

Random walk

2015301020027 曾伟豪

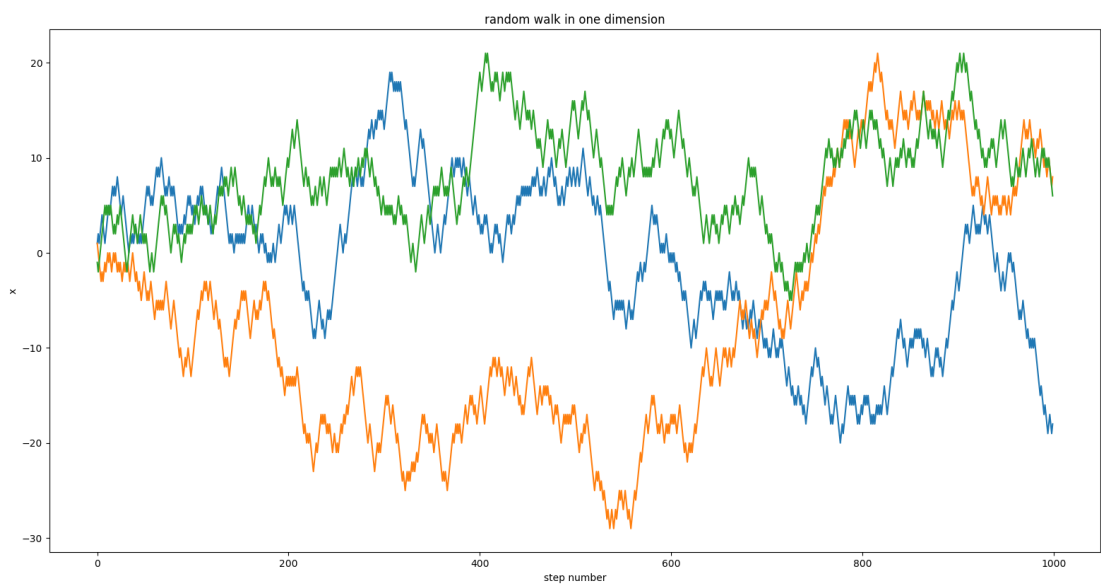
I、背景介绍

随机游走，是一种数学统计模型，它是一连串的轨迹所组成，其中每一次都是随机的。它能用来表示不规则的变动形式，如同一个人酒后乱步，所形成的随机过程记录。1905年，由卡尔·皮尔逊首次提出。随机行走等是指基于过去的表现，无法预测将来的发展步骤和方向。核心概念是指任何无规则行走者所带的守恒量都各自对应着一个扩散运输定律，接近于布朗运动，是布朗运动理想的数学状态，现阶段主要应用于互联网链接分析及金融股票市场中。一个简单的例子是醉汉行走：一位醉汉位于某一初始位置等概率等步长的想左或者右边走。经过足够多的步数（或者说时间）后，呈现出一定的规律。

对于多粒子系统，满足扩散定律： $\langle x^2 \rangle = 2Dt$
本文展示了从一维到三维随机行走的模拟及其呈现的扩散定律。

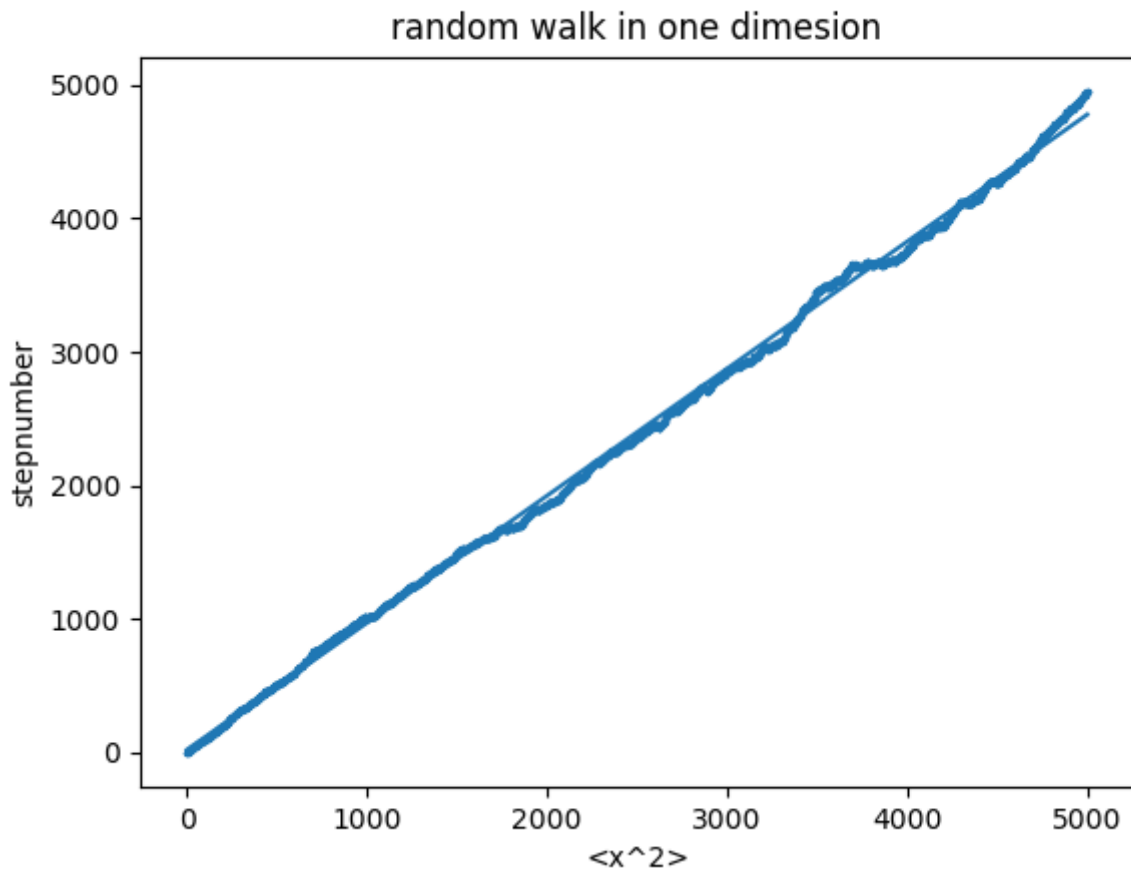
II、一维随机行走的模拟

以下是三个粒子进行一维无规则随机行走的模拟图：



可以看出，对于少量粒子组成的系统，随机游走是无规则的，没有呈现出一定的规律，其位置的平均也不近似为0.

对于多粒子系统进行模拟可以的到扩散定律，下图是对5000个粒子进行1000步一维随机游走的模拟：



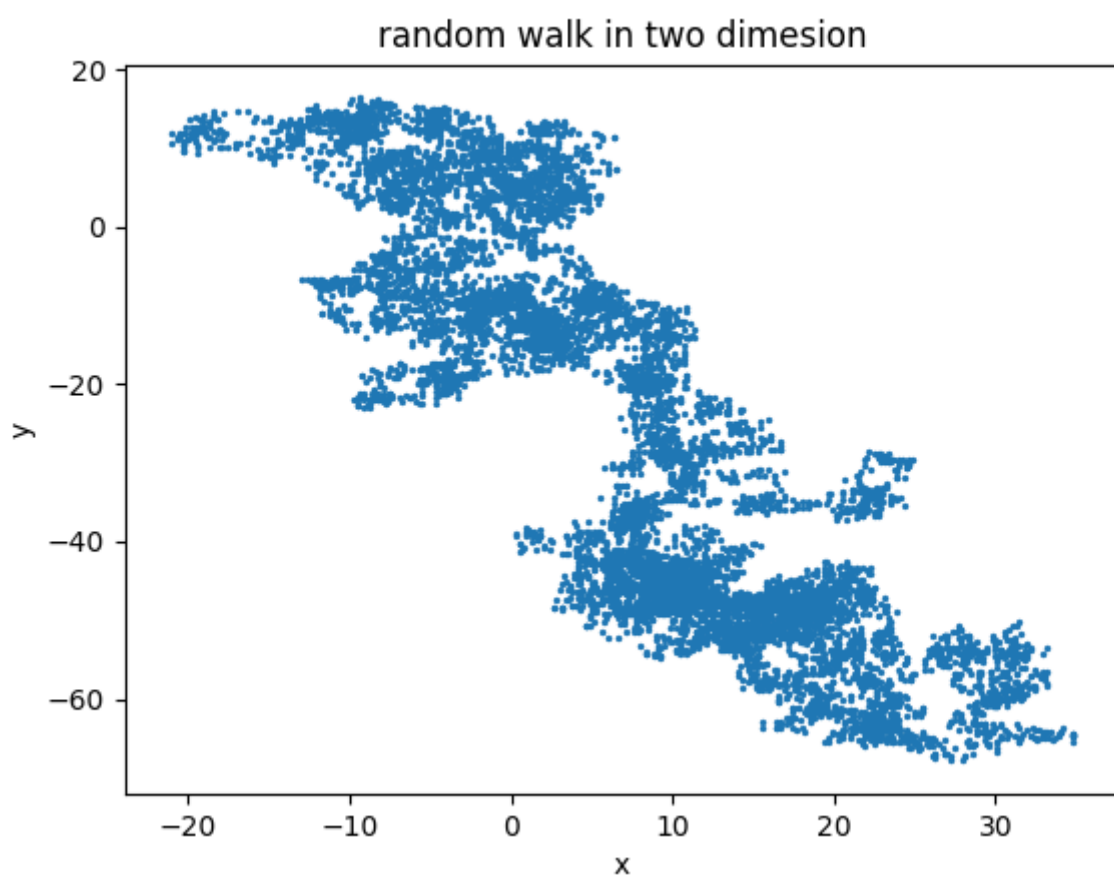
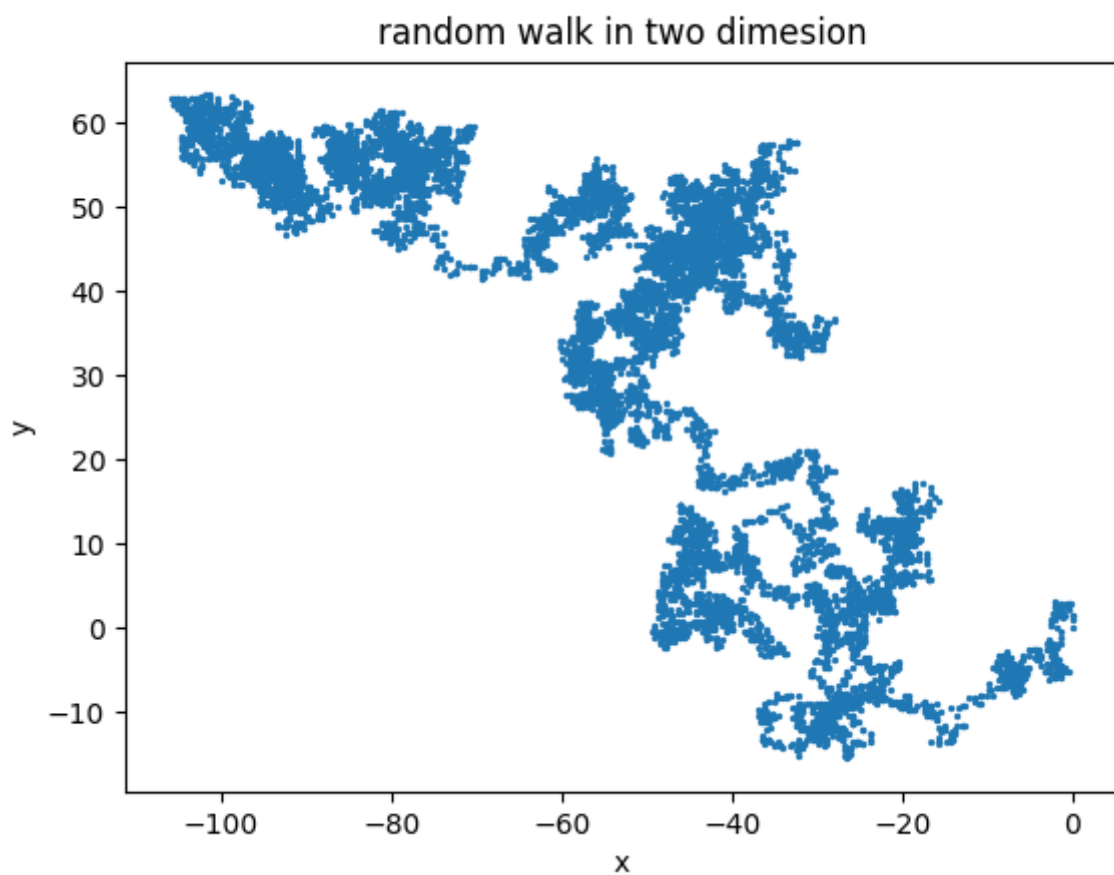
对曲线进行拟合，得到关系：

$y = 0.9523x + 18.06$ 与书上结果相似。

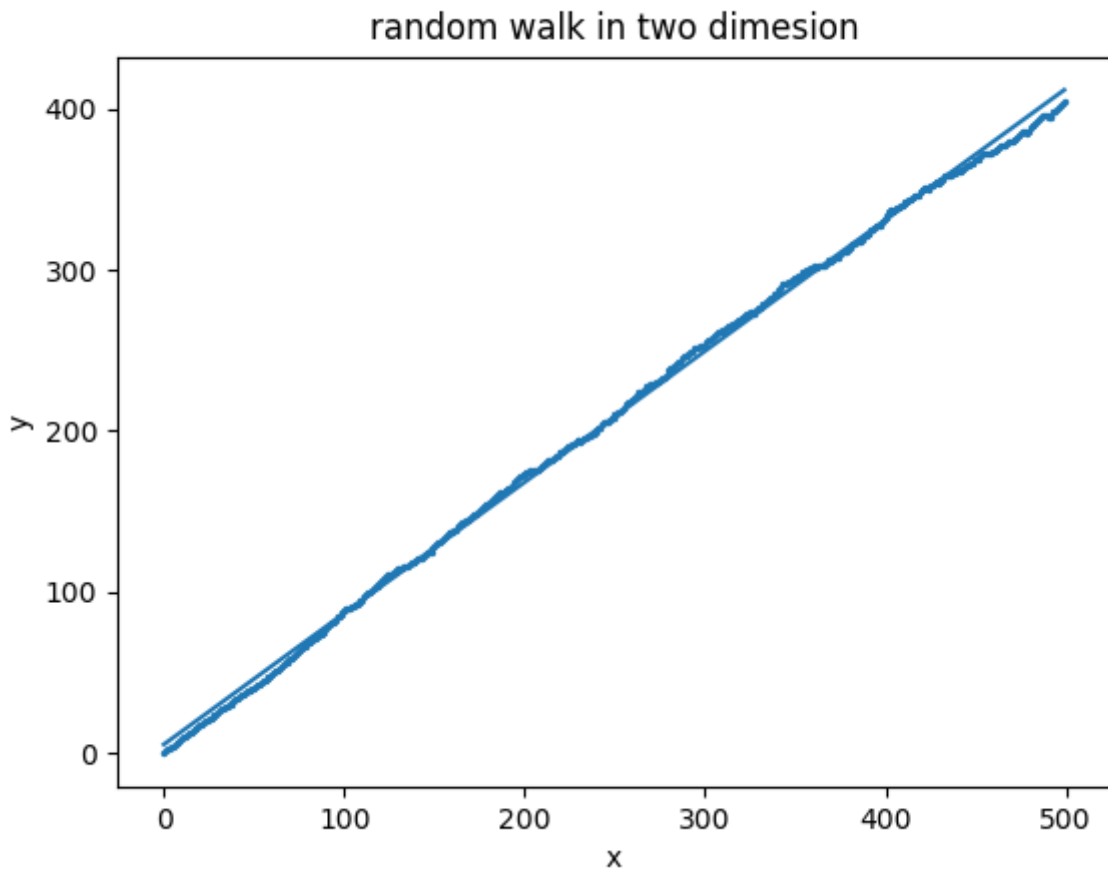
Ⅲ、二维随机游走模拟与扩散的近似模拟

二维的情况比一维稍复杂些。在维基百科上可查到二维随机行走分为两种：一种是一种是lattice random walk，即格点随机行走，醉汉每一步只有四个可选方向：上，下，左，右。且步长单位为1；另一种情况是全方向随机行走，即醉汉每一步都可以选择平面内任意一个方向，步长也是0到1的随机数。在这里，只模拟了第二种随机游走。

以下模拟了单粒子10000步两次随机游走，同样的没有规律性可言：



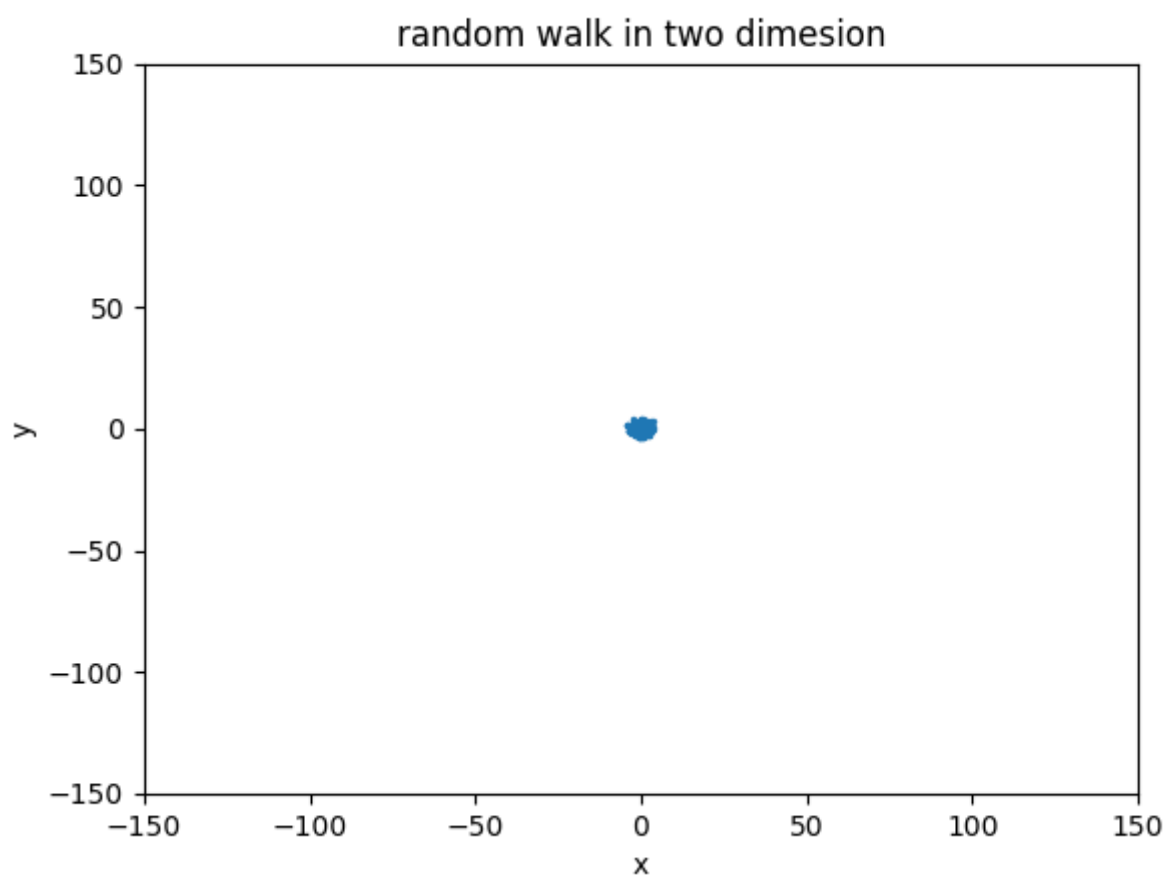
与一维情况做类似的模拟来验证扩散定律，下图是500个粒子进行1000次二维随机行走的模拟：



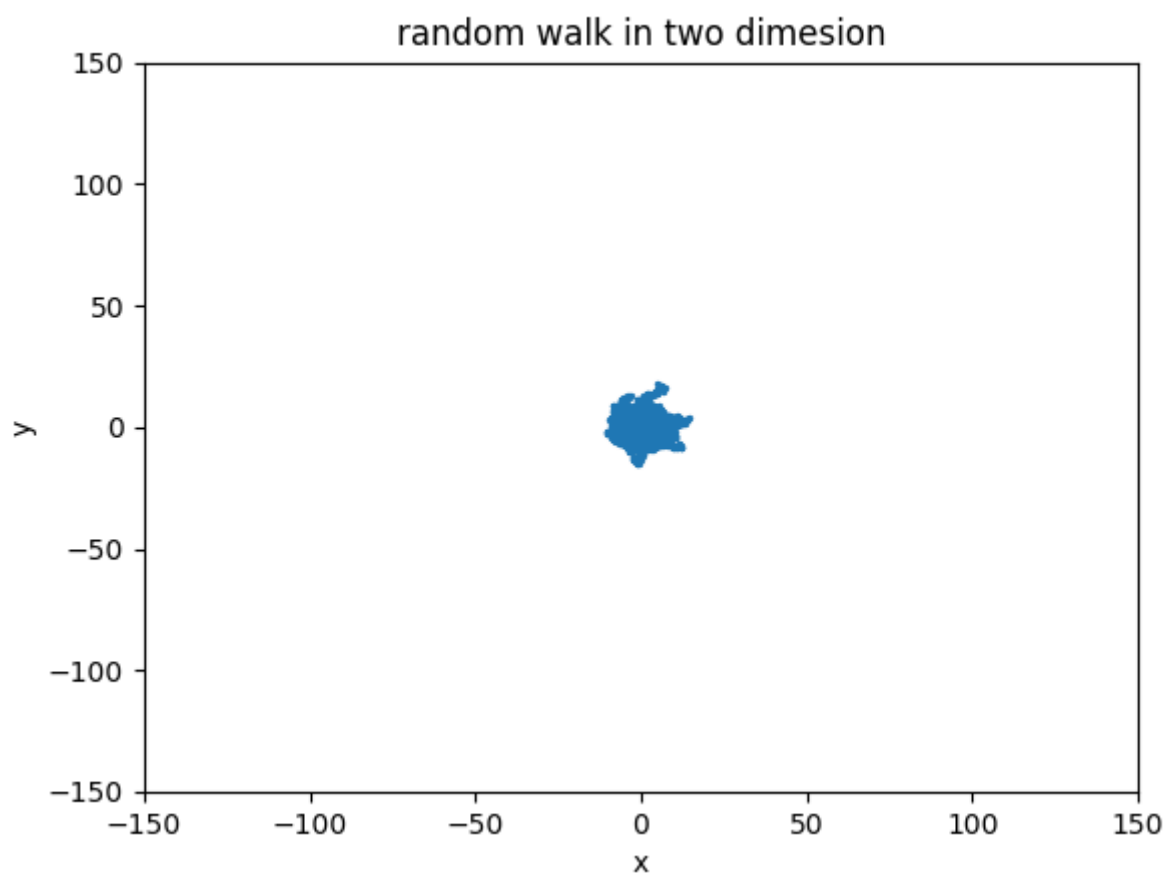
对曲线拟合得到结果：

$$y=1.134 x + 5.613$$

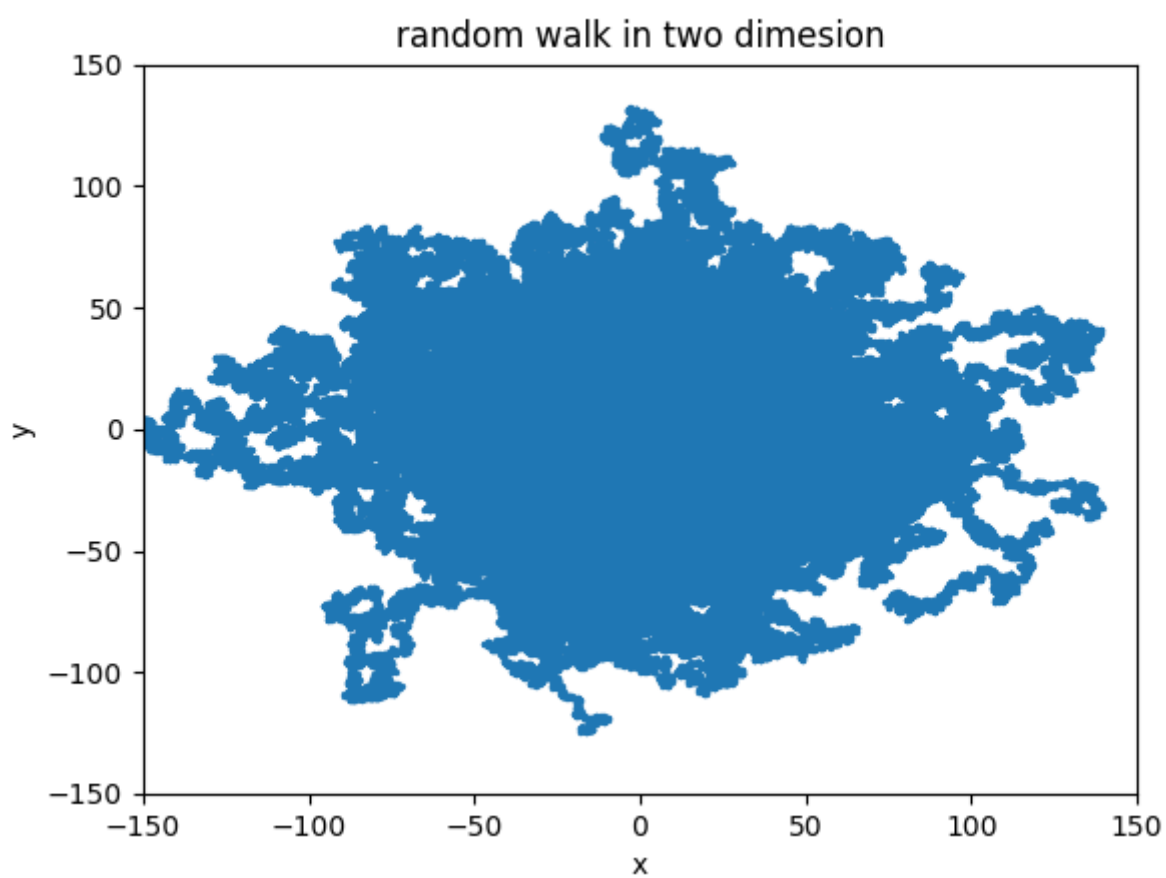
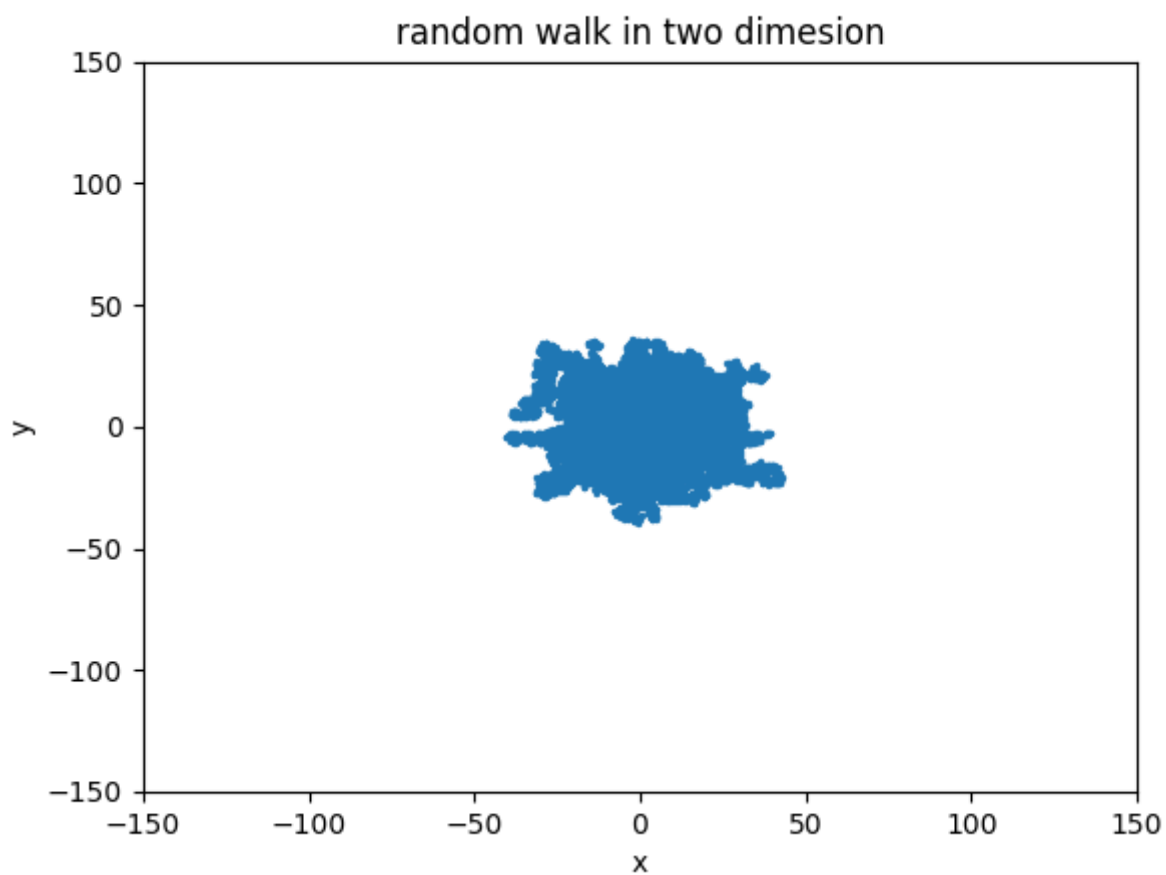
与一维情形相近，斜率接近1. 二维情形下，可以模拟粒子的轨迹来模拟方糖在咖啡中的自由扩散：将方糖看做一些位于原点的粒子，模拟其随机行走，可看成方糖颗粒在咖啡中自由扩散留下的运动轨迹。以下展示了200粒子分别经历10步、100步、1000、10000步随机行走留下的轨迹：



粒子聚集于原点



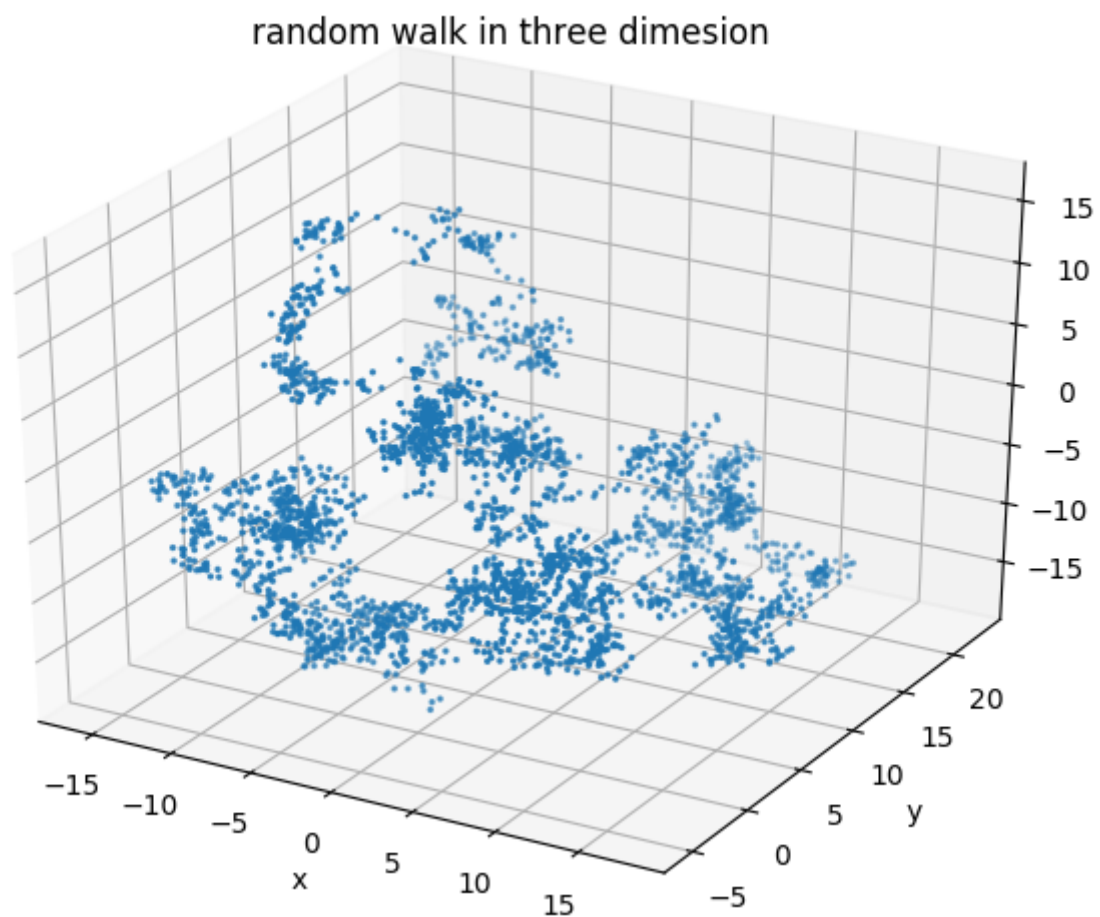
逐渐开始扩散



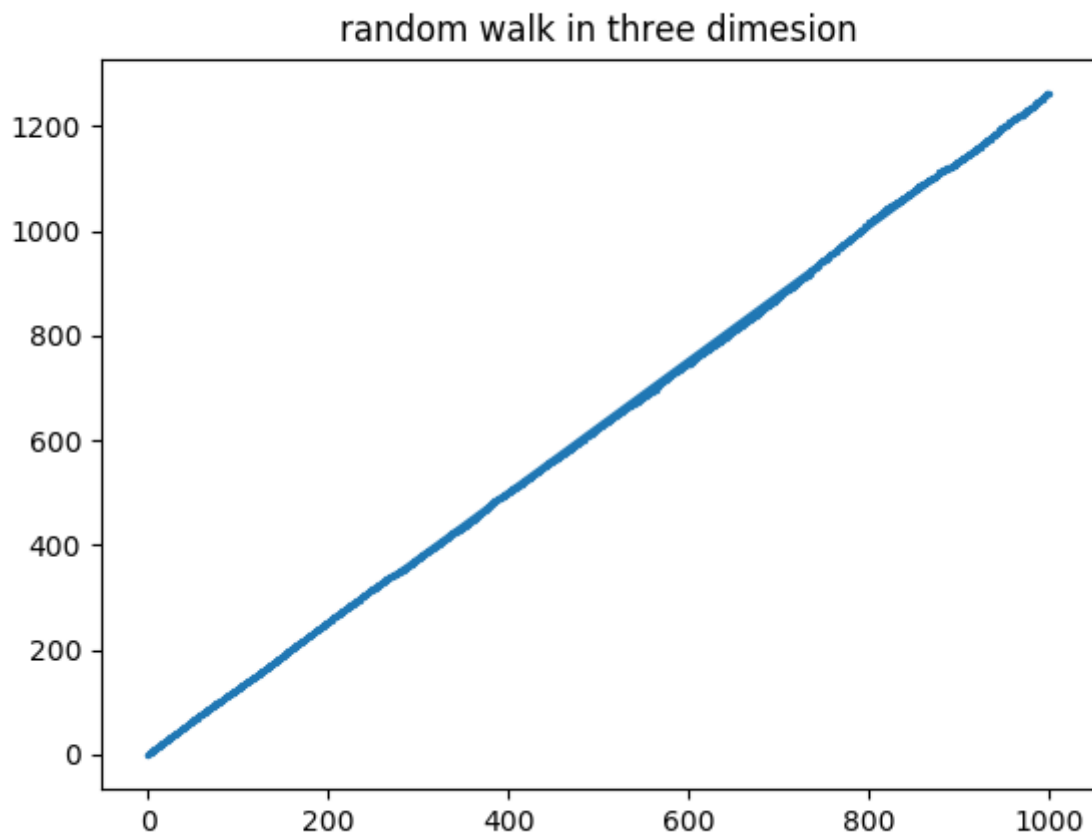
粒子将不断扩散至遍历了整个咖啡杯。

IV、三维情形

有了一维、二维情形的铺垫，三维显得比较平庸。与一二维情形类似，这里直接展示三维的模拟结果。三维单粒子随机行走3000步的两次模拟结果：



三维的随机行走可以跑出各种有趣的图形。
对1000个粒子进行5000次三维随机行走：



$y=1.06x-2.183$ 斜率非常接近1，拟合结果较好。

V、结论

本文展示了不同维度的随机行走，可以看出它与布朗运动、扩散现象有一定的关系。随机行走这一模型虽然较为简单，但适用性很高，在各个领域都有一定的应用。本文通过展示使用python对随机行走模拟其轨迹比较直观的展示了这一现象，并以图示与扩散现象的相似性。最终可以看到单粒子系统的随机行走虽然没有规律性可言，但对于多粒子系统，非常好的满足扩散定律。

参考

计算物理 Nicholas J

百度百科

维基百科