応用幾何 ma・pa　　課題 #15　　解答例. (2024.01.23)

[1] 球面　$S: x^2+y^2+z^2=a^2 \ \ (a>0)$ を考える. (外側を表とする.)

(1) S の点 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ における 正の単位法ベクトル $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}$ を求めよ.

S の 空間極座標 による パラメータ表示　$\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)=a\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \quad (D: 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$

を考える.

(2) 基本ベクトル $\boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi),\ \boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)$ 及び その外積 $\boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi)\times\boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)$ が 正のパラメータ表示 であることを示せ.

(4) 面積要素 dS を求めよ.

(5) 次のスカラー場の 面積分 を求めよ:　$\displaystyle\int_S f\,dS \qquad f(x,y,z)=|x|$

(6) 次のベクトル場の 面積分 を求めよ:　$\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z)=(-y,x,z)$

(解答例)

(1) $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{a}$

(2) $\boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi)=a\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)=a\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi)\times\boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)=a^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi)\times\boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)=(a\sin\theta)\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)$ より

$\boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi)\times\boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)$ は S の表側 (外側) を向いている.

$\therefore\ \boldsymbol{x}(\theta,\varphi)$ は S の 正のパラメータ表示 である.

(4) $dS=\|\boldsymbol{x}_\theta(\theta,\varphi)\times\boldsymbol{x}_\varphi(\theta,\varphi)\|\,d\theta d\varphi=a^2\sin\theta\,d\theta d\varphi$

(5)
$$\begin{aligned}\int_S f\,dS &= \iint_D f(\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\|\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\varphi\|\,d\theta d\varphi = \iint_D |a\sin\theta\cos\varphi|\cdot a^2\sin\theta\,d\theta d\varphi\\ &= a^3\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}|\cos\varphi|d\varphi = a^3\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\ \cdot\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\\ &= a^3\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(4\cdot 1\right) = 2\pi a^3\end{aligned}$$

(6) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=(-y,x,z)\cdot\dfrac{1}{a}(x,y,z)=\dfrac{z^2}{a}$

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S\frac{z^2}{a}\,dS = \frac{1}{a}\int_S z^2\,dS = \frac{1}{a}\iint_D (a\cos\theta)^2\,a^2\sin\theta\,d\theta d\varphi\\ &= a^3\iint_D\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta d\varphi = -a^3\int_0^\pi\cos^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\\ &= -a^3\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi a^3\end{aligned}$$

[2] ベクトル場　$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}$　$(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$　を考える．但し，$r = \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$　である．

(1) 球面　$S_a : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$　$(a > 0)$　を考える．(外側を表とする.)

面積分　$\displaystyle\int_{S_a} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{S} \rangle$　を 面積分の定義 に基づいて 求めよ．

(2) $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ を求めよ．

(3) V を 原点を内部に含む有界閉領域とし，その境界面 ∂V は 区分的に滑らかとする．∂V の向きは V の外側を表 とする．ガウスの発散定理 を用いて，面積分　$\displaystyle\int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{S} \rangle$　を求めよ．

(解答例)

(1)　S_a 上　$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{a^3}$,　$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{a}$

$$\therefore\ \big\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \big\rangle = \Big\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, \frac{\boldsymbol{x}}{a} \Big\rangle = \Big\langle \frac{\boldsymbol{x}}{a^3}, \frac{\boldsymbol{x}}{a} \Big\rangle = \frac{1}{a^4} \big\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \big\rangle = \frac{1}{a^4} \cdot a^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$\int_{S_a} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{S} \rangle = \int_{S_a} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \rangle dS = \int_{S_a} \frac{1}{a^2}\, dS = \frac{1}{a^2} |S_a| = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi$$

(2) $r_{x_i} = \dfrac{x_i}{r}$　　$\displaystyle\left(\frac{x_i}{r^3}\right)_{x_i} = \big(x_i r^{-3}\big)_{x_i} = r^{-3} + x_i(-3) r^{-4} r_{x_i} = r^{-3} + x_i(-3) r^{-4} x_i r^{-1} = \frac{1}{r^3} - \frac{3{x_i}^2}{r^5}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{r^3} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{x_i}{r^3}\right)_{x_i} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3{x_i}^2}{r^5}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

(3) $\boldsymbol{0} \in \operatorname{Int} V$　より V の 内部 に 原点中心, 半径 a $(\ll 1)$ の 球体 をとる．

S と S_a に挟まれた領域 を V_0 とおく．　$V_0 \subset \mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$　　$\partial V_0 = S \cup (-S_a)$

V_0 上で ベクトル場　$\dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}$　にガウスの発散定理を適用すると

$$0 = \int_{V_0} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \int_{S \cup (-S_a)} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle - \int_{S_a} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$$

$$\therefore\ \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \int_{S_a} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = 4\pi$$