応用幾何 ma・pa　　課題　#12　　解答例.　(2023.12.22)

(1) 次のパラメータ表示を持つ曲面を考える.　$S: \boldsymbol{x}(t,\theta) = (e^t\cos\theta, e^t\sin\theta, t)\ \ (t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi])$

(i) (a) S の 平面 $z = c\ \ (c \in \mathbb{R})$ による 切り口 を求めよ.

(b) S の 平面 $y = 0$ による 切り口 を求めよ.

(c) S の 概形 を描け.

(ii) 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1(t,\theta) = \boldsymbol{x}_t(t,\theta),\ \boldsymbol{r}_2(t,\theta) = \boldsymbol{x}_\theta(t,\theta)$ を求めよ.

(iii) 外積 $\boldsymbol{r}_1(t,\theta) \times \boldsymbol{r}_2(t,\theta)$ 及び 面素 dS を求めよ.

(iv) S の 点 $\boldsymbol{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ を 通る (極大) t-曲線, θ-曲線 及び 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\ \boldsymbol{r}_2\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ を (i)(c) の図に書き込め. (あくまで 概略 で良い.)

(v) 点 $\boldsymbol{x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ における S の 接平面 及び 法線 の 方程式 を求めよ.

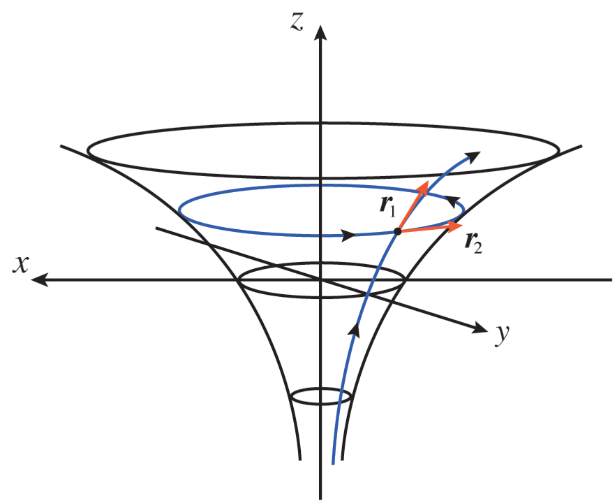
(解答例)

(i) S は xz 平面 の 曲線 $x = e^z$ を z 軸の周りに回転してできる 回転面

(a) 原点中心, 半径 e^c の 円周

(b) xz 平面 の 2 曲線 $x = \pm e^z$

(c) 右図



(ii) $\boldsymbol{r}_1(t,\theta) = \boldsymbol{x}_t(t,\theta) = (e^t\cos\theta, e^t\sin\theta, 1)$

$\boldsymbol{r}_2(t,\theta) = \boldsymbol{x}_\theta(t,\theta) = (-e^t\sin\theta, e^t\cos\theta, 0)$

(iii) $$\boldsymbol{r}_1(t,\theta) \times \boldsymbol{r}_2(t,\theta) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ e^t\cos\theta & e^t\sin\theta & 1 \\ -e^t\sin\theta & e^t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t\cos\theta \\ -e^t\sin\theta \\ e^{2t} \end{pmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|\, dtd\theta = e^t\sqrt{e^{2t}+1}\, dtd\theta$

(iv) (i)(c) 図 参照

(v) $\boldsymbol{x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = (0, e, 1)$　　$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(0, -e, e^2)$

接平面 :　点 $\boldsymbol{x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ を通り $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ と直交する平面

$$-e(y-e) + e^2(z-1) = 0 \qquad \therefore\ y = ez \quad (x : \text{任意})$$

法線 :　点 $\boldsymbol{x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ を通り $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ と平行な直線

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-e}{-e} = \frac{z-1}{e^2} \qquad \therefore\ x = 0,\ ey + z + e^2 + 1 = 0$$

(2) D は xy 平面の 有界閉領域 で，その境界は 区分的に滑らかな曲線 (の 有限和) とする．$z = f(x,y)$ を D 上の C^1 級 関数 とし，S を この関数のグラフとする．このとき，S の 面積 $|S|$ について 次の式が成り立つ．

$$|S| = \iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\, dxdy$$

この公式を用いて，次の曲面の面積を求めよ．

$$S:\ z = x^2 + y^2 \quad ((x,y) \in D) \qquad\qquad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$$

(解答例)

$$|S| = \iint_D \sqrt{z_x(x,y)^2 + z_y(x,y)^2 + 1}\, dxdy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy \qquad (*)$$

○ 平面の極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ の下で $J = r$， D には $E:\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ が対応する．

$$(*) \ = \ \iint_E \sqrt{4r^2+1}\, r\, drd\theta = \frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\cdot 8r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \cdot 2\pi$$

$$= \ \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$$