



资料分析三色笔记

一、增长率	1
增长率	1
百分数与百分点	2
增长率与倍数	2
成数与翻番	3
增幅、降幅与变化幅度	3
增长率比较	4
二、增长量	8
一般增长量	8
年均增长量	8
百化分	9
增长量的比较	10
三、比重	11
现期比重	11
基期比重	14
两期比重比较	17
两期比重计算	18
比重总结	20
四、平均数	21
平均数考情分析	21
现期平均数	21
基期平均数	23
两期平均数比较	25
两期平均数计算	25
五、倍数与比值	27
倍数与比值	27



数量关系三色笔记

一、解题思想	29
代入排除思想	29
倍数特性思想	30
余数特性思想	32
奇偶特性思想	33
赋值思想	34
极限思想	35
逆向推理思想	36
整除思想	37
十字交叉	38
方程思想	39
二、核心题型解题方法	41
工程问题	41
行程问题	41
经济利润问题	43
几何问题	43
排列组合及概率问题	46
溶液问题	48
和定最值问题	50
容斥问题	51
计算问题	52



资料分析三色笔记

一、增长率

▲ 增长率

(一) 含义

增长率是表述基期量与现期量变化的相对量。增长率又称增速、增幅或者增长幅度、增值率等，增长率为负时表示下降。

(二) 增长率、降幅、变化幅度的区别

(1) 增长率：有正有负，比较时带符号→ $5\% > -10\%$ 。

(2) 降幅：必须为负，比较时看绝对值→ $|-5\%| < |-10\%|$ 。

(3) 变化幅度：有正有负，比较时看绝对值→ $|5\%| < |-10\%|$ 。

◆例：在增长率 10%、-20%、30%、40%、-50%、-60% 中：

①增长率最大的是：40%。先排除负的，-20%、-50%、-60% 排除，再从剩下的中挑最大的，为 40%。

②降幅最大的是：-60%。必须为负，先排除 10%、30%、40%，剩下的找绝对值最大的，则降幅最大的是 -60%。

③变化幅度最大的是：-60%。可正可负，看绝对值最大的，为 -60%。

(三) 公式：

$r = \text{增长量} / \text{基期}$ (核心公式) = $\text{增长量} / (\text{现期} - \text{增长量})$ (常考 1)

= $(\text{现期} - \text{基期}) / \text{基期}$ (常考 2)

(四) 速算——截位直除

(1) 除前看最接近的选项之间的差距。

(2) 差距大，截两位。

差距大：①首位不同；②首位相同，次位差大于首位。

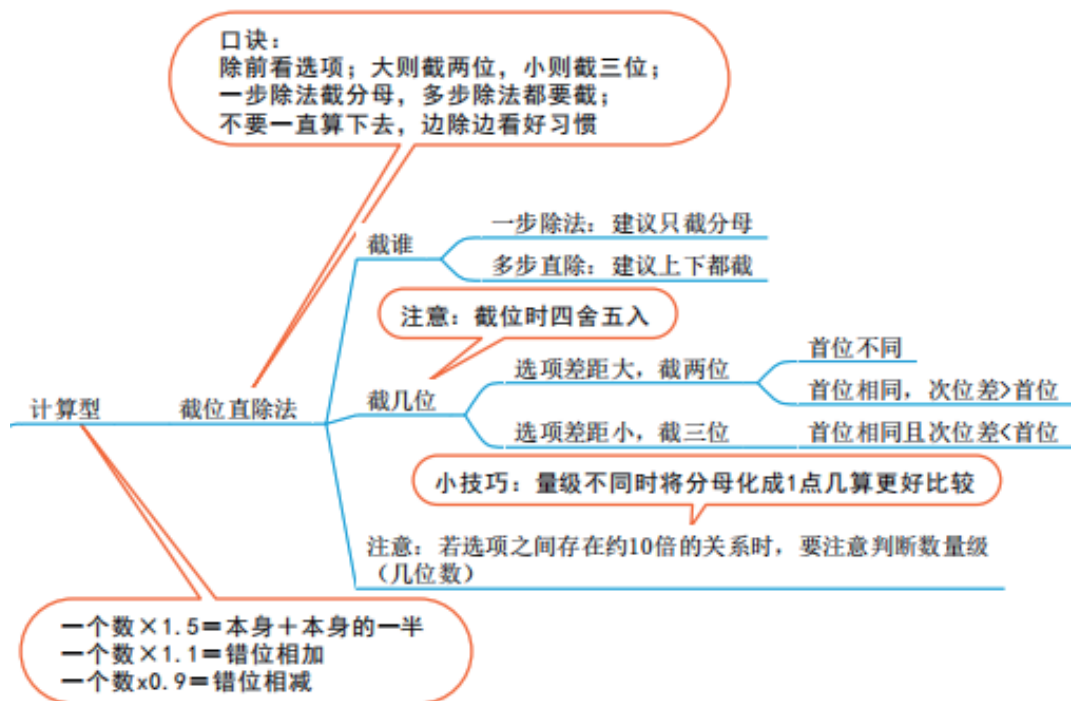
(3) 差距小，截三位。

(4) 截位原则：看下一位（保留两位看第三位、保留三位看第四位），四舍五入。

(5) 一步除法，截分母。

(6) 多步除法，截分子、分母。

(7) 如果选项之间有 10 倍左右的关系，需要看小数点、位数、单位。



▲ 百分数与百分点

（一）含义

- (1) 百分数：用来反映量之间的比例关系。
- (2) 百分点：用来反映百分数的变化。

（二）百分数、百分点的区别

百分数表示两个量的比例关系，用除法计算；百分点表示百分数的变化，用加减法计算。

比如：问 10% 比 4% 多多少，两个百分数之间用百分点来描述，用加减法， $10\% - 4\% = 6\%$ ，数值上是 6%，但表述的时候是 6 个百分点。

◆例：（2019 联考）2017 年我国成年国民图书阅读率为 59.1%，比上年增加 0.3 个百分点；报纸阅读率为 37.6%，比上年降低 2.1 个百分点。

- ① 2016 年我国成年国民图书阅读率为：遇到“增加”用减法， $59.1\% - 0.3\% = 58.8\%$ 。
- ② 2016 年我国报纸阅读率为：遇到“降低”用加法， $37.6\% + 2.1\% = 39.7\%$ 。

▲ 增长率与倍数

（一）增长率：

1. 识别：

增长 + 比例（相对量，比如百分数、倍数、成数），又名：增速、增幅、增值率。

2. 公式：增长率 = (现期 - 基期) / 基期。

（二）倍数：



1. 识别: A 是 B 的几倍, A 比 B 多几倍。

2. 公式: 是几倍 $= A/B$, 比如问 500 是 100 的几倍, $500/100=5$ 。多几倍 (增长率) $= (A-B)/B = A/B - 1$, 其中, A/B 就是“是几倍”, 多几倍 = 是几倍 - 1。

比如: 问 500 比 100 多几倍, $(500-100)/100=4$ 。

(三) 两者关系

倍数 = 增长率 + 1。 $(A-B)/B$ 与 $(\text{现期} - \text{基期}) / \text{基期}$ 的形式是一样的,

说明多几倍 = 增长率。 $r = \text{是几倍} - 1$, 则是几倍 $= r + 1$ 。

比如: 2019 年比 2018 年增长了 50%, 问 2019 年是 2018 年的几倍, $1+50\%=1.5$ 倍;
2018 年比 2017 年增长了 20%, 则 2018 年是 2017 年的 $1+20\%=1.2$ 倍。

◆例: (2017 国考) 某市 2015 年全年粮食总产量 4.16 万吨, 同比下降 2.3%; 甘蔗产量 0.57 万吨, 下降 23.6%; 油料产量 0.12 万吨, 增长 32.4%。问: 甘蔗产量是油料几倍? 甘蔗产量比油料多几倍?

※答: 甘蔗产量是油料的 $0.57/0.12 \approx 5$ 倍。甘蔗产量比油料多 $5-1=4$ 倍。

▲ 成数与翻番

(一) 成数

几成就相当于十分之几, 也就是百分之几十。比如 1 成 $= 1/10 = 10\%$ 。3 成 $= 3/10 = 30\%$ 。

(二) 番数

1. 识别: 翻了几番。

2. 一句话: 遇番数, 化倍数, 翻 N 番, 变为原来的 $2N$ 倍。翻 1 番, 变为原来的 2 倍, 翻 2 番, 变为原来的 4 倍, 翻 3 番, 变为原来的 8 倍, 翻 4 番, 变为原来的 16 倍, $2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$, 底数都为 2, 番数跟指数是对应的, 因此翻 N 番, 变为原来的 $2N$ 倍。

◆例: 2018 年某省国民生产总值为 250 亿元, 到 2025 年要达到国民生产总值翻 4 番的目标, 问: 2025 年的国民生产总值的目标为多少亿元?

※答: 翻 4 番为 $2^4=16$ 倍, $250 \times 16=4000$ 亿元。

▲ 增幅、降幅与变化幅度

(1) 增幅一般就是指增长率, 有正有负。

(2) 降幅指下降的幅度, 比较降幅的大小时, 只比较绝对值 (正增长率不参与降幅的比较)。

(3) 变化幅度指增长或下降的绝对比率, 变化幅度比较大小时用增长率的绝对值。

◆例: (1) 2017 年收入 10 万元, 同比增长 10%, 增速比去年提高 5 个百分点, 则 2016 年的增长率为多少?

※答: 出现“提高”, 用减法, $10\%-5\%=5\%$ 。

(2) 2017 年收入 10 万元, 同比增长 10%, 增速比去年回落 5 个百分点, 则 2016 年的增长率为多少?

※答：出现“回落”，用加法， $10\%+5\%=15\%$ 。

(3) 2017 年收入 10 万元，同比下降 10%，降幅比去年扩大 5 个百分点，则 2016 年的降幅为多少？增长率为多少？

※答：下降 10% 为 -10%，降幅比去年扩大 5 个百分点，降幅计算时不带符号， $10\%-5\%=5\%$ ，即 2016 年降幅为 5%，增长率为 -5%。

(4) 2017 年收入 10 万元，同比下降 10%，降幅比去年收窄 5 个百分点，则 2016 年的降幅为多少？增长率为多少？

※答：降幅为 $10\%+5\%=15\%$ ，增长率为 -15%。

记忆口诀：“增速”→高减低加。“降幅”→-（高减低加）

▲ 增长率比较

（一）识别：

增速最快 / 最慢、增长幅度最大 / 最小。

（二）题型：

已知现期、基期，比较增长率→ $r = (\text{现期} - \text{基期}) / \text{基期} = \text{现期} / \text{基期} - 1$ 。比较的时候，如果是 $A/B-1$ 和 $C/D-1$ ，都有“-1”，可以直接比较 A/B 和 C/D 的大小。

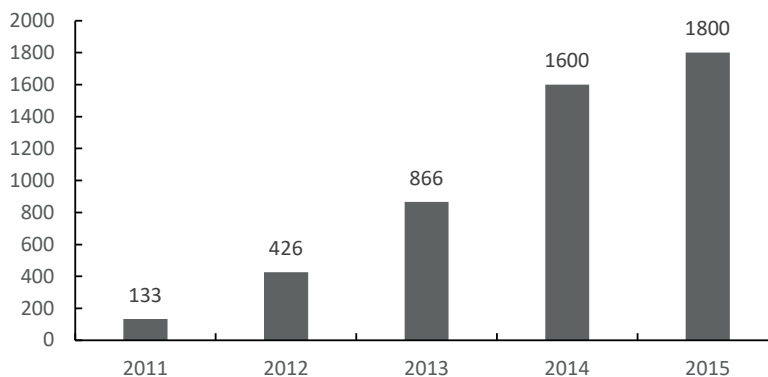
（三）方法：

看现期和基期的倍数关系是否明显。

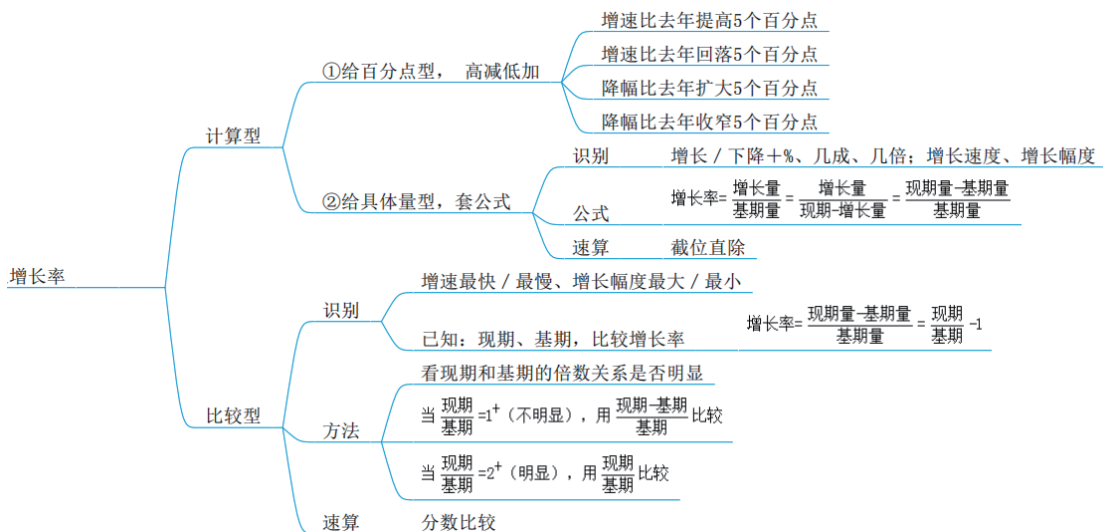
(1) 当现期 / 基期 = 1+（不明显），用（现期 - 基期）/ 基期比较。

(2) 当现期 / 基期 = 2+（明显），用现期 / 基期比较。

◆例：下图（2012-2015）哪一年的同比增速最快？

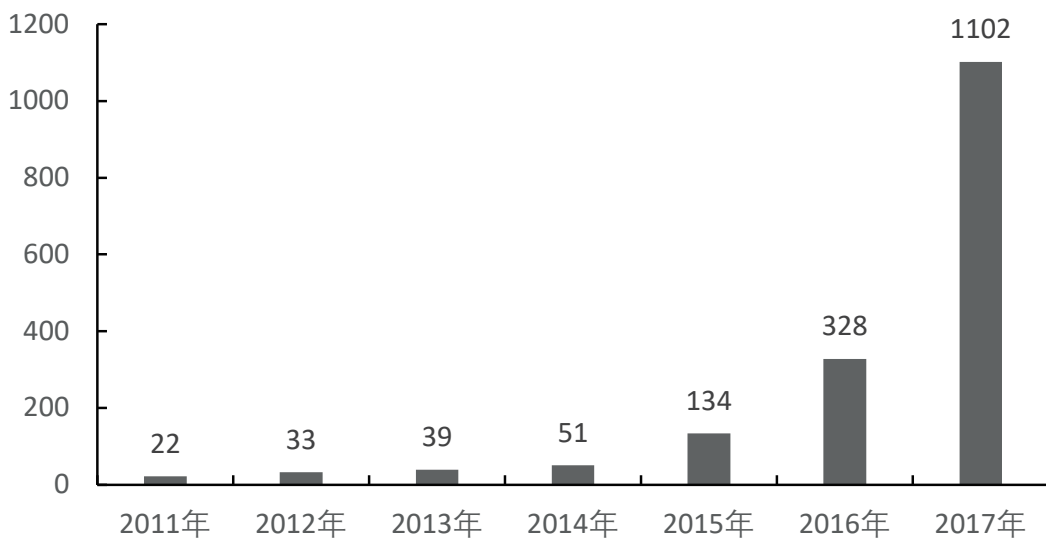


※答：图中看倍数关系明不明显，2011 年跟 2012 年倍数关系明显，直接用 $426/133=3+$ ， $866/426=2+$ ， $1600/866=1+$ ， $1800/1600=1+$ ，明显 2012 年增速最大。



随堂练习

【例 1】(2019 联考)



2011 年至 2017 年我国马拉松赛事场次趋势（单位：场）

2017 年我国马拉松赛事场次比 2011 年增加了：()

A. 约 47 倍 B. 约 49 倍 C. 约 51 倍 D. 约 53 倍

※【答案】B。解析：增加 + 倍数（比例），为增长率计算问题。2017 年是现期，2011 年是基期。 $r = (\text{现期} - \text{基期}) / \text{基期} = (1102 - 22) / 22 = 1080 / 22$ ，首位商 4，次位商 9，对应 B 项。

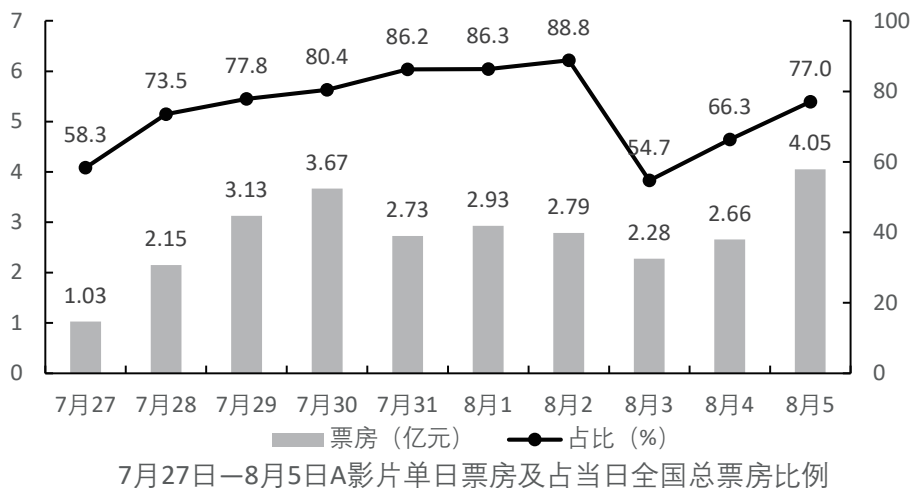
★★【拓展】

1. 本题问的是增加了多少倍，相当于“多几倍”，不是“是几倍”，是几倍 $= r + 1$ ，多

几倍 = r 。

2. $(\text{现期} - \text{基期}) / \text{基期} = \text{现期} / \text{基期} - 1$ ，建议用 $(\text{现期} - \text{基期}) / \text{基期}$ 更好计算。因为先减之后，只需要除到第一位就能得出答案，但用 $\text{现期} / \text{基期} - 1$ 需要除到第二位。

【例 2】（2018 山东）



7月28日~8月5日间，A影片票房环比增速最快的单日，当日A影片占全国总票房的比例在该影片上映10天内排名：（ ）

A. 第7 B. 第6 C. 第5 D. 第4

※【答案】A。解析：先找到当日的比例再进行排名，注意问的是环比增速最快的，环比按最小的统计周期（天）相比，即和上一天比，增速比较问题，看“现期 / 基期”倍数关系明显不明显。 $r_{7月28日} = 2.15 / 1.03 = 2+$ ，倍数关系明显，直接用“现期 / 基期”做比较。除了7月28日，其余日期的环比增长率都没有2倍以上的关系，即7月28日的环比增长率最大，占全国总票房的比例是73.5%，看其余日期的比例，一共有3天（58.3%、54.7%、66.3%）的比例比73.5%低，一共有10天，即7月28日排名第7。故选A。

★【提示】

- 只要有一个2倍以上的倍数关系，就可以用“现期 / 基期”来比较。
- 本题中比73.5%大的数据有很多，所以我们就找比73.5%小的数据，更容易排名。

【例 3】（2019 广东）

2016—2018 年全国电力工业统计数据（部分）

指标名称	2018 年	2017 年	2016 年
可再生能源发电量（亿千瓦时）	18700	17000	15500
其中：水电发电量（亿千瓦时）	12000	11945	11745
风电发电量（亿千瓦时）	3660	3057	2420
光伏发电发电量（亿千瓦时）	1775	1182	662



生物质发电发电量（亿千瓦时）	906	794	647
全口径发电设备容量（万千瓦）	189967	177703	165151

2017 年，下列可再生能源发电量同比增幅最大的是：（ ）

A. 水电 B. 风电 C. 光伏发电 D. 生物质发电

※【答案】C。解析：增幅最大，即增长率最大，判定题型为增长率比较问题。2017 年同比是和 2016 年做比较，对应材料找数据，不需要看 2018 年的数据，表格中的数据都是 1 倍多的关系，用“（现期 - 基期）/ 基期”做比较。

A 项：(11945-11745) / 11745 = 200 / 11745；

B 项：(3057-2420) / 2420 = 637 / 2420；

C 项：(1182-662) / 662 = 520 / 662；

D 项：(794-647) / 647 = 147 / 647。可以看出 C 项明显最大。故选 C。

★★【拓展】

1. 做资料分析进行速算时，可以用眼睛直接看出答案的时候，不要怀疑自己，直接选答案。
 2. 一眼看不出来的可以大致估算。找一个中间数 1/2，520 / 662 > 1/2，其余三个数都小于 1/2，即 C 项最大。

【例 4】（2019 河南）

2018 年第四季度就业形势较好和较差的职业排名

排名	就业景气较好的 十个职业	CIER 指数		就业景气较差的 十个职业	CIER 指数	
		2018 年第 四季度	比上一季度 变化		2018 年第 四季度	比上一季 度变化
1	技工 / 操作工	25.67	0.82	高级管理	1.07	-0.32
2	教育 / 培训	16.24	8.51	公关 / 媒介	1.36	0.17
3	销售业务	14.26	2.14	项目管理 / 项目协 调	1.41	0.02
4	社区 / 居民 / 家政 / 服务	12.99	4.78	销售行政 / 商务	1.42	0.15
5	烹饪 / 料理 / 食品开 发	9.64	3.5	物业管理	1.45	0.21
6	交通运输服务	8.4	2.81	生产管理 / 运营	1.45	0.1
7	软件 / 互联网开发 / 系统集成	7.99	1.68	信托 / 担保 / 拍卖 / 典当	1.46	0.28
8	商超 / 酒店 / 娱乐管 理 / 服务	7.87	1.14	IT 管理 / 项目协调	1.55	-0.1



9	生物 / 制造 / 医疗器械	7.71	0.81	汽车制造	1.8	-0.49
10	翻译（口译和笔译）	7.67	1.58	环境科学 / 环保	1.81	0.41

与第三季度相比，第四季度 CIER 指数上升最快的职业是：（ ）

- A. 社区 / 居民 / 家政服务 B. 教育 / 培训
C. 技工 / 操作工 D. 高级管理

※【答案】B。解析：例 1. 把“指数”看做具体的量。变化即变化量，正的即增长量，负的即减少量。已知现期、增长量，求增长率，可以用“增长量 / (现期 - 增长量)”来计算，但是太麻烦了，直接比较“增长量 / 现期”。对应材料找数据，A 项： $4.78/12.99 < 1/2$ ，排除；B 项： $8.51/16.24 > 1/2$ ，保留；C 项： $0.82/25.67 < 1/2$ ，排除；D 项： $-0.32/10.7 < 0$ ，即 $r < 0$ ，排除。明显 B 项最大。故选 B。

★【提示】

1. 结论：已知：现期、增长量，比较增长率，直接比较“增长量 / 现期”。

2. 推导： $r = \text{增长量} / (\text{现期} - \text{增长量})$ ，分子、分母同时除以增长量，原式转化为 $1 \div (\text{现期} / \text{增长量} - 1)$ ，如果“增长量 / 现期”越大，则“现期 / 增长量”越小，分母越小，则分数越大，即 r 越大。

二、增长量

▲ 一般增长量

(一) 识别

增长 + 单位 (绝对量)

(二) 公式

公式一 (简单)：增长量 = 现期 - 基期。

公式二 (重点)：增长量 = 现期 / (1 + 增长率) × 增长率。

▲ 年均增长量

(一) 识别

年均 + 增长 + 单位 (绝对量)

(二) 公式

年均增长量 = (现期 - 基期) / N (年份差)

比如现期是 2015 年，基期是 2011 年，年份差 = 2015 - 2011 = 4。

(1) 2011 ~ 2015 年间：基期：2011 年，现期：2015 年，年份差 = 2015 - 2011 = 4。

(2) 2011 ~ 2015 这 5 年间 (考的少)：基期：2010 年，现期：2015 年，年份差为 5 (基期往前推一年)。如 2006 年 ~ 2008 这 3 年间，基期需要往前推 1 年，为 2005 年。



(3) 五年规划：十二五期间（2011 年～2015 年）：基期：2010 年，现期：2015 年，年份差为 5（基期往前推一年）。

▲ 百化分

记的时候，不要从分数记百分数，我们真正用的时候是百分数化分数，记的时候争取把百分数化分数。

（一）常见的分数化百分数例子

不用刻意背，通过做题巩固即可。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 50\%, \frac{1}{3} = 33.3\%, \frac{1}{4} = 25\%, \frac{1}{5} = 20\% \\ \frac{1}{6} &= 16.7\%, \frac{1}{7} = 14.3\%, \frac{1}{8} = 12.5\%, \frac{1}{9} = 11.1\% \\ \frac{1}{10} &= 10\%, \frac{1}{11} = 9.1\%, \frac{1}{12} = 8.3\%, \frac{1}{13} = 7.7\% \\ \frac{1}{14} &= 7.1\%, \frac{1}{15} = 6.7\%, \frac{1}{16} = 6.25\%, \frac{1}{17} = 5.9\% \\ \frac{1}{18} &= 5.6\%, \frac{1}{19} = 5.3\% \end{aligned}$$

（二）3 步速记法

① “7 ~ 12”，加和（整数部分 + 分母）为 20。12.5% = 1/8、11.1% ≈ 1/9、9.1% ≈ 1/11、8.3% ≈ 1/12、7.7% ≈ 1/13。

② (16、6) 和 (14、7) 互换的两对。16.7% ≈ 1/6、6.25% = 1/16、14.3% ≈ 1/7、7.1% ≈ 1/14。其中 7.7%、7.1% 都是 7 开头，如果快到 8%，加和（整数部分 + 分母）为 20，即 7.7% ≈ 1/13。如果是 7 开头一点，和 14 进行转化，即 7.1% ≈ 1/14。

③ (17、18、19)，5.963。5.9% ≈ 1/17、5.6% ≈ 1/18、5.3% ≈ 1/19。

（三）百化分方法

(1) 增长率百化分之放缩法：利用与背过的百分数的倍数关系，实现百化分。

① 1.43%：14.3% ≈ 1/7，则 1.43% ≈ 1/70。

② 67%：6.7% ≈ 1/15，67% ≈ 1/1.5。

③ 1.9%：1.9% ≈ 2% = 1/50。

(2) 增长率百化分之取中法：如果遇到百分数左右难取舍，且选项差距接近，取中即可。

① 18.5%：介于 16.7% ≈ 1/6 和 20% = 1/5 之间，则 18.5% ≈ 1/5.5，n = 5.5。

② 15.4%：介于 14.3% ≈ 1/7 和 16.7% ≈ 1/6 之间，则 15.4% 看成 1/6.5，n = 6.5。

(3) 增长率百化分之公式法 如果遇到百分数实在想不起来，或者你就不想背那么请记住 N = 100 / 百分号前的数字（保留小数点后一位）。

① 44%：44/100 = 1/N，N = 100/44 ≈ 2.2，则 44% 看成 1/2.2。

② 37%: $N=100/37 \approx 2.7$, 则 37% 看成 $1/2.7$ 。

▲ 增长量的比较

(一) 识别

增长最多 / 最少、下降最多 / 最少。

(二) 题型分类

已知：现期、基期，比较增长量。增长量 = 现期 - 基期，柱形图中可以直接看高度差。

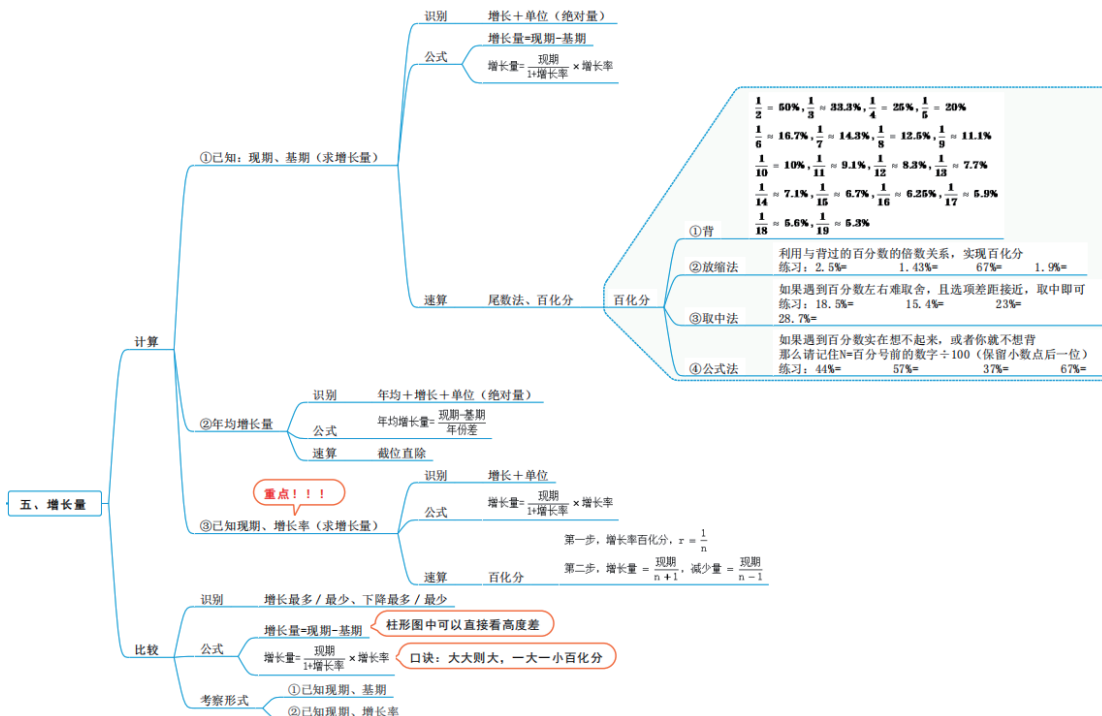
已知：现期、增长率，比较增长量。口诀：大大则大，一大一小百化分。

①例：2018 年，张三私房钱为 200 块，同比增长 20%；李四私房钱为 100 块，同比增长 10%。张三现期大、r 大，增长量大。

②例：2018 年，张三私房钱为 200 块，同比下降 20%；李四私房钱为 100 块，同比下降 10%。张三现期大，下降幅度大，则张三的下降量大。如果张三存款有 10 万，下降 1%，李四有 100 亿，下降 50%，李四下降量一定大。

③例：2018 年，张三私房钱为 200 块，同比增长 20%；李四私房钱为 100 块，同比增长 25%。张三现期大、r 小，一大一小的情况，需要百化分比较。 $20\% = 1/5$ ，即 $200/6 = 30+$ ， $25\% = 1/4$ ， $100/5 = 20$ ，张三增长量大。

④有上升有下降，比较变化的时候，用百化分来做，如 100 增长 10%，100 下降 10%，问谁的变化量大，百化分， $10\% = 1/10$ ，增长量 = $100/11$ ，减少量 = $100/9$ 。





随笔练习

【例 1】(2019 广东) 2018 年, 全省新登记企业最集中的三个行业分别是批发和零售业、租赁和商务服务业、制造业, 新登记企业数分别为 36.14 万户、15.19 万户、9.25 万户, 分别同比增长 0.23%、增长 22.98%、下降 6.8%。

2018 年, 租赁和商务服务业新登记企业数较上年增加约多少万户? ()

- A.2.8 B.3.8 C.4.8 D.5.8

※【答案】A。解析: 增加 + 具体单位, 增长量的问题。主体“租赁和商务服务业”, 定位材料找数据, 已知现期、 r , 求增长量, (1) 百分化分, $r=22.98\%$, 介于 $20\%=1/5$ 和 $25\%=1/4$ 之间, 则 $22.98\% \approx 1/4.5$, $n=4.5$; (2) 增长量 = 现期 / $(n+1) = 15.19/5.5$, 首位商 2, 对应 A 项。

【例 2】(2019 联考) 2018 年 1 季度, 铜产量 221 万吨, 增长 8.7%, 提高 1.4 个百分点; 锌产量 142 万吨, 增长 1.7%, 回落 1.3 个百分点。

2018 年 1 季度全国铜产量同比增量是同期锌产量同比增量的: ()

- A. 不到 2 倍 B. 2 ~ 4 倍之间
C. 4 ~ 6 倍之间 D. 6 倍以上

※【答案】D。解析: 看到“倍”, 倍数问题, 问的是增长量之间的倍数, 需要先求出增长量。铜: $r=8.7\% \approx 1/12$, $n=12$, 则增长量 = 现期 / $(n+1) = 221/13$; 锌: $r=1.7\% \approx 1/60$, $n=60$, 增长量 = 现期 / $(n+1) = 142/61$ 。列式: $221/13 \div (142/61)$, 选项差距大, 截两位计算, 即 $22/13 \times (61/14)$, 先约分, 即 $11/13 \times (61/7) \approx 11/13 \times 9 = 99/13 = 7+$, 对应 D 项。故选 D。

★【提示】

1. 也可以大致估算, $221/13 \div (142/61) \approx 17/2 = 8.5$, 对应 D 项。

2. $1.7\%: 100/1.7 = 1000/17 \approx 60$ 。或者 $16.7\% = 1/6$, 则 $1.7\% \approx 1/60$ 。

三、比重

▲ 现期比重

(一) 题型分类

(1) “比重 = 部分 / 总体”的三量变化。考查部分占总体的百分之几。

1. 求比重:

① A 占 B 的比重 $\rightarrow A/B$, 谁占谁就是谁除以谁, 占前是部分、占后是总体。

② A 中 B 的占比 $\rightarrow B/A$, 表述为“A 中”, 说明 A 是总体, B 是部分, 因此用 B/A 。

2. 求部分 (用乘法): 部分 = 总体 \times 比重。

3. 求总体 (用除法): 总体 = 部分 / 比重。

◆例: ① 2019 年, 张三总收入 50 万, 其中炒股所得 30 万。问: 2019 年张三炒股所得占总收入的比重为多少?



※ 答：出现“占……比重”，求的是比重，占前 / 占后，炒股是部分，总收入是总体，比重 = $30/50=60\%$ 。

② 2019 年，张三总收入 50 万，其中投资所得占 10%。问：2019 年张三投资所得为多少？

※ 答：给总体和比重，求部分量，用乘法，部分量 = 总体 × 比重 = $50 \times 10\% = 5$ 。

③ 2019 年，张三工资所得 10 万元，占总收入的比重为 20%。问：2019 年张三总收入为多少？

※ 答：已知部分和比重，求总体，用除法。 $10/20\%=50$ 。

(二) 利润率

在资料分析中，**利润率 = 利润 / 收入**。在数量关系中，**利润率 = 利润 / 成本**。分开记忆即可，可以理解为数量关系中，研究的是小卖部、小超市等，对于成本的计算，资料分析统计的是地区、全国，是非常宏观的数据，因此按照收入计算。

(三) 增长贡献率

也是比重的一种，是部分增长量占总体增长量的比重。

公式：增长贡献率 = 部分的增长量 / 总体的增长量。

◆ 例：2019 年、2018 年张三总收入分别为 50 万、30 万，其中工资收入分别为 10 万、6 万，问：2019 年张三工资收入对总收入的增长贡献率为多少？

※ 答：问增长贡献率，需要找部分的增长量和总体的增长量，增长贡献率 = 部分的增长量 / 总体的增长量 = $4 \text{ 万} / 20 \text{ 万} = 1/5 = 20\%$ 。

随笔练习

【例 1】(2018 国考) 2017 年 1—2 月，全国完工出口船 907 万载重吨，同比增长 127%；承接出口船订单 191 万载重吨，同比增长 122%。2 月末，手持出口船订单 8406 万载重吨，同比下降 25.9%。

2017 年 1—2 月，重点企业完工出口船 886 万载重吨，同比增长 138%；承接出口船订单 171 万载重吨，同比增长 109%。2 月末，手持出口船订单 8129 万载重吨，同比下降 26.6%。

2017 年 1—2 月，非重点企业出口船完工量约占全国出口船完工量的 ()

A.2% B.5% C.95% D.98%

※ 【答案】A。解析：看到“占”，想到是“比重问题”，给 2017 年问 2017 年，求现在的比重。比重 = 占前 / 占后 = 非重点企业出口船完工量 / 全国出口船完工量，题目中没有“非重点”，非重点 = 全部 - 重点 = $907 - 886$ ，因此占比 = $(907 - 886) / 907 = 21/907$ ，首位商 2，对应 A 项。

【例 2】(2017 联考) 2016 年 (全年 366 天)，全国年轻人人均月收入为 6726 元。同时，存款额度也在增加，2016 年年轻人的人均月存款为 2340 元。在旅游方面，人均年度交通支出达 4985 元。

2016 年，全国年轻人的人均旅游交通支出占个人全年支出的比重为 ()

A.113.65% B.17.75% C.9.47% D.6.18%



※【答案】C。解析：出现“占”，是比重问题，时间2016年是现期，判定为现期比重问题。
 比重 = 旅游交通支出 / 全年支出。已知“人均年度交通支出达4985元”，全年支出没有给，题目中给了收入、存款，赚的钱 - 存的钱 = 支出，比如一年赚100万，存了10万，相当于今年花了90万，资料分析中的关系是比较简单的。比重 = $4985 / (\text{收入} - \text{存款}) = 4985 / (6726 - 2340)$ ，问的是全年，此时分母求的是月均，还需要乘以12个月，因此比重 = $4985 / [(6726 - 2340) \times 12]$ 。选项差距大，保留两位计算，看作 $50 / (44 \times 12) = 25 / (22 \times 12) = 25 / 264$ ，首位不能商1，排除A、B项，还剩C、D项，直接看首位商6还是9，可以直接看出来是9，对应C项。故选C。

★【提示】

1. 选项差距大，截两位计算，通过约分大致计算结果。有的同学计算 $4985 / [(6726 - 2340) \times 12]$ ，观察选项差距大，截两位，且可以进行微调，变为 $50 / (44 \times 12) = 25 / (22 \times 12) \approx 2 / 22 = 1 / 11 \approx 9\%$ ，对应C项。进行估算的时候，选项差距大，可以浪一些。

2. 本题是乘除混合运算，属于多步除法，分子分母都截。

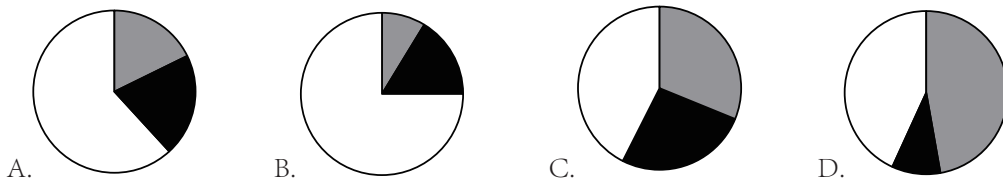
【例3】（2018 国考）

2015-2016 年中国生活服务电商市场交易规模统计表

单位：亿元

	2015 年	2016 年
在线餐饮外卖市场	530.6	1761.5
移动出行市场	999.0	2038.0
在线旅游市场	4487.2	6138.0

以下哪项最能准确描述 2016 年生活服务电商市场中，三个不同细分市场交易规模同比增量的比例关系？（ ）



※【答案】C。解析：问增量的比例关系，不能直接看表格中的三个数，要先求增量，在线餐饮外卖市场 = $1761.5 - 530.6 = 1200+$ ；移动出行市场 = $2038 - 1000 = 1000+$ ；在线旅游市场 = $6138 - 4487.2 = 1600+$ 。再将增量放在饼形图中，不需要分别算出比重，饼形图考查观察和分析的能力。12 点开始顺时针，第一个是线餐饮外卖市场，第二个是移动出行市场，第三个是线旅游市场，第三个最大，排除 D 项，中间最小，排除 B 项，还剩 A、C 项需要看之间的比例关系，最大 $1600+$ 和最小 $1000+$ 之间没有 2 倍的关系，A 项接近 3 倍关系，可以排除 A 项。故选 C。



★【提示】饼形图：

1. 十二点钟方向，顺时针依次排布。比如第一个数据在第一个，第二个数据在第二个……，是基本的、默认的构图顺序。

2. 先看大小、再看比例。

(1) 先看大小：找最大和最小，先排除。

(2) 如果不能得到唯一答案，再看两两之间的比例关系。

【例 4】（2019 山东）2017 年末，全国医疗卫生机构床位 794.0 万张，其中：医院 612.0 万张（占 77.1%），基层医疗卫生机构 152.9 万张（占 19.3%）。医院中，公立医院床位占 75.7%，民营医院占床位 24.3%。与上年比较，床位增加 53.0 万张，其中：医院床位增加 43.1 万张，基层医疗卫生机构床位增加 8.7 万张。每千人口医疗卫生机构床位数由 2016 年 5.37 张增加到 2017 年 5.72 张。

2017 年末公立医院床位数占全国医疗卫生机构床位数的比重为（ ）

A.75.7% B.77.1% C.58.4% D.56.2%

※【答案】C。解析：出现“占”，考查比重，时间 2017 年是现期，考查现期比重。

比重 = 公立医院床位数 / 全国医疗卫生机构床位数。已知“公立医院床位占 75.7%”“医院 612.0 万张”，因此公立医院床位数 = $612 \times 75.7\%$ ，比重 = $612 \times 75.7\% / 794$ 。数据比较大，计算比较麻烦，不要急着算，题目中已知“医院 612.0 万张（占 77.1%）”，说明 $612 / 794 = 77.1\%$ ，因此所求 = $77.1\% \times 75.7\%$ ，可以排除 A、B 项，C、D 项选项差距小，需要精确计算， 75.7×77 ，结果是 58 开头，对应 C 项。故选 C。

★【注意】题目中有多个层次的比重，比如已知班级男生占全班人数的 50%，全班占全校人数的 10%，问男生占全校的多少？可以直接用两个比重相乘， $50\% \times 10\% = 5\%$ 。本题同理，“医院 612.0 万张（占 77.1%）”“公立医院床位占 75.7%”，因此可以直接用 $75.7\% \times 77.1\%$ ，得到 C 项。

▲ 基期比重

（一）识别

过去 + 占。

（二）公式

基期比重 = $A/B \times (1+b) / (1+a)$ ，注意 A 和 a、B 和 b 之间是交叉对应的。

A：部分的现期量；B：总体的现期量。

a：部分的增长率；b：总体的增长率。

◆例：2017 年张三总收入 10 万元，同比增长 10%，2017 年张三稿酬所得 1 万，同比增长 5%。求：2016 年张三稿酬占总收入的比重。

※答：看到“占”，考查比重，时间 2016 年是基期，求基期比重。代入公式基期比重 = $A/B \times (1+b) / (1+a) = 1/10 \times (1+10\%) / (1+5\%)$ 。

（三）公式推导



比重 = 部分 / 总体, 上年的比重 = 基期部分 / 基期总体 = $A / (1+a) \div [B / (1+b)] = A / (1+a) \times [(1+b) / B] = A/B \times (1+b) / (1+a)$ 。推导过程了解即可, 没必要掌握。

(四) 速算

①先截位直除 A/B , 选项差距大, 截两位计算, 选项差距小, 截三位计算。计算之前需要看题目中是否已知 A/B 的占比, 有则直接用, 没有再计算。

②再看 $(1+b) / (1+a)$ 与 1 的关系 ($>$, $<$, $=$), 结合选项选答案。

注: ①当做一步除法, 只截分母;

②看看材料有没有已经给出现期比重的值。

练: $50/100 \times (1+20\%) / (1+5\%) = ()$

A.45% B.47% C.50% D.57%

※答: 先算 $50/100=50\%$, 后面 $(1+20\%) / (1+5\%)$, 分子大, 分母小, 则 $(1+20\%) / (1+5\%) > 1$, 可知结果 $> 50\%$, 对应 D 项。

练: $20/100 \times (1+15\%) / (1+30\%) = ()$

A.18% B.21% C.24% D.27%

※答: $20\% \times (\text{小于1的数}) < 20\%$, 对应 A 项。

随堂练习

【例 5】(2019 山东)

2018 年社会消费品零售总额主要数据

	12 月		1-12 月	
	绝对量(亿元)	同比增长(%)	绝对量(亿元)	同比增长(%)
社会消费品零售总额	35893	8.2	380987	9.0
其中: 限额以上单位消费品零售额	15084	2.4	145311	5.7
其中: 实物商品网上零售额			70198	25.4
按经营地分				
城镇	30329	8.0	325637	8.8
乡村	5565	9.3	55350	6.4
按消费类型分				
餐饮收入	4422	9.0	42716	9.5
其中: 限额以上单位餐饮收入	909	5.5	9236	6.4
商品零售	31472	8.0	338271	8.9
其中: 限额以上单位商品零售	14175	2.2	136075	5.7
粮油、食品类	1403	11.3	13776	10.2

饮料类	187	9.2	2040	9.0
烟酒类	394	8.4	3873	7.4
服装鞋帽、针纺织品	1541	7.4	13707	8.0
化妆品类	247	1.9	2619	9.6
金银珠宝类	276	2.3	2758	7.4
日用品类	545	16.8	5392	13.7
家用电器和音像器材类	936	13.9	8863	8.9
中西药品类	574	10.6	5593	9.4
文化办公用品类	386	-4.0	3264	3.0
家具类	251	12.7	2250	10.1
通讯器材类	406	-0.9	4371	7.1
石油及制品类	1736	5.8	19541	13.3
汽车类	4268	-8.5	38948	-2.4
建筑及装潢材料类	280	8.6	2498	8.1

注：1. 此表格均为未扣除价格因素的名义增速。

2. 此表中部分数据因四舍五入的原因，存在总计与分项合计不等的情况。

2017 年 12 月，乡村消费品零售额占社会消费品零售总额的比重约是（）

A.13.4% B.15.3% C.15.5% D.17.8%

※【答案】B。解析：看到“占”，想到比重问题。给 2018 年，问 2017 年，基期比重问题。

定位表格找数据，基期比重 = $A/B \times (1+b) / (1+a) = 5565/35893 \times (1+8.2\%) / (1+9.3\%)$ ，先计算 5565/35893，选项差距小，分母截三位计算，截后为 5565/359，首位商 1、次位商 5，结果约为 15.5%，再看 $(1+8.2\%) / (1+9.3\%)$ ，分子大、分母小，故 $(1+8.2\%) / (1+9.3\%) < 1$ ，故 $15.5\% \times \text{一个小于 1 的数} < 15.5\%$ ，排除 C、D 项。由于 $(1+8.2\%) / (1+9.3\%)$ 略小于 1，故基期比重略小于 15.5%，对应 B 项。故选 B

★【注意】

1. 出题老师在考查基期比重时，可能会给出现期比重的混淆选项。

2. 资料分析考查的是分析能力，并不是计算能力。如果算出是小于，选项只会给出略小于的选项和一般小于的选项，不用过分纠结。

【例 6】（2018 辽宁）2018 年 1 ~ 7 月份，社会消费品零售总额 210752 亿元，同比增长 9.3%。其中，限额以上单位消费品零售额 81125 亿元，同比增长 7.3%。

2017 年 1 ~ 7 月，限额以上单位消费品零售额占社会消费品零售总额比重约为（）

A.33.4% B.37.6% C.38.5% D.39.2%

※【答案】D。解析：看到“占”，想到比重问题。问 2017 年，给 2018 年，基期时间，

为基期比重问题。定位材料找数据，A=81125、a=7.3%、B=210752、b=9.3%，代入公



式：基期比重 $= A/B \times (1+b) / (1+a) = 81125/210752 \times (1+9.3\%) / (1+7.3\%)$ ，先计算 $81125/210752$ ，首位商 3，次位商 8，算出是 38 开头可能是 C 项，因为出题人有可能会设置一个现期陷阱，故 $81125/210752 \approx 38.5\%$ 。 $(1+9.3\%) / (1+7.3\%) > 1$ ，故原式 $= 38.5\% \times$ 一个大于 1 的数 $> 38.5\%$ ，对应 D 项。故选 D。

▲ 两期比重比较

(一) 识别

.....占.....比重，比上年上升 / 下降。比如：问 2017 年比上年的比重是上升还是下降。

(二) 方法

两期比重比较，看 a（部分增速）和 b（总体增速）大小。

① $a > b$ ，今年比重上升。

② $a < b$ ，今年比重下降。

③ $a = b$ ，今年比重不变。

◆例：2017 年张三总收入 10 万元，同比增长 10%，2017 年张三稿酬所得 1 万，同比增长 5%。判断：2017 年张三稿酬占总收入的比重比上年上升还是下降？

※答：比重 = 修家电 (a) / 总收入 (b)， $a = 5\%$ ， $b = 10\%$ ， $a < b$ ，故比重下降。

如果题目改为“2017 年张三总收入 10 万元，同比下降 10%，2017 年张三稿酬所得 1 万，同比增长 5%”，此时 $a = 5\%$ ， $b = -10\%$ ， $a > b$ ，比重上升。

(三) 公式推导

1.A：部分的现期量；B：总体的现期量；a：部分的增长率；b：总体的增长率。

2. 现期比重 $= A/B$ ；基期比重 $= A/B \times (1+b) / (1+a)$ 。若 $a > b$ ， $(1+b) / (1+a)$ 小于 1，即基期比重 $<$ 现期比重，现期比重大 \rightarrow 比重上升；若 $a < b$ ， $(1+b) / (1+a)$ 大于 1，即基期比重 $>$ 现期比重，现期比重小 \rightarrow 比重下降。公式推导过程了解即可。

随笔练习

【例 7】(2018 四川) 2018 年 1 ~ 3 月，国内手机市场出货量 8737.0 万部，同比下降 26.1%；4G 手机出货量 8195.6 万部，同比下降 27.1%；国产品牌手机出货量 7586.4 万部，同比下降 27.8%；智能手机出货量 8187.0 万部，同比下降 27.0%。

在①国内 4G 手机出货量、②国产品牌手机出货量、③智能手机出货量中，2018 年 1 ~ 3 月出货量占全国手机出货量比重高于上年水平的有几类？ ()

A.0 B.1 C.2 D.3

※【答案】A。解析：看到“占”，想到比重问题；看到“高于上年”，判断为两期比重比较问题。要求高于上年，即 $a > b$ 。定位材料找数据，部分量的增长率分别为：国内 4G 手机出货量增长率 $a_1 = -27.1\%$ 、国产品牌手机出货量增长率 $a_2 = -27.8\%$ 、智能手机出货量增长率 $a_3 = -27\%$ ，均小于国内手机市场出货量增长率 $b = -26.1\%$ ，故三类均低于上年水平，对应 A 项。故选 A。

▲ 两期比重计算

本质是比重差的计算。

(一) 识别

.....占.....比重，比上年上升 / 下降 + 百分点。百分点是由两个百分数相加减得到。

(二) 公式

比重差 = 现期比重 - 基期比重 = $A/B - A/B * (1+b) / (1+a) = A/B * (a-b) / (1+a)$

◆例：2018 年一季度，张三炒股所得占总收入的比重比上年同期：

A. 上升了 0.1 个百分点 B. 上升了 3.1 个百分点

C. 下降了 0.1 个百分点 D. 下降了 3.1 个百分点

※答：看到“占”，想到比重问题；看到“上升 / 下降 + 百分点”，想到两期比重差值计算问题。

(三) 速算

①判方向： $a > b$ ，上升； $a < b$ ，下降。

②定大小：小于 $|a-b|$ 。

(四) 公式推导

现期比重 - 基期比重 = $A/B - A/B * (1+b) / (1+a) = A/B * [1 - (1+b) / (1+a)] = A/B * (a-b) / (1+a)$
/ $(1+a) = A/B * [1 / (1+a)] * (a-b)$ ，其中 A/B 为比重，一般都是小于 1 的数。若 $a > 0$ ，则 $1 / (1+a)$ 小于 1，因此 $A/B * 1 / (1+a) * (a-b) < |a-b|$ ；若 $a < 0$ ，一般在资料分析中会出现一些经济指标小于 0 的情况，但是不会小特别多，一般不超过 10%，则 $1 / (1+a) \approx 1$ ，因此 $A/B * 1 / (1+a) * (a-b) < |a-b|$ 。

随笔练习

【例 8】(2017 重庆) 2015 年，纺织行业规模以上企业累计实现主营业务收入 70713 亿元，同比增长 5.0%；实现利润总额 3860 亿元，同比增长 5.4%；企业亏损面（亏损企业占所有企业比重）11.4%，比上年低 0.1 个百分点。

2015 年，纺织行业规模以上企业主营业务利润率（利润总额 / 主营业务收入）比上年约（）

A. 上升 0.02 个百分点 B. 上升 0.4 个百分点

C. 下降 0.02 个百分点 D. 下降 0.4 个百分点

※【答案】A。解析：判断题型，利润率是比重，比重上升 / 下降 + 百分点，两期比重计算问题。两步走：（1）根据增长率来判断是增长还是下降，利润率 = 利润（a） / 收入（b）， $a=5.4\%$ ， $b=5.0\%$ ， $a > b$ ，比重上升，排除 C、D 项。（2）小于 $|a-b|$ ，即小于 $|5.4\%-5\%| \rightarrow$ 小于 0.4 个百分点，对应 A 项。故选 A。

【例 9】(2017 广东) 2016 年，广东民营经济增加值突破四万亿元。经初步核算，全年实现民营经济增加值 42578.76 亿元，按可比价计算，比上年同期增长 7.8%，增幅高于同期 GDP 增幅 0.3 个百分点，其中第二产业增幅比同期 GDP 第二产业增幅高 3 个百分点。民营经济占 GDP 的比重为 53.6%，比 2010 年提高 3.9 个百分点，占比逐年提高；对 GDP 增长的贡献率为 55.5%，同比提高 1.3 个百分点，拉动 GDP 增速达 4.2 个百分点，民营经济



的作用不断提升，是广东经济增长的主力军。

2016 年广东民营经济各产业增加值

类型	增加值（亿元）	增速（%）
第一产业	3631.01	3.0
第二产业	17306.17	9.2
第三产业	21641.58	7.6

2016 年广东民营经济中第三产业所占的比重相比 2015 年大约（）

- A. 提高了 0.1 个百分点 B. 降低了 0.1 个百分点
 C. 提高了 0.2 个百分点 D. 降低了 0.2 个百分点

※【答案】B。解析：看到“占”，比重问题；看到“比上年上升 / 下降 + 百分点”，两期比重计算问题。定位表格，第三产业增速 $a=7.6\%$ 。定位材料，民营经济增速 $b=7.8\%$ 。（1）判断升降， $a < b$ ，故比重下降，排除 A、C 项。（2）小于 $|a-b|$ ，小于 $|7.6\%-7.8\%| \rightarrow$ 小于 0.2 个百分点，对应 B 项。故选 B。

★【提示】在近几年的考题中，判断上升 / 下降后，直接选最小值，正确率可以达到 95% 以上。在 2017 年广东考题中，有一题例外，因为这道题考查的年份中有间隔（问 2018 年比 2016 年），而一般相邻两年之间（问 2016 年比 2015 年）的题目先判断后选小即可。

【例 10】（2016 联考）2015 年 3 月末，国有企业资产总额 1054875.4 亿元，同比增长 12%；负债总额 685766.3 亿元，同比增长 11.9%；所有者权益合计 369109.1 亿元，同比增长 12.2%。其中，中央企业资产总额 554658.3 亿元，同比增长 10.5%；负债总额 363304 亿元，同比增长 10.4%；所有者权益为 191354.4 亿元，同比增长 10.7%。地方国有企业资产总额 500217.1 亿元，同比增长 13.8%；负债总额 322462.3 亿元，同比增长 13.7%；所有者权益为 177754.7 亿元，同比增长 13.9%。

2015 年 3 月末，中央企业所有者权益占国有企业总体比重比上年同期约（）

- A. 下降了 0.7 个百分点 B. 下降了 1.5 个百分点
 C. 上升了 0.7 个百分点 D. 上升了 1.5 个百分点

※【答案】A。解析：出现“占”，比重问题；出现“比上年上升 / 下降 + 百分点”，判定为两期比重计算问题。定位材料找数据， $a=10.7\%$ （中央企业所有者权益）， $b=12.2\%$ （国有企业）。 $a < b$ ，比重下降，排除 C、D 项。再选最小的选项即可，对应 A 项。故选 A。

★【提示】选项的表述问题：

1. 第一组：比重比上年约：

- A. 上升 0.02 个百分点 B. 上升 0.4 个百分点
 C. 下降 0.02 个百分点 D. 下降 0.4 个百分点

※答：比重计算考的就是比重差，两个百分数之间做减法得到的一定是百分点，

这是最正统的选项表述。

2. 第二组：比重比上年约：

- A. 上升 0.02 个百分点 B. 上升 0.4 个百分点
C. 上升 0.02% D. 上升 0.4%

※ 答：注意不能选择 C、D 项，因为百分数相减得到的是百分点。

3. 第三组：比重比上年约：

- A. 上升 0.02% B. 上升 0.4% C. 下降 0.02% D. 下降 0.4%

※ 答：选项都是百分数，说明没有将百分数和百分点的概念进行区分。同样先判升降，后选最小。

▲ 比重总结

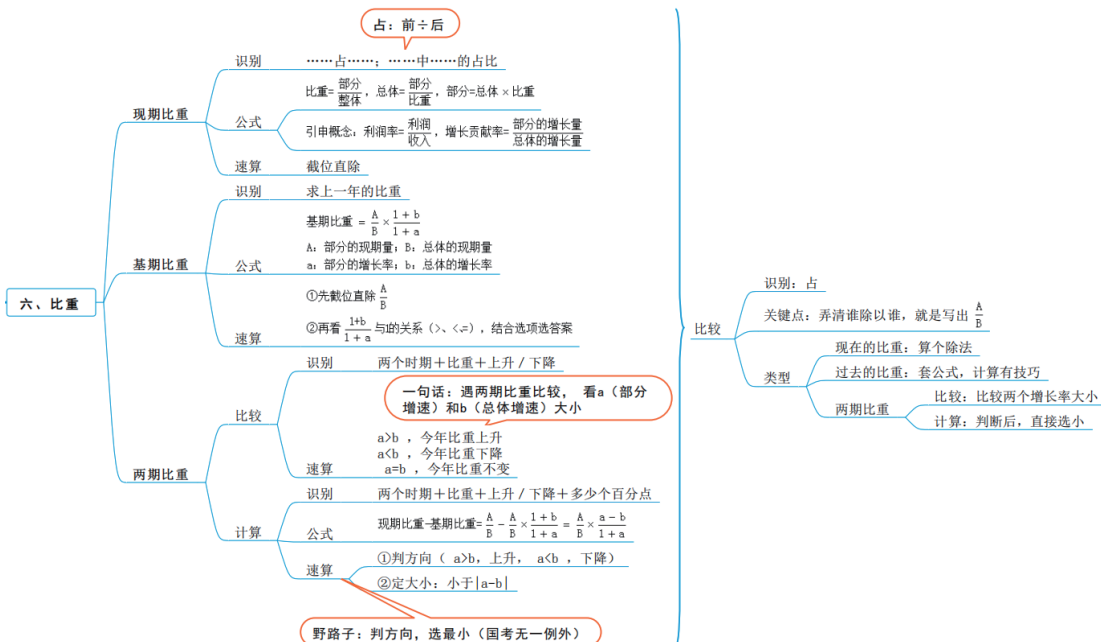
看到“占”，就先写出 A/B，再看时间。

(1) 如果是现期比重，则考查三量关系，部分量 = 比重 * 总体量，总体量 = 部分量 / 比重。

(2) 如果是基期比重，对应公式 $A/B * (1+b) / (1+a)$ ，先算 A/B，再判断 $(1+b) / (1+a)$ 与 1 的大小关系。

(3) 如果是两期比重，判断上升 / 下降，即找到 A 对应的增长率 a，B 对应的增长率 b，若 $a > b$ ，则比重上升；若 $a < b$ ，则比重下降；

(4) 如果是两期比重，判断上升 / 下降 + 百分点，即先判升降，再选择最小的选项即可。





四、平均数

▲ 平均数考情分析

(一) 识别

平均、每、单位.....。

(二) 题型分类

- ①现期平均 (必考)
- ②基期平均 (考的少)
- ③两期平均 (考的少)

▲ 现期平均数

(一) 识别

现在 + 平均 / 每 / 单位。

(二) 公式

列式方法: 后 / 前。

- ①平均数 = 总和 / 个数。
- ②人均收入 = 收入 / 人数。
- ③亩产量 = 产量 / 亩数。
- ④单位面积产量 = 产量 / 面积。

随笔练习

【例 1】(2019 吉林) 2018 年全国房地产开发投资 12.03 万亿元, 比上年增长 9.5%。全国商品房销售面积 17.17 亿平方米, 增长 1.3%, 其中住宅销售面积增长 2.2%。全国商品房销售额约 15 万亿元, 增长 12.2%, 其中住宅销售额增长 14.7%。

2018 年我国商品房销售均价约为 ()

- A.8700 元 / 平方米 B.9700 元 / 平方米
- C.6700 元 / 平方米 D.5700 元 / 平方米

※【答案】A。解析: 看到“均价”, 想到平均数问题。均价 = 总钱数 / 总面积, 定位材料找数据, “2018 年全国商品房销售面积为 17.17 亿平方米, 销售额约 15 万亿元”, 则均价 = $15 / 17.17$, 首位商 8, 对应 A 项。故选 A。

【例 2】(2019 吉林) 2017 年我国渔业产值中, 海洋捕捞产值 1987.65 亿元, 海水养殖产值 3307.40 亿元, 淡水捕捞产值 461.75 亿元, 淡水养殖产值 5876.25 亿元, 水产苗种产值 680.80 亿元。

2017 年, 全国水产品总产量 6445.33 万吨, 比上年增长 1.03%。其中, 养殖产量 4905.99 万吨, 同比增长 2.35%; 捕捞产量 1539.34 万吨, 同比降低 2.96%; 养殖产品与捕捞产品的产量比例为 76.1: 23.9, 海水产品产量 3321.74 万吨, 同比增长 0.62%; 淡水产品产量 3123.59 万吨, 同比增长 1.47%; 海水产品与淡水产品的产量比例为 51.5: 48.5。

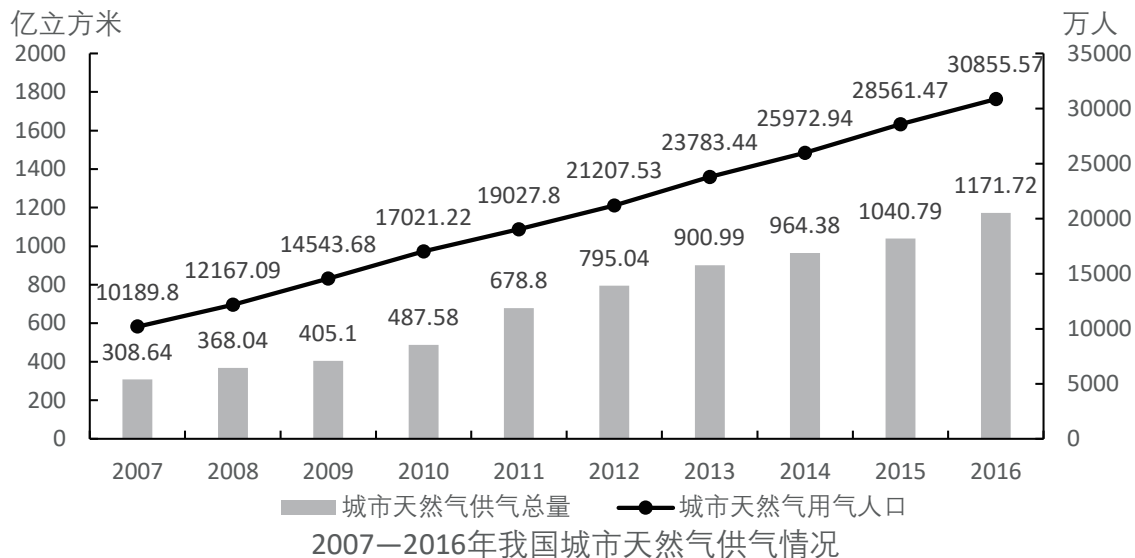


2017 年捕捞水产的单位产值约为：

- A.1.59 万元 / 吨 B.1.88 万元 / 吨
C.1.29 万元 / 吨 D.0.30 万元 / 吨

※【答案】A。解析：出现“单位产值”，给 2017 年，问 2017 年，现期平均数问题。单位产值 = 钱数 / 吨数 = $(1988+462) / 1539 = 2450 / 1539$ ，选项差距大，分母保留两位计算，原式转化为 $2450 / 15$ ，首位商 1、次位商 6，A 项最接近。故选 A。

【例 3】（2019 上海）



2016 年我国城市天然气用气人口中，平均每人每月使用天然气约多少立方米？（ ）

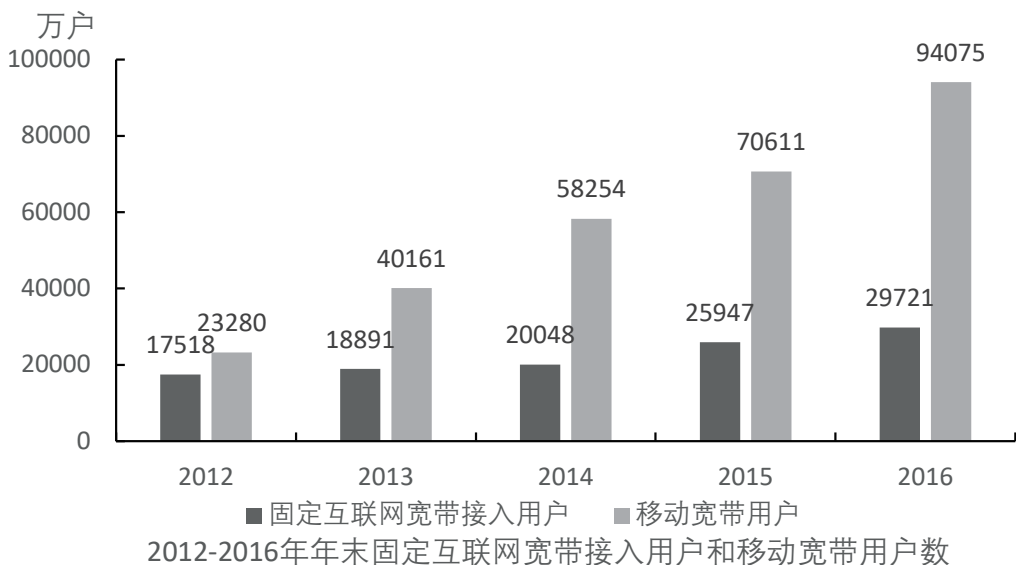
- A.32 B.65 C.167 D.380

※【答案】A。解析：出现“平均”，确定为平均数问题；方法：“后”/“前”；本题所求平均数 = 天然气 / 人数。注意“每人每月”，列式：所求平均数 $\approx 1171 / 30855 \div 12$ ；观察选项，出现 10 倍差距，要注意位数和单位；原式 $\approx 1171 \text{ 万万} / 3.0855 \text{ 万万} \div 12$ ，选项差距大，可以截 2 位计算，原式 $\approx 1200 / (3.1 \times 12) = 100 / 3.1 = 30+$ ，对应 A 项。故选 A。

★【提示】本题可以通过以“坑”治“坑”，可能的考生会忘记除以 12，从而跳坑；发现 A、D 项刚好大概有 12 倍的关系，可以猜测 A 项为正确选项。这是一种行测的思维，不是所有题目都适用。



【例 4】(2018 联考)



2012 ~ 2016 年期间, 我国固定互联网宽带接入用户的平均数是: ()

- A.18425 万户 B.22425 万户
 C.25425 万户 D.27425 万户

※【答案】B。解析: 方法一: 平均数问题, 若直接用公式计算的话, 计算量会比较大, 此时考虑削峰填谷。为方便处理数据, 可以将题目中的 5 位数截取为 3 位数: 175、189、200、259、297; 再选取 200 为基准, 各数字与 200 做差得: -25、-11、0、+59、+97; 用峰填谷得 $59+97-(25+11)=120$, 平均多了 $120/5=24$, 则所求平均数 $=200+24=224$, 与 B 项最为接近。

方法二: 直接看。5 个数字, 只有 1 个小于 18400、只有 1 个大于 27400, 可以优先排除 A、D 项; 若选 C 项, 可以发现峰是不够填谷的, 可以排除 C 项, 对应 B 项。故选 B。

★【提示】削峰填谷:

1. 环境: 用于平均数的计算或比较。

2. 方法:

(1) 第一步, 划线, 找峰找谷 (划线: 找一个相对居中好算的数)。

(2) 第二步, 计算, 用峰填谷。

▲ 基期平均数

与基期比重异曲同工。

(一) 识别

过去 + 平均 / 每 / 单位。

(二) 公式



基期平均 = $A/B \times [(1+b) / (1+a)]$

a: 分子的增长率; b: 分母的增长率。

(三) 速算

1. 先截位直除 A/B 。

2. 再看 $(1+b) / (1+a)$ 与 1 的关系 ($>$, $<$, $=$) , 结合选项选答案。

随笔练习

【例 5】(2019 北京)

某区 2014 年限额以上第三产业单位按门类划分收入构成情况

	单位数 (家)	2014 年收入 (亿元)	2014 年收入同 比增速 (%)	2014 年上半年 收入同比增速 (%)
合计	674	1059.1	4.5	11.4
批发和零售业	291	893.4	8.8	16.1
交通运输、仓储和邮政业	38	13.5	-3.6	-3.3
住宿和餐饮业	50	4.9	-16.8	-18.4
信息传输、软件和信息技术服务业	7	4.7	-7.2	1.9
金融业	22	5.2	44.2	30.7
房地产业	35	31.6	-51.1	-41.4
租赁和商务服务业	63	21.1	-7.7	-10.2
科学研究和技术服务业	26	8.1	3.0	17.8
水利、环境和公共设施管理业	23	8.6	0.4	-9.0
居民服务、修理和其他服务业	7	1.9	3.6	-10.1
教育	69	23.3	16.5	2.3
卫生和社会工作	26	38.6	14.9	14.6
文化、体育和娱乐业	17	4.2	8.1	-2.8

如 2013 年该区限额以上金融业单位数量与 2014 年一样, 则该区 2013 年平均每家限额以上金融业单位实现收入约多少亿元?

A.0.16 B.0.24 C.0.39 D.0.65

※【答案】A。解析: 题目时间在材料之前, 且出现“平均”, 确定为基期平均数问题; 公式: 基期平均数 = $A/B \times [(1+b) / (1+a)]$ 。根据“如 2013 年该区限额以上金融业单位数量与



2014 年一样”，说明单位数量的增长率为零，代入数据得，所求平均数 $= 5.2 / 22 * [(1+0\%) / (1+44.2\%)] = 5.2 / [22 * (1+44.2\%)]$ ，计算前观察选项，选项首位有效数字不同，选项差距大，可以截 2 位计算，原式转化为 $5.2 / (22 * 1.4)$ ，约分后转化为 $26 / 154$ ，首位商 1，对应 A 项。故选 A。

▲ 两期平均数比较

与两期比重异曲同工。

（一）识别

平均数，比上年上升 / 下降。

（二）方法

两期比重比较，看 a（分子增速）和 b（分母增速）大小。

① $a > b$ ，今年平均上升。

② $a < b$ ，今年平均下降。

③ $a = b$ ，今年平均不变。

▲ 两期平均数计算

（一）识别

平均数，比上年上升 / 下降 + 百分数。

（二）公式

平均数的增长率 $= (a-b) / (1+b)$ 。a、b 分别代表分子、分母的增长率。

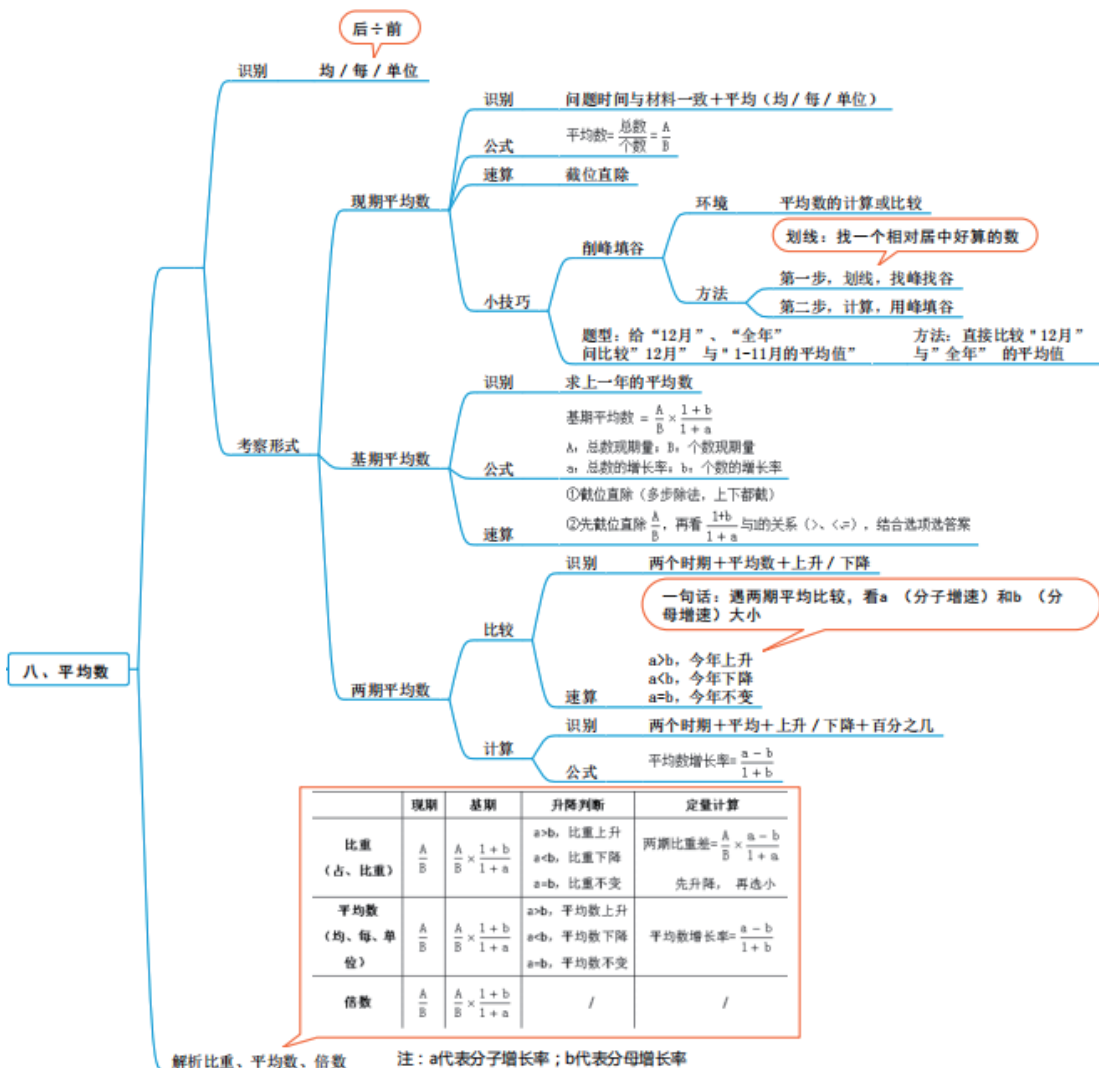
◆例：2018 年一季度，平均每人次修脚所得比上年：

A. 上升了 1% B. 上升了 3.1% C. 下降了 1% D. 下降了 3.1%

本题出现“平均”+百分数，确定为平均数增长率问题。

（三）公式推导

现期平均： A/B ，基期平均 $= A/B * [(1+b) / (1+a)]$ ， $r = \text{现期} / \text{基期} - 1 = A/B \div A/B * [(1+b) / (1+a)] - 1 = (1+b) / (1+a) - 1 = (a-b) / (1+b)$ 。



随笔练习

【例 6】(2019 国考) 2017 年, A 省完成客运总量 148339 万人次, 同比增长 5.4%, 增幅比前三季度提高 0.2 个百分点, 比上年提高 0.5 个百分点; 完成旅客周转总量 4143.84 亿人公里, 增长 7.7%, 增幅比前三季度提高 0.7 个百分点, 比上年提高 1.8 个百分点。

2017 年前三季度, A 省平均每人每次客运旅客运输距离 (旅客周转量 ÷ 客运总量) 同比: ()

- A. 下降了不到 2% B. 下降了 2% 以上
C. 上升了不到 2% D. 上升了 2% 以上

※【答案】C。解析: 出现“平均”+ 选项出现上升 / 下降 + 百分数, 确定为平均数增长率问题; 公式: $r = (a-b) / (1+b)$ 。平均数 = “后” / “前” = 周转量 / 客运量, 根据“增长 7.7%, 增幅比前三季度提高 0.7 个百分点”“同比增长 5.4%, 增幅比前三季度提高 0.2 个百分点”, 可得周转量增长率为 $a = 7.7\% - 0.7\% = 7\%$ 、客运量增长率为 $b = 5.4\% - 0.2\% = 5.2\%$; 代入数据得: $r = (a-b) / (1+b) = (7\% - 5.2\%) / (1 + 5.2\%) = 1.8\% / (1 + 5.2\%)$, 结果为正, 排除 A、B 项;



分母大于1，则结果应小于1.8%，对应C项。故选C。

★【提示】切记 先判断后选最小只适用于两期比重的计算，不适用于平均数增长率的计算。

五、倍数与比值

▲ 倍数与比值

倍数用来表示二者的相对关系；比值用来表示二者之间的比例关系。

A与B的比值，即 $A:B = A/B$ 。

(一) 识别

时间 + 倍数。

(二) 公式

1. 现期倍数 $= A/B$ 。

◆例：2018年，张三收入10万，李四收入2万，则张三的收入是李四的多少倍？

※答：10/2=5倍。

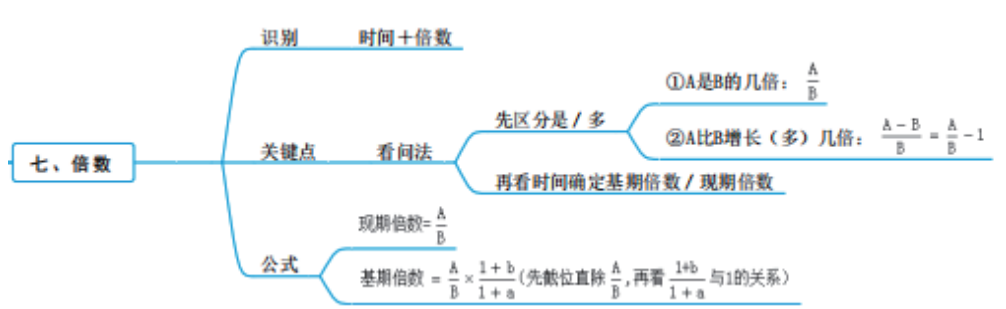
2. 基期倍数 $= A/B \times [(1+b)/(1+a)]$ ；（先截位直除 A/B ，再看 $(1+b)/(1+a)$ 与1的关系）。

(三) 倍数的3种问法

① A是B的几倍： A/B 。

② A比B增长（多）几倍： $(A-B)/B = A/B - 1$ 。

③ A超过B的N倍 $\rightarrow A > B \times N$ 。



随笔练习

【例1】（2017 辽宁）2016年末金融机构境内住户人民币消费贷款余额250472亿元，增加60998亿元。其中，短期消费贷款余额49313亿元，增加8347亿元；中长期消费贷款余额201159亿元，增加52651亿元。

2015年末金融机构境内住户人民币中长期消费贷款余额比短期消费贷款余额约多多少倍？（）

A.3.8 B.3.6 C.2.6 D.2.2

※【答案】C。解析：出现“倍”，确定为倍数问题；问的“多几倍”，应除后减1；题目时

间在材料之前，基期倍数问题。代入数据得：基期倍数 = $(201159-52651) / (49313-8347)$ ，虽然 A、B 项差距较小，但若截 3 位计算的话，计算量会非常大，此时考虑大胆截 2 位计算，原式 $\approx 150000/41000$ ，转化为 15/41，首位商 3、次位商 6，多的倍数 = 基期倍数 - 1 $\approx 3.6-1=2.6$ ，对应 C 项。故选 C。

★【注意】本题可能会把“多几倍”看成“是几倍”，忘记减 1，发现 B、C 项刚好差 1，猜测 C 项为正确选项。

【例 2】（2018 国考）

2016 年“一带一路”沿线国家情况

	人口（万人）	GDP（亿美元）	进口额（亿美元）	出口额（亿美元）
蒙古	301.4	116.5	38.7	45.0
东南亚 11 国	63852.5	25802.2	11267.2	11798.6
南亚 8 国	174499.0	29146.6	4724.1	3308.5
中亚 5 国	6946.7	2254.7	422.7	590.7
西亚、北非 19 国	43504.6	36467.5	9675.5	8850.7
东欧 20 国	32161.9	26352.1	9775.5	11388.4

2016 年“一带一路”沿线国家中，东欧 20 国的人均 GDP 约是中亚 5 国的多少倍？（）
A.2.5 B.3.6 C.5.3 D.11.7

※【答案】A。解析：出现“倍”，确定为倍数问题；问的是“是几倍”，直接除即可。但要注意问的是平均数的倍数问题，需先算平均数，再计算倍数；列式：所求倍数 = $(26352/32161) \div (2254/6946)$ ；选项差距大，可以截 2 位计算，原式转化为 $26/32 \times 69/22$ ，结果首位为 2 开头，对应 A 项。故选 A。

★【注意】读题时要仔细，本题若没看到“人均”，会错选 D 项。



数量关系三色笔记

一、解题思想

▲ 代入排除思想

(1) 使用范围

1. 看题型：多位数、年龄、余数、不定方程。
2. 看选项：
3. 选项信息充分；选项为一组数。（问法：分别 / 各）
4. 剩两项：只代其中一个。

(2) 使用方法

1. 先排除：奇偶、倍数、尾数。
2. 再代入：
 - (1) 从简原则：方便计算的数，整十、整百的数。
 - (2) 最值原则：问最大，从最大开始代入；问最小，从最小开始代入。对于生活中的问题，注意用生活思维。

随笔练习

1. 一群学生分小组在户外活动，如 3 人一组还多 2 人，5 人一组还多 3 人，7 人一组还多 4 人，则该群学生的最少人数是（ ）。

- A.23 B.53
C.88 D.158

※【答案】B。解析：题干正面计算复杂，使用代入排除法。求的最少从最小的开始代入。代入 A 项：当学生人数为 23 时， $23-4=19$ ，不是 7 的倍数，不满足题意，排除。代入 B 项：当学生人数为 53 时， $53-2=51$ ，可以被 3 整除； $53-3=50$ ，可以被 5 整除； $53-4=49$ ，可以被 7 整除，满足题干所有条件，当选。故本题选 B。

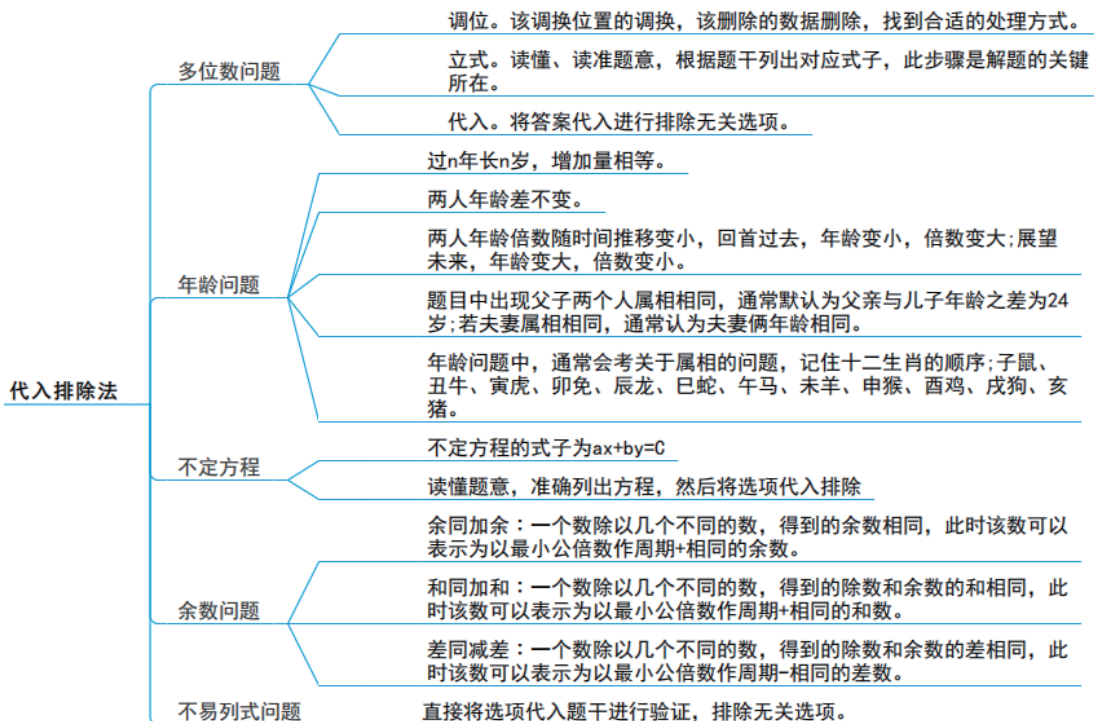
2. 两件快递的重量之比是 3: 2，去除包装之后的重量之比是 9: 5。若包装重量都是 120 克，则两件快递的重量分别是（ ）。

- A.390 克、260 克 B.480 克、320 克
C.540 克、360 克 D.630 克、420 克

※【答案】B。解析：题干条件清晰，使用代入排除法。

代入 A 项： $\frac{390-120}{260-120} = \frac{27}{14}$ ；不符合题干，排除；

代入 B 项： $\frac{480-120}{320-120} = \frac{9}{5}$ ；符合题干，当选。故本题选 B。



▲ 倍数特性思想

(1) 整除型

如果 $A=B \times C$ (B 、 C 均为整数)，那么 A 能被 B 整除，且 A 能被 C 整除。

使用范围：平均分配物品、平均数。

三量关系 ($A=B \times C$)：行程问题、工程问题、经济利润问题。

(2) 余数型

若总数 $= ax + b$ ，则 (总数 $-b$) 一定能被 a 整除。 (a, x 均为整数)

(3) 比例型

若 $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ (m, n 互质)，则 a 是 m 的倍数， b 是 n 的倍数；

若 $a = \frac{m}{n}b$ (m, n 互质)，则 a 是 m 的倍数， b 是 n 的倍数；

若 $a = \frac{m}{n}b$ (m, n 互质)，则 $a = \frac{m}{m+n}(a+b)$ 。

比例型适用于：

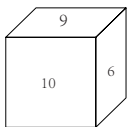
题干特征：分数、百分数、比例、倍数。

对象特征：描述对象为不可分割的整体，整数才有意义。如人、车、年龄等。



随笔练习

1. 如下图，一个正方体的表面上分别写着连续的 6 个整数，且每个相对面上的两个数的和都相等，则这 6 个整数的和为（ ）。



A.53

B.52

C.51

D.50

※【答案】C。解析：相对面数字和相等，六面体共有三个相对面，所以加和一定是 3 的倍数，每组相对面的和相等，设其为 n ，则总和为 $3n$ ，即为 3 的倍数；或者 6 个连续的整数之和为 3 的倍数。只有 C 符合。

2. 在某公司年终晚会上，所有员工分组表演节目。如果按 7 男 5 女搭配分组，则只剩下 8 名男员工；如果按 9 男 5 女搭配分组，则只剩下 40 名女员工。该公司员工总数为（ ）名。

A.446

B.488

C.508

D.576

※【答案】B。解析：假设两次分组的组数分别为 X 和 Y ，总人数为 T 则： $T=12X+8$ ， $T=14Y+40$ ，虽然三个未知数两个方程没法解，不过根据倍数特性，我们只要求的总人数， $T-8$ 后是 12 的倍数， $T-40$ 后是 14 的倍数，只有 B 选项满足条件。

倍数特性思维	2、4、8 整除及余数判定基本法则	一个数能被 2（或 5）整除，当且仅当其末一位数能被 2（或 5）整除； 一个数能被 4（或 25）整除，当且仅当其末两位数能被 4（或 25）整除； 一个数能被 8（或 125）整除，当且仅当其末三位数能被 8（或 125）整除。
	3、9 整除及余数判定基本法则	一个数能被 3 整除，当且仅当其各位数字之和能被 3 整除； 一个数能被 9 整除，当且仅当其各位数字之和能被 9 整除。
	7 整除判定基本法则	一个数是 7 的倍数，当且仅当其末一位的两倍，与剩下的数之差为 7 的倍数； 一个数是 7 的倍数，当且仅当其末三位数，与剩下的数之差为 7 的倍数。
	11 整除判定基本法则	一个数是 11 的倍数，当且仅当其奇数位之和与偶数位之和的差为 11 的倍数。
	平均数问题、倍数问题	型如 $A=M \times B$ ，解题方法：A 可被 M 整除，则 A 可被 M 的约数整除。
	普通数字整除判定	普通数字的整除判定，一般采用分解因式的方法进行快速判断。
	分数比例形式整除	若 $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ （m、n 互质），则 a 是 m 的倍数，b 是 n 的倍数， $a+b$ 是 $m+n$ 的倍数； 若 $a = \frac{m}{n}b$ （m、n 互质），则 a 是 m 的倍数，b 是 n 的倍数； 若 $a = \frac{m}{n}b$ （m、n 互质），则 $a = \frac{m}{m+n}(a+b)$ 。
	因子特性	在乘法运算中，如果涉及“小数”，那么 2 和 5 的因子可能会随着乘法而消失。而其他的因子，譬如 3、7、9、11、13 等不会因为乘法而消失（但如果乘法中有分数，而分数中的分母含有以上因子则可能也会消失）。
	余数类倍数问题	型如 $A=M \times B \pm N$ ，解题方法： $A=M \times B+N$ ， $A-N$ 可被 M 及其约数整除， $A=M \times B-N$ ， $A+N$ 可被 M 及其约数整除。
	分数、百分数、倍数、比例类问题	型如 $A = \frac{1}{N}B$ ，解题方法：B 是 N 的倍数，代入选项进行验证，满足即为正确答案。 型如 $A = \frac{M}{N}B$ ，解题方法： $A = \frac{M}{N}B$ 若（M、N 互质），则 A 是 M 的倍数，B 是 N 的倍数。 型如 $A = \frac{M}{M+N}(A+B)$ ，解题方法： $\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$ （若 M、N 互质），则 A 是 M 的倍数，B 是 N 的倍数。



▲ 余数特性思想

同余问题核心口诀“最小公倍数作周期，余同加余，和同加和，差同减差”

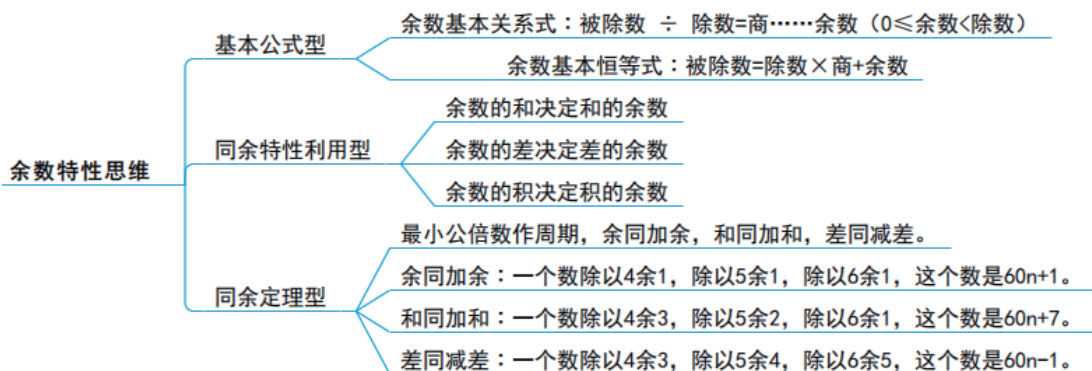
余同加余：“一个数除以 4 余 1，除以 5 余 1，除以 6 余 1”，这个数是 $60n+1$ ；

和同加和：“一个数除以 4 余 3，除以 5 余 2，除以 6 余 1”，这个数是 $60n+7$ ；

差同减差：“一个数除以 4 余 3，除以 5 余 4，除以 6 余 5”，这个数是 $60n-1$ 。

在这里，60 为（4、5、6 的最小公倍数）， n 的取值范围为整数，可以为正数也可以是取负数。

在题干中看到“某物按 x 个分组还余 y 个”的条件，这种分组、分类有余的题目就是典型的余数特性题目。



随笔练习

1. 一群学生分小组在户外活动，如 3 人一组还多 2 人，5 人一组还多 3 人，7 人一组还多 4 人，则该群学生的最少人数是（ ）

- A.23 B.53 C.88 D.158

※【答案】B。解析：即该数需满足减 2 为 3 的倍数，减 3 为 5 的倍数，减 4 为 7 的倍数。

A 项：23-4=19，不能被 7 整除排除；B 项：53-2=51，53-3=50，53-4=49，分别能被 3，5，7 整除，符合题干要求的是 B 选项。故正确答案为 B。

2. 一个盒子里有乒乓球 100 多个，如果每次取 5 个出来最后剩 4 个，如果每次取 4 个最后剩 3 个，如果每次取 3 个最后剩 2 个，那么如果每次取 12 个最后剩多少个？（ ）

- A.11 B.10 C.9 D.8

※【答案】A。解析：由题干条件每次取 5 个最后剩 4 个可知乒乓球的总数加 1 是 5 的倍数，同理，乒乓球的总数加 1 是 4 的倍数，乒乓球的总数加 1 是 3 的倍数，即乒乓球的总数加 1 应同时是 5、4、3 的倍数，因此乒乓球的总数 = $60n-1$ 。由于乒乓球有 100 多个，即 $100 < 60n-1 < 200$ ，所以解得 $n=2$ 或 3。当 $n=2$ 时，乒乓球的数量 = $60 \times 2 - 1 = 119$ ，每次取 12 个最后会剩余 11 个；当 $n=3$ 时，乒乓球的数量 = $60 \times 3 - 1 = 179$ ，每次取 12 个最后也会剩余 11 个。故本题选 A。

3. 学生在操场上列队做操，只知人数在 90-110 之间。如果排成 5 排则少 2 人；排成 7



排则少 4 人；则学生人数是多少？（ ）

- A 102 B 98
 C 104 D 108

※【答案】D。解析：人数除以 5 余 3，除以 7 余 3，利用“最小公倍数作周期，同余加余”， $5 \times 7 = 35$ ，这个数为 $35n + 3$ ， $n = 3$ 时人数为 $35 \times 3 + 3 = 108$ 人，故本题选 D。

▲ 奇偶特性思想

(1) 在乘法中

若因子中存在偶数，则结果为偶数；无偶数则结果为奇数。

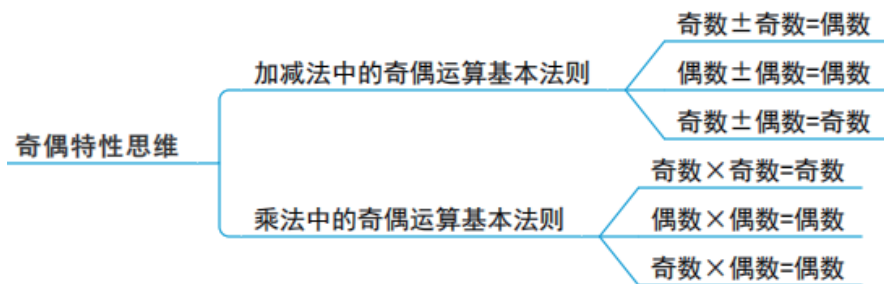
- ① 奇数 \times 奇数 = 奇数
 ② 偶数 \times 偶数 = 偶数
 ③ 奇数 \times 偶数 = 偶数

若几个整数的和（或差）为奇（或偶）数，则这几个整数的差（或和）为奇（或偶）数。

(2) 在加减法中

两个因子奇偶性相同，则结果为偶数。两个因子奇偶性不同，则结果为奇数。

- ① 奇数 \pm 奇数 = 偶数
 ② 偶数 \pm 偶数 = 偶数
 ③ 奇数 \pm 偶数 = 奇数



随笔练习

1. 20 人乘飞机从甲市前往乙市，总费用为 27000 元。每张机票的全价票单价为 2000 元，除全价票之外，该班飞机还有九折票和五折票两种选择。每位旅客的机票总费用除机票价格之外，还包括 170 元的税费。则购买九折票的乘客与购买全价票的乘客人数相比为：（ ）

- A. 两者一样多 B. 买九折票的多 1 人
 C. 买全价票的多 2 人 D. 买九折票的多 4 人

※【答案】A。解析：设购买全价票、九折票、五折票的人数分别为 a 、 b 、 c ，由题意得 $2000a + 0.9 \times 2000b + 0.5 \times 2000c + 20 \times 170 = 27000$ ①； $a + b + c = 20$ ②；解方程组可得 $5a + 4b = 18$ 。此时只能分析式子，因为 $4b$ ，18 为偶数，则由奇偶特性可知， a 为偶数，只有 $a = 2$ ， $b = 2$ 时满足上式，所以购买全价票与九折票的人数一样多。故本题选 A。



2. 某地劳动部门租用甲、乙两个教室开展农村实用人才培训。两教室均有 5 排座位，甲教室每排可坐 10 人，乙教室每排可坐 9 人。两教室当月共举办该培训 27 次，每次培训均座无虚席，当月共培训 1290 人次。问甲教室当月共举办了多少次这项培训（ ）

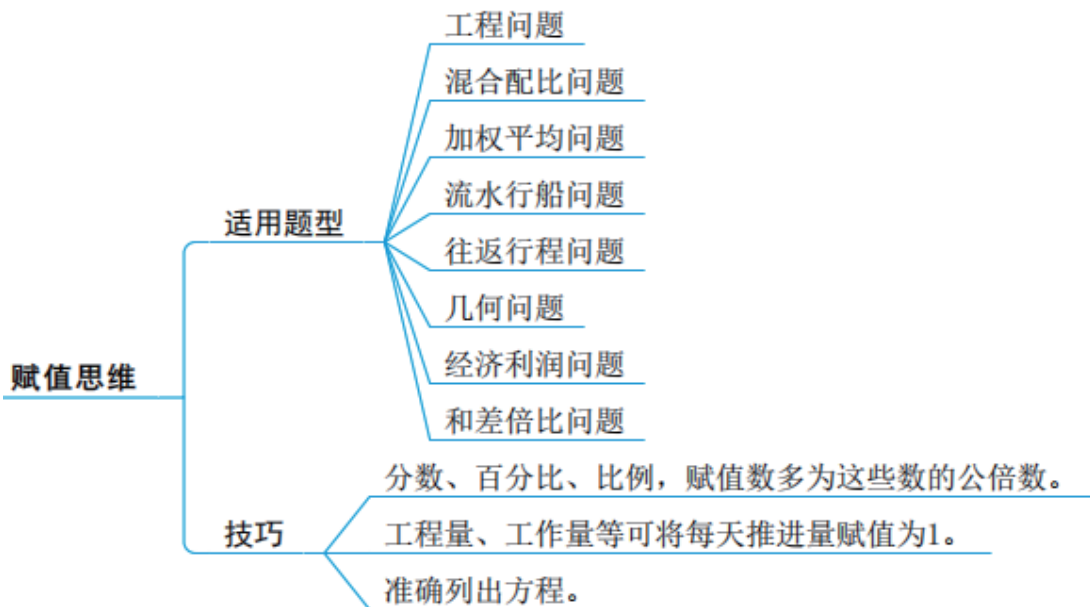
- A.8 B.10 C.12 D.15

※【答案】D。解析：根据题干意思，我们可以设甲教室举办 x 次，乙教室举办 y 次，根据题意我们可以得到二元一次方程：① $50x+45y=1290$ ，② $x+y=27$ ，同样根据数的奇偶性，在①式中 $50x$ 为偶数，1290 也为偶数，那么 $45y$ 也必须为偶数，则 y 必然为偶数，再根据②式我们知道 x 必然为奇数，仅有 D 选项为奇数。故正确答案为 D。

▲ 赋值思想

工程问题、混合配比问题、加权平均问题、流水行船问题、往返行程问题、几何问题、经济利润问题都常用到“赋值思想”。

当题目所给信息中未涉及到某个具体数量的大小，通常出现“倍数”“分数”“百分数”“比例”，并且该数量的大小不影响最终所求结果，可赋值。观察题目所给的数值（分数、百分比、比例），赋值数多为这些数的公倍数。



随笔练习

1. 要折叠一批纸飞机，若甲单独折叠要半个小时完成，乙单独折叠需要 45 分钟完成。若两人一起折，需要多少分钟完成？（ ）

- A.10 B.15 C.16 D.18

※【答案】D。解析：此题不知道总工程量的值，赋总工程量为 30 和 45 的最小公倍数为 90，则甲效率为 3，乙效率为 2。则合作效率为 5，一共需 $90 \div 5 = 18$ 分钟完成。

2. 师徒两人 3 天加工的零件总数分别为 240 个和 150 个，已知师徒二人每天加工的零



件个数为整数且彼此不相等。其中师傅加工零件数最少的那天比徒弟加工零件数最多的那天多了 10 个。问师傅加工最多的一天至多比徒弟加工最少的一天多多少？（ ）

- A.42 B.54 C.68 D.72

※【答案】C。解析：由题目可知，师徒二人平均每天的加工量分别为 80，50。师傅最多那天比徒弟最少那天多加工了 10 个，则取中间值分别为 70，60。求师傅至多一天比徒弟最少一天多多少，则师傅前两天生产 70、71 个，徒弟前两天生产 60、59 个。差值 $=240-70-71-(150-60-59)=68$ 个。故正确答案为 C。

3. 某人银行账户今年底余额减去 1500 元后，正好比去年底余额减少了 25%，去年底余额比前年底余额的 120% 少 2000 元。则此人银行账户今年底余额一定比前年底余额（ ）

- A. 少 10% B. 多 10% C. 少 1000 元 D. 多 1000 元

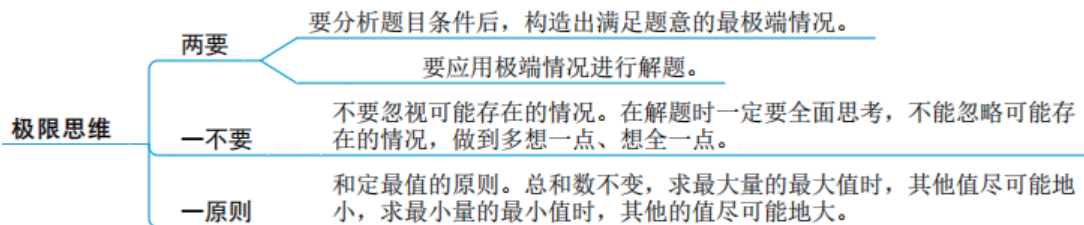
※【答案】A。解析：假设前年底余额为 5000 元，则去年底余额为 $5000 \times 120\% - 2000 = 4000$ （元），今年底余额则为 $4000 \times 75\% + 1500 = 4500$ （元），因此今年底余额比前年底余额少 $(5000 - 4500) \div 5000 = 10\%$ 。

▲ 极限思想

出现“至多”、“至少”、“最多”、“最少”、“最大”、“最小”等字眼时，我们要有“极值思想”。

“极值思想”是分析题目条件后，构造出满足题意的最极端情况，是极值在构造法中的运用形式。

题目提问中有“至少……才能保证……”那么“保证”后面的情况是必然发生的情况。即：最不利情况数 + 1。



随笔练习

1. 在一个不透明的布袋里有若干条四种不同颜色的围巾，其中白色 3 条，红色 5 条，蓝色 8 条，彩色 4 条。如果每次取出一条，至少要取（ ）次才能保证取得白色围巾。

- A.20 B.18 C.16 D.13

※【答案】B。解析：由题干的问法可知，本题需要考虑最不利情况，最不利情况为所有其他颜色都取完了，剩下的全为白色的，再取一次即可，故所求为 $5+8+4+1=18$ 次。本题选择 B 选项。

2. 某个社区老年协会的会员都在象棋、围棋、太极拳、交谊舞和乐器五个兴趣班中报名了至少一项。如果要在老年协会中随机抽取会员进行调查，至少要调查多少个样本才能保证



样本中有 4 名会员报的兴趣班完全相同? ()

A.93

B.94

C.96

D.97

※【答案】B。解析：题目中出现“至少...保证...”，构造最不利情况。老年协会的会员在五个兴趣班中报名至少一项，则报名不同的情况数为 $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ 。考虑最不利原则，有 4 名会员报兴趣班相同，最不利值为 3，则至少要调查 $31 \times 3 + 1 = 94$ 人才能保证有 4 名会员报的兴趣班完全相同。故正确答案为 B。

3. 用 18 厘米长的警戒线围成各种长方形，要求场和宽的长度都是厘米数，则围成的长方形的面积最大是多少?

A.18 平方厘米

B.20 平方厘米

C.25 平方厘米

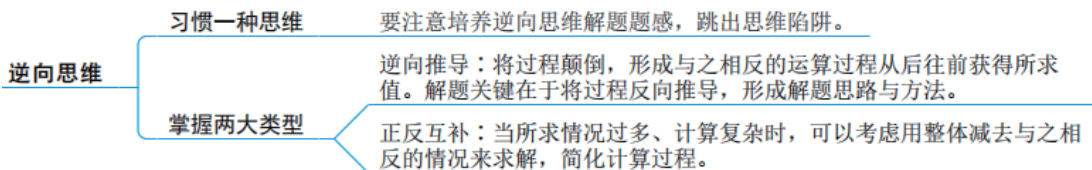
D.40 平方厘米

※【答案】B。解析：由题意可知长 + 宽 = 9，要使得面积最大、长和宽尽可能接近，长 = 5、宽 = 4，面积 = $5 \times 4 = 20$ ，选 B。

▲ 逆向推理思想

①逆向推导：将过程颠倒，形成与之相反的运算过程从后往前获得所求值。

②正反互补：当所求情况过多、计算复杂时，可以考虑用整体减去与之相反的情况来求解，简化计算过程。



随笔练习

1. 某数加上 5 再乘以 5 再减去 5 再除以 5，最终结果还是 5，这个数是多少? ()

A.0

B.1

C.-1

D.5

※【答案】B。解析：典型的逆推法题目。题干已经给出了正面运算的步骤，我们将步骤倒推即可得出原数。即 $(5 \times 5 + 5) \div 5 - 5 = 1$ ，所以这个数是 1。故正确答案为 B。

2. 某市公安局从辖区 2 个派出所分别抽调 2 名警察，将他们随机安排到 3 个专案组工作，则来自同一派出所的警察不在同一组的概率是? ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

※【答案】A。解析：首先算出总的情况数，从 4 人中选 2 人，即 $C_4^2 = 6$ 。随机安排到三个工作组，必然是 2、1、1 的分组形式，则 $A_3^3 = 6$ ，总情况数 = $6 \times 6 = 36$ 种。由于和自己来自同派出所的仅一人，不同派出所的有两人，所以同派出所在一组的情况更少，我们可以

用 1 减掉在同一组概率求解。则 $P = 1 - C_2^1 \times A_3^3 \div 36 = \frac{2}{3}$ 。故正确答案为 A。



▲ 整除思想

在含有类似于“倍数”、“分数”、“百分数”、“比例”的题目中也可以很好的利用整除的思想。

1. 特殊数字整除判定

2 (5) 整除：观察数字的末位数字能否被 2 (5) 整除。

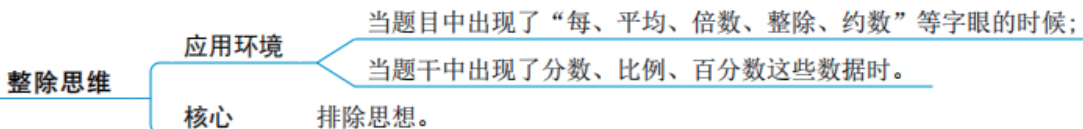
4 (25) 整除：观察数字的末两位数能否被 4 (25) 整除。

8 (125) 整除：观察数字的末三位数能否被 8 (125) 整除。

3 (9) 整除：观察各位数字之和能否被 3 (9) 整除。

2. 普通数字整除判定

普通数字的整除判定，一般采用分解因式的方法进行快速判断。例如：判断一个数字能否被 6 整除， $6=2 \times 3$ ，则只需要判定该数能否被 2 和 3 整除；判定 531 能否被 47 整除，可以将 531 分解为 $(470+61)$ 进行判断。



随笔练习

1. 车间领到一批电影票和球票发放给车间工人，电影票数是球票数的 2 倍。如果每个工人发 3 张球票，则富余 2 张，如果每个工人发 7 张电影票，则缺 6 张，问车间领到多少张球票 ()

- A.32 B.30 C.64 D.60

※【答案】A。解析：球票总数减去 2 能被 3 整除，结合选项代入验证只有 32 满足。故正确答案为 A。

2. 某单位原拥有中级及以上职称的职工占职工总数 62.5%。现又有 2 名职工评上中级职称，之后该单位拥有中级及以上职称的人数占总人数 $\frac{7}{11}$ 。则该单位原来有多少名职称在中级以下的职工？ ()

- A.68 B.66 C.64 D.60

※【答案】B。解析：正面计算比较繁琐。题干出现百分数和比例关系，考虑整除思想，中级及以上开始时是 62.5% 即 $\frac{5}{8}$ ，则中级以下占 $\frac{3}{8}$ ，所以中级以下的人数为 3 的倍数。观察选项排除 A、C。当 2 人被评上中级职称后，中级以下占 $\frac{4}{11}$ ，原来中级以下人数减 2 为 4 的倍数。故选 B 项。

▲ 十字交叉

十字交叉法最是从溶液混合问题衍生而来的。若有两种质量分别为 A 与

B 的溶液，其浓度分别为 a 与 b，混合后浓度为 r，则由溶质质量不变可列出下式 $Aa+Bb=(A+B)r$ ，对上式进行变形可得 $A/B=r-b/a-r$ ，在解题过程中一般将此式转换成如下形式：

$$\begin{array}{ccc} A & a & r-b \\ & \diagdown & \diagup \\ & r & \\ & \diagup & \diagdown \\ B & b & a-r \end{array} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{r-b}{a-r}$$

①用来解决两者之间的比例关系问题。

②得出的比例关系是基数的比例关系。

③总均值放中央，对角线上，大数减小数，结果放对角线上。

除了典型的溶液混合问题，还能应用在两部分混合增长率问题、平均分数、平均年龄等问题。比值可以是“平均数”“比重”“浓度”“利润率”“折扣”等。

随笔练习

1. 学校体育部采购一批足球和篮球，足球和篮球的定价分别为每个 80 元和 100 元。由于购买数量较多，商店分别给予足球 25%、篮球 20% 的折扣，结果共少付了 22%。问购买的足球和篮球的数量之比是多少？（ ）

A.4: 5

B.5: 6

C.6: 5

D.5: 4

※【答案】B。解析：典型 A、B 的混合题型，因此采用十字交叉法如下：

$$\begin{array}{ccc} \text{足球:} & 25\% & 2\% \\ & \diagdown & \diagup \\ & 22\% & \\ & \diagup & \diagdown \\ \text{篮球:} & 20\% & 3\% \end{array} \Rightarrow \frac{2}{3}$$

即足球价格总额与篮球价格总额之比为 2: 3。设足球共买了 x 个，篮球共买了 y 个，则可列式为 $80x:100y=2:3$ ，解得 $x:y=5:6$ 。故本题选 B。

2. 某高校艺术学院分音乐系和美术系两个系别，已知学院男生人数占人数的 30%，且音乐系男女生人数之比为 1: 3，美术系男女生人数之比为 2: 3，问音乐系和美术系的总人数之比是多少？

A.5: 2

B.5: 1

C.3: 1

D.2: 1

※【答案】D。解析：音乐系男女人数之比为 1: 3，可得男生人数占比为 25%，美术系男女人数之比为 2: 3 可得男生人数占比 40%，则有：

$$\begin{array}{ccc} \text{音乐系:}25\% & \diagdown & 10\% \\ & \diagup & \diagdown \\ & 30\% & \\ & \diagdown & \diagup \\ \text{美术系:}40\% & \diagup & 5\% \end{array} \Rightarrow \frac{2}{1}$$

音乐系男生人数
美术系男生人数

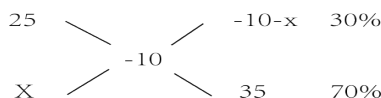


显然音乐系和美术系男生人数之比为 2:1, 故本题选 D。

3. 某商店花 10000 进了一批商品, 按期望获得相当于进价 25% 的利润来定价。结果只销售了商品总量的 30%。为尽快完成资金周转, 商店决定打折销售, 这样卖完全部商品后, 亏本 1000 元。问商店是按定价打几折销售的?()

- A. 九折 B. 七五折 C. 六折
 D. 四八折

※【答案】B。解析: 10000 元是总成本, 前面 30% 数量的产品利润率是 25%, 总的产品利润率是 $-1000/10000=-10\%$, 假设 70% 数量的产品利润率是 X, 根据十字交叉法画图:



列式得 $\frac{-10-x}{35} = \frac{3}{7}$, 解得 $x=-25$, 所以后面 70% 的产品是以 -25% 的利润率出售的,

结合利润率的公式: $\text{利润率} = \frac{\text{定价} - \text{成本}}{\text{成本}}$, 可得, 定价 = 75% 成本, 即 75 折销售, 本题

答案选 B。

▲ 方程思想

(一) 基本方程

掌握基本的**设元方法**, 准确找出题目中的等量关系进行列式, 是数学运算中最重要的方法。

(二) 不定方程

除了基本方程外, 在我们的解题过程中, 经常会遇到含有 1 个未知数的方程, 也可能遇到含有 2 个未知数 2 个方程的方程组, 或者 3 个未知数 3 个方程的方程组, 这些方程或者方程组一般都有确定的解。

解不定方程问题常用的解法: 综合利用整数的奇偶性、自然数的质合性、数的整除特性、尾数法、余数特性、特殊值法、代入排除法等多种数学知识来得到答案。

(三) 不等式

在设元求解的过程中, 根据题意所得方程可能是等式方程, 也可能是不等式方程。**即所求的值是一个数量区间, 而非一个定值。**相较于等式方程能求出精确值, 不等式方程还需要我们对取值区间做出判断。

随笔练习

1. 某地鼓励农户种植果树, 规定每个自然年末种植果树面积比年初增加 5 亩, 农民可得到 2000 元奖金, 且超出 5 亩后每增加 1 亩可额外获得 x 元奖金。已知每个自然年种植的果树, 从下一自然年起每亩每年可获得 y 元的果树收入。某农户第一年开始种植果树, 当年种植 10 亩, 获奖金 3500 元; 第二年种植面积扩大 16 亩; 第三年种植面积又扩大 15 亩, 年收入比



第一年的 16 倍多 1000 元。则以下哪个不等式能准确描述 x 与 y 的关系 () (注: 年收入 = 奖金 + 果树收入)

A. $x < 0.2y$

B. $0.2y \leq x < 0.5y$

C. $0.5y \leq x < y$

D. $x \geq y$

※【答案】A。解析: 根据第一年的奖金情况可列式 $3500 - 2000 = 5x$, 解得 $x = 300$, 即超出 5 亩后每亩可额外获得 300 元奖金。由此可知第三年总收入 $= 2000 + 10 \times 300 + 10y + 16y \rightarrow 5000 + 26y$, 比第一年收入的 16 倍多 1000, 则 $3500 \times 16 + 1000 = 5000 + 16y$, 解得 $y = 2000$ 。代入 A 项验证, $300 < 2000 \times 0.2$ 。故正确答案为 A。

2. 甲车间的生产效率是乙车间的 1.5 倍, 分别生产 1200 件相同的产品, 甲车间所需时间比乙车间少 10 天。问甲、乙两个车间合作生产 3000 件相同的产品需要多少天? ()

A. 20

B. 25

C. 30

D. 35

※【答案】C。解析: 设甲车间的生产效率为 $3x$, 乙车间的生产效率为 $2x$, 由题意可知, $1200 \div 2x - 1200 \div 3x = 10$, 解得 $x = 20$ 。即甲车间每天生产 $3 \times 20 = 60$ 件, 乙车间每天生产 $2 \times 20 = 40$ 件。故题干所求为 $3000 \div (60 + 40) = 30$ 天。故本题选 C。

3. 小张从甲地出发匀速前往乙地, 同时小李和小王从乙地出发匀速前往甲地, 小张和小李在途中的丙地相遇, 小张和小王在途中的丁地相遇。已知小张的速度比小李快一半, 小王的速度比小李慢一半, 则丙、丁两地之间的距离与甲、乙两地之间的距离之比为: ()

A. 2: 15

B. 1: 4

C. 3: 20

D. 1: 15

※【答案】C。解析: 设甲、乙两地的距离为 s , 小张、小李、小王的速度分别为 $3x$ 、 $2x$ 、 x ,

由下图可知, 小张和小李相遇时用时 $t_1 = s \div (3x + 2x) = \frac{s}{5x}$, 小张和小王相遇时用时 $t_2 = s \div$

$(3x + x) = \frac{s}{4x}$, 则小张经过丙、丁两地路程用时 $t_2 - t_1 = \frac{s}{4x} - \frac{s}{5x}$, 所以丙、丁两地之间的

路程 $S_{\text{丙丁}} = 3x \times (\frac{s}{4x} - \frac{s}{5x}) = \frac{3s}{20}$, 故题干所求为 $\frac{3s}{20} : s = 3: 20$ 。故本题选 C。

4. 某工厂生产过程中需要用到 A、B、C 三种零件, 工厂仓库中原有三种零件的数量比为 1: 2: 3, 现在采购部门新购进一批零件, 新购进三种零件的数量比是 3: 2: 4, 工厂每天使用的三种零件数量相同, 当 A 零件用完的时候, B 零件还剩下 10 个, C 零件还剩下 170 个, 请问工厂仓库中原有 A、B、C 零件各多少个? ()

A. 40, 80, 120

B. 50, 100, 150

C. 60, 120, 180

D. 70, 140, 210

※【答案】C。解析: 设原有三种零件的数量分别为 x 、 $2x$ 、 $3x$, 再次购买的数量分别为 $3y$ 、 $2y$ 、 $4y$, 由于每天使用的三种零件数量相同, 所以 A、B、C 三种零件使用的总量相同。当 A 零件用完时, 一共用了 $x + 3y$, 则 B、C 两种零件也用了 $x + 3y$ 。由题意可得方程组:

$(2x + 2y) - (x + 3y) = 10, \quad \text{①}$

$(3x + 4y) - (x + 3y) = 170, \quad \text{②}$



解得 $x=60$, $y=50$ 。所以原有三种零件的数量分别为 60、120、180。选 C。

二、核心题型解题方法

▲工程问题

(1) 基础知识

1. 工作量 = 工作效率 × 工作时间

2. 工作效率 = 工作量 ÷ 工作时间

(2) 解题思路:

1. 条件只给出时间的具体值: 通过给总量赋值, 一般将总量设为时间的公倍数, 从而计算出给出条件的效率。

2. 条件中不仅有时间, 而且有关于效率的比例关系, 通常给效率赋值, 通过公式计算出工作总量。

3. 题目中有效率、时间、总量三个中的任意两个的具体值, 则代入公式计算出第三个即可。

随笔练习

1.(2017 广东) 现有一批零件, 甲师傅单独加工需要 4 小时, 乙师傅单独加工需要 6 小时。两人一起加工这批零件的 50% 需要多少个小时? ()

A.0.6 B.1 C.1.2 D.1.5

※【答案】C。解析: 题中给出 4 和 6 两个完工时间, 因此赋值工程总量为 4 和 6 的最小公倍数 12, 甲的效率为: $12 \div 4 = 3$, 乙的效率为: $12 \div 6 = 2$, 一起合作加工零件的 50% 需要的时间为: $12 \times 50\% \div (3+2) = 1.2$ 小时。故正确答案为 C。

2.(2016 国考) 某浇水装置可根据天气阴晴调节浇水量, 晴天浇水量为阴雨天的 25 倍。灌满该装置的水箱后, 在连续晴天的情况下可为植物自动浇水 18 天。小李 6 月 1 日 0:00 灌满水箱后, 7 月 1 日 0:00 正好用完。问 6 月有多少个阴雨天?

A.10 B.16 C.18 D.20

※【答案】D。解析: 由题目所给出的晴天浇水量与阴雨天浇水量之比, 可假设晴天浇水量为 5, 阴雨天浇水量为 2, 则可得水箱总容量为 $5 \times 18 = 90$ 。已知 6 月整月共有 30 天, 设阴雨天天数为 a , 晴天数为 $(30-a)$, 则 $5(30-a) + 2a = 90$, 解得 $a = 20$ 。故正确答案为 D。

▲行程问题

(一) 基础知识:

基本公式: 路程 = 速度 × 时间

相遇问题: 路程和 = (大速度 + 小速度) × 时间

追及问题: 路程差 = (大速度 - 小速度) × 时间

顺水行船: 路程 = (船速 + 水速) × 时间

逆水行船: 路程 = (船速 - 水速) × 时间



火车过桥（隧道）：路程 = 火车车身长度 + 桥长（隧道长度）= 火车速度 × 过桥速度（过隧道速度）

（2）解题思路：

根据题干先判断出题型，尽量能画出简易图，根据各个量之间的关系代入上述对应的公式即可。

（三）补充知识：

①时间一定，路程和速度成正比；

②路程一定，速度和时间成反比；

③速度一定，路程和时间成正比。

④当行程中某一个量为定值，且出现比例时，可以考虑用比例求解。

随笔练习

1.(2018 国考) 一辆汽车第一天行驶了 5 个小时，第二天行驶了 600 公里，第三天比第一天少行驶 200 公里，三天共行驶了 18 个小时。已知第一天的平均速度与三天全程的平均速度相同，问三天共行驶了多少公里？（ ）

A.800 B.900 C.1000 D.1100

※【答案】B。解析：本题属于基本行程问题，利用基本公式。设第一天的平均速度为 v ，第一天路程为 $5v$ ，第三天路程为 $5v-200$ 。由全程平均速度与第一天相同，可得方程： $5v+600+5v-200=18v$ ，解得 $v=50$ ，则三天共行驶 $18 \times 50=900$ 公里。故正确答案为 B。

2.(2018 联考) 甲、乙、丙、丁四人同时同地出发，绕一椭圆形环湖栈道行走。甲顺时针行走，其余三人逆时针行走。已知乙的行走速度为 60 米/分钟，丙的速度为 48 米/分钟。甲在出发 6、7、8 分钟时分别与乙、丙、丁三人相遇，求丁的行走速度是多少？（ ）

A.31 米 / 分钟 B.36 米 / 分钟

C.39 米 / 分钟 D.42 米 / 分钟

※【答案】C。解析：由题意可知，甲与乙相遇，甲与丙相遇均为两人合走完一个环湖的全程。根据总路程相等，可得方程 $(v_{甲} + 60) \times 6 = (v_{甲} + 48) \times 7$ ，解方程得 $v_{甲} = 24$ 米 / 分钟。同理，甲与乙相遇，甲与丁相遇时的路程也相等， $(24+60) \times 6 = (24+v_{丁}) \times 8$ ，解得 $v_{丁} = 39$ 米 / 分钟。故正确答案为 C。

3.(2017 山东) 有 A、B 两家工厂分别建在河流的上游和下游，甲、乙两船分别从 A、B 港口出发前往两地中间的 C 港口。C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里。乙船出发后经过 4 小时到达 C 港，甲船在乙船出发后 1 小时出发，正好与乙船同时到达。已知两船在静水中的速度都是 32 公里 / 小时，问河水流速是多少公里 / 小时？（ ）

A.4 B.5 C.6 D.7

※【答案】C。解析：由题意可得，甲船比乙船多行驶 10 公里，甲船用时 $4-1=3$ 小时。设河水流速为 v 公里 / 小时，则有 $3 \times (32+v) - 4 \times (32-v) = 10$ ，解得 $v=6$ 。故正确答案为 C。



▲ 经济利润问题

(一) 基础知识

1. 利润 = 售价 - 进价
2. 利润率 = 利润 ÷ 进价 = (售价 - 进价) ÷ 进价
3. 售价 = 进价 × (1 + 利润率)

(二) 解题思路

根据上述公式列方程。若题干中未出现具体单位，可以利用**赋值法**求解。在解题中，可以利用**数字特性**快速求解。

随笔练习

1.(2018 江西) 小李四年前投资的一套商品房价格上涨了 50%，由于担心房价下跌，将该商品房按市价的 9 折出售，扣除成交价 5% 的相关交易费用后，比买进时赚了 56.5 万元。那么，小李买进该商品房时花了多少万元？()

- A.200 B.250 C.300 D.350

※【答案】A。解析：设买进该商品房时成本为 x 万元，则现在市价为 $1.5x$ 万元，实际售价为 $1.5x \times 0.9 = 1.35x$ 万元。利润： $(1-5\%) \times 1.35x - x = 56.5$ ，解得 $x = 200$ 。故正确答案为 A。

2.(2018 国考) 枣园每年产枣 2500 公斤，每公斤固定盈利 18 元。为了提高土地利用率，现决定明年在枣树下种植紫薯 (产量最大为 10000 公斤)，每公斤固定盈利 3 元。当紫薯产量大于 400 公斤时，其产量每增加 n 公斤将导致枣的产量下降 $0.2n$ 公斤。问该枣园明年最多可能盈利多少元？()

- A.46176 B.46200 C.46260
 D.46380

※【答案】B。解析：当紫薯产量大于 400 公斤时，每增加 n 公斤将导致枣的产量下降 $0.2n$ 公斤。假设紫薯的产量为 $(400+n)$ 公斤，则此时枣的产量为 $(2500-0.2n)$ 公斤。则总盈利为 $18 \times (2500-0.2n) + 3 \times (400+n) = (46200-0.6n)$ 元，要让总盈利最大，则 n 取 0，此时总盈利为 46200 元。故正确答案为 B。

▲ 几何问题

(一) 基础知识

1. 基本公式

平面图形		
	周长公式	面积公式
长方形	(长 + 宽) × 2	长 × 宽
正方形	边长 × 4	边长 × 边长
三角形	—	底 × 高 ÷ 2



平行四边形	—	底 × 高
梯形	—	(上底 + 下底) × 高 ÷ 2
圆	$\pi \cdot \text{直径} = 2\pi \cdot \text{半径}$	$\pi \cdot \text{半径}^2$
扇形	—	(弧长 × 半径) ÷ 2
立体图形		
	表面积公式	体积公式
长方体	(长 × 宽 + 长 × 高 + 宽 × 高) × 2	长 × 宽 × 高
正方体	棱长 × 棱长 × 6	棱长 × 棱长 × 棱长
圆柱体	上、下底面积 + 侧面积	底面积 × 高
圆锥体	—	底面积 × 高 ÷ 3
球	$4\pi \cdot \text{半径}^2$	$(4\pi \cdot \text{半径}^3) \div 3$

2. 常用三角函数

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3. 三角形常用知识点

(1) 两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。

(2) 三角形内角和为 180°。

(3) 勾股定理： $a^2 + b^2 = c^2$ (常用勾股数：3、4、5；6、8、10；5、12、13)

(二) 解题思路

1. 规则图形，按照相对应的公式列方程或直接计算；

2. 不规则图形，通过割、补、平移等方法转化成规则图形，再按照相对应的公式列方程或直接计算。

随笔练习

1.(2015 国考) 某学校准备重新粉刷升国旗的旗台，该旗台由两个正方体上下叠加而成，边长分别为 1 米和 2 米，问需要粉刷的面积为：()

A.30 平方米

B.29 平方米



C.26 平方米

D.24 平方米

※【答案】D。解析：小正方体每个面的面积为 $12=1\text{m}^2$ ，大正方体每个面的面积为 $22=4\text{m}^2$ ，两个正方体的总面积为 $6\times 1+6\times 4=30\text{m}^2$ ，其中重合部分为两个小正方体的面，面积为 $2\times 1=2\text{m}^2$ ，而大正方体作为旗台，其底面不用粉刷，故需要粉刷的面积为 $30-2-4=24\text{m}^2$ 。故正确答案为 D。

2.(2015 国考) 现要在一块长 25 公里、宽 8 公里的长方形区域内设置哨塔，每个哨塔的监视半径为 5 公里。如果要求整个区域内的每个角落都能被监视到，则至少需要设置多少个哨塔？()

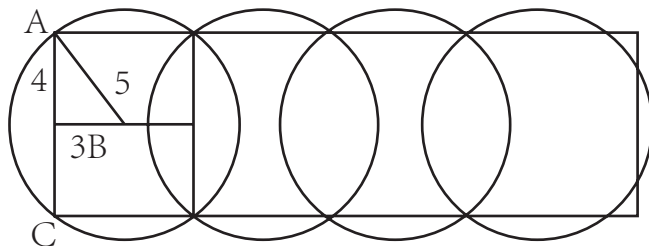
A.7

B.6

C.5

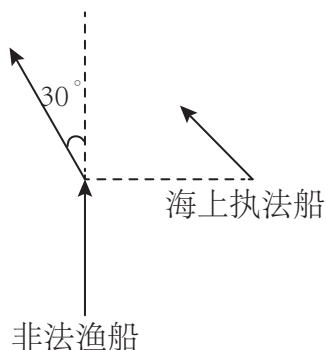
D.4

※【答案】C。解析：如下图所示：



根据直角三角形勾股定理有 $5^2-4^2=3^2$ ，则每个圆形可覆盖一个宽为 $3\times 2=6$ 公里的长方形。要达到完全覆盖，故需要 $\frac{25}{6}\approx 4.17$ 个，至少 5 个。故正确答案为 C。

3.(2018 国考) 一艘非法渔船作业时发现其正右方有海上执法船，于是沿下图所示方向左转 30° 后，立即以 15 节 (1 节 =1 海里 / 小时) 的速度逃跑，同时执法船沿某一直线方向匀速追赶，并正好在某一点追上。已知渔船在被追上前逃跑的距离刚好与其发现执法船时与执法船的距离相同，问执法船的速度为多少节？



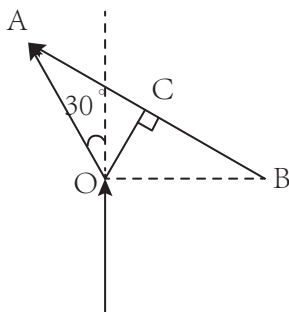
A.20

B.30

C. $10\sqrt{3}$

D. $15\sqrt{3}$

※【答案】D。解析：



根据题意可知，非法渔船和执法船的行驶路线为上图所示，非法渔船在 A 点被追上。由于非法渔船的逃跑距离和发现执法船时其与执法船的距离相同，假设距离为 a ，即 $OA=OB=a$ ；渔船左转 30° ，即 $\angle AOB=120^\circ$ 。又因为 $\triangle AOB$ 为等腰三角形，故 $\angle OBA=\angle OAB=30^\circ$ 。过点 O 作 OC 垂直 AB 于点 C，根据 $\triangle OCB$ 为直角三角形，且 $\angle OBA=30^\circ$ 可得 $CB=\frac{\sqrt{3}}{2}OB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，因此 $AB=2\times CB=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}a$ 。渔船从 O 到 A，执法船从 B 到 A，行驶时间相同，假设执法船速度为 v 节，则有 $\frac{a}{15}=\frac{\sqrt{3}a}{v}$ 解得 $v=15\sqrt{3}$ 。

故正确答案为 D。

▲ 排列组合及概率问题

（一）基础知识

加法原理：分类用加法

乘法原理：分步用乘法

排列：与顺序有关

组合：与顺序无关

排列公式： $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$

组合公式： $C_n^m = C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\dots 2*1}$

概率公式： 概率 = $\frac{\text{满足要求的情况数}}{\text{总的情况数}}$ （不要硬算，上下约分巧算）

（二）特殊方法

当题目中要求某些主体必须排在一起时，考虑**捆绑法**。

当题目中要求某些主体不能相邻时，考虑**插空法**。

相同的物品分给多个主体时，要求每个主体至少分 N 个，就可以考虑**插板法**。先给每个主体少分一个（即 $N-1$ 个），剩下的物品必须给每个主体至少再分 1 个才能满足要求，此时将剩下的物品插板分堆即可，**插板数量 = 主体个数 - 1**。

当题目中要求不能一一对应时，比如： N 把钥匙对应 N 个锁，要求每个锁和一把不能打



开它的钥匙放进一个信封，这就是**错位排列**。错位排列用 D_n 表示， D_n 就表示 N 个数字的错位排列。

$D_1=0, D_2=1, D_3=2, D_4=9, D_5=44$ 。

(三) 解题思路

当题干中有特殊要求时，按照对应的特殊方法求解。没有特殊要求的，按照基础知识列式求解即可。

随笔练习

1.(2014 国考) 一次会议某单位邀请了 10 名专家，该单位预定了 10 个房间，其中一层 5 间、二层 5 间。已知邀请专家中 4 人要求住二层，3 人要求住一层，其余 3 人住任一层均可，那么要满足他们的住房要求且每人 1 间，有多少种不同的安排方案？()

A.43200 B.7200 C.450 D.75

※【答案】A。解析：先安排有要求的专家，再安排没有要求的专家，即分步进行安排即可。

首先安排需要住二层的人，从 5 间二层房间中选出 4 间，安排 4 名专家的方法有 A_5^4 种；再安排需要住一层的人，从 5 间一层房间中选出 3 间，安排 3 名专家的方法有 A_5^3 种；最后安排剩下的 3 人，无任何要求，安排方法有 A_5^3 种。分步用乘法，安排方法共有 $A_5^4 \times A_5^3 \times A_5^3 = 43200$ 种。故正确答案为 A。

2.(2017 国考) 某集团企业 5 个分公司分别派出 1 人去集团总部参加培训，

培训后再将 5 人随机分配到这 5 个分公司，每个分公司只分配 1 人。问 5 个参加培训的人中，有且仅有 1 人在培训后返回原分公司的概率：()

A. 低于 20% B. 在 20%~30% 之间
 C. 在 30%~35% 之间 D. 大于 35%

※【答案】D。解析：5 个人任意分配到 5 个分公司的总情况数为 $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ；满足只有 1 人培训后返回原分公司的情况数为： $5 \times D_4 = 45$ (先在 5 人中任选 1 人返回原分公司，共有 $C_5^1 = 5$ 种选择；再将剩下 4 人错位排列， $D_4=9$)。则所求概率

$$= \frac{\text{满足要求的情况数}}{\text{总的情况数}} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} = 37.5\% > 35\%$$
，故正确答案为 D。

3.(2016 国考) 为加强机关文化建设，某市直属机关在系统内举办演讲比赛。3 个部门分别派出 3、2、4 名选手参加比赛，要求每个部门的参赛选手比赛顺序必须相连，问不同参赛顺序的种数在以下哪个范围之内？()

A. 小于 1000 B. 1000 ~ 5000
 C. 5001 ~ 20000 D. 大于 20000

※【答案】B。解析：3 个部门分别派出 3、2、4 名选手参加比赛，要求每个部门的参赛选手比赛顺序必须相连。可先对每个部门内部的选手进行全排列，然后将 3 个部门的顺序进行全排列。则总共的排列顺序有： $A_3^3 + A_2^2 + A_4^4 + A_3^3 = 6 \times 2 \times 24 \times 6 = 1728$ 种，属于 1000 ~ 5000 的范围。故正确答案为 B。



▲ 溶液问题

(一) 基本公式

$$\text{浓度} = \frac{\text{溶质的质量}}{\text{溶液的质量}} \times 100\%$$

$$\text{溶液的质量} = \frac{\text{溶质的质量}}{\text{浓度}}$$

$$\text{溶质的质量} = \text{溶液的质量} \times \text{浓度}$$

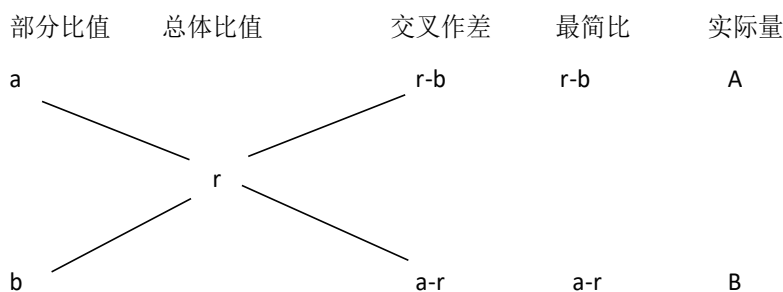
(二) 溶液混合问题——十字交叉法

1. 溶液混合问题，指两种不同浓度、不同质量的溶液混合在一起，形成新的浓度。这是溶液问题中基本题型，常用解法为十字交叉法。

步骤为：

- ①写两个部分量的浓度；
 - ②写整体浓度；
 - ③十字交叉作差（大数 - 小数）；
 - ④写差值最简比；
 - ⑤最简比对应两部分溶液的质量之比。
2. 十字相乘法使用时要注意几点：
- ①用来解决两者之间的比例关系问题。
 - ②得出的比例关系是基数的比例关系。
 - ③总均值放中央，对角线，大数减小数，结果放对角线上。

(三) 十字交叉模型



注：a > r > b

1. 三组计算关系：

第一列和第二列交叉作差得到第三列（大数减小数）。

第三列、第四列和第五列的比值相等。

第一列的差等于第三列的和。

2. 最简比（实际量之比）为比值的分母之比。



随笔练习

1. 要将浓度分别为 20% 和 5% 的 A、B 两种食盐水混合配成浓度为 15% 的食盐水 900 克。问 5% 的食盐水需要多少克？（ ）

- A. 250 B. 285
 C. 300 D. 325

※【答案】C。解析：

方法一：方程法

A 食盐水的记为 A 溶液 B 食盐水记为 B 溶液

则 $\frac{A\text{溶质的质量} \times 20\% + B\text{溶液的质量} \times 5\%}{A\text{溶质的质量} + B\text{溶质的质量}} = 15\%$ ，化简得：A 溶液的质量 $\times 5\% = B$ 。

溶液的质量 $\times 10\%$ 。设 A、B 两种溶液的质量分别为 $900-x$ 、 x 克，根据等量关系可得方程 $5\%(900-x) = 10\%x$ ，解得 $x=300$ 。

方法二：十字交叉法

将相应数据填入括号内

部分比值	总体比值	交叉作差	最简比	实际量
A 溶液 (20%)	(15%)	(10%)	(2)	(A 溶液的质量)
B 溶液 (5%)		(5%)	(1)	(B 溶液的质量)

可知 A、B 溶液的质量比为 2 : 1，混合后溶液的质量对应 3 份，为 900 克，则需要 B

溶液的质量为 $\frac{1}{3} \times 900 = 300$ 克。

2. 甲容器中有浓度 4% 的盐水 150 克，乙容器中有某种浓度的盐水若干，若从乙容器中取出 450 克盐水放入甲中混合成浓度为 10% 的盐水，问乙容器中盐水的浓度是多少？（ ）

- A. 11% B. 12%
 C. 14% D. 16%

※【答案】B。解析：此题为溶液混合问题，设乙容器中盐水的浓度为 $x\%$ ，应用十字交叉法如下：

甲：4%	$x\% - 10\%$	150
$\swarrow \quad \searrow$ 10% $\swarrow \quad \searrow$		
乙： $x\%$	$10\% - 4\%$	450

因此，有 $\frac{x\% - 10\%}{10\% - 4\%} = \frac{150}{450}$ ，解得 $x\% = 12\%$ ，故正确答案为 B。



▲ 和定最值问题

(一) 基础知识

如何来判断一个题目是否属于和定最值问题，我们需要按以下两个条件去排除：

1. 几个数的和一定；
2. 问题是求其中某个量的最大值或者最小值。

(二) 题型特点

题干或问法中出现“最大或最小、最多或最少、至多或至少。”等，我们首先要考虑是和定值问题。**和定最值：多个数的和一定，求其中某个量的最大或最小值的问题。**

(三) 解题原则

1. 求某个量的最大值，让其余量尽可能小，从最小开始分析。
2. 求某个量的最小值，让其余量尽可能大，从最大开始分析。

随笔练习

1. 要把 21 棵桃树栽到街心公园里 5 处面积不同的草坪上，如果要求每块草坪必须有树且所栽棵数要依据面积大小各不相同，面积最大的草坪最多栽多少棵桃树？（ ）

- A.7 B.8
C.10 D.11

※【答案】D。解析：存在“和”。“和”为 21。所求为最大量的最大值。要使面积最大的草坪栽种的桃树最多，则其他草坪栽种的桃树应尽可能的少。设面积最大的草坪栽了 x 棵，其他四个草坪栽种的桃树棵数分别为 1、2、3、4，则 $x+4+3+2+1=21$ 棵，解得 $x=11$ 。

2. 期末考试中前六名学生成绩的平均分是 92.5 分，且 6 人的成绩是互不相同的整数，最高分是 99 分，则第三名至少得多少分？

- A.91 B.93
C.96 D.97

※【答案】A。解析：存在“和”。“和”为 $92.5 \times 6 = 555$ 。所求为第三名的最小值。要使第三名的分数尽可能低，则其他人分数应尽量高。第一、二名最高可为 99、98 分，设第三名为 x 分，则第四、第五、第六依次为 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $x-3$ 分， $99+98+x+x-1+x-2+x-3=555$ ，解得 $x=91$ 分。

3. 6 名同学参加一次百分制考试，已知 6 人的分数是互不相同的整数。若 6 名同学的总分是 513 分，求分数最低的最多得了多少分？（ ）

- A.83 B.84
C.85 D.86

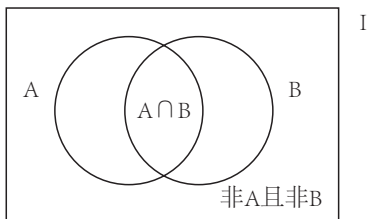
※【答案】A。解析：存在“和”。“和”为 513。所求为最小量的最大值。要想分数最低的同学得分最多，则其他同学的得分应尽可能的少。设分数最低的同学得了 x 分，其他 5 个同学的得分分别为 $x+1$ 、 $x+2$ 、 $x+3$ 、 $x+4$ 、 $x+5$ ，则 $x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5=513$ 分，解得 $x=83$ 。



▲ 容斥问题

(一) 两者容斥

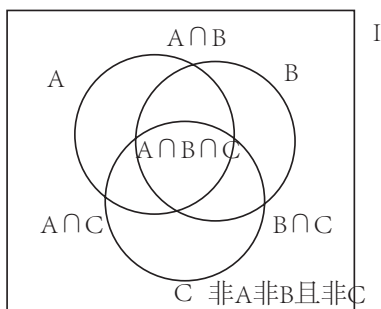
如果被计数的事物有 A、B 两类，那么，先把 A、B 两个集合的元素个数相加，发现即是 A 类又是 B 类的部分重复计算了一次，所以要减去。如下图所示。



$$I = A + B - A \cap B + \text{非}A \text{ 且非}B$$

【记忆口诀】总数 = 两集合之和 + 两集合之外数 - 两集合公共数

(二) 三者容斥



$$I = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C + \text{非}A \text{ 非}B \text{ 且非}C$$

三集合标准型公式： $A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C = \text{总数} - \text{都不满足}$

三集合非标准型公式： $A + B + C - \text{满足两项} - 2 \times \text{满足三项} = \text{总数} - \text{都不满足}$

解题步骤分三步走：①画文氏图；②弄清楚图形中没一部分所代表的含义；③代入公式 $(A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C)$ 进行求解

(三) 容斥极值

公式： $(A \cap B)_{\min} = A + B - 1$

推广： $(A \cap B \cap C)_{\min} = A + B + C - 21$

随笔练习

1. 某公司组织歌舞比赛，共 68 人参赛。其中，参加舞蹈比赛的有 12 人，参加歌唱比赛的有 18 人，45 人什么比赛都没有参加。问同时参加歌舞比赛的有多少人？（ ）

- A.7 B.8
C.9 D.10

※【答案】A。解析：总人数 = 参加舞蹈比赛人数 + 参加歌唱比赛人数 - 两项比赛都参加人数 + 两项比赛都未参加人数。所以两项比赛都参加的人数为 $12 + 18 - (68 - 45) = 7$ 人。



2. 某市对 52 种建筑防水卷材产品进行质量抽检，其中有 8 种产品的低温柔度不合格，10 种产品的可溶物含量不达标，9 种产品的接缝剪切性能不合格，同时两项不合格的有 7 种，有 1 种产品这三项都不合格。则三项全部合格的建筑防水卷材产品有多少种？（ ）

- A.34 B.35
C.36 D.37

※【答案】A。解析：在将低温柔度不合格、可溶物含量不达标、接缝剪切性能不合格的产品数相加时，两项同时不合格的产品数被计算了两次，需减掉一次；三项同时不合格的产品数被计算了三次，需减掉两次。设三项全合格的建筑防水卷材产品有 x 种，根据容斥原理可得， $8+10+9-7-2\times 1+x=52$ ，解得 $x=34$ 。

3. 阅览室有 100 本杂志。小赵借阅过其中 75 本，小王借阅过 70 本，小刘借阅过 60 本，则三人共同借阅过的杂志最少有多少本？（ ）

- A.5 B.10
C.15 D.30

※【答案】A。解析：本题出现了三个概念，分别是小赵借阅、小刘借阅、小王借阅，概念间存在交叉关系。根据三个集合交集最小值的公式，三人都借阅的至少有 $75+70+60-2\times 100=5$ 本。

▲ 计算问题

（一）等差数列

1. 基础知识

等差数列是指从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数。例如：1, 3, 5, 7, 9.....。数列的第一项叫做首项 a_1 表示，数列的最后一项叫做末项用 a_n 表示。

相邻两项的差值叫做公差 d 表示。前项和用 S_n 表示。

2. 基本公式

（1）通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$$

（2）求和公式

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$S_n = \begin{cases} \text{中间项} \times n (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{\text{中间两项和}}{2} \times n (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

（二）周期循环

解题关键：寻找最小循环周期。



- (1) **找周期**: 找准周期的起点和终点, 确定总数
 (2) **算余数**: 总数 \div 每个周期的个数 = 周期数量.....余数 (n)
 (3) **做等价**: 余数 n 就等价于该周期的第 n 项 (余几数几)

(三) 整除

1. 核心

通过题干中所给的信息, 判断结果应具备的整除特性, 从而排除错误选项

2. 应用环境

题干文字描述中出现“**整除、每、平均、倍数**”等字眼时能用利用整除解题题干中出现分数、百分数、比例等数据时能够利用整除解题

随笔练习

1. 某剧院共 25 排座位, 后一排均比前一排多 2 个座位, 已知最后一排有 80 个座位, 问这个剧院一共有多少个座位? ()

- A.1200 B.1300
 C.1400 D.1500

※【答案】C。解析: 第一排座位数为 32, 剧院共有 1400 个座位。因 $a_{25}=80$, 根据

$$a_{25}=a_1+(25-1)\times 2, \text{ 得 } a_1=32, \text{ 再根据 } S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\times n, \text{ 可得 } S_{25}=\frac{32+80}{2}\times 25=1400。$$

2. 书架的某一层上有 136 本书, 且是按照“3 本小说、4 本教材、5 本工具书、7 本科技书、3 本小说、4 本教材.....”的顺序循环从左至右排列的。问该层最右边的一本是什么书? ()

- A. 小说 B. 教材
 C. 工具书 D. 科技书

※【答案】A。解析: 一个完整的循环是“3 本小说 +4 本教材 +5 本工具书 +7 本科技书”共 19 本书, 所以最小循环周期为 19。136 \div 19=7.....3, 所以有 7 个完整的循环周期。还多 3 本, 正好多 3 本小说, 最后一本为小说。

3. 学校有足球和篮球的数量比为 8 : 7, 先买进若干个足球, 这时足球与篮球的比变为 3 : 2, 接着又买进一些篮球, 这时足球与篮球数量比为 7 : 6。已知买进的足球比买进的篮球多 3 个, 原来有足球多少个? ()

- A.48 B.42
 C.36 D.30

※【答案】A。解析: 由题意可知, 原来足球的个数能被 8 整除。只有 A 项能够被 8 整除。