応用幾何 ma・pa　　課題　#13　　解答例. (2024.01.12)

空間曲面　$S : z = xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$　を考える.

(1) S の グラフとしての 標準的なパラメータ表示 を記せ.

(2) (1) のパラメータ表示に関する 基本ベクトル　$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$, 外積　$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$　及び　面積素　dS　を求めよ.

(3) S の点　$\boldsymbol{p} = (1,1,1)$ における 法線 ℓ を求めよ.

(4) 平面の円板　$D : x^2 + y^2 \le a^2 \ (a > 0)$　を考える.

S の 部分曲面　$S_0 : z = xy \quad ((x,y) \in D)$　の面積 $|S_0|$ を求めよ.

(5) 平面の正方形　$E = [0,1] \times [0,1]$　を考える.

S の 部分曲面　$S_1 : z = xy \quad ((x,y) \in E)$　に対して 次の面積分を求めよ.

$$\int_{S_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z) = {}^t(y, -x, z)$$

(解答例)

(1) $\boldsymbol{x}(x,y) = (x, y, xy) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

(2) $\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} = {}^t(1,0,y), \ \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} = {}^t(0,1,x) \qquad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = {}^t(-y, -x, 1)$

$dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| \, dxdy = \sqrt{y^2 + x^2 + 1} \, dxdy$

(3) 点 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}(1,1)$ において　$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(-1,-1,1)$

法線 ℓ は 点 $\boldsymbol{p} = (1,1,1)$ を通り, ベクトル　$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(-1,-1,1)$　に平行な直線だから,

その方程式は, 次で与えられる.　$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1} \qquad \therefore \ x = y = 2 - z$

(4)
$$|S_0| = \int_{S_0} dS = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dxdy$$
$$= \iint_{D_0} \sqrt{1 + r^2} \cdot r \, dr d\theta \qquad \text{極座標：} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad J = r, \qquad D_0 : \begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1 + r^2} \cdot r \, dr \qquad \text{(変数分離型)}$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_1^{1+a^2} u^{\frac{1}{2}} \, du \qquad u = 1 + r^2, \quad du = 2rdr$$
$$= \pi \Big[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big]_1^{1+a^2} = \frac{2\pi}{3} \Big(\big(1 + a^2\big)^{\frac{3}{2}} - 1 \Big)$$

(5) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(x,y)) \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = {}^t(y, -x, xy) \cdot {}^t(-y, -x, 1) = -y^2 + x^2 + xy$

$$\therefore \ \int_{S_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_E \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(x,y)) \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \, dxdy = \iint_E (-y^2 + x^2 + xy) \, dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (-y^2 + x^2 + xy) \, dy = \int_0^1 dx \Big[-\frac{1}{3}y^3 + x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 \Big]_0^1$$
$$= \int_0^1 \Big(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \Big) dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x \Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$