# 整数规划及其应用问题探究

## 整数规划概论

### 1.1.1 整数规划的定义

整数规划：在应用数学模型对实际问题进行求解的过程中，在某些特定的情况下，将其中的变量限制为整数的方法。

整数线性规划：在应用线性规划模型对实际问题进行求解的过程中，在某些特定的情况下，将其中的变量限制为整数的方法。

### 1.1.2 整数规划的分类

一般情况下，整数规划指的是整数线性规划。

整数线性规划模型是根据变量所受到的限制是全部变量还是部分变量而决定的。

纯整数规划：将所有变量限制为整数的规划。

混合线性规划：将部分变量限制为整数的规划

### 1.1.3 整数线性规划的特点

#### 1.线性规划最优解可取整

* 1. 线性规划在整数规划中最优解全部都是整数，那么整数规划和线性规划的结果是相互一致的。
  2. 线性规划在整数规划中没有可行解。
  3. 线性规划在整数规划中存在可行解，但是最优解值变差。

【例1.1】假设原先的线性规划为：



可以解得，其最优实数解为。

【例1.2】原线性规划为：



可以解得，其最优实数解为

若对其中的变量进行限制为整数，那么结果如下：



#### 2. 线性规划最优解不可取整

当整数规划的最优解不能够按照实数最优解进行简单的取整就得到，那么将使用以下几个方法进行求解。

### 1.1.4 线性规划求解方法分类

* 分枝定界法——求纯或混合整数线性规划；
* 割平面法——求纯或混合整数线性规划；
* 隐枚举法——求解“0-1”整数规划；
* 过滤隐枚举法。
* 分枝隐枚举法。
* 匈牙利法——解决指派问题；
* 蒙特卡罗法——解决各种类型规划问题。

## 0-1型整数规划及其应用问题探究

0-1型整数规划术语整数规划中比较特殊的情况，因为变量的取值仅局限在0或者1，那么成该变量为0 – 1 变量或者是二进制变量。约束条件如下：



如果将该问题引入实际需要应用线性规划模型解决的问题，就可以量各种情况需要分别讨论的数学规划问题综合在一起进行探究。本次章节将会详细介绍如下情况。

【例1.1】将下属非线性0 – 1 规划问题转换成线性0 – 1规划问题：



解：将上述约束条件中的 变化成，

那么约束条件可以改写为：



经过更改之后的线性规划的约束条件是：



### 1.2.1 相互排斥的约束条件

【例1.2 】南洋理工航运公司针对一批新进货物可提供两种运输方式进行运输，第一种方式是用车运输；第二组方式是用船运输。用车运输所受限制的约束条件为用船进行运输所受到限制的约束条件为。

那么上述两个约束条件相互排斥记为：

或

为了方便探究问题，在本题中引入0 – 1 变量来简化问题：



再次改写上述约束条件为：



在上述公式中，M为充分大的数。

尽管上述约束条件中更改相互排斥的条件为普通的约束条件的过程中引进充分大的整实数，但是在之后的引用中未必需要引入充分大的正实数。举个简单的例子，如果两个约束条件相互排斥， 。

将上述条件改写为

但是当约束条件中的互相排斥的约束条件为m时：



再次对于上述约束条件引入0 – 1 变量，为了能够保证上述约束条件起作用，引入0 – 1 变量的数量是m个。



除此之外，再次引入一个充分大的实常数M，那么下一组约束条件为：

 （1.1）

 （1.2）

上述约束条件中，m个中只有一个能够取到1，那么就是说只有这个，也就是说只有的约束条件能够起作用，而其他的式子都是为这一关键条件做嫁衣的，没有起到关键的作用，但是其作用依旧不可以忽略。

### 1.2.2 关于固定费用的问题的解决及探究

将线性规划应用在一般的数学问题中，对于求解的结果而言有时是求成本最小，有时是利润最大，那么为了能够使用线性规划来对该问题进行统一的描述，改变传统的解决方法而使用混合整数规划来解决问题。

【例1.3】 南洋理工航空航运公司生产一种可以进行自行清洁地面的机器人，对于不同生产方式的选择，对于不同的生产方式存在一部分问题，如选定的生产方式投资较高，且产量大，会导致分配到每件产品的变动成本就会降低；换句话说，加入选定的生产方式投资较低，分配到每件产品的变动成本将会增加。对于这样的问题，必须全面考虑。以下是三种可供选择的方式：

分别代表了三种方式：

|  |  |
| --- | --- |
| 变量 | 含义 |
|  | 表示采用的第种方式时的产量 |
|  | 表示采用的第种方式时每件产品的变动成本 |
|  | 表示采用的第种方式时的固定成本 |

暂不考虑其余约束条件而突出成本特点，那么采用各种生产方式的总成本为：



当构成目标函数，为了方便对相应问题进行探究，引入0 – 1 变量，

 （1.3）

那么目标函数简化为：



上述约束条件改写为：

 （1.4）

上述公式中，指的是充分小的正常数，M指的是充分大的正常数。

挡在一定条件下，（1.3）和（1.4）是可以相互替代的。

### 1.2.3 指派问题的数学模型建立及求解应用问题

【例1.4】江苏黑牡丹集团承包江苏磊达集团砂石运输工程，拟分配n人去做n项工作，每个人做且仅做一项工作，如果分配第i个人去做第j项工作，那么就需要花费 单位时间，那么应该如何分配工作才能够使工人花费的总时间最少？

对于上述问题，引入0 – 1 变量，如下所示：



对于上述指派问题的数学模型为：

，



上述问题中的指派问题的可行解可以使用一个矩阵来表示，其中的每一行、每一列有且只有一个元素为1，其余元素为0.

除此之外，指派问题的求解可以使用匈牙利算法，拍卖算法来解决。

## 整数线性规划的计算机求解问题探究

整数线性规划问题除了使用Lingo等专业软件使用，也可以MATLAB软件在的intlinprog函数来进行求解。应用Matlab 软件来对数学规划问题进行求解的缺陷是必须将所有的决策变量化成一维决策变量，而且当决策变量的维数过多时，数学规划问题还需要做出一个变量替换，在编写约束条件中存在很多困难，相比较而言使用Lingo软件来编写较为轻松。

一般来说，使用Matlab 软件来对混合整数线性规划进行求解的命令为：

[x,fval]=intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

对应的数学模型如下所示：





在上述公式中：为列向量，指的是价值向量，指的是资源向量；指的是矩阵。

### 1.3.1 计算机求解指派问题

【例1.5】求解如下所示指派问题，已知指派矩阵为：



解：在求解过程中应当需要将二维决策变量更改为一维决策变量编写的Matlab 代码如下所示：

***clc,clear***

***c=[4 5 5 4 7;7 6 4 2 8;8 9 8 4 9;9 4 2 6 6;7 5 3 9 4];***

***c=c(:);a=zeros(10,25);intcon=1:2;***

***for i = 1:5***

***a(i,(i-1)\*5+1:5\*i)=1;***

***a(5+i,i:5:25)=1***

***end***

***b=ones(10,1);lb=zeros(25,1);ub=ones(25,1);***

***x=intlinprog(c,intcon,[],[],a,b,lb,ub);***

***x=reshape(x,[5,5])***

***x =***

***1 0 0 0 0***

***0 0 1 0 0***

***0 0 0 1 0***

***0 1 0 0 0***

***0 0 0 0 1***

求解得最优指派方案为 ，最优值为32.

### 1.3.2 计算机求解混合整数规划问题

【例1.6】求解如下的混合整数规划问题：



解：求解的Matlab 的程序如下：

***clc,clear***

***f=[-4;-2;-3];intcon=3;***

***a=ones(1,3);b=12;***

***aeq=[2 8 3];beq=12;***

***lb=zeros(3,1);ub=[inf;inf;1];***

***x=intlinprog(f,intcon,a,b,aeq,beq,lb,ub)***

求得代码如下所示：

***x =***

***6.0000***

***0***

***0***

求解所得；目标函数的最优值为z=-24.

## 1.4 校址选择利民工程的数学应用及其利益探究

### 1.4.1 问题提出

江苏省常州市新北区新桥镇辽河路666号常州工学院北部新城校区自从建立以来准备在新北区建立其附属小学，为了方便小学生上学及交通运输问题，拟在8个居民小区A1，A2，~~~A8增设若干小学，经过论证之后已知备选校址为B1，B2，~~~B6，使其能够覆盖的居民小区如下表1.1所示。

表1.1 校址选择数据

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 备选校址 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
| 覆盖玩的玩居民小区 | A1,A5, | A1,A2, | A1,A3, | A2,A4, | A3, | A4,A6, |
| A7 | A5,A8 | A5 | A8 | A6 | A8 |

试建立一个数学模型，能够确定出最小个数的建校地址使其能够覆盖所有的居民区。

### 1.4.2 符号规定和基本假设

#### 1.符号规定

1.  表示在备选校址建立学校
2.  表示不在备选校址建立学校

#### 2.基本假设

1. 常州工学院新校区建立附属小学不会影响当地居民日常生活；
2. 常州工学院新校区建立附属小学不会影响当地其余小学的生活；

### 1.4.3 模型的分析和建立

首先对于该问题引入0 – 1 模型，如下所示：



因为小区A1可以被选为校址B1 B2 B3处所建立的学校覆盖，所以约束条件为：



同理可得其余所有学校的选取地址的约束条件，如下所示：



上述为所有的0 – 1 整数规划模型及相应的约束条件。

### 1.4.4 模型的求解

根据上述模型及相应约束条件，运用Matlab 转换上述条件为相应代码：

***f=ones(6,1);***

***A=[-1 -1 -1 0 0 0;0 -1 0 -1 0 0; 0 0 -1 0 -1 0; 0 0 0 -1 0 -1; 0 0 0 0 -1 -1; -1 0 0 0 0 0; 0 -1 0 -1 0 -1];***

***b=-1\*ones(7,1);***

***[x,y]=intlinprog(f,1:6,A,b);***

***B=cell(2,6);***

***B(1,:)={'B1','B2','B3','B4','B5','B6'};***

***B(2,:)={x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6)};***

***B***

运行之后的结果如下所示：

***B =***

***'B1' 'B2' 'B3' 'B4' 'B5' 'B6'***

***[ 1] [ 0] [ 0] [ 1] [ 1] [ 0]***

### 1.4.5 结果分析

建立学校与不建立学校的0 – 1分布如上述代码所示，不难发现，在居民小区B1B4B5这三个居民小区建立是通过算法合理运算出来的结果。建立学校为了方便当地居民子女上学，就近入学，目前伴随国家教育事业的蒸蒸日上，小学教育也越来越受到社会的关注。常州工学院教育与人文学院小学教育专业的学生的实习基地正好也得到了落实，可谓是一举两得。

## 1.5 企业设备分配利用及利润问题

### 1.5.1 问题提出

江苏省常州市黑牡丹集团目前在纺织产业进行产业扩展，新北区分公司日前购置了新型设备6台，想要分配给其下属的4个企业，已知各个企业获得这种设备之后年创利润表如下表1.2所示（单位：千万元）。那么应当如何分配这一部分设备能够使江苏省常州市黑牡丹集团年创总利润达到最大值，以及最大值的数字是多少？

1.2 各个企业获得设备的年创利润数（单位：千万元）

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 企业 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
| 设备 |
| 1 | 4 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 6 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 7 | 6 | 7 | 6 |
| 4 | 7 | 8 | 8 | 6 |
| 5 | 7 | 9 | 8 | 6 |
| 6 | 7 | 10 | 8 | 6 |

### 1.5.2 符号规定和基本假设

#### 1.符号规定

1.  ：分别表示甲、乙、丙、丁四个企业；
2.  ：表示第分配给第个企业创造的利润；
3.  表示第 台设备分配给第个企业；
4.  表示第台设备不分配给第个企业；

#### 2.基本假设

1. 假设四家企业在生产过程不会相互干扰，竞争；
2. 假设在设备分配到四家企业之前，生产过程正常进行；
3. 假设企业在新设备加持之前的年创利润一直稳定。

### 1.5.3 模型的分析和建立

在完备上述符号假设之后，引入0 - 1 整数线性规划，如下所示：



根据上述的约束条件，建立目标函数以及数学模型如下所示：

，



### 1.5.4 模型的求解

根据上述模型及相应约束条件，运用Matlab 转换上述条件为相应代码：

***c=[4 6 7 7 7 7 2 4 6 8 9 10 3 5 7 8 8 8 4 5 6 6 6 6];***

***c=-c';***

***A=zeros(4,24);***

***for i=1:4***

***A(i,6\*i-5:6\*i)=1;***

***end***

***A=-A;***

***b=ones(4,1);***

***b=-b;***

***Aeq=zeros(6,24);***

***for j=1:6***

***Aeq(j,j:6:18+j)=1;***

***end***

***beq=ones(6,1);***

***[x,y]=intlinprog(c,1:24,A,b,Aeq,beq,zeros(24,1),[]);***

***X=reshape(x,6,4)***

***y=-y***

运行完程序之后，显示结果为：

***X =***

***0 0 0 1***

***1 0 0 0***

***0 0 1 0***

***0 1 0 0***

***0 1 0 0***

***0 1 0 0***

***y =***

***44***

### 1.5.5 结果分析

1.3 设备分配表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
| 设备一 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 设备二 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 设备三 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 设备四 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 设备五 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 设备六 | 0 | 1 | 0 | 0 |

在上述运行结果之中，运行结果是一个矩阵，而其中“0”代表了不分配，“1”代表分配。分配完成之后，黑牡丹集团预期年创总收益为44千万元以及4.4亿元。上述表1.3已经很清楚的展示了如何分配给各个下属企业设备的数量，最后本次章节求出来的总的年创利润为4.4亿。

上述代码还存在一定的问题。比如说，将设备一分配给丁的年创利润是4.4亿元，但是将设备一分配给甲的年利润依旧是4.4亿元。也就是说目前所年创利润为4.4亿元，但是无论如何，只要能够获得最高利润，分配机器可以说是在几种方法之间斡旋。

## 1.6 小结

本次章节介绍了整数规划以及其中的0-1型整数规划，并对其应用方面的问题作出了详细的探究，一般应用该规划模型主要是在工业制造以及交通运输行业。企业为了年创收利润而对线性规划模型做出了一定的要求，而线性规划模型在建立的过程中需要考虑的就是约束条件是否相互排斥，相互包容，在最合理的情况下确立约束条件。当完成了上述步骤之后在来对Matlab 代码进行加工，本次实验报告由于时间问题，代码编写过程中经过修改之后存在部分问题。指派问题的数学建模问题及其探究在本次实验报告中最为困难也最为重要。本次1.4、1.5两个章节所涉及的习题都在极大程度上说明了该问题涉及的全面性、普及性、重要性，在之后的学习过程中还需要将其拿出来做单独研究。