

模拟干旱植物群落的方法

**摘要：**干旱区植物群落的研究是环境保护不可缺少的一部分。在这些地区，一年生植物凭借其独特的特性，是植被的重要组成部分。本文提出了一种模拟一年生植物生长、竞争和促进的方法，该方法可适用于各种情况。

首先，建立一年生植物的生长模型。首先，我们在Logistic模型中确定土壤含水量与自然生长率之间的关系。然后，我们基于随机降雨模型，建立了土壤含水量的微分方程。最后，建立了一年生植物繁殖规律。为了估计随机降雨模型中的统计参数，我们使用正态方程，根据最小二乘法得到最优参数。

在生长模型的基础上，建立了各种植物根系竞争的竞争模型。对于Lotka-Volterra模型中的竞争系数，我们创新性地确定了其与植物根系生长和水分利用能力的关系。考虑到根系的结构，我们合理地估计了模型中的参数。

在竞争模型的基础上，进一步建立了灌木植物对草本植物的促进模型。考虑到灌丛植物的升水作用，对竞争模型中的吸水率进行了修正。到目前为止，我们的模型已经得到了详细的阐述，参数也得到了适当的估计。

之后，我们使用四阶龙格-库塔算法对微分方程给出数值解。而《需求》中的问题已经解决如下：

基础上我们的TOPSIS模型的结果，至少需要8种植物物种才能为群落提供整体效益。随着植物物种数量的增长，群落的规模将会减小，而群落将会拥有更好的稳定性。

灌木通过提高草本植物的吸水效率，可以减少种间竞争，使不同草本植物的平均生物量相互接近，提高生物多样性的稳定性。

在5.4节提供的更严重的干旱条件下，群落规模将减少67%以上，进化的波动幅度将扩大36%以上。但在不同的气候周期下，这些指标仍然遵循5.2节中类似的趋势，即物种数量的增长。

比较了两种典型污染物的影响。结果表明，酸雨等污染物的危害更大，因为它可以使尺度降低14.6%，同时使波动增加14.4%。此外，栖息地减少50%将使系统损失22.9%的规模，但减少8.7%的波动。

最后，对模型的敏感性和稳定性进行了充分的分析。

**关键词:**增长模型;竞争模型;便利化模型;4日龙格-库塔;指标值

目录

模拟干旱植物群落的方法 ..... 1

1 介绍 ..... 3

    1.1 背景 ..... 3

    1.2 问题的重述 ..... 3

2 我们的工作 ..... 4

3 变量 ..... 5

4 模型建立 ..... 5

    4.1 一个物种在干旱环境下的生长模型 ..... 5

    4.2 多物种的竞争模型 ..... 8

    4.3 灌木植物对草本植物的促进模型 ..... 11

    4.4 基本参数的合理估计 ..... 12

5 模型计算和结果分析 ..... 14

    5.1 模型计算算法 ..... 14

    5.2 多植物群落的效益评估 ..... 15

    5.3 不同种类物种对群落的影响 ..... 16

    5.4 干旱波动频率的影响 ..... 17

    5.5 其他因素对植物群落的影响 ..... 18

    5.6 长期生存能力所需措施 ..... 20

6 敏感性分析与稳定性分析 ..... 20

    6.1 敏感性分析 ..... 20

    6.2 稳定性分析 ..... 22

7 优势和劣势 ..... 23

    7.1 优势 ..... 23

    7.2 缺点 ..... 23

# 1 介绍

## 1.1 背景

干旱环境的特点是有限和多变的降雨，以脉冲形式提供资源。而草原，大部分被牧草和灌木覆盖，对缺水相当敏感。大量的观察表明，不同物种的数量对植物群落如何适应干旱有重要的影响，干旱可能发生在不同的频率和不同的严重程度。具体来说，植物在有多种物种的群落中比在只有一种物种的群落中更能适应干旱条件。因此，这种现象是局部生物多样性的结果，具有很大的研究价值。

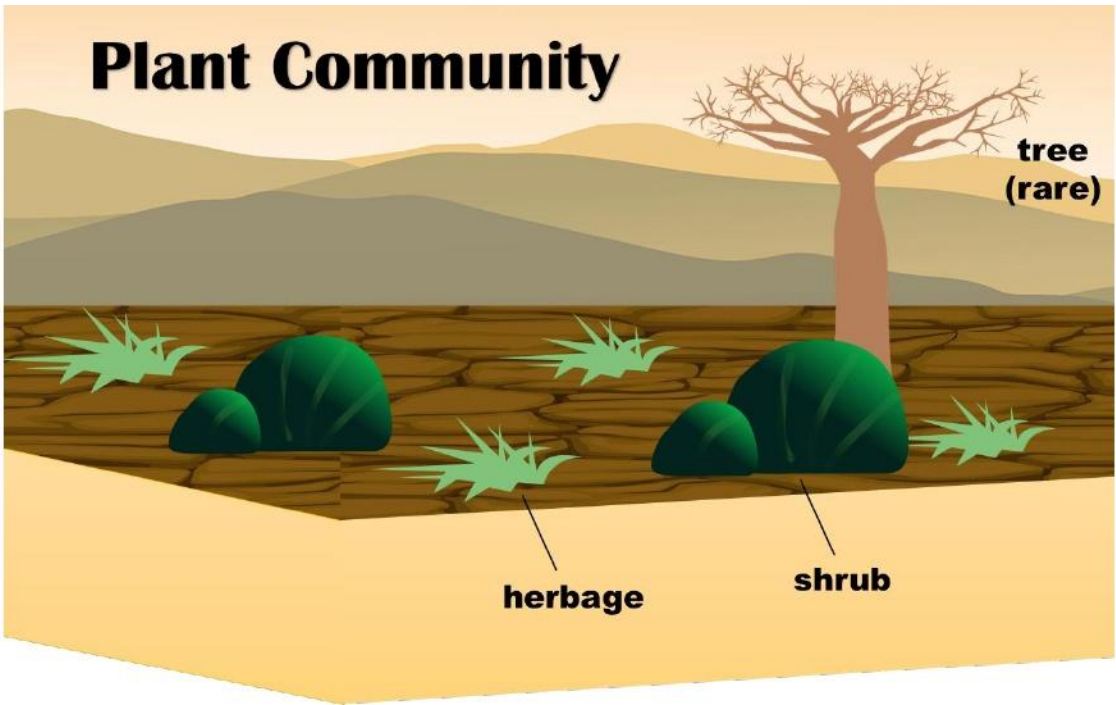


图 1:干旱环境下的植物群落

## 1.2 问题的重述

考虑到问题陈述中确定的背景信息和限制条件，我们应该解决以下问题:

建立一个数学模型，根据植物群落中物种的数量来描述干旱适应性。值得注意的是，我们需要预测当植物群落暴露在多变的天气周期中时会发生什么变化。我们的模型应该考虑到这个过程中不同物种之间的相互作用。

找出植物群落从局部生物多样性中受益所需的最小物种数量。并预测当物种数量增加时会发生什么。更重要的是，我们应该通过改变植物群落中物种的类型来分析模型的敏感性。

讨论如果干旱的发生频率波动且变化较大，物种数量对总体种群的影响是否相同。同时，我们还应该考虑其他因素，如污染和栖息地减少。

说明应该采取哪些措施来确保植物群落的长期生存能力。总结这一现象对大环境的影响。

2 我们的工作

在本文中，我们逐步建立了三个数学模型，并解决了六个问题，具体如下：

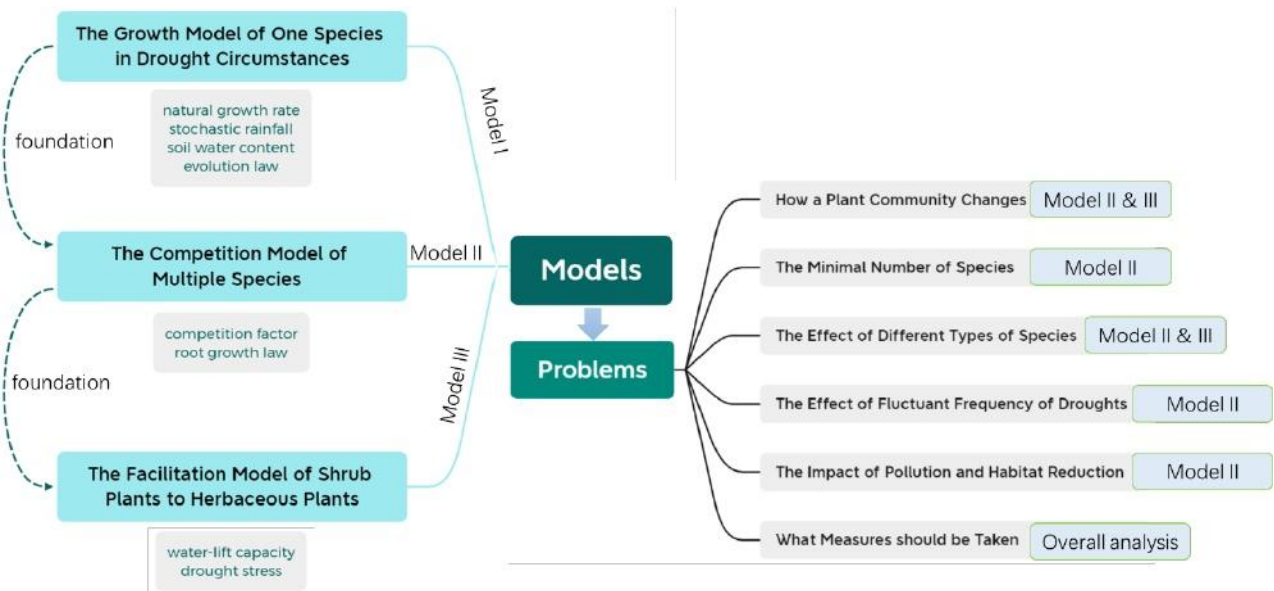


图 2:模型和问题

2 假设和理由

为了简化问题，我们做了以下假设，每一个假设都是合理的。

假设1:本文的研究对象主要为夏季型一年生植物，其生命周期为春季至秋季。这些植物的生物量将在冬季转化为种子库的生物量。

→正当性:根据[1]，一年生植物具有生长快、繁殖能力强、生命周期短的特点。这些植物是干旱区植被的重要组成部分，具有较高的研究价值。

假设2:干旱地区降雨是瞬间完成的，两次降雨之间没有额外的供水。

论证:干旱地区每次降雨的持续时间远远短于我们想要研究的年时间尺度。与此同时，绝大多数干旱地区缺乏地表水资源，如河流和湖泊。所以，我们可以认为，供水的唯一途径就是降雨。

假设3:干旱区水分蒸发与土壤总水量成正比。

→论证:干旱区水的蒸发效应全年都很显著。另外，干旱区土壤通常疏松。因此，土壤中的水分均匀地暴露在空气中，因此我们可以推断，水分蒸发量与总水量成正比。

假设4:一年生植物有规律的开花结果期，开花持续时间短。

→论证:一年生植物有固定的生命周期和规律的花期。由于受干旱环境的影响，植物的花期一般较短，往往在几天之内。这个跨度也远远短于我们要研究的以年为单位的时间尺度。

假设5:植物的平均生物量(或平均质量)与根系的体积成正比。

→论证:可以看出，植物的生物量越大，需要的资源就越多。而植物的主要限制是干旱地区缺水。考虑到根系是植物吸收水分的主要途径，我们可以合理地假设植物的平均生物量与根系所覆盖的体积成正比。

假设6:在实验区，植物分布均匀。

→理由:为了减少对资源的竞争，植物倾向于在整个区域内均匀分布。

假设7:在植物生长过程中(从发芽到开花之间)，不考虑整株植物的死亡。

→正当性:在我们的模型中，环境限制和种间竞争被认为对植物的平均生物量有影响。我们忽略了上述因素可能导致整个植物死亡的可能性。

3 变量

本文使用的主要符号列于表1。

表 1:本文使用的记号

Symbol	Definition	Unit
$r$	inherent growth rate	—
$B_i$	the average biomass of species $i$	$kg$
$K_i$	the maximum average biomass of species $i$ within environmental limit	$kg$
$R$	resource availability (soil water content)	$kg$
$f_i(R)$	the rate of resource uptake per unit biomass	—
$c_i$	the conversion efficiency from water to biomass increment	—
$m_i$	the loss rate of plants per unit time	—
$a_i$	to what extent water absorption rate changes with resource availability	—
$d_i$	the upper limit of water absorption rage	—
$\theta_i$	controls the variation trend of the uptake curve	—
$Bank_i$	the biomass of seed bank of species $i$	$kg$

$\phi_i$

the conversion ratio from the total biomass into seeds

—

$\sigma_{ij}$

the water resources consumed by unit biomass of plant  $i$  is  $\sigma_{ij}$  times of that of plant  $j$ , in which plant  $j$  is located

—

$D_i$

the average diameter of root extension of plant  $i$

$m$

$\lambda_i$

the relative water-utilizing capacity

—

$S_i$

the average root coverage of plant  $i$

$m^2$

$S_i'$

the average overlapping area of plant  $i$  and other plants

$m^2$

$V_i$

the volume of the root system of a plant  $i$

$m^3$

$\beta_i$

scale factor of  $B_i$  to  $V_i$

—

$n_i$

the number of plants

1

$d_i'$

the upper limit of water absorption rage with competition

—

$h$

the water-lift capacity of shrubs per unit biomass

—

$L_{total}$

the root length in total

$m$

$L_{normal}$

the average length of a root

$m$

$z$

root coefficient

1

$M^{(k)}$

the total weight of the plant species in the  $k^{th}$  year

$kg$

$E$

the average total weight

$kg$

$var$

the yearly fluctuation of the total weight (variance of the data)

$kg^2$

4 模型建立

4.1 一个物种在干旱环境下的生长模型



本节只建立了一种物种在干旱情况下的生长模型。在这种情况下，某一地区只有一种物种。我们定义为物种的平均生物量，根据 *Logistic 模型* 会增加。我们有

$$\frac{dB_i}{dt} = r_i B_i \left(1 - \frac{B_i}{K_i}\right) \tag{1}$$

其中是固有增长率，是物种在环境极限内的最大平均生物量。

在干旱半干旱地区，植物具有相对独特的生长规律，极端的气候条件和水资源约束严重影响了植物的正常生长[2][3]。因此，有必要根据干旱区的环境特点，对式(1)进行修改。

●抗旱条件下的自然生长速率

根据对干旱区植物生长的研究[4]，植物的固有增长率与自身特性和当地土地土壤含水量有关，可以表示为:

$$r_i = c_i f_i(R) - m_i \tag{2}$$

作为资源可用性的函数，表示植物将吸收的水分转化为生物量增量的转换效率，是单位时间内植物的损失率，这是由新陈代谢、自然死亡和其他生物的破坏造成的。

特别是， $f_i(R)$  这里可以表述为

$$f_i(R) = \frac{a_i R^{\theta_i}}{1 + a_i d_i R^{\theta_i}} \tag{3}$$

其中 $a_i$ 表示吸水率随资源可利用性变化的程度， $d_i$ 控制吸水狂暴的上限， $\theta_i$ 为控制吸收曲线的变化趋势。

●随机降雨模型

假设2中提到，干旱地区的降雨可以看作是水的瞬时脉冲。因此，我们需要两个变量来确定一个具体的降雨。具体来说， $tp$ 表示一年内降雨的相对时间， $rainfall$ 表示降雨总量。

在文献[3]中，作者提供了一个模型来预测一年中雨脉冲的时间和干旱地区的降雨量。首先，降雨的时间是随机抽取的Beta分布。可以写成[5]:

$$g(t) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1}, (0 \leq t \leq 1) \tag{4}$$

其中  $\Gamma$  是伽马函数， $g(t)$  是一年内时间的概率密度。

降雨量也被视为从对数-自然分布中随机抽取的量，其中参数和分别是降雨量的自然对数的平均值和方差。因此， $rainfall$  可以得到为

$$rainfall = \exp(\zeta), \zeta \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{5}$$

:

●土壤中含水量变化的规律

根据假设2，两次降雨之间没有额外的供水量。因此，土壤中的水分持续减少，主要是由于植物的吸收和蒸发。特别是假设3中提到的，水分蒸发量与总水量成正比。设比例因子为，

我们有

$$\frac{d}{dt}R = -f_i(R)B_i - \epsilon R \quad (6)$$

同时，我们将降雨的瞬间标记为。根据假设2，土壤中储存的水是瞬间变化的

$$R|_{after\ raining} = R|_{before\ raining} + rainfall \quad (7)$$

植物生命规律与种子库的进化

根据假设4，夏季型一年生植物有固定的花期。在这个过程中，植物完成开花、交配和结果。一般来说，一年生植物在开花期后会枯萎死亡，但它们的种子会在明年以一定比例(标记为)生长。同时，将总生物量的一定比例转化为ni

将总生物量转化为种子为，我们可以推断物种种子库的变化如下：

$$Bank_i|_{after\ fruiting} = Bank_i|_{before\ fruiting} + \phi_i B_i|_{before\ fruiting} \quad (8)$$

综上所述，我们得到了物种在干旱环境下不与其他物种竞争的进化模型。具体来说，其进化规律如下：

(i)在生长过程中，平均生物量和土壤含水量遵循下面的微分方程

$$\begin{cases} \frac{dB_i}{dt} = (c_i f_i(R) - m_i) B_i \left(1 - \frac{B_i}{K_i}\right), \\ \frac{d}{dt}R = -f_i(R)B_i - \epsilon R. \end{cases} \quad (9)$$

当降雨发生时，土壤含水量会瞬间发生变化

$$R|_{after\ raining} = R|_{before\ raining} + rainfall \quad (10)$$

(三)花期过后，植物种群产生种子。所以，总生物量表示为

$$\begin{cases} B_i|_{after\ fruiting} = (1 - \phi_i) B_i|_{before\ fruiting}, \\ Bank_i|_{after\ fruiting} = Bank_i|_{before\ fruiting} + \phi_i B_i|_{before\ fruiting}. \end{cases} \quad (11)$$

(四)花期过后，夏型一年生植物全部死亡。而到了第二年春天，一些种子发芽，开始按一定比例生长，即

$$\begin{cases} B_i|_{\text{after flowering}} = 0, \\ B_i|_{\text{next year}} = \eta_i B_{\text{ank}_i}|_{\text{after fruiting}}. \end{cases} \quad (12)$$

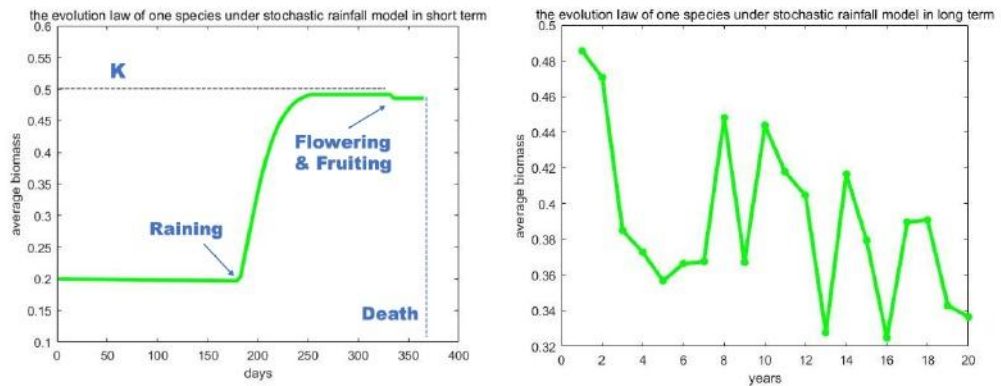


图 3:一个物种在一年和 30 年的变化

## 4.2 多物种的竞争模型

如前所述，我们建立了一个物种对不规则气候变化的生长模型。在本节中，我们考虑了多个物种之间的竞争。我们首先考虑两个物种之间的竞争。基于Lotka-Volterra模型，我们在公式(9)的基础上引入影响因子[6]来表达竞争

$$\begin{cases} \frac{dB_1}{dt} = (c_1 f_1(R) - m_1) B_1 \left(1 - \frac{B_1}{K_1} - \sigma_{21} \frac{B_2}{K_2}\right), \\ \frac{dB_2}{dt} = (c_2 f_2(R) - m_2) B_2 \left(1 - \frac{B_2}{K_2} - \sigma_{12} \frac{B_1}{K_1}\right). \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$ : 代表两个种群之间的竞争。考虑到在干旱环境中，竞争的主要资源是水，我们将  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$  定义如下

$\sigma_{12}$ 表示植物i单位生物量消耗的水资源是植物j的 $\sigma_{ij}$ 倍，植物j位于其中

我们从根生长的角度推导出 $\sigma_{12}$ 和 $\sigma_{21}$ 的值。假设i植物根系延的平均直径为 $D_i$ ，我们得到平均半径为 $D_i/2$ 。如果植物1 和植物 2 的根系覆盖面积重叠，我们可以推断这两种植物之间存在对水资源的竞争。

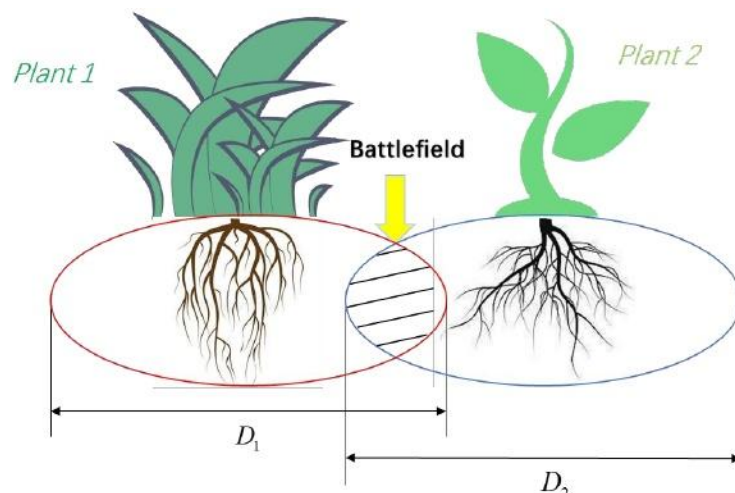


图 4:两株植物之间的战场



首先，对水资源利用能力参数进行归一化，得到相对  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (14)$$

可以推断出

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{\lambda_1 S_2'}{\lambda_2 S_2}, \\ \sigma_{21} = \frac{\lambda_2 S_1'}{\lambda_1 S_1}. \end{cases} \quad (15)$$

$S_1'$ 表示植物1与其他植物的平均重叠面积,  $S_1 = \pi D_1^2/4$ , 表示植物1的平均根系覆盖度,

$S_1 = \pi D_1^2/4$ ,这是植物1的平均根覆盖率,  $S_2 = \pi D_2^2/4$ ,这是植物2的平均根覆盖率。

对于根盖度和平均重叠面积，我们可以进行估算。

根据实验区植物的数量和平均生物量。

根据假设5，由植物的平均生物量，我们可以算出根系的体积

$$V_i = \beta_i B_i = \frac{1}{2} * \frac{4}{3} \pi \left( \frac{D_i}{2} \right)^3 \quad (16)$$

其中  $\beta_i$  为一个尺度因子,  $V_i$  为植物根系的体积，可以根据植物的生长数据估算出来。

具体来说，我们可以收集植物生长过程中根系长度和植物生物量的数据，从而确定尺度因子。

从根系的体积，我们可以进一步得到根系覆盖面积

$$S_i = \sqrt[3]{\frac{9\pi V_i^2}{4}} \quad (17)$$

假设7中提到，我们假设植物的数量(标记为)在生长过程中(从发芽到开花之间)保持不变。

因此，基于假设6，我们估计各种植物的平均重叠面积为

$$S_i' = S_i - \frac{S_{total}}{\sum_{k=1} n_k}, \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

值得注意的是，如果平均重叠面积的结果小于0。我们推断该植物与其他植物之间不存在竞争关系。然后，我们整理出一年中两个植物种群在生长期竞争的微分方程模型，可以描述为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} B_1 = (c_1 R - m_1) B_1 \left(1 - \frac{B_1}{K_1} - \sigma_{21} \frac{B_2}{K_2}\right), \\ \frac{d}{dt} B_2 = (c_2 R - m_2) B_2 \left(1 - \frac{B_2}{K_2} - \sigma_{12} \frac{B_1}{K_1}\right), \\ \frac{d}{dt} R = - \sum_{i=1}^2 f_i(R) B_i n_i - \varepsilon R. \end{cases} \quad (19)$$

公式(19)中的参数可以通过以下规则确定:

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{\lambda_1 S_2'}{\lambda_2 S_2}, \\ \sigma_{21} = \frac{\lambda_2 S_1'}{\lambda_1 S_1}, \\ S_i' = S_i - \frac{S_{total}}{\sum_{k=1}^2 n_k}, \quad (i=1, 2), \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases} \quad (20)$$

最后得到一年生长期内植物种群相互竞争的微分方程模型, 可描述为

$$\begin{cases} \frac{dB_i}{dt} = (c_i f_i(R) - m_i) B_i \left(1 - \frac{B_i}{K_i} - \sum_{j \neq i} \sigma_{ji} \frac{B_j}{K_j}\right), \quad (i=1, 2, 3, \dots, N), \\ \frac{d}{dt} R = - \sum_{i=1}^N f_i(R) B_i n_i - \varepsilon R. \end{cases} \quad (21)$$

式(21)中的参数可按以下规则确定:

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = \frac{\lambda_j S_i'}{\lambda_i S_i}, \quad (i, j=1, 2, 3, \dots, N), \quad (i \neq j) \\ S_i' = S_i - \frac{S_{total}}{\sum_{k=1}^N n_k}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, N), \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n = 1. \end{cases} \quad (22)$$

基于上述微分方程, 综合考虑式(10~12)可得到最终模型。

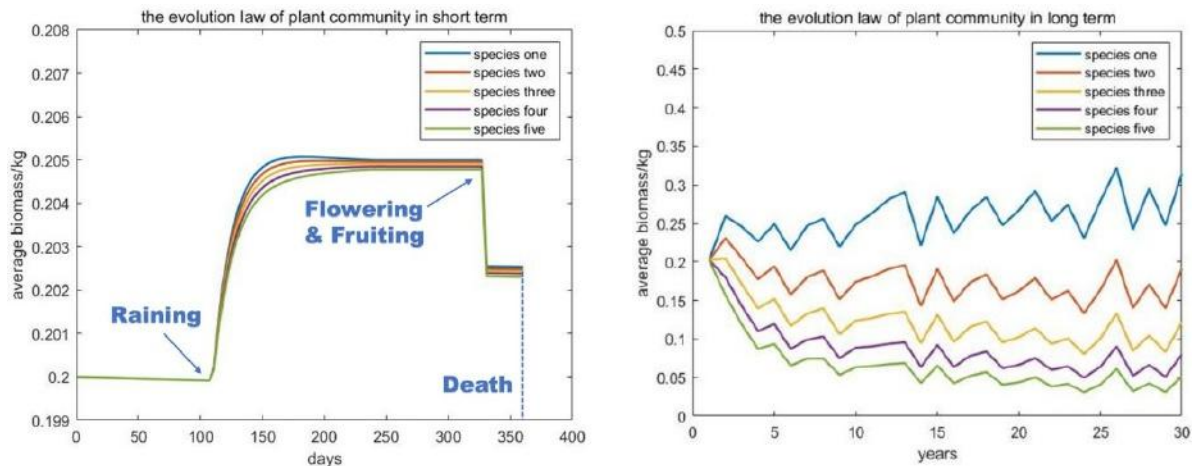


图 5:一个植物群落 1 年和 30 年的变化情况

### 4.3 灌木植物对草本植物的促进模型

在4.2节中，我们从水分根系竞争的角度建立了干旱循环时期植物的种间竞争模型。该模型适用于所有植物。然而，在干旱胁迫下，灌木植物在促进草本植物生长方面发挥着独特的作用[8]。这种促进作用主要体现在灌木植物能够促进草本植物的生存和生长。

在第4.2节中，我们进一步修改参数为。

根据Richards团队[9]和Prieto团队[10]的研究，我们发现灌木根系可以将深层土壤中的水分提升到浅层土壤中。这个过程可以改善浅层土壤的环境，方便其他植物吸收水分。考虑到 $d_i$ 越小，植物的吸水率越高，我们推断

$$d_i' = \frac{1}{1 + h \sum_{j \neq i} \frac{B_j}{K_j} \delta_j} d_i \tag{23}$$

$h$ 为比例因子，反映灌木单位生物量的提水能力，

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{plant } j \text{ is shrub,} \\ 0, & \text{plant } j \text{ is other plants.} \end{cases}$$

对公式（23）的分析表明，当植物周围没有灌木时， $d_i'$  等于  $d_i$ 。当灌木存在时，灌木的生物量越多， $d_i'$  体积就越小。因此，如果植物周围有灌木，吸水率就会提高。

同时，Butterfield团队[11]的研究表明，灌木对土壤水分的促进作用会随着干旱程度的增加而减弱。考虑到土壤含水量是衡量干旱程度的标准之一，我们进一步修改式(23):

$$d_i' = \left( \frac{1}{1 + h \sum_{j \neq i} \frac{B_j}{K_j} \delta_j} d_i \right) e^{\frac{1}{R}} \tag{24}$$

其中R为资源可利用性(土壤含水量)。由于灌木对草本植物的促进机制复杂且不确定，目前尚无相对一致的研究结果[8]。因此,我们根据具体情况分析，建立上述模型。并且我们会对仿真中的参数给出自己的估计。

4.4 基本参数的合理估计

在本节中，我们对前面模型中的参数进行合理估计。

● 随机降雨模型中的统计参数

根据Sec4.1中建立的随机降雨模型。一年的平均降雨量可以为  $rainfall = \exp(\zeta)$ 。因为  $\zeta \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，我们需要确定平均值  $\mu$  和变化  $\sigma^2$ 。

我们查了不同干旱程度地区的年降水量。我们发现，严重干旱地区的年平均降水量只有32.5mm[12]，比如塔克拉玛干沙漠的南缘。中度干旱区的年平均降水量约为113.2mm[13]，类似于中国河西走廊中部的原始沙漠。而这一数据在半干旱区约为360mm[14]，如中国内蒙古乌神旗的三地柏树自然保护区。

考虑到我们的实验区为10000 m2，针对以上不同干旱程度，年平均降水质量分别为325kg、1132kg和3600kg。根据  $3\sigma$  规则：有95%的可能性  $\mu \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 。我们得出，

$$\begin{cases} e^{\mu+3\sigma} = 3600, \\ e^{\mu} = 1132, \\ e^{\mu-3\sigma} = 325. \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.189 \\ 7.032 \\ 5.784 \end{bmatrix} \tag{25}$$

上面关于  $\mu$  和  $\sigma$  的方程是超确定的。根据正态方程，我们基于最小二乘法得到最优参数值

$$[\mu \ \sigma]^T = (A^T A)^{-1} A^T B \tag{26}$$

在公式25中，A是  $\mu, \sigma$  的系数矩阵，B是  $[8.189 \ 7.032 \ 5.784]^T$ 。

最后，我们得到:  $\mu = 7.0017, \sigma = 0.4008$ 。

● 根系体积与植物生物量之间的比例因子  $\beta_i$

在干旱环境中，植物根系尽可能覆盖更广的面积。根据对根系拓扑结构的讨论[13]，理想的模型是二元分支。

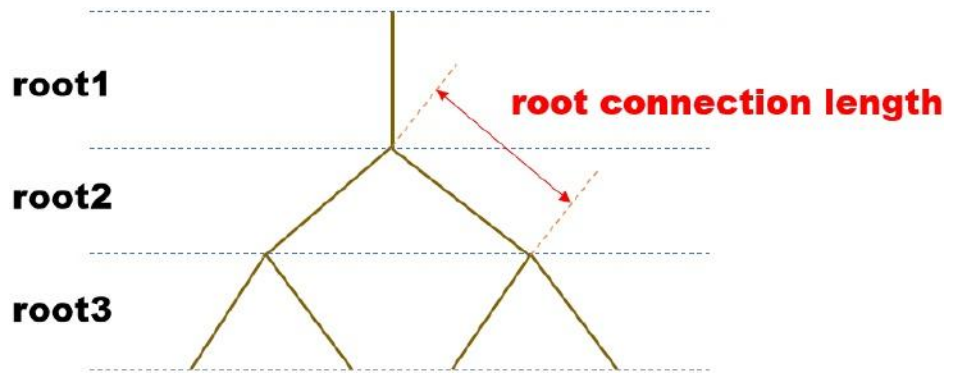


图 6:植物根系的二元分支模型

为了进一步讨论，我们引入根和根连接长度的概念，如图所示

如图6所示。红毛白刺(RS)和白刺(NT)是沙漠地区常见的两个种群。根据[12]，RS的平均根长为3185.5cm，平均根连接长度为29.8cm。而NT的平均根长为4802.5cm，平均根连接长度为49.0cm。

通过分析二元分支的特征，我们得到

$$L_{total} = L_{normal}(2^z - 1) \quad (27)$$

$L_{total}$  是根的总长度， $L_{normal}$  是一个根的平均长度， $z$  是一个根的系数，反映根系中有多少个分支。

接下来，将根的总平均长度和根连接的平均长度代入公式(27)。我们获得

$$z_{RS} \approx 7, z_{NT} \approx 7$$

然后，我们认为植物的根会向四周伸展成球形，以便吸收水分。因此，我们对根系直径的估算如下：

$$\begin{cases} D_{RS} = 2z_{RS}L_{normal|RS} = 4.17m, \\ D_{NT} = 2z_{NT}L_{normal|NT} = 6.86m. \end{cases} \quad (29)$$

我们将根系简化为半个球体，这样我们也可以得到根系的体积。

考虑到两个种群的单株植物的质量，考虑到两个种群的单个植物的质量，我们通过公式(16)来确定 $\beta_{RS}$ 和 $\beta_{NT}$ 。由于这两个种群在干旱地区具有代表性，我们根据这两个值的平均值来估计通用尺度因子

$$\beta \approx \frac{\beta_{RS} + \beta_{NT}}{2} = 108.9 \quad (30)$$

既然 $\beta$ 是根体积与植物生物量之间的尺度因子，它反映了一个普遍规律。因此，我们认为不同植物的这个尺度因子是近似的，在模拟中，我们用108.9代替不同物种的比例系数 $\beta_i$



● 其他参数的估计

除了上述两个参数外，我们还需要确定  $c_i$ ,  $a_i$  和  $K_i$ .

正如在前面的描述中所提到的 (Sec. 4.1),  $c_i$  表示植物将所吸收的水转化为生物量增量的转化效率,  $a_i$  表示所述水吸收率随资源可利用性的变化程度。根据[4],  $c_i$  合理的范围是[5,20], 而  $a_i$  范围是[10,50]。在考虑不同的植物种类时, 我们在上述范围内取值, 以确保最终结果的合理性。

根据前面第4.1节的分析,  $K_i$  为物种i在环境极限内的最大平均生物量。很明显, 对于不同的物种, 它应该是不相等的。然而, 对于本文所研究的夏季型一年生植物,  $K_i$  一般小于 0.5kg, 将数值设定在0.5左右是合理的。

5 模型计算和结果分析

5.1 模型计算算法

考虑到四阶龙格-库塔算法的高精度和强稳定性, 我们将该方法应用于计算公式 (21) 中列出的微分方程。首先, 我们将微分方程分类为  $\dot{x} = f(t, x)$ , 其中

$x = [B_1, B_2, \dots, B_n, R]^T$ 。然后, 我们构造以下微分迭代方案来计算一阶微分方程:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + \Delta t \left( \frac{1}{6} g_1 + \frac{1}{3} g_2 + \frac{1}{3} g_3 + \frac{1}{6} g_4 \right), \\ g_1 = f(t_{i-1}, x_{i-1}), \\ g_2 = f\left(t_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t, x_{i-1} + \frac{1}{2} g_1 \Delta t\right), \\ g_3 = f\left(t_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t, x_{i-1} + \frac{1}{2} g_2 \Delta t\right), \\ g_4 = f(t_{i-1} + \Delta t, x_{i-1} + g_3 \Delta t). \end{cases} \quad (31)$$

其中  $\Delta t$  为计算过程的时间步长。

计算细节如下所示:

表 2:MATLAB 仿真示意图

<b>Input:</b>
(1) The characteristics of <b>various species</b> , the <b>initial condition</b> of the community
(2) The simulation <b>time period</b>
(3) The <b>timing of rainfall</b> based on the beta distribution model
(4) The <b>amount of water</b> of each rainfall based on the log-normal distribution model
<b>While:</b> $t < Time$
(1) <b>If:</b> at the beginning of a year
A specific proportion of the seed in seedbank will germinate
<b>End</b>
(2) <b>Calculate the increase</b> of the biomass of respective species $B_i$ and the total underground water storage $R$ at the moment using <b>R-K method</b>
(3) <b>If:</b> the rainfall is encountered
<b>increase the water storage</b> $R$ by the water amount $rainfall$
<b>End</b>
(4) <b>If:</b> the flowering period in the year has been over
● convert $\phi_i$ of the biomass $B_i$ to the increase of the seed bank
● all annual plants die
<b>End</b>
(5) record the evolution of the community
<b>End</b>

5.2 多植物群落的效益评估

对于一个植物群落来说，在不规律的气候条件下，评估其表现有两个方面。一是所有植物的重量，重量应该尽可能的高。另一个是要避免极端波动，保证生态系统的稳定。综上所述，一个理想的生态系统应该在其规模和稳定性之间达到平衡。

$k^{th}$  年群落的规模可以被建模为植物物种的总重量（标记为  $M^{(k)}$ ），它可以写成：

$$M^{(k)} = \sum_i B_i^{(k)} n_i^{(k)} \tag{32}$$

其中， $B_i^{(k)}$  为  $k^{th}$  年植物的平均生物量， $n_i$  为本年度植物种类的总数。为了简化对问题的分析，我们将时间限制在  $k_{max}$  年内。

考虑到每一年的植株总重，我们可以计算出这一时期的平均总重(标记为 $E$ )，即：

$$E = \frac{1}{k_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} M^{(k)} \tag{33}$$

总权重的年波动可以作为数据的方差（标记为  $var$ ），表示为：

$$var = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (M^{(k)} - E)^2$$

(34)

如果生物多样性确实给植物群落带来了利益，则可以通过更高的尺度或更低的波动来体现。为了评估这两个方面之间的平衡，我们采用了TOPSIS的方法。TOPSIS是多目标决策分析中常用的一种方法。因此，我们采用该模型来评估植物群落的进化性能。如果评估的表现优于只有一种植物物种的情况，则意味着植物群落从生物多样性中受益。因此，我们就能够确定需要多少个物种才能使群落受益。结果如下所示：

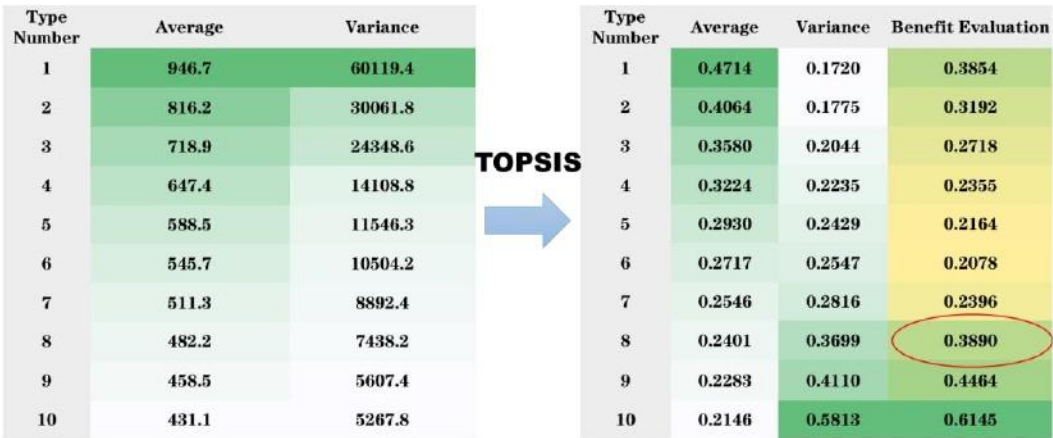


图 7:使用 TOPSIS 评估社区的规模和稳定性

同时，这个模型也有助于揭示随着物种数量的增长会发生什么。我们需要做的是将物种数量放大，作为模拟程序的输入。

该地区的物种越多，植物的总重量就越低，群落在应对不规则天气条件时所经历的波动就越小。这种现象可以用式(21)中给出的微分方程模型直观地解释。随着物种数量的增长，由于对有限水资源的竞争更加激烈，植物群落的生长将受到更多的摩擦。在这种激烈竞争的群落中，任何类型的物种都被抑制在短时间内生长到极端大规模。因此，可以保持不同物种的相对比例，从而使植物群落具有更高的稳定性。

利用TOPSIS推导出的效益评价指数(图7)表明，当物种数量大于8个时，该指数将大于1个物种的效益评价指数。因此，无论在群落的规模还是稳定性方面，群落都需要超过8种的物种才能获得整体效益。

5.3 不同种类物种对群落的影响

本节介绍不同类型的物种对植物群落进化的影响。基于第4.2节的竞争模型，我们发现植物群落中不同物种之间的差异越大，总生物量越大，但其稳定性越低。根据Sec.4.3中的模型，我们进一步考虑上述环境下灌木植物对其他植物的贡献。具体来说，我们模拟了两种类型的植物群落，并比较了它们之间的差异。

在第一种情况下，有三种不同的草本植物和一种灌木。如4.3节所述，灌木能够通过提高牧草的吸水率来促进牧草的生长。因此，除了物种间的竞争之外，合作也是存在的。在第二

种情况下，植物群落是由三种草本植物组成的，没有灌木。换句话说，只有物种之间的竞争。将这两个植物群落置于相同的天气环境下，模拟显示它们的进化结果如下：

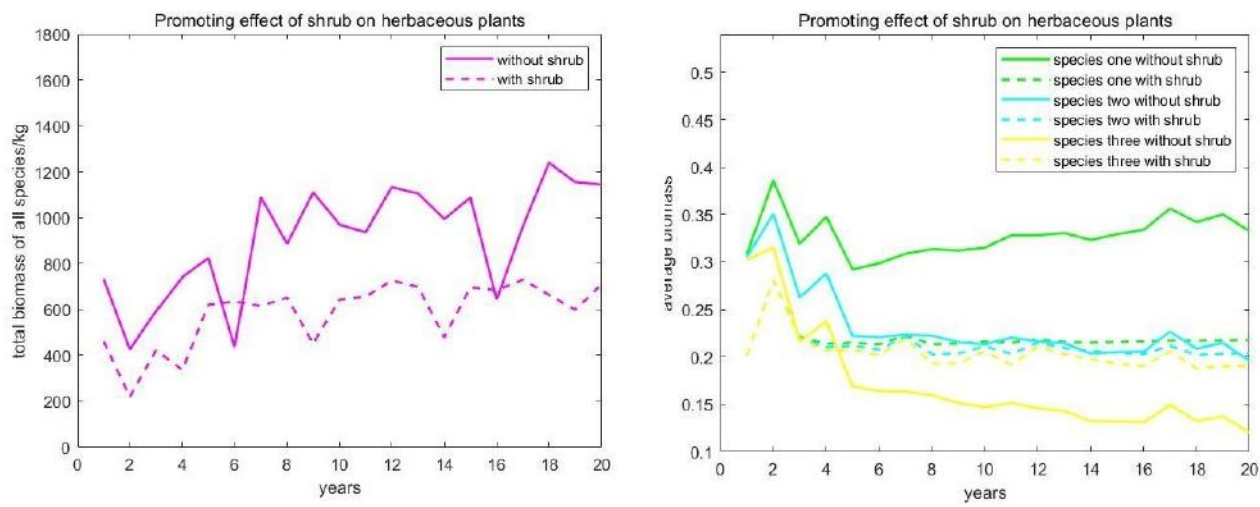


图 8:灌木对植物群落生物量的影响

根据进化数据分析，第一个社群(图8虚线) 显示出相对较低的平均总权重和比这小得多的方差(图8中的实线)。这种差异表明，由于根系竞争，灌木的添加导致群落规模相对较小。然而，面对不规则的天气条件，植物群落的稳定性要高得多。更重要的是，从上图可以看出，灌木可以减少不同牧草之间的竞争，有利于生物多样性的维持。

5.4 干旱波动频率的影响

干旱天气条件通常表现为每次降雨量少、降雨频率低。为了模拟干旱的各种频率和发生对植物群落的影响，可以相应地改变每次降雨的时间分布和水量。当干旱发生时，降雨出现相同频率的概率就会降低(甚至有可能全年都没有降雨!)这就需要一个新的随机变量来控制降雨次数。

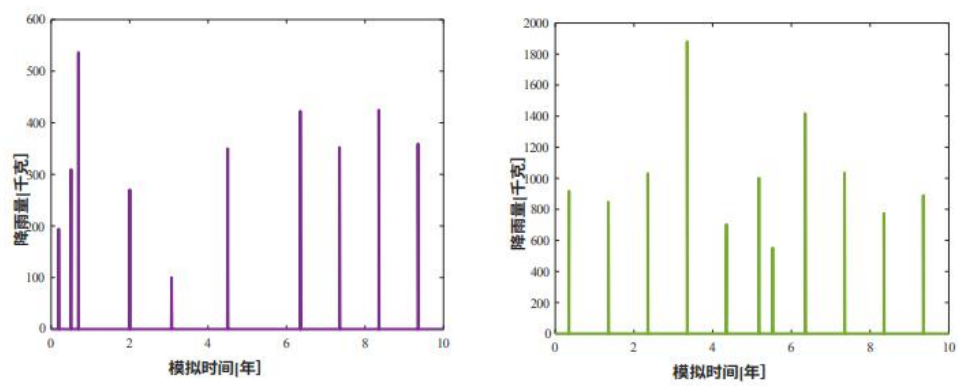


图 9:严重干旱和不频繁干旱情况下的降雨分布

在我们的模拟中，我们假设  $\tau$  对应于泊松分布与参数  $\lambda=1$ 。与此同时， $\mu$  和  $\sigma$  也被改变，以造成更严重的干旱条件。仿真结果显示如下：



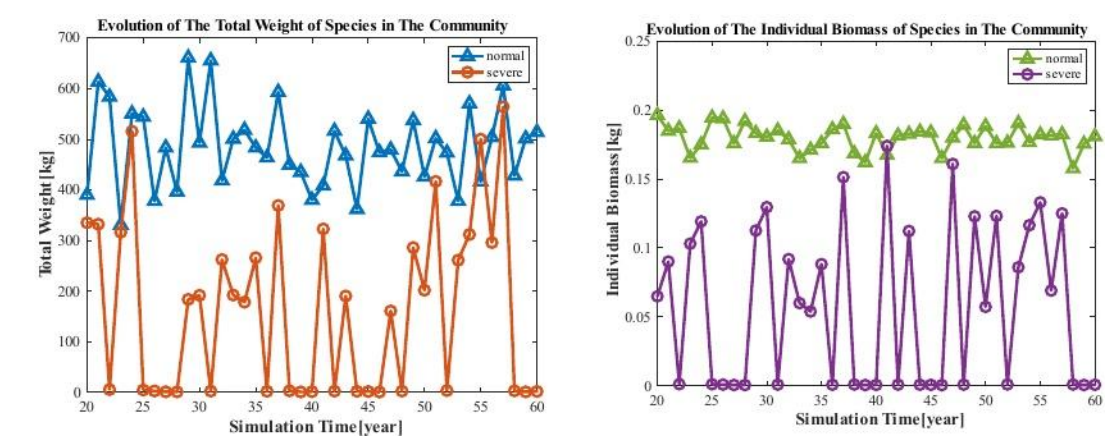


图 10:正常干旱和严重干旱下植物群落的演化

在严重干旱的情况下，整体水资源的可用性将进一步受到限制。因此，植物物种的进化不仅会带来更低的尺度，而且会带来更低的稳定性，这是可以理解的。此外，我们的模型显示，随着物种数量的增长，植物群落的规模和稳定性遵循类似的趋势(在 5.2 节中提到)，如下表所示:

表 3:The Community’ s Scale and Stability Indexes of Less frequency Drought

Type Number	4	6	8	10	12	24
Average	209.06	184.75	162.48	153.6	147.22	117.14
Variance	26346	15428	13606	12569	7277.6	3986.1

5.5 其他因素对植物群落的影响

● 不同类型污染的影响

一般来说，污染物会改变植物的新陈代谢，使它们容易受到疾病或害虫的侵袭。在本节中，我们研究了光化学雾霾和酸雨这两种典型污染物对植物群落的影响。它们对植物的具体损害如下[15]:

光化学雾霾是由于工业活动产生的氧化亚氮和挥发性有机化合物之间的化学反应而产生的。产生的产物是地面臭氧和过氧乙酰硝酸盐。暴露在这些污染物中的植物较弱，存活的机会也较低。因此，光化学烟雾的影响可以模拟为植物损失率的增加(标记为)。

<s:1>酸雨是由大气中硫和二氧化氮与其他物质的化学反应引起的。直接暴露在酸雨中会使植物更难进行光合作用。因此，酸雨的影响可以看作是转化效率的降低(标记为)。

为了模拟污染对植物群落的影响，应该对植物的损失率和转化效率进行相应的修正。生长的模拟结果



含污染物植物群落如下图所示:

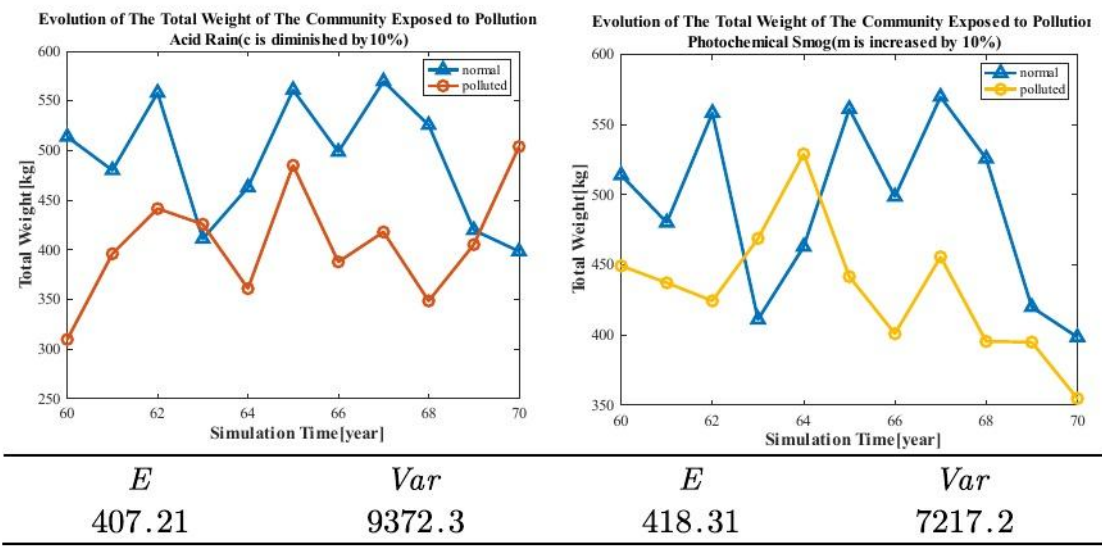


图 11:暴露于各种污染物下的群落演化

与未受污染的案例相比，暴露于污染的植物群落结果实现了更低的规模。此外，还值得注意的是，不同类型的污染物以不同的方式影响系统的稳定性。对于增加生物质损失率的污染物，如光化学烟雾，不会对稳定性产生太大的负面影响。然而，当植物暴露在酸雨中时，情况就不一样了，酸雨会降低转化效率。当暴露于这些污染物时，植物群落的稳定性会比未受污染的情况下低得多。这种现象可以通过干旱地区用水的重要性来说明。

● 栖息地减少的影响

同样，我们的模型也可以用来探索栖息地减少对物种生长的影响。并且模拟结果如下所示:

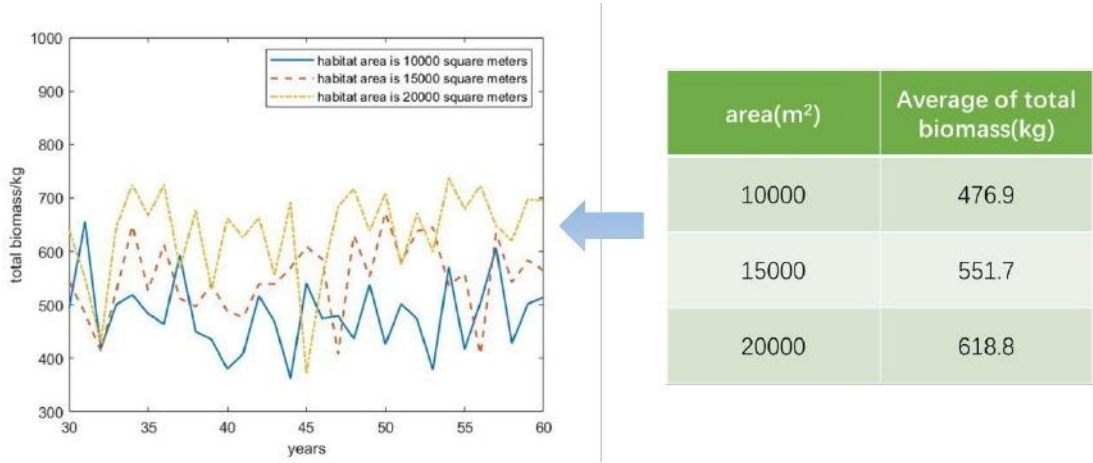


图 12:栖息地减少的结果

从图中可以看出，栖息地越小，规模越小。由于植物物种生长的空间更小，不同植物的根就会有更多的交集。

## 5.6 长期生存能力所需措施

根据模拟结果，我们获得了一系列确保植物群落长期生存能力的策略。我们的想法从生态系统的保护和修改两个方面来表达。

### ● 保存

植物群落的生态系统在干旱地区已经存活了数百万年，这表明其面对恶劣条件的内在稳健性。因此，应采取措施保护群落的自然性。具体策略如下：

(1)保护植物群落的生物多样性。从第5.5节和第4.3节对我们的模型的模拟中，我们发现多植物物种之间的竞争和促进都保证了系统在恶劣自然条件下的稳定性。

(2)保护干旱地区的水资源。如果过度开发水资源，会加剧水资源短缺，降低植物群落的规模和稳定性。

(3)防治污染。从我们在第5.5节的分析中，污染物，特别是酸雨，已经被证明会破坏植物群落的规模和稳定性。

(4)维护植物的栖息地。一个足够大的栖息地可以给个体留下足够的生存空间，这有助于避免物种之间的激烈竞争。

### ● 修改

尽管天然草群落有这些优势，但它们仍然容易受到严重干旱条件的影响。并且可以进行修改以提高植物群落的生存能力。具体策略如下：

(1)引进新种。我们发现灌木等物种可以给其他物种带来促进作用，增加生态系统的稳定性，这与文献一致。因此，可以引入一些合适的物种。

(2)建设灌溉设施。一些灌溉设施，如伊朗的坎儿井，可以收集和保存降雨中的水，蒸发较少。所以，通过人工设施增加土壤水分的可用性也是值得考虑的。

## 6 敏感性分析与稳定性分析

### 6.1 敏感性分析

在第4节中，我们建立了三个模型，其中包含了许多参数。在第4.4节中，我们对大多数参数进行了合理的估计。但是，通过计算仍然很难估计出一些值，我们唯一的方法就是参考文献。在本节中，我们对从文献中得到的参数进行敏感性分析。

首先，为物种的最大平均生物量，反映了环境对植物生长的限制。考虑到我们研究的多是干旱环境下的一年生植物，不同物种的最大平均生物量应该差别不大。因此，在前面的模拟中，我们假设不同物种具有相同的。通过调整的值，得到敏感性分析曲线(以三种物种的竞争为例)：

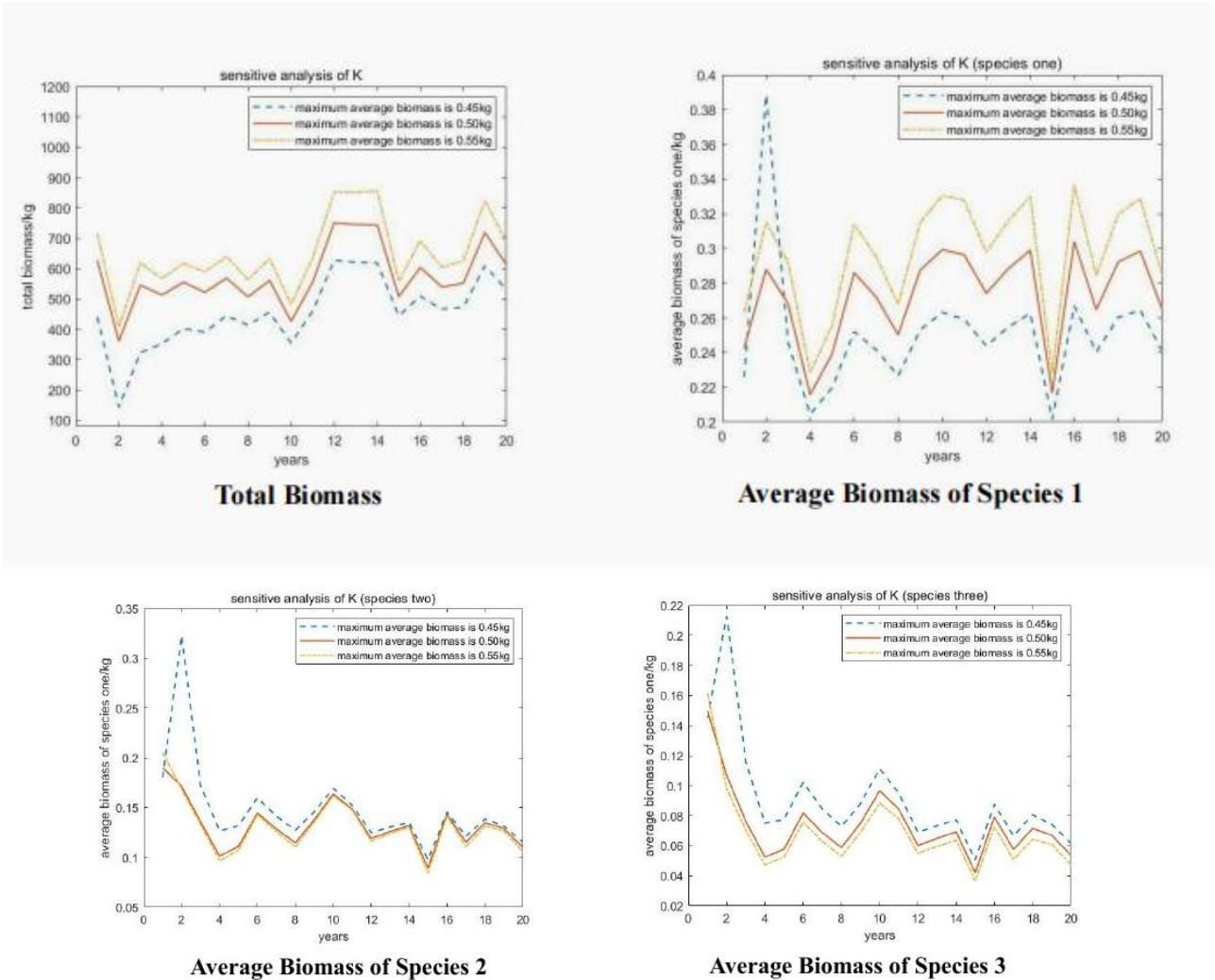


图 13:不同值的效果

然后，我们分析了(控制吸收曲线变化趋势的)和(植物生物量转化为种子的转化率)的敏感性。

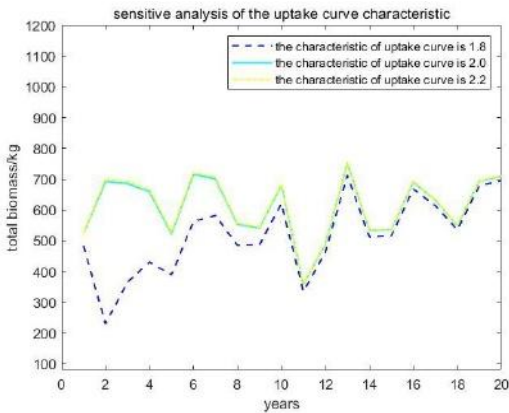


图 14:不同值的影响

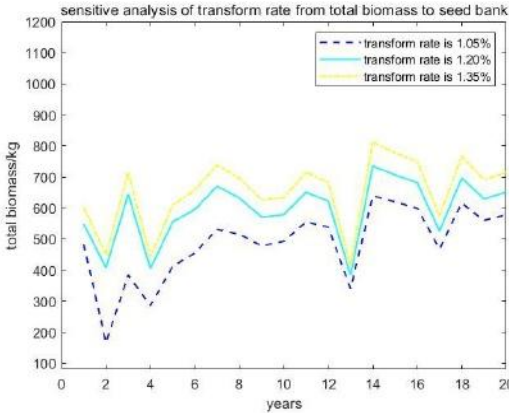


图 15:不同值的效果

可以看出，我们的模型在各种参数的敏感性分析中表现良好。随着植物一代一代的繁殖，参数值的波动对结果的影响较小。这说明我们的模型具有较好的长期稳定性。

6.2 稳定性分析

● 初值对结果的影响

我们选择了模型的两个初始值（初始平均生物量  $B_{i|initial}$ ，初始数  $n_{i|initial}$ ）。我们随机地扰动这两个值，用一个扰动变量遵循均匀分布。

干扰变量的平均值为0，变量量为

$$\frac{1}{12} (0.1B_{i|initial})^2 \text{ or } \frac{1}{12} (0.1n_{i|initial})^2$$

(35)

接下来，我们观察干扰对长期结果的影响:

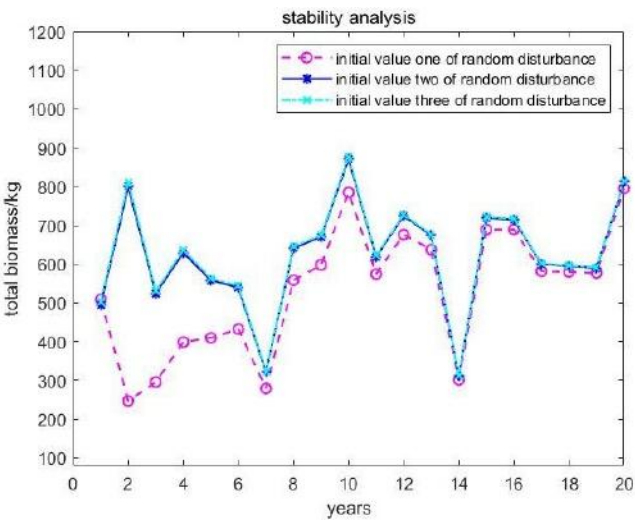


图 16:随机扰动对模型长期稳定性的影响

上图中，植物总生物量的值为一年生植物的最大生物量(死亡前)。可以看出，模型的长期稳定性是令人满意的。

● 各参数与结果稳定性的关系

当我们讨论微分方程平衡点的稳定性时，我们经常通过计算偏导数来确定可能的平衡点。然后，我们研究系数矩阵的特征方程，分析相轨迹。最后，我们确定方程在合理平衡点稳定的条件[6]。

基于第4.2节建立的竞争模型，我们考虑两个物种之间的竞争。而现在我们只考虑一年内的生长情况，也就是说，我们忽略了开花、结果和死亡的过程。根据式(19,20)，我们可以得到两种植物可能的平衡点:

$$P_1(0,K_2), P_2(K_1,0), P_3\left(\frac{K_1(1-\sigma_{21})}{1-\sigma_{21}\sigma_{12}}, \frac{K_2(1-\sigma_{12})}{1-\sigma_{21}\sigma_{12}}\right), P_4(0,0)$$

(36)

如果两个物种  $(B_1, B_2)$  的平均生物量期望达到满足，我们可以通过上述方法得到参数值的要求：通过上面的方法得到参数值的要求：

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{\lambda_1 S_2'}{\lambda_2 S_2} < 1, \\ \sigma_{21} = \frac{\lambda_2 S_1'}{\lambda_1 S_1} < 1. \end{cases} \quad (37)$$

根据定义和公式（18），平均根覆盖范围  $S_i$  一般明显大于平均重叠面积  $S_i'$ 。同时，对于耐旱一年生植物，其相对吸水能力  $\lambda_i$  没有明显的差异，这可以描述为  $S_i'/S_i < 1, \lambda_2/\lambda_1 \approx 1$

因此，公式（37）在我们的模型中是合理且容易满足的。

## 7 优势和劣势

### 7.1 优势

充分考虑了一年生植物物种进化的复杂性，我们的模型在Logistic模型的基础上采用微分方程的形式。同时，由于植物的繁殖和死亡，植物群落的瞬时跳跃也被考虑在内。理论上，我们的模型能够在任何给定时间预测群落的状态。

在我们的模型中，我们使用自然生长速率和土壤含水量之间的关系来考虑水分可用性对植物群落的影响。因此，我们的模型能够模拟植物群落在各种干旱条件下的进化。

不同物种之间的促进和竞争是基于之前植物学和Lotka-Volterra模型的研究来建模的。因此，我们的模型能够模拟物种之间相互作用不同的各种群落的进化。

使用四阶龙格-库塔算法计算微分方程的数值解，我们的模型具有计算精度和较强的稳定性。

TOPSIS用于评价不同植物群落的进化。凭借简单易懂的优点，该方法可以有效地衡量特定植物群落在规模和稳定性方面的整体表现。

### 7.2 缺点

在我们的模型中，土壤水分仅来自降雨，并且仅由于物种的蒸发和消耗而减少。然而，地下水的实际开发要比这复杂得多，因为地下河等因素不容忽视。

不同类型的干旱被定义为不同的频率和降雨量。然而，干旱在许多其他方面是不同的，比如当地的温度、风环流等等。因此，为了更好地描述干旱，应该纳入更多的维度。

虽然我们模型中的多个参数保证了模型的灵活性，但其中一些参数很难精确计算，所以我们根据我们的参考文献给出了适当的估计。但是，我们对模型中的关键参数进行了严格的推导和分析。



## 参考文献

- [1] Floristic composition, distribution, and resource types of desert annual plants in Xinjiang DU Jiaqian [J]. Arid Zone Research, 2022, 39(01): 185-209.
- [2] Leopold, A. C. (1964). Plant growth and development. Plant growth and development.
- [3] Seleiman, M. F., Al-Suhaibani, N., Ali, N., Akmal, M., Alotaibi, M., Refay, Y., ... & Battaglia, M. L. (2021). Drought stress impacts on plants and different approaches to alleviate its adverse effects. *Plants*, 10(2), 259.
- [4] Chesson, P., Gebauer, R. L., Schwinning, S., Huntly, N., Wiegand, K., Ernest, M. S., ... & Welzin, J. F. (2004). Resource pulses, species interactions, and diversity maintenance in arid and semi-arid environments. *Oecologia*, 141, 236-253.
- [5] Johnson NL, Kotz S, Balakrishnan N (1995) Continuous univariate distributions, vol 2, 2nd edn. Wiley, New York
- [6] JIANG Qi-yuan (2011). Mathematical model. Higher Education Press.
- [7] Fan, L., & Zizhen, L. (2003). Interspecific competition model and application of plants in sandy area. *Acta Botanica Boreali-occidentalia Sinica*, 23(1), 138-140.
- [8] LUO, G. S. C. T. X., & Zhang, E. L. L. (2022). Advances in the study of shrub facilitation on herbs in arid and semi-arid regions. *Chinese Journal of Plant Ecology*, 46(11):1321-1333.
- [9] Richards JH, Caldwell MM (1987). Hydraulic lift: substantial nocturnal water transport between soil layers by *Artemisia tridentata* roots. *Oecologia*, 73, 486-489.
- [10] Prieto I, Padilla FM, Armas C, Pugnaire FI (2011). The role of hydraulic lift on seedling establishment under a nurse plant species in a semi-arid environment. *Perspectives in Plant Ecology Evolution and Systematics*, 13, 181-187.
- [11] Butterfield BJ, Bradford JB, Armas C, Prieto I, Pugnaire FI (2016). Does the stress gradient hypothesis hold water? Disentangling spatial and temporal variation in plant effects on soil moisture in dryland systems. *Functional Ecology*, 30, 10-19.
- [12] GUO, J. H., ZENG, F. J., LI, C. J., & Zhang, B. (2014). Root architecture and ecological adaptation strategies in three shelterbelt plant species in the southern Taklimakan Desert. *Chinese Journal of Plant Ecology*, 38(1), 36.
- [13] Li-shan, S. H. A. N., Yi, L. I., Wei, R. E. N., Shi-ping, S. U., Qiu-lian, D. O. N. G., & Dong-mei, G. E. N. G. (2013). Root architecture of two desert plants in central Hexi Corridor of Northwest China. *Yingyong Shengtai Xuebao*, 24(1).
- [14] He Weiming. Distribution Characteristic of Root Area of *Sabina Vulgaris* under Different Habitats. *Scientia Silvae Sinicae*, 2000, 36(5): 17-21.
- [15] "Greentumble." [online]. Available: <https://greentumble.com/effect-of-pollution-on-plants/>