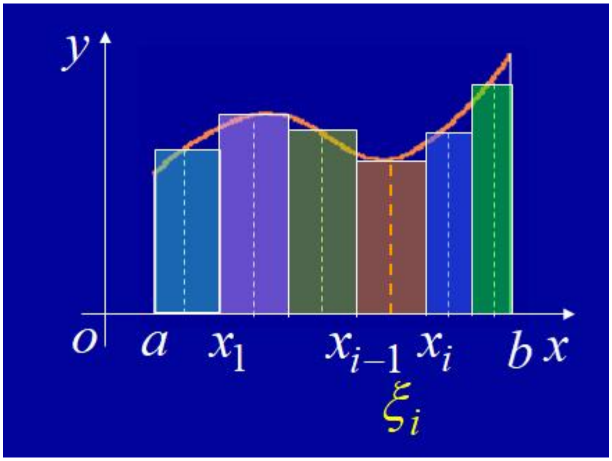


图 6.3

例 6.2 匀速直线运动的路程等于速度乘以时间，如何求变速直线运动的路程？设质点沿直线作变速运动, 其速度$v=v(t)$, 求在时间间隔$[a,b]$ 内质点所走的路程.

解 解决步骤：

(1) **分割**. 把区间$[a,b]$ 用$n+1$ 个分点$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b$ 分成n 个小区间$[t_{i-1},t_i]$, 小区间长记作$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) **近似(常代变)**.在$[t_{i-1},t_i]$ 内任取一点η_i, 将质点的变速运动近似看作以等速$v\left(\eta_i\right)$ 运动, 在时间间隔Δt_i 内所走的路程

$$\Delta s_i \approx v\left(\eta_i\right)\Delta t_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(3) **求和**. 时间间隔$[a,b]$ 内, 质点所走的总路程为

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v\left(\eta_i\right)\Delta t_i .$$

(4) **取极限**.令$\lambda=\max_{1\le i\le n}\left\{\Delta t_i\right\}$, 质点所走的总路程为

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v\left(\eta_i\right)\Delta t_i .$$

以上虽是两个不同范畴的实际问题, 但从数学的角度来看, 其解决问题的思想和步骤是一样的. 将这一方法加以概括抽象, 就得到了定积分的概念.

6.1.2 定积分的定义

我们给出定积分的定义。

定义 6.1 定积分

设函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上有定义,用(a,b) 内任意$n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

将区间$[a,b]$ 分成n 个小区间$\left[x_0,x_1\right],\left[x_1,x_2\right],\cdots,\left[x_{i-1},x_i\right],\cdots,\left[x_{n-1},x_n\right]$。

小区间长为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 在每个小区间上任取一点$\xi_i\in\left[x_{i-1},,x_i\right]$, 作积

$$f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

求和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

记$\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$, 若不论区间分割如何, ξ_i 取法如何, 只要$\lambda \to 0$, 和$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ 总趋于确定的极限I, 则称此极限值为函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上的定积分, 记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

这时称函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上可积.

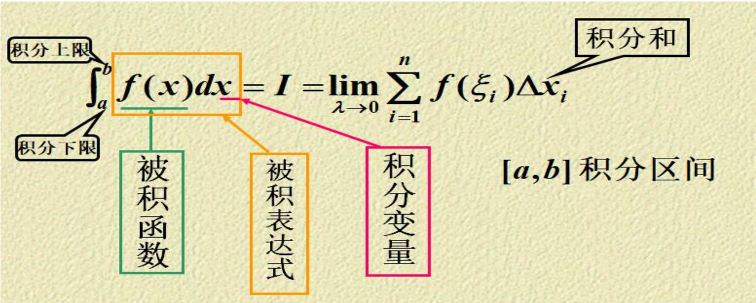


图 6.4 定积分中的符号

注 6.1 两个任意: 定义中区间的分法和ξ_i 的取法是任意的.

注 6.2 划分的稠密性: 无限细分. 极限过程是$\lambda \to 0$, 而不仅仅只是$n \to \infty$: 前者是无限细分的过程, 后者是分点无限增加的过程, 无限细分, 分点必然要求无限增加, 但分点无限增加, 并不能保证无限细分;

注 6.3 定积分的结果是一个数, 这个数仅与被积函数$f(x)$ 及积分区间$[a,b]$ 有关, 与$[a,b]$ 的分划和ξ_i 的取法无关, 也与积分变量的记号无关, 即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ (定积分的值与积分变量的符号无关)

注 6.4　关于函数的可积性,找们有下面几个结论: (1) 可积函数必有界; (2) 有限闭区间$[a,b]$ 上的连续函数可积; (3) 在有限区间$[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点的有界函数可积.

注 6.5　在定积分定义中, 实际假定了$a<b$, 如果$b<a$, 则规定$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, 易知

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

6.1.3 定积分的几何意义

(1) $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$, 曲边梯形的面积$A$;

(2) $f(x)\leq 0, x\in[a,b]$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$, 曲边梯形的面积$A$ 的负值;

(3) 一般的$f(x)$ (有正有负), $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3-A_4$ 几何意义: 表示曲线$f(x)$ 与两条直线$x=a, x=b$ 及x 轴围成的各部分面积的代数和(x 轴上方的取 “+” , x 轴下方的取 “−”) .

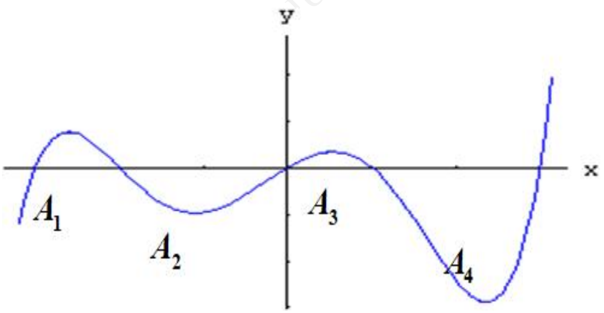


图 6.5　定积分的几何意义

例 6.3　利用定积分的几何意义计算定积分$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　由定积分的几何意义可知, $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 等于曲线$y=\sqrt{1-x^2}$ 与x 轴所围半圆的面积, 所以$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

例 6.4　计算抛物线$y=x^2$, 直线$x=0, x=1$ 及x 轴所围图形面积。

解　因$y=x^2$ 在$[0,1]$ 上连续故可积。因此, 不论对区间$[0,1]$ 如何分法及点ξ_i 如何取法, 所得积分和$\sum_{i=1}^n\xi_i^2\Delta x_i$ 的极限值均应等于定积分$\int_0^1 x^2dx$ 之值。不妨取$[0,1]$ 的一特殊分划

和特殊的点ξ_i 进行计算。将$[0,1]n$ 等分, 分点为$x_i = \frac{i}{n}, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 小区间$[x_{i-1}, x_i]$ 的长度$\Delta x_i = \frac{1}{n}, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 取$\xi_i = x_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i,$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right), \quad \lambda \to 0 \Rightarrow n \to \infty$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

例 6.5 用定积分表示下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$

解 利用$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 所以有:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, \mathrm{d}x$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\, \mathrm{d}x$

6.1.4 定积分的基本性质

下面我们给出定积分的几个性质。

性质 6.1 线性性质: 设$f(x), g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, α, β 是任意常数, 那么$\alpha f(x) + \beta g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积,并且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

此性质可以推广到有限多个函数作和求定积分的情况:

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)]\, dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dx + \cdots + \alpha_n \int_a^b f_n(x)dx.$$

性质 6.2 区间可加性：设$c \in (a, b)$, 则$f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积的充要条件是$f(x)$ 在$[a, c]$ 和$[c, b]$ 上都可积; 不论a, b, c 三点在数轴上的位置如何, 只要以下3 个积分存在(即被积函数在积分区间上可积), 则一定成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当$a < c < b$ 时,公式可以由平面图形面积相加的性质来理解.

证明 当$a < c < b$ 时, 因$f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积, 所以在分割区间时, 可以永远取c 为分点, 于是

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令$\lambda \to 0$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

当a, b, c 的相对位置任意时, 例如$a < b < c$, 则有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质 6.3 保号性：设$f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积, 并且$f(x) \geqslant 0, x \in [a, b]$, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. 若$f(x)$ 为连续函数, 且不恒为零, 则有$\int_a^b f(x)dx > 0$。

推论 6.1 设$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积, 并且$f(x) \leqslant g(x), x \in [a, b]$ 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论 6.2 设$f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积, 并且存在常数m, M, 使得

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, x \in [a, b]$$

则

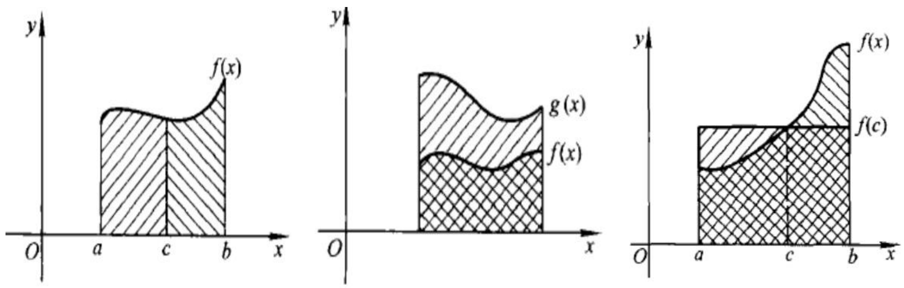
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

推论 6.3 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, 则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx \quad (a<b).$$

证明

$$\because -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \quad \therefore -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx.$$



(a) 区间可加性　　(b) 积分比较　　(c) 积分中值定理几何意义

图 6.6

例 6.6 比较积分值$\int_3^4 \ln x dx$ 和$\int_3^4 (\ln x)^3 dx$ 的大小.

解 因在区间$[3,4]$ 上有$\ln x \ge \ln 3 > \ln e = 1$ 故当$x \in [3,4]$ 时, 有$\ln x < (\ln x)^3$, 因此$\int_3^4 \ln x dx < \int_3^4 (\ln x)^3 dx$

例 6.7 比较积分值$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx, \int_0^1 \ln(1+x)dx$ 的大小。

解 当$0 \le x \le 1$ 时, 令$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ 则$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \ge 0 \therefore f(x)$ 在$[0,1]$ 上单增, $\therefore f(x) \ge f(0) = 0$ 即$\ln(1+x) \ge \frac{x}{1+x}, \int_0^1 \ln(1+x)dx \ge \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx.$

例 6.8 估计积分$\int_0^2 e^{x^2-x}dx$ 的值.

解 令$f(x) = e^{x^2-x}$, 则不难求出$f(x)$ 在区间$[0,2]$ 上的最大值M 与最小值m 为

$$M = e^3, \quad m = e^{-\frac{1}{4}}$$

故: $2e^{\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$ 而且$f(x)$ 不恒等于M, 也不恒等于m, 于是可得

$$2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2-x}dx < 2e^3$$

例 6.9 估计积分$\int_0^\pi \frac{1}{3+\sin^3 x}dx$ 的值.

解 $f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}$, $\forall x\in[0,\pi], \because 0\le \sin^3 x\le 1$, $\therefore \frac{1}{4}\le \frac{1}{3+\sin^3 x}\le \frac{1}{3}$, $\therefore \int_0^\pi \frac{1}{4}dx\le \int_0^\pi \frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le \int_0^\pi \frac{1}{3}dx$, $\therefore \frac{\pi}{4}\le \int_0^\pi \frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le \frac{\pi}{3}$. 又$f(x)$ 不恒为$\frac{1}{4}$, 也不恒为$\frac{1}{3}$, $\therefore \frac{\pi}{4}<\int_0^\pi \frac{1}{3+\sin^3 x}dx<\frac{\pi}{3}$.

定理 6.1 积分中值定理

如果函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续, 则在积分区间$[a,b]$ 上至少存在一个点ξ, 使$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$. $(a\le\xi\le b)$

证明 因为函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续, 故$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可取得最大值M, 最小值m. $\therefore m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ $\therefore m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$ 由闭区间上连续函数的介值定理知在区间$[a,b]$ 上至少存在一个点ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

注 6.6 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$是函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均值。

注 6.7 积分中值公式的几何解释: 在区间$[a,b]$ 上至少存在一个点ξ, 使得以区间$[a,b]$ 为底边, 以曲线$y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

例 6.10 利用积分中值定理计算$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx(n)$ 为正整数)

解 由积分中值定理可知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}(n+1-n),\xi\in[n,n+1]$$

当$n\to+\infty$ 时, 有$\xi\to+\infty$, 原式$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}=0$.

§ 6.2 微积分基本定理：牛顿莱布尼兹公式

变速直线运动中位置函数$s(t)$ 与速度函数$v(t)$ 之间有关系:

$$s'(t)=v(t)$$

物体在时间间隔$[T_1, T_2]$ 内经过的路程为:

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1)$$

即: $v(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上的定积分等于$v(t)$ 的原函数$s(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上的增量$s(T_2) - s(T_1)$. 这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性. 我们通过积分上限函数导出这个关系。首先我们给出积分上限函数的定义。

定义 6.2 积分变上限函数

设函数$f(x) \in C[a, b]$, 且$x \in [a, b]$, 考察定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 如果上限x 在区间$[a, b]$ 上任意变动, 则对于每一个取定的x 值, 定积分有一个对应值, 所以它在$[a, b]$ 上定义了一个关于x 的函数, 记$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a \le x \le b)$, 称此函数为积分上限函数.

注 6.8 积分变上限函数也称作积分上限函数、变上限积分，变限积分等, 以后就不作严格表述.

定理 6.2 积分变上限函数的导数

如果$f(x) \in C[a, b]$, 则积分上限的函数$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在$[a, b]$ 上可导, 且有

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

证明 (1) 若$x \in (a, b)$, 设x 有增量Δx, $x + \Delta x \in (a, b)$, 则$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$,

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

因为$f(x) \in C[a, b]$, 故由积分中值定理, $\exists\xi \in [x, x + \Delta x]$, 使得$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$, 其中$\xi \in [x, x + \Delta x]$,

且有$\Delta x \to 0 \Rightarrow \xi \to x$, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$,

所以$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$, 即$\Phi'(x) = f(x)$.

(2) 若$x = a$, 取$\Delta x > 0$, 同理可得$\Phi'_+(a) = f(a)$; 若$x = b$, 取$\Delta x < 0$, 同理可得$\Phi'_-(b) = f(b)$.

定理 6.3　原函数存在定理

如果$f(x) \in C[a,b]$, 则变上限函数$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数, 即

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C.$$

注 6.9　定理证明了连续函数的原函数是存在的, 沟通了定积分与不定积分之间的联系, 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路.

定理 6.4　变限积分求导

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, $a(x), b(x)$ 在$[a,b]$ 上可导且$a \leqslant a(x), b(x) \leqslant b, x \in [a,b]$ 则成立

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

证明　设$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则性质6.2 可知

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t = F[b(x)] - F[a(x)]$$

再由积分变上限函数的导数定理及复合函数求导法则可知结论成立.

常用的变限积分求导:

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x); \quad \frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x); \quad \frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^b f(t)dt = -f[\varphi(x)]\varphi'(x);$$

例 6.11　求下列导数或极限.

(1) $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^0 \sqrt{1+t^2}dt$;　(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$;

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$.

解　(1) 原式$= \sin x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}$.　(2) 原式$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

(3) 原式$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}$.

例 6.12　设$f(x)$ 连续, 且$f(x) = x^2 - \int_0^x f(t)dt$, 求$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

解 对条件两边求导得$f'(x)=2x-f(x)$, 因此$f(0)=f'(0)=0$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-f(x)}{2x}=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1-\frac{1}{2}f'(0)=1.$$

例 6.13 函数$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且$f(0)=2$, 且设$F(x)=\int_{\sin x}^{x^2}f(t)dt$, 则$F'(0)=?$

解 $F'(x)=f\left(x^2\right)\cdot 2x-f(\sin x)\cos x, \therefore F'(0)=f(0)\cdot 0-f(0)\cos 0=-2$

例 6.14 设$f(x)(x\geq 0)$ 连续, 并且$\int_0^{x^2(1+x)}f(u)du=x$, 求$f(2)$.

解 等式两边对x 求导: $f\left(x^2+x^3\right)\cdot\left(2x+3x^2\right)=1$ 令$x^2+x^3=2$ 得$x=1$ 代入上式得$f(2)(2+3)=1$ 故$f(2)=\frac{1}{5}$.

例 6.15 试证若$f(x)$ 是周期为T 的连续函数, a 为任意常数, 则有$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

证明 设$F(a)=\int_a^{a+T}f(x)dx$, 则有$F'(a)=f(a+T)(a+T)'-f(a)a'=0\therefore F(a)=C$ (常数) 故$F(a)=F(0)$, 即$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

例 6.16 设$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 且满足$f(x)=x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-1$ 求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 及$f(x)$.

解 设$\int_0^1 f(x)dx=A$ (A 为常数) 两边积分得$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[x\int_0^1 f(t)dt-1\right]dx$ 即$A=\int_0^1 Axdx-1$ $\quad\therefore A=A\int_0^1 xdx-1$ 因此 $A=-2,\quad f(x)=-2x-1.$

定理 6.5 微积分基本定理

设$F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上的任意一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证明 因为$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数, 又$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 也是$f(x)$ 的一个原函数, 故

$$F(x)=\Phi(x)+C,\quad x\in[a,b].$$

令$x=a$ 得$F(a)=\int_a^a f(t)dt+C$, 再令$x=b$, $F(b)=\int_a^b f(t)dt+C$，两式相减得$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. 即

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\stackrel{\text{记作}}{=}[F(x)]_a^b=F(x)|_a^b.$$

注 6.10 微积分基本公式表明: 一个连续函数在区间$[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$ 上的增量, 从而将求定积分的问题转化为求原函数的问题.

例 6.17 计算下列定积分(1) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; (2) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$; (3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$.

解 (1) 原式$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^2=\frac{21}{8}$. (2) 原式$=\left[x^3+\arctan x\right]_{-1}^0=1+\frac{\pi}{4}$. (3) 原式$=\left[\frac{x-\sin x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$. (4) 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sec^2\theta-1\right)d\theta=\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

例 6.18 计算下列定积分

(1) 设$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1,\\ 5, 1<x\le 2.\end{cases}$, 求$\int_0^2 f(x)dx$ (2) $\int_{-2}^2\max\left\{x,x^2\right\}dx$

解 (1) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5\,dx=6$.

(2) 由图可知,

$$f(x)=\max\left\{x,x^2\right\}=\begin{cases}x^2, & -2\le x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ x^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

所以, 原式$=\int_{-2}^0 x^2\,dx+\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2\,dx=\frac{11}{2}$.

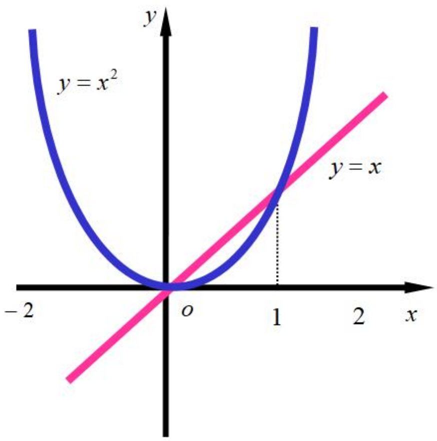


图 6.7　$\max\left\{x,x^2\right\}$

§ 6.3 定积分的换元法和分部积分法

用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分时, 需要求出被积函数的原函数, 然后再将原函数关于积分上下限作差。这个过程和求不定积分的换元法、分部积分法的过程结合就是定积分的换元法和分部积分法。

6.3.1 定积分的换元法

首先给出定积分换元法定理.

定理 6.6 定积分换元公式

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足

(1) 函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上具有连续导数,

(2) 当 t 在区间 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上变化时, $x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化,

(3) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$,

则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

证明 因为 $f(x), f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 均连续, 故它们的定积分都存在, 且原函数也存在.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$,

设 $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$, 则 $\Phi'(t)=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$,

$\therefore$ $\Phi(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数, $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$,

$$\text{又}\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b, \text{故}\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a),$$

$$\text{所以}\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

注 6.11 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时, 积分限也相应的改变为新变量 t 的积分限.

注 6.12 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后, 不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成

原变量X 的函数，而只要把新变量t 的上、下限分别代入$\Phi(t)$ 然后相减就行.

注 6.13 该公式从左到右可看作第二类换元法, 从右到左可看作第一类换元法. 反过来我们有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)$$

例 6.19 计算$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

解 令$t=\sqrt{1+x}$, $x=t^2-1=\varphi(t), dx=2tdt, x=0\Rightarrow t=1,\quad x=3\Rightarrow t=2,$

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx=\int_1^2\left(t^2-1\right)t\cdot 2tdt=2\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2=7\frac{11}{15}.$$

例 6.20 计算$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

解 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \xlongequal{令x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi.$

例 6.21 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd\cos x$ 令$t=\cos x, x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0,\quad x=0\Rightarrow t=1,$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx=-\int_1^0 t^5dt=\int_0^1 t^5dt=\frac{t^6}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

例 6.22 $\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int_{-1}^1\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int_{-1}^1\frac{1}{1+t^2}dt=-\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}dx$

因此

$$\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}dx=0$$

这里令$x=\varphi(t)=\frac{1}{t}, t\in[-1,1]$, 则$\varphi'(t)=-\frac{1}{t^2}, t\in[-1,1]$. 显然$\varphi(t),\varphi'(t)$ 在$x=0$ 处不连续, 不满足定理条件，上述解法错误。正确解法为

$$\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x|_{-1}^1=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

例 6.23 计算$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$.

解 $f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}.$

$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \quad =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\sin x=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}$

注意: 若忽视了$\cos x$ 在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上非正, 而按$\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sin^{3/2}x\cdot\cos x$ 计算, 必将导致错误.

例 6.24 当$f(x)$ 在$[-a,a]$ 上连续, 证明:

(1)若$f(x)$ 为偶函数, 则$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$; (2)若$f(x)$ 为奇函数, 则$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

证明 因为$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$,

$$\text{在}\int_{-a}^{0}f(x)dx\ \text{中令}x=-t,\ \text{则}\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt,$$

(1) 若$f(x)$ 为偶函数, 则$f(-t)=f(t)$,

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(t)dt;$$

(2)若$f(x)$ 为奇函数, 则$f(-t)=-f(t)$, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$.
利用本例的结论, 常可简化计算奇偶函数在对称于原点的区间上的定积分.

例 6.25 计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}_{\text{偶函数}}dx+\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}_{\text{奇函数}}dx$$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx=4-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx(\text{半圆的面积})$$

$$=4-\pi.$$

例 6.26 若$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$;

(2) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$. 由此计算$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证明 (1) 设$x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

(2) 设$x=\pi-t \Rightarrow dx=-dt,\quad x=0\Rightarrow t=\pi, x=\pi\Rightarrow t=0,$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=-\int_{\pi}^0(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt,$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,$$

$$\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

有时被积函数的周期性对定积分计算也有关键作用.
如: $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$. (此处$T$ 为周期函数$f(x)$ 的一个周期), 则有

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin 2x|dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

$$\int_a^{a+kT} f(x)dx=\underbrace{\int_a^{a+T}+\int_{a+T}^{a+2\,T}+\cdots+\int_{a+(k-1)T}^{a+kT}}_{k\text{个}}=k\int_0^T f(x)dx.$$

例 6.27 求$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+25\pi}|\sin 2x|dx$.

解 $|\sin 2x|$ 的周期是$\frac{\pi}{2}$, 则原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+50\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=50\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=50$.

例 6.28 设$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续, 并满足条件$\int_0^x f(x-u)e^u du=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$, 求$f(x)$

解 令$x-u=t, u=x\Rightarrow t=0; u=0\Rightarrow t=x, du=-dt$
$\int_0^x f(x-u)e^u du=-\int_x^0 f(t)e^{x-t}dt=\int_0^x f(t)e^{x-t}dt=e^x\int_0^x f(t)e^{-t}dt=\sin x$. 所以

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt=\sin x\cdot e^{-x}$$

两边关于x 求导得

$$f(x)e^{-x}=\cos xe^{-x}-\sin xe^{-x},$$

故$f(x)=\cos x-\sin x$.

6.3.2 定积分的分部积分法

与不定积分的分部积分法类似，我们有

定理 6.7 定积分的分部积分法

设$u=u(x),v=v(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续可导,则下面的分部积分公式成立

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu.$$

证明 $(uv)'=u'v+uv'$, 又$\int_a^b(uv)'dx=uv|_a^b$, 上式两边取定积分得$uv|_a^b=\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'dx$, 移项即得结论.

例 6.29 计算$\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx$.

解

$$\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx=x\ln\left(1+x^2\right)|_0^1-\int_0^1 xd\ln\left(1+x^2\right)$$

$$=\ln 2-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\ln 2-2+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$$

例 6.30 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

解 $1+\cos 2x=2\cos^2 x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{1+\cos 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{2\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2}d(\tan x)$$

$$=\frac{1}{2}x\tan x|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\ln\sec x|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}.$$

例 6.31 计算$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x} = -\left.\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x) = -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot \frac{1}{1+x}dx = -\frac{\ln 2}{3} + (\ln(1+x) - \ln(2+x))|_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$

例 6.32 设$f''(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 且$f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求$\int_0^1 xf''(2x)dx$.

解 $\int_0^1 xf''(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xdf'(2x) = \frac{1}{2}xf'(2x)|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx = \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}f(2x)|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}(f(2)-f(0)) = 2.$

例 6.33 设$f(x) = \int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求$\int_0^1 xf(x)dx$.

解 因为$\frac{\sin t}{t}$ 没有初等形式的原函数, 无法直接求出$f(x)$, 所以采用分部积分法

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 f(x)|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)\\ &= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx.\end{aligned}$$

$$\because f(x) = \int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt, f(1) = \int_1^1 \frac{\sin t}{t}dt = 0, f'(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x = \frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\cos x^2|_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 1 - 1).$$

§ 6.4 定积分的应用

6.4.1 定积分的几何应用

6.4.1.1 元素法

回忆曲边梯形面积的计算:

(1) 分割: 细分区间$[a,b]$;

(2) 近似: 求第i 个小面积的近似值

$$\Delta A \approx f(\xi_i)\Delta x_i;$$

(3) 求和: 面积$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_{i}\right) \Delta x_{i}$;

(4) 取极限: $A=\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_{i}\right) \Delta x_{i}=\int_{a}^{b} f(x) d x$, 其中$\lambda=\max \left\{\Delta x_{i} \mid i=1,2, \cdots, n\right\}$.

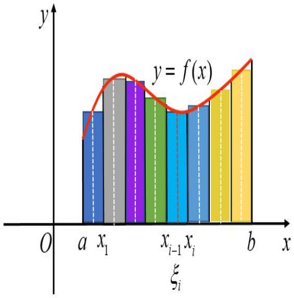


图 6.8

能用定积分计算的量U, 应该具有曲边梯形面积类似的特征，确切的说，应满足下列三个条件:

(1) U 与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关;

(2) U对于区间$[a, b]$ 具有可加性;

(3) U 的部分量ΔU_{i} 可近似地表示成$\Delta U_{i} \approx f\left(\xi_{i}\right) \cdot \Delta x_{i}$.

相应地，计算U 的定积分表达式步骤为:

①选取积分变量: 选取一个变量x 为积分变量, 并确定它的变化区间$[a, b]$;

② 由分割写出微元: 在区间$[a, b]$ 上任取一个小区间$[x, x+d x]$, 求出相应的部分量ΔU 的近似值$\Delta U \approx f(x) d x(f(x)$ 在$[a, b]$ 上连续), 则称$f(x) d x$ 为量U 的元素, 且记作$d U=f(x) d x$;

③ 由微元写出积分: 以U 的元素$d U$ 为被积表达式, 在$[a, b]$ 上积分, 得$U=\int_{a}^{b} f(x) d x$.
这种方法叫做**元素法或微元法**.

例 6.34 利用定积分的元素法求圆$x^{2}+y^{2} \leq R^{2}$ 的面积.

解 (1) 选取x 作为积分变量, $x \in[-R, R]$,

(2) 在$[-R, R]$ 上任取一点x 及增量$d x$, 区间$[x, x+d x]$ 对应的面积微元$d A=2 \sqrt{R^{2}-x^{2}} d x$,

(3) 上式从$-R$ 到R 积分, 得圆的面积

$$A=\int_{-R}^{R} 2 \sqrt{R^{2}-x^{2}} d x \xlongequal{x=R \sin t} 4 \int_{0}^{R} \sqrt{R^{2}-x^{2}}\, d x=4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R \cos t d(R \sin t)$$

$$=4 R^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos ^{2} t d t=2 R^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2 t) d t=\pi R^{2}.$$

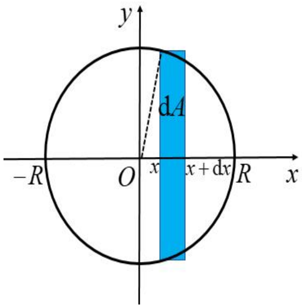
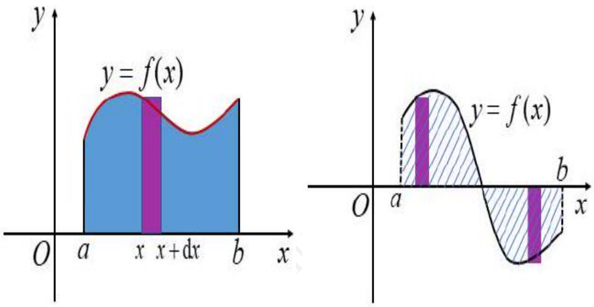


图 6.9



(a) $f(x) \geq 0$　(b) $f(x)$ 有正有负

图 6.10

6.4.1.2 平面图形的面积

1. 由曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 和直线$x = a, x = b, y = 0(a < b)$ 所围成曲边梯形面积.

取x 为积分变量, 任意$[x, x + dx] \subset [a, b]$, 以底为$dx$, 高为$y = f(x)$ 的小矩形面积近似窄曲边梯形面积. 面积微元: $dA = f(x)dx$, 曲边梯形的面积:

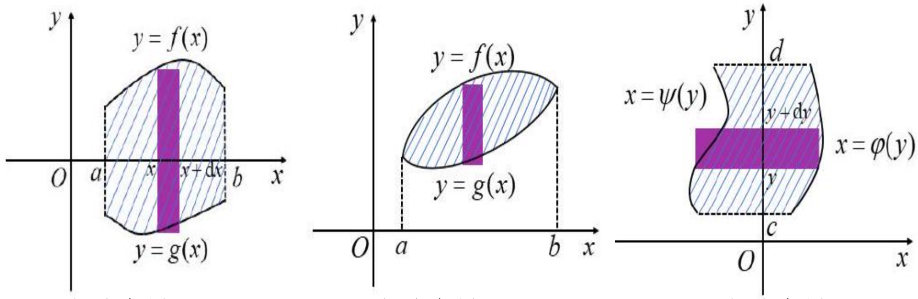
$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

2. 由曲线$y = f(x)$ ($f(x)$ 有正有负)与直线$x = a, x = b$ 所围成的平面图形面积.

取x 为积分变量, 任意$[x, x + dx] \subset [a, b]$, 面积微元: $dA = |f(x)|dx$,平面图形面积:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx.$$

3. 由曲线$y = f(x), y = g(x)(f(x) \geq g(x)$) 与直线$x = a, x = b$ 所围成的平面图形面积.



(a) 积分变量 x, case 1 (b) 积分变量 x, case 2 (c) 积分变量 y

图 6.11

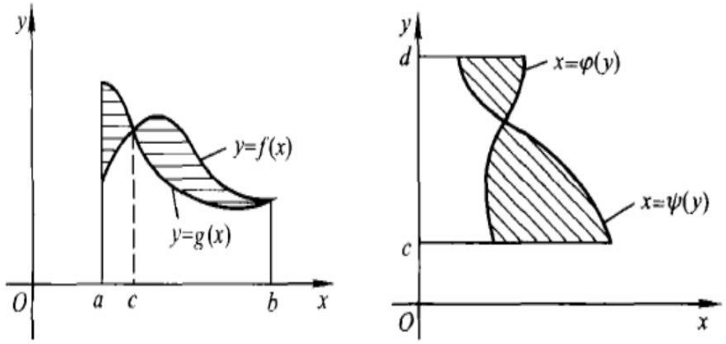
取x 为积分变量, 任意$[x, x+dx] \subset [a, b]$, 面积微元: $dA = (f(x) - g(x))dx$, 平面图形面积:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

4. 由曲线$x = \psi(y), x = \varphi(y)(\psi(y) \leq \varphi(y))$ 与直线$y = c, y = d$ 围成的平面图形面积.

取y 为积分变量, 任意$[y, y+dy] \subset [c, d]$,面积微元: $dA = (\varphi(y) - \psi(y))dy$, 曲边梯形面积:

$$A = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y))dy.$$



(a) 积分变量x, 函数无约束 (b) 积分变量y, 函数无约束

图 6.12

5. 由直线$x = a, x = b$, 曲线$y = f(x)$ 及曲线$y = g(x)$ ($f(x), g(x)$ 无大小约束) 所围的平面图形面积.

取x 为积分变量, 任意$[x, x+dx] \subset [a, b]$, 面积微元: $dA = |f(x) - g(x)|dx$,平面图形面积:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$

6. 由曲线$x = \psi(y), x = \varphi(y)$ ($\psi(y), \varphi(y)$ 无大小约束)与直线$y = c, y = d$ 围成的平面图形面积.

取y 为积分变量, 任意$[y, y+dy] \subset [c, d]$,面积微元: $dA = |\varphi(y) - \psi(y)|dy$, 曲边梯形面积:

$$A = \int_c^d |\varphi(y) - \psi(y)|dy.$$

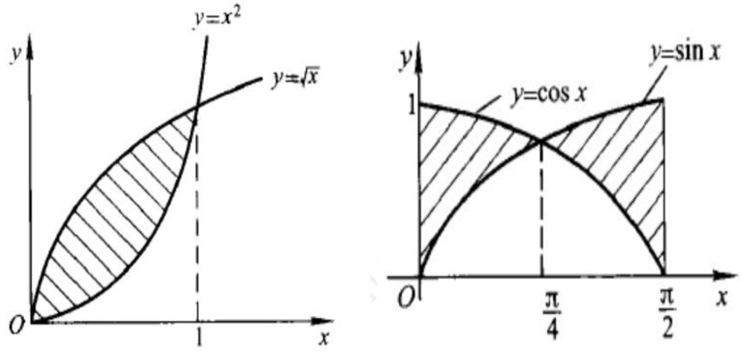


图 6.13

例 6.35　求由曲线$y = x^2, x = y^2$ 所围平面图形的面积.

解　(1) 先画出图形, 如图. (2) 求曲线交点$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$ 交点为$(0,0), (1,1)$, 积分限为0 到1 , 故

$$A = \int_0^1 \left|x^2 - \sqrt{x}\right| dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

例 6.36　求由曲线$y = \sin x, y = \cos x$ 及直线$x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成图形的面积。

解　$y = \sin x$ 与$y = \cos x$ 交点的横坐标为$\frac{\pi}{4}$. 故所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx \\ &= (\sin x + \cos x)|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

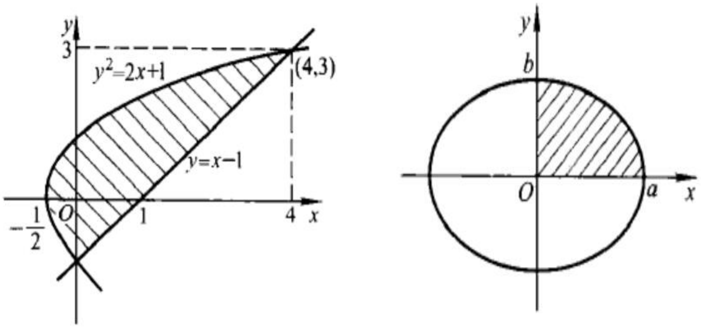


图 6.14

例 6.37 求由曲线$y^2=2x+1$ 与直线$y=x-1$ 所围成图形的面积.

解 为确定积分限, 解方程组$\begin{cases} y^2=2x+1 \\ y=x-1 \end{cases}$, 得交点$(0,-1),(4,3)$. 对$y$ 积分.

$$A=\int_{-1}^{3}\left((y+1)-\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)\right)dy=\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{2}y\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}.$$

此题如果选x 作积分变量, 必须分成两个部分, 即

$$A=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}dx+\int_{0}^{4}(\sqrt{2x+1}-(x-1))dx=\frac{16}{3}.$$

例 6.38 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1(a>0,b>0)$ 的面积.

解 所求的面积是椭圆曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

所围成的平面图形的面积. 它相当于由曲线$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 所围成的封闭图形的面积, 两曲线的交点坐标为$(-a,0)$ 和$(a,0)$. 由图形的对称性, 所求的面积为$S=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$ 令$x=a\sin t$, 则$x=0$ 时, $t=0$; $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\cos t$, $dx=a\cos t\,\mathrm{d}t$,

$$A=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4ab\frac{\pi}{4}=\pi ab.$$

6.4.1.3 立体的体积

1. 已知平行截面面积求立体的体积

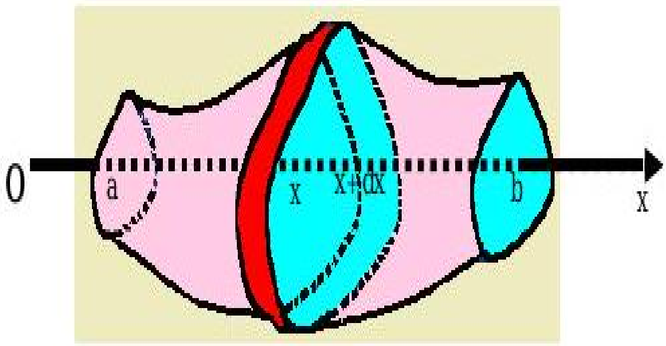


图 6.15　截面面积已知立体图形

设立体介于平面$x=a,x=b$之间, 立体内过点x且垂直于x轴的截面面积为$A(x)$, 其中$A(x)$为x的已知连续函数.

取积分变量为$x\in[a,b]$, 任取$[x,x+dx]\subset[a,b]$. 旋转体内点x处垂直于x轴的厚度为dx的切片体积, 用底面积为$A(x)$、高为dx的扁柱体近似，则体积微元: $dV=A(x)dx$, 立体体积:

$$V=\int_a^b A(x)dx.$$

例 6.39　求椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1(a>0,b>0,c>0)$的体积.

解　取x为积分变量, 则$x\in[-a,a]$; 与x轴垂直的平面截得椭球截面的椭圆(在x处)

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\le 1$$

该椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

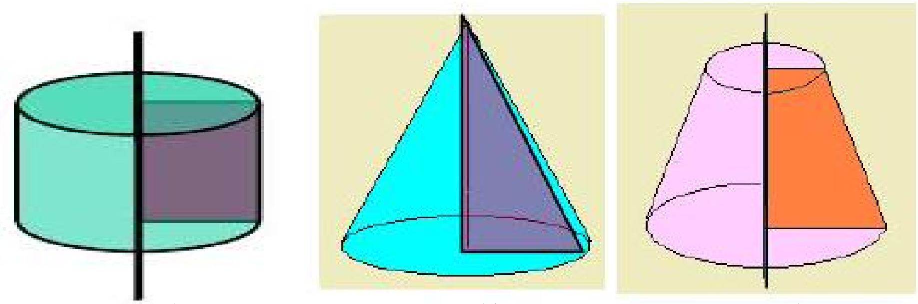
从而所求体积为

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{3}abc.$$

当$a=b=c$时，椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 变为球 $x^2+y^2+z^2\le a^2$, 因此该球体的体积为$V=\frac{4\pi}{3}a^3$.

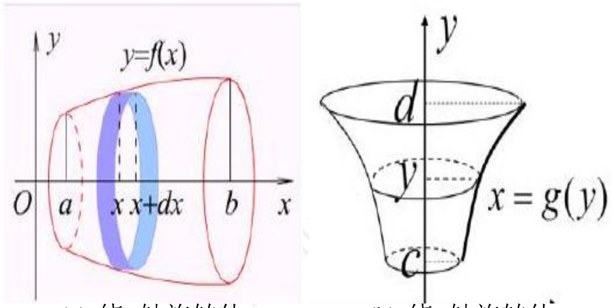
2. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形饶这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这条定直线叫做旋转轴. 常见旋转体有圆柱、圆锥、圆台.



(a) 圆柱　　(b) 圆锥　　(c) 圆台

图 6.16



(a) 绕x轴旋转体　　(b) 绕y轴旋转体

图 6.17

(1) 曲边梯形由连续曲线$y = f(x)$、直线$x = a, x = b(a < b)$ 及x 轴所围成, 计算其绕x 轴旋转一周而成的立体体积.

取积分变量为$x \in [a, b]$, 任取小区间$[x, x + dx] \subset [a, b]$. 考虑旋转体内点$x$ 处垂直于x 轴的厚度为dx 的切片体积, 以圆柱体的体积$\pi[f(x)]^2dx$ 作为切片体积的近似值, 则体积微元: $dV = \pi[f(x)]^2dx$, 旋转体的体积:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2dx.$$

(2) 计算由连续曲线$x = g(y)$、直线$y = c, y = d(c < d)$ 及y 轴所围成的平面图形, 绕y 轴旋转一周而成的立体体积.

取积分变量为$y \in [c, d]$, 任取小区间$[y, y + dy] \subset [c, d]$. 考虑旋转体内点$y$ 处垂直于y 轴的厚度为dy 的切片体积, 以圆柱体的体积$\pi[g(y)]^2dy$ 作为切片体积的近似值, 则体积微元: $dV = \pi[g(y)]^2dy$, 旋转体的体积:

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2dy.$$

(3) 由$x=a,x=b,y=f(x),y=g(x)$ (其中$f(x),g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 且满足$f(x)\geq g(x)\geq 0$) 所围成的平面图形绕x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

(4) 由$y=c,y=d,x=\psi(y),x=\varphi(y)$ (其中$\psi(y),\varphi(y)$ 在$[c,d]$ 上连续, 且满足$0\leq\psi(y)\leq\varphi(y)$)所围成的平面图形绕$y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积为:

$$V=\pi\int_c^d\left([\varphi(y)]^2-[\psi(y)]^2\right)dx$$

(5)(补充*)(柱壳法) 如果旋转体是由连续曲线$y=f(x)$ 、直线$x=a,x=b$ 及x 轴所围成的曲边梯形绕y 轴旋转一周而成的立体, 则柱壳体积$dV_y=2\pi x|f(x)|\cdot dx$ 体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx.$$

柱壳法的思路是将旋转体分成很多很薄的柱壳, 然后利用定积分将这些柱壳的体积累积起来, 得到旋转体的体积.

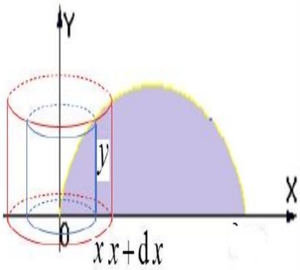


图 6.18　壳柱法

例 6.40　计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕x 轴旋转而成的椭球体的体积.

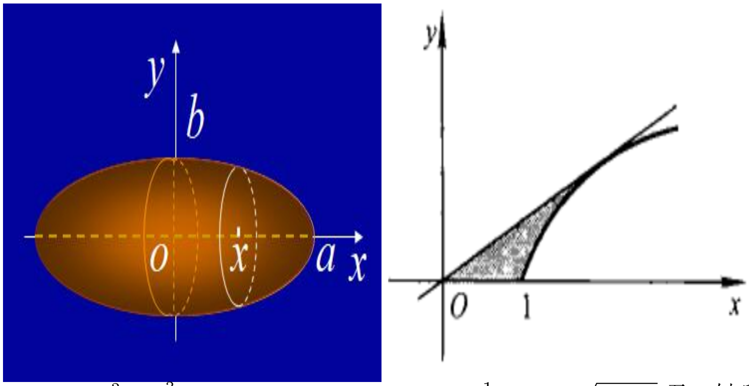
解　利用方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leq x\leq a)$$

则利用对称性

$$V=2\int_0^a\pi y^2\,\mathrm{d}x=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 6.41　求由直线$y=\frac{1}{2}x$, 曲线$y=\sqrt{x-1}$ 及x 轴所围平面图形绕x轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积.



(a) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕x 轴旋转而成的椭球体 (b) $y=\frac{1}{2}x, y=\sqrt{x-1}$ 及x 轴所围图形

图 6.19

解 由直线$y=\frac{1}{2}x$, 曲线$y=\sqrt{x-1}$ 及x 轴所围平面图形绕x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_x=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \mathrm{d}x-\pi\int_1^2(\sqrt{x-1})^2 \mathrm{d}x=\left.\frac{\pi x^3}{12}\right|_0^2-\left.\frac{\pi(x-1)^2}{2}\right|_1^2=\frac{\pi}{6}$$

由直线$y=\frac{1}{2}x$, 曲线$y=\sqrt{x-1}$ 及x 轴所围平面图形绕y 轴旋转一周所得旋转体的体积有两种方法可求:

法一: 取x 为积分变量, 则

$$V_x=2\pi\int_0^2 x\frac{1}{2}x \mathrm{d}x-2\pi\int_1^2 x\sqrt{x-1} \mathrm{d}x=\pi\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x-2\pi\int_1^2 x\sqrt{x-1} \mathrm{d}x.$$

在 $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \mathrm{d}x$ 中令 $t=\sqrt{x-1}$, 可求得$\int_1^2 x\sqrt{x-1} \mathrm{d}x=\int_0^1\left(1^2+1\right)t\cdot 2t \mathrm{d}t=\frac{16}{15}$, 因此

$$V_y=\left.\frac{\pi x^3}{3}\right|_0^2-\frac{32\pi}{15}=\frac{8\pi}{15}$$

法二: 取y 为积分变量, 则

$$V_y=\pi\int_0^1\left[\left(y^2+1\right)^2-(2y)^2\right] \mathrm{d}y=\pi\int_0^1\left(y^4-2y^2+1\right) \mathrm{d}=\frac{8\pi}{15}.$$

6.4.2 定积分的简单经济应用

已知总成本函数$C = C(q)$, 总收益函数$R = R(q)$, 由微分学可得边际成本函数$MC = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}$; 边际收益函数$MR = \frac{dR}{dq}$. 因此, 总成本函数为

$$C(q) = \int_0^q (MC)\mathrm{d}q + C_0.$$

总收益函数为

$$R(q) = \int_0^q (MR)\mathrm{d}q.$$

总利润函数为

$$L(q) = \int_0^q (MR - MC)dq - C_0.$$

其中$C_0 = C(0)$ 为固定成本(产量为0时的成本).

例 6.42　生产某产品的固定成本为50 万元, 边际成本与边际收益分别为$MC = q^2 - 14q + 111$ (单位: 万元/单位), $MR = 100 - 2q$　(单位: 万元/ 单位) 试确定厂商的最大利润.

解　先确定获得最大利润的产出水平q_0. 由极值存在的必要条件$MC = MR$, 即

$$q^2 - 14q + 111 = 100 - 2q$$

解方程可得$q_1 = 1, q_2 = 11$. 由极值存在的充分条件$\frac{\mathrm{d}(MR-MC)}{\mathrm{d}q} < 0$ 即$\frac{d(MR)}{dq} - \frac{d(MC)}{dq} = -2 - 2q + 14 < 0$ 显然$q_2 = 11$ 满足充分条件. 即获得最大利润的产出水平是$q_0 = 11$. 最大利润为

$$L = \int_0^{q_0} (MR - MC)\mathrm{d}q - C_0 = \int_0^{11} \left((100 - 2q) - \left(q^2 - 14q + 111\right)\right)\mathrm{d}q - 50 = \frac{334}{3} \quad (\text{万元.})$$

§ 6.5 反常积分初步

我们前面讨论的定积分, 都是有界函数在有限区间上的积分, 但在实际应用和理论研究中, 常常会遇到积分区间是无限的, 或者被积函数无界的情形, 这时需对定积分概念加以推广. 对无限区间上的积分称为**无穷限积分**, 对无界函数的积分称为**瑕积分**, 统称为**反常积分**或**广义积分**.

6.5.1 无穷限反常积分

首先我们给出无穷限反常积分的定义.

定义 6.3　无穷限反常积分

(1)设函数$f(x)$ 在$[a,+\infty]$ 上有定义，且在$[a,b]$ $(\forall b>a)$ 上可积. 如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数$f(x)$ 在无穷区间$[a,+\infty)$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

(2) 设函数$f(x)$ 在无穷区间$(-\infty,b]$ 上有定义, 且在$[a,b]$ $(\forall a<b)$ 上可积. 如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数$f(x)$ 在无穷区间$(-\infty,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

反常积分存在也称反常积分收敛, 如果极限不存在, 则称反常积分不存在或发散.

(3) 设$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 若对任意实数c, 积分

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 则称无穷限积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

当上式右端两个积分中, 只要有一个积分发散, 则称反常积分积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义给出了求解无穷限反常积分的方法：(1) 求常义积分 $\int_a^b f(x)dx$; (2) 求极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

例 6.43 求$I=\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

解

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^b e^{-x^2}d\left(-x^2\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-b^2}-1\right)=\frac{1}{2}.$$

例 6.44 讨论广义积分$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性(p 为实数)(p 积分)

解 当$p\neq1$ 时

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}\big|_1^b}{-p+1}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right)=\begin{cases}+\infty & 1-p>0\\ \frac{1}{p-1} & 1-p<0\end{cases}$$

当$p=1$时$I=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln|x||_1^b=+\infty$积分发散. 因此, 当$p>1$时, 反常积分收敛, 其值等于$\frac{1}{p-1}$; 当$p\le 1$时, 反常积分发散.

无穷限反常积分也有类似常义积分的牛顿–莱布尼茨公式. 设$F(x)$为$f(x)$的一个原函数, 若$\lim_{x\to+\infty}F(x)$存在, 记

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x),$$

则

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}F(x)|_a^b=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a)=F(+\infty)-F(a).$$

进而得到类似于牛顿–莱布尼茨公式的计算形式:

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例 6.45 计算反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\quad(a>0)$.

解 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_a^{+\infty}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$.

例 6.46 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

例 6.47 计算反常积分$\int_{-\infty}^{0}\cos x dx$.

解 $\int_{-\infty}^{0}\cos x dx=\sin x|_{-\infty}^{0}=0-\lim_{x\to-\infty}\sin x$, 此极限不存在, 故反常积分$\int_{-\infty}^{0}\cos x dx$发散.

反常积分的计算也有与定积分相类似的分部积分法和换元积分法.

例 6.48 计算反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$.

解 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\int_2^{+\infty}(\ln x)^{-2}d(\ln x)=(-\ln x)^{-1}\Big|_2^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\ln x)^{-1}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$.

例 6.49 计算反常积分$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

解 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -\left(xe^{-x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1.$

例 6.50 判断$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ dx}{1+x^2} = 0$ 对吗?

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散! 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用对称性的性质否则会出现错误.

上面无穷限积分的敛散性主要是根据被积函数原函数在$x \to +\infty(x \to -\infty)$ 时的极限存在性判断. 然而, 一方面当原函数不能用初等函数表示时这种方法就失效了; 另一方面关于无穷限积分我们往往只需要知道它的敛散性, 并不需要知道它收敛时的积分值. 因此我们介绍一些简单的由被积函数本身来判别无穷限积分敛散性的方法.

由无穷限积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的定义我们看出,无穷限积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是变限积分$\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在$x \to +\infty$ 时的极限，因此它有如下一些性质:

性质 6.4 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(b > a)$ 具有相同的敛散性.

性质 6.5 $\int_a^{+\infty} Af(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(A \neq 0$ 为常数) 具有相同的敛散性.

性质 6.6 设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则$\int_a^{+\infty}[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty}[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

我们先讨论被积函数$f(x)$ 在积分区间不变号的情况. 首先先介绍一个与数列极限的存在性相类似的结论.

引理 6.1 若$f(x)$ 在区间$[a, +\infty)$ 上单调递增(减), 且有上(下) 界, 则极限$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在, 且

$$f(x) \leqslant A(f(x) \geqslant A), x \in [a, +\infty).$$

注意到, 当$f(x) \leqslant 0, x \in [a, +\infty)$ 时, $-f(x) \geqslant 0, x \in [a, +\infty)$, 而$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} -f(x)\mathrm{d}x$的敛散性相同. 因此我们只讨论$f(x)$ 在$[a, +\infty)$ 上是非负的情形.

定理 6.8 比较判别法

若$f(x),g(x)$在任何有限区间$[a,b]$上可积, 且$x\to+\infty$时, $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, 即存在$M>0$,

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),\forall x>M.$$

那么当$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛时, $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛; 当$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散时, $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散.

证明 注意到$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$具有相同的敛散性, 因此我们对积分限为"$\int_M^{+\infty}$"来证明定理的结论. 由于$\int_M^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_M^b g(x)\mathrm{d}x$是b的单增函数, 当$\int_M^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛时, 由引理可知

$$F(b)=\int_M^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_M^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_M^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

从而再次由引理知道极限

$$\lim_{b\to+\infty}F(b)=\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 故$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛; 当$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散时, $\int_N^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$必发散, 若不然由刚才所证可得$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛, 产生矛盾. 由函数极限的保号性及上述定理不难得到

定理 6.9 比较判别法的极限形式

设$f(x),g(x)$为非负函数,且在任何有限区间$[a,b]$上可积, 若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

那么有如下结论成立:

(1) 当$0<l<+\infty$时,积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时, 若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛, 则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(3) 当$l=+\infty$时,若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散, 则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

在利用比较判别法及其极限形式判断反常积分敛散性时，最常用的比较函数为$g(x)=\frac{1}{x^p}$. 我们知道

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}\text{收敛} & p>1,\\ \text{发散} & p\leq 1.\end{cases}}$$

由此可得

定理 6.10 Cauchy 判别法

设$f(x)\geqslant 0, x\in[a,+\infty)$, 且$f(x)$ 在任何有限区间$[a,b]$ 上可积, 如果

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=l$$

则有下列结论成立:

(1) 当$0\leqslant l<+\infty$ 时, 若$p>1$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当$0<l\leqslant+\infty$ 时, 若$p\leqslant 1$, 则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 6.51 判断下面无穷限反常积分的敛散性.

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$; (3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$; (5) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$; (6) $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 由于$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 与$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性, 且$x\geqslant 1$ 时, $x^2\geqslant x$, 从而$\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant\mathrm{e}^{-x}$,

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

故由比值判别法知$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 因此$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$$

且$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而由比值判别法的极限形式知$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

(3) $\because 0\leq\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ 由比较判别法可知原积分收敛.

(4) 当$x\geq 1$ 时,利用

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}=\frac{1}{x+1}$$

可知原积分发散.

(5) $\because \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$ 根据柯西判别法, 该积分收敛.

(6) $\because \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$ 根据柯西判别法, 该积分发散.

注 6.14 在利用比较判别法的极限形式或柯西判别法判别无穷限积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性时, 通常的关键是利用无穷小量和无穷大量的等价关系找出$x\to+\infty$ 时与$f(x)$ 等价的幂函数$\frac{A}{x^p}$(A 是常数).

注 6.15 柯西判别法是比较判别法的极限形式的一个特例. 直接用比较判别法的极限形式，不用记柯西判别法的结论.

如果被积函数在积分区间变号, 则可用下面定理判断敛散性.

定理 6.11 绝对收敛必收敛

设$f(x)$ 在任何有限区间$[a,b]$ 上可积, 且$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 令$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$, 则$0\le\varphi(x)\le|f(x)|$, $\because\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, $\therefore\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 而

$$f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

可见反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定义 6.4 绝对收敛与条件收敛

设反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,

若$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

若$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

例 6.52 判断反常积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x(a,b$ 为常数, $a>0)$ 的敛散性.

解 因$|e^{-ax}\sin bx|\le e^{-ax}$, 而$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 根据比较判别法知$\int_a^{+\infty}|e^{-ax}\sin bx|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 故积分收敛(绝对收敛).

6.5.2 瑕积分

瑕积分就是无界函数的反常积分.

定义 6.5 瑕积分

(1)设$f(x)$ 在$(a,b]$ 上有定义, 并且对任意$\varepsilon>0(0<\varepsilon<b-a)$, $f(x)$ 在$[a+\varepsilon,b]$ 上可积, 并且函数$f(x)$ 在$x\to a+$ 时无界(此时称a 为瑕点), 若$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ 存在, 则称极限为$f(x)$

在$[a,b]$ 上的瑕积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx (= \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx).$$

(2) 设$f(x)$ 在$[a,b)$ 上有定义, 并且对任意$\varepsilon>0(0<\varepsilon<b-a)$, $f(x)$ 在$[a,b-\varepsilon]$ 上可积, 并且函数$f(x)$ 在$x\to b^-$ 时无界(此时称b 为瑕点), 若$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在, 则称极限为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的瑕积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx (= \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx).$$

此时也称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 存在或收敛. 若极限不存在, 则称瑕积分不存在或发散。

(3) 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上除$c\ (a<c<b)$点外有定义, 函数$f(x)$ 在$x\to c$ 时无界(此时称c 为瑕点), 如果反常积分

$$\int_a^c f(x)dx \text{ 和 } \int_c^b f(x)dx$$

都收敛, 则称上述瑕积分之和为函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的瑕积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

这时称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 否则称反瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例 6.53 求$I=\int_0^1 \ln x dx$

解

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(x\ln x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x}{x}dx\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon-(1-\varepsilon)) = -1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\ln\varepsilon)0\cdot\infty$$
$$= -1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}}\right) = -1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}}\right) = -1.$$

例 6.54 证明$I=\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$ 当$0<q<1$ 时收敛, $q\geq 1$ 时发散。(q 积分)

解 当$q\neq 1$ 时

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^q}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{x^{1-q}|_\varepsilon^1}{-q+1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{\varepsilon^{1-q}}{1-q}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & 1-q>0 \\ \infty \text{ 发散} & 1-q<0 \end{cases}$$

当$q=1$ 时$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln x|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-\ln\varepsilon)$ (发散).

综上可知, 该反常积分当$q<1$ 收敛, 当$q\geq1$ 时发散. 一般地, 反常积分$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}dx$ 当$q<1$ 时收敛, 当$q\geq1$ 时发散.

例 6.55

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\quad(x=1\text{ 与}x=-1\text{ 都为瑕点})=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(1-\varepsilon)-\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(-1+\varepsilon)=2\arcsin1=\pi.$$

例 6.56 证明$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\pi$.

解

易知$x=0,x=1$ 都是函数$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ 的瑕点,

$$\therefore I=\int_0^b\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx+\int_b^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^b\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_b^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=I_1+I_2^b$$

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^b\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}d\left(\frac{1}{2}-x\right)=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin2\left(\frac{1}{2}-x\right)\Big|_\varepsilon^b$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0^+}[\arcsin(1-2b)-\arcsin(1-2\varepsilon)]=\frac{\pi}{2}-\arcsin(1-2b).$$

同理 $I_2=\frac{\pi}{2}+\arcsin(1-2b)$.

设$F(x)$ 是$f(x)$ 的原函数, 则也有类似牛顿–莱布尼兹公式的的计算表达式:

若b 为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F\left(b^-\right)-F(a).$$

若a 为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F\left(a^+\right).$$

若a, b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F\left(b^-\right) - F\left(a^+\right).$$

若瑕点$c \in (a, b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F\left(c^+\right) + F\left(c^-\right) - F(a).$$

计算瑕积分时，可以直接按照常义积分的计算过程处理，只需把瑕点处的结果理解为对应左右极限即可.

例 6.57 计算反常积分$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

解:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)|_1^2 = \ln(\ln 2) - \lim_{t\to 1^+}[-\ln(\ln(t))] = \infty.$$

故原反常积分发散.

与无穷限积分类似, 瑕积分也有相应的敛散性性质及判别法,下面我们只讨论区间左端点为瑕点的情形, 其他情形可以类推.

定理 6.12 比较判别法

设函数$f(x), g(x)$ 在任何区间$[a+\varepsilon, b], \varepsilon \in (0, b-a)$ 上可积,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$$

且$x \in (a, b]$ 时,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

那么若瑕积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 若瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则瑕积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 6.13 比较判别法的极限形式

设$f(x), g(x)$ 在$(a, b]$ 上为非负函数, 且在任何区间$[a+\varepsilon, b], \varepsilon \in (0, b-a)$ 上可积,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty, \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

那么有下列结论成立:

(1) 当$0 < l < +\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性;

(2) 当$l = 0$ 时,若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

因为

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx \begin{cases} \text{发散} & q \geq 1, \\ \text{收敛} & q < 1. \end{cases}}$$

当取 $g(x)=\frac{1}{(x-a)^q}$ 时,有下面的判别法.

定理 6.14　柯西判别法

设 $f(x)$ 在任何区间 $[a+\varepsilon, b], \varepsilon \in (0, b-a)$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=l$$

那么

(1) 当 $0 \leqslant l < +\infty$ 时, 若 $q<1$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leqslant +\infty$ 时,若 $q \geqslant 1$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 6.58　判别瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　当 $p>0$ 时, $x=0$ 可能是瑕点, 注意到 $x\to 0^+$ 时,

$$\ln(1+x)\sim x,\ \frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$$

由 $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x$ 当 $p-1 \geqslant 1$ 时发散, 当 $p-1<1$ 时收敛, 可知 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 当 $p<2$ 时收敛, 当 $p \geqslant 2$ 时发散.

例 6.59　判别反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的敛散性.

解　此处 $x=1$ 为瑕点, 利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$$

根据柯西判别法, 所给积分发散.

瑕积分与无穷限积分一样, 也有条件收敛与绝对收敛之分.

例 6.60　判别反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　此处 $x=0$ 为瑕点, 因 $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}}\ln x=0$, 故对充分小的 x, 有 $\left|x^{\frac{1}{4}}\ln x\right|<1$, 从而

$$\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}=\frac{\left|x^{\frac{1}{4}}\ln x\right|}{x^{\frac{1}{4}}}<\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

据比较判别法, 所给积分绝对收敛.

6.5.3 Γ 函数和B 函数

1. Γ 函数反常积分$\int_0^{+\alpha} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (其中α 称为参变量) 作为参变量α 的函数就称为Γ 函数, 记为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

$\Gamma(\alpha)$ 的定义域(使得反常积分$\int_0^{+\alpha} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛的α 取值全体) 为$\alpha>0$. Γ 函数是概率论中的一个重要函数, 有下面几个性质:

(1) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$; (2) $\Gamma(1)=1$; (3) $\Gamma(n+1)=n!$(n 为自然数); (4) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

2. B 函数反常积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ 作为参变量p,q 的函数就称为B 函数,记为

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

$B(p,q)$ 的定义域是$p>0$ 且$q>0$. B 函数与Γ 函数密切相关, 它具有如下一些性质:

(1) $B(p,q)=B(q,p)$; (2) $B(p+1,q+1)=\frac{q}{p+q+1}B(p+1,q)$; (3) $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

例 6.61 (1) $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}=\frac{5!}{2\cdot 2!}=30,\quad \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)}=\frac{3}{4}$.

(2) $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$.

(3) $\int_0^{+\infty} x^4e^{-\lambda x}dx \overset{令\lambda x=t}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^4 e^{-t}dt=\frac{1}{\lambda^5}\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt=\frac{1}{\lambda^5}\Gamma(5)=\frac{1}{\lambda^5}\cdot 4!$.

(4) $\int_0^{+\infty} x^4e^{-x^2}dx \overset{令x^2=t}{=} \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{8}\sqrt{\pi}$.