高等数学 A 练习题目答案

一、选择题

1、A　2、C　3、B　4、C　5、A

6、D　7、D　8、C　9、C　10、B

二、判断题

1、 ×　2、√　3、 √　4、√　5、×

三、填空题

1、$-\frac{1}{4}$　2、4　3、$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$　4、-1　5、收敛

四、计算题

1. 求过点 $(1,1,1)$ 且垂直于两平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解：已知两平面的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\{1,-1,1\}$，$\overrightarrow{n_2}=\{3,2,-12\}$，

取所求平面的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -12\end{vmatrix}=\{10,15,5\}$

所求平面方程为　$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$

化简得　$2x+3y+z-6=0$

2. 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v, u=xy, v=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解法一：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1$

$=y\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)+\mathrm{e}^{xy}\cos(x+y)$

解法二：$z=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)+\mathrm{e}^{xy}\cos(x+y)$$

3. 计算 $\iint\limits_D \frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $y=2x, y=x, x=4, x=2$ 所围成的闭区域.

解： $\iint\limits_D \frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^4\mathrm{d}x\int_x^{2x}\frac{y}{x}\mathrm{d}y$

$$=\int_2^4\left.\frac{y^2}{2x}\right|_x^{2x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_2^4 x\mathrm{d}x=9$$

4. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由抛物面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解： $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{16\pi}{3}$$

5. 计算 $\int_L\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-x\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是沿逆时针方向以原点为圆心，a 为半径的上半圆周.

解法一：令 $P=\left(x^2-y\right), Q=\left(y^2-x\right)$，

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$，这说明积分与路径无关，故

原式 $=\int_{\overline{AB}}\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-x\right)\mathrm{d}y=\int_a^{-a}x^2\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$

解法二：添加辅助线段 $\overline{BA}$，它与 L 所围区域为 D，则

原式 $=\int_{L\cup\overline{BA}}\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-x\right)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-x\right)\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{3}a^3$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{1}{5-x}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

解： $\frac{1}{5-x}=\frac{1}{3-(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-2}{3})^n \quad =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot(x-2)^n$$

收敛域：$\left|\frac{(x-2)}{3}\right|<1$，即 $x\in(-1,5)$.

7. 计算$\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是平面$x+y+z=1$在第一卦限的部分.

解：曲面$\Sigma: z=1-x-y,(x,y)\in D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\right\}$. 故

$$\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}x(1-x-y)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 x(1-2x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{24}$$

五、应用题

某工厂生产产品A某需用两种原料，其价格分别为 2 万元/千克和 1 万元/千克. 当这两种原料的投入量分别为 x 千克和 y 千克，可生产产品 z 千克，且 $z=20-x^2+10x-2y^2+5y$。若A产品价格为 5 万元/千克，试确定投入量，使利润最大.

解:由题意，利润函数为$P(x,y)=5z-(2x+y)=100-5x^2+48x-10y^2+24y$

解方程组$\begin{cases}P_x(x,y)=-10x+48=0\\P_y(x,y)=-20y+24=0\end{cases}$ 得唯一解$x=4.8,y=1.2$

因该问题必有最大值,所以当$x=4.8,y=1.2$时即投入两种原料分别 4.8 千克和 1.2 千克时利润最大，最大利润为 229.6 万元。