応用幾何 ma・pa　課題 #6　解答例. (2023.11.10)

(1) U を $\mathbb{R}^3$ の開集合とし，f, g を U 上の C^1 級 スカラー場 とする．次の等式を Δ 及び grad の定義のみを用いて示せ．

(i) $\mathrm{grad}\,(fg) = f(\mathrm{grad}\,g) + g(\mathrm{grad}\,f)$

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\,\Delta f$

(解答例)

(i) $\mathrm{grad}\,(fg) = \begin{pmatrix} (fg)_x \\ (fg)_y \\ (fg)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x g + f g_x \\ f_y g + f g_y \\ f_z g + f g_z \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = g(\mathrm{grad}\,f) + f(\mathrm{grad}\,g)$

(ii) $\Delta(fg) = \sum_{i=1}^{3} (fg)_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{3} \Big(f_{x_i x_i} g + 2 f_{x_i} g_{x_i} + f g_{x_i x_i}\Big) = g\Big(\sum_{i=1}^{3} f_{x_i x_i}\Big) + 2\sum_{i=1}^{3} f_{x_i} g_{x_i} + f\Big(\sum_{i=1}^{3} g_{x_i x_i}\Big)$

$= f\,\Delta g + 2\,\nabla f \cdot \nabla g + g\,\Delta f$

(2) 次の関数を考える．　$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} :\ f(x,y,z) = x^2 \cos yz$

(i) $\mathrm{grad}\,f$ を求めよ．

(ii) 点 $\boldsymbol{p} = (1,1,1)$ に対して $a := f(\boldsymbol{p})$ 及び $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{p}} f$ を求めよ．

(iii) 点 $\boldsymbol{p}$ における ベクトル $\boldsymbol{v} = (1,1,2)$ による 微分 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} f$ を求めよ．

(iv) 等位面 $S : f(x,y,z) = a$ の 点 $\boldsymbol{p}$ における 法線 $\ell_{\boldsymbol{p}}$ 及び 接平面 $\pi_{\boldsymbol{p}}$ を求めよ．

(解答例)

(i) $\mathrm{grad}\,f = (f_x, f_y, f_z) = \big(2x\cos yz, x^2(-\sin yx)z, x^2(-\sin yz)y\big)$

$= \big(2x\cos yz, -x^2 z \sin yx, -x^2 y \sin yz\big)$

(ii) $a = f(\boldsymbol{p}) = \cos 1,\qquad \mathrm{grad}_{\boldsymbol{p}} f = (2\cos 1, -\sin 1, -\sin 1)$

(iii) $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} f = \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{p}} f, \boldsymbol{v} \rangle = (2\cos 1, -\sin 1, -\sin 1)\cdot(1,1,2) = 2\cos 1 - 3\sin 1$

(iv) $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{p}} f$ は 点 $\boldsymbol{p}$ における S の 法ベクトル になる．

$\ell_{\boldsymbol{p}}$：点 $\boldsymbol{p}$ を通り $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{p}} f$ と平行な直線：　$\dfrac{x-1}{2\cos 1} = \dfrac{y-1}{-\sin 1} = \dfrac{z-1}{-\sin 1}$

$\pi_{\boldsymbol{p}}$：点 $\boldsymbol{p}$ を通り $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{p}} f$ と直交する平面：　$2(\cos 1)(x-1) - (\sin 1)(y-1) - (\sin 1)(z-1) = 0$

(3) 関数 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} :\ f(x,y,z) = xyz$ を考える．

関数 $t = \varphi(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は 次の条件を満たすとする．　$\varphi'(s) = 2\cos s^2$

このとき 合成関数 $\varphi(f) \equiv \varphi \circ f$ に対して $\mathrm{grad}\,\varphi(f)$ を求めよ．

(解答例)　$\varphi'(f) = 2\cos f^2 = 2\cos(xyz)^2 \qquad \therefore\ \mathrm{grad}\,\varphi(f) = \varphi'(f)\,\mathrm{grad}\,f = 2(\cos(xyz)^2)(yz, xz, xy)$