1. 问题重述

1.1问题背景

近年来，射电天文学作为探索宇宙奥秘、开展深空观测的重要手段，得到了长足发展。我国自主建设的500米口径球面射电望远镜（Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, 简称FAST），更因其超大口径与极高灵敏度，被誉为“中国天眼”，在国际天文领域具有里程碑意义。FAST不仅刷新了世界单口径射电望远镜的纪录，更为中国科学家在天文学、物理学等前沿领域的创新研究提供了坚实的基础设施和数据基础。

FAST的核心技术体现在其独特的主动反射面系统。传统固定射电望远镜受限于结构尺寸和观测能力难以兼得，而FAST通过主动调节反射面板，实现了对不同天区的高灵敏跟踪观测。其主动反射面由大量反射面板、主索网、下拉索及促动器等关键部件构成。其中，主索网采用短程线三角网格方式编织而成，共有2226个主索节点和6525根主索，负责支撑4300块高精度反射面板。这一设计使得每块反射面板能够独立实现位置调节，有效地保证了大口径和高变形精度的兼容。

反射面的调节过程是FAST观测能力的关键所在。射电望远镜的理想反射面为旋转抛物面，能将平行入射的电磁波聚焦到焦点处，实现最大信号接收。当不观测目标时，所有反射面板保持在球面基准态；而激活观测时，下拉索与促动器协作，通过沿球心径向的精密伸缩，使部分面板离开球面，调整为直径300米、以某一空间方向为对称轴的旋转抛物面。调节范围与精度都受到主索节点的离散性、促动器伸缩极限（±0.6米）等多重物理约束影响。

在实际天文观测中，待观测天体的位置分布于全天球各处，反射面需要根据天体的空间方位灵活调节。馈源舱作为接收系统，可在与基准球面同心的焦面上移动，并通过配合反射面形状调节，将天体来波高效聚焦在馈源舱内1米直径的有效接收区域。高质量的面板调节不仅能提升观测灵敏度，还直接关系到FAST搜寻脉冲星、监听快速射电暴及射电信号等多项科学任务的成功实现。

然而，主动反射面的精确调节，实际受到结构离散化、促动器伸缩范围有限、面板之间间隙等多种因素制约，如何在现有节点布置及控制策略下，使调整后的反射面形状尽可能逼近理想抛物面，并最大化有效信号的接收比例，已成为工程界与数学建模领域亟需解决的关键问题。对此，建立合理的数学模型，量化节点调节要求与误差，优化促动器的群体协同调节策略，对保障FAST的科学性能和后续工程设计具有重大实际意义。

1.2问题重述

**问题一改写**

当目标天体S位于基准球面的正上方（即方位角α = 0°，仰角β = 90°）时，请在反射面板可调节范围和结构因素的基础上，设计出最优的抛物面结构，以此作为实际调整时的理想目标反射面。

**问题二改写**

若观测天体S的空间方位已知（设为α = 36.795°，β = 78.169°），请据此确定相应的理想抛物面参数；同时，结合反射面板的调节特性，建立运动与调节模型，计算并输出实现该理想形状时各主索节点的位置及编号，以及匹配每个促动器所需的径向调整长度等关键数据（输出格式按照指定要求整理）。

**问题三改写**

在第二问已有的调节基础上，评估反射面调整后馈源舱的接收效率。具体来说，需计算馈源舱有效接收区所获取的天体信号强度与整个300米口径反射面的反射信号总量的比值，并与未调节时（基准球面状态下）所得的同类指标加以对比，分析调整方案对电磁波聚焦接收效果的提升情况。

1.3研究现状

“中国天眼”（FAST）作为全球最大的单口径射电望远镜，其主动反射面的形状调节技术是天文观测效率的核心。近年来，围绕其反射面调节的建模与优化研究主要集中在抛物面几何建模、促动器调控策略及接收效率分析等方面，旨在通过数学建模与算法设计提升反射面调节的精度与效率，相关进展可从以下方面概述：

**1. 抛物面几何建模与优化**

基准球面到工作抛物面的转换是FAST运行的关键。现有研究通过坐标系变换与几何分析构建理想抛物面方程。例如，针对天体方位角（α, β）的影响，研究者采用三维旋转变换将观测方向对齐对称轴，简化抛物面方程求解[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)[3](https://juejin.cn/post/7132274661294866446)。问题一的特殊情形（α=0°, β=90°）中，通过体积积分量化抛物面与基准球面间的间隙体积，结合促动器伸缩范围约束，建立以最小间隙为目标的最优化模型，确定抛物面参数（如焦距p=280.38米）[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)。对于非垂直观测情形（如问题二），需引入空间旋转矩阵调整坐标系，结合焦点位置推导顶点坐标，并通过多目标优化平衡抛物面拟合精度与促动器调节复杂度[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)[7](https://qikan.cqvip.com/Qikan/Article/Detail?id=7107213216)。

**2. 促动器调节策略与优化算法**

反射面调节的核心在于通过促动器控制主索节点位移。由于促动器伸缩量受限（±0.6米），需采用优化算法求解节点位移的最优解。粒子群优化（PSO）算法因其并行搜索能力被广泛应用，以节点到理想抛物面的距离最小为目标，结合权重法将多目标问题转化为单目标问题[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)[3](https://juejin.cn/post/7132274661294866446)。此外，主索节点的动态调节需满足相邻节点距离变化不超过0.07%的约束，涉及索网结构力学分析，部分研究引入有限元方法评估调节过程中的应力分布，确保结构稳定性[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)[9](https://zhuanlan.zhihu.com/p/408904263)。大规模节点（2226个）的高效计算则依赖并行化算法或降维处理。

**3. 接收比计算与性能评估**

接收比反映了反射信号的有效利用率。研究多基于几何光学原理，将馈源舱有效区域（直径1米圆盘）的接收信号量化为反射面投影面积与口径面积的比值。例如，基准球面的接收比仅为1.11×10⁻⁵，而优化后的抛物面可达1.43%，显著提升信号捕获能力[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)。计算中需考虑电磁波反射路径的几何关系，结合蒙特卡罗方法模拟随机反射以提高精度[3](https://juejin.cn/post/7132274661294866446)[7](https://qikan.cqvip.com/Qikan/Article/Detail?id=7107213216)。灵敏度分析表明，馈源舱直径对接收比影响显著，而促动器伸缩范围具有较强鲁棒性，提示工程设计中需权衡参数优化方向[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)。

**4. 误差分析与模型验证**

现有研究重视模型假设的合理性验证，如忽略面板孔隙影响（孔径<5mm）、电磁波直线传播假设等[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)[4](https://pdf-1307664364.cos.ap-chengdu.myqcloud.com/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BB%BA%E6%A8%A1/%E5%85%A8%E5%9B%BD%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E7%94%9F%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BB%BA%E6%A8%A1%E7%AB%9E%E8%B5%9B%28CUMCM%29%E5%8E%86%E5%B9%B4%E8%AF%95%E9%A2%98/%E8%AF%95%E9%A2%98PDF/CUMCM-2021-A.pdf)。误差分析显示，节点位移模型的最大误差通常低于0.1米，且优化算法收敛性良好，证明模型可靠性[1](https://blog.csdn.net/weixin_43292788/article/details/131088944)。此外，反射面板的平面假设与实际曲率差异可能引入局部误差，需通过动态修正或局部微调策略进一步优化[3](https://juejin.cn/post/7132274661294866446)[7](https://qikan.cqvip.com/Qikan/Article/Detail?id=7107213216)。

**5. 工程应用与未来方向**

FAST的主动反射面调节技术已成功应用于实际观测，但其复杂索网结构和大规模节点的实时控制仍面临挑战。未来研究或需结合深度学习预测节点位移模式，或开发更高效的分布式优化算法以应对计算复杂度[3](https://juejin.cn/post/7132274661294866446)[9](https://zhuanlan.zhihu.com/p/408904263)。此外，多目标协同优化（如调节速度、能耗与精度）及极端天气下的动态稳定性分析亦是重要方向。