AHU-Mathematical-Statistics

Notes I made during undergraduate

Categories : Mathematics

Tags: Probability and Statistics

一开始复习概率论：γ分布 β分布
考 不考

绪论 概率置

Mar 5, 2024
Apr 11, 2024 Review
pdf 1 最大似然估计
矩估计
无偏性

3. 参数估计的方法（点估计） 估计的结果是什么？是点：点估计
区间：区间估计

估计问题的提出： X 随机变量（总体） $F(x,\vec{\theta})$ 分布函数 其中 $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_m)$ 是未知参数向量

$\vec{\theta}$ 的所有可能取值构成集合 $\Theta \subset R^m$ 参数空间 $g(\vec{\theta})$ 是 $\vec{\theta}$ 的实值函数 $\{0\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 1\}$

从总体中抽取样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

其观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 如何由观测值估计出 $g(\theta)$ 的值？（估计问题的提法）

$\vec{\theta}$ 的估计值记为 $\hat{\vec{\theta}}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$

点估计（方法）
- 最大似然估计 Maximum Likelihood Estimate (MLE) $\hat{\theta}_{MLE}$
- 矩估计 Moment Estimate

一、最大似然估计（概率最大） 计算题

想法：概率最大原则 A B C $F(x;\theta)$ $\hat{\theta}$

1. 离散型总体

X 离散型总体 $f(x,\vec{\theta})=P(X=x)$ 概率分布函数（分布列） 设估计参数 $\vec{\theta}$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本，其观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

则认为 $P((X_1,X_2,\cdots,X_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 最大

$p(x_1)\,p(x_2)\cdots p(x_n)$ 这个点

$$P((X_1,X_2,\cdots,X_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)) = P(X_1=x_1, X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$$\prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k)$$

独立性 $= \prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k)$

同分布 $= \prod_{k=1}^{n} P(X=x_k)$

代表性 $= \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\vec{\theta})$ 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布列或似然函数

把 θ 看成参 把 x_i 看成参 则 L 是 θ 的函数 即样本的似然函数

记 $L(\vec{\theta})=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\vec{\theta})=\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\vec{\theta})$ 称 $L(\vec{\theta})$ 为似然函数

若 $\hat{\vec{\theta}}=\vec{\varphi}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\vec{\theta}})=\sup_{\vec{\theta}\in\Theta} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\vec{\theta}).$$

$\hat{\vec{\theta}}$ 各分量 → $\vec{\theta}$ 相应分量

~~即是 θ 的 MLE~~.

则称 $\hat{\vec{\theta}}$ 为 $\vec{\theta}$ 的最大似然估计

[例] 假设盒中白、黑共3只球，有放回地取三次，结果为（黑，白，黑），求盒中黑球占比 θ 的 MLE.

参数空间 (1,0,1)

解. $\hat{\theta}\in\Theta$ $\theta\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}\triangleq\Theta$ 记第i次取出的结果为 $X_i=\begin{cases}1 & 取出黑球\\0 & 取出白球\end{cases}$ $i=1,2,3$

则观测结果为 (1,0,1)

$P(X_1,X_2,X_3)=(1,0,1)$ (→此概率要max) $=P(X_1=1)P(X_2=0)P(X_3=1)$

$=\theta^2(1-\theta)$ $\theta^2(1-\theta)$

X_i	1	0
P	θ	$1-\theta$

$p=\theta^2(1-\theta)$

即: $L(\theta)=\theta^2(1-\theta)$

可求导,若复杂函数,则先求对数 $L(\theta)$ max点 → $\ln L(\theta)$ max点).

$\ln L(\theta)=2\ln\theta+\ln(1-\theta)$

令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{2}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$ $\Rightarrow\theta=\frac{2}{3}$ 且易见. $\theta=\frac{2}{3}$为$L(\theta)$的最大值点.
(看二阶导)

以而 $\hat{\theta}_{MLE}=\frac{2}{3}$

$\ln(\theta)=2\ln\theta+\ln(1-\theta)$
$\frac{d}{d\theta}\ln(\theta)=\frac{2}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$
$2-2\theta=\theta$
$3\theta=2$
$\theta=\frac{2}{3}$

$L_n(\theta)$最大值点. $L(\theta)$最大值点

2. 连续型总体

分布(离散型)

X: 连续型总体 $f(x;\vec{\theta})$为概率密度函数 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为样本
(连续型). $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本观测值

$P((X_1,X_2,\cdots,X_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n))=0$. → (那就考虑观测值附近一邻域)

$\prod_{k=1}^{n}P(X_i=x_i)$. 单点. 考虑 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 在邻域 $\prod_{k=1}^{n}(x_k-\delta,x_k+\delta)$ 中的概率
超立方体

$P((X_1,X_2,\cdots,X_n)\in\prod_{k=1}^{n}(x_k-\delta,x_k+\delta))$ ← 积分
样本. 联合密度函数

$=\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}\cdots\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}f_{联}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$
简单随机样本:独立性,代表性.
边际密度函数的积.

$=\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}\cdots\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

$=\prod_{k=1}^{n}\boxed{\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}f(x_k;\theta)\,dx_k}$ 2δ.

联合分布函数 / 相互独立密度函数积

故 $=\prod_{k=1}^{n}P(X_k\in(x_k-\delta,x_k+\delta))$. 即边际概率的乘积.

$=\prod_{k=1}^{n}\boxed{\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}f(x;\theta)\,dx}$

δ較小时 $\approx\prod_{k=1}^{n}2\delta f(x_k;\theta)$ $\overset{取\ \delta=\frac{1}{2}}{=\!=}$ $\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)$ 记 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)$ 称$L(\theta)$为似然函数

样本的联合密度函数 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$
形式上与离散型相同

若 $\hat{\theta}\in\Theta$ s.t $L(\hat{\theta})=\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)$ 则称$\hat{\theta}$为θ的MLE

[例] 两点分布 伯努利分布 $B(1,p)$

X	1	0
P	p	1-p

求 $\hat{p}_{MLE}$.

$\prod_{k=1}^{n}f(x_k;p)$ $=p^x(1-p)^{1-x}$

解: 设样本为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 似然函数 $L(p)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;p)$.
~~$p^k(1-p)^{1-k}$~~ ✓

$f(x,p)=P(X=x)=\begin{cases}p & x=1\\1-p & x=0\end{cases}=p^x(1-p)^{1-x}$ 写成这种形式
$x\in\{0,1\}$且$p\in[0,1]$为未知参数 设样本观测值为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
$x_i\in\{0,1\}$ $\forall i=1,2,\cdots,n$

$L(p)=p(1-p)$
$=-p^2+p$
$-2p+1=0$
$p=\frac{1}{2}$ max
~~$\hat{p}_{MLE}=\frac{1}{2}$~~
未考虑出现次数!

$$\underline{L(p)}=\prod_{k=1}^{n} p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}=p^{\sum_{k=1}^{n}x_k}(1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n}x_k} \qquad \underline{p\in(0,1)}.$$

$$\ln L(p)=\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\ln p+\left(n-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\ln(1-p).$$

$$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}x_k-\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=0$$

$$\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$$

$$\frac{1}{p}-1=\cdots \qquad \frac{1}{p}=\frac{n-\cancel{x}+\cancel{x}}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$$

$$p=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=\bar{x}$$

$\Rightarrow p=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}$ 易见 $L(p)$ 在 $\bar{x}$ 取最大值. 从而 $\hat{p}_{MLE}=\bar{X}$ 样本均值

(X 大写:随机变量. $\hat{p}_{MLE}=\bar{X}$ 具体值则小写 x)

[例2] 指数分布$^{E(\lambda)}$ 设总体 $X\sim E(\lambda)$ 求 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 生活中~寿命 元件 etc. 不可能负数.

先写似然函数. $L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\underline{f(x_k;\lambda)}$ 其实(?)是密度函数.

无记忆性:
一个东西买回来用一段时间后的寿命和买回来时候的寿命一样长

解. $f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$ $\qquad f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$f\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\\ 0\end{cases}$

$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;x)$

$=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{1}^{n}x} & x_k>0\\ 0\end{cases}$

$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{1}^{n}x$

$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{1}^{n}x=0$

$\lambda=\frac{n}{\sum_{1}^{n}x}=\frac{1}{\bar{x}}$

$\Rightarrow EX=\bar{x}=\frac{1}{\lambda}$

似然函数 $L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k} & x_k>0,\ \forall k=1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

当 ~~$x_k>0$~~ $L(\lambda)>0$ 时 $\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k\Rightarrow\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n}x_k=0.$

$\Rightarrow\lambda=\cancel{\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}}\ \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}x_k}=\frac{1}{\bar{x}}$

$\Rightarrow\hat{\lambda}_{MLE}=\frac{1}{\bar{x}}$ ~~$\frac{1}{\lambda}$~~

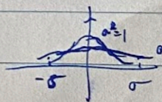
指. $\underline{EX=\frac{1}{\lambda}}\Rightarrow\underline{\lambda=\frac{1}{EX}}$

$\Rightarrow\boxed{EX=p}$ 最大似然

e^x

$\lambda e^{-\lambda x}$

[例3] 正态分布 $\left(f(x,\mu,\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{1}{2\delta}(x-\mu)^2}\right)$ 参数



面积恒定
拉扯固定

$N(\mu,\delta)$ 求 $\hat{\mu}_{MLE}$ $\hat{\delta}_{MLE}$ ($\delta=\sigma^2$ 为方差)

$$f(x,\mu,\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta}}$$

$EX=\mu.$
$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\delta$

$$L(\mu,\delta)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\mu;\delta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\delta^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\delta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}$$

$$\ln L(\mu,\delta)=n\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\delta-\frac{1}{2\delta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\delta)=0\\ \frac{\partial}{\partial\delta}\ln L(\mu,\delta)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}\\ \delta=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=S_n^2\end{cases}$ 未修正的样本方差. 省去计算.

从而 $\hat{\mu}_{MLE}=\bar{x}$ $\hat{\delta}_{MLE}=\hat{\sigma}^2_{MLE}=\underline{S_n^2}$

补充计算 $\frac{\partial}{\partial\mu}\cdots=0$: $0\ \ 0-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots}{2\delta}$ $\qquad x_1^2-2x_1\mu+\mu^2$ $\qquad \frac{\cancel{-2x_1+2\mu}\ -2x_1+2\mu-2x_2+2\mu+\cdots}{2\delta}$

$=-\frac{n\cdot 2\mu-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{2\delta}=0$ $\qquad \mu=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=\bar{x}$ □

$\frac{\partial}{\partial\delta}\cdots=0$ $\qquad 0-\frac{n}{2}\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}\delta^{-2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=0.$

$$\frac{-n\cdot\delta+\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{2\delta^2}=0\Rightarrow\delta=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}=S_n^2.\ □$$

牛逼啊22级的. 最后结果! $\begin{cases}\hat{\mu}_{MLE}=\bar{x}\\ \hat{\delta}_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2.\end{cases}$ 假如 要把 μ 代进去 ($\mu=\bar{x}$) 才得具体值. (即最大值点)

Mar 8, 2024

$L(x_1, x_2, \dots x_n; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \vec{\theta})$ $\begin{cases} \text{离散型总体：概率分布　分布列　概率函数} \\ \text{连续型总体：概率密度函数} \end{cases}$

联合函数　似然函数.

看成x的函数　……θ的函数.

$\vec{\theta} \in \Theta$　若∃$\hat{\vec{\theta}} = \vec{\rho}(x_1, x_2, \cdots x_n)$ s.t. $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\vec{\theta}}) = \sup_{\vec{\theta} \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta})$

则称$\hat{\vec{\theta}}$为$\vec{\theta}$的MLE

书上泊松分布推一下反面

[例4] $X \sim U(a,b)$ 均匀分布　求 $\hat{a}_{MLE}$ $\hat{b}_{MLE}$

治学严谨(新老师)

解. $f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其他. \end{cases}$

f(1,3)

1　2　3

$\frac{1}{2}$×宽度　占总的比例　=1.

0　x_{min}　x_{max}　b

$x_{(1)}$　$x_{(n)}$

$b = \max X = x_{(n)}$

$a = \min X = x_{(1)}$

$\Rightarrow L(a,b) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; a, b) = \begin{cases} \left(\frac{1}{b-a}\right)^n & a < x_k < b \quad \forall k \\ 0 & 其他. \end{cases}$　$\boxed{a < \min x_k \quad x \quad \max x_k < b}$　全体x含x_{min} x_{max}

($(x_1, x_2, \dots, x_n)$取值肯定在a~b　故下面不存在　但写成严谨式要写"其他"~0).

直接研究.

$\frac{1}{2-1}$　$\frac{1}{3-1}$：b↑值↓　$\left(\frac{1}{b-a}\right)^n$ 关于b↓　关于a↑

$\frac{1}{3-1}$　$\frac{1}{3-2}$：a↑值↑　大 小 L(a,b).

故值L(a,b) max

有 $b_{min} = X_{max} = x_{(n)}$

$a_{max} = X_{min} = x_{(1)}$

2. $\hat{b}_{MLE} = X_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} x_i$　$\hat{a}_{MLE} = X_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} x_i$

由x_i取值from $x_1 x_2 \cdots x_n$得出

$\boxed{\text{故 b取最小　a取最大　使 } L(a,b) \text{ 最大.}}$

$b = x_{(n)}$

$a = x_{(1)}$

同时保证 $a < x < b$ 范围.

又 $x < b$

故 $b_{min} = \max x_i = x_{(n)}$

则 $a = \min x_i = x_{(1)}$

✓ 新例题 [例5] 设$x_1, \dots, x_n$是来自两参数指数分布的样本. x:指全体x

$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{1}{\theta_2}(x-\theta_1)} & x \ge \theta_1 \\ 0 & x < \theta_1 \end{cases}$　$\theta_1 < x$　其中：$\theta_1 \in R$　$\theta_2 \in (0, +\infty)$　求 $\hat{\theta}_{1MLE}$　$\hat{\theta}_{2MLE}$

$x_k \ge \theta_1 \quad \forall k$

解：$L(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2^n} e^{-\frac{1}{\theta_2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)} \\ 0 & 其他. \end{cases}$

$e^{-1} > e^{-2}$

$\frac{1}{e}$　$\frac{1}{e^2}$

$L(\theta_1, \theta_2)$↑

θ_1越大 L越大

当 $x_k \ge 0 \quad \forall 1, 2, \dots, n$时.

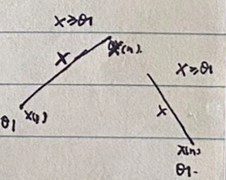
$(x_1 - \theta_1) + (x_2 - \theta_1) \dots$

$-n\theta_1$

$\ln L(\theta_1, \theta_2) = -n \ln \theta_2 - \frac{1}{\theta_2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)$

$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = \frac{n}{\theta_2} > 0 \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{n\theta_1}{\theta_2^2} \end{cases}$

θ_1↗ 增或减来判断$\hat{\theta}_{1MLE}$取值 → 故 $\hat{\theta}_{1MLE} = X_{(1)}$



$x \ge \theta_1$　$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}$↗

$\boxed{\begin{matrix} \theta_1 \quad x_{min} \quad x_{max} \\ \hat{\theta}_{1MLE} = X_{(1)} \end{matrix}}$

令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{2MLE} = \bar{X} - X_{(1)}$

$\frac{-\theta_2 n + \sum_{k=1}^{n} x_k - n\theta_1}{\theta_2^2} = 0.$

$\theta_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} - \theta_1 = \bar{X} - X_{(1)}$

[例6] 设总体 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$ $0 \le \theta \le \frac{1}{3}$ 求 $\hat{\theta}_{MLE}$

$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}$

解法一：$L(\theta) = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}_{\text{未知，得构造}}$ $f(x;\theta) = \underline{(2\theta)}^{r_1(x)} \theta^{r_2(x)} (1-3\theta)^{r_3(x)}$

n值 (n-1) 次多项式 可拿过之

$r_1(x) = \begin{cases} 1 & x=-1 \\ 0 & x=0,2 \end{cases}$ 过点 $(-1,1)$ $(0,0)$ $(2,0)$ 找二次函数.

$r_2(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & \end{cases}$ 则 $r_1(x)$ $r_2(x)$ $r_3(x)$ 都可以求出来，则 $f(x;\theta)$ 可求. …… 最后 $\hat{\theta}_{MLE} =$

$r_3(x) = \begin{cases} 1 & x=2 \\ 0 & \end{cases}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{18n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$

解法二. 把 $f(x;\theta)$ 代入 $L(\theta)$

$x=-1$ 2θ

$r_1(x_k)$: $1,0,0.$

$\Rightarrow 2\theta.$

求和则. $-1 \sim 1$, $-1 \sim 1$, ⋮, -1 } n_1个

$L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = (2\theta)^{\sum_{k=1}^{n} r_1(x_k)} \cdot \theta^{\sum_{k=1}^{n} r_2(x_k)} \cdot (1-3\theta)^{\sum_{k=1}^{n} r_3(x_k)}$

设样本观测值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中有 $\underline{n_1 \text{个} -1}$ $n_2 \text{个} 0$ $n_3 \text{个} 2$

则 $n_1 + n_2 + n_3 = n$

$L(\theta) = (2\theta)^{n_1} \cdot \theta^{n_2} (1-3\theta)^{n_3}$

$\ln(2\cdot\theta) = \ln 2 + \ln\theta$

$\Rightarrow \ln L(\theta) = \underline{n_1 \ln 2\theta} + n_2 \ln\theta + n_3 \ln(1-3\theta)$

$\frac{n_1+n_2}{\theta} + \frac{-3n_3}{1-3\theta} = 0$

令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{n_1}{\theta} + \frac{n_2}{\theta} + \frac{-3 n_3}{1-3\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} = \frac{n_1+n_2}{3n}$

注: $n_1 \cdot \frac{1}{2\theta} \cdot 2 = \frac{n_1}{\theta}$ $(2\theta)' = 2$

$-3n_3\theta + (n_1+n_2)(1-3\theta) = 0$

$-3n_3\theta + (n_1+n_2) - 3(n_1+n_2)\theta = 0$

$\theta(-3n_3 - 3(n_1+n_2)) + (n_1+n_2) = 0$

$\theta = \frac{n_1+n_2}{3(n_1+n_2)+3n_3}$

$= \frac{n_1+n_2}{3(n-n_3)+3n_3}$

$= \frac{n_1+n_2}{3n}$

[検验一] $\sum_{k=1}^{n} x_k = -n_1 + 2n_3$

$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = (-1)^2 n_1 + 2^2 n_3 = n_1 + 4n_3.$

故 $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18n}(6n_3) = \frac{1}{3} - \frac{n_3}{3n} = \frac{n-n_3}{3n}$ $\frac{n-n_3}{3n}$

$= \frac{n_1+n_2}{3n}.$

作业: 1. 习题二 1, 2, 4

2. 设 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta \end{pmatrix}$ 其中 $0 < \theta < \frac{1}{2}$ 利用样本观测值 $(3,1,3,0,3,1,2,3)$

求 $\hat{\theta}_{MLE}$ 找知: $\overline{n_1\ n_2}$ n_3 n_4 的具体数目.

$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$?

二. 矩估计

计算题

想法: 用样本矩代替总体矩

原点矩

中心矩

定义: 设总体 X 的 m 阶原点矩存在 $V_m = EX^m$ 存在. → 则所有低阶矩存在

$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Theta$ 为未知参数, 且可以用总体矩表示.

$\begin{cases} \theta_1 = f_1(v_1, v_2, \dots, v_m) \\ \vdots \\ \theta_m = f_m(v_1, v_2, \dots, v_m) \end{cases}$

$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 样本

$\downarrow$

$V_k=EX^k$ 总体

回到 x_i 的表示

设样本为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

原点 距离

中心：均值

1. 样本 k阶原点矩为 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 则 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 的矩估计为：

矩是 A_1：一阶 $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

A_2、二阶 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ $(X_i-0)^2$ 可写出 $\Rightarrow$ 方差 DX 而不是 DX. 根据 $DX=EX^2-(EX)^2$

$$\begin{cases}\hat{\theta}_{1,M}=f_1(A_1,A_2,\cdots,A_m)\\ \vdots \\ \hat{\theta}_{m,M}=f_m(A_1,A_2,\cdots,A_m)\end{cases}$$

$f(A_1\cdots A_m)$：$A_1\sim A_m$ 的组合

注：①由科尔莫戈罗夫大数定律知 $P(\lim_{n\to+\infty}A_k=V_k)=1$

从而若 f_k 连续 则 $P(\lim_{n\to+\infty}\hat{\theta}_{k,M}=\theta_k)=1$ 以概率1收敛 样本矩几乎处处收敛到总体矩

科尔莫戈罗夫 设 $x_1,x_2\cdots$ 独立同分布. 则 $P(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=a)=1 \iff EX_i=a \quad \forall i=1,2,\cdots$

② 除了原点矩，也可以用中心矩 一阶中心矩：0 =阶中心矩 $E(X-EX)^2$ 方差 DX

③ 矩估计量不唯一，可能不存在

④ 在求矩估计时，并不需要知道总体的分布类型！(只需要知道 m 个参数的表达式)

$g(\theta)=V$

$\theta=f(V)$

反求 θ 参数 样本给出

MLE：最大似然

[例1] 正态分布总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 求 $\hat{\mu}_M$，$\hat{\sigma}^2_M$ 矩估计

$V_1=EX=\mu$

$DX=EX^2-(EX)^2=\sigma^2$

$\Rightarrow\begin{cases}\mu=EX\\ \sigma^2=DX=EX^2-(EX)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\mu=EX\\ \sigma^2=DX\ or\ EX^2-(EX)^2\end{cases}$

$\Rightarrow \hat{\mu}_M=\bar{x}$

$\hat\mu=\frac{\sum x_i}{n}$

解：$\begin{cases}V_1=EX=\mu \\ \boxed{DX=EX^2-(EX)^2}=\sigma^2\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\mu=EX\\ \sigma^2=DX \text{ 或 } EX^2-(EX)^2\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}_M=\bar{x}\\ \hat{\sigma}^2_M=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}\end{cases}$

$\hat\sigma^2_M=\frac{\sum(x_i-\bar x)^2}{n}$ or $\frac{1}{n}\sum x_i^2-(\frac{1}{n}\sum x_i)^2$

二阶中心矩：方差 $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$x_i-\bar x$

总体矩

或 $\hat{\sigma}^2_M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2$

$DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-EX)^2p_i$

$=\sum_{1}^{n}x_i^2p_i-2EX\sum_{1}^{n}x_ip_i+(EX)^2\sum p_i$

$=EX^2-2EXEX+(EX)^2$

$=EX^2-(EX)^2$

如果用原点矩的话！二阶：$\boxed{V_2=EX^2}=(EX)^2+DX=\mu^2+\sigma^2$ 总体

$\Rightarrow\begin{cases}\mu=V_1\\ \sigma^2=V_2-\mu^2=V_2-V_1^2\end{cases}$

矩估计：样本替总体 $\begin{cases}\mu=V_1=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}\\ \sigma^2=V_2-V_1^2=\frac{1}{n}\sum x_i^2-(\frac{1}{n}\sum x_i)^2=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\end{cases}$

[例2] 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 正态 对给定 c 求 $P(X>C)$ 的矩估计

$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$1-P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{c-\mu}{\sigma})$

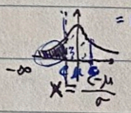
$=1-\Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$

先看概率 再回来理解这个统计

$f(x;\mu,\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta}}$

解. $P(X>c)=1-P(X\le C)$

往标准正态分布上凑 —— 标准化 $\boxed{X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)}$



$=1-P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{c-\mu}{\sigma})=1-\Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$ 其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$=1-\Phi(\frac{c-EX}{\sqrt{DX}})$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

从而 $P(X>c)$ 的矩估计为 $1-\Phi(\frac{c-\bar{x}}{\sqrt{S_n^2}})$ 整体表达 $1-\Phi(\frac{c-\bar x}{\sqrt{S_n^2}})$ 也可写 $S_n=\sqrt{\cdots}$

$DX=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ $\boxed{\text{未修正}}$ $\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

[例3] $X\sim$ 柯西分布 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $x\in R$ 密度函数

$EX=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{1+x^2}dx=+\infty$ 即 EX 不存在. 是否可积：看无穷远处的极限.

绝对值，若为 x，则 EX=0 发散 $x\cdot\frac{1}{1+x^2}$ 奇函数

所有矩都不存在 故不存在矩估计.

EX 是其期望值 =值×密度 概率 $\sum$ / $\int$

(矩. 原点矩：相对原点的矩 距离 | 中心矩：~均值~)

$EX=\int_R|x|f(x)dx=+\infty$. EX 不存在.

Mar 12, 2024

原来一阶矩 二阶 还是积分

看矩怎么由参数表示

补：指数分布 $X\sim E(\lambda)$ $f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$\boxed{EX=\frac{1}{\lambda}}\Rightarrow \lambda=\frac{1}{EX}$

$\boxed{DX=\frac{1}{\lambda^2}}\Rightarrow \lambda=\frac{1}{\sqrt{DX}}$

$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}\\ \lambda=\frac{1}{\sqrt{DX}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}}\end{cases}$

矩估计不唯一.

[例5] 设 $X\sim f(x,\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$，$x\in\mathbb{R}$ 其中 $\theta>0$ 未知，求 $\hat{\theta}_M$ 即：与θ无关

解：奇函数 $EX=\int_{\mathbb{R}}x\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=0$ 是0而很不存在故一阶矩不行，试二阶矩

$EX=\int x\cdot f$

$EX^2=\int_{\mathbb{R}}x^2\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx$ 分部积分 $\int udv=uv-\int vdu$

偶函数. $=\boxed{2\theta^2}$

$\Rightarrow\theta=\sqrt{\frac{EX^2}{2}}\Rightarrow\hat{\theta}_M=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2}$

$-\theta\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-\frac{x}{\theta}})=-\theta\left(x^2e^{-\frac{x}{\theta}}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx\right)$

$=2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}x\,dx-x^2e^{-\frac{x}{\theta}}$

$=-\theta(2xe^{-\frac{x}{\theta}}-\ldots)-x^2e^{-\frac{x}{\theta}}$

[例6] 设 $X\sim B(m,p)$ m已知 $p\in(0,1)$ 未知 令 $q=1-p$ $(X_1,\cdots,X_n)$ 为样本 求 $\frac{p}{q}$ 的矩估计

解：$\boxed{EX=mp}\Rightarrow p=\frac{EX}{m}$ $\frac{p}{q}=\frac{p}{1-p}$ 从而 $\frac{p}{q}$ 的矩估计为 $\frac{\frac{\bar{x}}{m}}{1-\frac{\bar{x}}{m}}=\frac{\frac{\bar{x}}{m}}{\frac{m-\bar{x}}{m}}=\frac{\bar{x}}{m-\bar{x}}$

用一阶原点矩 $\hat{p}_M=\frac{\bar{x}}{m}$ $\frac{\frac{\bar{x}}{m}}{1-\frac{\bar{x}}{m}}$

又由于 $\boxed{DX=mpq}$ $\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{p}{\frac{DX}{mp}}=\frac{mp^2}{DX}=\frac{(EX)^2}{mDX}$ 从而 $\frac{p}{q}$ 的矩估计为 $\frac{(\bar{x})^2}{mS_n^2}$（其中，一. 另一个. $\bar{x}=\cdots$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$）

用二阶中心矩 mpq

$\frac{p}{\frac{DX}{mp}}=\frac{mp^2}{DX}=\frac{(EX)^2}{mDX}\Rightarrow\frac{(\bar{x})^2}{mS_n^2}$ 不唯一. 其中：$\bar{x}=$ $S_n^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$

[例7] 设 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$（其中 $\theta\in(0,1)$）设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为样本，N为样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中小于1的个数，求 $\hat{\theta}_{MLE}$ 和 $\hat{\theta}_M$

（干扰信息）概率是0，故无其他

解. $\boxed{EX=\int_{\mathbb{R}}xf(x)dx}=\frac{3}{2}-\theta$ （略过程）$\Rightarrow\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{X}$

$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{X}$

$\boxed{L(\theta)=\prod_{k=1}^n f(x;\theta)}=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$ $\theta\in(0,1)$ $\Rightarrow\hat{\theta}_{MLE}=\frac{N}{n}$

$L=\prod_{k=1}^n f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$ 累积 $\hat{\theta}_{MLE}$

$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$

$\ln L=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$ $N-N\theta=n\theta-N\theta=0$ $\hat{\theta}_{MLE}=\frac{N}{n}$

$EX=\hat{\theta}_M=\int_0^1 xf(x;\theta)+\int_1^2 xf(x;\theta)$

$=\int_0^1 x\theta\,dx+\int_1^2 x(1-\theta)dx$

$=\theta\cdot\frac{1}{2}x^2|_0^1+(1-\theta)\frac{1}{2}x^2|_1^2$

$=\theta\cdot\frac{1}{2}+(1-\theta)\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}\theta-\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\theta$

$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-EX=\frac{3}{2}-\bar{X}$

§2. 估计的评价标准

优良性标准

X $f(x;\theta)$ $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta\subset\mathbb{R}^m$

$g(\theta)$ 是θ的函数 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 样本

$\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计量

直观上看 $|\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)-g(\theta)|$ 越小越好.

但 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依赖于样本，是随机变量

且 $g(\theta)$ 未知

估计 $\varphi(X_1,X_2\cdots X_n)$ 统计量.

$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{x}$ $g(\theta)$ $\varphi(x_1,\cdots x_n)$ $|\varphi-g(\theta)|$ 比较小（希望）

期望 $E_\theta\varphi$ 其分布与θ有关 与总体同分布.

方差 $D_\theta\varphi$ 或 $Var_\theta\varphi$

$E_\theta\varphi^{(x_1\cdots x_n)}=g(\theta)$

概念 证明 结论 唯一，存在，好？ 期望/方差，无偏

无偏性

含义：没有系统偏差

定义：若对 $\forall\theta\in\Theta$，有：$E_\theta\varphi(X_1,X_2,\cdots X_n)=g(\theta)$，则称 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计.

与θ有关的样本期望.

注：① 若 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计，则其函数 $g(\hat{\theta})$ 不是 $g(\theta)$ 的无偏估计. 除非 $g(\theta)$ 是θ的线性函数

② 无偏估计可能不存在，可能不唯一，可能不合理

③ 无偏估计只有在大量重复使用时才能显示出它的使用价值，若试验次数只有一次或只进行一次估计，则不必追求无偏性

Apr 14, 2024

理解理解 ⇒ 定理2.1 设总体X的期望 $E_\theta X$ 及方差 $D_\theta X$ 存在，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

则 ① $E_\theta\bar{X}=E_\theta X$ ② $D_\theta\bar{X}=\frac{1}{n}D_\theta X$ ③ $E_\theta S^2=D_\theta X$ 对所有分布都成立。

样本均值是总体均值的无偏估计

样本均值的方差。$\frac{1}{n}$总体的方差

修正的样本方差是总体方差的无偏估计

$E[S^2]=\sigma^2$ ⟺ 修正样本方差的期望 = 总体方差

引入了 $\bar{X}$ 少了一个自由度，故 $n-1$

$\hat{\mu}_1=X_1$，$\hat{\mu}_2=\frac{X_1+X_n}{n}$

$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$

$D\hat{\mu}_1=DX$，$D\hat{\mu}_2=\frac{DX}{2}$，$D\bar{X}=\frac{DX}{n}$

样本均值的期望 = 总体均值，仅仅是E(样本均值) = 总体均值

证明 ① $E_\theta\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_\theta X=E_\theta X$

每个 X_i 和总体同分布

样本均值一次 ~ 的期望：多次抽取，样本均值的平均值，长期

② 样本均值的方差 $D_\theta\bar{X}=D_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D_\theta\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D_\theta X=\frac{1}{n}D_\theta X$

③ $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\bar{X}X_i+\bar{X}^2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{2}{n-1}\bar{X}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i}_{n\bar{X}}+\frac{n}{n-1}\bar{X}^2$

$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\bar{X}^2$

样本均值的方差：实际上在谈论样本均值作为一个随机变量自身的分散程度，是基于样本中的数据来计算的，随着样本大小的增大，样本均值的方差越小，意味样本均值更稳定，更接近总体均值。

$\Rightarrow E_\theta S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-\frac{n}{n-1}E\bar{X}^2$ （$DX=EX^2-(EX)^2 \Rightarrow EX^2=DX+(EX)^2$）

$EX_i^2=(EX)^2+DX_i=(EX)^2+DX$

$E\bar{X}^2=(E\bar{X})^2+D\bar{X}=(EX)^2+\frac{1}{n}DX$ $\frac{1}{n}$总体的方差。

故 $E_\theta S^2=D_\theta X$

Apr 15, 2024

例1 设 $E\hat{\theta}=\theta$ 且 $D\hat{\theta}>0$ 则 $E\hat{\theta}^2=(E\hat{\theta})^2+D\hat{\theta}>(E\hat{\theta})^2=\theta^2$

方差>0

故 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

difficult. 例2. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为取自两点分布 $B(1,p)$ 的一个样本

(1) 求 $p(1-p)$ 的一个无偏估计（不唯一）

$DX=E(S^2)$ $S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$ 是一个无偏估计（修正的）

(2) 证明 $\frac{1}{p}$ 不存在无偏估计 反证

$DX=EX^2-(EX)^2$，$EX^2=DX+(EX)^2$

$p\ q$

$DX=p(1-p)$ $\| E(S^2)$

解：(1) $EX=p$ 猜测 $\bar{X}(1-\bar{X})$: $E(\bar{X}(1-\bar{X}))=E(\bar{X}-\bar{X}^2)=E\bar{X}-E\bar{X}^2=\cancel{p-p^2+DX}$

定理① $p-((E\bar{X})^2+D\bar{X})$ $\frac{1}{n}DX$

$E\bar{X}=EX=p$ 定理①

定理② $=p-p^2-\frac{1}{n}p(1-p)=\frac{n-1}{n}p(1-p)$ $p-\frac{1}{n}p(1-p)$

从而 $E\left(\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})\right)=p(1-p)$ 从而 $\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})$ 是 $p(1-p)$ 的无偏估计

★ 或者 $p(1-p) \Rightarrow pq$ $DX=p(1-p)=E(S^2)$ 从而 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是 $p(1-p)$ 的无偏估计 较easy.

(2). 证明.(反证法) 若 $\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $\frac{1}{p}$ 的无偏估计

则 $E_\theta\varphi=\frac{1}{p}$ $\forall p\in(0,1)$ 即 $\sum_{(x_1,\cdots,x_n)}\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\cdot P(X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n)$（随机变量函数的数学期望）

$=\sum_{(x_1,\cdots,x_n)}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\, p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$ 同时 $X_i=x_i$ 的概率 样本联合概率分布 $\prod_{k=1}^{n}P(X_k=x_k)=\prod_{k=1}^{n}P(X=x_k)=\prod_{k=1}^{n}p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}$

X $P(X=x_k)$

$Y=f(X)$ $P(Y=y_k)$

$EY=\sum y_k P(Y=y_k)$

$EY=\sum_k f(x_k)P(X=x_k)$

(2) 假设 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\frac{1}{p}$ 的无偏 $E_p\varphi=\frac{1}{p} \Rightarrow p\cdot E_p\varphi=1$

则对 $\forall p\in(0,1)$

有 $E\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\sum\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,P(X_1=x_1,\cdots)$ 从而 $\sum_{(x_1,\cdots,x_n)}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,p^{1+\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}-1=0 \quad \forall p\in(0,1)$

$\prod P(X_i=x_i)=\prod p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

max: 次数 $n+1$

0~1 内所有 p 都是根。但 $n+1$ 次最多 $n+1$ 个根。

$=\sum\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,\boxed{p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}}$ 由于满足上式的 φ 不存在，从而 $\frac{1}{p}$ 不存在无偏估计

假设 $=\frac{1}{p}$

$\Rightarrow \sum\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,p^{1+\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}-1=0$

$n+1$ 个根

$\forall p\in(0,1)$ ×.

1个样本，具随机性.

[例3] 设 $X\sim P(\lambda)$ $\lambda>0$ 为未知参数 泊松分布 设 X_1 为来自 X 的样本 令 $\varphi(X_1)=(-1)^{X_1}$

则 $E\varphi=\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi(k)\,P(X_1=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}}$ 级数 $=e^{-2\lambda}$.

$E\varphi(X)$

服从泊松分布

$e^{-\lambda}$ 的泰勒展开.

对所有入都成立. $\forall\lambda>0$.

从而 $\varphi(X_1)=(-1)^{X_1}$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的无偏估计　　若 X_1 取奇数时 $\varphi(X_1)=-1$ 无偏估计不合理 从而不能片面追求无偏性

$\varphi(X)$　X_1奇 $\varphi(X_1)=-1$　$g(\lambda)>0$　<0.

泊松分布

$np_n\to\lambda$ $(n\to\infty)$ $b(k;n,p_n)\Rightarrow\boxed{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$ $p(k;\lambda)$

Mar 15.2024

作业二

[作业 习题二 10 14 15 18]

$k:1,2,3.$ n：次数. p_n：概率 $\lambda=np_n$. n大 p_n小.

$I_{[c-\theta,c+\theta]}(x)$ 示性函数.　$I_\Omega(x)=\begin{cases}1 & x\in\Omega\\ 0 & x\notin\Omega\end{cases}$

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n(x)$

估计の评价指标：

无偏性

题4. $f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$

$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\prod_{i=1}^n\left(e^{-\frac{x_i^2}{2}}+\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$

似然函数

a是展开点

e^x $x=0$处 $e^0=1$

e^x $f^{(n)}(0)=1$

$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x-0)^n$

$\frac{x^n}{n!}$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

e^{-x}　$-x$　x^2　$-x^3$

μ、σ^2 不存在最大似然估计.　$\Rightarrow$ 无界函数 不存在最大值

$\geq\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n-1}e^{-\frac{x_i^2}{2}}\right)\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

对 $\forall M>0$ $\exists\mu=x_n$ $\sigma_0>0$

s.t. $A\frac{1}{\sigma}>M$ $\forall\sigma<\sigma_0$

$\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$　$g(\theta)$

$E_\theta\varphi=g(\theta)$ $\forall\theta\in\Theta$

评价の估计量. 有效性.

$E\varphi^2$ ~~[illegible]~~

定义(均方误差)：设 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计，则称 $M_\theta(\varphi)=E_\theta(\varphi-g(\theta))^2$ 为 φ 的均方误差.

注：若 $E_\theta\varphi=g(\theta)$ $\forall\theta\in\Theta$ 则 $M_\theta(\varphi)=E(\varphi-E_\theta\varphi)^2=D_\theta(\varphi)$ 中心矩定理 这里 φ 仍是样本，此处仅是正常推导 φ 的方差

φ是$g(\theta)$的无偏估计　$\frac{\sigma^2}{n}$　$Var_\theta(\varphi)$ 因为并非总体方差

定义(有效性) 设 $\varphi_1=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $\varphi_2=\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 均为 $g(\theta)$ 的估计，且对 $\forall\theta\in\Theta$ 有：$M_\theta(\varphi_1)\leq M_\theta(\varphi_2)$

则称 φ_1 不次于 φ_2。此时若 $\exists\theta_0\in\Theta$ s.t. $M_{\theta_0}(\varphi_1)<M_{\theta_0}(\varphi_2)$，则称 φ_1 比 φ_2 有效

例1. 记 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$　$E\bar{X}_n=EX$　$D\bar{X}_n=\frac{1}{n}DX$　$D(\bar{X}_n)$ $D(\bar{X}_{n+1})$

样本 总体　样本 总体

$\frac{1}{n}DX$　$\frac{1}{n+1}DX$

$M(\bar{X}_n)<M(\bar{X}_{n+1})$

Apr 25, 2024

Apr 29, 2024

例2 $g(\theta)=E_\theta(X)$

设 $EX=\mu$ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ $\lambda_i\geq 0$ $\forall i=1,2,\cdots,n$

$\varphi_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ $\varphi_2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i$ 均为μ的估计 无偏估计

$P(\varphi_1)=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=$ $\frac{1}{n^2}D(\sum X_i)$ nDX

$E\varphi_1=\mu$ $E\varphi_2=\mu$

$M(\varphi_1)=E(\varphi_1-\mu)^2=D(\varphi_1)=\frac{1}{n}DX$ 不是不一样

$M(\varphi_2)=D(\varphi_2)=D(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 DX_i=\cancel{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 DX=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 DX$

独立 同分布 $=DX$

$=\sum_{i=1}^{n}D(\lambda_i X_i)$

比较$M(\varphi_1)$与$M(\varphi_2)$ 柯西不等式 $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$

为1. 取等：$M(\varphi_1)=M(\varphi_2)$ 当且仅当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ 从而$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$不全相等时$\varphi_1$比$\varphi_2$有效。

$F_X=P(X_i\leq x)$

例3. 设$X\sim U(0,\theta)$ $\frac{1}{\theta}x$ $\theta>0$未知 $(X_1,\cdots,X_n)$为样本 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 仅指最小

$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 证明 $\varphi_1=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ $\varphi_2=(n+1)X_{(1)}$ 都是θ的无偏估计 $E\varphi=\theta$ E. $\int xf$.

(2) 比较φ_1与φ_2的有效性

(1) 首先确定$X_{(1)}$与$X_{(n)}$的分布 即概率

解. (1) $X_{(n)}$期望 $X_{(n)}$分布 $EX_{(n)}=\int_R x f_{X_{(n)}}(x)dx$ 之后回代 $\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}x^n dx=\frac{n\theta}{n+1}$

$\boxed{F_{X_{(n)}}(x)=F_X^n(x)}$ $=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ (\frac{x}{\theta})^n & 0<x\leq\theta\\ 1 & x>\theta\end{cases}$

X的分布函数. 总体分布函数

$\Rightarrow f_{X_{(n)}}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x\leq\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$

$F_{X_{(1)}}(x)=P(X_{(1)}\leq x)$
$=1-P(X_{(1)}>x)$ √ 么方便
$=1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x)$
$=1-\prod P(X_i>x)$ $\frac{x}{\theta}$
$=1-\prod(1-P(X_i\leq x))$
$=1-\prod(1-F(x))=1-(1-F_X(x))^n$
$=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1-(\frac{\theta-x}{\theta})^n & 0<x<\theta\\ 1 & x\geq\theta\end{cases}$

$\Rightarrow E\varphi_1=\theta$

$-\frac{1}{\theta}\cdot n(1-\frac{x}{\theta})^{n-1}$

$F_{X_{(n)}}(x)=P(X_{(n)}\leq x)=P(X_1\leq x,X_2\leq x,\cdots,X_n\leq x)$
$=\prod P(X_i\leq x)=\prod F_X(x)=F_X^n(x)$
$=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ (\frac{x}{\theta})^n & 0<x<\theta\\ 1 & x\geq\theta\end{cases}$

分布函数 $\boxed{F_{X_{(1)}}(x)=1-(1-F_X(x))^n}$ $=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1-(1-\frac{x}{\theta})^n & 0<x\leq\theta\\ 1 & x>\theta.\end{cases}$

从而相应密度函数为 $f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{n}{\theta}(\frac{\theta-x}{\theta})^{n-1} & 0<x<\theta\\ 0 & x\geq\theta\end{cases}$

$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x<\theta\\ 0 & x\geq\theta\end{cases}$

$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x\leq\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$

$EX_{(1)}=\int_0^\theta x\,\frac{n}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^{n-1}dx$ $\boxed{令1-\frac{x}{\theta}=t}$ $\frac{x}{\theta}$: $0\sim 1$ $\theta\sim 1$ $1-0\sim 1$ $0\sim 1$ $0\sim 1$.

$=\int_0^1 \theta(1-t)\boxed{\frac{n}{\theta}t^{n-1}}dt=\frac{1}{n+1}\theta$

$EX_{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X_{(1)}}(x)dx=\int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta}(\frac{\theta-x}{\theta})^{n-1}dx=\frac{\theta}{n+1}$.

$E\varphi_2=\theta$

例5: $EX_{(1)}=$

$EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X_{(n)}}(x)dx=\int_0^\theta x\frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1}dx=\frac{n\theta}{n+1}$. 从而 …

(2) $M(\varphi_1)=D\varphi_1=(\frac{n+1}{n})^2DX_{(n)}=(\frac{n+1}{n})^2(EX_{(n)}^2-(EX_{(n)})^2)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$M(\varphi_2)=D\varphi_2=(n+1)^2DX_{(1)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\theta^2$

(2). $DX_{(1)}=EX_{(1)}^2-(EX_{(1)})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_{X_{(1)}}(x)dx-(\frac{\theta}{n+1})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{n}{\theta}(\frac{\theta-x}{\theta})^{n-1}dx-(\frac{\theta}{n+1})^2$
$=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$ 从而$D\varphi_2=(n+1)^2DX_{(1)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\theta^2$

$M(\varphi_1)<M(\varphi_2)$

$DX_{(n)}=\cdots=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$ 从而 $D\varphi_1=(\frac{n+1}{n})^2DX_{(n)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}<D\varphi_2$.
有效.

信息 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
加工

不考. 充分统计量

定义：设总体 X 的概率函数（或概率密度函数）为 $f(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$ 是未知参数，$(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本，

若样本 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的联合概率函数（或联合概率密度函数）可以分解成

$L(\theta)=\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = g(\varphi,\theta)\cdot h$，$\forall\theta\in\Theta$ 其中 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$h=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，且 h 非负，且不依赖于 θ

则称 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的充分统计量. why.

等价定义：假设 X 为总体，$f(x,\theta)$ 概率函数（或 ——），$(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$

若在给定 $\varphi=t$ 的条件下，样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的条件概率分布 $\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$ 与 θ 无关，则称 φ 是 θ 的充分统计量

相当于 θ 就已确定.

$\frac{g(\varphi,\theta)}{\varphi(x)}\cdot\frac{h(x)}{?}$

因子分解定理. $\varphi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的充分统计量.

$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\theta)=g(\varphi,\theta)\cdot h$ 其中 $h=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不依赖于 θ，h 非负

注：① 充分统计量包含了样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中关于参数 θ 的全部信息

② 充分统计量不唯一 例如：样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 本身就是一个充分统计量. $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$ $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$

③ 若参数 θ 的 MLE 存在，MLE 一定是充分统计量的函数. 作为向量，维度为 n.

$L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$ max.

$\frac{d\ln L}{d\theta}=0$ $\hat{\theta}_{MLE}$ $0=\frac{d}{d\theta}\ln L(\hat{\theta}_{MLE};x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$g(\varphi,\theta)\cdot h$ max

$g(\varphi,\hat{\theta}_{MLE})$ max $\Rightarrow \frac{d}{d\theta}g(\varphi,\hat{\theta}_{MLE})=0$

充分统计量举例

例：$X\sim E(\lambda)$ 指数 $f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} = I_{(0,+\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\lambda)=\prod_{k=1}^{n} I_{(0,+\infty)}(x_k)\,\lambda^n e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k} = g(\varphi,\lambda)\cdot h$

① $h=\prod_{k=1}^{n} I_{(0,+\infty)}(x_k)$ $\varphi=e^{\sum_{k=1}^{n}x_k}$ $g(\varphi,\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\varphi}$

统计量 已知函数 不能有入未知 → 充分统计量

② $h=\cdots$; $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 向量 → 充分统计量. $\varphi_k=x_k$ φ 就是样本本身 $g(\varphi,\lambda)=\lambda^n\cdot e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}\varphi_k}$

③ $h=\cdots$. $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ $\varphi_1=x_1$ $\varphi_2=(x_2,\cdots,x_n)$ $g(\varphi,\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda(\varphi_1+\varphi_2)}$

Mar 19, 2024

$\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = g(\varphi,\theta)h \qquad \varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad h=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0.$

充分统计量. 维度越低越好

正态 $\quad \delta=\sigma^2$

例2. $X\sim N(\mu,\sigma^2) \quad f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 联合概率分布

打开平方

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\frac{n\mu}{\sigma^2}\bar{x}\right)\cdot e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}$

用1维2代替两个中心统计

$n=1 \quad \varphi=(\varphi_1,\varphi_2) \quad \varphi_1=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \quad \varphi_2=\bar{x}$

$g=(\varphi,\mu,\sigma^2)$ 或 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 或 $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x}+\bar{x})^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2+2\bar{x}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})+n\bar{x}^2=nS_n^2+n\bar{x}^2$

均匀

如果 $a=0$. φ 只 $=x_{(n)}$

例3. $X\sim U(a,b)$ $\quad \prod_{k=1}^{n} f(x_k;a,b)=\begin{cases}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n & a<x_k<b \ \forall k\\ 0 & \text{其他.}\end{cases} = \prod_{k=1}^{n}\left(I_{(a,b)}(x_k)\frac{1}{b-a}\right)$

$f(x;a,b)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\in(a,b)\\ 0 & \text{others}\end{cases}=I_{(a,b)}(x)\frac{1}{b-a}$

$=\left(\frac{1}{b-a}\right)^n\prod_{k=1}^{n}I_{(a,b)}(x_k)$. φ.

每个都在 (a,b) 中才有值, 否则为0.

$=\left(\frac{1}{b-a}\right)^n \underbrace{I_{(a,+\infty)}(x_{(1)})}_{\text{最小 } \min x_i} \underbrace{I_{(-\infty,b)}(x_{(n)})}_{\text{最大 } \max x_i}$

依赖参数 θ.

$\varphi=(\underbrace{x_{(1)}}_{\varphi_1},\underbrace{x_{(n)}}_{\varphi_2})$ 是 (a,b) 的充分统计量

$g=(\varphi,a,b)=\left(\frac{1}{b-a}\right)^n \times I_{(a,+\infty)}(\varphi_1) \times I_{(-\infty,b)}(\varphi_2)$

各参不到 ~~[illegible]~~ 则 $h=1$

不依赖参数 h

$\boxed{\varphi \text{ 是 } \theta \text{ 的充分统计量 参数}}$

两点: $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x} \quad \prod f(x;p)=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$ $\quad \varphi_1$: 丰每 φ_2: $\sum x_i$. φ_3: $(x_1+x_2, x_3, x_4,\dots,x_n)$. 都是.

例4. $X\sim f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|}$. Laplace 分布

$\theta>0. \quad \prod_{k=1}^{n}f(x;\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}|x_k|}$ $\quad \varphi$

$g(\quad \theta, \quad).\ h=1$

例5. $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ $\quad \Gamma$ 分布.

$f(x;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

$\prod_{k=1}^{n}f(x;\alpha,\lambda)=\left(\prod_{k=1}^{n}I_{(0,+\infty)}(x_k)\right)\lambda^{n\alpha}\Gamma(\alpha)^{-n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k}$

$=g(\varphi,\alpha,\lambda)h$

找作为一个整体出现. $\varphi=\left(\prod_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$

或变形 $e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k \ln x_k}$ $\quad e^{(\alpha-1)\sum_{k=1}^{n}\ln x_k-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k}$

指数和转积

也可以是 $\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}\ln x_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$

例 $p(x;\theta,\mu)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{(x-\mu)}{\theta}}$ $\quad x>\mu,\theta>0$ $\quad (\bar{x},x_{(1)})$ 是 φ.

Proof: $p(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta,\mu)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)}{\theta}}\cdot I_{\{x_{(1)}>\mu\}}$. $\quad \varphi_2$, φ_1.

$g(\varphi,\theta) \quad h=1.$

由因子分解定理, φ.. 是 (μ,θ) 的充分(参数)统计量

考大题. 笔记都随便找一个! $\quad U(\varphi)=0 \quad$ $U(\varphi)$ 几乎处处为0. a.e.

无用信息 $\quad$ 完全性. 完全备统计量

U 作用到 φ 后, 依赖于 θ 的函数.

定义(完全统计量): 设 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 为统计量, 若对任意 (Borel 可测) 函数 $U(\cdot)$, 只要:

$E_\theta U(\varphi)=0 \ \forall\theta\in\Theta$ 就有: $P_\theta(U(\varphi(x_1,\dots,x_n))=0)=1 \ \forall\theta\in\Theta$ 则称 $\varphi=\varphi(x_1,\dots x_n)$ 为完全统计量

$V = u - a$
平移变换.

(找鹭帮写过去问答案
并与他讨论) 日本東大

May 21

等价定义：若对任意 (Borel可测) 函数 $u(\cdot)$ 只要 $E_\theta u(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = a$ $\forall \theta \in \Theta$

必有 $P_\theta(u(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = a) = 1$ $\forall \theta \in \Theta$ 则称 φ 是完全统计量 (其中 a 是常数)

即 $u(\varphi(x_1, \cdots x_n)) \equiv a$

不包含无用信息 $\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 加工

$E\, u(\varphi)$ 再加工 $= a$

不包含θ或关于θ的信息很少

如 $f(\theta)$ 和参数有关 $EX = \mu$

$\boxed{\varphi \text{ 参数不能往外掉了} = \text{完全}}$

u 把 φ 中所包括的有关参数的信息掉掉了，掉得少了.

作用到 φ 后

只有 $u(\varphi) = a$ 除了这个函数外没有其它函数能达到 $E(u(\varphi)) = a$ 的结果了.

$\boxed{\text{但能 } u(\varphi) = a \text{ 作用相当于换}}$.

例1. 设 $X \sim B(1, p)$ $(x_1 \cdots x_n)$ 为样本 证明 $\varphi = \sum_{k=1}^n X_k$ 是完全统计量.

$\sim B(n, p)$

证明：$\varphi = \sum_{k=1}^n X_k \sim B(n, p)$ $\sim B(n,p)$
二项分布

(white board).
指引同前 服从 分布.

设 $u(\cdot)$ s.t $E\,u(\varphi) = 0$ $\forall p \in (0,1)$ 设 $u(\cdot)$ s.t $E\,u(\varphi) = 0$ $\forall p \in (0,1)$. φ $E\,u(\varphi) = \sum_{k=0}^n u(k) P(\varphi = k) = \sum_{k=0}^n u(k) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$u(k)$ 是值.

离散型 即 $E\,u(\varphi) = \sum_{k=0}^n u(k) P(\varphi = k)$. 求期望. $= \sum_{k=0}^n u(k) \underbrace{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}_{P(\varphi = k)} = (1-p)^n \sum_{k=0}^n u(k) C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0$

可推出 $= 0$
$\Rightarrow u(\varphi) \equiv 0$ 即 φ 为完全统计量

$= (1-p)^n \sum_{k=0}^n u(k) C_n^k p^k (1-p)^{-k} = 0$ $\forall p \in (0,1)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n u(k) C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0$ $\forall p \in (0,1)$

$\Rightarrow u(k) = 0$.

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n u(k) C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0$

$\Rightarrow u(k) = 0$ $k = 0, 1, \cdots n$
从而 $u(\varphi) \equiv 0$ 即 $P_p(u(\varphi) = 0) = 1$

令 $t = \frac{p}{1-p}$ 上式 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n u(k) C_n^k t^k = 0$

对 $t \in (0, +\infty)$

n次多项式 n个根 $t \in (0, +\infty)$ 均成立. 故矛盾. 故 $u(k) = 0$ $\forall k = 0, 1, \cdots, n$

(而不能说 $u(\cdot) = 0$) 论的是这个 即 φ 是完全的

$t = \frac{p}{1-p}$

$\varphi \sim X_k$.

$\Rightarrow u(\varphi) = 0$.

$F_{(1)} = 1 - (1 - F(x))^n$ $F(x) = \frac{x}{b-a}$

$f_{(1)} = F'(x) \cdot n (1 - F(x))^{n-1}$ $\left(\frac{b-a-x}{b-a}\right)^{n-1}$

$x - a$ 是 F(x) 的分子

例2. 设 $X \sim U(a, b)$ $a < b$ 为未知参数

$= F'(x) \cdot n (1 - F(x))^{n-1} = \frac{n}{b-a} \left(\frac{b-a-x}{b-a}\right)^{n-1} = \frac{n \cdot (b-a-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$

① ∃ $u(\cdot)$ ② $V(\cdot)$
$EU(X_{(1)}) = 0$ $EV(X_{(n)}) = 0$
则 ① $\int_a^b u(x) f_{X_{(1)}}(x)\,dx = \int_a^b u(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$

② $\int_a^b V(x) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$

$\Rightarrow$ ① $\int_a^b u(x)(b-x)^{n-1} dx = 0$
② $\int_a^b V(x)(x-a)^{n-1} dx = 0$

分别对 a, b 求导：① $0 - u(a)(b-a)^{n-1} = 0$ $\forall a < b$ $a, b \in R$
② $V(b)(b-a)^{n-1} - 0 = 0$

$\Rightarrow$ ~~$u(a) = 0$~~ ~~$V(b) = 0$~~
也即：$u \equiv 0$
$V \equiv 0$.

故 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 完全.

证明：$X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 是完全统计量

记：$f_{X_{(1)}}(x) = I_{(a,b)}(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$ $f_{X_{(n)}}(x) = I_{(a,b)}(x) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$

密度函数

$I_{(a,b)}(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$
$\Rightarrow u(x)$

$f_{X_{(n)}}(x) = I_{(a,b)}(x) f(x) n F(x)^{n-1} = \frac{1}{b-a} \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{(b-a)^{n-1}} = \frac{n \cdot x^{n-1}}{(b-a)^n}$

令 $X \hat{=} x - a$ $b \to a - x + a$

$f_{X_{(n)}}(x) = I_{(a,b)}(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$

假设 ∃ $u(\cdot)$ s.t $EU(X_{(1)}) = 0$ $\forall a < b$ $a, b \in R$

即 $EU(X_{(1)}) = \int_a^b u(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$ $\forall a < b$. $a, b \in R$

连续型
$EU = \int_a^b u(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$

consistant. $\Rightarrow \int_a^b u(x) (b-x)^{n-1} dx = 0$. $\forall a < b$ $a, b \in R$

$\Rightarrow \frac{d}{da} \int_a^b u(x)(b-x)^{n-1} dx = -u(a)(b-a)^{n-1} = 0$ $\forall a < b$ $a, b \in R$

常数 均成立

$\Rightarrow u(a) = 0$ $\forall a \in R$

若 ∃ $V(\cdot)$ s.t $EV(X_{(n)}) = \int_a^b V(x) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$ $\forall a < b, a, b \in R$

$\Rightarrow \int_a^b V(x)(x-a)^{n-1} dx = 0$ 对 b 求导：$\frac{d}{db} \int_a^b V(x)(x-a)^{n-1} dx = 0 \Rightarrow V(b) = 0$ $\forall b \in R$

对 a 求导 $(a-a)^{n-1} = 0$ 常数.

考 ✓ 指数型分布（指数族）

定义：若随机变量 X 的密度函数（或概率函数）形如 $f(x;\theta)=S(\theta)h(x)\exp\{\sum_{k=1}^{m}C_k(\theta)T_k(x)\}$

其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta$　$S(\theta)>0$　$h(x)\geq 0$　$f(x;\theta)=S(\theta)h(x)\exp\{\sum_{k=1}^{m}C_k(\theta)T_k(x)\}$

则称 X 为指数型分布　$S_{(\theta)}h_{(x)}e^{C_{(\theta)}T(x)}$

定义（支撑）　$\{x: f(x)>0\}$　大于0的 x 的部分为其支撑　是对函数上定义支撑

设随机变量 X 的密度函数（或概率函数）为 $f(x;\theta)$ 称集合 $\{x: f(x;\theta)>0\}$ 为 X 的支撑　是对随机变量定义支撑

$h(x)\geq 0$ 与参数 θ 无关

指数型分布的支撑与 θ 无关

Mar 22, 2024

$\varphi=\varphi(x_1,\cdots x_n)$　$E\,u(\varphi)=0\ \forall\theta\in\Theta \Rightarrow u(\varphi)=0\ \ a.e.\ \forall\theta\in\Theta$

完全统计量.　完全正交系 $\{\vec{\alpha}_k\}_{k=1}^{n}$　若 $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}_k\ \forall k=1,2,\cdots,n\Rightarrow\vec{\beta}=0$

$\vec{\alpha}_i\perp\vec{\alpha}_j\ \forall i,j$

$\varphi=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$　$\varphi\in\{1,2,\cdots,m\}$　$f(k;\theta)=P\{\varphi=k\}$　$E\,u(\varphi)=\sum_{k=1}^{m}u(k)f(k;\theta)=0\Rightarrow u(\varphi)=0$

两向量内积

$(u(1),u(2),\cdots u(m))$　$\{(f(1,\theta),f(2,\theta),\cdots f(m,\theta))\}_{\theta}$

$X\sim f(x;\theta)$　$f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{\sum_{k=1}^{m}C_k(\theta)T_k(x)}$　其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta$　$S(\theta)>0$　$h(x)\geq 0$

支撑　设 $X\sim f(x;\theta)$　$\{x: f(x;\theta)>0\}$　$f(x,\theta)>0$

支集

$S(\theta)$ 恒 >0　指数 e 也 >0　故只 $h(x)>0$

$\{x: f(x;\theta)>0\}=\{x: h(x)>0\}$

性质 ① 指数型分布的支撑与参数无关

$X\sim E(\lambda)$　$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$　　$X(\mu,\sigma^2)$　$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\{x: x>0\}$　　R.

$X\sim B(n,p)$　$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ \forall k=0,\cdots n$

$\{0,1,\cdots,n\}$ 一个个离散的点.

② 若 $X\sim f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)T_i(x)}$ 为指数型分布

则 $\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)=S^n_{(\theta)}\prod_{k=1}^{n}h(x_k)e^{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)T_i(x_k)}$　$g(\varphi,\theta)h$.

$=S^n_{(\theta)}\prod_{k=1}^{n}h(x_k)e^{\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)(\sum_{k=1}^{n}T_i(x_k))}$

支撑　充分统计量

若 $f(x_k;\theta)=g(\varphi,\theta)h$

以 $\varphi=(\sum_{k=1}^{n}T_1(x_k),\sum_{k=1}^{n}T_2(x_k),\cdots,\sum_{k=1}^{n}T_m(x_k))$ 为 θ 的充分统计量

指数族的自然形式

在指数型分布的定义形式 $\boxed{f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)T_i(x)}}$

$She^{\sum C_{(\theta)}T_{(x)}}$

令 $\boxed{\theta_i^*=C_i(\theta)}$ $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_m^*)$

以得到 $f^*(x;\theta^*)=S^*(\theta^*)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*T_i(x)}$，叫~~指数型~~指数族的自然形式。

新参数 $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_m^*)$ 称为自然参数，其取值范围为自然参数空间 Θ^*。

定理 $\boxed{\text{设指数型总体}X\text{的自然形式为 } f^*(x,\theta^*)=S^*(\theta^*)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*T_i(x)}}$

其中 $\theta^*=(\theta_1^*,\cdots,\theta_m^*)\in\Theta^*$ 若自然参数空间 Θ^* 有内点

$\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}T_1(X_k),\sum_{k=1}^{n}T_2(X_k),\cdots\sum_{k=1}^{n}T_m(X_k)\right)$

则：φ 充分统计量

是完全的。

$\Sigma T(x)$ 为 θ 的充分统计量。

θ_1^*, θ_2^* $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*)$ 有内点

则上述为完全的。

离散的完备性。

[redacted] $\theta\in\Theta$ $\theta^*=(C_1(\theta),C_2(\theta),\cdots,C_m(\theta))\in\Theta^*$

若有内点。

[例1] $X\sim E(\lambda)$

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=I_{(0,+\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$$

$S(\lambda)=\lambda$ $h(x)=I_{(0,+\infty)}(x)$. $C(\lambda)=-\lambda$ $T(x)=x$ $\Rightarrow X$ 为指数型分布

$\Rightarrow\varphi=\sum_{k=1}^{n}T(X_k)=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 为充分统计量

自然参数 $\lambda^*=C(\lambda)=-\lambda$ ——空间 $\Theta^*=(-\infty,0)$ Θ^* 有内点 $\Rightarrow\varphi=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 是完全的

[例2] $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2+\frac{\mu}{\sigma^2}x}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$

支撑 R 与参数无关 ∴ 分布是指数型分布

$f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 展

$S(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$ $h(x)=1$. $C_1(\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$ $T_1(x)=x^2$

$C_2(\mu,\sigma^2)=\frac{\mu}{\sigma^2}$ $T_2(x)=x$

Σx_i

$\Rightarrow X$ 为指数型分布

$\Rightarrow\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}T_1(X_k),\sum_{k=1}^{n}T_2(X_k)\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}X_k^2,\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$ 为充分统计量。

自然参数 $\theta_1^*=C_1(\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$ $\theta_2^*=\frac{\mu}{\sigma^2}$ $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*)=\left(-\frac{1}{2\sigma^2},\frac{\mu}{\sigma^2}\right)$

$\sigma^2>0$ <0 $-\infty,0$ $-\infty\ +\infty$

故 $\Theta^*=(-\infty,0)\times(-\infty,+\infty)$ 有内点，

则 $\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}X_k^2,\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$ 是完全的。

连续型分布. [例3] $X \sim U(a,b)$ 均匀分布.

显密度函数. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} \\ 0\end{cases} = I_{(a,b)}(x)\frac{1}{b-a}$ 不要着急化为指数型分布.

先找支撑: (a,b) 区间依赖参数 故 $U(a,b)$ 不是指数型.
支集

[例4]. $X\sim \Gamma(\alpha,\lambda)$. $\alpha, \lambda>0$

$f(x;\alpha,\lambda) = I_{(0,+\infty)}(x)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\boxed{x^{\alpha-1}}e^{-\lambda x}$

$e^{(\alpha-1)\ln x}$

支撑: $(0,+\infty)$ ✓.(再转化形式)

$e^{\ln x(\alpha-1)}$ $x^{\alpha-1}$

$= I_{(0,+\infty)}(x)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\boxed{e^{(\alpha-1)\cdot\ln x-\lambda x}}$

$e^{\boxed{(\alpha-1)\ln x}-\boxed{\lambda x}}$

h 仅未知 S 仅参.

C_1 $\alpha-1$ $T_1 \ln x$.
C_2 $-\lambda$ T_2 x.

$C_1=\alpha-1$ $T_1=\ln X$

$C_2=-\lambda$ $T_2=x$

$\varphi=(\sum_{k=1}^{n}T_1(X_k), \sum_{k=1}^{n}T_2(X_k))$

$=(\sum_{k=1}^{n}\ln X_k, \sum_{k=1}^{n}X_k)$ 充分统计量.

有内点. $(\alpha-1,-\lambda)$

Θ^*: $(\alpha-1,-\lambda)\in(-1,+\infty)\times(-\infty,0)$

$m\vee p$?

有内点. 故也完全.

例: 二项分布. $f(x;p)=C_m^x p^x(1-p)^{m-x} = C_m^x(1-p)^m(\frac{p}{1-p})^x$ $e^{\ln\frac{p}{1-p}\cdot x}$.

$\cancel{X}$: $T(X)$.

[例5]. $X\sim P(\lambda)$ $\varphi=\sum X_i$ 充分. 自然参数 $\ln\frac{p}{1-p}$: $(-\infty,+\infty)$ 故 φ 也完全.

$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $x=0,1,2,\cdots$ $f=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\frac{1}{x!}e^{x\ln\lambda}$

φ. $\ln$ ✓. $(-\infty,+\infty)$

支撑 N 0 1.

$\boxed{T\to\varphi}$

$\varphi=\sum X_i$

$=\lambda^x(x!)^{-1}e^{-\lambda}$

$=\frac{1}{x!}e^{x\ln\lambda}\cdot e^{-\lambda}$

h. S.

$C(\lambda)=\ln\lambda$

$T(x)=x$

充分统计量(求和)指数. $\sum_{k=1}^{n}T(X_k)=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

$C(\lambda)=\ln\lambda\in(-\infty,+\infty)$ 有内点. $\lambda\in\Theta=(0,+\infty)$

故也完全. $\lambda^*=\ln\lambda\in\Theta^*=(-\infty,+\infty)$

例16) $X\sim G(p)$ 几何分布

$f(x;p)=(1-p)^{x-1}p \quad x=1,2,\cdots$

支撑 $1,2,\cdots$

$$\underbrace{p}_{S(p)}\cdot e^{\overbrace{(x-1)}^{T}\overbrace{\ln(1-p)}^{C(p)}}$$ 换底，指数保留。

$$=\underbrace{pe^{-\ln(1-p)}}_{S(p)}e^{\overbrace{x}^{T}\overbrace{\ln(1-p)}^{C(p)}}$$

$\sum_{k=1}^{n}T(X_k)=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 充分

$p\in(0,1)$

$\ln(1-p)\in(-\infty,0)$ 自然参数空间有内点. 充、完

例17 $X\sim B(m,p)$ m已知 $p\in(0,1)$未知 $f(x;p)=C_m^x p^x(1-p)^{m-x}$

支撑 $0,1,\cdots,m$

$$=\underbrace{C_m^x}_{h}\underbrace{(1-p)^m}_{S}(1-p)^{-x}p^x \quad (\tfrac{p}{1-p})^x$$

$$=\underbrace{(1-p)^m}_{S}\underbrace{C_m^x}_{h}e^{\overbrace{x}^{T}\overbrace{\ln\frac{p}{1-p}}^{C}}$$

判断内点. 定理. 充分 or 完全. (乘或)

充分统计量:样本之和 $\sum_{k=1}^{n}X_k$.

Mar 26, 2024

考

充分完全统计量 找 (一致)最小方差无偏估计 (UMVUE)

定义：设 $\varphi=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是$g(\theta)$的无偏估计 ($E\varphi=g(\theta)$)，且对一切无偏估计 $\psi=\psi(X_1,X_2,\cdots X_n)$均有 $M_\theta(\varphi)\le M_\theta(\psi)$, $\forall\theta\in\Theta$

则称φ是$g(\theta)$的一致——

$M_\theta(\varphi)=E_\theta(\varphi-g(\theta))^2=E_\theta(\varphi-E\varphi)^2=D_\theta\varphi$

$E_\theta\varphi=g(\theta) \quad \forall\theta\in\Theta$

考 BLS定理：若$\varphi=\varphi(X_1,X_2,\cdots X_n)$是充分完全统计量 $\psi=\psi(\varphi)$ (persai) 是$g(\theta)$的无偏估计，则$\psi(\varphi)$是$g(\theta)$的UMVUE.

$\psi(\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n))$ $E(\psi(\varphi))=g(\theta)$

例1. $X\sim B(m,p)$ m已知 $p\in(0,1)$未知 寻找p的最小方差无偏估计

已知：$\sum_{k=1}^{n}X_k$是充分完全统计量 φ

由于 $E\varphi=E(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}X_k}_{\varphi})=n\,EX=n\cdot mp \Rightarrow E(\frac{1}{mn}\varphi)=p$

从而 $\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 为p的UMVUE

$\frac{1}{m}\bar{X}$

根据充分完全…… 构造无偏估计

$\boxed{\text{期望} = \text{参数值}}$ 构造期望与等 → 2个参数. 直接 $E\varphi_1 = \cdots$ 倒写出 $\psi(\varphi)$.

例1.2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

已知 $\varphi = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) \triangleq (\varphi_1, \varphi_2)$ 总体期望 样本

$E\varphi_1 = n \cdot EX = n\mu \Rightarrow E\left(\frac{1}{n}\varphi_1\right) = \mu \Rightarrow \frac{1}{n}\varphi_1 = \bar{X}$ 为 μ 的UMVUE

$E(S^2) = \sigma^2$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\varphi_2 - \frac{1}{n}\varphi_1^2\right) \Rightarrow S^2$ 为 σ^2 的UMVUE

修正的样本方差

思考 $X \sim P(\lambda)$ 求 λ 的UMVUE

例3 $X \sim E(\lambda)$ 求 λ 的 UMVUE

$\sum_1^n X_k$

$E\varphi = nEX$.

已知. $\varphi = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 是 $E(\lambda)$ 的充分完全统计量

λ 无偏估计是什么? 总体期望: $\frac{1}{\lambda}$ EX

$\frac{E\varphi}{\varphi} = nEX = \frac{n}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{n}\varphi = \bar{X}$ 是 $\frac{1}{\lambda}$ 的 UMVUE

$\varphi = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \Gamma(n, \lambda)$

$E(\varphi^{-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1} f_\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-2} e^{-\lambda x}\,dx$ $\lambda x = t$

$\frac{\lambda}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-t}\,dt$

$= \frac{\lambda}{\Gamma(n)}\Gamma(n-1) = \frac{\lambda}{n-1}$

$\Rightarrow E\left((n-1)\varphi^{-1}\right) = E\left(\frac{n-1}{n\bar{X}}\right) = \lambda$

$\Rightarrow \frac{n-1}{n\bar{X}}$ 为 λ 的 UMVUE.

$\varphi = (X_{(1)}, X_{(n)})$

例4: $X \sim U(a, b)$ $a < b$ 未知 均匀分布的充分完全统计量: $\varphi = (X_{(1)}, X_{(n)})$

不属于指数型分布但有充分完全统计量

用 φ 构造 a, b 的无偏估计

是什么, 再用 φ 表示 / 看 φ 与无偏估计有什么关系. 这先看 $X_{(1)}, X_{(n)}$ 之期望

$$\begin{cases} E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}b + \frac{n}{n+1}a \\ E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}b + \frac{1}{n+1}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E\left(\frac{n}{n-1}X_{(1)} - X_{(n)}\right) = a \\ E\left(\frac{n}{n-1}X_{(n)} - \frac{1}{n-1}X_{(1)}\right) = b \end{cases}$$

不考

Cramér-Rao 不等式

定义(正则分布) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x;\theta)$ 满足

① 参数空间 Θ 是 R^1 中的开区间 只有一个参数单参数、 (有限区间 (a,b) 无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 或半无限区间 $(0,+\infty)$ 等).

$E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2$ 称为Fisher信息量 记为 $I(\theta)$

② 对 $\forall x$ 及 $\theta \in \Theta$. 导数 $\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)$ 存在

③ $f(x;\theta)$ 的支撑 $\{x: f(x;\theta) > 0\}$ 与 θ 无关

④ $f(x;\theta)$ 的积分与微分可交换 即 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx}_{1} = 0$.

$X \to f(x;\theta)$ 函数

⑤ $E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2$ 存在且 > 0 则称X为正则分布, 上述条件为C-R正则性条件.

注：1. 若为离散型分布，…

2. 指数型分布一定是正则分布

$\frac{1}{f}\cdot f(x;\theta)\cdot f(x;\theta)$

3. $E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\cdot \underbrace{f(x;\theta)}_{\text{密度函数}}\,dx = \int_{\{x:f>0\}} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\,dx = 0$

X为正则分布　　$\int_{\{x:f>0\}}$

$\Rightarrow D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 = I(\theta)$　（若X为正则分布.）

$EX^2-(EX)^2 = EX^2 - 0$

4. 易見 みます. $I(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 = \int_{\{x:f>0\}} \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right|^2 \underbrace{f(x;\theta)}_{\text{密度函数}}\,dx = \int_{\{x:f>0\}} \frac{1}{f}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}f\right|^2 dx$

$\frac{1}{f^2}$

另一方面 $E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right) = \int_{\{x:f>0\}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta)\, f(x;\theta)\,dx$

$\partial_\theta\left(\frac{1}{f}\partial_\theta f\right)$

$\partial_\theta\left(\frac{1}{f}\partial_\theta f\right)$

$-\frac{1}{f^2}\cdot f\left|\frac{\partial}{\partial\theta}f\right|^2$

$= \int_{\{x:f>0\}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f\,dx - \int_{\{x:f>0\}} \frac{1}{f}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}f\right|^2 dx$

$\parallel$ 0?　　　$\parallel$ I_θ.

(☆) $\int \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f\,dx \overset{\text{if}}{=\!=} \frac{\partial}{\partial\theta}\int\frac{\partial}{\partial\theta} f\,dx = 0.$

从而若☆式成立，则 $I(\theta) = -E_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right)$

定理（单参数 C-R不等式）设总体X的密度函数为 $f(x;\theta)$ 满足 C-R正则性条件 ①-⑤

$g(\theta)$ 是参数空间 Θ 上的可微函数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本，$\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计.

若满足：$\frac{d}{d\theta}E_\theta\varphi = \frac{d}{d\theta}\int_R\int_R\cdots\int_R \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot\prod_{k=1}^n f(x_k;\theta)\,dx_1\cdots dx_n$

$= \int_R\int_R\cdots\int_R \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{d}{d\theta}\left(\prod_{k=1}^n f(x_k;\theta)\right)dx_1\cdots dx_n$　⑥　积分/求导可换序

则方差有下界：$D_\theta(\varphi) \geq \frac{|g'(\theta)|^2}{nI(\theta)}$　　其中 $I(\theta)$ 为 Fisher 信息量，$\frac{|g'(\theta)|^2}{nI(\theta)}$ 称为 C-R下界.

C-R：
- 连续 $\int$
- 离散 Σ.

Mar 29, 2024

$X\sim E(\lambda)$　$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$\varphi = \sum_{k=1}^n X_k \sim \Gamma(n,\lambda)$　　$Y = \varphi^{-1} = h(\varphi)$

$EY = \int_R h(x) f_\varphi(x)\,dx$　　$= g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n X_k}$

① 知道 φ 的分布.　　$EY = \int_R\int_R\cdots\int_R g(x_1,\cdots,x_n)\prod_{k=1}^n f_X(x_k)\,dx_1\cdots dx_n$

② 不知道 φ 的分布 只知道样本.

$EY = \int_R x f_Y(x)\,dx$

③ 知道 Y 的分布

$X \sim f(x;\theta)$ ① $\theta \in \Theta$ Θ 为 R^1 中的开区间 ② $\forall x, \theta$ $\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)$ 存在 ③ $\{x: f>0\}$ 与 θ 无关

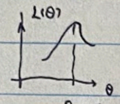
与样本无关
只依赖总体的分布
是总体的 Fisher 信息量.

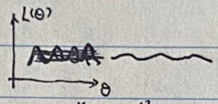
④ $\int_R \frac{d}{d\theta} f(x,\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_R f(x;\theta)\,dx = 0$ 可交换 ⑤ $I(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 > 0$ Fisher 信息量.

$\{X: X \sim f(x;\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ 分布族 是正则分布. ⑥ $\frac{d}{d\theta} E_\theta \varphi = g'(\theta) = \underbrace{\int_R \cdots \int_R \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right) dx_1 \cdots dx_n}_{\varphi \text{的期望}}$

$$D_\theta(\varphi) \geq \frac{|g'(\theta)|}{n I(\theta)}$$ 方差越小越好

Fisher: $L(\theta) = L(\theta; x_1, \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$





突出和曲率有关

θ の二阶导数. $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} L(\theta)$ / $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\theta)$

$$I(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 \xlongequal{\text{一定条件下}} -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right)$$

$$nI(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right) = -\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_k;\theta)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\sum_{k=1}^{n}\ln f(X_k;\theta)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln\prod_{k=1}^{n} f(X_k;\theta)\right).$$

每个样本X和总体同分布

$$= -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\theta; x_1, x_2, \cdots x_n)\right)$$

(2.3) $$\iint_{R^n} \frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx_1 \cdots dx_n = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{联合密度函数的积分:1}}\right)$$

考虑一般情: $n=2$ $$\iint_{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[f(x_1;\theta) \cdot f(x_2;\theta)\right] dx_1 dx_2$$

$$= \iint \partial_\theta f(x_1)\cdot f(x_2) + f(x_1)\,\partial_\theta f(x_2)\,dx_1 dx_2$$

$$= \underbrace{\int_R \partial_\theta f(x_1)\,dx_1}_{0} \cdot \int_R f(x_2)\,dx_2 + \int_R f(x_1)\,dx_1 \cdot \underbrace{\int_R \partial_\theta f(x_2)\,dx_2}_{0}$$

证明: 记 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ $\Omega = \{\underset{(x_1,\cdots x_n)}{x} \in R^n \quad \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) \neq 0\}$

由于 $E\varphi = g(\theta)$

从而 $$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta}E\varphi = \frac{d}{d\theta}\iint_\Omega \varphi(x)\cdot\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx = \iint_\Omega \varphi(x)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right)dx$$

$$= \iint_\Omega \varphi(x)\frac{d}{d\theta}\left(e^{\ln\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}\right)dx$$

$$= \iint_\Omega \varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\, e^{\ln\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}\,dx$$

$$= \iint_\Omega \varphi(x)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right]dx$$

e 和指数拿下来了

另一方面, 由 (2.3) 得: $$0 = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx = \iint\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right]dx$$

从而 $|g'(\theta)| = |g'(\theta) - 0\cdot g(\theta)| = \left| \iint_\Omega \varphi(x)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right]dx\right.$

$\left. - \iint_\Omega g(\theta)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right]dx \right|$

$= \left|\iint_\Omega \underline{(\varphi(x) - g(\theta))}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right]\left[\underline{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}\right]dx\right|$

Hölder 不等式

$D\varphi \geqslant \frac{|g'(\theta)|}{n\cdot I(\theta)}$

$$\int_\Omega |f(x)\cdot g(x)|\,dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \underline{\left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall\, 1<p,\ q<+\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$p=q=2 \Downarrow$ 　　有∞时把积分变成 max.

$$\le \left(\iint_\Omega (\varphi(x)-g(\theta))^2 \underline{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)dx}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\iint_\Omega \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right|^2 \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

方差

$$= \left(\underline{E(\varphi(x)-g(\theta))^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\underline{E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $Y_k = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)$

令 $Y = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$

则 $I(\theta) = EY^2$ 　 $EY=0$ 且 Y_k 与 Y 同分布

从而 $E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} EY_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \underset{\text{独立}}{E(Y_i \cdot Y_j)} = nEY^2 + \sum_{i,j=1}^{n} EY_i\, EY_j = nI(\theta)$

θ 是 g(θ) 的 ~~~~ 无偏估计 ~~~~

~~~~

验证泊松 是正则的.

例1. $X \sim P(\lambda)$ 找最小方差无偏估计.

① $\lambda \in (0,+\infty)$ 为R中开区间 ✓ 　② $f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ 　 $\frac{d}{d\lambda}f(x;\theta) = \frac{x\cdot\lambda^{x-1}}{x!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ ✓

③ 支撑 N 与λ无关. 　④ $\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{d}{d\lambda}f(x;\lambda) = \sum_{x=1}^{+\infty}\frac{x\lambda^{x-1}}{x!}e^{-\lambda} - \sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ ✓

定义域

$= \sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} - \sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = 0$

⑤ $\ln f(x;\lambda) = x\ln\lambda - \ln x! - \lambda$

$\frac{d}{d\lambda}\ln f(x,\lambda) = \frac{x}{\lambda} - 1 \Rightarrow \underline{I(\lambda)} = E\left(\frac{d}{d\lambda}\ln f(x,\lambda)\right)^2 = E\left(\frac{x}{\lambda}-1\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}EX^2 - \frac{2}{\lambda}EX + 1 = \underline{\frac{1}{\lambda}} > 0$ ✓

(draft $EX=\lambda$ $DX=\lambda$ 　 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2$)

$g(\lambda) = \lambda$ 　 $\frac{|g'(\lambda)|}{nI(\lambda)} = \frac{1}{n\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n}$

$\varphi = \bar{X}$

$E\varphi = g(\lambda)$

$D\varphi = \frac{DX}{n} = \frac{\lambda}{n}$

验证.

例2. 验 $X \sim N(\mu, 1)$ 是正则的

① $\mu \in (-\infty,+\infty)$ ✓ 　② $f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$ ✓ 　③ 支撑 $(-\infty,+\infty)$ ✓
~~~~

④ $\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\mu} f(x;\theta)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\,dx$

$x-\mu=t$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0$ ✓

奇函数

⑤ $I(\mu)=E\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln f(x;\mu)\right)^2 = E|x-\mu|^2 = 1$

$\ln f(x;\mu) = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}(x-\mu)^2$

$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln f(x;\mu) = x-\mu$

$x-\mu \sim N(0,1)$ $\quad Ex^2 = Dx+(Ex)^2$

$\Rightarrow N(\mu,1)$为正则分布

$g(\mu)=\mu$的C-R下界：$\frac{|g'(\mu)|}{n\,I(\mu)} = \frac{1}{n}$

$\varphi=\bar{x}$，$E\varphi=E\bar{x}=\mu$ 最小方差无偏估计

$E\bar{x}=\frac{1}{n}D\bar{x}=\frac{1}{n}$

例3. 均匀分布 $X\sim U(0,\theta)$ 是否正则分布.

①. $\theta\in(0,+\infty)$ ✓. ② $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta} & 0<x<\theta\\ 0 & x\le\theta\end{cases}$ ✓. 积. ③. 支撑 $(0,\theta)$ ✗. $\Rightarrow$ 不是正则分布

看C-R下界. $\varphi=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ $\quad E\varphi=\theta$ $\quad D\varphi=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$g(\theta)$ C-R下界 $\quad \frac{|g'(\theta)|}{n\cdot I(\theta)}$ 无意义.

Apr 2. 2024 　C-R 不等式 (二项分布 指数分布)

$D(\varphi) \geq \dfrac{[g'(\theta)]^2}{n I(\theta)}$

相合性 (大样本性质), $n \to \infty$ 　$\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \to g(\theta)$ $n \to +\infty$

不考

定义: 设 $\varphi_n = \varphi(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计, n 为样本容量

1. 若对 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\|\varphi_n - g(\theta)\| \geq \varepsilon) = 0$ 　即 φ_n 依概率收敛到 $g(\theta)$, 则称 φ_n 为 $g(\theta)$ 的相合估计

$\|\cdot\|$ 范数 (距离) 　$\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

2. 若 $P(\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = g(\theta)) = 1$ 则 φ_n 几乎处处收敛到 $g(\theta)$, 则称 φ_n 是 $g(\theta)$ 的强相合估计.

① 强相合估计 一定是 相合估计

② 由于样本矩 $\xrightarrow{a.e}$ 总体矩, ~~再若参数~~ 从而: 若参数是总体矩的连续函数

则矩估计是强相合估计.

例1. $X \sim B(1, p)$ 　$\hat{p}_{MLE} = \bar{X} \xrightarrow{a.e} EX = p$ 　以介 $\bar{X}$ 是 P 的强相合估计.

例2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 　$\hat{\mu}_{MLE} = \bar{X}$ 　$\hat{\sigma}^2_{MLE} = S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \xrightarrow{a.e} DX = \sigma^2$

$\downarrow a.e$

EX

§2.3 　置信区间 (区间估计)

~~三大分布 上α~~

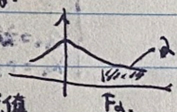
上侧分位数

定义: 随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 对于给定的 $\alpha \in (0, 1)$

若实数 F_α 满足 $P(X > F_\alpha) = \alpha$.

则称 F_α 为 X 的上 α 分位数

$F(X) = P(X \leq x)$ 　F_α 是横轴上一个点值



性质 ① $P(X > F_\alpha) = \alpha = P(X \leq F_{1-\alpha}) = F(F_{1-\alpha})$

② $F(F_\alpha) = 1 - \alpha$

③ $P(F_\beta \leq F \leq F_\alpha) = \beta - \alpha$ 　$(\alpha < \beta)$

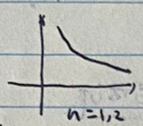
证明: ① $\alpha = P(X > F_\alpha) = 1 - (1-\alpha) = 1 - P(X > F_{1-\alpha}) = P(X \leq F_{1-\alpha}) = F(F_{1-\alpha})$

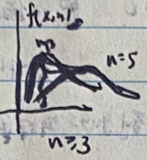
② ✓ 　③ $P(F_\beta < X \leq F_\alpha) = P(X \leq F_\alpha) - P(X \leq F_\beta) = F(F_\alpha) - F(F_\beta) = (1-\alpha) - (1-\beta)$ 　$\beta - \alpha$

卡方分布 若随机变量 X 的概率密度为 $f(x;n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

则称 X 服从自由度为 n 的卡方分布 记为 $X\sim\chi^2(n)$ n 称为自由度

$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ $(\alpha>0)$ 为伽马函数





等价定义

$\boxed{\text{定理 (*) 若 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 独立同分布于 } N(0,1) \text{ 则 } \sum_{k=1}^{n}X_k^2 \sim \chi^2(n)}$

自由度为 n 的卡方分布

只考 $\chi^2(n)$ $t(n)$

证明: 记 $\varphi=\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 则 $F_\varphi(x)=P(\sum_{k=1}^{n}X_k^2\le x)$

若 $x\le 0$ 则 $F_\varphi(x)=0$

若 $x>0$ 则 $P(\sum_{k=1}^{n}X_k^2<x)$

$=\iint_{\sum_{k=1}^{n}x_k^2<x}\prod_{k=1}^{n}f_{X_k}(x_k)dx_1\cdots dx_n$ $\{\varphi(x_1,\dots,x_n)<x\}$ $A=\{(x_1\cdots x_n)\ \sum_{k=1}^{n}x_k^2<x\}$

$P(r<n)=\iint_A f_{XY}$

$=\iint_{\sum_{k=1}^{n}x_k^2<x}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}dx_1\cdots dx_n$

作球坐标变换 $\begin{cases}x_1=r\cos\theta_1\\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\ \vdots\\ x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_2\sin\theta_{n-1}\end{cases}$ $\boxed{\text{没有 }\theta_n}$

其中 $\begin{cases}0<r<\sqrt{x}\\ 0\le\theta_1\le\pi\\ 0\le\theta_2\le\pi\\ 0\le\theta_{n-2}\le\pi\\ 0\le\theta_{n-1}\le 2\pi\end{cases}$ Jacobi 行列式

$J=\dfrac{\partial(x_1\cdots x_n)}{\partial(r,\theta_1\cdots\theta_{n-1})}=r^{n-1}D(\theta_1,\cdots\theta_{n-1})$

其中 $D(\theta_1,\cdots\theta_{n-1})$ 与 r 无关

(国外为准)

~~θ~~

~~$P(\sum_{k=1}^{n}X_k^2\ \ x)$~~

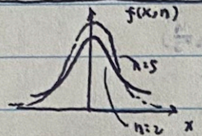
t分布

定义：若随机变量T的概率密度函数为 $f(x;n)=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{1}{n}x^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ $x\in R$

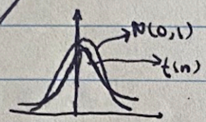
则称T服从自由度为n的t分布 记为 $T\sim t(n)$

定理：若 $X\sim N(0,1)$ $Y\sim\chi^2(n)$ 且X, Y独立 则 $\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

n是Y的自由度

① 

② $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x;n)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$



决定区间估计的好坏

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x;n)=0$

③ 当n=1时 $f(x;1)=\dfrac{\Gamma(\frac{1+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot=\dfrac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\cdot(1+x^2)^{-1}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ 柯西分布

期望不存在

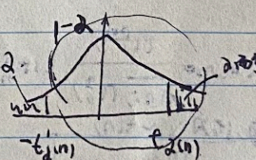
④ 当n≥2时 $\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n}x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ (只比较....)

偶·奇=奇函数. 期望为0 方差为 $\frac{n}{n-2}$ (n=2时方差不存在)

⑤ 上α分位数 $t_\alpha(n)$ 即 $P(T>t_\alpha(n))=\alpha$ $T\sim t(n)$

由于 $f(-x;n)=f(x;n)$ 从而 ~~$t_{1-\alpha}(n)=$~~ $t_\alpha(n)$)

$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$



$t_{1-\alpha}(n)$.

证明② $f(x;n)=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{1}{n}x^2)^{-\frac{n+1}{2}}=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\underbrace{(1+\frac{1}{n}x^2)^{\frac{n}{x^2}}}_{\boxed{e}}\exp\underbrace{(-\frac{n+1}{2}\frac{x^2}{n})}_{\boxed{-\frac{1}{2}}}$ $n\to+\infty$ $\to\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$

幂指数 $\boxed{(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}}$

N(0,1) wocao

T. 结论: $a>0$ $\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=\dfrac{1}{x^a}+O(\dfrac{1}{x^{a+1}})$ $(x\to+\infty)$

等价无穷小

$\Rightarrow\dfrac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x^a}+O(\frac{1}{x^{a+1}})}=\dfrac{x^a}{1+O(\frac{1}{x})}\approx x^a$ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

从而 $P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 < x\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^{n-1} |D(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})|\, dr\, d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} |D(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})|\, d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1}\, dr$

$\overset{r^2=t}{=} C_n \frac{1}{2}\int_0^{x} e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, dt \Rightarrow f_\varphi(x) = \frac{d}{dx}F_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} C_n e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{n}{2}-1} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

由于 $F_\varphi(+\infty) = \frac{1}{2} C_n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, dt = 1$

$\overset{t=2y}{=} 2^{\frac{n}{2}-1} C_n \int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y}\, dy = 2^{\frac{n}{2}-1} C_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

$\Rightarrow C_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

注: ① $X \sim \chi^2(n)$ $\quad P(X > \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$

② 若 $X \sim N(0,1)$，则 $X^2 \sim \chi^2(1)$

③ $\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $X \sim \chi^2(n)$ 则 $EX^k = \frac{2^k \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow EX = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2\cdot\frac{n}{2} = n. \quad DX = 2n$

⑤ 再生性 若 $X \sim \chi^2(n)$ $Y \sim \chi^2(m)$ 且 X, Y 独立 则 $X+Y \sim \chi^2(n+m)$

Pf⑤: $X \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad Y \sim \chi^2(m) = \Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad X, Y$ 独立

$\Rightarrow X+Y \sim \Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(m+n)$

t分布（学生氏分布）

定义. 若随机变量 X 的密度函数为 $f(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $\quad x \in R$

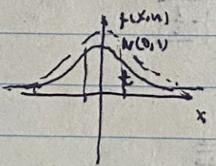
则称 X 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $X \sim t(n)$

写何定义

定理（☆） 若 $X \sim N(0,1)$ $\quad Y \sim \chi^2(n)$ 且 X, Y 独立

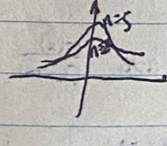
则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ 考

密度函数



偏 范R

n↑ t 越高



Apr 7, 2024

标准正态分布 $N(0,1)$ 卡方分布：设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$ 则称 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 所服从的分布称为自由度为n的卡方分布. 记为 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

$X \sim \chi^2(n)$, $EX = n$ $\quad DX = 2n$

$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 伽马函数 $\quad$ 满足再生性 $Y \sim \chi^2(m)$ X, Y 独立 则 $X+Y = \chi^2(m+n)$

X, Y 独立
$f_1 f_2, \dots f_n$
则 $f_1(X)$ $f_2(Y)$…
独立

④ $T \sim t(n)$ 则 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 其中 $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ X, Y 独立 $\Downarrow$ X^2, Y 独立

从而 $DT = ET^2 - (ET)^2 = ET^2$

$$= E\left(\frac{X^2}{Y/n}\right) = nE\left(\frac{X^2}{Y}\right) = nEX^2 E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{n}{n-2}$$

$X^2 \sim \chi^2(1)$ $EX^2 = 1$

$$\boxed{EY^{-1}} = \int_R \frac{1}{x} f_Y(x)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$\Rightarrow \Gamma$.

$$\overset{x=2y}{=} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-2} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{n}{2}-1} = \boxed{\frac{1}{n-2}}$$

F分布 定义: $f(x;m,n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} & x>0 \\ 0 \end{cases}$

m 第一自由度
n 第二自由度

$\boxed{\text{定理(}\star\text{) 若 } X \sim \chi^2(m)\ Y \sim \chi^2(n)\ X, Y \text{ 独立 则 } \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)}$

注: ① 若 $F \sim F(m,n)$ 则 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

② 若 $T \sim t(n)$ 则 $T^2 \sim F(1,n)$ 不考

$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ X, Y 独立.

$T^2 = \frac{X^2}{Y/n} = \frac{X^2/1}{Y/n}$ $X^2 \sim \chi^2(1)$

③ 记 $F_\alpha(m,n)$ 为 F(m,n) 分布的上 α 分位数 则 $F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

证明: 设 $X \sim F(m,n)$ ~~则 Y =~~ $Y = \frac{1}{X}$ $Y \sim F(n,m)$
服从…分布

从而 $P(X \le F_{1-\alpha}(m,n)) = 1 - P(X > F_{1-\alpha}(m,n)) = 1-(1-\alpha) = \alpha$

$= P\left(Y \ge \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right)$ $\Rightarrow \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)} = F_\alpha(n,m)$

④ 若 $X \sim F(m,n)$ 则当 $n>2$ 时 $EX = \frac{n}{n-2}$

当 $n>4$ 时 $DX = \frac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}$

Pf ④
预设: $X \sim F(m,n)$
则 $\exists Y \sim \chi^2(m)$ $Z \sim \chi^2(n)$
且 Y, Z 相独立 s.t. $X = \frac{Y/m}{Z/n}$

$\Rightarrow EX = E\left(\frac{Y/m}{Z/n}\right) = \frac{n}{m} EY\, E\left(\frac{1}{Z}\right)$, $EY \to m$, $E\left(\frac{1}{Z}\right) \to \frac{1}{n-2}$

$= \frac{n}{n-2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = E\left(\frac{Y/m}{Z/n}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} E(Y^2 \cdot Z^{-2})$

$= \frac{n^2}{m^2} E(Y^2) E(Z^{-2})$

EZ^{-2}
$= \int_R \frac{1}{x^2} f_Z(x)dx$

$DX = 2n$
$EX = n$.
$E(Y^2) = 2n + n^2$

thinking my world   Jun Leng?

抽样分布定理
    统计量的分布.

定理3.2 设 X_1, X_2, X_n 相互独立 且 $X_k \sim N(\mu_k, \sigma^2)$ $k=1,2,\cdots,n$

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵 $Y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}X_k$ $i=1,2,\cdots n$

则 $Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ 相互独立 且 $Y_i \sim N(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mu_k, \sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,n)$

$A^TA=E$
$A^{-1}=A^T$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

正交变换 保内积 $\left\{\begin{array}{l}\text{保长度}\\ \text{保角度}\end{array}\right.$

旋转/对称/平移

等距变换

$Y_i \sim N(\quad)$

$EY_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}EX_k$

$DY_i=\sum_{k=1}^{n} D(a_{ik}X_k)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 DX_k=(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2)\sigma^2=\sigma^2$

$\sqrt{\|\cdot\|^2}=1$

$Y_i \sim N(\ ,\ )$

正态分布: 再生性 ?

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(X\sim N(c\mu, c^2\sigma^2)$

即 $E(cX)=c\mu$

$D(cX)=c^2\sigma^2$

$Y\sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$

则 $X\pm Y\sim N(\mu\pm\bar{\mu}, \sigma^2+\bar{\sigma}^2)$

c不是1的.
上下两边之积.

Apr 9, 2024

~~定于~~证明: 不妨设 $\mu_k=0$ $\forall k=1,2,\cdots,n$ 即 $X_k\sim N(0,\sigma^2)$ 从而 $X_1, X_2\cdots X_n$ 联合密度函数为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}}$

~~令……~~ 对给定 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 令 $D=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\in R^n: \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\le t_i, i=1,2,\cdots,n\}$

则 $P(Y_1\le t_1, Y_2\le t_2, \cdots, Y_n\le t_n)=P(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}X_k\le t_1, \sum_{k=1}^{n} a_{2k}X_k\le t_2, \cdots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk}X_k\le t_n)$ 联合概率. $P(X\in A)=\iint_A f \, dx$

$$=\iint_D \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

记 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$ $dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$ 作变换 $x=A^{-1}y$ $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in R^n$ 即 $\underline{y=Ax}$

由于A为正交矩阵, 从而 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2=\sum_{k=1}^{n} y_k^2$, $dx=\pm dy$

$x=A^{-1}y=A^Ty$

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots y_n)}\right|=1.$$

从而 $P(Y_1\le t_1, Y_2\le t_2 \cdots Y_n\le t_n)=\int_{-\infty}^{t_n}\cdots\int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}y_k^2}dy_1dy_2\cdots dy_n = \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}}dy_k$ (☆)

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}}$$

取极限 $(t_2,\cdots,t_n)\to(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)$, 则 $P(Y_1\le t_1, Y_2\le t_2, \cdots Y_n\le t_n)\to P(Y_1\le t_1)$

$$\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}}dy_k\to\int_{-\infty}^{t_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}}dy_1$$

从而 $Y_1\sim N(0,\sigma^2)$, 同理 $Y_k\sim N(0,\sigma^2)$ $k=2,\cdots,n$ 从而(☆)右边 $=\prod_{k=1}^{n}P(Y_k\le t_k)$

从而 $P(Y_1\le t_1 \cdots Y_n\le t_n)=\prod_{k=1}^{n}P(Y_k\le t_k)$ 从而 $Y_1\cdots Y_n$ 独立.

若 $\mu_k\ne 0$ 则作变换 $X_k-\mu_k=X_k'$

(X,Y)

$F(x,y)$

$F(x,+\infty)=F_X(x)$

$F(+\infty,y)=F_Y(y)$
边际分布函数

$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots dy_2$

$N(0,\sigma^2)$

正态总体，~~考~~，会用

$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2} \frac{n\sigma^2}{n^2}$

μ σ^2

定理3.3 抽样分布定理

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立且都服从$N(\mu, \sigma^2)$分布

令$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ $\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$，则：

① $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \longrightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

③ $\overline{X}$与S^2相互独立 （只有正态分布具此性质）

证明：取n阶正交矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$ s.t. $a_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $j = 1, 2, \cdots, n$.

令$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ 即$Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k$ $i = 1, 2, \cdots, n$

则由Th3.2知：$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$相互独立 且：$Y_1 \sim N(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot\mu, \sigma^2) = N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$

$Y_i \sim N(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\mu, \sigma^2) = (0, \sigma^2)$ $\quad i = 2, 3, \cdots, n$

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} a_{ik} = 0$ $\quad \forall i = 2, 3, \cdots, n.$ $\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0.$

由于 $Y_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}X_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k = \sqrt{n}\,\overline{X}$ $\quad \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

又由于A为正交矩阵 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2$ 从而 $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n(\overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - Y_1^2 = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$

从而 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{Y_k}{\sigma}\right)^2$ $\quad \frac{Y_k}{\sigma} \sim (0, 1)$ $k \geq 2$

$\sim \chi^2(n-1)$

▲

注：n=2 $\quad X_1, X_2$ 独立同分布于$N(\mu, \sigma^2)$

$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ $\quad S^2 = \frac{1}{2-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2] = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$

$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ $\quad \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} = \frac{S^2}{\sigma^2}$

$\Rightarrow \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$ $\quad \Rightarrow \chi^2(1)$ $\quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

定理：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(X_1, X_2, \cdots X_n)$为样本 $\quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ $\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$

则：① $U \stackrel{d}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ $\qquad$ ② $T \stackrel{d}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2) \Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ $\qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \frac{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

例：设(X_1, X_2)为取自正态总体$N(0, \sigma^2)$的样本，求$\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2}$的分布

$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ 标准化. $\quad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$ $\quad \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

~~$X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$~~

$X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ $\quad \frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

$\Rightarrow \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} = \frac{\boxed{\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2}/1}}{\boxed{\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2}/1}}$ 是否相互独立？

$(X_1 + X_2)^2$ $\quad \boxed{2\overline{X}}$ $\qquad (X_1 - X_2)^2$ $\quad S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2 = \boxed{2S^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad 1+1 \quad 1-1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$= 2E$

Apr 12, 2024

区间估计 $P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2)$ 越大越好

定义及方法：设X为总体，$(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 为样本 $\theta \in \Theta$ 未知参数 $\varphi_1=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $\varphi_2=\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是两个统计量，$\varphi_1 \le \varphi_2$

若对 $\gamma \in (0,1)$ $\boxed{有P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2) \geq \gamma}$ 则称 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 为 $g(\theta)$ 的置信水平为 γ 的置信区间。

事先给定，控制概率下界 $\gamma \approx 1$ ($\cancel{\gamma}$ = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99 ---)

φ_1：置信下限 φ_2：置信上限 $[\varphi_1, +\infty)$ $(-\infty, \varphi_2]$ 都是有的

若 $\inf\limits_{\theta\in\Theta} P_\theta(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2) = \gamma$ 则称 γ 为置信系数

下确界

P γ = 置信系数.

$P \ge \gamma$ = 置信水平.

注：① $[\varphi_1, \varphi_2]$ 随机区间 长出随机性 包含 $g(\theta)$ 确定 的概率不低于 γ.

$g(\theta)$ 不具有随机性.

② 若认为"$[\varphi_1, \varphi_2]$ 包含 $g(\theta)$ 的真值"，则 ~~犯错~~ 持此观点犯错误的概率不超过 $1-\gamma$

只是概率上一部分包含

③ 评价标准：可靠度：$P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2)$

精度：$\varphi_2-\varphi_1$ 长度：随机变量 精度：求其期望.

$\cancel{E(\varphi_2-\varphi_1)}$ / $E(\varphi_2-\varphi_1)$ 等

④ 区间估计不唯一

⑤ 方法：枢轴量法 统计量法

定义：若样本函数 $\cancel{G(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ $G=G(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ 与参数 θ 有关 ①.

包含未知参数 θ

但其分布已知，则称 G 为枢轴量 ②

例：设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(X_1, \cdots, X_n)$ $\bar{X}$ $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$

μ, σ^2 未知 则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ✓ $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

修正的样本方差.

样本的标准差.

是枢轴量

利用枢轴量法建立区间估计步骤

Step 1: 先给出一个统计量 $T=T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，一般取为参数 $g(\theta)$ 的点估计量

不含未知参数

Step 2: 构造 T 与 $g(\theta)$ 的函数 $G(T;g(\theta))$ s.t G 的分布已知，即 G 为枢轴量.

Step 3: 找常数 c_1、c_2 s.t $P(c_1 \le G(T;g(\theta)) \le c_2) \ge \gamma$

Step 4: 作变形. $\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2 \ge \gamma$: 从不等式里把 $g(\theta)$ 解出来.

G 的. $g(\theta)$

$$P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2) \ge \gamma.$$

从而 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 为 $g(\theta)$ 的置信水平为 γ 的置信区间.

指数分布

$\lambda e^{-\lambda x}$

设 $X \sim E(\lambda)$ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本 求 λ 的置信水平为 γ 的置信区间

解 ① 取 $T=\lambda_{MLE}=\bar{X}^{-1}=\dfrac{n}{\sum_1^n X_k}$ 假正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 猜 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

② $\frac{1}{T}=\frac{1}{n}\sum X_k$ $\quad X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$

$\sum X_k \sim \Gamma(n,\lambda)$ $\quad cX\sim\Gamma(n,\frac{\lambda}{c})$

Γ 分布伸缩性.

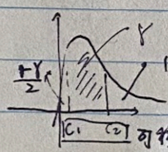
$\lambda\sum X_k\sim\Gamma(n,1)$

$2\lambda\sum X_k\sim\Gamma(n,\frac{1}{2})$

$n\cdot 2\lambda\frac{1}{T}=\boxed{2\lambda\cdot\sum X_k}\sim\chi^2(2n)$

取 $G=G(T,\lambda)=\dfrac{2\lambda n}{T}$ 则 $G\sim\Gamma(n,\frac{1}{2})=\chi^2(2n)$

③ 取 c_1, c_2, s.t $P(c_1\le G\le c_2) \underset{=}{\ge} \gamma$ $\quad G\sim\chi^2(2n)$



$\frac{1-\gamma}{2}$ (选择的 c_1, c_2) 可移动

不妨取 c_1, c_2 s.t:

$P(G<c_1)=P(G>c_2)=\frac{1-\gamma}{2}$

$P(G>c_1)=1-\frac{1-\gamma}{2}=\frac{1+\gamma}{2}$

即: $c_1=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)$ 为 $\chi^2(2n)$ 分布的上 $\frac{1+\gamma}{2}$ 分位数 $\quad c_2=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)$ 为 $\chi^2(2n)$ 分布的上 $\frac{1-\gamma}{2}$ 分位数.

④ 作变形

$$\gamma=P\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)\le\frac{2n\lambda}{T}\le\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)\right)$$

$\frac{2n\lambda}{T} = 2\lambda\sum_1^n X_k$

$$P\Bigg(\underbrace{\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}}_{\varphi_1}\le\lambda\le\underbrace{\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}}_{\varphi_2}\Bigg)$$

此置信区间通过分位数表示的

$$\left[\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}, \frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}\right]$$

卡方分布分位数

$n=10$ $\gamma=0.95$ $\quad \frac{1+0.95}{2}$

$\chi^2_{0.975}(20)$ $\quad n=20$ $\quad \alpha=0.975$ $\quad \frac{1-0.95}{2}$

$\chi^2_{0.975}(20)\approx 9.59$

$\chi^2_{0.025}(20)\approx 34.2$

均匀分布 $X \sim U(0,\theta)$ $(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本，求θ的置信水平为γ的置信区间.

利用 $\frac{X_{(n)}}{\theta}$

解: 求 $\frac{X_{(n)}}{\theta}$ 的分布?

$$\underset{\text{分布函数}}{F_{X_{(n)}}(x)} = \underset{\text{总体分布n次方}}{F_X^n(x)} = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 < x \le \theta \\ 1 & x > \theta \end{cases}$$

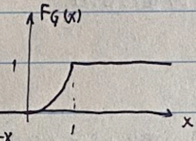
令 $G = \frac{X_{(n)}}{\theta}$

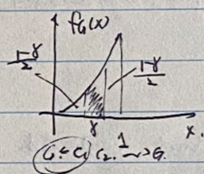
$$\underset{\text{G的分布函数}}{F_G(x)} = P(X_{(n)} \le \theta \cdot x) = F_{X_{(n)}}(\theta x) = \begin{cases} 0 & \theta x \le 0 \\ \left(\frac{\theta x}{\theta}\right)^n & 0 < \theta x \le \theta \\ 1 & \theta x > \theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^n & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

取 c_1、c_2. s.t $P(c_1 \le G \le c_2) = \gamma$

即，$F_G(c_2) - F_G(c_1) = \gamma \in (0,1)$
分布函数之差





不妨取 c_1, c_2 s.t: $P(G < c_1) = P(G > c_2) = \frac{1-\gamma}{2}$

c_1^n

$\boxed{c_1^n = \frac{1-\gamma}{2}}$

$P(G < c_2) = \frac{1+\gamma}{2}$ $\gamma \in (0,1)$
$G \in (0,1)$.

$\boxed{c_2^n = \frac{1+\gamma}{2}}$

$\Rightarrow c_1 = \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ $c_2 = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

从而 $\gamma = P\left(\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

$= P\left(\frac{X_{(n)}}{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} \le \theta \le \frac{X_{(n)}}{\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)$

32

会用

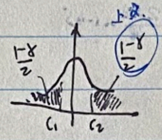
单正态总体的区间估计

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 估计均值 μ $\begin{cases} 方差已知 \ (\sigma^2=\sigma_0^2) \\ 方差未知 \ (用 S^2) \end{cases}$ 估计方差 σ^2 $\begin{cases} 均值已知 \\ 均值未知 \end{cases}$

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 已知 求 μ 的 --- γ 的 ---

解: $EX = \bar{x} = \mu$ 考虑 $\bar{X}$ $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$

抽象的量 样本均值的标准化: $U := \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



取 c_1, c_2 s.t. $P(c_1 \le U \le c_2) = \gamma$

不妨取 c_1, c_2 s.t. $P(U < c_1) = P(U > c_2) = \frac{1-\gamma}{2}$

即: $c_2 = u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 为标准正态分布的上 $\frac{1-\gamma}{2}$ 分位数.

上分位数

书上是 $\frac{}{=}$ 下分位数.

$c_1 = -c_2$

从而 $\gamma = P\left(-u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)$

$= P\left(\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)$

即 $\left[\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}, \ \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]$ 为 μ 的置信水平为 γ 的置信区间 ✓

也是置信系数

区间长度: $\downarrow \frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 即精度 $\uparrow$

$\sigma_0, n, \gamma \uparrow$ $\frac{1-\gamma}{2} \downarrow$ $u \uparrow$ 长 $\uparrow$ 精度 $\downarrow$

可靠度

不具有随机性,就是一个常数

记住,
考试套用题 直接用

$\left[\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}, \ \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]$

$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right) = \underset{0.95}{\gamma}$. 即 $P\left(\mu \in \left[\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}, \ \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]\right) = \gamma = 0.95$

100个样本均值 100组 10个

100个区间

大概有95个包含 μ

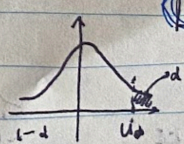
随机变量: $\bar{X}$ Nice! 我 Right!

故区间是随机区间

Apr 16, 2024

$P(X \ge u_\alpha) = \alpha$ 与 $\Phi(x)$ 为互补

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



$\boxed{u_\alpha \Rightarrow \Phi(1-\alpha) 查表可得值.}$

$\Phi(u_\alpha) = 1-\alpha$

$\Phi(u_{0.5}) = 0.95$

查表: $u_\alpha = u_{0.5} \approx 1.65$

$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 可靠度

精度.

$\gamma \uparrow$
$\alpha \downarrow$
u_α 右移
长度越长
精度越差

提高 n 样本容量

例1. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2已知 $=4$ $(X_1,\cdots,X_n)$为样本

(1) 当$n=16$时 求μ的置信系数为0.9，0.95的区间长度

$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}}$ $\frac{2\times 4}{4}\boxed{U_{0.05}}$ 1.65 $=\Phi(0.95)$ $=\cancel{4}\times 1.65=$

$\sigma^2=4\Rightarrow\sigma=2.$

$\frac{2\times2}{4}U_{0.05}=\frac{2\times2}{4}\times1.65$

$\gamma=0.9$ $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}}\approx\frac{2\times2}{\sqrt{16}}\times1.65$

$\gamma=0.95$ $\frac{2\times2}{\sqrt{16}}\times U_{0.025}\approx1.96$

$\frac{0.05}{2}=0.025$ $1-0.025=0.975=$ $\Phi=1-\alpha=0.975$ 1.96

(2) n为何值时 使$\mu(\gamma)$置信区间长度不超过1

$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}}=\frac{4}{\sqrt{n}}\times1.65\le1.$ 反解

例2.(3) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

1) 估计样本均值 $\hat{\mu}=\bar{X}=15.06$

2) $\sigma^2=0.05$ 找$\gamma=0.95$的置信区间 $n=6.$

$\left[\bar{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]$

$15.06\pm\frac{\sqrt{0.05}}{\sqrt{6}}U_{0.025}$ $\Phi(0.975)$ $\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{0.025}$

$\boxed{U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$

2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2未知，求μ的置信水平为γ的 ——

用样本方差代替总体方差 未知

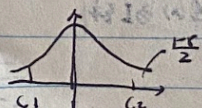
修正的 S^2

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

解: ① $T=\hat{\mu}_{MLE}=\bar{X}$

② $G=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

③ 取 $c_1\ c_2$ s.t. $P(c_1\le G\le c_2)=\gamma$



不妨取 $P(G<c_1)=P(G>c_2)=\frac{1-\gamma}{2}$

$c_1=-c_2=-t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ t分布的上$\frac{1-\gamma}{2}$分位数

那能懂:D:D:D

分布变了.

④ 作变形 $\gamma = P\left(-t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right)$

$= P\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \le \mu \le \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right)$

区间长度 $L = \frac{2s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ S有随机性 L随机变量.

L的期望. 也有.

S的期望

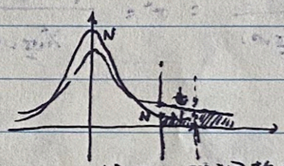
S^2的期望.

L^2的期望. $EL^2 = \frac{4}{n} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) ES^2 = \underline{\frac{4\sigma^2}{n} t^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}$

(常数的期望就是常数 self)

$\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)^2 = \underline{\frac{4\sigma^2}{n} u^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}$

note P26



γ 很大

$\frac{1-\gamma}{2}$ 很小

短一些. 对于同样 α

故有 $\underline{u_\alpha < t_\alpha(n-1)}$.

指上分位数的意思

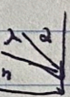
例5.2 真值在什么范围. μ的区间估计.

$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1),\ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right]$

$\bar{x} = 1259$ $\quad s = \sqrt{\frac{1}{4} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{570}{4}}$

设说 γ, 自取 $\gamma = 0.95$ $\quad t_{0.025}(5-1) = \underline{t_{0.025}(4)}$ 自由度 n

是上分位数



$t_{\frac{0.05}{2}}(4)$

查 $\alpha = 0.05$, $n = 4$

≈ 2.776

$P\{|t| > \lambda\} = \alpha$.

临界值

临近点.

$2P(t > \lambda)$

故 $P(t > \lambda) = \frac{\alpha}{2}$

$\lambda = t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu=\mu_0$ 已知，求 σ^2 的置 —— γ 区 ——

解：① $(X_1, \cdots, X_n)$ 样本 $\quad X_k \sim N(\mu_0, \sigma^2)$

$\frac{X_k-\mu_0}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \forall k=1,2,\cdots,n \qquad \frac{X_1-\mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$

不是指和，是找平方和：$\sum_1^n \left(\frac{x_k-\mu_0}{\sigma}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2}_{\text{总体}} \sim \chi^2(n)$

取 c_1 c_2 s.t $P(G<c_1)=P(G>c_2)=\frac{1-\gamma}{2}$

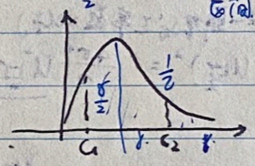
即 $c_1=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n) \qquad c_2=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)$

从而 $\gamma = P\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n) \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2 \le \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)\right)$ 水平.

$$= P\left(\frac{\sum_{k=1}^n (x_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)}\right)$$

$\gamma = \left[\frac{\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)}\right]$

区间.



4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ 未知，求 σ^2 的 --- γ —— ...

用样本均值代替

解：$G = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

用的3方差

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^n (x_k-\bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}\right]$$

拿期末的 稳 100分!

不考 两正态总体的区间估计

其它区间估计
都可能考

设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ X,Y 独立 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 分别为取自 X 与 Y 的样本

估计: ① $\mu_1-\mu_2$ Behrens–Fisher 问题

② $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

两正态总体的抽样分布定理:

设 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_k$ $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$

$\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{1}^{m}Y_k$ $S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m}(Y_k-\bar{Y})^2$

则: (1) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$$

(2) $$F\overset{d}{=}\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$$

(3) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时

$$T\overset{d}{=}\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{m+n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\sim t(m+n-2)$$

Pf: (1) X,Y 独立 $\Rightarrow\bar{X},\bar{Y}$ 独立 $\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{1}{n}\sigma_1^2)$ $\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{1}{m}\sigma_2^2)$

$\Rightarrow\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{1}{n}\sigma_1^2+\frac{1}{m}\sigma_2^2)$

再作标准化. #

(2) F分布(2个卡方分布的比值)

$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(m-1)$

S_1^2, S_2^2 独立

(3) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim N(0,1)$$

$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$

和 $\Rightarrow\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n+m-2)$

期中30号 ~单正态分布区间估计

困...

Apr 23, 2024

习题课.

$\boxed{\text{书题18}}$ $X \sim E(\frac{1}{\theta})$, $EX=\theta$

$D\varphi \geq \dfrac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$ $E\varphi = g(\theta)$

正则分布：5条件 ①~⑤ $g(\theta)=\theta$

无偏估计：样本均值.

⑥ $\frac{d}{d\theta}E\varphi = \int_{R^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, dx_1 \cdots dx_n$

左边 = 1

右边 = $\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n} x_k}\right) dx_1 \cdots dx_n$

$= \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \cdots$

右边 = $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

18. 设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自密度函数

$f(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\theta}{x^2} & x > 0 \end{cases}$

总体的样本，$\theta>0$ 未知. 问 $X_{(1)}$ 是完全统计

指数族分布 支撑 $\theta>0$ 密度函数 F

解 1-

$F_{X_{(1)}} = 1-(1-F_X(x))^n = \begin{cases} 0 \\ 1-\frac{\theta^n}{x^n} & x>0. \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le \theta \\ \int_\theta^x \frac{\theta}{t^2} dt = \cdots \end{cases}$

$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{n\theta^n}{x^{n+1}} & x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u(X_{(1)}) = 0.$

$Eu(X_{(1)}) = 0.$

若 $\exists u(\cdot)$ s.t. $Eu(X_{(1)}) = 0$, a.e. $\theta > 0$

即 $E(u(X_{(1)})) = \int_0^{+\infty} u(x) \frac{n\theta^n}{x^{n+1}} dx = 0.$

$\Leftrightarrow \int_\theta^{+\infty} \frac{u(x)}{x^{n+1}} dx = 0 \quad \theta > 0$ (a.e.)

$\frac{d}{d\theta}\int_\theta^{+\infty} \cdots dx = \frac{u(\theta)}{\theta^{n+1}} = 0 \quad \theta > 0$ (a.e.)

③. $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{\theta-x} & x>0 \\ 0 & x\le\theta. \end{cases}$

(1) $X_{(1)}-\theta$ 分布

(2) $\theta \cdots y$ 区间

(1) $F_{X_{(1)}}(x)=1-(1-F_X(x))^n=\begin{cases} 0 & x\le\theta \\ 1-e^{n(\theta-x)} & x>\theta \end{cases}$

令 $Y=X_{(1)}-\theta$

$F_Y = F_{X_{(1)}}(x+\theta)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{nx} & x>0 \end{cases}$

取 c_1, c_2 s.t $P(c_1\le Y\le c_2)=y$.

不妨取 c_1, c_2. s.t $P(Y<c_1)=P(Y>c_2)=\frac{1-r}{2}$

$\qquad\qquad 1-e^{nc_1} \qquad e^{nc_2}$

$[\cancel{\quad}$ $[X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\frac{1-r}{2},\ X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\frac{1+r}{2}]$.

置信水平.

④. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 样本 证明 $[X_{(1)}\ X_{(n)}]$ 为 μ 的 $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ 置信区间

pf: 只需证 $P(X_{(1)}\le\mu\le X_{(n)})=1-\frac{1}{2^{n-1}}$

$P(X_{(1)}\le\mu\le X_{(n)})=P(X_{(1)}\le\mu,\ \mu\le X_{(n)})=P(X_{(1)}\le\mu)-\underline{P(X_{(1)}\le\mu,\ X_{(n)}<\mu)}$

~~[illegible]~~不独立,不能拆开.

$A=\{X_{(1)}\le\mu\}$ $B=\{X_{(n)}\ge\mu\}$ $\qquad P(AB)=P(A-A\bar{B})=P(A)-P(A\bar{B})$

$=P(X_{(1)}\le\mu)-P(X_{(n)}<\mu)$

$\quad 1-(1-\Phi(0))^n-\Phi^n(0)$

$=1-(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2})^n$

$F_{X_{(n)}}(x)=F_X^n(x)$

$F_{X_{(1)}}(x)=1-[1-F_X(x)]^n$

$F_X(x)=P(X\le x)=$ $P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{x-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

两正态总体 不考

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $\qquad X,Y$ 独立 $(X_1,\cdots,X_n)$ $(Y_1,\cdots,Y_m)$

记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ $\quad S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$

$\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{1}^{m}Y_k$ $\quad S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m}(Y_k-\bar{Y})^2$

估计 1. $\mu_1-\mu_2$ $\quad$ Behrens-Fisher 问题

2. σ_1^2/σ_2^2

1. 当 σ_1^2 σ_2^2 已知时，求 $\mu_1-\mu_2$ 的 … γ … 区间

解：$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{1}{n}\sigma_1^2)$ $\quad \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{1}{m}\sigma_2^2)$

作差 $\Rightarrow$ $\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \cancel{\;\;}\ \frac{1}{n}\sigma_1^2+\frac{1}{m}\sigma_2^2)$

作标准化：
$$G=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_1^2+\frac{1}{m}\sigma_2^2}} \sim N(0,1)$$
枢轴量.

从而 $P(-U_{\frac{1+\gamma}{2}} < G < U_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$

2. 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时，求 $\mu_1-\mu_2$ … γ

$\bar{X}\sim\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, (\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\sigma^2)$

$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\qquad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$ $\qquad$ 独立.

$\frac{1}{\sigma^2}[(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2] \sim \chi^2(n+m-2)$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{m+n-2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \sim t(m+n-2)$$

$\Rightarrow P(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2) \le G \le t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)) = \gamma$

3. 当 μ_1, μ_2 已知时，求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ … γ …

解：$\frac{X_k-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_1^2}(X_k-\mu_1)^2}_{\div n\text{自由度}} \sim \chi^2(n)$

同理 $\quad \underbrace{\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{k=1}^{m}(Y_k-\mu_2)^2}_{\div m\text{自由度}} \sim \chi^2(m)$

$$G \stackrel{d}{=} \frac{m}{n}\frac{\sum_1^n(X_k-\mu_1)^2}{\sum_1^m(Y_k-\mu_2)^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n,m)$$

$P(F_{\frac{1-\gamma}{2}}(n,m) \le G \le F_{\frac{1+\gamma}{2}}(n,m)) = \gamma$

4. 当 μ_1, μ_2 未知时. 求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

解. 样本均值来替代. $\quad \bar{X} \quad \begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix}$

$$G \stackrel{d}{=} \frac{m}{n}\frac{\sum_1^n(X_k-\bar{X})^2}{\sum_1^m(Y_k-\bar{Y})^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n-1, m-1)$$

不考.

Apr 26, 2024

大样本情形 $(n \geq 30)$

林德伯格—莱维中心极限定理

设 $\{X_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 独立同分布 $EX_k = \mu$ $DX_k = \sigma^2$ $\forall k$

记 $Y_n = \dfrac{\sum X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2} \to \sqrt{n}\,\sigma}$ 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ $\forall x \in R$.

依分布收敛.(逐点收敛)

记为 $Y_n \xrightarrow[\text{(依分布收敛)}]{L} N(0,1)$

或: $Y_n \underset{\text{近似服从}}{\dot{\sim}} N(0,1)$

由 $Y_n \dot{\sim} N(0,1) \Rightarrow \sum_{1}^{n} X_k \dot{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_k \dot{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

例1: $X \sim B(1,p)$ (二项) $(X_1, \cdots, X_n)$ 为样本. n 较大 求 p 的置信水平为 γ 的置信区间.

解: 记 $T_n = \sum_{1}^{n} X_k$ 则由中心极限定理: $\dfrac{T_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \dot{\sim} N(0,1)$

从而当 $n >> 1$ 时有: $P\left(-u_{\frac{1+\gamma}{2}} \leq \dfrac{T_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \approx \gamma$

解 p 记 $C = u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ 则: $(T_n - np)^2 \leq np(1-p)C^2$

$\Delta = n^2C^4 > 0$ 从而不等式有解 $\hat{p}_L \leq p \leq \hat{p}_u$

其中 $\hat{p}_L, \hat{p}_u$ 为 $(T_n - np)^2 = np(1-p)C^2$ 的根

例2 $X \sim P(\lambda)$ (泊松) $(X_1, \cdots, X_n)$ 求 $p \cdots \gamma \cdots$

解: 由中心极限. 记 $T_n = \sum_{1}^{n} X_k$ 则 $\dfrac{T_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \dot{\sim} N(0,1)$

从而 $P\left(-u_{\frac{1+\gamma}{2}} \leq \dfrac{T_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \approx \gamma$

$\Rightarrow P(\hat{\lambda}_L \leq \lambda \leq \hat{\lambda}_u) \approx \gamma$ 其中 $\hat{\lambda}_L$ $\hat{\lambda}_u$ 为二次方程 $(T_n - n\lambda)^2 = n\lambda u^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ 的根

4道例题 考1道

见 Notes

1. $X_1 \cdots X_n$ 为 $f(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x \leq \theta \\ \frac{\theta}{x^2} & x > \theta \end{cases}$ 的总体的样本 $(\theta > 0)$. 证 $X_{(1)}$ 是充分统计量

2. $X: f(x;\theta) = \begin{cases} e^{\theta - x} & x > \theta \\ 0 & x \leq \theta \end{cases}$ (1) 证 $X_{(1)} - \theta$ 分布与 θ 无关
(2) 求 θ 置信水平为 γ 的置信区间

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X_1 \cdots X_n$ $X_{(1)}$ $X_{(n)}$ 极小 极大顺序统计量.
证 $[X_{(1)}, X_{(n)}]$ 为 μ 的置信水平为 $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ 的置信区间

4. $X_1 \cdots X_n$ 样本. 分布 $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} & x > 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

指出 θ 无偏估计的方差的尽可能大的下界.

May 23, 2024
1,2 3 4 5 6 7 8 9 10

X θ

1 2
θ<0 θ>0

Chapter 3 假设检验

§3.1 问题的提法

由样本观测值出发判断关于总体的一个"看法"
假设

定义：1. 零假设：需要检验的假设，又称为原假设，记为 H_0

2. 对立假设：零假设的对立面，又称为备择假设，记为 H_a 或 H_1

设 X $\theta\in\Theta$ Θ 为参数空间 假设检验问题通常表示为：$H_0:\theta\in\Theta_0 \longleftrightarrow H_a:\theta\in\Theta_1$

其中 $\Theta_0\subset\Theta$ $\Theta_1\subset\Theta$ $\Theta_0\cap\Theta_1=\phi$

定义：1. 检验法：给出一个规则，对给定的样本观测值 $(x_1,\cdots x_n)$ 进行~~[illegible]~~明确表态：接受 H_0 还是拒绝 H_0

2. 接受域：对于给定的检验法，使得零假设 H_0 被接受的样本观测值构成集合，记为 S_1

3. 否定域 —————— 拒绝 ——————

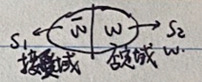
记为 S_2 或 W = $\boxed{\text{与检验法对应}}$

$(x_1,\cdots,x_n)$ R^n

样本空间 $\mathscr{X}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n:\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)>0\}$

$X\sim E(\lambda)$ $(0,+\infty)$

$\mathscr{X}$：总体的支撑



$\overline{W}=\mathscr{X}^n-W$

H_0 $\theta\in\Theta_0$ $\longleftrightarrow$ H_a $\theta\in\Theta_1$

$\Theta_0\cap\Theta_1=\Phi$ W：否定域 $W=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathscr{X}^n:\text{拒绝}H_0\}$ 样本观测值构成集合

① H_0 为真 $(x_1\cdots x_n)\in W$ 弃真（第一类错误） 控制犯第一类错误的概率上限（检验水平）

② H_0 为真 $(x_1\cdots x_n)\notin W$ 取真 ✓

③ H_0 为假 $(x_1,\cdots x_n)\in W$ 弃伪 ✓

④ H_0 为假 $(x_1,\cdots,x_n)\notin W$ 取伪（第二类错误） 错误

定义：用 $P(A|\theta_0)$ 表示当参数 θ 的真值为 θ_0 时事件 A 发生的概率，或记为 $P(A|\theta=\theta_0)$ 或 $P_{\theta_0}(A)$

① 称 $\beta_W(\theta_0) = P(\underbrace{(X_1,\cdots,X_n)}_{\text{大写 随机变量}} \in W \mid \theta=\theta_0) = P(\text{拒绝} H_0 \mid \theta=\theta_0)$ 为 W 的功效函数

② 称 $L_W(\theta_0) = P((x_1,\cdots,x_n) \notin W \mid \theta=\theta_0) = P(\text{接受} H_0 \mid \theta=\theta_0)$ 为 W 的操作特性函数，简称 OC 函数

注：① $\beta_W(\theta_0) + L_W(\theta_0) = 1$ （自变量：θ_0）

② 若 $\theta_0 \in \Theta_0$，则 $\beta_W(\theta_0)$ 为 弃真概率

若 $\theta_0 \in \Theta_1$，则 $\beta_W(\theta_0)$ 为 弃伪概率

若 $\theta_0 \in \Theta_0$，则 $L_W(\theta_0)$ 为 取真概率

若 $\theta_0 \in \Theta_1$，则 $L_W(\theta_0)$ 为 取伪概率

定义：称 $\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} \beta_W(\theta)$ 为否定域 W 的检验水平（或显著性水平 或 水平）

（拒绝 H_0）

$\boxed{\text{犯第一类错误之概率之上确界（意思）}}$

控制。 弃真概率

$\alpha \approx 0$ （0.1 0.5 …）

定义：设否定域 W 的检验水平为 α，若对一切检验水平不超过 α 的否定域 $\widetilde{W}$，均有：

样本观测值构成的集合

$\beta_W(\theta) \geq \beta_{\widetilde{W}}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$ 弃伪概率最大

想第二类错误最小 $\theta\in\Theta_0$ 对 Θ_1 一致

则称 W 为检验水平为 α 的一致最大功效否定域 简称 UMP 否定域

对 Θ_1 内所有元素一致（集合一致）

[弃伪 ≥

取伪 ≤

∵常用 β_W 写 少用 L_W 写.]

若单点集 则把一致去掉）

May 7, 2020 插 $\hat\theta_1$ 和 $\hat\theta_2$ $D_\theta\hat\theta_1 \leq D_\theta\hat\theta_2$ $\exists\theta_0$ s.t. $D_{\theta_0}\hat\theta_1 < D_{\theta_0}\hat\theta_2$ 有效性（易用中填空题）

定义：设否定域 W 的检验水平为 α，若 $\beta_W(\theta) \geq \alpha$ $\forall \theta\in\Theta_1$ 则称 W 为检验水平为 α 的无偏否定域

弃真概率 $\leq \alpha$ $\boxed{\text{弃伪概率} \geq \alpha.}$ $\beta_W(\theta)|_{\theta\in\Theta_1}$：弃伪概率

定义：若 W 是水平为 α 的无偏否定域，且对任意水平为 α 的无偏否定域 $\widetilde{W}$ tilde{w}

均有 $\beta_W(\theta) \geq \beta_{\widetilde{W}}(\theta)$ $\forall\theta\in\Theta_1$ 则称 W 是水平为 α 的一致最大功效无偏否定域（UMPU 否定域）

小概率原理　假设检验

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

检验均值 $\begin{cases} \text{方差已知} & \text{U检验法} \\ \text{方差未知} & \text{T检验法} \end{cases}$

方差 $\begin{cases} \text{均值已知} \\ \text{均值未知} \end{cases}$ χ^2 检验法 (n)　$(n-1)$

1. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$　$\sigma^2=\sigma_0^2$已知，检验总体X的均值μ与已知的μ_0是否有显著性差异（问题）

↓ 转化为假设检验问题

解：1° 提出统计假设　∴ $H_0: \mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$

2° 选取检验统计量　设 $(x_1,\cdots,x_n)$为样本　$\bar{X}$ 取 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

则当H_0为真时　$X \sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$　从而 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$　从而 $U \sim N(0,1)$

3° 给出否定域　$W=\{(x_1,\cdots,x_n)\ |U| \geq C\}$

设检验水平为α 则：$\sup\limits_{\mu \in \Theta_0} P_W(\mu)=\alpha=P_W(\mu_0)=P(|U| \geq C \mid \mu=\mu_0)$

真　弃真

由于当$\mu=\mu_0$时，$U \sim N(0,1)$　从而

$C=U_{\frac{\alpha}{2}}$ 为$N(0,1)$分布的上$\frac{\alpha}{2}$分位数

4° 作出判断

例：设 $X \sim N(\mu,\sigma_0^2)$　σ_0^2已知，对于问题 $H_0: \mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$

由U检验法知：水平为α的否定域为　$W=\left\{(x_1,\cdots,x_n): \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > U_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

从而，接受域为 $\bar{W}=\bar{W}(\mu_0)=\left\{(x_1,\cdots,x_n): \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \leq U_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

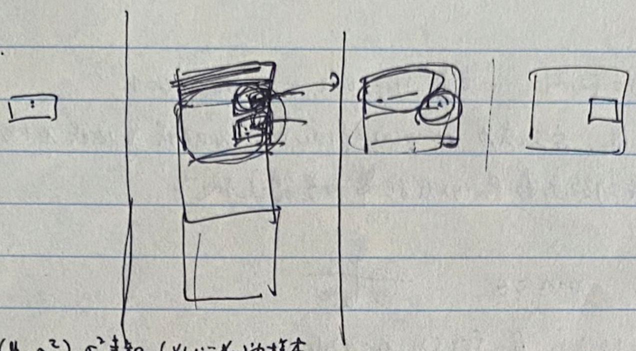
对固定的$(x_1,x_2,\dots,x_n)$定义　$S=S(x_1,\cdots,x_n)=\{\mu \in R,\ (x_1,\cdots,x_n) \in \bar{W}(\mu)\}$

$=\{\mu \in R: |\mu-\bar{x}| \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} U_{\frac{\alpha}{2}}\}$

即S为 $[\bar{x}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}}]$.

[illegible]
软件工程.

创造
情報



2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2未知 $(X_1, \cdots X_n)$为样本

检验: $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$　　　　$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

设水平为 α

解. 取 $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 则当 H_0 为真时 $T \sim t(n-1)$ 从而 $|T|$ 应较小

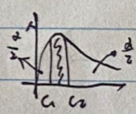
从而否定域为 $W = \{(X_1, \cdots, X_n): |T| > C\}$

由于 W 水平为 α 从而 $\rho_W(\mu_0) = P(|T| > C \mid \mu = \mu_0) = \alpha$

$\Rightarrow C = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为 $t(n-1)$ 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$　$\mu = \mu_0$已知　$(X_1, \cdots, X_n)$为样本

检验　H_0　$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_a$　$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$



α. 解: 取 $G = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_0)^2$ 则当 H_0 为真时 $G \sim \chi^2(n)$

从而否定域为 $W = \{(X_1, \cdots X_n): G < C_1 或 G > C_2\}$.

W 满足 $\rho_W(\sigma_0^2) = P(G < C_1 或 G > C_2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2) = \alpha$

$= P(G < C_1 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2) + P(G > C_2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$

不妨取 $P(G < C_1 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2) = P(G > C_2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2) = \frac{\alpha}{2}$

从而 $C_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$　　$C_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$　μ未知　检验　$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_a$　$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

取 $G' = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 则当 H_0 为真时, $G \sim \chi^2(n-1)$

May 10, 2024

作业 习题三 1, 2

§3.2 N-P引理及似然比检验法 会用结论.

设X密度函数为 $f(x;\theta)$ 考虑检验问题 $H_0:\theta=\theta_1 \leftrightarrow H_a:\theta=\theta_2$

参数空间 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$

$(x_1,\cdots,x_n)$ 样本

似然函数. $L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$

定理 (Neyman-Pearson 引理) ~~考虑~~ 对 $\forall \alpha\in(0,1)$

~~$H_0:\theta=\theta_1 \leftrightarrow H_a:\theta=\theta_2$~~ 假设集合 W_0 型如 $W_0=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): L(\theta_2,x_1,\cdots,x_n)>\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\}$

(否定域)

设 ~~$(x_1,\cdots,x_n)$ 为~~

$(L(\theta_2)>\lambda_0 L(\theta_1))$

$W_0 \leftarrow$ 确定λ_0

其中λ_0满足 $\iint_{W_0} L(\theta_1;x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\alpha$ 样本的联合密度出现在 W_0 积分 $\Rightarrow$ 概率 $P((x_1,\cdots,x_n)\in W_0|\theta=\theta_1)$ (2.1). 原假设成立.

W_0的检验水平: α.

$$\boxed{\text{则对任意否定域 } W\subset\mathbb{R}^n \text{ 只要 } P_W(\theta_1)\le\alpha \ (2.2) \quad \text{就有 } P_{W_0}(\theta_2)\ge P_W(\theta_2) \ (2.3)}$$

表述: 的弃真/弃伪概率

弃真概率 $\le\alpha$

记 $\lambda=\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{L(\theta_2;x_1\cdots x_n)}{L(\theta_1;x_1\cdots x_n)}$

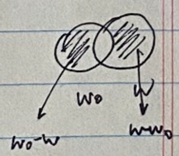
则 $W_0=\{(x_1,\cdots x_n):\ \lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$ λ似然比

证明: 设 W 为检验水平不超过 α 的否定域 即

$P_W(\theta_1)\le\alpha$

则 $P_{W_0}(\theta_2)-P_W(\theta_2)=P((x_1\cdots x_n)\in W_0|\theta=\theta_2)-P((x_1\cdots x_n)\in W|\theta=\theta_2)$

$=\iint_{W_0} L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\iint_W L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$



$=\iint_{W_0-W} L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\iint_{W-W_0} L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

由于 $W_0-W\subset W_0$ 从而对 $\forall(x_1\cdots x_n)\in W_0-W$ 有 $L(\theta_2;x_1\cdots x_n)>\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)$

对于 $W-W_0\subset\overline{W_0}$ 从而对 $\forall(x_1\cdots x_n)\in W-W_0$ 有 $L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\le\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)$

从而: $P_{W_0}(\theta_2)-P_W(\theta_2)\ge\underbrace{\iint_{W_0-W}}_{\text{放小}}\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\underbrace{\iint_{W-W_0}}_{\text{放大}}\lambda_0 L(\theta_1;\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

$=\lambda_0\left(\iint_{W_0} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\iint_W L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n\right)$

$=\lambda_0(P_{W_0}(\theta_1)-P_W(\theta_1))\ge 0$

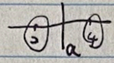
均匀分布

例：设 $X \sim U(0,\theta)$　$\theta \in \Theta = \{2,4\}$　考虑 $H_0: \theta=2 \longleftrightarrow H_a: \theta=4$

设 (x_1, x_2) 为样本观测值，否定域为 $W=W(a)=\{(x_1,x_2): x_1>2$ 或 $x_2>2$ 或 $\underline{x_1+x_2>a}\}$

其中 $a \in (2,4)$ 试求W的功效函数 $\rho_W(\theta)$ 及犯第两类错误概率

$EX=\frac{\theta}{2}=E\bar{X}$　$\frac{x_1+x_2}{2} \approx \frac{\theta}{2}$　$x_1+x_2 \approx \theta$



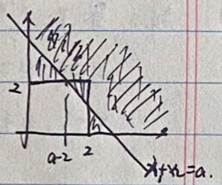
解：$\rho_W(\theta)=P((x_1,x_2)\in W \mid \theta)=\iint_W f_{联}(x_1,x_2;\theta)\,dx_1dx_2$

$=\iint_W \frac{1}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x_1)\, I_{(0,\theta)}(x_2)\,dx_1dx_2$

$=\iint_{W\cap\{0<x_1<\theta\}\cap\{0<x_2<\theta\}} \frac{1}{\theta^2}\,dx_1dx_2$　$\theta \in \{2,4\}$

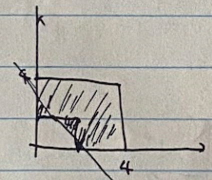
当 $\theta=2$ 时　$\rho_W(2)=\iint_{\substack{(x_1,x_2)\in W\\0<x_1<2\\0<x_2<2}} \frac{1}{4}\,dx_1dx_2$

$=\frac{1}{4}\times \frac{1}{2}(4-a)^2=\frac{1}{8}(4-a)^2$



当 $\theta=4$ 时　$\rho_W(4)=\iint_{\substack{(x_1,x_2)\in W\\0<x_1<4\\0<x_2<4}} \frac{1}{16}\,dx_1dx_2=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(4-a)^2+4\times2+2\times2\right]^2$

$=\frac{1}{32}(4-a)^2+\frac{3}{4}$



弃真P　$\frac{1}{16}(4-a)^2$　$\sim a$

取伪P　$1-\left[\frac{1}{32}(4-a)^2+\frac{3}{4}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}(4-a)^2$

(P 和≠1)

定理：设 X 密度函数为 $f(x;\theta)$ $\theta\in\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$

$(x_1\cdots x_n)$ 为样本 考虑 $H_0:\theta=\theta_1 \leftrightarrow H_a:\theta=\theta_2$

设 $\lambda=\lambda(x_1\cdots x_n)=\dfrac{L(\theta_2;x_1\cdots x_n)}{L(\theta_1;x_1\cdots x_n)}$ 为似然比.

若 ① $f(x;\theta)$ 的支撑 $\{x\in R: f(x;\theta)>0\}$ 与 θ 无关

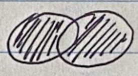
② 当 $\theta=\theta_1$ 时，$\lambda(x_1\cdots x_n)$ 的分布函数为连续函数

将似然比作随机变量.

则对 $\forall\alpha\in(0,1)$ $\exists\lambda_0>0$ s.t $W_0=\{(x_1\cdots x_n):\lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$ 为水平为 α 的唯一最大功效否定域.

其中"唯一"含义为：若 W 也是水平为 α 的最大功效否定域

则集合 $(W-W_0)\cup(W_0-W)$ 的勒贝格测度为 0.



阴影部分的面积为 0.

几乎处处一样 两个集合几乎重合.

似然比检验法得到最大功效否定域

证明：由于当 $\theta=\theta_1$ 时 $\lambda(x_1,\cdots,x_n)$ 的分布函数连续

从而对 $\alpha>0$ $\exists\lambda_0>0$ s.t: $P(\lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\mid\theta=\theta_1)=\alpha$

即：对 $\forall\alpha>0$ $\exists\lambda_0>0$ s.t $W_0=\{(x_1\cdots x_n):\lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$ 的检验水平为 α

从而由 N-P 引理知：W 为最大功效否定域

即：对 $\forall$ 满足 $P((x_1\cdots x_n)\in W\mid\theta_1)\le\alpha$ 的 W，成立 $\rho_{W_0}(\theta_2)\ge\rho_W(\theta_2)$

下证 若 $\underset{\text{测度}}{meas}\{(W_0-W)\cup(W-W_0)\}>0$ 则 $\rho_{W_0}(\theta_2)>\rho_W(\theta_2)$

易见 $\rho_{W_0}(\theta_2)-\rho_W(\theta_2)=P((x_1\cdots x_n)\in W_0\mid\theta_2)-P((x_1\cdots x_n)\in W\mid\theta)$

$=\iint_{W_0}L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n-\iint_W L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

$=\iint_{W_0-W}L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n-\iint_{W-W_0}L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

要么：

① 若 $meas\{W_0-W\}>0$ 由于 $W_0-W\subset W_0$

从而对 $\forall(x_1\cdots x_n)\in W_0-W$ 有 $\lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0$

此外 由于 $W-W_0\subset\overline{W_0}$ 从而对 $\forall(x_1\cdots x_n)\in W-W_0$

有 $\lambda(x_1\cdots x_n)\le\lambda_0$

从而 $\rho_{W_0}(\theta_2)-\rho_W(\theta_2) > \lambda_0 \iint_{W_0-W} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n - \lambda_0 \iint_{W-W_0} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

$$= \lambda_0 \iint_{W_0} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n - \lambda_0 \iint_W L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$= \lambda_0 \left(\rho_{W_0}(\theta_1)-\rho_W(\theta_1)\right)$$

$$\geqslant 0$$

从而 $\rho_{W_0}(\theta_2) > \rho_W(\theta_2)$

② 要么 $\mathrm{meas}\{W-W_0\}>0$ 则令 $D=\{(x_1\cdots x_n): \lambda(x_1\cdots x_n)=\lambda_0\}$

由于当 $\theta=\theta_1$ 时 $\lambda(x_1\cdots x_n)$ 分布函数连续　　$F(x)=P(X\leq x)$ 则 $P(X=a)=F(a)-F(a-0)$

a点左极限

此时相等了

从而：$\lambda(x_1\cdots x_n)$ 取单点值 λ_0 的概率为0

即：$P(\lambda(x_1\cdots x_n)=\lambda_0|\theta_1)=P((x_1\cdots x_n)\in D|\theta_1)=0$ ☆　$=\iint_D L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

又由于 $D\subset \mathscr{X}^n := \{(x_1\cdots x_n): \prod_{k=1}^n f(x_k;\theta)>0\}$ 与θ无关　　D的概率是0

↓推导

从而 对 $\forall (x_1\cdots x_n)\in D$　$L(\theta_1;x_1\cdots x_n)=\prod_{k=1}^n f(x_k;\theta_1)>0$　　D的测度为0

从而由☆ ⇒ $\mathrm{meas}\{D\}=0$ 即 D 为零测集.　　说明:

从而 $\iint_{W-W_0} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n = \iint_{W-(W_0\cup D)} L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

∵D为零测集

另一方面：由 $W_0\cup D=\{(x_1\cdots x_n): \lambda(x_1\cdots x_n)\geqslant\lambda_0\}$

$$W-(W_0\cup D)\subset \overline{W_0\cup D}=\{(x_1\cdots x_n): \lambda(x_1\cdots x_n)<\lambda_0\}.$$

从而 $\iint_{W-(W_0\cup D)} L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n < \iint_{W-(W_0\cup D)} \lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

$$= \lambda_0 \iint_{W-W_0} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$$

从而 $\iint_{W-W_0} L(\theta_2;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n < \lambda_0 \iint_{W-W_0} L(\theta_1;x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$

(平移即可)

定理 2.3：在 Th2.1 的条件下 有 $\rho_{W_0}(\theta_2)\geqslant\alpha=\rho_{W_0}(\theta_1)$　　无偏否定域

$\theta=\theta_1 \leftrightarrow \theta=\theta_2$

May 11, 2024

$H_0: \theta=\theta_1 \leftrightarrow H_1: \theta=\theta_2$

$$\lambda(x_1\cdots x_n)=\frac{L(\theta_2;x_1\cdots x_n)}{L(\theta_1;x_1\cdots x_n)}$$

$W_0=\{(x_1\cdots x_n): \lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$ 否定域　　$(\lambda_0\to W_0)$

s.t　$\rho_{W_0}(\theta_1)=\alpha$

确定W_0　此时满足P48 ①②：才有W_0一定存在且唯一

Th 2.1 $\iint_{W_0-W} L(\theta_2; x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n \geqslant \iint_{W_0-W} \lambda_0 L(\theta_1; x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$ (*)

积分区域可能 W_0-W 是零测集 故有「=」

$L(\theta_2) > \lambda_0 L(\theta_1)$ in W_0-W

Th 2.2 $\text{meas}\{W_0-W\}>0$ 才能说 (*) 是「>」为严格大于

似然比检验法处理检验问题

例：$X\sim N(\mu,1)$ 检验.

$H_0: \mu=0 \longleftrightarrow H_a: \mu=2$

$(x_1\cdots x_n)$ $\alpha=0.05$ 求(最大功效否定域) UMP否定域

只有似然比检验法

解：似然函数 $L(\mu; x_1\cdots x_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n (x_k-\mu)^2} = L(\mu)$

似然比 $\lambda(x_1\cdots x_n) = \frac{L(2)}{L(0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n (x_k-2)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum x_k^2}} = e^{2n\cdot\bar{x}-2n}$

从而否定域为 $W_0=\{(x_1\cdots x_n): e^{2n\bar{x}-2n} > \lambda_0\}$

$=\{(x_1\cdots x_n): \bar{x} > c\}$ for some c

(单增).

且满足 $0.05 = \sup_{\mu\in\Theta_0} \rho_{W_0}(\mu) = \rho_{W_0}(0) = P(\bar{x}>c \mid \mu=0)$.

$= P(\sqrt{n}\cdot\bar{x} > \sqrt{n}c \mid \mu=0)$.

$\mu=0$ $X\sim N(0,1)$

$\bar{x}\sim N(0,\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sqrt{n}c = u_{0.05}$

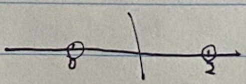
$\frac{\bar{x}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\sim N(0,1)$

$(\sqrt{n}\bar{x})$

$\Longrightarrow W_0=\{(x_1\cdots x_n): \bar{x} > \frac{1}{\sqrt{n}}u_{0.05}\}$.

由NP知一定为最大功效否定域.

$E\bar{X} = EX = \mu$



$p_1 < p_2$

例12 $X \sim B(1, p)$ $p \in \{p_1, p_2\}$ 考虑 $H_0: p = p_1 \longleftrightarrow H_a: p = p_2$ 水平为 α

解. $L(p; x_1 \cdots x_n) = p^{\sum_1^n x_k} (1-p)^{n - \sum_1^n x_k}$

$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}$

$$\lambda(x_1 \cdots x_n) = \frac{L(p_2)}{L(p_1)} = \left[\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right]^{\sum_1^n x_k} \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^n$$

记 $T = \sum_1^n x_k$ 则否定域为: $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \underline{\lambda(x_1 \cdots x_n) > \lambda_0}\}$

$= \{(x_1 \cdots x_n): \underline{T > c}\}$. for some c

不用写 c 和 λ_0 之关系

$\boxed{c \text{ 的确定：通过检验水平.}}$

满足 $\varphi_{W_0}(p_1) = P(T > c \mid p = p_1) = \alpha$.

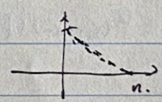
当 $p = p_1$ 时 $X \sim B(1, p_1)$

$\Rightarrow T = \sum_1^n x_k \sim B(n, p_1)$

从而 $P(T > c \mid p = p_1) = \sum_{k > c} \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} = \alpha$.

关于 c 递减. $c: 0 \sim n$

离散形.



易见, 对给定的 $\alpha \in (0,1)$ 不一定存在 c 使上式成立.

从而寻求近似: 找整数 c_0 s.t. $\sum_{k=c_0}^{n} p_1^k (1-p_1)^{n-k} > \alpha > \sum_{k=c_0+1}^{n} p_1^k (1-p_1)^{n-k}$

从而 W_0 近似为 $\{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > c_0\}$ (检验水平不一定 $= \alpha$).

§3.4 广义似然~~比~~比检验 只考单正态

$H_0: \theta < \theta_1 \leftrightarrow H_a: \theta > \theta_1$ 似然比法失效.

X 密度函数为 $f(x;\theta)$ $\theta \in \Theta$ $\Theta_0 \neq \phi$ $\Theta_0 \subsetneq \Theta$

考虑 $H_0: \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_a: \theta \in \Theta - \Theta_0$

$(x_1 \cdots x_n)$

似然函数: $L(\theta; x_1 \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k; \theta)$

令 $L(\hat{\Theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1 \cdots x_n) \xlongequal{\text{若 } \hat{\theta}_{MLE} \text{ 存在}} L(\hat{\theta}_{MLE}; x_1 \cdots x_n)$

$L(\hat{\Theta}_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; x_1 \cdots x_n)$

$\lambda(x_1 \cdots x_n) = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)}$, 称为广义似然比.

易见：$\lambda \geq 1$

若 $\hat{\theta}_{MLE} \in \Theta_0$ 则 $\lambda = 1$

$\hat{\theta}_{MLE} \approx \theta$ 真值

从而，若 H_0 成立 则 $\hat{\theta}_{MLE}$ 应大概率 $\in \Theta_0$

此时 $\lambda \approx 1$

从而 若 $\lambda \gg 1$ 则拒绝 H_0

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : \lambda > \lambda_0\}$ 形式的否定域.

通过拒绝水平确定 λ_0

W_0 满足 $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} P_{W_0}(\theta) = \alpha$

设 $\varphi = \varphi(x_1 \cdots x_n)$ 为充分统计量.

即 $L(\theta; x_1 \cdots x_n) = g(\varphi, \theta)\, h(x_1 \cdots x_n)$

从而 $\lambda(x_1 \cdots x_n) = \dfrac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} g(\varphi,\theta)\cancel{h}}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} g(\varphi,\theta)\cancel{h}} = \sigma(\varphi)$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : \sigma(\varphi) > \lambda_0\} = \{(x_1 \cdots x_n) : \varphi(x_1 \cdots x_n) \in B\}$ for some set B

$\boxed{1.\ X \sim N(\mu, \sigma_0^2)\quad \sigma_0^2 \text{已知}}$ 考虑 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$

$(x_1 \cdots x_n)$ α

解. $\Theta = R$ $\Theta_0 = \{\mu_0\}$

~~$L(\hat{\Theta}) = \cdots$~~

$L(\mu) = L(\mu; x_1 \cdots x_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_k-\mu)^2}$

$L(\hat{\Theta}) = \sup\limits_{\mu \in R} L(\mu) = L(\bar{x}) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}$

$L(\hat{\Theta}_0) = L(\mu_0) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)}$

$u = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

H_0 成立 $\Rightarrow u \sim N(0,1)$

$\Rightarrow |u|$ 应较小

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : |u| > c\}$

$c = u_{\frac{\alpha}{2}}$

从而广义似然比为 $\lambda = \lambda(x_1 \cdots x_n) = \dfrac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)} = e^{\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x}-\mu_0)^2}$

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : e^{\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x}-\mu_0)^2} > \lambda_0\} = \{(x_1 \cdots x_n) : |\bar{x}-\mu_0| > c\}$, for some c.

W_0 应满足 $\sup\limits_{\mu \in \Theta_0} P_{W_0}(\mu) = P_{W_0}(\mu_0) = \alpha. = P(|\bar{x}-\mu_0| > c \mid \mu = \mu_0) = P\left(\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}c \;\middle|\; \mu = \mu_0\right)$

$\mu = \mu_0 \Rightarrow X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu_0, \dfrac{\sigma_0^2}{n}\right) \Rightarrow \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

标准正态绝对值.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0} c = u_{\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow W_0 = \left\{(x_1 \cdots x_n) : \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

2. σ^2未知. ----.

解. $\theta=(\mu,\sigma^2)$ $\quad \Theta = R\times(0,+\infty)$ $\quad \Theta_0=\{\mu_0\}\times(0,+\infty)$

$L(\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\mu)^2}$

$L(\hat{\Theta}) = L(\hat{\mu}_{MLE}, \hat{\sigma}^2_{MLE}) = L(\bar{x}, S_n^2)$

$= \left(\frac{n}{2\pi \sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$

$L(\hat{\Theta}_0) = \sup_{\sigma^2>0} L(\mu_0,\sigma^2) = L(\mu_0, \frac{1}{n}\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)} = \left(\frac{\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2}{\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}}$

$\sum (x_k-\mu_0)^2 = \sum (x_k-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)^2$

$= \sum (x_k-\bar{x})^2 + \underbrace{2\sum(x_k-\bar{x})(\bar{x}-\mu_0)}_{0} + \underbrace{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}_{与k无关.\ n(\bar{x}-\mu_0)^2}$

$= \left(1+\frac{n\cdot(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}}.$

$\triangleq \left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$

其中 $T = \sqrt{\frac{n(n-1)(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}\ (\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{n}\ (\bar{x}-\mu_0)}{S} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

广义似然比.

↓

否定域

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1\cdots x_n):\ \lambda>\lambda_0\}$ $\qquad |T|\uparrow\ \lambda\uparrow.$

$= \{(x_1\cdots x_n):\ |T|>c\}$

「求C」

W_0应满足 $\sup_{\theta\in\Theta_0} P_{W_0}(\mu) = \sup_{\sigma^2>0} P(|T|>c \mid \mu=\mu_0) = \alpha.$

$= P(|T|>c \mid \mu=\mu_0)$

$\mu=\mu_0 \Rightarrow X\sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$

$\Rightarrow T\sim t(n-1)$ 与σ^2无关.

$\Rightarrow c = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

May 14, 2024

$H_0: \theta\in\Theta_0 \leftrightarrow H_a: \theta\in\Theta-\Theta_0$

$L(\theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k,\theta)$

$L(\hat{\Theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)$

$L(\hat{\Theta}_0) = \sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)$

$\lambda = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)}$ $\quad \lambda(x_1\cdots x_n).$ $\quad W_0=\{(x_1\cdots x_n):\ \lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$

3).

P111. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 有无系统偏差. 方差未知. $\alpha=0.05$

$H_0: \mu=1277 \longleftrightarrow H_a: \mu\neq 1277$

$W_0=\{(x_1\cdots x_n): |T|>c\}$

$T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ $\quad c=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(4).$

$\mu_0=1277 \quad n=5$

若 $|T|>\mu_0$ 则否定H_0. 即有系统偏差.

3. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ μ未知 检验 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2 \longleftrightarrow H_a: \sigma^2\neq\sigma_0^2$

解: $\theta=(\mu,\sigma^2)$ $\quad \Theta=R\times(0,+\infty)$ $\quad \Theta_0=\{(\mu,\sigma^2)\in\Theta \quad \sigma^2=\sigma_0^2\}=R\times\{\sigma_0^2\}$

似然函数 $L(\mu,\sigma^2)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2}$

$$L(\hat{\Theta})=L(\hat{\mu}_{MLE},\hat{\sigma}^2_{MLE})=L(\underset{\text{未修正的}}{\bar{x},S_n^2})=\left(\frac{n}{2\pi(n-1)\underset{\text{修正的}}{S^2}}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}$$

$$L(\hat{\Theta}_0)=\sup_{\mu\in R}L(\mu,\sigma_0^2)=L(\bar{x},\sigma_0^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{n-1}{2\sigma_0^2}S^2}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)}=\left(\boxed{\frac{n\sigma_0^2}{(n-1)S^2}}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}n+\boxed{\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}}}$$

$$\Rightarrow W_0=\{(x_1\cdots x_2): \lambda>\lambda_0\}=\{(x_1\cdots x_n)\quad G\in B\}$$

取 $G=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 则: ~~当$H_0$为真时~~

λ关于G先减后增 且当H_0为真时, $G\sim\chi^2(n-1)$
(对G求导)

从而 $W_0=\{(x_1\cdots x_n)\quad G<c_1$或$G>c_2\}$ 且满足 $\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}P_{W_0}(\theta)=P(G<c_1$或$G>c_2|\sigma^2=\sigma_0^2)=\alpha$

 从而可取 $c_1=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\quad c_2=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

例：X 折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \sigma^2 = 64 \longleftrightarrow H_a: \sigma^2 \neq 640$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \quad G < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $G > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$G = \frac{1}{640}\sum_{1}^{10}(X_k - \bar{X})^2 \qquad \underline{n=10,\ \alpha=0.05}$

例：设 X 密度函数为 $f(x,\mu) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)} & x \geq \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases} \qquad \mu \in R.$

利用广义——检验：$H_0: \mu = 0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq 0.$

解：$\Theta = R \qquad \Theta_0 = \{0\}$

$L(\mu) = \begin{cases} e^{-\sum_{1}^{n} x_k + n\mu} & x_{(1)} \geq \mu \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ← 最小时

对 $\underline{\forall (x_1, \cdots x_n)} \in \mathscr{X}^n = \{(x_1 \cdots x_n): \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \mu) > 0\}. = \{x: f(x;\mu) > 0\}^n = \underline{[\mu, +\infty)^n}$

n个支撑构成的乘积空间

有 $L(\hat{\Theta}) = \sup_{\mu \in R} e^{-\sum x_k + n \cdot \mu} = e^{-\sum x_k + n x_{(1)}}$

$L(\hat{\Theta}_0) = \begin{cases} e^{-\sum x_k} & x_{(1)} \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

当 $X_{(1)} < 0$ 时 $\underset{+\infty}{\lambda} > \lambda_0$ 拒绝 H_0

当 $X_{(1)} > 0$ 时 $\lambda(x_1 \cdots x_n) = e^{nX_{(1)}}$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) \quad x_{(1)} < 0$ 或 $\lambda > \lambda_0\}.$

$\quad = \{(x_1 \cdots x_n) \quad x_{(1)} < 0$ 或 $x_{(1)} > c\}$

且 W_0 满足：$\alpha = \beta_{W_0}(0) = P(X_{(1)} < 0$ 或 $X_{(1)} > c \mid \mu = 0)$

$= P(X_{(1)} > c \mid \mu = 0) = 1 - (1 - e^{-nc})$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{n}\ln\alpha$

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): x_n < 0$ 或 $x_{(1)} > -\frac{1}{n}\ln\alpha\}.$

当 $\mu = 0$ 时 $f(x;0) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-nx} & x > 0 \end{cases}$

两正态总体 不考

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ X, Y 独立 $(X_1 \cdots X_n)$ $(Y_1 \cdots Y_m)$

记 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_k$ $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_1^m Y_k$ $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_k - \bar{X})^2$ $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_1^m (Y_k - \bar{Y})^2$

设检验水平为 α

1. 当 $\mu_1\ \mu_2$ 未知时 检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(方差)

解: $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$

$\Theta = R^2 \times (0, +\infty)^2$

$\Theta_0 = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) \in \Theta : \sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$

$L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) = L(\mu_1, \sigma_1^2) \cdot L(\mu_2, \sigma_2^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_1^n (X_k - \mu_1)^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\right)^m e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum (Y_k - \bar{Y})^2}$

$\Rightarrow L(\hat{\Theta}) = L(\hat{\mu}_{1MLE}, \hat{\mu}_{2MLE}, \hat{\sigma}_{1MLE}, \hat{\sigma}_{2MLE}) = L(\bar{X}, \bar{Y}, \frac{n-1}{n}S_1^2, \frac{m-1}{m}S_2^2)$

$= \left(\frac{n}{2\pi(n-1)S_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{2\pi(m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m+n}{2}}$

求 $L(\hat{\Theta}_0) = \sup_{(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)} L(\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \sigma^2)$

可以证明: 对 $\forall \sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$ $L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ 在 $(\mu_1, \mu_2) = (\bar{X}, \bar{Y})$ 取 max 而与方差值无关

即: $\sup_{\mu_1, \mu_2} L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) = L(\bar{X}, \bar{Y}, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ 与 $\sigma_1^2\ \sigma_2^2$ 无关

从而 $L(\hat{\Theta}_0) = \sup_{\sigma_1^2 > 0} (\bar{X}, \bar{Y}, \sigma_1^2, \sigma_1^2) = L(\bar{X}, \bar{Y}, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_1^2)$.

$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m+n}((n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2)$ $\Rightarrow L(\hat{\Theta}_0) = \left(\frac{m+n}{2\pi(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \times e^{-\frac{m+n}{2}}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)} = \left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 + \frac{(m-1)S_2^2}{(n-1)S_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{(n-1)S_1^2}{(m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m}{2}}$

$H_0 \checkmark$. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.

$F(n-1, m-1) \sim \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

令 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ 则: $\lambda = C_{m,n}\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\frac{1}{F}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{n-1}{m-1}F\right)^{\frac{m}{2}}$

且当 H_0 为真时, $F \sim F(n-1, m-1)$ 易见 λ 关于 F 先减后增

$\Rightarrow W_0 = \{(X_1 \cdots Y_n): F < C_1 \text{ 或 } F > C_2\}$

$\boxed{\text{作业: 习题三. 3, 4}}$

且满足: $P(F < C_1 \text{ 或 } F > C_2 \mid H_0 \text{为真}) = \alpha$.

从而可取 $C_1 = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$, $C_2 = F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$.

[这名学生太尼玛 煤位了]... 大学张，别吧 又看结果 (勉试)

May 17, 2024

假设检验 单参数 3.1 总结

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ XY独立 $(X_1\cdots X_n)$ $(Y_1\cdots Y_n)$ $\bar{X},\bar{Y}$ $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_k-\bar{X})^2$ $S^2=\frac{1}{m-1}\sum(Y_k-\bar{Y})^2$

2. 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，检验 $H_0:\mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_a:\mu_1\neq\mu_2$

(σ^2 未知).

解: $\theta=(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$ $\quad \Theta=\mathbb{R}^2\times(0,+\infty)$ $\quad \Theta_0=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)\in\Theta:\mu_1=\mu_2\}$

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_1^n(X_k-\mu_1)^2+\sum_1^m(Y_k-\mu_2)^2\right)}$$

$$L(\hat{\Theta})=\sup_{\Theta}L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$$

在参数空间的上确界 $=\sup_{\Theta}L(\bar{X},\bar{Y},\sigma^2)$ 　其中上确界时有 $\mu_1=\bar{X}$ $\mu_2=\bar{Y}$，故化为一元函数极值

$$=\left(\frac{m+n}{2\pi(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{m+n}{2}}$$

$$L(\Theta_0)=\sup_{\substack{\mu_1\in R\\ \sigma^2>0}}L(\mu_1,\mu_1,\sigma^2)$$

在小集合上的上确界

令 $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\mu_1}\ln L(\mu_1,\mu_1,\sigma^2)=0\\ \frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ln L(\mu_1,\mu_1,\sigma^2)=0\end{cases}$ 解得最大值点 $\Rightarrow\begin{cases}\tilde{\mu}_1=\frac{1}{m+n}(n\bar{X}+m\bar{Y})\\ \tilde{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left((n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2+\frac{mn}{m+n}(\bar{X}-\bar{Y})^2\right)\end{cases}$

$$\text{故最大值}=\left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2}\right)^{\frac{m+n}{2}}e^{-\frac{m+n}{2}}$$

故广义似然比: $\lambda=\left(1+\frac{1}{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}\frac{mn}{m+n}(\bar{X}-\bar{Y})^2\right)^{\frac{m+n}{2}}$

构造否定域 $W_0=\{\underbrace{(X_1\cdots Y_m)}_{\text{样本}}:\lambda>\lambda_0\}$

若 H_0 为真 则:

$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma^2}{n})$ $\quad \bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(0,\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$

$\bar{Y}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma^2}{m})$. $\quad \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\quad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$

从而 $\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2)$

记 $\Rightarrow T:=\dfrac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\,\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{(m+n-2)\sigma^2}}}\sim t(m+n-2)$ (已消了 σ)

t分布: 标准正态分布 / 卡方分布比自由度...

且 $\lambda = (1+C_{m,n}T^2)^{\frac{m+n}{2}}$　　λ 关于 $|T|\uparrow$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m)\ \ |T|>c\}$　　$\boxed{\text{找到 } T}$

W_0 满足 $\sup\limits_{\cancel{\mu_1\in R,\ \sigma^2>0}} P(\ |T|>c \mid \mu_1=\mu_2) = \alpha.$　　$\Rightarrow c = t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2).$

（$|T|$ ~~分布~~仅与 μ_1，σ^2 两参数无关）

当 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，未知时 检验 $H_0: \mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_a: \mu_1\neq\mu_2$

:Behtens – fisher 问题

解：$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m})$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

取 $\xi = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$　　则当 H_0 为真时，$\xi \sim N(0,1)$

（用 ξ 作检验统计量

$W_0=\{(\cdots),|\xi|>c\}$. 无效，ξ 里有未知参数.

故 ξ 不能作）

思路：将总体方差替代为样本方差.
S_1^2　S_2^2

取 $T := \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}$　　~~中~~不依赖未知参数，但此时分布不知道.

当 H_0 为真时，T的分布相当复杂 ~~[illegible]~~，且依赖 $\boxed{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$ 不能用. 含未知参数.
精确分布

T的近似分布：近似服从 $t(k)$ 分布　$\dfrac{(\frac{1}{n}S_1^2+\frac{1}{m}S_2^2)^2}{\frac{1}{n-1}(\frac{S_1^2}{n})^2+\frac{1}{m-1}(\frac{S_2^2}{m})^2}$

$W_0: \{(x_1,\cdots y_m): \overset{|T|}{\cancel{\ \ }} > c\}. = \alpha.$

$$\boxed{c\ \ \approx\ \ t_{\frac{\alpha}{2}}(k)}$$

〈广义似然比检验法〉 众多检验法中的一个.

注：只考单正态

§3. 单参数情形的假设检验

$X \sim \cancel{F(x;\theta)}$ $\quad \theta \in \Theta = (a, b) \qquad -\infty \le a < b \le +\infty$

$N(\mu, 1)$

$N(0, \sigma^2)$.

单参数指数型分布： 概率函数（或密度函数）： $f(x;\theta) = S(\theta) h(x) e^{Q(\theta) V(x)}$ (3.1)

其中： $h(x) \geq 0$ （与θ无关）

$Q(\theta)$ 关于 θ 严格↑

定理3.1 设 X 为单参数指数型分布 型如 (3.1)

只考第一个相关

对检验问题 $H_0: \theta \le \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta > \theta_1$ (★)

若对 $\alpha \in (0,1)$ $\exists c$ s.t $P\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k) > c \mid \theta = \theta_1\right) = \alpha$ (3.2)

则 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_{k=1}^{n} V(x_k) > c\}$ 为（★）的 UMP 否定域 (3.3)

水平为α的. （函数最大功效.）

证明：似然函数 $L(\theta) = S^n(\theta)\left(\prod_{k=1}^{n} h(x_k)\right) e^{Q(\theta)\sum_{1}^{n} V(x_k)}$

由 (3.2) 知： $\beta_{W_0}(\theta_1) = \alpha$

1°. 证明： $\sup_{\theta \le \theta_1} \beta_{W_0}(\theta) = \beta_{W_0}(\theta_1) = \alpha$ 即 W_0 的水平为 α

对 $\forall \theta_0 < \theta_1$，考虑 $H_0: \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_a: \theta = \theta_1$ (3.4)

令 $\alpha_1 = \beta_{W_0}(\theta_0)$

$$\lambda_1 = \frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} = \frac{S^n(\theta_1)}{S^n(\theta_0)} e^{(Q(\theta_1) - Q(\theta_0))\sum_{1}^{n} V(x_k)}$$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n)\ \sum_{1}^{n} V(x_k) > c\}$

$= \{(x_1 \cdots x_n)\ \lambda_1 > \lambda_0'\}$ for some constant λ_0'

从而由 N-P 引理知： W_0 为 (3.4) 的检验水平为 α_1 的 UMP 否定域

且由 Th 2.3 和 W_0 是 (3.4) 的无偏否定域，即： $\beta_{W_0}(\theta_1) \geq \alpha = \beta_{W_0}(\theta_0)$

2°. 证明，对（★）的任意水平不超过 α 的否定域 W

恒有 $\beta_{W_0}(\theta) \geq \beta_W(\theta) \quad \forall \theta > \theta_1$

对 $\forall \theta_2 > \theta_1$ 考虑：

$H_0: \theta = \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta = \theta_2$ (3.5)

$$\lambda_2 = \frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \frac{S^n(\theta_2)}{S^n(\theta_1)} e^{(Q(\theta_2) - Q(\theta_1))\sum_{1}^{n} V(x_k)}$$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n)\ \sum_{1}^{n} V(x_k) > c\} = \{(x_1 \cdots x_n)\ \lambda_2 > \lambda_0''\}$.

for some constant λ_0''

结合 N-P 引理及(3.2)知　W_0 是(3.5)的水平为 α 的 UMP 否--

再由 $\rho_W(\theta_1) \le \sup_{\theta\le\theta_1} \rho_W(\theta) \le \alpha$

得: $\rho_{W_0}(\theta_2) \ge \rho_W(\theta_2)$

$H_0: \theta \ge \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta < \theta_1$

例: $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$　σ_0^2 已知

$Q(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_0^2}$　$V(x) = x.$

$H_0: \mu \le \mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu > \mu_0$

解: $f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_0^2}}}_{S(\mu)} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}}_{h(x)} e^{\frac{\mu}{\sigma_0^2}x}$

由 Th3.1 知:

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > c\}$ 为水平为 α 的 UMP 否定域

其中 $\rho_{W_0}(\mu_0) = P(\sum_1^n x_k > c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$

当 $\mu = \mu_0$ 时　$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

从而由 $\alpha = P(\sum x_k > c \mid \mu = \mu_0)$.

$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{\frac{1}{n}c - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0\right)$

$\Rightarrow$ 故　$\frac{\frac{1}{n}c - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = u_\alpha. \Rightarrow \underline{c = n\mu_0 + \sqrt{n}\,\sigma_0 u_\alpha}$

$\boxed{\text{May 21, 2024}}$ 下周结课　18周以后考试

单参 指数型分布　$f(x;\theta) = S(\theta)\, h(x)\, e^{Q(\theta)V(x)}$　$S>0$　$h \ge 0$　$Q\uparrow$

$H_0: \theta \le \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta > \theta_1$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_{k=1}^n V(x_k) > c\}$

s.t. $P(\sum_1^n V(x_k) > c \mid \theta = \theta_1) = \alpha$

$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2已知

$H_0: \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu > \mu_0$.

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > n\mu_0 + \sqrt{n}\,\sigma_0 u_\alpha\}$.

P93 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = 1.21$

$H_0: \mu \le 30 \leftrightarrow H_a\ \mu > 30$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > 6 \times 30 + \sqrt{6} \times \underbrace{\sqrt{1.21}}_{1.1} \times U_{0.05}$

设$\alpha = 0.05$

例：设 $X \sim N(\mu, 1)$ 检验 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu > \mu_0$ (★1) 求UMP否定域(设水平为α)

解：由于 $E\bar{X} = EX = \mu$ 从而 $\bar{X}$的观测值$\bar{x}$应$\approx \mu_0$

若H_0成立则

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \bar{x} > c\}$

s.t. $P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$

当$\mu = \mu_0$时 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{1}{n})$ 从而 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

从而由 $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu_0}{1/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = \mu_0\right) = \alpha$.

u_α

$\Rightarrow c = \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} u_\alpha$

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_{k=1}^n x_k > n\mu_0 + \sqrt{n}\, u_\alpha\}$.

下证：对任意满足 $P_W(\mu_0) \le \alpha$ 的否定域 W 成立 $P_{W_0}(\mu) \ge P_W(\mu)$ $\forall \mu > \mu_0$

对 $\forall \mu_1 > \mu_0$ 考虑 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu = \mu_1$ (★2)

似然函数：$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}\mu^2} e^{-\frac{1}{2}\sum x_k^2} e^{\mu \sum x_k}$

问题(★2)的似然比为：

$$\lambda = \frac{L(\mu_1)}{L(\mu_0)} = e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)} e^{(\mu_1 - \mu_0)\sum_1^n x_k}$$

从而：$W = \{x_1 \cdots x_n: \lambda > \lambda_0\}$. for some λ_0

从而由 $P_{W_0}(\mu_0) = \alpha$. 及 N-P引理知：W_0是(★2)的水平为α的UMP否定域.

对于W是(★2)的水平不超过α的否定域. 从而 $P_{W_0}(\mu_1) > P_W(\mu_1)$

这很稀.

Th 3.2 3.3 设 X 为单参数指数型分布 型如 $f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{Q(\theta)V(x)}$ $S>0$ $h\geq 0$ $Q\uparrow$ 则:

检验问题 $H_0: \theta \notin (\theta_1, \theta_2) \leftrightarrow H_a: \theta \in (\theta_1, \theta_2)$

否定域: $W_0=\{(x_1 \cdots x_n): \quad C_1 < \sum_1^n V(x_k) < C_2\}$.

$\quad$ s.t $\quad \rho_{W_0}(\theta_1)=\rho_{W_0}(\theta_2)=\alpha$

性质: UMP

$H_0: \theta \in [\theta_1, \theta_2] \longleftrightarrow H_a: \theta \notin [\theta_1, \theta_2]$

$W_0=\{(x_1 \cdots x_n): \quad \underbrace{\sum_1^n V(x_k) < C_1 \text{ 或 } \sum_1^n V(x_k)}_{} > C_2\}$

s.t $\rho_{W_0}(\theta_1)=\rho_{W_0}(\theta_2)=\alpha$ $\qquad$ 已经确: V_X 就是 X.

UMPU

例 3.3. $X \sim N(\theta, \sigma_0^2)$ $\quad \sigma_0^2$ 已知 $\qquad H_0: \theta \in [\theta_1, \theta_2] \longleftrightarrow H_a: \theta \notin [\theta_1, \theta_2]$

解: 由 Th3.3 UMPU 否定域为:

$W_0=\{(x_1 \cdots x_n): \quad \sum_1^n x_k < C_1 \text{ 或 } \sum_1^n x_k > C_2\}$

s.t $\rho_{W_0}(\theta_1)=\rho_{W_0}(\theta_2)=\alpha$

即 $\begin{cases} P(\sum_1^n x_k < C_1 \mid \theta=\theta_1) + P(\sum_1^n x_k > C_2 \mid \theta=\theta_1) = \alpha \\ P(\sum_1^n x_k < C_1 \mid \theta=\theta_2) + P(\sum_1^n x_k > C_2 \mid \theta=\theta_2) = \alpha \end{cases}$ $\qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta=\theta_1 \\ \bar{X} \sim N(\theta_1, \frac{\sigma_0^2}{n}) \\ \frac{\bar{X}-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \end{array} \right.$

标准化

用分布函数表示 $\Leftrightarrow$. $\begin{cases} \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_1-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_2-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = \alpha \\ \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_1-\theta_2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_2-\theta_2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = \alpha. \end{cases}$

DL:
上 Most important 数学 4h
下 less import. 语言 2h+...
晚 least. 科研,工程 2h.
落

不考 §3.6 比率的假设检验

$B(1,p)$ p 比率

一个总体情形 $X \sim B(1,p)$

1. $p \le p_0$ $p > p_0$ ✓.
2. $p \ge p_0$ $p < p_0$
3. $p = p_0$ $p \ne p_0$

问题：设 $X \sim B(1,p)$ 检验：$\underline{H_0: p \le p_0} \leftrightarrow H_a: p > p_0$

解：由于 $E\bar{X} = EX = p$

从而若 $\bar{X}$ 远大于 p_0 则拒绝 H_0

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k \ge c\}$

且对于给定的检验水平 α，W_0 满足：

$$\sup_{p \le p_0} \rho_{W_0}(p) = \sup_{p \le p_0} P\left(\sum_1^n X_k \ge c \mid p\right) = \alpha \quad (6.1)$$

记 $T = \sum_1^n X_k$ 则 $T \sim B(n,p)$ 从而：

$$\cancel{\sup_{p \le p_0} \rho_{W_0}(p) = \sup_{p \le p_0} \sum_{k \ge c} C_n^k p^k}$$

$$P(T \ge k \mid p) = \sum_{i=1}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k}\, dx$$

易见：$P(T \ge k \mid p)$ 关于 p ↑

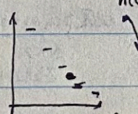
从而 由 (6.1) 知：

$$P(T \ge c \mid p_0) = \sum_{k \ge c} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} = \alpha$$

易见 对给定的 $\alpha \in (0,1)$ 不一定 $\exists c$. s.t 上式成立

从而取近似：寻找使得：

$h(c_0)$. $\underline{\sum_{k=c_0} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha}$ 成立的最小整数 c_0



易见这样的 c_0 存在

c. 从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k \ge c_0\}$

易见，$\sup_{p \le p_0} P\left(\sum_1^n X_k \ge c_0 \mid p\right) = \underline{P\left(\sum_1^n X_k \ge c_0 \mid p_0\right)} \le \alpha$

即：W_0 的检验水平不超过 α.

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n).\ t \ge c_0\}$ 拒绝 H_0

$T = \sum_1^n X_k$. 设 T 的观测值为 t

找等价条件，去代替 c_0 刻画否定域

$t = \sum_{k=1}^n x_k$

$\underline{t \ge c_0}$ 由 c_0 定义知：$t \ge c_0$ 当且仅当 $\sum_{k=t} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha$ (6.4)

则 $h(t) \le h(c_0) \le \alpha$

从而：若 t s.t (6.4) 成立则 拒绝 H_0.

考虑关于 p 的方程 $\sum_{k=t}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha$

由(4.29)知：其解为 $\underset{\sim\sim\sim}{p = p(t,\alpha)} = \left(1 + \frac{n-t+1}{t} F_{1-\alpha}(2(n-t+1), 2t)\right)^{-1}$

（规定 $p(0,\alpha) = 0$ ）

又由于 (6.4) 右侧关于 p_0 单增↗ ~~从而~~ 从而 6.4 成立 $\Leftrightarrow p_0 \le p(t,\alpha)$.

从而：$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : t \geq c_0\}$

$= \{(x_1 \cdots x_n)\ p(t,\alpha) \geq p_0\}$.

$t = \sum_{k=1}^{n} x_k$

则拒绝 H_0.
反之接收 H_0.

证明：$\sum_{i=k}^{n} \underbrace{C_n^i}_{\frac{n!}{i!(n-i)!}} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$

记：$a_k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$

则由分部积分得：$a_k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{1}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big|_0^p + \frac{n!}{k!(n-k)!} \int_0^p x^k (n-k)(1-x)^{n-k-1} dx$

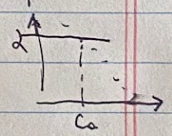
$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + a_{k+1}$ $\qquad a_n = p^n$

May 24, 2024

$X \sim B(1,p)$ $\quad H_0: p \le p_0 \leftrightarrow H_a: p > p_0$ $\quad W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : t \geq c_0\}$ $\quad t = \sum_{1}^{n} x_k$ $\quad c_0$: s.t. $\sum_{k=c_0}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha$ 成立的最小整数

$t \geq c_0 \Leftrightarrow \sum_{k=t}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^k \le \alpha$ （由右图可看出）

$\Leftrightarrow p(t,\alpha) = \left(1 + \frac{n-t+1}{t} F_{1-\alpha}(2(n-t+1), 2t)\right)^{-1} \geq p_0$ （规定 $\underline{p(0,\alpha) = 0}$）
$0 < p_0$
接收 H_0



例16.1 $X = \begin{cases} 1 & 有效 \\ 0 & 无效 \end{cases}$ （两点分布一检验） $X \sim B(1,p)$ $\quad \underline{H_0: p \le 0.8} \leftrightarrow H_a: p > 0.8$
把 $p(t,\alpha)$ 算出来

$n = 30$. $t = 27$ 有效. $p(27, \underset{\sim}{0.05}) = \left(1 + \frac{4}{27} \underbrace{F_{0.95}(8,54)}_{\text{F分布的分位数}}\right)^{-1} = 0.76 < 0.8$ 接收 H_0. 故没有超过 0.8

$p(28, 0.05) = 0.814 > 0.8$ 拒绝 H_0 则超过了 0.8.

两个总体情形

$X \sim B(1, p_1)$　$Y \sim B(1, p_2)$　X, Y 独立：$(X_1 \cdots X_n)$　$(Y_1 \cdots Y_m)$

1. $p_1 \le p_2$　$p_1 > p_2$

2. $p_1 \ge p_2$　$p_1 < p_2$

3. $p_1 = p_2$　$p_1 \ne p_2$

只出描述题
讲怎么做的
不要求算

$\begin{cases} \text{正态理论方法（中心极限、样本容量足够大）} \\ \text{Fisher 精确检验法} \end{cases}$

保证检验水平不超过给定 α 值.

正态理论方法.

1. 检验：$H_0: p_1 \le p_2 \leftrightarrow p_1 > p_2$　　$p_1 \gg p_2$

解：由于 $E\bar{X} = EX = p_1$　$E\bar{Y} = EY = p_2$

从而若观测值 $\bar{x} \gg \bar{y}$，则拒绝 H_0。

$(\bar{x} - \bar{y} \gg 0)$

由中心极限定理知：$\dfrac{\bar{X} - p_1}{\sqrt{\frac{1}{n} p_1(1-p_1)}} \overset{\text{近似服从}}{\dot\sim} N(0,1)$　$\dfrac{\bar{Y} - p_2}{\sqrt{\frac{1}{m} p_2(1-p_2)}} \dot\sim N(0,1)$

打错

$\Rightarrow \bar{X} \dot\sim N\left(p_1, \frac{1}{n} p_1(1-p_1)\right)$　$\bar{Y} \dot\sim N\left(p_2, \frac{1}{n} p_2(1-p_2)\right)$

$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \dot\sim N\left(p_1 - p_2, \frac{1}{n} p_1(1-p_1) + \frac{1}{m} p_2(1-p_2)\right)$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}}} \dot\sim N(0,1)$$

点估计值

分母里也有 p_1, p_2 都不能作为检验统计量，故换成样本估计值.

令 $\xi = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}}$

可以证明，当 m, n 足够大时，ξ 近似服从 $N(0,1)$ 分布

从而，选取检验统计量为 $\eta = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\bar{X}(1-\bar{X}) + \frac{1}{m}\bar{Y}(1-\bar{Y})}}$ 则当 η 过大时，拒绝 H_0

从而否定域为：$w_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m): \eta > c\}$.

且 W_0 满足 $\sup\limits_{p_1\le p_2} P(b>c\mid(p_1,p_2))=\alpha$

当 $p_1\le p_2$ 时 易知 $\eta\le\xi$ 从而 $P(\eta>c\mid p_1\le p_2)\le P(\xi>c\mid p_1\le p_2)$

从而取近似 取 c_0 s.t $P(\underline{\xi>c_0}\mid p_1\le p_2)=\underline{\alpha}$.

$\Rightarrow c_0\approx u_\alpha$ 从而:

$P(\eta<c_0\mid p_1\le p_2)\le P(\xi<c_0\mid p_1=p_2)\approx\alpha.$

从而: $W_0=\{(x_1\cdots x_n,\ y_1\cdots y_m):\ \eta>u_\alpha\}$.

枢轴统计量: 出现在否定域里 $\underline{\xi}\ \eta$ $\xi\ge\eta$. $W_0=\{(\cdots),\ \underset{\sim}{\eta}>c\}$ —的近似值用ξ的分布. $N(p_1-p_2,\cdots)$.

2. 检验 $H_0: p_1\ge p_2 \longleftrightarrow H_a: p_1<p_2$

解: 选取检验统计量为 $\eta=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\bar{X}(1-\bar{X})+\frac{1}{m}\bar{Y}(1-\bar{Y})}}$

否定域为 $W_0=\{(x_1\cdots x_n;y_1\cdots y_m):\ \eta<c\}$

s.t $\sup\limits_{p_1\ge p_2} P(\eta<c\mid(p_1,p_2))=\alpha$. $\underline{\eta}$的分布:依赖参数. 故引入第2个统计量求c.

令 $\xi=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}\bar{X}(1-\bar{X})+\frac{1}{m}\bar{Y}(1-\bar{Y})}}$ 第1个统计量.

则 当 $m,n\gg1$ 时, $\xi\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$.

且当 $p_1\ge p_2$ 时 $\xi\le\eta$

从而: $P(\eta<c\mid p_1\ge p_2)\le\underline{P(\xi<c\mid p_1\ge p_2)}$.

取近似: 找 c_0 s.t $P(\xi<c_0\mid p_1\le p_2)=\alpha$. 则 $c_0\approx u_{1-\alpha}$.

从而: $P(\eta<u_\alpha\mid p_1\ge p_2)\le P(\xi<u_\alpha\mid p_1\ge p_2)\approx\alpha$.

从而 $W_0=\{(x_1\cdots x_n,\ y_1\cdots y_m):\ \eta<u_{1-\alpha}\}$.

3. 检验 $H_0: p_1 = p_2 \leftrightarrow H_a: p_1 \neq p_2$

解：想法：当 H_0 为真时，易见 $\bar{X} \mathrel{\dot\sim} N(p_1, \frac{1}{n} p_1(1-p_1))$

$$\bar{Y} \mathrel{\dot\sim} N(p_1, \frac{1}{m} p_1(1-p_1))$$

从而 $$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}p_1(1-p_1)+\frac{1}{m}p_1(1-p_1)}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$$

$$(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\underline{p_1}(1-\underline{p_1})$$

不能作检验统计量.

$E\bar{X} = p_1 = E\bar{Y}$

$(X_1 \cdots X_n)$ $(Y_1 \cdots Y_m)$

$(X_1 \cdots Y_m)$.

$\frac{1}{n+m}(\sum X_k + \sum Y_k)$.

$\frac{1}{n+m}(n\bar{X} + m\bar{Y})$.

p_1 替换为 $\hat{p} := \frac{1}{m+n}(n\bar{X}+m\bar{Y})$

从而得到 $$G := \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\hat{p}(1-\hat{p})}}$$

可以证明：当 $m, n \gg 1$ 时，$G \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$

当 H_0 为真

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m): |G| > c\}$

s.t. $P(|G| > c \mid H_0 \text{为真}) = \alpha$

$$c \approx u_{\frac{\alpha}{2}}$$

从而取 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) \quad |G| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

[课后题 3.]

X $(n=1)$

找 W s.t. $\beta_W(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \le 3 \\ 1 & \theta \ge 4. \end{cases}$

样本 $X \sim U(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2})$

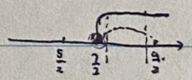
从而 $P(X \in (\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2})) = 1$

即构造否定域 W. s.t. $P(X \in W \mid \theta \le 3) = 0$ 补集 从区间角度看.

$P(X \in W \mid \theta \ge 4) = 1$ 子集.

$\theta \le 3$. $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$

$\theta = 4$ $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$



$P(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}) = 1$.

W 在 $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ 右侧.

W $[\frac{7}{2}, +\infty)$

題4.] X. $f(x)$ $\left\langle \begin{array}{l} f_0(x) = \begin{cases} 1 & [0,1] \\ 0 \end{cases} \\ f_1(x) = \begin{cases} 2x & [0,1] \\ 0 \end{cases} \end{array} \right.$ X. $H_0 \longleftrightarrow H_a$. $\alpha = 0.1$. β, 一致最大功效.

(似然比検定法).

$x_1 \quad n=1 \qquad L(f; x_1) = f(x_1)$

$$\lambda = \frac{L(f_1; x_1)}{L(f_0; x_1)} = \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)} = 2x \qquad x_1 = \mathcal{X} = [0,1]$$

$$w_0 = \{ x_1 \in [0,1] : \quad 2x_1 > \lambda_0 \}.$$

$$P\left(x_1 > \frac{\lambda_0}{2} \,\middle|\, f = f_0 \right) = 0.01.$$

$$= \int_{\frac{\lambda_0}{2}}^{1} f_0(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}\lambda_0}^{1} 1 \, dx \qquad \underline{\lambda_0 = 1.8}$$

$$w_0 = \{ x_1 \in [0,1] : x_1 > 0.9 \}.$$

$$P(\text{取伪}) = 1 - P(x_1 > 0.9 \mid f = f_1)$$

$$= 1 - \int_{0.9}^{1} 2x_1\,dx_1 = 0.81$$

Fisher精确检法　不要求是大样本

$X \sim B(1, p_1)$　　　$Y \sim B(1, p_2)$

X, Y 独立　　$(X_1 \cdots X_n)$　$(Y_1 \cdots Y_m)$　　$\varphi_1 = \sum_1^n X_k$　　$\varphi_2 = \sum_1^m Y_k$.

观测值：$(x_1 \cdots x_n)$　$(y_1 \cdots y_m)$　　$S_1 = \sum_1^n x_k$　　$S_2 = \sum_1^m y_k$

$$t = S_1 + S_2$$

已知信息：$S_1\ S_2\ t$

1. 检验　$H_0: p_1 \le p_2 \leftrightarrow H_a: p_1 > p_2$

想法：在 $S_1 + S_2 = t$ 的条件下，若 $p_1 \le p_2$，则观测值 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 中 "1" 较少

~~从而~~即：S_1 较小　从而当 S_1 过大时，拒绝 H_0　从而否定域的形式为

$$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) : S_1 \ge C\}$$

W_0 应满足．检验水平

$$\sup_{p_1 \le p_2} P(\varphi_1 \ge C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) = \alpha.$$

可以证明　$\sup_{p_1 \le p_2} P(\varphi_1 \ge C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) = \sum_{i=C}^{n} P(i; n, m, t)$.

其中：$P(i; n, m, t) = \dfrac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{n+m}^t}$　超几何分布.

$$从而 \quad \sum_{i=C}^{n} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} = \underline{\alpha}$$

取近似　设 C_0 为满足 $\sum_{i=C_0}^{n} \dfrac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \le \alpha$ 的最小整数

则 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : S_1 \ge C_0\}$.

检验水平 $\le \alpha$.　　$\sup_{p_1 \le p_2} P(\varphi_1 \ge C_0 \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t)$

$$S_1 \ge C_0 \iff \sum_{i=S_1}^{n} P(i; n, m, t) \le \alpha$$

$$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : \sum_{i=S_1}^{n} P(i; n, m, t) \le \alpha\}.$$

$$P(i+1, n, m, t) = P(i, n, m, t) \frac{(n-i)(t-i)}{(i+1)(m-t+i+1)}$$

2. 检验. $H_0\ p_1 \geq p_2 \leftrightarrow H_a\ p_1 < p_2$.

解: 类似于情形 1 有S_1较~~小~~时

从而: $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : S_1 \leq C\}$.

W_0满足: $\sup\limits_{p_1 \geq p_2}$ ~~$P(\varphi_1 < c \mid \varphi_1+\varphi_2 = t)$~~

$P(\varphi_1 < C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t)\ \alpha$.

可以证明: $\sup\limits_{p_1 \geq p_2} P(\varphi_1 \leq C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) = \sum\limits_{i=0}^{C} P(c, n, m, t) = \sum\limits_{i=0}^{C} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t}$

从而 $\sum\limits_{i=0}^{C} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{n+m}} = \alpha$.

取近似: 设 C_0 为满足 $\sum\limits_{i=0}^{C_0} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \leq \alpha$ 的最大整数.

则 $W_0 = \{(x \cdots y,\ S_1 \leq C_0\}$.

$S_1 \leq C_0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{S_1} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \leq \alpha$.

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : \sum\limits_{i=0}^{S_1} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \leq \alpha\}$ ☆2.

1. H_0 ···

2. H_0 ··· 互换$p_1 p_2$即可···

1. $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m)\ \sum\limits_{i=S_1}^{n} P(i, n, m, t) \leq \alpha\}$

2. $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : \sum\limits_{i=S_2}^{m} P(i, m, n, t) \leq \alpha\}$. ☆2.

下证: $\sum\limits_{i=0}^{S_1} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} = \sum\limits_{i=S_2}^{m} \frac{C_m^i C_n^{t-i}}{C_{m+n}^t}$ 右边 $\overset{t-i=j}{=\!=}$ $\sum\limits_{j=t-m}^{S_1} \frac{C_m^{t-j} C_n^j}{C_{m+n}^t}$

若 $t-m>0$ 则对 $\forall i = 0, t, \cdots, m-1$

有 $t-i \geq m+1 > m$ 从而 $C_m^{t-i} = 0$. 左边 $= \sum\limits_{i=t-m}^{S_1} \cdots =$ 右边

3. 检验 $H_0: p_1 = p_2 \longleftrightarrow H_a: p_1 \neq p_2$ $\frac{S_1}{n}$ $\frac{S_2}{m}$

解: 在 $S_1+S_2=t$ 的条件下 若 H_0 为真

$$\frac{S_1}{n} \approx \frac{S_2}{m}$$

从而 在 $S_1+S_2=t$ 的条件下有 $\frac{S_1}{n} \approx \frac{S_2}{m} = \frac{t-S_1}{m}$

从而 $S_1 \approx \frac{nt}{m+n}$

从而 当 S 过大或过小时 拒绝 H_0

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m): S_1 \le C_1$ 或 $S_1 \ge C_2\}$

W_0 满足: $\sup\limits_{p_1=p_2} [P(\varphi_1 \le C_1 \mid \varphi_1+\varphi_2=t) + P(\varphi_1 \ge C_2 \mid \varphi_1+\varphi_2=t)] = \alpha$.

可以证明: $\sum\limits_{i=0}^{C_1} P(i, n, m, t)$ $\sum\limits_{i=C_2}^{n} P(i, n, m, t)$

取近似: 设 C_1 为满足 $\sum\limits_{i=0}^{C_1} P(i, n, m, t) \le \frac{\alpha}{2}$ 的最大整数.

设 $C_{2,0}$ 为满足 $\sum\limits_{i=C_{2,0}}^{n} P(i, n, m, t) \le \frac{\alpha}{2}$ 的最小整数.

则: $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m),\ S_1 \le C_{1,0}$ 或 $S_2 \ge C_{2,0}\}$.

易见: $\le \underline{\sup\limits_{p_1=p_2} [P(\varphi_1 \le C_{1,0} \mid \varphi_1+\varphi_2=t) + \sup\limits_{p_1=p_2} P(\varphi_1 \ge C_{2,0} \mid \varphi_1+\varphi_2=t)]}$

$P + P$

$= \Sigma \cdots + \Sigma \cdots$

$\le \alpha$.

且 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m)\ \Sigma \cdots = \frac{\alpha}{2}$ 或 $\Sigma \le \frac{\alpha}{2}$.

$$W_0 = \{(x_1 \cdots y_m)\ \sum_{i=0}^{S_1} P(i, n, m, t) \le \frac{\alpha}{2} \text{ 或 } \sum_{i=S_1}^{n} P(i, n, m, t) \le \frac{\alpha}{2}\}.$$

例 6.3. $X=\begin{cases}1 & \text{第一组侦破成功} \\ 0 & \text{未侦破}\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1 & \text{第二组侦破成功} \\ 0 & \text{未侦破}\end{cases}$

$X \sim B(1, p_1)$ $Y \sim B(1, p_2)$

$H_0: p_1 = p_2 \longleftrightarrow H_a: p_1 \neq p_2$

$W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) \ \sum_{i=0}^{s_1} p(i, n, m, t) \leq \frac{\alpha}{2}$

或 $\sum_{i=s_1}^{n} p(i, n, m, t) \leq \frac{\alpha}{2}\}$.

$n=25$ $s_1=23$ $m=35$ $s_2=30$ $t=53$.

$$\sum_{i=0}^{23} \frac{C_{25}^{i} C_{35}^{53-i}}{C_{60}^{53}} = 0.878 > 0.025$$

$$\sum_{i=23}^{25} \frac{C_{25}^{i} C_{35}^{53-i}}{C_{60}^{53}} = 0.374 > 0.025.$$

$H_0: f(x) = f_0(x) \longleftrightarrow H_a: f(x) = f_1(x)$.

习题 2: W: $P(\text{弃真}) = \rho_w(f_0) = \iint_w \prod_{k=1}^{n} f_0(x_k) dx_1 \cdots dx_n$

$P(\text{取伪}) = 1 - \rho_w(f_1) = 1 - \iint_w \prod_{k=1}^{n} f_1(x_k) dx_1 \cdots dx_n$.

$L(f) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)$. $\lambda = \frac{L(f_1)}{L(f_0)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(x_k)}{f_0(x_k)}$ $W = \{(x_1 \cdots x_n) \ \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(x_k)}{f_0(x_k)} > \lambda_0\}$.

1. $X \sim B(1, p)$ $H_0: p = \frac{1}{2} \longleftrightarrow H_a: p = \frac{3}{4}$

$W = \{(x_1, x_2, x_3) \ \sum_{1}^{3} x_k \geq 2\}$.

记 $\varphi = x_1 + x_2 + x_3$ 则 $\varphi \sim B(3, p)$

功效 $\rho_w(p)$ $p \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

$\rho_w(\frac{1}{2}) = P(\varphi \geq 2 \mid p = \frac{1}{2})$

$= P(\varphi = 2 \mid p = \frac{1}{2}) + P(\varphi = 3 \mid p = \frac{1}{2})$ $\rho_{\text{弃真}} = \frac{1}{2}$

$= C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^1 + C_3^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{2}$

$\rho_w(\frac{3}{4}) = P(\varphi = 2 \mid p = \frac{3}{4}) + P(\varphi = 3 \mid p = \frac{3}{4})$ $\rho_{\text{取伪}} = 1 - \frac{27}{32} = \frac{5}{32}$.

$= C_3^2 (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4}) + C_3^3 (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{32}$