三维球方势阱和口袋模型

段明阳[1], 刘子鸣[2]，刘玉鑫*

摘要

口袋模型是一种用来解释强子内部结构及核力的模型。在夸克的强相互作用被发现之后，物理学家提出了QCD等各种理论来解释它。我们这里先简要介绍夸克以及QCD量子色动力学的背景知识，然后考虑根据三维球方势阱提出的几种口袋模型，及其简单的应用。

关键词

夸克　QCD量子色动力学　三维球方势阱　口袋模型

[1]北京大学物理学院，*1600011311*　[2]北京大学物理学院，*1600011313*　***通讯作者**: yxliu@pku.edu.cn

1. 背景知识

自然界中存在四种基本相互作用：引力，电磁相互作用，强相互作用，弱相互作用。万有引力作用在所有有质量的粒子之间，由引力子传递（目前尚未发现）。电磁相互作用作用在所有带电粒子之间，由光子传递，我们生活中常见的力都是电磁相互作用。强相互作用作用在夸克和胶子之间，由胶子传递。弱相互作用作用在轻子上，由介子传递。

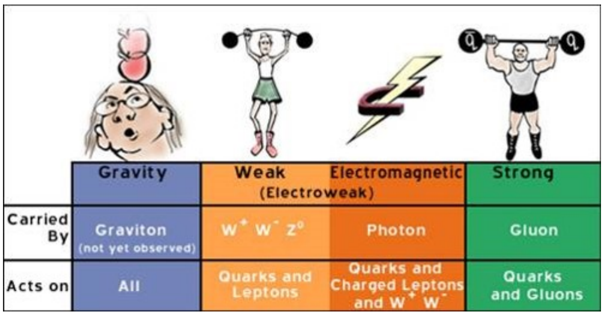

图 1. 四种基本相互作用

夸克是一种很微小的物质，它的各种特性让它能够参与四种相互作用。[7]夸克是费米子，很轻。第一代夸克——上夸克和下夸克，质量分别为$m_u = (2.3 \pm 1.2)\mathrm{MeV/c^2}$，$m_d = (4.8 \pm 0.8)\mathrm{MeV/c^2}$。首先它有质量(mass)，因此参与引力作用。其次它具有电荷(electric charge)，因此能参与电磁相互作用。上夸克u、下夸克d分别带电+2/3 e、−1/3 e。质子由uud组成，电荷量为+1e，中子由udd组成，为电中性。而且夸克具有“味”(flavor)，能参与弱相互作用。夸克总共有六种味，其中刚才提到的上u、下d就是夸克的味。同时夸克还具有色荷(color charge)，能参与强相互作用。每个夸克可以有rgb即红绿蓝三种色荷。色荷的命名对应于颜色，是因为三种色荷相互抵消类似红绿蓝三原色的抵消（变成白色），实际上这些色荷本身并不是红色或绿色或蓝色的。

夸克有：质量，“味”，电荷，色荷——rgb红绿蓝（如图）。

Generations of matter

Type	First	Second	Third
Quarks			
up-type	up	charm	top
down-type	down	strange	bottom

图 2. 夸克的族谱

胶子是构成强子（如质子，中子和π介子）的一种基本粒子。[7]胶子是量子色动力学中传递力的粒子，就像光子是电动力学中传递力的粒子一样。但和光子不同的是，胶子有色荷，且胶子是通过改变夸克的色荷来传递相互作用的。

我们在两个尺度上可以观察到“两种不同的”强相互作用：在稍大的尺度上(1fm~3fm)，介子把质子和中子结合起来构成原子核。在稍小的尺度下(< 0.8fm)，胶子把夸克结合起来构成强子——比如质子，中子，介子。

胶子的族谱——八种胶子：

$$\begin{array}{ll}
(r\bar{b}+b\bar{r})/\sqrt{2} & -\mathrm{i}(r\bar{b}-b\bar{r})/\sqrt{2} \\
(r\bar{g}+g\bar{r})/\sqrt{2} & -\mathrm{i}(r\bar{g}-g\bar{r})/\sqrt{2} \\
(b\bar{g}+g\bar{b})/\sqrt{2} & -\mathrm{i}(b\bar{g}-g\bar{b})/\sqrt{2} \\
(r\bar{r}-b\bar{b})/\sqrt{2} & (r\bar{r}+b\bar{b}-2g\bar{g})/\sqrt{6}
\end{array}$$

注意胶子总共有8种而不是$3^2 = 9$种。因为不允许出现所谓的“单态”，如red-antired, green-antigreen，blue-antiblue。更深层的原因是，

QCD量子色动力学是具有SU(3)对称性的规范理论，SU(N)的自伴表示的维数是N^2-1。所以这里胶子的种数是$3^2-1=8$。

由于强相互作用是通过胶子传递的，胶子携带色荷，所以胶子之间的强相互作用也应该是通过胶子传递的，这样在胶子之间就会产生新的胶子，然后再产生新的胶子，依此类推直到无穷（如图）。这需要一个新的理论来修正这个问题。

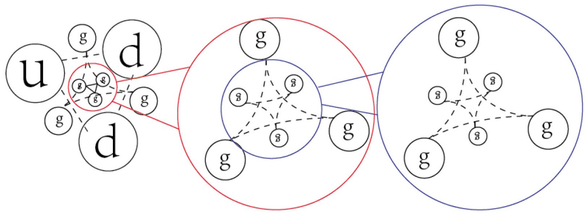

图 3. 胶子产生新的胶子

QCD量子色动力学是夸克和胶子之间强相互作用的理论。把它和量子电动力学进行对比：量子色动力学作用在色荷上，传递者为胶子，胶子携带色荷，没有静质量，自旋为1（玻色子）。量子电动力学作用在电荷上，传递者为光子，光子不携带色荷，没有静质量，自旋为1（玻色子）。下面将简要介绍它。

2. 简要介绍

2.1 QCD量子色动力学简介

首先注意，在此部分中，“小长度”和“高能”表达的意思相同。

先简要介QCD的历史。夸克结构是由Gell-Mann命名[3]。三种色荷分别对应红色，绿色，蓝色。色力就是强相互作用，构成了强子内的强相互作用力。

Richard Feynmann 认为，高能物理实验表明夸克是真正的粒子，他称之为“部分子”(partons)。

Yang-Mills 提出的理论认为，传递力的粒子本身可以辐射更多传递力的粒子。这与QED完全不同。

后来，渐近自由的发现使得物理学家能够使用微扰理论的量子场论的方法，对许多高能物理实验的结果做出精确的预测。非微扰QCD的其它方面是探索夸克等物质的相(phase)，包括QGP。

然后下面简要介绍一下QCD的理论。强相互作用不区分不同夸克的味，因此QCD具有味对称性。但是实际上只是具有近似的味对称性，这是由不同夸克的质量不同所破坏的。

QCD是具有SU(3)对称性的规范理论。

夸克是大量的自旋为1/2的费米子，带有色荷和电荷，其规范是QCD的内容，由Dirac Fields代表。夸克携带电荷$-1/3$ e或2/3 e，它们携带包括重子数（其中每个夸克为1/3），“超荷”(hypercharge)和味量子数在内的全部的量子数。每个夸克都有自己对应的反夸克。每个反夸克的电荷与相应的夸克完全相反。

胶子是自旋为1的无质量的玻色子，也携带色荷。但是它们没有电荷，不参与弱相互作用，也没有味。

三种“基本的”相互作用分别为：夸克发射（或吸收）胶子，胶子发射（或吸收）胶子，两个胶子直接相互作用。

QCD具有两个主要特性，下面将分别介绍。

2.2 渐近自由

渐近自由(asymptotic freedom)[7]是由 David J. Gross 和 H. David Politzer 和 Frank Wilczek 三位物理学家发现的，他们共同获得了2004年诺贝尔物理学奖。

渐近自由就是，在高能区域（或低长度尺度），夸克、胶子间的强相互作用较弱。能标无限高时，作用无限弱（趋于自由）。在QED中，也存在渐近发散——“朗道极点”(Landau pole)。[7]

真空中虚粒子的极化：在一个电荷周围，真空被“极化”，产生所谓的“屏蔽”效应。当另一个电荷逐渐靠近时，极化效应减弱，相互作用发散。

在QCD中，夸克也是屏蔽色荷的（屏蔽效应），而胶子却是增强色荷的(反屏蔽效应)。所以，夸克的屏蔽效应和胶子的反屏蔽效应，到底哪个更强？

标准的三色QCD理论告诉我们，只要夸克的“味”不多于16种，胶子的影响就胜过夸克。而实际上，夸克只有六种“味”。然而，随着距离越来越近，胶子的反屏蔽效应越来越弱。越来越弱的反屏蔽效应，就相当于屏蔽效应越来越强。

另一方面，“低能”和“大尺度”表达的意思相同，意味着不自由。

2.3 色禁闭

色禁闭(color confinement)：在<2TK(Kelvin)，130—140MeV的常规情况下，夸克不能够被孤立开。

在QED中，两个电荷之间的作用随距离很快衰减。而在QCD中，由于胶子本身带有色荷，两个夸

克之间的作用不随距离衰减，即两种色荷在分开时保持恒力。胶子的作用可形象地视为“流管”(flux tube/string)。当距离增大到一定大小时，它从能量的角度上看更倾向于产生一对夸克——反夸克对，而不是继续延伸管。夸克和胶子必须凝聚在一起才能形成强子。其中，两种类型的强子，分别为介子和重子。如果原来的两个夸克构的是一个介子，那么这一个介子就这样分裂成了两个介子（如图）。因此，当粒子加速器产生夸克时，科学家们看到许多色中性粒子（介子和重子）的“射流”聚集在一起，而不是看到检测器中的单个夸克。这个过程被称为强子化，碎片化或管分裂(string breaking)。

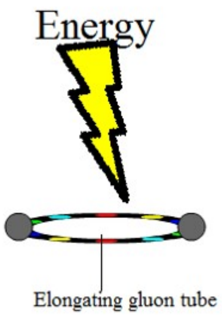

图 4. 当管拉伸到一定长度时，会分裂

3. 口袋模型

这里考虑几种不同的口袋模型（如图）。首先基于势阱考虑最简单(naïve)的口袋模型，然后考虑真空能——可伸缩的口袋模型，考虑相对论——Bogoliubov口袋模型，考虑真空能和相对论——MIT口袋模型。

图 5. 几种口袋模型

由于粒子（夸克，胶子）不能跑出去，可以将强子视为无限深的球方势阱，粒子被困在里面。以介子为例，口袋里有一个夸克和一个反夸克。

如果口袋太大，不确定关系表明动量就会小，渐近自由表明相互作用就会大。如果口袋太小，不确定关系表明动量就会大，从而能量就会大，虽然这时渐近自由表明相互作用弱。所以应该会有一个最佳的口袋半径。在常规（低温、低密度）情况下，口袋半径很小，夸克之间渐近自由。

先从势阱开始说起。

3.1 一维无限深势阱

一维无限深势阱的推导如下[1]：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (0 < x < R) \tag{1}$$

解得

$$\psi(x) = A\sin(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x + \delta) \tag{2}$$

带入边界条件$\psi(0) = \psi(R) = 0$，得

$$\delta = 0, \quad E = E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mR^2} \tag{3}$$

归一化系数为$A_n = \sqrt{2/R}$，因此解为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{R}}\sin\frac{n\pi}{R}x \tag{4}$$

由此可知，波函数ψ的振幅在整个势阱中保持恒定，不衰减。

3.2 三维无限深球方势阱

三维无限深球方势阱的推导如下[1]：

$$\nabla^2\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0(0 < r < R) \tag{5}$$

球坐标下的拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{l}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{6}$$

分离变量$\psi(r,\theta,\phi) = R_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$，得径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_l + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_l + (\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2})R_l = 0 \tag{7}$$

令$\rho = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r$，得球Bessel方程，$R_l \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}J_{l+1/2}(\rho)$
记$R_l = C_{n_r l}j_l(\rho)$（这里$j_l = J_{l+1/2}$）
边界条件$j_l(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}R) = 0$
设$j_l(x) = 0$的第n个根为x_{nl}，解得

$$E_{n_r l} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}x_{n_r l}^2, \quad R_{n_r l}(r) = C_{n_r l}j_l(\frac{x_{n_r l}}{R}r) \tag{8}$$

归一化系数

$$C_{n_r l} = (-\frac{2}{R^3}/j_{l-1}(\frac{x_{n_r l}}{R}r)j_{l+1}(\frac{x_{n_r l}}{R}r))^{1/2} \tag{9}$$

考虑$l=0$的特殊情况，$R_l \propto \frac{1}{r}\sin(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r)$
边界条件化为$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}R=(n_r+1)\pi$
注意这里的n_r是从0开始的，解得

$$E=E_{n_r0}=\frac{\pi^2\hbar^2(n_r+1)^2}{2mR^2},$$

$$R_{n_r0}(r)=\sqrt{\frac{2}{R}}\frac{1}{r}\sin\frac{(n_r+l)\pi}{R}r \tag{10}$$

考虑基态，即$n_r=l=0$的特殊情况，得

$$E=E_{00}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2},\quad R_{00}(r)=\sqrt{\frac{2}{R}}\frac{1}{r}\sin\frac{\pi}{R}r \tag{11}$$

由此可知，波函数ψ的振幅在r方向（径向）上有衰减。与一维情况不同。

3.3 最简单(Naïve)的口袋模型

把夸克之间的相互作用势近似估计为短程0长程∞，核子半径为R。此时3个夸克在口袋内没有相互作用，3个夸克的波函数均为上式。

考虑基态，$Y_{00}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$，于是

$$\psi(r,\theta,\phi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi R}}\frac{1}{r}\sin\frac{\pi}{R}r,\quad E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2} \tag{12}$$

代入数据$R\sim$1fm，$m\sim$2.4MeV/c^2，得$E\sim$0.5TeV。显然，这个值这太大了，而且在能量这么大的情况下，相对论效应已经很明显了。所以我们应该考虑更好的模型。

3.4 可伸缩的口袋模型

3个夸克的动能之和为$\frac{3\pi^2\hbar^2}{2mR^2}$，对口袋产生作用力$-\frac{\partial}{\partial R}\frac{3\pi^2\hbar^2}{2mR^2}=\frac{3\pi^2\hbar^2}{mR^3}$，使得口袋有向外扩展的趋势（以指向球心为正方向）。考虑可伸缩的口袋，这时需要有外力和它平衡。[2] 使得口袋有向内收缩的趋势的外力有很多，其中最主要的一项是真空能。为了计算方便，这里只考虑真空能。

考虑真空能，$\frac{4\pi}{3}BR^3$，对口袋的作用力为$-\frac{\partial}{\partial R}\frac{4\pi}{3}BR^3=-4\pi BR^2$。受力平衡时

$$\frac{3\pi^2\hbar^2}{mR^3}-4\pi BR^2=0 \tag{13}$$

解得

$$R=(\frac{3\pi\hbar^2}{4mB})^{1/5} \tag{14}$$

由实验测量的宇宙学常数推出（注意这里是B的下限）$B\sim10^{-9}\mathrm{J/m^3}$，得$R=1.44\mu$m

由QED/SED得出的理论值（注意这里是B的上限）$B\sim10^{113}\mathrm{J/m^3}$，得$R=5.7\times10^{-31}$m

由于这里采用了比较早期的资料和参考文献，当时没有给出精确的值，只给了一个估计。所以这里也只估计了上限和下限。近期的文献已经计算出了较精确的值，限于我们讨论的知识范围，这里没有给出其计算。

这两个值的数量级和实际值差距都很大，因为B的估计实在太粗略了，相差120多个数量级，当然，实际值显然包含在这个区间内。

3.5 Bogoliubov 口袋模型

夸克的能量较大，运动速度也较大。这里在最简单(Naïve)的口袋模型中考虑相对论效应，就得到了Bogoliubov口袋模型。[6] 使用狄拉克方程。粒子质量为m, 球形腔半径为R, 势阱的能量为$-V_s$:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta(m-V_s))\psi=E\psi \tag{15}$$

我们设解的形式为:

$$\psi^\mu_\kappa=(g(r)\chi^\mu_\kappa,\ \mathrm{i}f(r)\chi^\mu_{-\kappa}) \tag{16}$$

∇在球坐标中的表示为

$$\nabla=\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}-\mathrm{i}\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{l} \tag{17}$$

分离变量后得到

$$(E+V_s-m)g=-(\frac{df}{dr}+\frac{f}{r})+\kappa\frac{f}{r}$$

$$(E-V_s+m)f=(\frac{dg}{dr}+\frac{g}{r})+\kappa\frac{g}{r} \tag{18}$$

特别地，当$r<R$时$V_s=m$，当$r>R$时$V_s=0$，并且$\kappa=-1$(由于这里是S-wave)，解得

$$g(r)=A\frac{\sin Er}{r}\quad(r<R)$$

$$g(r)=A\frac{\sin Er}{r}e^{-\sqrt{m^2-E^2}(r-R)}\quad(r>R) \tag{19}$$

进一步地，令$m\to\infty$, $r=R^+/R^-$处导数的衔接条件为

$$j_0(ER)=j_1(ER) \tag{20}$$

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}$$

ER满足解$ER=2.04,5.40,\cdots$,对于量子数n,κ,我们标记$E_{n,\kappa}=\omega_{n,\kappa}/R$，最终得到解为($\kappa=-1$):

$$\psi^\mu_{n,-1}=\frac{N_{n,-1}}{\sqrt{4\pi}}[j_0(\omega_{n,-1})\frac{r}{R},\ \mathrm{i}\vec{\sigma}\cdot\hat{r}j_1(\omega_{n,-1})\frac{r}{R}]\chi^\mu_{-1}$$

$$N_{n,-1}=\frac{\omega^3_{n,-1}}{2R^3(\omega_{n,-1}-1)\sin^2(\omega_{n,-1})} \tag{21}$$

对于最低能级$ER=2.04\hbar c$, 代入$R=1\mathrm{fm}$, 估算得

$$E=\frac{2.04\hbar c}{R}=\frac{2.04\times1.06\times10^{-34}\mathrm{J/s}}{1\mathrm{fm}}=405\mathrm{MeV} \tag{22}$$

考虑了相对论之后，能量$\sim\frac{1}{R}$而不是$\sim\frac{1}{R^2}$，能量的估计值大幅降低。

3.6 MIT 口袋模型

对于Bogoliubov模型(三个夸克动能)，考虑可伸缩的口袋，就得到了MIT模型。同样为了计算方便，这里只考虑真空能。[4][5]总能量

$$E=3\frac{\omega_{1,-1}}{R}+\frac{4\pi}{3}BR^3 \tag{23}$$

受力平衡的时候$\frac{\partial E}{\partial R}=0$，解得$R=(\frac{3\omega_{1,-1}}{4\pi B})^{1/4}$
统一量纲，代入B的下限值，得

$$R=(\frac{3\hbar c\omega_{1,-1}}{4\pi B})^{1/4}=62.7\mu\mathrm{m} \tag{24}$$

这里的结果反而比“可伸缩的口袋模型”中的值更大了。若代入B的上限值，得到的结果反而比“可伸缩的口袋模型”中的值更小了。这是因为R由$R\propto B^{-1/5}$变成了$R\propto B^{-1/4}$，对于相同的B的估计范围，R的范围变大了。显然，实际值仍然包含在这个区间中。

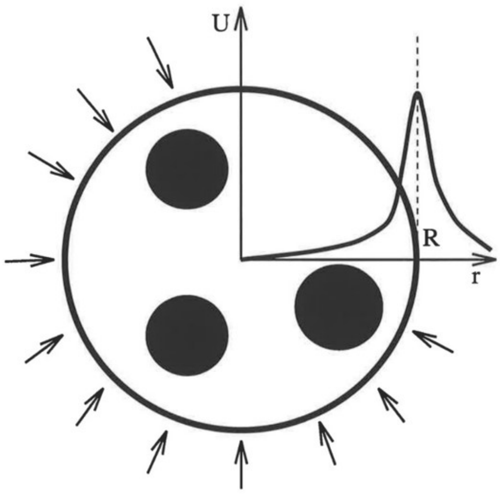

图 6. 口袋模型示意图

4. 结论

我们先简要介绍了夸克的基本知识以及QCD量子色动力学的背景知识和两个主要特性。然后根据三维球方势阱，考虑了几种不同口袋模型，并且分别用它们计算了核子的半径或夸克的能量。由于我们在外力的估算中只考虑了真空能，且在真空能的数据中采用了比较早期的资料和参考文献，因此没有给出精确的值，只得出了一个非常粗略的估计。近期的文献已经有更好的方法来计算其精确值，但是限于我们讨论的知识范围，这里没有给出其计算结果。然而，这些口袋模型仍然可以算是三维球方势阱的比较实际的应用。

致谢

感谢刘玉鑫院长给我们提供的参考文献，以及量子讨论班的各位同学们的积极讨论。

参考文献

[1] 曾谨言. 量子力学（卷一）. 科学出版社, (2007).

[2] 程檀生　钟毓澍. 低能及中高能原子核物理学. 北京大学出版社, (1997).

[3] 卢希庭. 原子核物理（修订版）. 原子能出版社, (2000).

[4] Evguenii N.Rodionov. The mit bag model in nuclear and particle physics. *The University of Adelaide*, (1997).

[5] R. L. Jaffe and F. E. Low. Connection between quark-model eigenstates and low-energy scattering. *Physical Review D*, 19(7):2105–2118, (1979).

[6] Bag models. *https://www.physi.uni−heidelberg.de/fschney/2008SS.../Bagmodels.pdf*.

[7] Wikipage. *https://en.wikipedia.org/wiki/Quark*
https://en.wikipedia.org/wiki/Gluon
https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptoticfreedom
https://en.wikipedia.org/wiki/Landaupole.