利用性质判断级数是否收敛

例1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，请判断级数 $\frac{k+1}{1^2}+\frac{k+2}{2^2}+\cdots+\frac{k+n}{n^2}+\cdots$ 的敛散性 (k＞0)

$$
\begin{aligned}
\frac{k+1}{1^2}+\frac{k+2}{2^2}+\cdots+\frac{k+n}{n^2}+\cdots &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\\
&=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{收敛}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{发散}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}} \quad \text{发散}
\end{aligned}
$$

例2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ 的敛散性

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n}{2}+\frac{u_{n+1}}{2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}u_{n+1}\right)\\
&=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{收敛}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_n}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{收敛}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_{n+1}} \quad \text{收敛}
\end{aligned}
$$

例3. 设常数 $\alpha>0$，请判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2n^2}$ 的敛散性

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha^2}{2}}{n^2}$$

按视频里的公式来判断 ⇒ $p=2>1$ ⇒ 收敛

例4. 设常数 $a>0$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^a\cdot n^{1+\frac{a}{2}}}$ 的敛散性

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2^a}}{n^{1+\frac{a}{2}}}$$

按视频里的公式来判断 ⇒ $p=1+\frac{a}{2}>1$ ⇒ 收敛

例5. 设常数 $k>0$，请判断级数 $\frac{k+1}{1^2}+\frac{k+2}{2^2}+\cdots+\frac{k+n}{n^2}+\cdots$ 的敛散性

$$
\begin{aligned}
\frac{k+1}{1^2}+\frac{k+2}{2^2}+\cdots+\frac{k+n}{n^2}+\cdots &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\\
&=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{收敛}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{发散}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}} \quad \text{发散}
\end{aligned}
$$

利用定义判断级数是否收敛

例1. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 的敛散性，并求值

另一种表述：判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性，并求值

① $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

② $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1\cancel{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cancel{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{4}}+\cdots\cancel{+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ =1-\frac{1}{\infty+1}=1-\frac{1}{\infty}=1-0\ =1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

例2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$ 是否收敛并求值

另一种表述：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 是否收敛并求值

① $u_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$

② $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5\cdot1-4}-\frac{1}{5\cdot1+1}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5\cdot2-4}-\frac{1}{5\cdot2+1}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5\cdot3-4}-\frac{1}{5\cdot3+1}\right)+\cdots+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1\cancel{-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}\cancel{-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}}\cancel{-\frac{1}{16}}\cdots\cancel{+\frac{1}{5n-4}}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5(5n+1)}$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{5(5n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5(5n+1)}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5(5\cdot\infty+1)}=\frac{1}{5}-\frac{1}{\infty}$

$$=\frac{1}{5}-0$$

$$=\frac{1}{5}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$

例3. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[-\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}\right]$ 是否收敛并求值

另一种表述：判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 是否收敛并求值

$u_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\ln\frac{n^2-1}{n^2}$

$=\ln\left[\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right]$

$=\ln\left[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right]$

$=\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}$

$=-\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}$

① $u_n=-\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}$

② $S_n=u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n$

$$=\left(-\ln\frac{2}{2-1}+\ln\frac{2+1}{2}\right)+\left(-\ln\frac{3}{3-1}+\ln\frac{3+1}{3}\right)+\left(-\ln\frac{4}{4-1}+\ln\frac{4+1}{4}\right)+\cdots+\left(-\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=-\ln2\cancel{+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{3}{2}}\cancel{+\ln\frac{4}{3}-\ln\frac{4}{3}}\cancel{+\ln\frac{5}{4}+\cdots}\cancel{-\ln\frac{n}{n-1}}+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=-\ln2+\ln\frac{n+1}{n}$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-\ln2+\ln\frac{n+1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln2)+\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=-\ln2+\ln\left(1+\frac{1}{\infty}\right)$$

$$=-\ln2+\ln(1+0)$$

$$=-\ln2+\ln1$$

$$=-\ln2$$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[-\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}\right]$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[-\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}\right]=-\ln2$

正项级数的审敛流程

例1. 判断级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{n}}$$

$$=2^{-\frac{1}{\infty}}$$

$$=2^{0}$$

$$=1$$

∴ 该级数发散

例2. 判断级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$ 的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=\frac{1}{\infty^\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{\infty}$$

$$=0$$

∴ 该级数收敛

例3. 判断级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}=\frac{1}{\infty\cdot(\infty-1)\cdot(\infty-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{\infty+1}$$

$$=0$$

∴ 该级数收敛

例4. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^n$的敛散性 (常数α>0)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{1+\frac{1}{\infty}}\right)^{\infty}$$

当$\frac{\alpha}{1+\frac{1}{\infty}}>1$时，

即$\frac{\alpha}{1}>1$

即 $\alpha>1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^n\neq 0$

∴该级数发散

当$0<\frac{\alpha}{1+\frac{1}{\infty}}<1$时，

即$0<\frac{\alpha}{1}<1$

即 $0<\alpha<1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^n=0$

需进一步分析

$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\alpha}{n+1}$

$=\alpha\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

$=\alpha\cdot\frac{\infty}{\infty+1}$

$=\alpha\cdot 1$

$=\alpha<1$

∴该级数收敛

当α=1时，

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\cdot\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{-1}{n+1}}$

$=e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}$

$=e^{-\frac{\infty}{\infty+1}}$

$=e^{-1}\neq 0$

∴该级数发散

提示：

将 底数^{指数} 变成 $e^{指数\cdot\ln 底数}$，

$\lim_{n\to ?}e^{指数}=e^{\lim_{n\to ?}指数}$

（详见20小时高数上 第一章【极限】第6课）

提示：

当 n→∞ 时，$\frac{-1}{n+1}\to 0$， 此时：

$\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)$可替换为$\frac{-1}{n+1}$

（详见20小时高数上 第一章【极限】第3课）

综上：$\begin{cases}当\ \alpha\geq 1\ 时，级数发散; \\ 当\ 0<\alpha<1\ 时，级数收敛\end{cases}$

利用比较法判断正项级数的敛散性

例1. 设 α 为常数，请判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ 的敛散性

$$\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}\quad 而\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ 收敛$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\ 收敛$$

例2. 设常数 $\lambda>0$，请判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+\lambda}$ 的敛散性

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+\lambda}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\qquad 而\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\ 收敛$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+\lambda}\ 收敛$$

例3. 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛，请判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的敛散性

$$|a_n|\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda}}\le\frac{1}{2}\cdot a_n{}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+\lambda}\quad 而\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot a_n{}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+\lambda}\right)\ 收敛$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\ 收敛$$

例4. 请判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 的敛散性　(常数$\alpha>0$)

设$u_n=\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$　设$v_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$　而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}=1$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 敛散性相同

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2n^2}$ 收敛

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

$\because$ 当 $\Delta\to0$ 时，$1-\cos\Delta$ 可变为 $\frac{1}{2}\Delta^2$
$\therefore$ 当 $n\to\infty$ 时，即 $\frac{\alpha}{n}\to0$ 时，
$1-\cos\frac{\alpha}{n}$ 可变为 $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$

例5. 请判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性

设$u_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$　设$v_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$　而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=1$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 敛散性相同

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 发散

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

$\because$ 当 $\Delta\to0$ 时，$\ln(1+\Delta)$ 可变为 Δ
$\therefore$ 当 $n\to\infty$ 时，即 $\frac{1}{\sqrt{n}}\to0$ 时，
$\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 可变为 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$

例6. 请判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]^p\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性
(常数$p>0$)

设$u_n=n^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]^p\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

设 $v_n=n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}$　　而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]^p\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}=1$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 敛散性相同

$$\begin{aligned}而\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{2}}\cdot\frac{1}{2^p}\cdot n^{-p}\cdot n^{-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\cdot n^{\frac{p}{2}-p-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\cdot n^{-\frac{p}{2}-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\cdot n^{-\left(1+\frac{p}{2}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2^p}}{n^{1+\frac{p}{2}}}\ 收敛\end{aligned}$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]^p\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]^p\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}{n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

$\because$ 当 $\Delta\to0$ 时，
$(1+\Delta)^\alpha-1$ 可变为 $\alpha\cdot\Delta$，
$\ln(1+\Delta)$ 可变为 Δ
$\therefore$ 当 $n\to\infty$ 时，即 $\frac{1}{n}\to0$ 时，
$n^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]^p\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
可变为 $n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}$

交错级数的审敛流程

例1. 试判断 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性

$a_n=\frac{1}{n}$ $\qquad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$

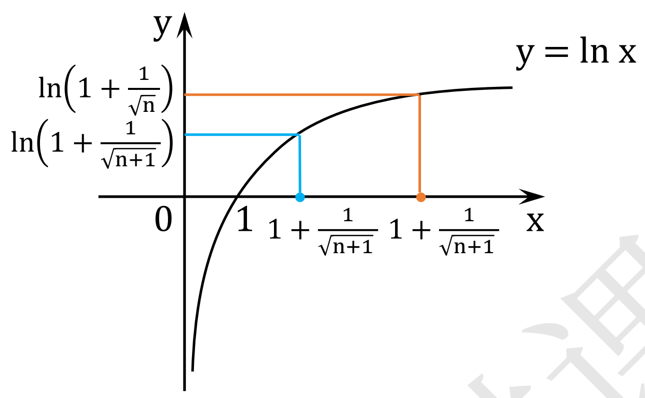
$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n}$ √

$\therefore 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

例2. 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性

$a_n=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\qquad a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)&=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\infty}}\right)\\&=\ln(1+0)\\&=0\end{aligned}$$



$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\le\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ √

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 收敛

例3. 设常数 k>0，请判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ 的敛散性

$a_n=\frac{k+n}{n^2}=\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}$ $\qquad a_{n+1}=\frac{k}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{k+n}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{k}{\infty^2}+\frac{1}{\infty}\\&=0\end{aligned}$$

$\frac{k}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\le\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}$ √

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ 收敛

绝对收敛与条件收敛

例1. 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ （ ）

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 敛散性与 α 取值有关

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}}_{\text{收敛}}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\text{发散}}\quad \text{发散}$$

$\therefore$ 本题选 (C)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 可能 > 0，可能 < 0 不是正项级数也不是交错级数

可能 > 0，可能 < 0

>0

无法常规判断，用绝对收敛来判断

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛 $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛

例2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 的敛散性为 （ ）

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 敛散性与 α 有关

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\,|(-1)^n|\cdot\left|\left(1-\underbrace{\cos\frac{\alpha}{n}}_{[-1,1]}\right)\right|\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\,1\cdot\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\quad \text{收敛}$$

$\therefore$ 原级数绝对收敛，本题选 (C)

例3. 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ （ ）

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 敛散性与 λ 有关

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[|(-1)^n|\cdot\left|\underbrace{\overbrace{\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}}^{\geq 0}}_{>0}\right|\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1\cdot\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\ \text{收敛}$$

$\therefore$ 原级数绝对收敛，本题选 (C)

求幂级数的收敛半径

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径

$a_n=\frac{n}{2^n+(-3)^n}$ $\qquad a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}$

① $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}}{\frac{n}{2^n+(-3)^n}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+(-3)}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+(-3)}\right|$

（详见20小时高数上 第一章【极限】第8课）

当 $\lim\limits_{x\to x_0}a(x)\neq0$ 或 ∞ 时，

$\lim\limits_{x\to x_0}[a(x)\cdot b(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}a(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}b(x)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+(-3)}\right|$

求$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，可只保留分子分母上指数最大的无穷大项

$=1\cdot\left|\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^\infty+1}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^\infty+(-3)}\right|$

$=\left|\frac{0+1}{2\cdot0+(-3)}\right|=\frac{1}{3}$

② $R=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot3^n}$ 的收敛半径

$a_n=\frac{1}{n\cdot3^n}$ $\qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot3^{n+1}}$

① $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot3^n}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{3}\right|$

$=\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|$

$=\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|$

$=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$

② $R=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{1}}=3^1=3$

例3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 3，求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径

$a_n=nb_n$ $\qquad a_{n+1}=(n+1)b_{n+1}$

① $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)b_{n+1}}{nb_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

（详见20小时高数上 第一章【极限】第8课）

当 $\lim\limits_{x\to x_0}a(x)\neq0$ 或 ∞ 时，

$\lim\limits_{x\to x_0}[a(x)\cdot b(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}a(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}b(x)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

求$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，可只保留分子分母上指数最大的无穷大项

$=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

$\because R_{已知}=3$

$\therefore\left(\frac{1}{\rho_{已知}}\right)^{\frac{1}{k_{已知}}}=3$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{\rho_{已知}}\right)^{\frac{1}{1}}=3$

$\Rightarrow\frac{1}{\rho_{已知}}=3$

$\Rightarrow\rho_{已知}=\frac{1}{3}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{1}{3}$

② $R=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{1}}=3^1=3$

求幂级数有理运算后的收敛半径

例. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$的收敛半径

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n=\frac{[3+(-1)^1]^1}{1}x^1+\frac{[3+(-1)^2]^2}{2}x^2+\frac{[3+(-1)^3]^3}{3}x^3+\frac{[3+(-1)^4]^4}{4}x^4+\frac{[3+(-1)^5]^5}{5}x^5+\frac{[3+(-1)^6]^6}{6}x^6+\frac{[3+(-1)^7]^7}{7}x^7+\frac{[3+(-1)^8]^8}{8}x^8+\cdots$$

$$=\frac{2^1}{1}x^1+\frac{4^2}{2}x^2+\frac{2^3}{3}x^3+\frac{4^4}{4}x^4+\frac{2^5}{5}x^5+\frac{4^6}{6}x^6+\frac{2^7}{7}x^7+\frac{4^8}{8}x^8+\cdots$$

$$=\frac{2^1}{1}x^1+\frac{2^3}{3}x^3+\frac{2^5}{5}x^5+\frac{2^7}{7}x^7+\cdots+\frac{4^2}{2}x^2+\frac{4^4}{4}x^4+\frac{4^6}{6}x^6+\frac{4^8}{8}x^8+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$$

第一部分的收敛半径：$a_n=\frac{2^{2n-1}}{2n-1}\qquad a_{n+1}=\frac{2^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}}{\frac{2^{2n-1}}{2n-1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2(n+1)-1}}{2^{2n-1}}\cdot\frac{2n-1}{2(n+1)-1}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+1}}{2^{2n-1}}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n-1}\cdot 2^2}{2^{2n-1}}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|4\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\right|$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|$$

$$=4\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{2n}\right|$$

求$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，可只保留分子分母上指数最大的无穷大项

$$=4\cdot 1=4$$

$$R=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

第二部分的收敛半径：$a_n=\frac{4^{2n}}{2n}\qquad a_{n+1}=\frac{4^{2(n+1)}}{2(n+1)}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{4^{2n}}{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{2(n+1)}}{4^{2n}}\cdot\frac{2n}{2(n+1)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|4^2\cdot\frac{n}{n+1}\right|$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|$$

求$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，可只保留分子分母上指数最大的无穷大项

$$=16\cdot 1=16$$

$$R=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

综上，原级数的收敛半径$=\frac{1}{4}$

求幂级数收敛半径(阿贝尔定理)

例1. 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，求该级数的收敛半径

$|0-x_0| \le R$ 　即 $|x_0| \le R$ 　　　　　$|-4-x_0| \ge R$ 即 $|x_0+4| \ge R$

$\sum a_n(x+2)^n$ 可以写成 $\sum a_n[x-(-2)]^n$

$\therefore x_0=-2$

将 $x_0=-2$ 代入上面的两个不等式，有

$|-2| \le R$ 　　　$|-2+4| \ge R$

化简得 $2 \le R$ 　　$2 \ge R$

$\therefore R=2$

例2. 若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛， 在 $x=2$处发散，求级数的收敛半径

$|0-x_0| \le R$ 　即 $|x_0| \le R$ 　　　　　$|2-x_0| \ge R$

由 $\sum a_n(x-1)^n$ 可知 $x_0=1$

将 $x_0=1$ 代入上面的两个不等式，有

$|1| \le R$ 　　　$|2-1| \ge R$

化简得 $1 \le R$ 　　$1 \ge R$

$\therefore R=1$

例2变形1. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛半径

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0-1)^n$ 收敛

$\Rightarrow$ 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1^n$ 发散

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (2-1)^n$ 发散

$\Rightarrow$ 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在$x=2$处发散

由例2的计算过程可知，R=1

例2变形2. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty} a_n=0$，$S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n$ $(k=1,2,\cdots)$ 无界，求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径

$S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n$ $(k=1,2,\cdots)$ 无界 $\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\cdots=\infty$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\cdots$ 发散

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

$$\left.\begin{array}{l}\text{数列 } \{a_n\} \text{ 单调减少} \Rightarrow a_{n+1} < a_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow a_n > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ 收敛}$$

由例2变形1的计算过程可知，R=1

例3. 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处

(A)条件收敛 　(B)绝对收敛 　(C)发散 　(D)敛散性不能确定

-1 满足 $|-1-1| \le R \Rightarrow R \ge 2$

在 x=2 处 $|x-x_0|=|2-1|=1$

$\therefore$在 x=2 处 $|x-x_0|<R$

$\therefore$在 x=2 处此级数绝对收敛，选(B)

求幂级数的收敛区间、收敛域

例1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 3，求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n b_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间

① $x_0=1$

② $a_n = nb_n \qquad a_{n+1} = (n+1)b_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)b_{n+1}}{nb_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \\
&= 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|
\end{aligned}
$$

（详见20小时高数上 第一章【极限】第8课）

当 $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)\neq 0$ 或 ∞ 时，

$\lim\limits_{x\to x_0}[a(x)\cdot b(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} a(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} b(x)$

求$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，可只保留分子分母上指数最大的无穷大项

$\because R_{已知} = 3$

$\therefore \left(\frac{1}{\rho_{已知}}\right)^{\frac{1}{k_{已知}}} = 3$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\rho_{已知}}\right)^{\frac{1}{1}} = 3$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho_{已知}} = 3$

$\Rightarrow \rho_{已知} = \frac{1}{3}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{3}$

$$R = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{1}} = 3^1 = 3$$

③ 收敛区间为 $(1-3, 1+3)$ 即 $(2,4)$

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域

① $x_0=3$

② $a_n = \frac{1}{n\cdot 3^n} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 3^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{3}\right| \\
&= \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \\
&= \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right| \\
&= \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$R = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{1}} = 3^1 = 3$$

③ 将 x=3−3=0 代入 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0-3)^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛

$a_n = \frac{1}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$ √

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ √

$\therefore \sum\limits^{\infty}_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛

将 x=3+3=6 代入 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(6-3)^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ p=1，发散

④ 所求收敛域为 $[0, 6)$

例3. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 x=0 处收敛，在 x=−4 处发散，

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 的收敛域

$x-(-2)$

① $x_0=-2$

② $|0-(-2)| \leq R$ 即 $2 \leq R$　　$|-4-(-2)| \geq R$ 即 $2 \geq R$

$\therefore R=2$

③ 将 $x=-2-2=-4$ 代入 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$　　发散

将 $x=-2+2=0$ 代入 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$　　收敛

④ 所求收敛域为 $(-4,0]$

收敛区间与幂级数敛散性

例1. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在 $x=-2$ 处条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在 $x=-1$ 处

(A)绝对收敛 (B)条件收敛 (C)发散 (D)敛散性受a的影响

$a_n=\frac{1}{n}$ $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ $\Rightarrow$ 收敛半径 R= $\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}}=1$

$x_*=x_0\pm R$

$\Rightarrow -2=a\pm1$ $\Rightarrow$ a$=-3$ 或 $a=-1$

假设a$=-3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[x-(-3)]^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n}\xlongequal{\text{当}x=-2\text{时}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 ×

假设a$=-1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[x-(-1)]^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n}\xlongequal{\text{当}x=-2\text{时}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛 √

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[|(-1)^n|\cdot|\frac{1}{n}|]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

经过判断，$a=-1$

$\therefore$ 收敛区间为 $(-1-R,-1+R)$ 即 $(-1-1,-1+1)$ 即 $(-2,0)$

$\because -2<-1<0$

$\therefore$ 级数在 $x=-1$ 处绝对收敛，选(A)

例2. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=2$处 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与$x=3$ 依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的

(A)收敛点，收敛点 (B)收敛点，发散点 (C)发散点，收敛点 (D)发散点，发散点

$x_*=x_0\pm R$

$\Rightarrow$ $2=1\pm R\Rightarrow R=\pm1$

$\because R>0$，$\therefore R=1$

收敛区间为 $(1-R,1+R)$ 即 $(1-1,1+1)$ 即 $(0,2)$

$0<\sqrt{3}<2$ $\Rightarrow x=\sqrt{3}$ 为收敛点

$3>2$ $\Rightarrow x=3$ 为发散点

将 f(x) 展开成幂级数

例1. 将函数 $f(x)=\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}$ 展开成 x 的幂级数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\
&= \sum\frac{3x}{2}\cdot(-1)^n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\
&= \sum\frac{3\cdot(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

$$\left(-1<\frac{x^2}{2}<1\right) \Downarrow (-2<x^2<2) \Downarrow (x^2<2) \Downarrow (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$$

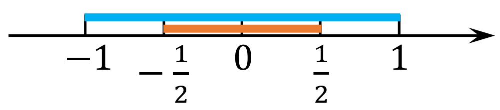
注: $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 满足函数表达式的定义

例2. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$ 展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}$$

$(-1<x\le 1)$ $(-1<-2x\le 1)$

$\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)$



$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n-1}\frac{(-2)^n\cdot x^n}{n}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}\cdot[1+(-2)^n]}{n}\cdot x^n\right] \qquad \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

注: $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$ 满足函数表达式的定义

例1变形. 将函数 $f(x)=\frac{3x}{2+x^2}$ 展开成 x 的幂级数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x\cdot\frac{1}{2+x^2} \\
&= 3x\cdot\frac{1}{2\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}\right)} \\
&= \frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{3x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3x}{2}\cdot(-1)^n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot x^{2n+1} \qquad (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

例2. 将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\cdot\frac{1}{2+x-x^2} \\
&= x\cdot\frac{1}{-(x^2-x-2)} \\
&= x\cdot\frac{1}{-(x+1)(x-2)} \\
&= -x\cdot\frac{1}{(x+1)(x-2)} \\
&= -x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\right) \\
&= -x\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)\right] \\
&= x\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right] \\
&= \frac{x}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{-2+x}=\frac{1}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$x^2+(-1)x+(-2)$

设 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

则有 $\begin{cases}a+b=-1\\ ab=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$

$\Rightarrow$ a+b=−1、ab=−2

设 $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow a(x-2)+b(x+1)=1$

$\Rightarrow (a+b)x-2a+b-1=0$

$\Rightarrow \begin{cases}a+b=0\\ -2a+b-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}$

例2. 将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数

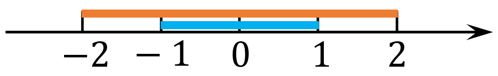
$$f(x)=\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)$$

$$=\frac{x}{3}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$

$(-1<x<1)$ $\quad$ $\left(-1<\frac{x}{2}<1\right)$

$\Downarrow$

$(-2<x<2)$



$$=\frac{x}{3}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\quad(-1<x<1)$$

$$=\frac{x}{3}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\quad(-1<x<1)$$

$$=\frac{x}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\quad(-1<x<1)$$

$$=\frac{x}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^n+\frac{x^n}{2^{n+1}}\right]\quad(-1<x<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{3}\cdot\left[(-1)^n x^n+\frac{x^n}{2^{n+1}}\right]\quad(-1<x<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}\quad(-1<x<1)$$

注: 函数表达式里 $x\neq-1$ 且 $x\neq-2$

$-1<x<1$满足函数表达式的定义

例3. 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$$

$$=\arctan\frac{1-2x}{1+1\cdot 2x}$$

$$=\arctan 1-\arctan 2x$$

$$=\frac{\pi}{4}-\arctan 2x$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{2x}(\arctan t)'\,dt+\arctan 0$$

$$=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(2x)^{2n+1}\quad(-1\le 2x\le 1)$$

$\Downarrow$

$$=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\quad\left(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\right)$$

函数表达式里 $1+2x\neq 0\Longrightarrow x\neq-\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\quad\left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right)$$

例4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$$

$$=\frac{1}{4}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\frac{1}{2}\arctan x-x$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\left[\int_0^x(\arctan t)'\,dt+\arctan 0\right]-x$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-x$$

$(-1<x\leq1)$ $(-1<-x\leq1)$ $(-1\leq x\leq1)$

$\Downarrow$

$(-1\leq x<1)$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-x \quad (-1<x<1)$$

$(-1)^{\text{奇数}}=-1$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-x$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{x^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-x$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-x$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\ x\cancel{-\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}\cancel{-\frac{x^4}{4}}+\frac{x^5}{5}\cancel{-\frac{x^6}{6}}+\frac{x^7}{7}-\cdots$$

$$+x\cancel{+\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}\cancel{+\frac{x^4}{4}}+\frac{x^5}{5}\cancel{+\frac{x^6}{6}}+\frac{x^7}{7}+\cdots\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}-\cdots\right]-x$$

$$=\frac{1}{4}\left[2x+2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}-\cdots\right]-x$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}-\cdots\right]-x$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x\cancel{+\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{5}\cancel{+\frac{x^7}{7}}+\frac{x^9}{9}\cancel{+\frac{x^{11}}{11}}+\frac{x^{13}}{13}+\cdots$$

$$+\quad x\cancel{-\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{5}\cancel{-\frac{x^7}{7}}+\frac{x^9}{9}\cancel{-\frac{x^{11}}{11}}+\frac{x^{13}}{13}-\cdots\Big]-x$$

$$=\frac{1}{2}\left[2x+2\cdot\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^9}{9}+2\cdot\frac{x^{13}}{13}+\cdots\right]-x$$

$$=\cancel{x+}\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{13}}{13}+\cdots\qquad\cancel{-x}$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{13}}{13}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\qquad(-1<x<1)$$

注: $-1<x<1$ 满足函数表达式的定义

幂级数求和函数：利用常用展开式

例1. 求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{x^n}{2^n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}=e^{\frac{1}{2}x}\quad(-\infty<\frac{1}{2}x<+\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

$x_0=0$

$a_n=\frac{1}{2^n n!}\qquad a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1}{2^n n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^1\cdot(n+1)\cdot n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2(n+1)}\right|=\left|\frac{1}{2(\infty+1)}\right|=0$$

$\therefore$ 收敛半径R=$+\infty$

收敛域为$(-\infty,+\infty)$

检验下 x=0 时的情况：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\cdot 0^n=\frac{1}{2^0\cdot 0!}\cdot 0^0+\frac{1}{2^1\cdot 1!}\cdot 0^1+\frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot 0^2+\cdots$

$$=\frac{1}{2^0\cdot 0!}\cdot 1+0+0+\cdots$$

$$=\frac{1}{1\cdot 1}\cdot 1$$

$$=1$$

$$e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=e^0=1$$

收敛域是开区间，$\therefore$ 收敛域左右端点不需要检验

综上，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=e^{\frac{1}{2}x}\quad(-\infty<x<+\infty)$

例2. 求$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n$的和函数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{x^n}{2^n}}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}$$

$$=\underset{n=0}{\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}}+\underset{n=1}{\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}}+\underset{n=2}{\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}}+\underset{n=3}{\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}}+\cdots-\underset{n=0}{\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}}-\underset{n=1}{\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}-\frac{(\frac{x}{2})^0}{0!}-\frac{(\frac{x}{2})^1}{1!}$$

$$=e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{1}-\frac{\frac{x}{2}}{1!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$=e^{\frac{1}{2}x}-1-\frac{x}{2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

本题里级数的收敛域与例1里的一样，收敛域为$(-\infty,+\infty)$

检验下 x=0 时的情况：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\cdot 0^n=\frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot 0^2+\frac{1}{2^3\cdot 3!}\cdot 0^3+\cdots=0$

$$e^{\frac{1}{2}\cdot 0}-1-\frac{0}{2}=e^0-1-0=1-1=0$$

收敛域是开区间，$\therefore$ 收敛域左右端点不需要检验

综上，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=e^{\frac{1}{2}x}-1-\frac{x}{2}\quad(-\infty<x<+\infty)$

例3. 求$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数

令 $n+1=a \quad \Rightarrow n=a-1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\sum_{a-1=2}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{a}=\sum_{a=3}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{a}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n}\cdot x^{-1}}{n}=x^{-1}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=x^{-1}\cdot\left[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right]\quad(-1\le x<1)$$

$$=-\frac{\ln(1-x)}{x}-1-\frac{x}{2}\quad(-1\le x<1)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\underset{n=1}{\frac{x^n}{n}}+\underset{n=2}{\frac{x^n}{n}}+\underset{n=3}{\frac{x^n}{n}}+\underset{n=4}{\frac{x^n}{n}}+\cdots-\underset{n=1}{\frac{x^n}{n}}-\underset{n=2}{\frac{x^n}{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{x^1}{1}-\frac{x^2}{2}$$

$$=-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\qquad(-1\le x<1)$$

下面求$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域

$\frac{\infty}{\infty}$型，只保留分子分母中指数最大的无穷大项

$a_n=\frac{1}{n+1}$ ，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1+1}=\frac{1}{n+2}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|=1$$

∴收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$

∴ $x_0-R=0-1=-1$， $x_0+R=0+1=1$

∵ $x=-1$时，该级数$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}$收敛

∵ $a_n=\frac{1}{n+1}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0$

∵ $a_{n+1}=\frac{1}{n+1+1}<\frac{1}{n+1}=a_n$

∴ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}$ 收敛

$x=1$时，该级数$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$

∴ $\sum\frac{1}{n+1}$ 与 $\sum\frac{1}{n}$ 具有相同敛散性

∵ $\sum\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\frac{1}{n+1}$发散

∴该幂级数收敛域为 $[-1,1)$

检验下 x=0 时的情况:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{0^n}{n+1}=\frac{0^2}{2+1}+\frac{0^3}{3+1}+\frac{0^4}{4+1}+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$ 而$-\frac{\ln(1-x)}{x}-1-\frac{x}{2}$在x=0时无意义

检验下 x=−1 时的情况:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\frac{(-1)^2}{2+1}+\frac{(-1)^3}{3+1}+\frac{(-1)^4}{4+1}+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots-1+\frac{1}{2}$$
$$=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1^n}{n}\right]-1+\frac{1}{2}$$
$$=\ln(1+1)-1+\frac{1}{2}=\ln2-\frac{1}{2}$$

根据视频里的表

$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

$\therefore\ln(1+1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

$$-\frac{\ln[1-(-1)]}{-1}-1-\frac{-1}{2}=-\frac{\ln2}{-1}-1+\frac{1}{2}=\ln2-\frac{1}{2}$$

综上，
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}-\frac{\ln(1-x)}{x}-1-\frac{x}{2}, & -1\le x<0,\ 0<x<1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

例4. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{(n-1)!}$的和函数

令 $n-1=a \quad \Rightarrow n=a+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{(n-1)!}=\sum_{a+1=1}^{\infty}\frac{(a+1)\cdot(\frac{x}{2})^{a+1}}{a!}=\sum_{a=0}^{\infty}\frac{(a+1)\cdot(\frac{x}{2})^{a+1}}{a!}=\sum_{a=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot(\frac{x}{2})^{n+1}}{n!}=\frac{x}{2}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot(\frac{x}{2})^{n}}{n!}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}+\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{x}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{x}{2}\left[\ \frac{x}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\quad+\quad e^{\frac{1}{2}x}\ \right]$$

$(-\infty<x<+\infty)\qquad(-\infty<x<+\infty)$

$$=\frac{x^2+2x}{4}e^{\frac{1}{2}x}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}=\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}$$

$$=\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n\cdot(n-1)!}$$

$$=\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{(n-1)!}$$

$$=\quad 0\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{(n-1)!}\qquad 令\ n-1=a\quad\Rightarrow n=a+1$$

$$=\sum_{a+1=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{a+1}}{a!}$$

$$=\sum_{a=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{a+1}}{a!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{n+1}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{n}\cdot\frac{x}{2}}{n!}$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}$$

根据例1可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=e^{\frac{1}{2}x}\quad(-\infty<x<+\infty)$

$x_0=0$

$$a_n=\frac{n}{2^n(n-1)!},\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}(n+1-1)!}=\frac{n+1}{2^{n+1}\cdot n!}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}\cdot n!}}{\frac{n}{2^n(n-1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}\cdot n!}\cdot\frac{2^n(n-1)!}{n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n-1)!}{2\cdot n\cdot n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n-1)!}{2\cdot n\cdot n(n-1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{2n^2}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n}\right|=\left|\frac{1}{2\cdot\infty}\right|=0$$

$\therefore$ 收敛半径R=+∞

$\frac{\infty}{\infty}$型，只保留分子分母中指数最大的无穷大项

收敛域为$(-\infty,+\infty)$

检验下 x=0 时的情况：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{0}{2})^n}{(n-1)!}=\frac{1\cdot(\frac{0}{2})^1}{(1-1)!}+\frac{2\cdot(\frac{0}{2})^2}{(2-1)!}+\frac{3\cdot(\frac{0}{2})^3}{(3-1)!}+\cdots$

$$=\frac{1\cdot 0}{0!}+\frac{2\cdot 0}{1!}+\frac{3\cdot 0}{2!}+\cdots$$

$$=\frac{0}{1}+\frac{0}{1!}+\frac{0}{2!}+\cdots$$

$$=0$$

$$\frac{0^2+2\cdot 0}{4}e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=\frac{0+0}{4}e^0=0\cdot 1=0$$

综上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\frac{x}{2})^n}{(n-1)!}=\frac{x^2+2x}{4}e^{\frac{1}{2}x}\quad(-\infty<x<+\infty)$

幂级数求和函数：利用求导积分

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的和函数

① $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\int\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'dx+$ 合适的C

$=\int\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'dx+$ 合适的C

$=\int\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^2)^n\,dx+$ 合适的C

$=\int\frac{1}{1-x^2}dx+$ 合适的C （$-1<x^2<1$）

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+$ 合适的 C （$-1<x^2<1$）

$\left(\frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)'=\frac{1}{a^2-x^2}$

$\left(\frac{1}{2\cdot1}\cdot\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)'=\frac{1}{1^2-x^2}$

即 $\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)'=\frac{1}{1-x^2}$

$\therefore\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}0^{2n+1}=\frac{1}{2\cdot0+1}0^{2\cdot0+1}+\frac{1}{2\cdot1+1}0^{2\cdot1+1}+\cdots=0$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|+$ 合适的 C $=$ 合适的 C

$\therefore$ 合适的 $C=0$

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

② $a_n=\frac{1}{2n+1}$，$a_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)+1}$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}}\right|=1\neq0$ 或 $+\infty$

$\therefore$ 收敛半径 $R=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{2}}=1$

$\therefore x_0-R=0-1=-1$，$x_0+R=0+1=1$

当 $x=-1$ 时，原级数 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(-1)^{2n+1}$

$=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散

当 $x=1$ 时，原级数 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}1^{2n+1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散

$\therefore$ 原级数收敛域为 $(-1,1)$

为什么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散？

求$\frac{\infty}{\infty}$型极限时，可只保留分子分母上指数最大的无穷大项

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 有相同敛散性

$\because\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散

③ 当 $x=0$ 时，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}0^{2n+1}=\frac{1}{2\cdot0+1}0^{2\cdot0+1}+\frac{1}{2\cdot1+1}0^{2\cdot1+1}+\cdots=0$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|=\frac{1}{2}\ln1=0$

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ （$-1<x<1$）

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数

① $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\text{积分后式子}\right]\text{对应的}S(x)\right]'$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}\text{对应的}S(x)\right]'$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}\text{对应的}S(x)\right]'$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1+1}}{(2n+1)!}\text{对应的}S(x)\right]'$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}\cdot x}{(2n+1)!}\text{对应的}S(x)\right]'$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{对应的}S(x)\right]'$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sin x\right]'\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$=\left[\frac{x}{2}\right]'\cdot\sin x+\frac{x}{2}\cdot[\sin x]'\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$=\frac{\sin x+x\cos x}{2}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\int(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,dx=\int\frac{1}{2}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}+C$$

② $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$， $a_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)+1}{[2(n+1)+1]!}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)+1}{[2(n+1)+1]!}}{(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1\cdot\frac{n+2}{(2n+3)!}}{\frac{n+1}{(2n+1)!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}}{\frac{n+1}{(2n+1)!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{(2n+3)(2n+2)(n+1)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{4n^3+14n^2+16n+6}\right|$$

求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限时，可只保留分子与分母上指数最大的无穷大项

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{4n^3}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{4n^2}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{4\cdot\infty^2}\right|=\frac{1}{\infty}=0$$

∴ 收敛半径 R=+∞

收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

③ 当 x=0 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}0^{2n+1}$$

$$=(-1)^0\frac{0+1}{(2\cdot0+1)!}0^{2\cdot0+1}+(-1)^1\frac{1+1}{(2\cdot1+1)!}0^{2\cdot1+1}+\cdots$$

$$=0$$

$$\frac{\sin0+0\cdot\cos0}{2}=\frac{0+0\cdot1}{2}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{\sin x+x\cos x}{2}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

幂级数求和函数：利用微分方程

例1. (1) 验证幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\,(-\infty<x<+\infty)$的和函数 $y(x)$ 是否满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

(2) 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 $y(x)$

(1) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

$=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots$

$y'=[1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots]'$

$=0+\frac{3x^2}{3!}+\frac{6x^5}{6!}+\frac{9x^8}{9!}+\cdots$

$=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$

$y''=\left[\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots\right]'$

$=\frac{2x}{2!}+\frac{5x^4}{5!}+\frac{8x^7}{8!}+\cdots$

$=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$

$\therefore y''+y'+y=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots$

$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$

$=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$=e^x$

∴题目得证

(2) $y''+y'+y=e^x$

$f(x)=e^x=1\cdot x^0\cdot e^{1\cdot x}$

① $y''+y'+y=0$

$y^{(2)}\ \ y^{(1)}\ \ y^{(0)}$

$r^2\ \ \ r^1\ \ \ r^0$

$r^2+r^1+r^0=0$

$\Rightarrow r^2+r+1=0$

$\Rightarrow \left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$

解得：$r_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$r_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

一对复根 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

解：$e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

特征方程的通解为：

$\bar{y}=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

② $f(x)=1\cdot x^0\cdot e^{1\cdot x}$

$\lambda=1$，$m=0$

③ λ 不是特征方程的根 $\Rightarrow k=0$

④ $y^*=x^0\cdot b_0x^0\cdot e^{1\cdot x}=b_0\cdot e^x$

将 $y^*=b_0\cdot e^x$ 代入 $y^{*\prime\prime}+y^{*\prime}+y^*=e^x$：

$(b_0\cdot e^x)''+(b_0\cdot e^x)'+(b_0\cdot e^x)=e^x$

$\Rightarrow 3b_0\cdot e^x=e^x$

$\Rightarrow b_0=\frac{1}{3}$

$\therefore y^*=\frac{1}{3}e^x$

⑤ 通解 $y=\bar{y}+y^*=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$

$y(0)=e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\cdot\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)\right]+\frac{1}{3}e^0$

$=e^0\cdot[C_1\cos 0+C_2\sin 0]+\frac{1}{3}e^0$

$=1\cdot(C_1\cdot 1+C_2\cdot 0)+\frac{1}{3}\cdot 1$

$=C_1+\frac{1}{3}$

$y(0)=1+\frac{0^3}{3!}+\frac{0^6}{6!}+\frac{0^9}{9!}+\cdots=1$

$\therefore C_1+\frac{1}{3}=1\ \Rightarrow C_1=\frac{2}{3}$

∴通解 $y=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$

$y'=\left[e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x\right]'$

$=\left[e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]'+\left[\frac{1}{3}e^x\right]'$

$=\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)'\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)'+$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
$+e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
$+e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$

$y'(0)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\cdot\left[\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)\right]$
$+e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)\right]+\frac{1}{3}e^0$

$=-\frac{1}{2}e^0\cdot\left[\frac{2}{3}\cos 0+C_2\sin 0\right]+e^0\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 0+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos 0\right]+\frac{1}{3}e^0$

$=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 1+C_2\cdot 0\right]+1\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cdot 1\right]+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{2}C_2$

$y'(0)=\frac{0^2}{2!}+\frac{0^5}{5!}+\frac{0^8}{8!}+\cdots=0$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}C_2=0\ \Rightarrow C_2=0$

综上，通解 $y=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+0\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$

$=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+0\right)+\frac{1}{3}e^x$

$=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$

即 和函数 $y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x\ (-\infty<x<+\infty)$

例2. 设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$

(1) 验证幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-y=0$

(2) 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $y(x)$

(1) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$y''=(\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1})'$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n a_n x^{n-1})'$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\therefore y''-y=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$=\cancel{0(0-1)a_0x^{0-2}+1(1-1)a_1x^{1-2}}+2(2-1)a_2x^{2-2}+3(3-1)a_3x^{3-2}$

$+4(4-1)a_4x^{4-2}+5(5-1)a_5x^{5-2}+\cdots$

$-(a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)$

$=(2\cdot1\cdot a_2-a_0)x^0+(3\cdot2\cdot a_3-a_1)x^1+(4\cdot3\cdot a_4-a_2)x^2+(5\cdot4\cdot a_5-a_3)x^3+\cdots$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n]\cdot x^n$

设 $\alpha=n-2$ 即 $n=\alpha+2$

$a_{\alpha+2-2}-(\alpha+2)(\alpha+2-1)a_{\alpha+2}=0$

$(\alpha+2)(\alpha+1)a_{\alpha+2}-a_\alpha=0$

$(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n=0$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0=0$，∴题目得证

(2) $y''-y=0$

$y^{(2)}$ $y^{(0)}$

① r^2 r^0

$r^2-r^0=0$

② $\Longrightarrow r^2-1=0$

$\Longrightarrow (r+1)(r-1)=0$

解得：$r_1=-1$，$r_2=1$

③ 单实根 $\alpha_1=-1$，$\alpha_2=1$

解：$C_1\cdot e^{-x}$ $C_2\cdot e^{x}$

④ 通解 $y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x}$

$y(0)=C_1\cdot e^{-0}+C_2\cdot e^{0}=C_1\cdot 1+C_2\cdot 1=C_1+C_2$

$y(0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 0^n$

$=a_0\cdot 0^0+a_1\cdot 0^1+a_2\cdot 0^2+\cdots$

$=a_0\cdot 1+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\cdots$

$=a_0$

$=3$

$\therefore C_1+C_2=3$

$y'=(C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x})'=(C_1\cdot e^{-x})'+(C_2\cdot e^{x})'=-C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x}$

$y'(0)=-C_1\cdot e^{-0}+C_2\cdot e^{0}=-C_1\cdot 1+C_2\cdot 1=-C_1+C_2$

$y'(0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n 0^{n-1}$

$=1\cdot a_1\cdot 0^{1-1}+2\cdot a_2\cdot 0^{2-1}+3\cdot a_3\cdot 0^{3-1}+\cdots$

$=a_1\cdot 0^0+2a_2\cdot 0^1+3a_3\cdot 0^2+\cdots$

$=a_1\cdot 1+2a_2\cdot 0+3a_3\cdot 0+\cdots=a_1=1$

$\therefore -C_1+C_2=1$

联立上面两个方程 $\Longrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases}$

∴通解 $y=1\cdot e^{-x}+2\cdot e^{x}$

$=e^{-x}+2e^{x}$

即 和函数 $y(x)=e^{-x}+2e^{x}$

$x\in(-\infty,+\infty)$

$\because a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$

$\Longrightarrow a_n=\dfrac{a_{n-2}}{n(n-1)}$

$\Longrightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_{n+1-2}}{(n+1)(n+1-1)}=\dfrac{a_{n-1}}{n(n+1)}$

$\therefore \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{a_{n-1}}{n(n+1)}}{\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(n-1)}{n(n+1)}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(n-1)}{n(n+1)}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|$

$=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|$

$\because a_n=\dfrac{a_{n-2}}{n(n-1)}$，$a_0=3$

$\therefore a_2=\dfrac{a_0}{2(2-1)}=\dfrac{3}{2\cdot1}=\dfrac{3}{2!}$

$a_4=\dfrac{a_2}{4(4-1)}=\dfrac{\frac{3}{2!}}{4\cdot3}=\dfrac{3}{4!}$

$a_6=\dfrac{a_4}{6(6-1)}=\dfrac{\frac{3}{4!}}{6\cdot5}=\dfrac{3}{6!}$

$\Longrightarrow$ n为偶数时：$a_n=\dfrac{3}{n!}$

$\because a_n=\dfrac{a_{n-2}}{n(n-1)}$，$a_1=1$

$\therefore a_3=\dfrac{a_1}{3(3-1)}=\dfrac{1}{3\cdot2\cdot1}=\dfrac{1}{3!}$

$a_5=\dfrac{a_3}{5(5-1)}=\dfrac{\frac{1}{3!}}{5\cdot4}=\dfrac{1}{5!}$

$a_7=\dfrac{a_5}{7(7-1)}=\dfrac{\frac{1}{5!}}{7\cdot6}=\dfrac{1}{7!}$

$\Longrightarrow$ n为奇数时：$a_n=\dfrac{1}{n!}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{3}{(n-1)!}}{\frac{1}{(n-2)!}}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{3}{(n-2)!}}\right|$

$\left(\begin{matrix} n-1\text{为偶} \\ n-2\text{为奇} \end{matrix}\text{时}\right)$ $\left(\begin{matrix} n-1\text{为奇} \\ n-2\text{为偶} \end{matrix}\text{时}\right)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{3}{(n-1)!}}{\frac{1}{(n-2)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n-1}=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{3}{(n-2)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3(n-1)}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|=0$ 或 $0\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|=0\Longrightarrow \rho=0\Longrightarrow R=+\infty$

$\Longrightarrow$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$

例3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$

满足 $y'' - 2xy' - 4y = 0$，且 $y(0)=0$，$y'(0)=1$

(1) 证明 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$，$n=1,2,3\cdots$

(2) 求 $y(x)$ 的表达式

(1) $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y' = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$y'' = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1})'$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n a_n x^{n-1})'$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$y'' - 2xy' - 4y = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{0}{n(n-1)a_n x^{n-2}} - \underset{0}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \cancel{0(0-1)a_0x^{0-2} + 1(1-1)a_1x^{1-2}} + 2(2-1)a_2x^{2-2} + 3(3-1)a_3x^{3-2}$$

$$+ 4(4-1)a_4x^{4-2} + 5(5-1)a_5x^{5-2} + \cdots$$

$$- 2x\cdot(\overset{0}{\cancel{0 \cdot a_0 x^{0-1}}} + 1\cdot a_1x^{1-1} + 2\cdot a_2x^{2-1} + 3\cdot a_3x^{3-1} + 4\cdot a_4x^{4-1} + \cdots)$$

$$- 4\cdot(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$

$$= (2\cdot 1\cdot a_2 - 2\cdot 0\cdot a_0 - 4a_0)x^0 + (3\cdot 2\cdot a_3 - 2\cdot 1\cdot a_1 - 4a_1)x^1$$

$$+ (4\cdot 3\cdot a_4 - 2\cdot 2 \underset{0}{\cdot} a_2 - 4a_2)x^2 + (5\cdot 4\cdot a_5 - 2\cdot 3\cdot a_3 - 4a_3)x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n]\, x^n = 0$$

$\therefore (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+2} = \frac{2n+4}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{2}{n+1} a_n$

(2) $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$

$y(0) = a_0\cdot 0^0 + a_1\cdot 0^1 + a_2\cdot 0^2 + \cdots$

$= a_0\cdot 1 + a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 + \cdots$

$= a_0$

$\therefore a_0 = 0$

$a_2 = \frac{2}{0+1} a_0 = 0$

$a_4 = \frac{2}{2+1} a_2 = 0$

$a_6 = \frac{2}{4+1} a_4 = 0$

$= a_1x^1 + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots$

$y'(x) = (a_1x^1 + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots)'$

$= a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \cdots$

$y'(0) = a_1 + 3a_3 0^2 + 5a_5 0^4 + \cdots = a_1$

$\therefore a_1 = 1$

$a_3 = \frac{2}{1+1} a_1 = \frac{1}{1}\cdot 1 = \frac{1}{1!}$

$a_5 = \frac{2}{3+1} a_3$

$a_7 = \frac{2}{5+1} a_5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2!} = \frac{1}{3!}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} = \frac{1}{2!}$

$a_9 = \frac{2}{7+1} a_7 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!} = \frac{1}{4!}$

$= x^1 + \frac{1}{1!}x^3 + \frac{1}{2!}x^5 + \frac{1}{3!}x^7 + \frac{1}{4!}x^9 + \cdots$

$= \frac{1}{0!}x^{2\cdot 0+1} + \frac{1}{1!}x^{2\cdot 1+1} + \frac{1}{2!}x^{2\cdot 2+1} + \frac{1}{3!}x^{2\cdot 3+1} + \frac{1}{4!}x^{2\cdot 4+1} + \cdots$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n\cdot x}{n!}$

$= x\cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$

$= x\cdot e^{x^2}$ $\quad(-\infty < x^2 < +\infty)$

$= x\cdot e^{x^2}$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

常数项级数求和

例1. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$ 的和

① 原级数 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

新级数 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot x^{2n+1}$

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot x^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\quad(-1<x<1)$

③ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\ln 3$$

① $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\quad(-1<x<1)$

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域为 $(-1,1)$

③ 当 $x=0$ 时，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}0^{2n+1}=\frac{1}{2\cdot0+1}0^{2\cdot0+1}+\frac{1}{2\cdot1+1}0^{2\cdot1+1}+\cdots=0$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|=\frac{1}{2}\ln1=0$

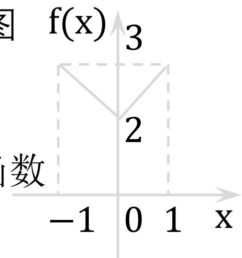
$\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\quad(-1<x<1)$

傅里叶级数的展开

例1. 将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数

$$l=\frac{周期}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$f(x)=2+|x|$在$(-1\le x\le 1)$图像如右图



通过图像可知f(x)在区间内是偶函数

$\because 2+|x|$是偶函数，且$\cos n\pi x$也是偶函数

偶函数 × 偶函数 = 偶函数

$\therefore (2+|x|)\cdot\cos n\pi x$是偶函数

$\because \int_{-a}^{a}$偶函数$dx=2\int_{0}^{a}$偶函数 dx $\quad\therefore$ 可得到下步

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(2+|x|)\cos n\pi x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(2+|x|)\cos n\pi x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(2+x)\cos n\pi x\,dx$$
$$=2\left(\int_{0}^{1}2\cos n\pi x\,dx+\int_{0}^{1}x\cdot\cos n\pi x\,dx\right)$$
$$=2\left[\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1+\int_0^1 x\cdot\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)'dx\right]$$

$\because \int U'\cdot V=U\cdot V-\int U\cdot V'$

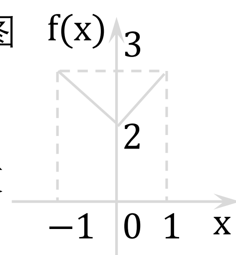
$\therefore \int_0^1 x\cdot\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)'dx=\left(x\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x'\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx$

$$=2\left[\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi\cdot 1)-\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi\cdot 0)+\left(x\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x'\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx\right]$$
$$=2\left[\frac{2}{n\pi}\sin 1n\pi-\frac{2}{n\pi}\sin 0+\frac{\sin 1n\pi}{n\pi}-\int_0^1 1\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx\right]$$
$$=2\left[\frac{2}{n\pi}\cdot 0-\frac{2}{n\pi}\cdot 0+\frac{0}{n\pi}-\left(-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right)\right]$$
$$=2\left[\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi^2}\right]=\frac{2(\cos 1n\pi-1)}{n^2\pi^2}=\frac{2[(-1)^{1n}-1]}{n^2\pi^2}=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{0\pi x}{l}dx$$
$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos 0\,dx$$
$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot 1\,dx$$
$$=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2+|x|)\cdot 1\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(2-x)\,dx+\int_0^1(2+x)\,dx=\int_{-1}^{0}(2-x)\,dx+\int_0^1(2+x)\,dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=5$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-1}^{1}(2+|x|)\sin n\pi x\,dx=0$$

$f(x)=2+|x|$在$(-1\le x\le 1)$图像如右图



通过图像可知f(x)在区间内是偶函数

$\because 2+|x|$是偶函数，且$\sin n\pi x$是奇函数

偶函数 × 奇函数 = 奇函数

$\therefore (2+|x|)\cdot\sin n\pi x$是奇函数

$\because \int_{-a}^{a}$奇函数$dx=0$ $\quad\therefore \int_{-1}^{1}(2+|x|)\sin n\pi x\,dx=0$

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{1}+b_n\sin\frac{n\pi x}{1}\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+0\cdot\sin n\pi x\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x$$

$\because f(x)$在$-1\le x\le 1$时满足收敛定理的条件

$$f(x)\sim S(x)=\frac{5}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x\quad(-1\le x\le 1)$$

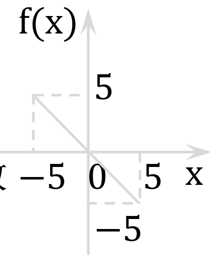
例2. 将 $f(x)=-x\ (-5\le x\le 5)$ 展开成以10为周期的傅里叶级数

$$l=\frac{周期}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}-x\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}dx=0$$

$f(x)=-x$在$(-5\le x\le 5)$图像如右图



通过图像可知f(x)在区间内是奇函数

$\because f(x)=-x$是奇函数，且$\cos\frac{n\pi x}{5}$是偶函数

奇函数×偶函数＝奇函数

$\therefore -x\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}$是奇函数

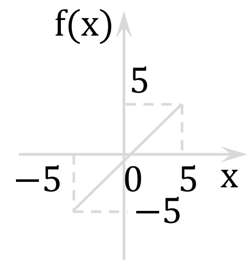
$\because \int_{-a}^{a}$奇函数$dx=0\quad \therefore \int_{-5}^{5}-x\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}dx=0$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}-x\cdot\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}x\cdot\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$f(x)=x$在$(-5\le x\le 5)$图像如右图



通过图像可知f(x)在区间内是奇函数

$\because f(x)=x$是奇函数，且$\sin\frac{n\pi x}{5}$也是奇函数

奇函数×奇函数＝偶函数

$\therefore x\cdot\sin\frac{n\pi x}{5}$是偶函数

$\because \int_{-a}^{a}$偶函数$dx=2\int_{0}^{a}$偶函数 dx　$\therefore$ 可得到下步

$$=-\frac{2}{5}\int_{0}^{5}x\cdot\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=-\frac{2}{5}\int_{0}^{5}x\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)'dx$$

$$=-\frac{2}{5}\left\{\left[x\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\right]\Bigg|_0^5-\int_0^5 x'\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right\}$$

$\because \int U'\cdot V=U\cdot V-\int U\cdot V'$

$\therefore \int_0^5 x\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)'dx=\left[x\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\right]\Big|_0^5-\int_0^5 x'\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)dx$

$$=-\frac{2}{5}\left\{5\cdot\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{5n\pi}{5}\right)-\int_0^5 1\cdot-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right\}$$

$$=-\frac{2}{5}\left\{-\frac{25}{n\pi}\cos n\pi-\left(-\frac{25\sin\frac{n\pi x}{5}}{n^2\pi^2}\Bigg|_0^5\right)\right\}$$

$$=-\frac{2}{5}\left[-\frac{25}{n\pi}\cos 1n\pi-\left(-\frac{25\sin n\pi}{n^2\pi^2}+\frac{25\sin 0}{n^2\pi^2}\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\left[-\frac{25}{n\pi}(-1)^{1n}-\left(-\frac{25\sin 1n\pi}{n^2\pi^2}\right)\right]$$

$$=\frac{10}{n\pi}(-1)^n-\frac{10\cdot 0}{n^2\pi^2}=\frac{10}{n\pi}(-1)^n$$

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{5}+b_n\sin\frac{n\pi x}{5}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}+\frac{10}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{5}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}\right]$$

$$=\frac{0}{2}+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}\right]=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}\right]$$

$\because f(x)$在$-5\le x\le 5$时满足收敛定理的条件

$$f(x)\sim S(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}\right]\quad(-5\le x\le 5)$$

傅里叶级数的特殊情形：三角级数

例1. 将 $f(x)=1-x^2$ $(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$=\frac{-4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cos\frac{0\pi x}{\pi}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cos 0\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cdot 1\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi 1\,dx-\int_0^\pi x^2\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\Big|_0^\pi-\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{\pi^3}{3}\right)=2-\frac{2\pi^2}{3}$$

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$=\frac{a_0}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}$$

$$=\frac{2-\frac{2\pi^2}{3}}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi\cos nx\,dx-\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x^2\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)'dx\right]$$

$\int U'\cdot V=U\cdot V-\int U\cdot V'$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sin n\pi-\left[\left(x^2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi(x^2)'\cdot\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right]\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cdot 0-\left(\frac{\pi^2}{n}\sin n\pi-\int_0^\pi 2x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[0-\frac{\pi^2}{n}\cdot 0+\int_0^\pi\frac{2x}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'dx\right]$$

$\int U'\cdot V=U\cdot V-\int U\cdot V'$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-0+\left[\frac{2x}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\left(\frac{2x}{n}\right)'\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos n\pi\right)-\int_0^\pi\frac{2}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n^2}\cos 1n\pi+\frac{2}{n^2}\int_0^\pi\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n^2}\cdot(-1)^{1n}+\frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^\pi\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n^2}\cdot(-1)^n+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\sin 1n\pi\right]$$

$\because$ $f(x)$在 $-\pi\le x\le\pi$ 时满足收敛定理的条件

$$f(x)\sim S(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}\quad(-\pi\le x\le\pi)$$

例2. 将$f(x)=1-x^2$ $(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数

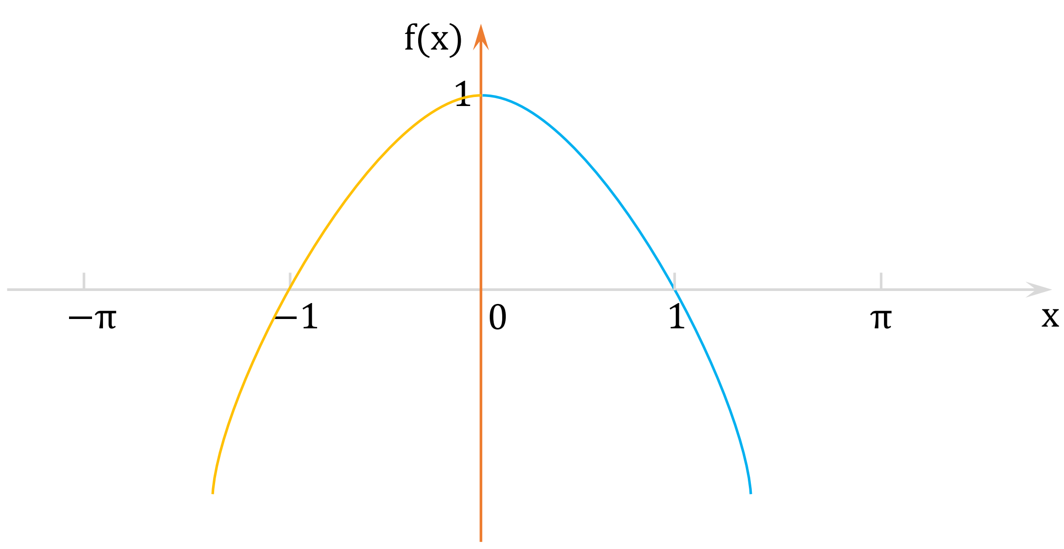
补全另一半表达式，有 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le\pi\\ 1-x^2, & -\pi\le x<0\end{cases}$

$\therefore$ $f(x)=1-x^2$ $(-\pi\le x\le\pi)$

由例1类推，有

$f(x)$在 $0\le x\le\pi$ 时满足收敛定理的条件

$$f(x)\sim S(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}\quad(0\le x\le\pi)$$



傅里叶级数的收敛定理

例1. 设 f(x)=$\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则其以 2 为周期的傅里叶级数在点 x=1 处收敛于________

$$S(x)=\begin{cases}2, & -1<x<0\\ x^3, & 0<x<1\\ \frac{2+1}{2}, & x=\pm 1\\ \frac{2+0}{2}, & x=0\end{cases}=\begin{cases}2, & -1<x<0\\ x^3, & 0<x<1\\ \frac{3}{2}, & x=\pm 1\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$x^3(0)=0$　$x^3(1)=1$
$2(-1)=2$　$2(0)=2$

S(1)=$\frac{3}{2}$，∴本题填$\frac{3}{2}$

例2. 设 f(x)=$\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于________

$l=\frac{周期}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$$S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1+x^2, & 0<x<\pi\\ \frac{-1+1+\pi^2}{2}, & x=\pm\pi\\ \frac{-1+1}{2}, & x=0\end{cases}=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1+x^2, & 0<x<\pi\\ \frac{\pi^2}{2}, & x=\pm\pi\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$-1(-\pi)=-1$　$-1(0)=-1$
$1+x^2\,(0)=1$　$1+x^2\,(\pi)=1+\pi^2$

S(π)=$\frac{\pi^2}{2}$，∴本题填$\frac{\pi^2}{2}$

$(-\pi\le x\le\pi)$　　$l=\frac{2\pi}{2}=\pi$

例3. 设 f(x)=$1-x^2$ $(0\le x\le\pi)$，则其以 2π 为周期的余弦级数在点 $x=0$ 处收敛于________

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -\pi\le x<0\\ 1-x^2, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}1-x^2, & -\pi<x<0\\ 1-x^2, & 0<x<\pi\\ \frac{1-(-\pi)^2+1-\pi^2}{2}, & x=\pm\pi\\ \frac{1-0^2+1-0^2}{2}, & x=0\end{cases}$$

S(0)=1，∴本题填1

$(-1\le x\le 1)$

例4. 设 f(x)=$\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$ (n=0,1,2⋯)，计算 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $-\frac{3}{4}$

$$f(x)=\begin{cases}2-2(-x), & -1<x<-\frac{1}{2}\\ -x, & -\frac{1}{2}\le x<0\\ x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}=\begin{cases}2+2x, & -1<x<-\frac{1}{2}\\ -x, & -\frac{1}{2}\le x<0\\ x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}2+2x, & -1<x<-\frac{1}{2}\\ -x, & -\frac{1}{2}<x<0\\ x, & 0<x<\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\\ \frac{2+2\cdot(-1)+2-2\cdot 1}{2}, & x=\pm 1\\ \frac{2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}{2}, & x=-\frac{1}{2}\\ \frac{-0+0}{2}, & x=0\\ \frac{\frac{1}{2}+2-2\cdot\frac{1}{2}}{2}, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，∴本题选(C)

$(-1 \le x \le 1)$

例5. 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|(0 \le x \le 1)$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$ $(n=1,2,3\cdots)$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则 $S\left(-\frac{1}{4}\right)=$

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $-\frac{1}{4}$　　(D) $-\frac{3}{4}$

$$f(x)=\begin{cases} -\left|x+\frac{1}{2}\right|, & -1 \le x < 0 \\ \left|x-\frac{1}{2}\right|, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases} -\left|x+\frac{1}{2}\right|, & -1 < x < 0 \\ \left|x-\frac{1}{2}\right|, & 0 < x < 1 \\ \frac{-\left|-1+\frac{1}{2}\right|+\left|1-\frac{1}{2}\right|}{2}, & x=\pm 1 \\ \frac{-\left|0+\frac{1}{2}\right|+\left|0-\frac{1}{2}\right|}{2}, & x=0 \end{cases}$$

$S\left(-\frac{1}{4}\right)=-\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{4}$，∴本题选(C)

傅里叶级数的周期

例1. 设 $f(x)=\begin{cases} x \ , & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx\ (n=0,1,2\cdots)$，计算 $S\left(-\frac{5}{2}\right)=$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

$-\frac{5}{2}$ 超出了 -1 到 1 的范围

$S(-\frac{5}{2})=S(-\frac{5}{2}+2\times 1)=S(-\frac{1}{2})$

上一节课的例4里求过 $S(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$

$\therefore S(-\frac{5}{2})=\frac{3}{4}$，本题选(C)

例2. 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx\quad(n=1,2,3\cdots)$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\frac{9}{4}\right)=$

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

$-\frac{9}{4}$ 超出了 -1 到 1 的范围

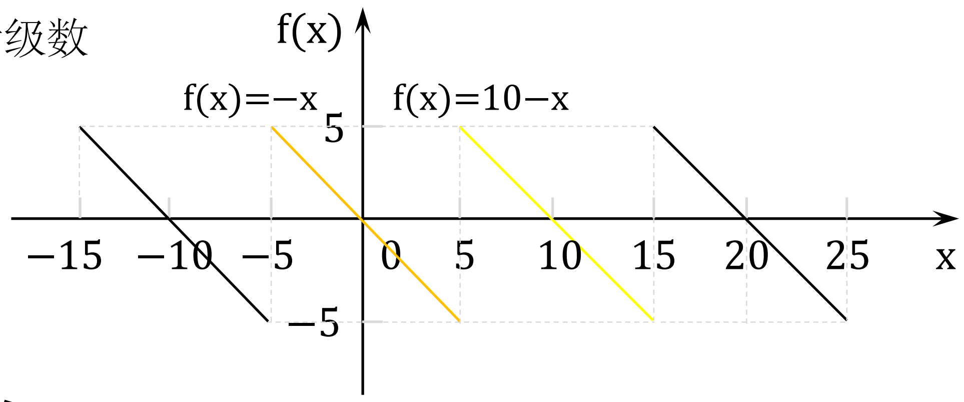
$S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{9}{4}+2\cdot 1)=S(-\frac{1}{4})$

上一节课的例5里求过 $S(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$

$\therefore S(-\frac{9}{4})=-\frac{1}{4}$，本题选(C)

例3. 设 $f(x)=10-x\quad(5\le x\le 15)$，将 $f(x)$ 展开成以 10 为周期的傅里叶级数

$f(x)=-x\qquad(-5\le x\le 5)\qquad l=\frac{周期}{2}=\frac{10}{2}=5$



$\because f(x)$ 在 $5\le x\le 15$ 上满足收敛定理的条件

$f(x)\sim S(x)=\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}]\qquad(5\le x\le 15)$

$f(x)=-x\ (-5\le x\le 5)$ 展开成以 10为周期的傅里叶级数

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{10}{n\pi}(-1)^n$

$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}]$

$f(x)\sim S(x)=\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi x}{5}]$

利用傅里叶级数求常数项级数的和

例1. 将函数 $f(x)=1-x^2\ (-\pi \le x \le \pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$=\frac{-4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos\frac{0\pi x}{\pi}\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,dx \quad =\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}1\,dx-\int_0^{\pi}x^2\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{\pi^3}{3}\right)=2-\frac{2\pi^2}{3}$$

$\because$ $f(x)$在 $(-\pi \le x \le \pi)$ 时满足收敛定理的条件

$$f(x)\sim\ S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$=\frac{a_0}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}$$

$$=\frac{2-\frac{2\pi^2}{3}}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}\quad(-\pi \le x \le \pi)$$

令 $\cos nx=1$

$\because \cos 0=1$

$\therefore x=0$

$$S(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos n0}{n^2}$$

$$S(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{S(0)+\frac{\pi^2}{3}-1}{4}$$

$$=\frac{1+\frac{\pi^2}{3}-1}{4}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}$$

$(-\pi \le x \le \pi)$

设 $f(x)=1-x^2\ (0 \le x \le \pi)$，则其以 2π 为周期的余弦级数在点 $x=0$ 处收敛于 1

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -\pi \le x < 0\\ 1-x^2, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}1-x^2, & -\pi < x < 0\\ 1-x^2, & 0 < x < \pi\\ \frac{1-(-\pi)^2+1-\pi^2}{2}, & x=\pm\pi\\ \frac{1-0^2+1-0^2}{2}, & x=0\end{cases}$$