



Soluções Numéricas Para Condução de Calor Unidimensional

Yuri Shumyatsky

Universidade de Brasília

231012826@aluno.unb.br

Resumo. Este trabalho tem como objetivo principal a análise numérica da transferência de calor unidimensional em regime transiente, aplicando a equação da difusão de calor a uma barra sólida. A metodologia adotada baseia-se no Método das Diferenças Finitas, utilizando expansões em série de Taylor para a discretização das derivadas espaciais e temporais presentes na equação governante. O algoritmo computacional foi implementado em linguagem Golang, simulando os cenários definidos por variadas condições iniciais e de contorno. O estudo incluiu a comparação dos resultados numéricos com as soluções analíticas exatas e a investigação da sensibilidade do modelo às variações nos passos de tempo e espaço, bem como aos parâmetros de difusividade térmica. As conclusões demonstram que a abordagem numérica reproduz fielmente o comportamento físico da difusão térmica e converge para a solução exata, desde que o critério de estabilidade seja respeitado.

Palavras-Chave: Condução de Calor, Método das Diferenças Finitas, Simulação Numérica

1. INTRODUÇÃO

O comportamento térmico de uma barra sólida unidimensional é governado pela equação da difusão de calor, descrita pela Eq. 1. No entanto, a solução analítica dessa equação para diferentes condições iniciais e de contorno costuma não ser trivial, sendo geralmente mais conveniente o uso de métodos numéricos.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

Para solucionar 3 problemas parecidos, mas com condições iniciais e de contorno diferentes, será usado o Método das Diferenças Finitas para modelar o problema e suas soluções serão comparadas com as soluções analíticas. Além disso, o impacto da mudança de alguns parâmetros como α ou os passos de tempo e espaço também será discutido.

Os problemas a serem resolvidos são os seguintes:

Problema 1

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$T(0, t) = 0, \quad T(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$T(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1$$

Problema 2

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$T(0, t) = 1, \quad T(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$T(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

Problema 3

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2$$

$$T(0, t) = T(2, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$T(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 < x < 2$$

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A Equação da Difusão de Calor

Como visto anteriormente, a Eq 1 descreve o comportamento da condução de calor em um meio sólido unidimensional. Para fins de esclarecimento, $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ é a difusividade térmica do material, que representa a velocidade de difusão do calor através do material. Quanto maior α , maior será a transferência de calor.

2.2 Metodologia Numérica

O método numérico usado para aproximar uma solução para o problema é o MDF, que consiste em discretizar ambas as dimensões em que o problema é tratado (para este trabalho, o meio contínuo através do qual há transferência de calor e o tempo).

O domínio espacial é dividido em N intervalos de tamanho Δx , que definem os pontos $x_i = i\Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, N$. De forma semelhante, o domínio temporal é dividido em passos de tamanho Δt , de forma a definir $t_k = k\Delta t, k = 0, 1, 2, \dots$. A temperatura em determinado ponto x_i e determinado momento t_k é denotada por T_i^k .

As derivadas da Eq 1 são aproximadas usando expansões em séries de Taylor, chegando a algo que possa ser calculado usando computadores sem custo alto de memória ou tempo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,k} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,k} \approx \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (3)$$

Substituindo tanto a Eq 2 quanto a Eq 3 na Eq 1, obtemos a Eq 4

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (4)$$

Ao isolar T_i^{k+1} , que é a temperatura de um ponto no próximo passo de tempo, obtemos a relação usada para calcular os valores da próxima iteração.

$$T_i^{k+1} = T_i^k + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) \quad (5)$$

No entanto, a solução numérica apenas convergirá para a solução real caso a relação da Eq 6 seja satisfeita.

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (6)$$

3. RESULTADOS

3.1 Problema 1

Para encontrar a solução numérica do problema, a barra foi dividida em 50 x_i , isto é, $\Delta x = 0.02m$ e para garantir a convergência da solução, foi definido que $\Delta t = 0.2 \cdot \Delta x^2 = 0.00008s$. Foram realizadas 10^4 iterações para que o estado permanente seja atingido. Usamos aqui $\alpha = 1$.

A solução analítica do Problema 1 é dada pela Eq 7, portanto os valores obtidos a partir da simulação numérica devem ser condizentes.

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)\pi x] \exp[-(2n-1)^2 \pi^2 t] \quad (7)$$

Dadas as condições iniciais e de contorno, o esperado para a temperatura em função do comprimento do sólido logo após o início da simulação é que ela seja essencialmente um retângulo. Como mostra a Fig 1, no tempo $t = 0.0004s$ isso é exatamente o que acontece.

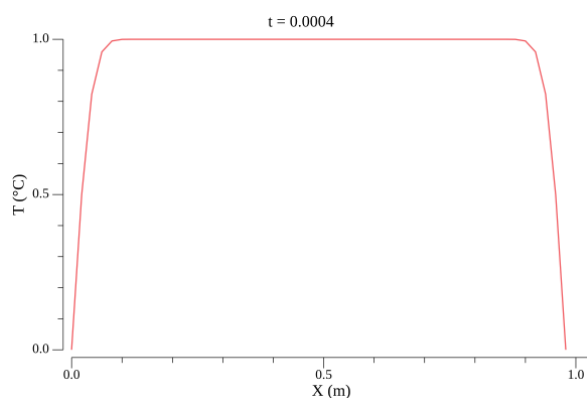


Figure 1. Situação Inicial do Problema 1

O esperado aqui é que conforme o tempo passe, a inclinação das laterais diminua, assim como a amplitude máxima, eventualmente chegando a 0 em todo o sólido, o que será comprovado pela simulação nas figuras seguintes.

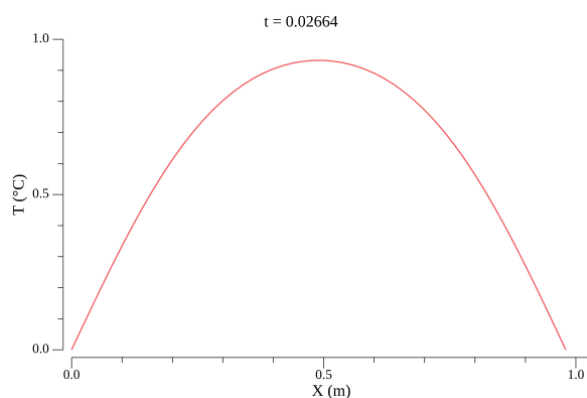


Figure 2. Situação Intermediária n°1

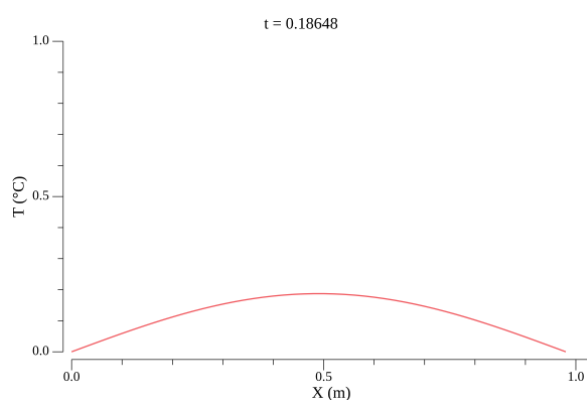


Figure 3. Situação Intermediária n°2

A situação do regime permanente é, como esperado, que todo o corpo entre em equilíbrio aos 0°C , o que acontece perto de $t = 0.7\text{s}$.

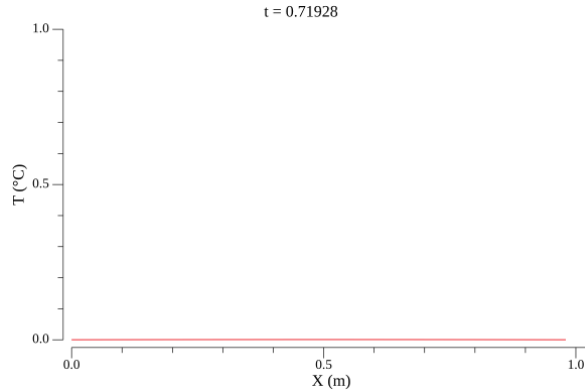


Figure 4. Situação em Regime Permanente

A partir desse ponto, não importa quantas mais iterações sejam computadas, o gráfico permanecerá o mesmo. Esse comportamento é previsto pela solução analítica devido à presença da exponencial e^a , $a < 0$, cujo comportamento é tender a 0 com $t \rightarrow \infty$.

3.2 Problema 2

Assim como para o Problema 1, os parâmetros escolhidos foram $\Delta x = 0.02\text{m}$, $\Delta t = 0.00008\text{s}$, tendo 50 x_i e 10^4 iterações. Novamente $\alpha = 1$.

A solução analítica é dada pela

$$T(x, t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin[n\pi x] \exp[-n^2\pi^2 t] \quad (8)$$

Aqui, a condição inicial e condições de contorno nos dizem que de início, a extremidade esquerda do sólido será muito mais quente que o meio e a extremidade oposta, mas que lentamente essa queda de temperatura ocorrerá de forma mais gradual, eventualmente chegando ao formato de uma linha reta com inclinação -1 .

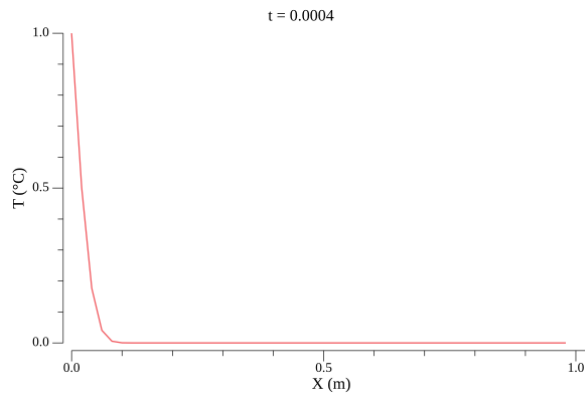


Figure 5. Situação Inicial do Problema 2

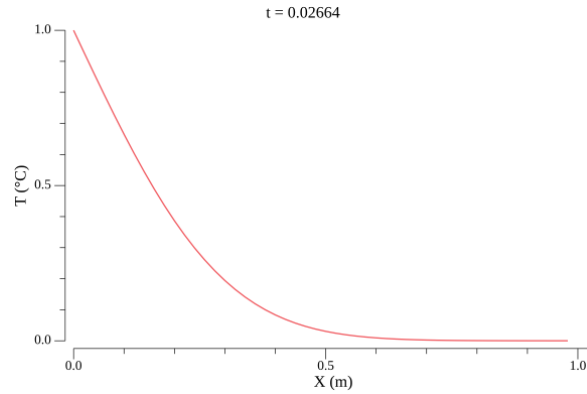


Figure 6. Situação Intermediária n°1 do Problema 2

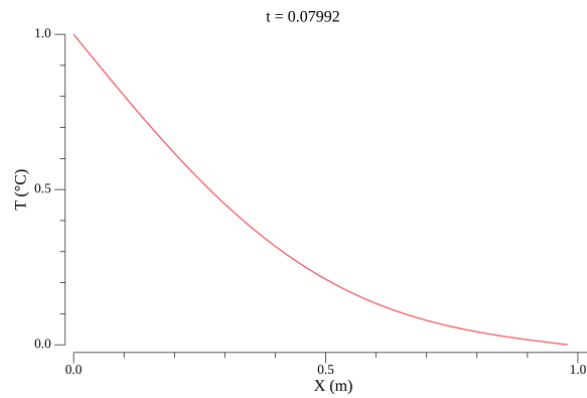


Figure 7. Situação Intermediária n°2 do Problema 2

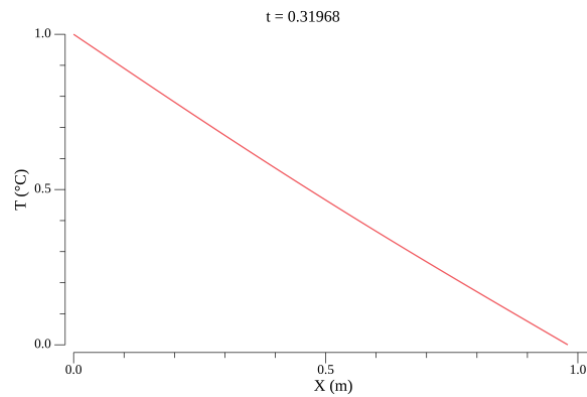


Figure 8. Situação de Regime Permanente do Problema 2

Como esperado, pela solução analítica a exponencial leva o termo do somatório a 0 com $t \rightarrow \infty$, deixando apenas $T(x, t) = 1 - x$.

3.3 Problema 3

Devido às condições de contorno diferentes, os parâmetros aqui também são um pouco diferentes. No entanto, ainda foram feitas 10^4 iterações e o sólido foi dividido em 50 x_i , além de α também ser 1. Isso significa que $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.2\Delta x^2 = 0.00032s$.

A solução analítica desse problema é

$$T(x, t) = \exp\left[-\frac{\pi^2 t}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2}x\right] \quad (9)$$

Para esse problema, o esperado é um pico de temperatura no meio do sólido em $x = 1.0$ no início, cuja temperatura vai diminuindo até todo o sólido chegar à temperatura de 0°C .

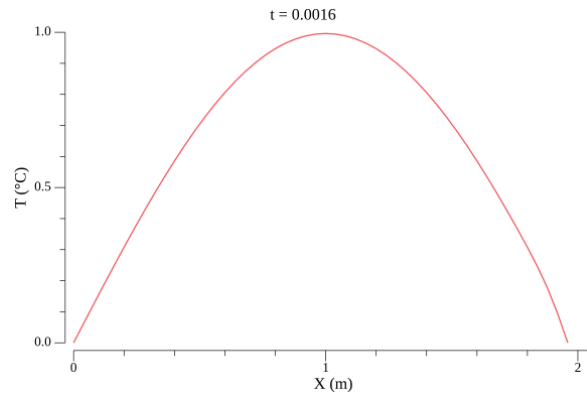


Figure 9. Situação Inicial do Problema 3

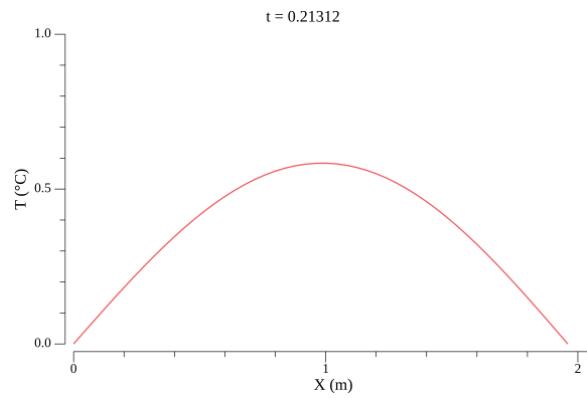


Figure 10. Situação Intermediária n°1 do Problema 3

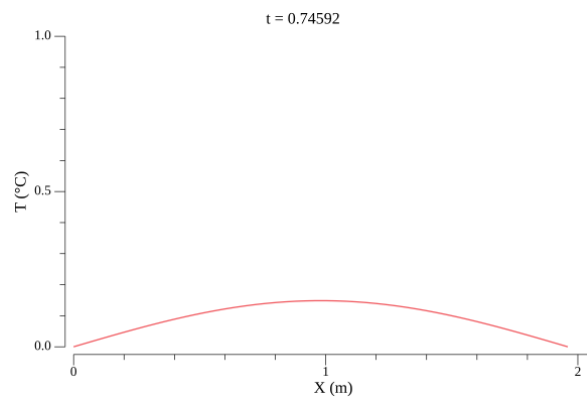


Figure 11. Situação Intermediária n°2 do Problema 3

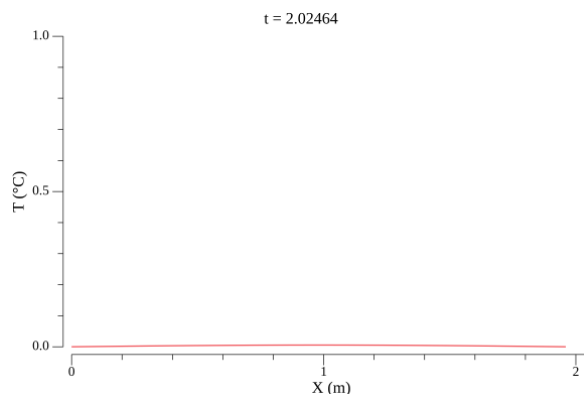


Figure 12. Situação de Regime Permanente do Problema 3

Esse problema novamente tem $T(x, t) = 0, t \rightarrow \infty$ devido ao termo exponencial.

3.4 Alteração de Parâmetros

Ao alterar o número de pontos x_i , altera-se simultaneamente Δx e Δt , que continua sendo calculado em função de Δx para manter a convergência da solução.

Foram feitas simulações com 25 e 10 x_i , sendo observado que diminuir a quantidade de subdivisões do sólido leva a uma aproximação menos precisa desde o princípio, que no entanto converge para o estado permanente em menos iterações (uma vez que Δt é maior também).

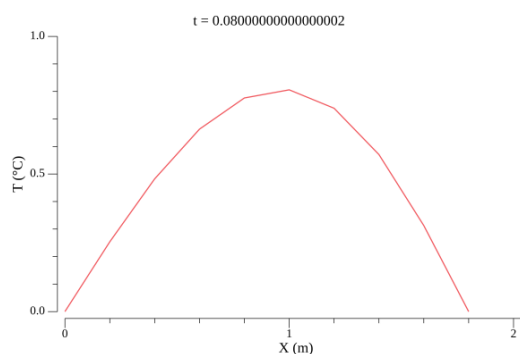


Figure 13. Problema 3 com apenas 10 pontos

A Figura 13 demonstra a imprecisão gerada pelo uso de uma quantidade menor que o ideal de pontos.

A alteração de α afeta apenas a velocidade de convergência ao estado permanente, como foi demonstrado ao modificar α de 1 para 2.

Para o Problema 1, foram obtidos os resultados da Tabela 1

N	Tempo para convergir	Nº de iterações
50	0.50616	6327
25	0.5328	1665
10	0.4	200
$\alpha = 2$	0.2664	3330

Table 1. Alteração dos Parâmetros para o Problema 1

Para o Problema 2, temos a Tabela 2.

N	Tempo para convergir	Nº de iterações
50	0.31968	3996
25	0.224	700
10	0.3	150
$\alpha = 2$	0.15984	1998

Table 2. Alteração dos Parâmetros para o Problema 2

E para o Problema 3, a Tabela 3.

N	Tempo para convergir	Nº de iterações
50	2.02464	6327
25	2.1312	1665
10	2.0	250
$\alpha = 2$	1.056	3330

Table 3. Alteração dos Parâmetros para o Problema 3

Ao violar a condição de que convergência, obteve-se o seguinte erro e o programa falhava na simulação, demonstrando que de fato, não há convergência na solução:

plotter: infinite data point exit status 1

Os resultados são condizentes com o esperado.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a implementação e análise do Método das Diferenças Finitas para a solução da equação da difusão de calor unidimensional em regime transiente. Através da simulação de três problemas distintos, foi possível validar a eficácia do método numérico ao confrontar seus resultados com as soluções analíticas exatas conhecidas. As simulações demonstraram que o modelo numérico é capaz de reproduzir fielmente o comportamento físico do sistema. Observou-se que, para todos os casos, a distribuição de temperatura evoluiu conforme o esperado, convergindo para o regime permanente previsto. A concordância entre os resultados numéricos e o comportamento teórico valida a discretização utilizada. A análise de sensibilidade paramétrica revelou aspectos cruciais da modelagem numérica. Primeiramente, confirmou-se que a estabilidade da solução é estritamente dependente da relação entre os passos de tempo e espaço, conforme ditado pelo critério de estabilidade ($\alpha \Delta t / \Delta x^2 \leq 0.5$). Em segundo lugar, observou-se um compromisso claro entre precisão e custo computacional: malhas mais grosseiras (menor N) convergem para o estado estacionário com menos iterações computacionais, porém apresentam desvios significativos na representação do perfil transiente de temperatura. Por fim, a variação da difusividade térmica (α) confirmou seu papel físico direto na velocidade de propagação do calor, onde valores maiores de α reduziram proporcionalmente o tempo necessário para o sistema atingir o equilíbrio térmico. Em suma, o Método das Diferenças Finitas mostrou-se uma ferramenta robusta e flexível para a análise de problemas de condução de calor, permitindo a obtenção de soluções precisas para cenários onde soluções analíticas podem ser complexas ou inexistentes, desde que respeitados os critérios de estabilidade e refinamento de malha.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática, Yunus A. Çengel, Afshin J. Ghajar, McGraw-Hill, Quarta Edição, 2012.