天津大学 2011 ～2012 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：______　教学班 ___ 学号：______ 姓名：______

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	成绩
得分											

一. 判断 （10 分）

1. 设 $A,B\in C^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充分必要条件是 A 与 B 有相同的最小多项式． （ ）

2. $\forall A\in C^{n\times n},k\in N$，则 $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$． （ ）

3. 设复幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ 的收敛半径为 R，若方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k X^k$ 绝对收敛，则必有 $\rho(X)<R$ ． （ ）

4. 若 $A\in R^{n\times n}$ 正定，则求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛. （ ）

5. 求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 具有 $2n+1$ 次代数精度，当且仅当求积节点 x_k 是 Gauss 点 ． （ ）

6. 区间 $[a,b]$ 上正交多项式 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中有 n 个零点. （ ）

7. 在赋范线性空间中 Cauchy 序列与收敛序列是等价的 ． （ ）

8. $\forall A\in C^{n\times n}$ 则 $\|A\|_2\le\|A\|_F$ ． （ ）

9. 试验方程 $y'=\lambda y$ $(\lambda<0)$，当步长 $h\in\underline{(0,-\frac{2}{\lambda}]}$ 时，改进 Euler 格式是绝对稳定的 ． （ ）

10. 设 $A,B\in C^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P\in C^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP=B$ 则 A,B 等价 ． （ ）

二. 填空(10 分)

1. 已知 4 阶矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-4)$，则 A 的初等因子组为______________．

2. 已知 $A(t)=\begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ t\cos t & 1 \end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)dt=$ ______________．

3. 解非线性方程组 $\begin{cases} x_1^2+2x_2=3 \\ 2x_1+x_2^2=5 \end{cases}$ 的实用 Newton 格式为

______________________________．

4. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $Cond_\infty A=$ ______．

5. $span\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}=$ ______．

考试时间: 2012 年 1 月 6 日

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：________　教学班___　学号：________　姓名：________

三．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 $\mathbf{J}$ 和有理标准形 C ．

五．(10 分) 写出求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代格式，并判断所写格式的收敛性.

四．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$，(1)求 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；(2)求 e^{At} .

六．(10 分) 已知下列插值条件

x	0.30	0.45	0.55	0.70	0.80
$f(x)$	4	1	0	1	1

(1) 用 2 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.59)$ 的近似值(结果保留到小数点后第 6 位)

(2) 若 $|f'''(x)|\le 1 \quad \forall x\in[0.30,0.80]$，试估计所得结果的截断误差（结果保留到小数点后第 6 位）

七．(10 分) 用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1.20711			
1	1.16257	1.14772		
2	1.15148	1.14778	1.14778	
3	1.14871	1.14779	1.14779	1.14779
4	1.14802	1.14779	1.14779	1.14779

八. (10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x\le 0 \\ x^3+x, & 0<x\le 1 \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $P_2[-1,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$

(2) 求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|$ (结果保留到小数点后第 5 位)

九. (10 分) 写出用标准 Runge – Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'' - \cos(y + y') = 0, & 0 < x \le 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

的计算公式．

十. (10 分) 证明

1． 设 n 阶单元函数矩阵 $A(t)$ 在 $[t_0, t]$ 上可积，试证：

$$\left\| \int_{t_0}^{t} A(s)ds \right\|_1 \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|_1 ds$$

2．试用数值积分法导出求解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$， $a < x \le b$ ，的梯形格式，

并证明用梯形格式解初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 所得数值解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$．

天津大学 2012 ～2013 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：________　教学班 ___ 学号：________　姓名：________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	成绩
得分											

一．**判断**（10 分）

1．设 X 是数域 K 上的线性空间, M 是 X 的子空间，则 $spanM \subset M$ ．（ ）

2．设 $A \in C^{n\times n}$, A 相似于对角阵的充分必要条件是其特征多项式无重零点．（ ）

3．设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为节点的 $Lagrange$ 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m$， $m \le n$．（ ）

4．解线性方程组 $Ax = b$ 的 G-S 迭代格式收敛的充分必要条件是 A 是正定矩阵.（ ）

5．设 $x \in (X, \|\cdot\|)$，当 $x \ne 0$ 时，必有 $\|x\| > 0$．（ ）

6．设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种方阵范数，单位矩阵 $E \in C^{n\times n}$，则 $\|E\| = 1$.（ ）

7．若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，当 $f(x)$ 为 x^m 时，求积公式成为等式，则此求积公式代数精度为 m 次．（ ）

8．设初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) & a < x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 中 $f(x,y)$ 在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，则求解该问题的改进 Euler 格式收敛.（ ）

9．设 $A \in C^{3\times3}$ 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$，则 $A - 2E = 0$（ ）

10．设 $A, B \in C^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P \in C^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP = B$ 则 A, B 等价.（ ）

二．**填空**(10 分)

1．设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 2 & 6 \\ & & -1 \end{bmatrix}$，则 $\rho(A^{-1}) =$ ________.

2．已知 $A(t) = \begin{bmatrix} e^t & 3t^2 \\ te^t & 1 \end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)dt =$ ________.

3．设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，则 $Cond_\infty(A) =$ ______.

4．设插值型求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_0) + f(x_1)$ 确定参数 $x_0 =$ ______，$x_2 =$ ______ 使其代数精度尽量高．

5．已知 Hermite 矩阵 $A \in C^{3\times3}$ 的 3 个特征值为 $-1, -1, 2$，则 A 的 Jordan 标准

考试时间: 2013 年 1 月 8 日

形 $J=$.

____

三 .(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C .

四 .(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}$，（1）求 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；（2）求 e^{At} .

课程名称：**工程数学基础** 课程编号：S131A035 学院名称：________ 教学班 ___ 学号：________ 姓名：________

五. (10 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，(2) 判断 G-S 迭代格式收敛性.

六 .(10 分) 已知下列插值条件

x	76	77	78	79	81	82
$f(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

(1)用 3 次 Newton 插值多项式计算 $f(80.25)$ 的近似值（结果保留到小数点后第 5 位），(2) 写出插值余项.

七．(10 分) 对积分 $\int_0^4 \frac{2}{1+x^2}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）．

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八.(10 分) 设函数 $f(x)=e^x$，用 Legendre 多项式求 $f(x)=e^x$ 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$ (结果保留到小数点后第 5 位，取 $e\approx 2.71828$)

九. (10 分) 写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y''=2y'+y^2+\cos x\,, & 0<x\le 1 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$$

的计算格式．

十.（10 分）证明：

1. 空间 $C[-1,1]$，$\forall x \in C[-1,1]$，定义范数：$\|x\| = \max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)|$，

设算子 $T: C[-1,1] \to C[-1,1]$ 定义为

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt \qquad (\forall f \in C[-1,1], x \in [-1,1]),$$

试证: (1) T 是有界线性算子，(2) 计算 $\|T\|$.

2. 若正定矩阵 $A, B \in C^{n\times n}$ 且 $AB = BA$，则 AB 是正定矩阵 .

天津大学 2015～2016 学年第二学期研究生课程考试试卷

课程名称：　工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________ 教学班：________ 学号：________ 姓名：________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	成绩
得分											

一. 判断（10 分）

1. 设有算子 $T: X \to Y$，则 $T(0)=0$.　（　）
2. 设 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 是内积空间，$\|\cdot\|$ 是内积导出的范数，则 $\forall x,y \in X$，$\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.　（　）
3. 设 $A,B \in C^{n\times n}$，且均为正定矩阵，则 AB 正定.　（　）
4. 设 $A \in R^{n\times n}$，若 A 为对称矩阵，则 $\rho(A)=\|A\|_2$.　（　）
5. 设 A 是内积空间 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 的子空间，则 $A \cap A^{\perp}=\{0\}$.　（　）
6. 设酉矩阵 $U \in C^{n\times n}$，$x,y \in C^n$ 若 $x=Uy$，则 $\|x\|=\|Uy\|$.　（　）
7. 设 $A \in C^{n\times n}$，$\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的任一方阵范数，则 $\forall \varepsilon>0, \|A\| \le \rho(A)+\varepsilon$　（　）
8. 设线性方程组 $Ax=b$ 的 G-S 迭代矩阵为 M，若 A 严格行对角占优，则 $\|M\|_\infty \le 1$.　（　）
9. 积分区间 $[a,b]$ 上带权函数 $\rho(x)$ 的插值型求积公式余项为 $R(f)=\int_a^b \rho(x)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx,\ \xi \in (a,b)$.　（　）
10. 当整体截断误差 $e_n=0$，局部截断误差 $\varepsilon_{n+1}=e_{n+1}$.　（　）

二. 填空（10 分）

1. 解非线性方程组 $\begin{cases} x_1^2+2x_2^2=3 \\ 2x_1^2+3x_2^2=5 \end{cases}$ 的实用 Newton 格式为

__________________ .

2. 已知 $\sin At=\begin{bmatrix} \sin t & & \\ t\cos t & \sin t & \\ & & \sin 2t \end{bmatrix}$，则 $A=$ ________ .

3. 已知两个节点的 $Gauss$ 型求积公式为 $\int_{-1}^{0} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_1)$，则节点 $x_0=$________，$x_1=$________ .

4. 以 $x_0,x_1,\cdots x_n$ 为节点的 Newton 插值基函数为

__________________ .

5. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，则方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{3^k}$ 的收敛性为________ .

三 .(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C .

四．(10 分) 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3, \\ x_1(0)=1, x_2(0)=0, x_3(0)=0. \end{cases}$$

五. (10 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，(2) 判断迭代格式收敛性.

六.（8 分）设 $f(x)=x^4-x^3$，写出以设 $-1,0,1,2$ 为节点的三次插值多项式，方法不限.

七.（14 分） 对积分 $\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八. (10 分) 用 Legendre 多项式求 $f(x)=e^{-x}$ 在 $P_2[1,3]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求平方误差 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$ (结果保留到小数点后第 5 位)

九. (8 分) 写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y''-(1+x^2)y=1, & 0<x\le 1 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=3, \end{cases}$$

的计算公式 .

考试时间：2016 年 6 月 20 日

$$e^{At}=\begin{bmatrix} -2te^{t}+e^{2t} & (3t+2)e^{t}-2e^{2t} & -(t+1)e^{t}+e^{2t} \\ -2(t+1)e^{t}+2e^{2t} & (3t+5)e^{t}-4e^{2t} & -(t+2)e^{t}+2e^{2t} \\ -2(t+2)e^{t}+4e^{2t} & (3t+8)e^{t}-8e^{2t} & -(t+3)e^{t}+4e^{2t} \end{bmatrix}$$，试求 A.

十. (10 分)

1.证明：如果初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), & a<x<b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$ 中函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，则改进的 Euler 格式是收敛的.

2.已知三阶单元函数矩阵

天津大学 2016～2017 学年第二学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A305 学院名称：＿＿＿＿＿ 专业名称：＿＿＿＿＿班 ＿＿学号：＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平时成绩	成绩
得分												

一. 判断 （10 分）

1. Legendre 多项式 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是 $P_n[-1,1]$ 的基. （ ）
2. 设 M 是线性空间 X 的任意子集, 若 M 线性无关，则 M 是有限集. （ ）
3. Banach 空间上的线性算子一定是有界线性算子. （ ）
4. Hermite 矩阵初等因子的方幂都是一次. （ ）
5. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若 $A \sim B$,则 $\rho(A) = \rho(B)$. （ ）
6. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是对角阵，则 $\sin A$ 也是对角阵. （ ）
7. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则 $A^H A$ 是正定矩阵. （ ）
8. 解常微分方程初值问题的 Euler 格式为 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n))$. （ ）
9. 若求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Seidel 迭代格式收敛，则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. （ ）
10. 设 $A, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$A$ 可逆, U 是酉矩阵, 则 $\mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2 A$. （ ）

二. 填空 （10 分）

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix}$，则 $cond_2 A =$＿＿＿ .

2. 对 Legendre 多项式系 $\{p_0(x), p_1(x), \dots\}$，$< p_3, p_3 > =$＿＿＿＿.

3. 已知 $A(t) = \begin{bmatrix} te^t & 2 \\ \cos t & e^t \end{bmatrix}$，则 $\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t =$＿＿＿＿.

4. 设 Gauss 型求积公式为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，则其求积节点

$x_0 =$＿＿＿＿, $x_1 =$＿＿＿＿.

5. 设 $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$，$A$ 的有理标准型 $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则 e^A 的 Jordan 标准型

$J_e =$＿＿＿＿.

三. (8 分) 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$，求 A 的有理标准形 C .

考试时间：2017 年 6 月 6 日

天津大学 2016～2017 学年第二学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A305 学院名称：______ 专业名称:______班 ___学号：______ 姓名：______

四．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}$，求 e^{At}.

五．(8 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix}2&1&3\\1&4&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\2\end{bmatrix}$

写出 Seidel 迭代格式，并判断迭代格式收敛性.

六．(8 分) 给定插值数据如下

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0.0000	0.0998	0.1987	0.2955	0.3891

用 3 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.15)$ 的近似值(结果保留至小数点后第 4 位).

考试时间：2017 年 6 月 6 日

七. (10 分) 对积分 $\int_0^2 \frac{2}{1+x^3}\mathrm{d}x$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八. (10 分) 用 Legendre 多项式求 $f(x)=e^{-x}$ 在 $P_2[1,3]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求平方误差 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$（结果保留到小数点后第 5 位，取 $e\approx 2.71828$）.

九．（8 分）写出用标准 Runge – Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'' - \cos(y + y') = 0, & 0 < x \leqslant 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

的计算格式.

十．（8 分）

1. 证明：Lagrange 插值基函数 $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$.

2. 若单位向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，试计算 $\|A\|_2$.