

河南农业大学 2020—2021 学年第二学期 《高等数学 A (II)》(A 卷) 答案及评分标准

一、判断题 (每小题 2 分, 共计 10 分)

√ × √ √ ×

二、选择题 (每小题 2 分, 共计 20 分)

BACBD CADAB

三、填空题 (每小题 2 分, 共计 10 分)

1. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$

2. $\frac{yz}{e^z - xy}$

3. $\int_0^1 dx \int_x^x f(x, y) dy$

4. $\frac{\sqrt{3}}{24}$

5. $2dx + 2dy$

四、计算题 (每题 10 分, 共计 50 分)

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + yf'_2$ -----2 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'_1 + 4x^2 f''_{11} + 4xy f''_{12} + y^2 f''_{22}$ -----6 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy f''_{11} + 2(x^2 + y^2) f''_{12} + xy f''_{22} + f'_2$ -----10 分

2. $\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^2 z dz \iint_{D_z} dx dy$ -----5 分

$= \int_0^2 \pi z^3 dz = 4\pi$ -----10 分

3. 添加有向线段 AO: $y = 0$ -----2 分

$$\int_L \frac{y^2}{2\sqrt{a^2 + x^2}} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})] dy$$

$$= \oint_{L+AO} Pdx + Qdy - \int_{AO} Pdx + Qdy$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{AO} P dx + Q dy \quad \text{-----5 分}$$

$$= -\iint_D y^2 dx dy - \int_{2a}^0 0 dx \quad \text{-----8 分}$$

$$= -\frac{\pi}{8} a^4 \quad \text{-----10 分}$$

$$4. \iint_{\Sigma} x dy dz - 3 y dz dx + z dx dy$$

$$= \iint_{D_{yz}} \frac{4}{3} (3 - y - 3z) dy dz - \iint_{D_{xz}} \frac{9}{4} (4 - x - 4z) dz dx + \iint_{D_{xy}} \frac{1}{12} (12 - 3x - 4z) dx dy \quad \text{-----4 分}$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^3 dy \int_0^{\frac{1}{3}(3-y)} (3 - y - 3z) dz - \frac{9}{4} \int_0^4 dx \int_0^{\frac{1}{4}(4-x)} (4 - x - 4z) dz \quad \text{-----8 分}$$

$$+ \frac{1}{12} \int_0^4 dx \int_0^{\frac{1}{4}(12-3x)} (12 - 3x - 4z) dy$$

$$= -2 \quad \text{-----10 分}$$

$$5. \text{ 幂级数的收敛域为 } [-1, 1) \quad \text{-----2 分}$$

$$\text{令 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n, x \in [-1, 1)$$

$$\text{则 } [xS(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1)$$

$$xS(x) - 0S(0) = \int_0^x [xS(x)]' dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x), x \in (-1, 1)$$

$$\text{且 } S(0) = 0, S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \ln 2$$

$$\text{所以 } S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{-----8 分}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2 \quad \text{-----10 分}$$

五、应用题（共计 10 分）

$$\begin{cases} f'_x = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f'_y = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$$

解得 $(0, \frac{1}{e})$

-----4 分

$$f''_{xx} = 2(2 + y^2); f''_{xy} = 4xy; f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y}$$

-----7 分

所以 $AC - B^2 > 0, A > 0$,

故函数有极小值 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

-----10 分