第4章　中值定理和导数的应用

本章主要讨论用导数和微分研究函数性质的理论基础—微分中值定理和泰勒公式。并利用这些定理研究函数性质及曲线性态以及利用导数解决实际问题.

§ 4.1　微分中值定理

用导数研究函数的性质,就是考察函数的一些性质如何通过导数表现出来, 这样就必须建立函数和它的导数之间的关系式。这里一共有四个基本定理: Fermat 定理、Rolle 定理、Lagrange 中值定理和Cauchy 中值定理. 实际上后三个是一个比一个更一般的中值定理. 中值定理名称的由来是因为在定理中出现了“中值”ξ. 虽然我们对中值ξ 缺乏定量的了解, 但一般来说这并不影响中值定理的广泛使用.

4.1.1　罗尔(Rolle) 中值定理

首先我们给出极值的定义.

定义 4.1　极值

设$f(x)$ 在x_0 的某一邻域$O_\delta(x_0)$ 内有定义, 若

$$f(x) \geqslant f(x_0)\,(f(x) \leqslant f(x_0))\,, x \in O_\delta(x_0)$$

则称$f(x_0)$ 是$f(x)$ 的一个极小值(极大值), 这时称x_0 是$f(x)$ 的一个极小值点(极大值点). 极小值和极大值统称为极值.

观察图4.1 可以发现在曲线弧的最高点C 处或最低点D 处(极值点), 曲线有水平的切线. 如果记点C 的横坐标为x_0, 那么就有$f'(x_0)=0$.

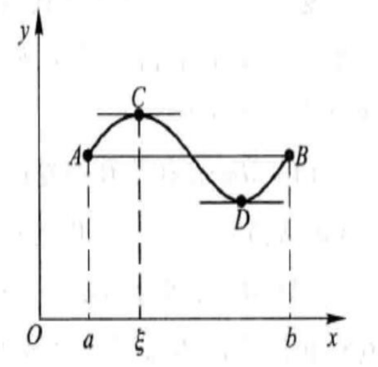


图 4.1 函数的极值

定理 4.1 费马(Fermat) 定理

设$y=f(x)$ 在x_0 点取得极值, 若$f(x)$ 在x_0 点可导, 则$f'(x_0)=0$.

证明 若$f'(x_0)\neq 0$, 不妨设$f'(x_0)>0$, 则存在x_0 的某一邻域$O_\delta(x_0)$, 在其中有不等式

$$f(x)>f(x_0), x\in(x_0,x_0+\delta)$$

$$f(x)<f(x_0), x\in(x_0-\delta,x_0)$$

成立, 这与$f(x_0)$ 是$f(x)$ 的极值矛盾.

习惯上我们称使得$f'(x)=0$ 的x 为$f(x)$ 的**驻点**.

定理 4.2 罗尔中值定理

设$f(x)$ (1) 在$[a,b]$ 上连续, (2) 在(a,b) 内可导, (3)若$f(a)=f(b)$, 则必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$.

证明 由闭区间上连续函数的最值定理知道, $f(x)$ 在$[a,b]$ 上必有最大值M 和最小值m.

当$M=m$ 时, $f(x)$ 在$[a,b]$ 上是常数函数, 结论显然正确;

当$M>m$ 时, 由$f(a)=f(b)$ 知道, 最大值M 和最小值m 至少有一个是在开区间(a,b) 内某一点ξ 处取得,这时$f(\xi)$ 是$f(x)$ 的一个极值. 由费马定理得$f'(\xi)=0$.

注 4.1 定理中的三个条件缺一不可, 否则定理不一定成立, 即指定理中的条件是充分的, 但非

必要. 如: $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 不满足条件(1),满足条件(2)和(3); $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ 不满足条件(2),满足条件(1) 和(3); $f(x)=x, x\in[0,1]$ 不满足条件(3),满足条件(1) 和(2), 以上三个函数在相应开区间内都找不到一点能使$f'(x)=0$.

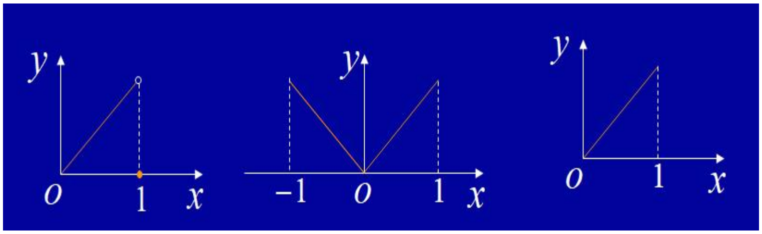


图 4.2　罗尔定理条件不满足情形

注 4.2　罗尔定理中仅给出了ξ 点的存在性但没有唯一性. 如$y=\sin x, x\in[0,2\pi]$, 显然$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

注 4.3　定理仅给出了ξ 的一个大致位置: $\xi\in(a,b)$, 并没有给出ξ 的具体位置.

例 4.1　证明方程$\sin x+x\cos x=0$ 在$(0,\pi)$ 内必有实根.

证明　由于$\sin x+x\cos x$ 是$x\sin x$ 的导函数, 因此我们考虑函数

$$F(x)=x\sin x, x\in[0,\pi].$$

易知$F(x)$ 在$[0,\pi]$ 上连续可导（即$F'(x)$ 在$[0,\pi]$ 上连续), 且$F(0)=F(\pi)=0$, 因此由罗尔中值定理可知, 存在$\xi\in(0,\pi)$, 使得

$$F'(\xi)=\sin\xi+\xi\cos\xi=0.$$

例 4.2　设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 在$(0,1)$ 内可导, 且$f(1)=0$, 试证: 在$(0,1)$ 内至少存在一点ξ, 使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明　分析: $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0\xrightarrow{\xi\to x}F'(x)=xf'(x)+f(x)\longrightarrow F(x)=xf(x)$.

令$F(x)=xf(x)$, 由题意可知: $F(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 在$(0,1)$ 内可导, 又

$$F(1)=f(1)=0,\quad F(0)=0$$

由罗尔定理可知: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得$F'(\xi)=0$, 即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

例 4.3 证明方程$x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1 的正实根.

证明 1) 存在性设$f(x)=x^5-5x+1$, 则$f(x)$ 在$[0,1]$ 连续, 且$f(0)=1, f(1)=-3$. 由介值定理知存在$x_0\in(0,1)$, 使$f\left(x_0\right)=0$, 即方程有小于1 的正根x_0.

2) 唯一性, 假设另有$x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使$f\left(x_1\right)=0, \because f(x)$ 在以x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件,因此在x_0, x_1 之间至少存在一点ξ, 使$f'(\xi)=0$. 但$f'(x)=5\left(x^4-1\right)<0, x\in(0,1)$, 矛盾, 故假设不真!

例 4.4 设$f(x)$ 在(a,b) 内二阶可导, 若$f''(x)>0, x\in(a,b)$, 则$f(x)$ 在(a, b) 内至多有一个驻点.

证明 若$f(x)$ 在(a,b) 内有两个驻点$x_1, x_2, x_1<x_2$, 则

$$f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=0.$$

由罗尔中值定理可得,存在一点$\xi\in\left(x_1, x_2\right)\subset(a,b)$, 使得

$$f''(\xi)=0.$$

这与条件$f''(x)>0, x\in(a,b)$ 矛盾.

4.1.2 拉格朗日(Lagrange) 中值定理

罗尔中值定理结论是内部某点的切线水平，这个结论是依赖于坐标系的选取，但是函数图像的形状是不依赖于坐标系的选取的。实际上，切线水平就是跟a, b 两点连线的割线平行：

由图4.3 可看出, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 为弦AB 的斜率, 而$f'(\xi)$ 为曲线在点C 处的切线的斜率. 因此拉格朗日中值定理的几何意义是: 如果连续曲线$y=f(x)$ 的弧$\overset{\frown}{AB}$ 上除端点外处处具有不垂直于x 轴的切线,那么这弧上至少有一点C, 使曲线在点C 处的切线平行于弦AB.

定理 4.3 拉格朗日中值定理

设$f(x)$ (1)在$[a,b]$ 上连续, (2) 在(a,b) 内可导.则必存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明 分析: 条件中与罗尔定理相差$f(a)=f(b)$. 弦AB 方程为$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. 曲线$f(x)$ 减去弦AB, 所得曲线a, b 两端点的函数值相等.

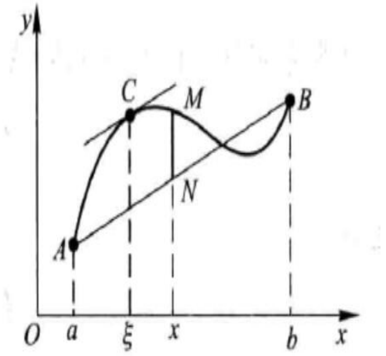


图 4.3　拉格朗日中值定理几何意义

因此考虑辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

($y=F(x)$ 相当于将$y=f(x)$ 进行旋转所得曲线). 容易验证$F(x)$ 在$[a,b]$ 上满足罗尔中值定理的条件, 由罗尔中值定理可得, 必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注 4.4　设$f(x)$ 在(a,b) 内可导, $x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$, 则有

$$f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0+\theta\Delta x\right)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1).$$

也可写成

$$\Delta y=f'\left(x_0+\theta\Delta x\right)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1),$$

此即是增量Δy 的精确表达式. 拉格朗日中值公式又称有限增量公式. 拉格朗日中值定理又称有限增量定理.

推论 4.1　若函数$f(x)$ 在区间I 上满足$f'(x)\equiv 0$, 则$f(x)$ 在I 上必为常数.

证明　在I 上任取两点$x_1, x_2\ (x_1<x_2)$, 在$[x_1,x_2]$ 上用拉日中值公式, 得

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'(\xi)\left(x_2-x_1\right)=0\quad\left(x_1<\xi<x_2\right)$$

$$\therefore\quad f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)$$

由x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$ 在I 上为常数.

由上述推论我们还可以得到: 若$f'(x) = g'(x), x \in (a, b)$, 则

$$f(x) \equiv g(x) + C, x \in (a, b),$$

这里C 是一个确定的常数.

例 4.5 证明等式$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$.

证明 设$f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在$(-1, 1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知$f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ (常数) 令$x = 0$, 得$C = \frac{\pi}{2}$. 又$f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域$[-1, 1]$ 上成立. 经验: 欲证$x \in I$ 时$f(x) = C_0$, 只需证在I 上$f'(x) \equiv 0$, 且$\exists x_0 \in I$, 使$f(x_0) = C_0$.

同理我们有$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

例 4.6 证明不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

对一切$x > 0$ 成立.

证明 由于$f(x) = \ln(1+x)$ 在$[0, +\infty)$ 上连续可导, 对任何$x > 0$, 在$[0,, x\ ]$ 上由微分中值公式可得

$$f(x) - f(0) = f'(\theta x)x, 0 < \theta < 1$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}, 0 < \theta < 1$$

由于

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\theta x} < x$$

因此$x > 0$ 时

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\theta x} = \ln(1+x) < x$$

例 4.7　设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 内可导, 且$f'(x)>0, x\in(a,b)$, 则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单增.

证明　任取$x_1,x_3\in[a,b]$, 不妨设$x_1<x_2$, 则

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'(\xi)\left(x_2-x_1\right), x_1<\xi<x_2$$

由于$f'(x)>0, x\in(a,b)$, 因此$f'(\xi)>0$, 从而

$$f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$$

由x_1,x_2 的任意性知道, $f(x)$ 在$[a,b]$.上严格单增.

类似地可以证明: 若$f'(x)<0$, 则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单减.

4.1.3 柯西(Cauchy) 中值定理

上面已经指出,如果连续曲线弧$\overset{\frown}{AB}$ 上除端点外处处具有不垂直于横轴的切线,那么这段弧上至少有一点C, 使曲线在点C 处的切线平行于弦AB. 设$\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), & (a\leqslant t\leqslant b) \\ y=\psi(t) & \end{cases}$$

表示, 其中t 为参数, 则曲线上点(x,y) 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

弦AB 的斜率为

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

假定点C 对应于参数$t=\xi$, 那么曲线上点C 处的切线平行于弦AB, 可表示为

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

定理 4.4　柯西中值定理

设$f(x), g(x)$ (1) 在$[a,b]$ 上连续, (2)在(a,b) 内可导, 且(3) $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$, 则必存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明 证明首先由微分中值公式知道, 若$g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$, 则

$$g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a)\neq 0, a<\eta<b$$

其次考虑辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

则$F(x)$ 在$[a,b]$ 上满足罗尔中值定理的条件,由罗尔中值定理可得, 必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$F''(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$$

由于$g'(\xi)\neq 0$, 我们得到

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

注 4.5 柯西定理的下述证明不正确:

$$\left.\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a), \xi\in(a,b) \\ g(b)-g(a) &= g'(\xi)(b-a), \xi\in(a,b) \end{aligned}\right\} \text{两个}\xi\text{ 不一样}$$

上面两式相比即得结论. 错!

例 4.8 设函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 内可导, 且$0<a<b$, 证明: 至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证明 分析: $\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}$.

令$g(x)=\frac{1}{x}$, 则$f(x)=\ln x, g(x)$ 在$[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件, 所以在(a,b) 内至少存在一点ξ, 有$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}=\xi f'(\xi)$, 即$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

例 4.9 设函数$f(x)$ 在区间$[0,1]$ 上连续, 在$(0,1)$ 内可导, 证明: 至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

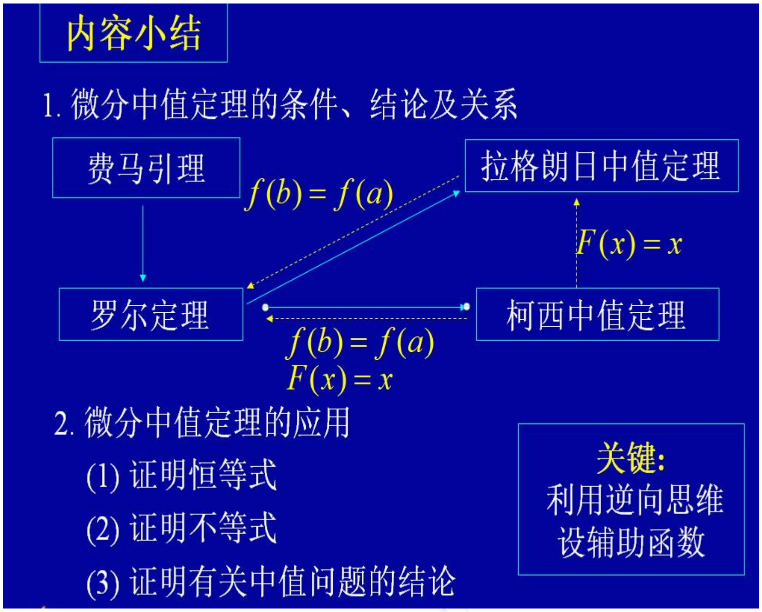


图 4.4　中值定理小结

证明　分析: 结论可变形为$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\Big|_{x=\xi}$.

设$g(x)=x^2$, 则$f(x),g(x)$ 在$[0,1]$ 上满足柯西中值定理的条件, 所以在$(0,1)$ 内至少存在一点ξ, 有$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$ 即$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

§ 4.2 泰勒公式

4.2.1 泰勒中值定理

由微分在近似计算中的应用可知, 当函数$f(x)$ 在x_0 处可导, 且$f'(x_0) \neq 0, |x-x_0|$ 很小时, 有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

上式右端是一个一次多项式函数, 将它记作$P_1(x)$, 即

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

易知$P_1(x)$ 满足: $P_1(x_0) = f(x_0), P_1'(x_0) = f'(x_0)$, 且$f(x) - P_1(x) = o(x-x_0)$, 即用一次多项式$P_1(x)$ 来近似代替$f(x)$ 时, 其误差是比$(x-x_0)$ 高阶的无穷小量.

需要解决的问题: (1) 如何提高近似精度; (2) 如何估计误差.

我们考虑是否可以用$(x-x_0)$ 的n 次多项式$P_n(x)$ 来更精确地近似代替$f(x)$, 使其误差是比$(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小量呢?

设n 次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \tag{4.1}$$

它满足: (1) $P_n(x)$ 近似表达$f(x)$; (2) $P_n(x_0) = f(x_0)$; (3) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)(k = 1, 2, \cdots, n)$,

要确定其系数$a_k(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$. 因此对式(4.1) 连续求一阶、二阶直至$n$ 阶导数, 有:

$$\begin{aligned}
&P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} \\
&P_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \\
&\quad \cdots\cdots \\
&P_n^{(n)}(x) = n!a_n
\end{aligned} \tag{4.2}$$

在式(4.1) 与式(4.2) 中, 令$x = x_0$, 得

$$P_n(x_0) = a_0, P_n'(x_0) = a_1, P_n''(x_0) = 2!a_2, \cdots, P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

所以

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0), \cdots, a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)$$

因此, 当函数$f(x)$ 在x_0 处有n 阶导数时, 满足条件的n 次多项式$P_n(x)$ 是存在的, 为

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称$P_n(x)$ 为函数$f(x)$ 在x_0 处的n 阶泰勒(Taylor) 多项式, 记$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为$P_n(x)$ 近似表达$f(x)$ 时的误差为$R_n(x)$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

称式(4.3) 为函数$f(x)$ 按$x - x_0$ 的幂展开的n 阶泰勒公式, 其中的$R_n(x)$ 称为余项.

误差$R_n(x)$ 的估计由下面的泰勒中值定理给出(与课本描述略有出入).

定理 4.5 泰勒中值定理

设函数$f(x)$ 在含有x_0 的某个开区间(a,b) 内具有直到$n+1$ 阶的导数, 则$\forall\, x \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 这里$\xi$ 是介于x_0 与x 之间的某个值.

证明 设$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, 只需证$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 介于x_0 和x 之间). 由题设及多项式函数的性质可知, $R_n(x)$ 在(a,b) 内具有直到$(n+1)$ 阶导数, 由于

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\,(k = 0, 1, 2, \cdots n)$$

得

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

下面对函数$R_n(x)$ 及$(x-x_0)^{n+1}$ 在以x_0, x 为端点的区间上, 连续应用柯西中值定理$(n+1)$ 次, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)\cdot(\xi_1-x_0)^n}\ (\xi_1 \text{ 介于} x_0 \text{ 与} x \text{ 之间})$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)\cdot[(\xi_1-x_0)^n-0]} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)\cdot n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\ (\xi_2 \text{ 介于} x_0 \text{ 与} x \text{ 之间}) = \cdots\cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)n\cdots 2\,[(\xi_n-x_0)-0]} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中ξ 介于x_0 与ξ_n 之间, 因而也介于x_0 与x 之间, 所以$R_n(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

又 $R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)\quad\left(\text{因为} P_n^{(n+1)}(\xi)=0\right)$,

所以$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

称下式为函数$f(x)$ 按$x-x_0$ 的幂展开的n 阶泰勒公式, 称$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日型余项.

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

特殊地, 取$x_0=0$, 可得$f(x)$ 按x 的幂展开的n 阶泰勒公式:

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)}$$

称上式为函数$f(x)$ 的带拉格朗日型余项的n 阶麦克劳林(Maclaurin) 公式.

注 4.6 若取$n=0$, 泰勒公式成为拉格朗日中值公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\ (\xi \text{ 介于} x_0 \text{ 与} x \text{ 之间})$$

注 4.7 利用泰勒中值定理, 对任意的$x\in(a,b)$, 可以用n 次泰勒多项式函数$P_n(x)$ 逼近函数$f(x)$, 产生的误差是$|R_n(x)|$, 如果对取定的n, 都有$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$, 则有误差估计式:

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

故这时有$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$, 由此可知, 当$x\to x_0$ 时, 误差$|R_n(x)|$ 是比$(x-x_0)^n$ 高阶

的无穷小, 即

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right).$$

当不需要精确表达余项时, n 阶泰勒公式可写成

$$\boxed{f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left((x-x_0)^n\right)}$$

称上式为函数$f(x)$ 在x_0 处的带佩亚诺(Peano) 型余项的n 阶泰勒公式. 特殊地, 取$x_0=0$ 时, 得

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left((x-x_0)^n\right)}$$

称上式为函数$f(x)$ 的带佩亚诺型余项的n 阶麦克劳林(Madaurin) 公式.

4.2.2 几个初等函数的麦克劳林公式

例 4.10 写出函数$f(x)=e^x$ 带拉格朗日型余项的n 阶麦克劳林公式, 并计算e 的近似值, 使误差小于10^{-7}.

解 因为

$$f^{(k)}(x)=e^x(k=0,1,2,\cdots,n+1)$$

所以

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

因此得e^x 带拉格朗日型余项的麦克劳林公式

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)}$$

令$x=1$, 得$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}(0<\theta<1)$,

误差$R_n=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$ (因为$e^\theta<e<3$), 由于当$n=9$ 时, $\frac{3}{(n+1)!}=0.0000008>10^{-7}$, 当$n=10$ 时, $\frac{3}{(n+1)!}=0.000000075<10^{-7}$,

因此取$n=10$, 得$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}=2.7182818$, 误差$R_n(x)\le\frac{3}{11!}<10^{-7}$.

注 4.8 利用e^x的泰勒展开式可以证明e为无理数.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

两边同乘n!

$$n!e = \text{整数} + \frac{e^\theta}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设e为有理数$\frac{p}{q}$(p, q为正整数), 则当$n \geq q$时, 等式左边为整数; 当$n \geq 2$时, 等式右边不可能为整数. 矛盾! 故e为无理数.

例 4.11 求$f(x) = \sin x$的麦克劳林展开式.

解 在$x \in (-\infty, +\infty)$时, $f(x) = \sin x$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 1, 2\cdots)$, 即

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2\cdots),$$

所以

$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin\left(\theta x + \frac{2k+2}{2}\pi\right)}{(2k+2)!}x^{2k+2} \quad (0 < \theta < 1)}$$

当取$k = 0$时, 得$\sin x$的一次近似式为$\sin x \approx x$,

此时误差为$|R_1(x)| = \left|\frac{\sin(\theta x + \pi)}{2!}x^2\right| \leq \frac{x^2}{2}(0 < \theta < 1)$,

当取$k = 1$时, 得$\sin x$的三次近似式为$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$,

此时误差为$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{4}{2}\pi\right)}{4!}x^4\right| \leq \frac{x^4}{24}(0 < \theta < 1)$,

当取$k = 2$时, 得$\sin x$的五次近似式为$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$,

此时误差为$|R_5(x)| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{6}{2}\pi\right)}{6!}x^6\right| \leq \frac{x^6}{720} \quad (0 < \theta < 1)$.

类似地, 还可得到

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2}(0 < \theta < 1)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}(0 < \theta < 1)}$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}(0<\theta<1).$$

例 4.12 求函数$f(x)=\ln(1+x)$ 在$x=1$ 处带佩亚诺型余项的三阶泰勒公式.

解 令$x-1=t$, 则

$$f(x)=\ln(2+t)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)=\ln 2+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^3+0\left(t^3\right)$$

所以

$$\ln(1+x)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{24}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).$$

4.2.3 泰勒公式求极限

例 4.13 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\ln(1+x^2)}$;

解 分母中$\ln\left(1+x^2\right)\sim x^2\quad(x\to 0)$ 分子中的$\sin x$ 用泰勒公式展开

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

$$\sin x-x=-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\quad(x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\ln\left(1+x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}.$$

例 4.14 计算$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{\ln(1+x^4)}$.

解 由$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{\ln\left(1+x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right]}{x^4}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^4+o\left(x^4\right)}{24x^4}=-\frac{1}{24}.$$

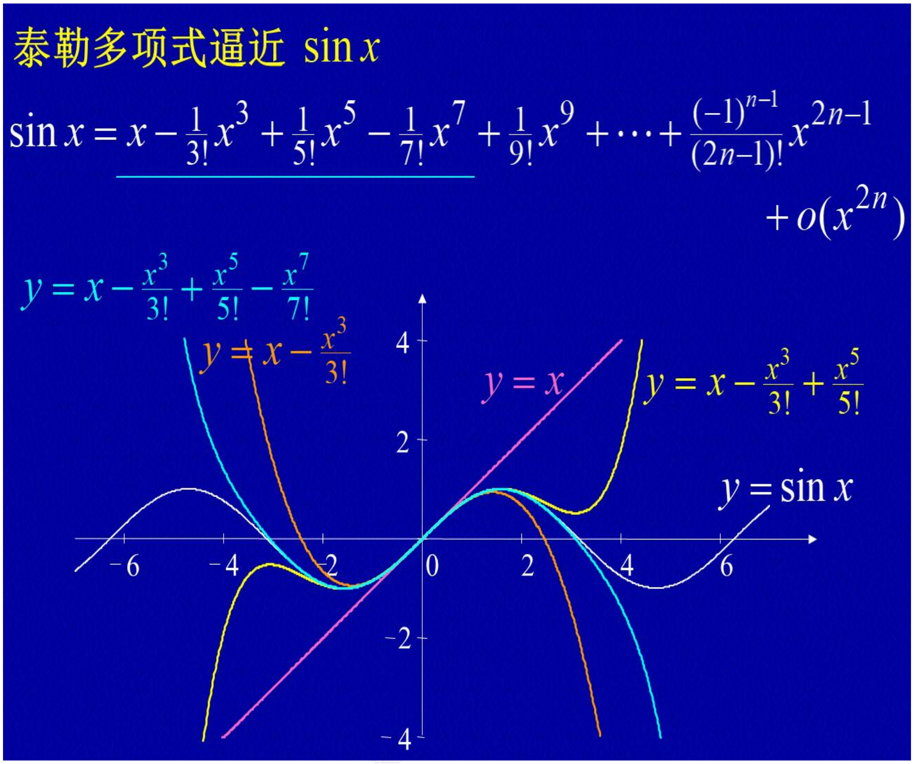


图 4.5　$\sin x$ 的泰勒多项式近似

§ 4.3　洛必达法则

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x) = 0$ (或∞), 则称极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 并分别简记为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{\infty}{\infty}$. 对于这类极限, 即使它存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一法则. 本节我们将根据柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便且重要的方法.

4.3.1　$\frac{0}{0}$ 型未定式

对于$\frac{0}{0}$ 型未定式，我们有如下计算极限的方法.

定理 4.6　洛必达(L'Hôspital)法则($\frac{0}{0}$, $x \to a$)

设函数 $f(x), g(x)$ 在$\mathring{U}(a,\delta)$ $(O_\delta(a) / \{a\})$ 内有定义, 且满足条件:

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=0, \lim_{x\to a} g(x)=0$;

(2) $f(x), g(x)$ 在$\mathring{U}(a,\delta)$ 内可导, 且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或$\infty)$,

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty).$$

证明 因为极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 与$f(x)$ 及$g(x)$ 在$x=a$ 处的值无关, 故不妨设$f(a)=g(a)=0$, 于是由条件(1)(2)知, $f(x)$ 及$g(x)$ 在$U(a,\delta)$ 内连续. 设$x\in U(a,\delta)$, 则重新定义后的函数$f(x)$ 及$g(x)$ 在以a 、x 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 可得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

其中ξ 介于a 与x 之间. 对上式求$x\to a$ 时的极限, 由于当$x\to a$ 时$\xi\to a$, 因此

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

注 4.9 若$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为$\frac{0}{0}$ 型, 且$f'(x)$, $g'(x)$ 满足定理的三个条件, 则可以继续使用洛必达法则, 即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

注 4.10 定理中的$x\to a$ 改为: $x\to a^-, x\to a^+$等时, 结论仍成立.

例 4.15

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{\cos x}{2x}=\frac{\cos a}{2a}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

注意：$\lim_{x\to a}\frac{\cos x}{2x}$, $\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$ 不是未定式, 不可用洛必达法则. 多次用洛必达法则时，每一次都要判断是否满足定理条件.

对于$x \to \infty$时的未定式$\frac{0}{0}$型也有相应的洛比达法则:

定理 4.7 洛必达(L'Hôspital)法则($\frac{0}{0}, x \to \infty$)

设函数$f(x), g(x)$满足条件:

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$;

(2) $\exists X > 0$, 当$\|x\| > X$时, $f'(x), g'(x)$都存在, 且$g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或∞), 则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty).$$

例 4.16

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

例 4.17 求$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

解: 法I (直接洛必达法则)

原式$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x(1+x)} = 1.$

法II(结合等价无穷小替换)

原式$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1.$

注 4.11 洛必达法则是求未定式的一种有效方法, 在求极限时可考虑与其它求极限方法结合使用, 如等价无穷小替换或重要极限, 效果更好.

例 4.18

$$\lim_{x\to0} \frac{3-3^{\cos x}}{\ln(1+3x^2)} = \lim_{x\to0} \frac{3^{1-\cos x}-1}{3x^2}\cdot 3^{\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)\ln 3}{3x^2}\cdot \lim_{x\to0} 3^{\cos x}$$

$$= \ln 3\cdot \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \ln 3\cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\arcsin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+x\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 4.19

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2\sin x^2}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2x^2}{x^6}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1=\frac{1}{4}.$$

$$\sin x^2\sim x^2(x\to0)\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to0)$$

例 4.20

$$\lim_{x\to0}\tfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\tfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\tfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\tfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\tfrac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to1}\tfrac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to1}\tfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\overset{u=x\ln x}{=\!=\!=}\lim_{u\to0}\tfrac{e^u-1}{u}=\lim_{u\to0}\tfrac{e^u}{1}=1$$

$$\lim_{x\to0}\tfrac{x+\sin x}{(e^x-1)(\cos^2 x+1)}=\lim_{x\to0}\tfrac{x+\sin x}{(e^x-1)2}=\lim_{x\to0}\tfrac{x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to0}\tfrac{1+\cos x}{2}=1$$

4.3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则如下：

定理 4.8　洛必达法则($\frac{\infty}{\infty}$)

设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}g(x)=\infty;$

(2) $x\in U(a,\delta)$ (或$|x|>X$) 时，　$f'(x),g'(x)$ 都存在，且$g'(x)\neq0;$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或$\infty),$

则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty).$$

例 4.21

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos bx}{\cos ax}=1(a>0,\ b>0).$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

例 4.22

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)/\left(ax^{a-1}\right)=\frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}=0(a>0).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0(n\in\mathbf{N}^+,\lambda>0).$$

表明: 当$x\to+\infty$ 时, 幂指对函数增长速度的比较:

$$\ln x\ll x^n(n>0)\ll e^{\lambda x}(\lambda>0)$$

例 4.23 求$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

解 由于极限$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ 不存在, 也不为∞, 故不能用罗必塔法则。

然而当$x\to\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, $\sin x$ 和$\cos x$ 为有界量, 于是原式$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\cos x}=1.$

> **注 4.12** 如果极限$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 也不为∞,或求导后发生循环时, 则洛必塔法则失效。并不能说明 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 极限不存在, 这时需用别的方法来判断或求解。

例 4.24

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\left(\neq\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right)=\text{不存在.}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$\left(\neq\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}(\text{循环}).\right)$$

4.3.3 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式的解法

1. $0\cdot\infty$ 型:

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或$0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$

例 4.25

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} \quad (0\cdot\infty \text{ 型}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

2. $\infty-\infty$ 型:

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0} \Rightarrow \frac{0}{0}$ (通分)

例 4.26

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \quad (\infty-\infty\text{ 型}) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{(2+x)e^x} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\cdot\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$$\text{步骤:}\quad \left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \Rightarrow 0\cdot\infty. \\ \infty\cdot\ln 1 \Rightarrow 0\cdot\infty. \\ 0\cdot\ln\infty \Rightarrow 0\cdot\infty. \end{array}\right.$$

例 4.27

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \quad (0^0\text{型}) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.\right)$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \quad (1^\infty\text{型}) = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}} = e^{-1}.$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (\infty^0\text{型}) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)} = e^{-1}.$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\left(-\csc^2 x\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1.\right)$$

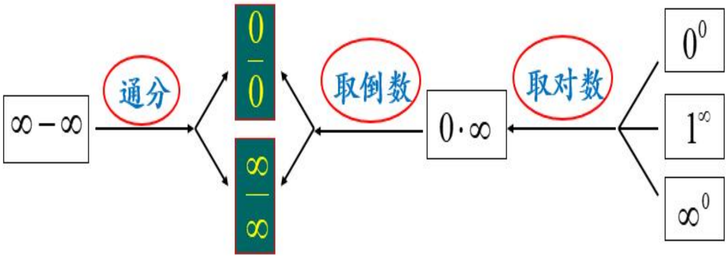


图 4.6　各种不定型总结

例 4.28　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\ (\delta>0)$ 内二阶可导, 且 $f''(x)$ 连续, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

解　由洛必达法则可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0)
\end{aligned}$$

Q: 如果没有条件 $f''(x)$ 连续，应如何求解?

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}=f''(x_0)
\end{aligned}$$

§ 4.4 函数的单调性和凹凸性

4.4.1 一阶导数与单调性

若函数$y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上单调增加(单调减少), 则它的图形是一条沿x 轴正向上升(下降) 的曲线, 即$y'=f'(x)>0\,(y'=f'(x)<0)$. 由此可见, 函数的单调性与导数的符号有密切的关系.

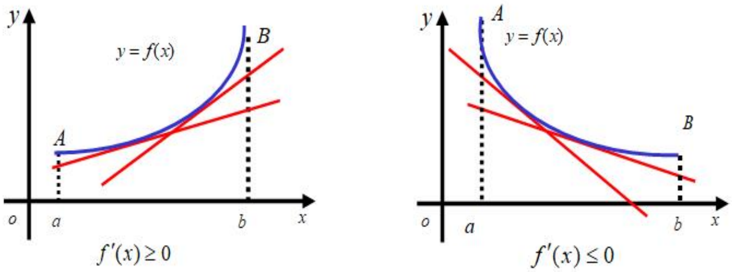


图 4.7 一阶导数与单调性

问题: 能否用导数的符号来判定函数的单调性呢?

解答: 设函数$y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 内可导, 对$\forall x_1,x_2\in(a,b)$, 且$x_1<x_2$, 应用拉格朗日中值定理, 得

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'(\xi)\left(x_2-x_1\right)\quad\left(x_1<\xi<x_2\right)$$

$\because x_2-x_1>0$, 若在(a,b) 内, $f'(x)>0$, 则$f'(\xi)>0$, $\therefore f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$.

$\therefore y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调增加.

若在(a,b) 内, $f'(x)<0$, 则$f'(\xi)<0$, $\therefore f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$. $\therefore y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调减少.

注 4.13 区间内个别点处导数为零, 不影响函数在区间的单调性.

例 4.29 证明$f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内严格单增.

证明 由于$f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内处处可导, 且

$$f'(x)=3x^2$$

令$f'(x)=0$, 得$f(x)=x^3$ 的惟一驻点$x=0$, 这时$f(x)$ 在$(-\infty,0)$ 内满足

$$f'(x)=3x^2>0$$

因此$f(x)$ 在$(-\infty,0]$ 上严格单增; 同理可证$f(x)=x^3$ 在$[0,+\infty)$ 上严格单增. 因此对任何$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty),x_1<x_2$, 当$x_1,x_2$ 同属于$(-\infty,0]$ 和$[0,+\infty)$ 时, 显然有

$$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$

当$x_1\in(-\infty,0),x_2\in(0,+\infty)$ 时, 由于

$$f\left(x_1\right)<f(0),f(0)<f\left(x_2\right)$$

因此

$$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$

综上所述, $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内严格单增.

定理 4.9 一阶导数与单调性

设函数$y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 内可导,

(1) 如果在(a,b) 内$f'(x)\geq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数$y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上(严格)单调增加;

(2) 如果在(a,b) 内$f'(x)\leq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数$y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上(严格)单调减少.

注 4.14 定理中的区间换成其它有限或无限区间, 结论仍然成立. 一般我们不作严格单调和单调的区分, 仅能证明单调性即可, 因此后面我们将严格单调也写作单调.

例 4.30 判定函数$y=\sin x-x$ 在$[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 因为$y=\sin x-x$ 在$[-\pi,\pi]$ 上连续, 在$(-\pi,\pi)$ 内$y'=\cos x-1\leq 0$,

且等号仅在$x=0$ 处成立, $y=\sin x-x$ 在$[-\pi,\pi]$ 上单调减少.

例 4.31 讨论函数$y=e^x-x-1$ 的单调性.

解 $\because y'=e^x-1.\quad y'=0\Rightarrow x=0$, 又$\because D=(-\infty,+\infty)$.

在$(-\infty,0)$ 内, $y'<0$, 所以函数在$(-\infty,0]$ 上单调减少; 在$(0,+\infty)$ 内, $y'>0$, 所以函数在$[0,+\infty)$ 上单调增加.

例 4.32 讨论函数$y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 函数y 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$x\neq 0$ 时, $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $x=0$ 时, 函数的导数不存在.

在$(-\infty,0)$ 内, $y'<0$, 则y 在$(-\infty,0]$ 上单调减少; 在$(0,+\infty)$ 内, $y'>0$, 则y 在$[0,+\infty)$ 上单调增加.

函数的单调性是一个区间上的性质, 要用导数在这一区间上的符号来判定. 一般来说，函数在其定义域上不是单调的, 但在定义域各个部分区间上单调. 若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则该区间称为函数的**单调区间**. 导数等于零的点(驻点)和不可导点, **可能**是单调区间的分界点.

讨论函数单调性的步骤:

1、确定函数定义域D.

2、求$f'(x)=0$ 及$f'(x)$ 不存在的点$x_0,x_1,x_2,\cdots x_n$.

3、用x_i 将D 划为几个子区间。

4、列表判定各子区间内f' 的符号, 得单调性结论。

例 4.33 确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$ 令$f'(x)=0$, 得$x=1,x=2$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

故$f(x)$ 的单调增区间为$(-\infty,1),(2,+\infty)$; $f(x)$ 的单调减区间为$(1,2)$.

例 4.34 讨论$y=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调性。

解 $D=R$, $y'=1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$ 得当$x=1$ 时, $y'=0$, 且当$x=0$ 时导数不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

注 4.15 由例4.29 可知，驻点或导数不存在的点两侧单调性未必不一样. 但是也要注意函数$f(x)$ 在$(0,1)$ 上单调递减且在$(1,2)$ 上单调递减，未必有函数$f(x)$ 在$(0,2)$上单调递减.

函数的单调性也可以用于证明不等式.

例 4.35 当$x>0$ 时, 试证$x>\ln(1+x)$.

证明 设$f(x)=x-\ln(1+x)$, 则$f'(x)=\frac{x}{1+x}$.
因为$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续, 且在$(0,+\infty)$ 内可导, $f'(x)>0$, 所以在$[0,+\infty)$ 上单调增加;
又$\because f(0)=0, \therefore$ 当$x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 有$x-\ln(1+x)>0$,
即$x>0$ 时, $x>\ln(1+x)$.

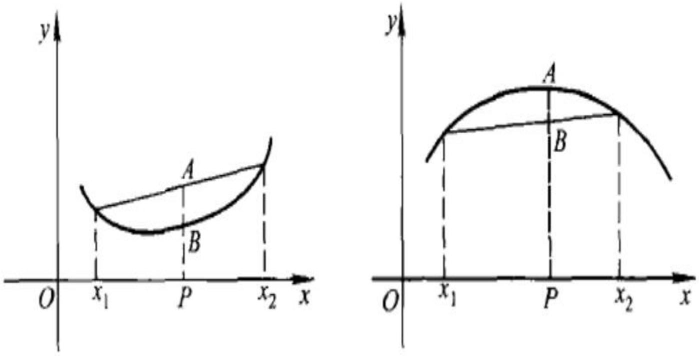
利用函数的单调性还可以确定某些方程实根的个数.

例 4.36 证明方程$1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3=0$ 在$(0,2)$ 内有且仅有一个实根。

证明 设$f(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$, $f(0)=1>0$, $\quad f(2)=1-2+2-\frac{8}{3}<0 \quad f(x)\in C[0,2]$ 由零值定理可知: $f(x)$ 在$(0,2)$ 内至少有一根. 又$f'(x)=-1+x-x^2<0 \quad x\in(0,2) \therefore f(x)$ 单调下降. 故$f(x)$ 在$(0,2)$ 内只有一个实根.

4.4.2 二阶导数与凹凸性

函数的单调性反映在图形上, 就是曲线的上升或下降. 但曲线在上升或下降过程中, 还有一个弯曲方向的问题. 如图, 两条曲线弧都是上升的, 但弯曲方向不同, ACB 是向上凸的, ADB 是向上凹的, 即它们的凹凸性不同.



(a) 下凸 (b) 上凸

图 4.8 曲线与割线的位置关系

函数$f(x)$ 在(a,b) 内是下凸的,在函数图形上表现为:曲线

$$y=f(x), x\in(a,b)$$

上任意两点的割线一定位于这两点间曲线的上方. 如图4.8 (a) 中,

$$OP=q_1x_1+q_2x_2, BP=f\left(q_1x_1+q_2x_2\right), AP=q_1f\left(x_1\right)+q_2f\left(x_2\right)$$

因此$BP \leqslant AP$.

定义 4.2　上凸与下凸

设$f(x)$ 在(a,b) 内有定义, 若对任何$x_1,x_2 \in (a,b)$, 任何非负数q_1,q_2

$$q_1+q_2=1$$

有

$$f\left(q_1x_1+q_2x_2\right) \leqslant q_1f\left(x_1\right)+q_2f\left(x_2\right)$$

则称$f(x)$ 在(a,b) 内是下凸的(或称$f(x)$ 在(a,b) 内是上凹的, 也称$f(x)$ 是(a,b) 内的下凸函数). 类似地可以定义(a,b) 内的上凸(又称为下凹) 函数.

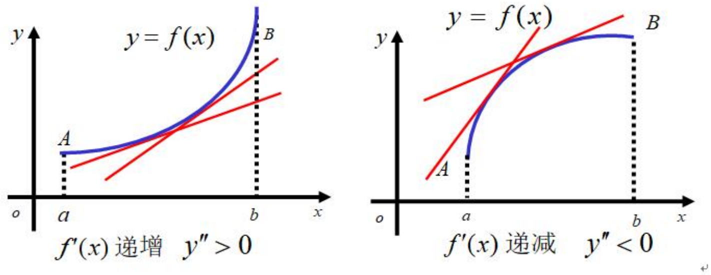


图 4.9　凹凸性与二阶导数

定理 4.10　二阶导数与凹凸性

设函数$y=f(x)$ 在区间(a,b) 内二阶可导,

若在(a,b) 内有$f''(x)>0$, 则$y=f(x)$ 在(a,b) 内向下凸(凹),

若在(a,b) 内有$f''(x)<0$, 则$y=f(x)$ 在(a,b) 内向上凸(凸).

例 4.37　判断曲线$y=x^3$ 的凹凸性.

解　$\because y'=3x^2, y''=6x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

当$x<0$ 时, $y''<0$, 所以曲线在$(-\infty,0]$ 为上凸的;

当$x>0$ 时, $y''>0$, 所以曲线在$[0,+\infty)$ 为下凸的.

注意: 点$(0,0)$ 是曲线$y=x^3$ 由凸变凹的分界点.

定义 4.3 拐点

设$f(x)$ 在x_0 的某一邻域内连续, 若$f(x)$ 在x_0 点的左右邻域内凹凸性不一致, 则称$(x_0, f(x_0))$ 为$f(x)$ 的拐点.

根据拐点的定义及上述定理, 可得

拐点的判别法:

若曲线$y = f(x)$ 在点x_0 连续, $f''(x_0) = 0$ 或不存在, 但$f''(x)$ 在x_0 两侧异号, 则点$(x_0, f(x_0))$ 是曲线$y = f(x)$ 的一个拐点.

函数的凹凸性是一个区间上的性质, 要用二阶导数在这一区间上的符号来判定. 一般来说, 函数在定义域各个部分区间上凹凸性不一样. 二阶导数等于零的点和不可导点, **可能**是函数的拐点.

判定连续曲线$y = f(x)$ 的凸性与拐点的一般步骤:

(1) 求出使得$f''(x) = 0$ 及$f''(x)$ 不存在的点;

(2) 以(1)中的点为分点, 将函数$f(x)$ 的定义域划分为若干子区间;

(3) 按照定理确定曲线$y = f(x)$ 在这些子区间上的凹凸性;

(4) 讨论拐点, 如果$f''(x)$ 在x_0 的左右两侧异号, 则点$(x_0, f(x_0))$ 为$y = f(x)$ 的拐点, 同号则不是拐点。

例 4.38 求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 $\because D : (-\infty, +\infty)$, $\quad y' = 12x^3 - 12x^2$, $\quad y'' = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

令$y'' = 0$, 得$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$. 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	$2/3$	$(2/3, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	$(0, 1)$	凸的	$(2/3, 11/27)$	凹的

故, 拐点为$(0, 1), (2/3, 11/27)$, 凹区间为$(-\infty, 0], [2/3, +\infty)$, 凸区间为$[0, 2/3]$.

注 4.16 (1) 拐点是连续曲线上的点, 其表示形式为$(x_0, f(x_0))$; (2) 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

例 4.39 问a, b 为何值时, 点$(1, 3)$ 是曲线$y = ax^4 + bx^3$ 的拐点?

解 分析: 由拐点的求法, 令$y'' = 0$, 求出点x_0, 再判断在x_0 两侧y'' 是否异号; 或者判断是否有$y''(x_0) = 0$.

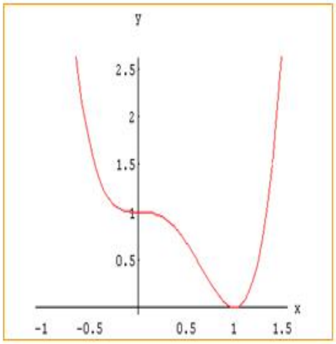


图 4.10　曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2, y'' = 12ax^2 + 6bx$, 则$y(1) = 3$, 即$a + b = 3$.

又点$(1, 3)$ 是曲线的拐点, 有$y''(1) = 0$, 即$12a + 6\,b = 0$. 解得$a = -3,\ b = 6$.

$y'' = -36x^2 + 36x = -36x(x - 1)$, 因为$y''$ 在x_0 两侧异号,

所以, 当$a = -3,\ b = 6$ 时, 点$(1, 3)$ 是曲线y 的拐点.

§ 4.5 函数的极值和最值

4.5.1 函数的极值

由费马定理知道如果$f(x)$ 在点x_0 处可导, 且在x_0 处取得极值, 则$f'(x_0) = 0$, 即x_0 是函数$f(x)$ 的驻点. 函数的驻点却不一定是极值点. 例如, $y = x^3$, $y'|_{x=0} = 0$, 但$x = 0$ 不是极值点.

函数的不可导点, 也可能是函数的极值点. 例如, $y = |x|$ 在点$x = 0$ 处不可导, 但$x = 0$ 是函数$y = |x|$ 的极小值点. 因此我们有

定理 4.11　极值点的必要条件

点x_0 是函数$f(x)$ 的极值点的必要条件是: $f'(x_0) = 0$ 或者$f'(x_0)$ 不存在.

函数导数为零或导数不存在的点称为**可疑极值点(可疑点)**. 我们有两个充分条件判断可疑点是否是极值点.

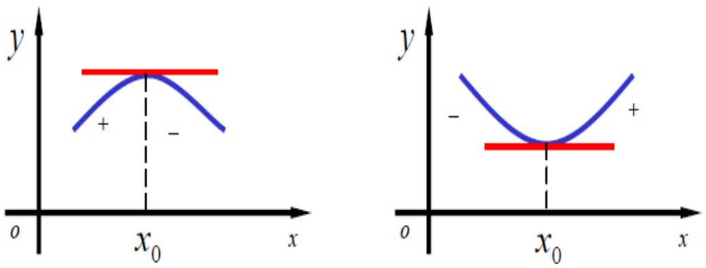
定理 4.12　极值点的第一充分条件

(1) 如果$x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有$f'(x) > 0$; 而$x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有$f'(x) < 0$ ($f'(x)$ **左正右负**),

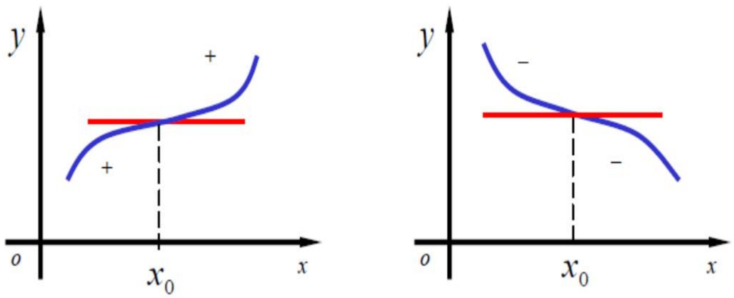
则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 如果 $x \in (x_0-\delta, x_0)$, 有 $f'(x)<0$; 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$, 有 $f'(x)>0$ ($f'(x)$ **左负右正**), 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(3) 如果当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 符号保持不变, 则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.



(a) 极值存在



(b) 极值不存在

图 4.11 极值点的第一充分条件图示

求极值的步骤:

(1) 求定义域 D 与导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点(方程 $f'(x)=0$ 的根) 和 $f'(x)$ 不存在的点, 即可疑点.

(3) 讨论 $f'(x)$ 在驻点和 $f'(x)$ 不存在的点左右的符号变化, 判断极值点; (极值第一判别法)

(4) 求极值.

例 4.40 求 $y=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值。

解 $D=R$, $y'=1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$ 得当 $x=1$ 时, $y'=0$, 且当 $x=0$ 时导数不存在. 可疑点为 $x=0,1$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	+	不存在	−	0	+
f	$\nearrow$	极大值0	$\searrow$	极小值$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

极大值为$f(0)=0$, 极小值为$f(1)=-\frac{1}{2}$.

当函数$f(x)$ 在其驻点处有不等于零的二阶导数时, 有更简单的判别极值点的充分条件.

定理 4.13 极值点的第二充分条件

设$f(x)$ 在x_0 处具有二阶导数, 且$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$, 则有

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时, 函数$f(x)$ 在x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时, 函数$f(x)$ 在x_0 处取得极小值.

证明 (1) $\because f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0$,

故$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$ 与Δx 异号,

当$\Delta x<0$ 时, 有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0$; 当$\Delta x>0$ 时, 有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0$

所以, 函数$f(x)$ 在x_0 处取得极大值.

注 4.17 如果函数$f(x)$ 在驻点x_0 处的二阶导数$f''(x_0)\neq 0$, 那么该驻点x_0 必是极值点, 且可以按二阶导数$f''(x_0)$ 的符号来判定$f(x_0)$ 是极大值还是极小值.

注 4.18 若$f''(x_0)=0$, 第二充分条件就不能用。事实上, $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$ 时, $f(x)$ 在点x_0 处可能有极大值, 可能有极小值, 也可能没有极值, 这时仍用第一充分条件判定.

如$f_1(x)=-x^4, f_2(x)=x^4, f_3(x)=x^3$ 在$x=0$ 处分别取到极大值、极小值和无极值.

例 4.41 求出函数$f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

令$f'(x)=0$, 得驻点$x_1=-4, x_2=2$.

$\because f''(x)=6x+6, \quad \because f''(-4)=-18<0$, 故极大值为$f(-4)=60$

$f''(2)=18>0$, 故极小值为$f(2)=-48$.

定理 4.14 极值点的第二充分条件推广

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶导数, 且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则:

(1) 当 n 为偶数时, x_0 为极值点,
且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值; $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(2) 当 n 为奇数时, x_0 不是极值点.

4.5.2 函数的最值

极值与最值的关系:

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则函数的最大值和最小值一定存在. 函数的最大值和最小值有可能在区间的端点取得, 如果最大值不在区间的端点取得, 则必在开区间 (a,b) 内取得, 在这种情况下, 最大值一定是函数的极大值。因此, 函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值一定是函数的所有极大值和函数在区间端点的函数值中最大者. 同理, 函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值一定是函数的所有极小值和函数在区间端点的函数值中最小者. 如图所示:

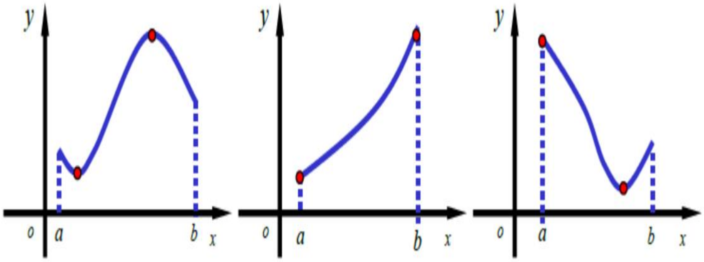


图 4.12 极值与最值的关系

求闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值的步骤:

(1) 求出函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的所有驻点和不可导点;

(2) 求出区间端点及所有驻点和不可导点的函数值, 比较大小, 其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

注 4.19 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大值与最小值是唯一的, 但取到最值的点不一定唯一.

例 4.42 求函数$y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的在$[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=6(x+2)(x-1)$ 解方程$f'(x)=0$, 得$x_1=-2, x_2=1$. 计算$f(1)=7$; $f(-2)=34$; $f(-3)=23$; $f(4)=142$. 比较得: 最大值$f(4)=142$, 最小值$f(1)=7$.

若函数有唯一极值点，则此极值点必为最值点.

定理 4.15 惟一极值为最值

设函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 连续, 开区间(a,b) 可导, 且x_0 为唯一驻点, 则当x_0 为$f(x)$ 的极大值点(极小值点)时, x_0 必同时为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大值点(最小值点).

此定理用来解决实际问题求最值. (1) 建立目标函数$f(x)$; (2)求最值; 若目标函数$f(x)$ 只有唯一驻点, 且验证该点为极值点则该点的函数值即为所求的最大(或最小)值.

例 4.43 某房地产公司有50 套公寓要出租, 当租金定为每月180 元时, 公寓会全部租出去. 当租金每月增加10 元时, 就有一套公寓租不出去, 而租出去的房子每月需花费20 元的整修维护费. 试问房租定为多少可获得最大收入?

解 设房租为每月x 元, 租出去的房子有$50-\left(\frac{x-180}{10}\right)$ 套,

每月总收入为$R(x)=(x-20)\left(50-\frac{x-180}{10}\right)$, 即$R(x)=(x-20)\left(68-\frac{x}{10}\right)$

$R'(x)=\left(68-\frac{x}{10}\right)+(x-20)\left(-\frac{1}{10}\right)=70-\frac{x}{5}$

$R'(x)=0 \Rightarrow x=350$ (唯一驻点), 故每月每套租金为350 元时收入最高.

最大收入为$R(x)=(350-20)\left(68-\frac{350}{10}\right)=10890$ (元) .

例 4.44 由直线$y=0, x=8$ 及抛物线$y=x^2$ 围成一个曲边三角形, 在曲边$y=x^2$ 上求一点, 使曲线在该点处的切线与直线$y=0, x=8$ 所围成的三角形面积最大.

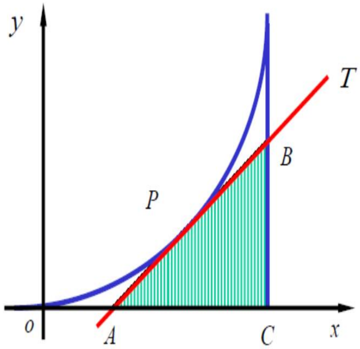
解 设所求切点为$P\left(x_0, y_0\right)$, 则切线PT 的方程为

$$y-y_0=2x_0\left(x-x_0\right)$$

$$\because y_0=x_0^2, \therefore A\left(\frac{1}{2}x_0, 0\right), C(8,0), B\left(8, 16x_0-x_0^2\right)$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left(8-\frac{1}{2}x_0\right)\left(16x_0-x_0^2\right)$$

$$\left(0 \leq x_0 \leq 8\right)$$



令$S' = \frac{1}{4}\left(3x_0^2 - 64x_0 + 16\times 16\right) = 0$, 解得$x_0 = \frac{16}{3}$,　$x_0 = 16$ (舍去)

$$\because S''\left(\frac{16}{3}\right) = -8 < 0. \therefore S\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{4096}{217} \text{ 为极大值.}$$

$$\text{故}S\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{4096}{27} \text{ 为所有三角形中面积的最大者.}$$

另外, 我们利用单调性可证明某些不等式, 但若所设函数在讨论的区间不具有单调性, 有时也可用最值来证.

例 4.45　证明当$x \neq 0$ 时, $1 + ax < e^{ax}$ 恒成立, 其中$a \neq 0$ 为常数.

证明　令$F(x) = e^{ax} - (1 + ax)$, 则$F'(x) = ae^{ax} - a = a\left(e^{ax} - 1\right)$,
令$F'(x) = 0$, 得唯一驻点$x = 0$.
因为$F''(x) = a^2 e^{ax} > 0$, 故点$x = 0$ 是$F(x)$ 的极小值点,
所以$F(0) = 0$ 是$F(x)$ 的极小值, 也是最小值,
故当$x \neq 0$ 时, $F(x) > 0$, 即当$x \neq 0$ 时, $1 + ax < e^{ax}$.

§ 4.6 函数作图

4.6.1 渐近线

借助于一阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上上升,在哪个区间上下降;

借助于二阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上为凹,在哪个区间上为凸,在什么地方有拐点.

知道了函数图形的升降、凹凸以及拐点后, 也就可以掌握函数的性态,并把函数的图形画得比较准确.

但是当$f(x)$ 的定义域和值域含有无穷区间时, 要在有限的平面上作出它们图形, 就必须指出x 趋于无穷时或y 趋于无穷时曲线的趋势, 因此有必要知道$= f(x)$ 的**渐近线**.

定义 4.4 渐近线

若曲线C 上的点M 沿着曲线无限地远离原点时, 点M 与某一直线L 的距离趋于0, 则称直线L 为曲线C 的渐近线.

例如，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有渐近线 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$.

1. 水平渐近线(平行于x 轴的渐近线)
   设函数$f(x)$ 的定义域是无穷区间, 如果
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=c\text{或}\lim_{x\to+\infty} f(x)=c$$
   则称直线$y=c$ 为曲线$y=f(x)$ 的水平渐近线.
   例如$y=\arctan x$, 有水平渐近线两条: $y=\frac{\pi}{2}$, $y=-\frac{\pi}{2}$.

2. 垂直渐近线(垂直于x 轴的渐近线)
   设函数$f(x)$ 在$x=c$ 间断, 如果
   $$\lim_{x\to c^-} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to c^+} f(x)=\infty,$$
   则称直线$x=c$ 为曲线$y=f(x)$ 的垂直渐近线.
   例如$y=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$, $\lim_{x\to-2} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to3} f(x)=\infty$ 有垂直渐近线两条: $x=-2$, $x=3$.

3. 斜渐近线
   设函数$f(x)$ 的定义域是无穷区间, 如果
   $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0\text{或}\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$$

则直线$y = ax + b(a \neq 0)$ 为曲线$y = f(x)$ 的斜渐近线. 其中$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax)$.

斜渐近线中的a, b 可以如下确定.

由$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ 得$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0$, 从而得$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0$, 解得$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ 将a 代入$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$, 得$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.

例 4.46 求曲线$f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$ 的渐近线.

解 因为$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1} = \infty$, 所以$x = 1$ 是该曲线的一条铅直渐近线;

$$\text{又} \lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}/x = \lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)(x+3) - 2x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{4(x-3)}{x-1} = 4$$

所以$y = 2x + 4$ 是该曲线的一条斜渐近线.

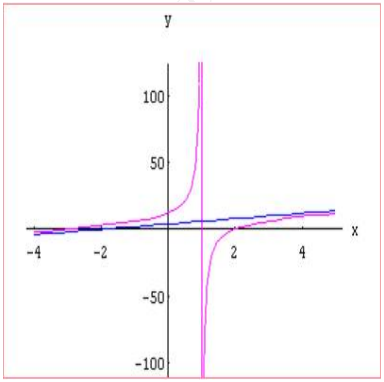


图 4.13 函数$f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$

注 4.20 如果$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在或$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$. 存在, 但$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$ 不存在, 则可以断定$y = f(x)$ 不存在斜渐近线.

曲线的水平渐近线(或斜渐近线)最多可有两条(水平渐近线可看作斜渐近线的特例.)

求渐进线时一定要注意双向性($\pm\infty$)。

4.6.2 函数作图

函数作图的步骤:

(1) 确定函数$y=f(x)$ 的定义域及函数所具有的某些特性(如奇偶性、周期性等), 并求出函数的一阶导数$f'(x)$ 和二阶导数$f''(x)$;

(2) 求出一阶导数$f'(x)$ 和二阶导数$f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数$f(x)$ 的间断点及$f'(x)$ 和$f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间;

(3) 确定在这些部分区间内$f'(x)$ 和$f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;

(4) 确定函数图形的水平、垂直渐近线，斜渐近线以及其他变化趋势;

(5)算出$f'(x)$ 和$f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值, 定出图形上相应的点; 为了把图形描绘得准确些,有时还需要补充一些点,然后结合前四步中得到的结果, 联结这些点画出函数$y=f(x)$ 的图形.

例 4.47　画出函数$y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解　(1) 所给函数$y=f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$, 而

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1),$$

$$f''(x)=6x-2=2(3x-1).$$

(2) $f'(x)$ 的零点为$x=-\frac{1}{3}$ 和1; $f''(x)$ 的零点为$x=\frac{1}{3}$. 将点$x=-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$ 由小到大排列,依次把定义域$(-\infty,+\infty)$ 划分成四个部分区间

$$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right],\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},1\right],[1,+\infty)$$

(3) 在$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 内, $f'(x)>0, f''(x)<0$, 所以在$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧上升而且是凸的.

在$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 内, $f'(x)<0, f''(x)<0$, 所以在$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧下降而且是凸的.

同样,可以讨论在区间$\left[\frac{1}{3},1\right]$ 及区间$[1,+\infty)$ 上相应的曲线弧的升降和凹凸. 为了明确起见,我们把所得的结论列成下表:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$ 的图形	增凸	$\frac{32}{27}$ 极大值	减凸	$\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right)$ 拐点	减凹	0 极小值	增凹

(4) 当$x\to+\infty$ 时, $y\to+\infty$; 当$x\to-\infty$ 时, $y\to-\infty$.

(5) 算出$x=-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$ 处的函数值

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27},f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{27},f(1)=0$$

从而得到函数$y=x^3-x^2-x+1$ 图形上的三个点

$$\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right),(1,0)$$

适当补充一些点. 例如,计算出

$$f(-1)=0,f(0)=1,f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

就可补充描出点$(-1,0)$, 点$(0,1)$ 和点$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)$. 结合(3)、(4)中得到的结果, 就可以画出

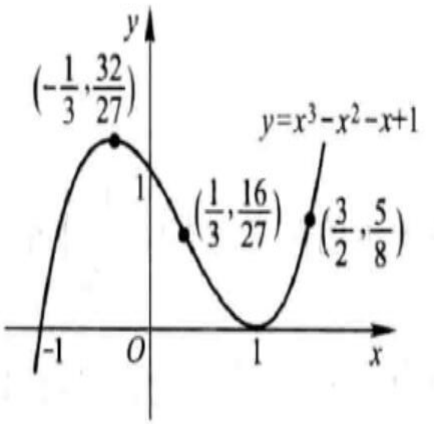


图 4.14 函数$y=x^3-x^2-x+1$

例 4.48 作出$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 (1) 函数定义域为$(-\infty,+\infty)$;

(2) 函数是偶函数, 故函数图形关于y 轴对称;

(3) $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}, f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right)$,

在$[0,+\infty)$ 上, 当$x=0$ 时, $f'(x)=0$; 当$x=1$ 时, $f''(x)=0$.

列表分析:

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值点	单调递减、凸	拐点$(1,f(1))$	单调递减、凹

(4) 因为$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, 所以$y=0$ 是曲线的水平渐近线.

(5) 计算曲线上一些点的坐标: $M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), M_2\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, 综合上述讨论结果, 可描绘$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在$[0,+\infty)$ 上的图形, 最后利用图形的对称性可得到函数在$(-\infty,0]$ 上的图形.

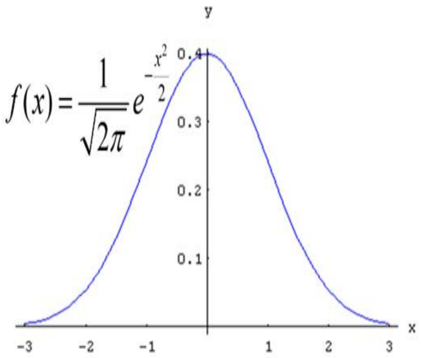


图 4.15 函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

例 4.49 作函数$f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$ 的图形.

解 (1) 函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

(2) 无奇偶性, 无周期性;

(3) $f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}$, $f''(x)=\frac{3x}{(x-1)^4}$.

令$f'(x)=0$, 得$x=3$ 或$x=0$; 令$f''(x)=0$, 得$x=0$. 不可导点: $x=1$

列表分析:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	单调递增、凸	拐点 $(0,0)$	单调递增、凹	间断	单调递减、凹	极小值点	单调递增、凹

(4) $x=1$ 是曲线的铅直渐近线, $y=\frac{1}{2}x+1$ 是曲线的斜渐近线.

(5) 曲线上一些点的坐标:

$\left(-1,-\frac{1}{8}\right),(0,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),(2,4),\left(3,\frac{27}{8}\right)$

综合上述讨论结果, 可描绘函数图形:

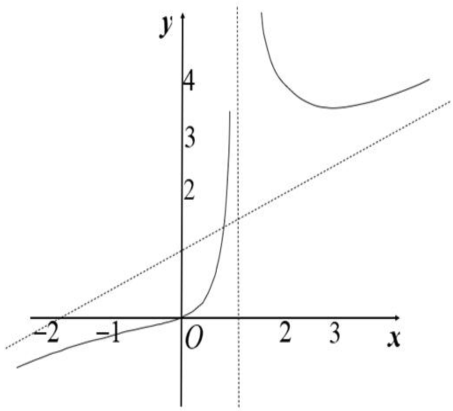


图 4.16 函数$f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$