応用幾何 ma・pa　レポート #2　解答例 (2024.01.12)

(1) 曲線　C : $\boldsymbol{x}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$　を考える.

(i) C の 概形 を描け.　(ii) $\boldsymbol{x}'(t)$, $\|\boldsymbol{x}'(t)\|$, 線素 ds を求めよ.

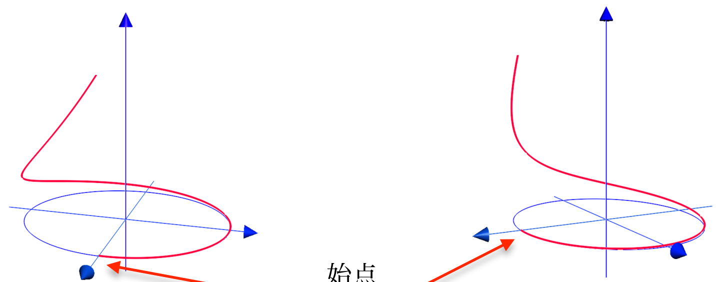
(iii) C の 部分曲線　C_0 : $\boldsymbol{x}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ $(0 \le t \le \pi/4)$　を考える. 次の 線積分 を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_{C_0} f\,ds$　$f(x,y,z) = z^2$　(b) $\displaystyle\int_{C_0} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$　$\boldsymbol{v}(x,y,z) = (y,x,z)$

(c) $\displaystyle\int_{C_0} \alpha$　$\alpha = y^2dx + x^2dy - z^2dz$

(解答例)

(i) C (赤線)



(ii) $\boldsymbol{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, e^t)$　$\|\boldsymbol{x}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + e^{2t}} = \sqrt{1+e^{2t}}$

$ds = \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$

(iii) (a) $f(\boldsymbol{x}(t)) = f(\cos t, \sin t, e^t) = e^{2t}$

$$\int_{C_0} f\,ds = \int_0^{\pi/4} f(\boldsymbol{x}(t))\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/4} e^{2t}\cdot\sqrt{1+e^{2t}}\,dt \qquad u = e^{2t}, \quad du = 2e^{2t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{e^{\pi/2}} \sqrt{1+u}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^{\pi/2}} = \frac{1}{3}\left((1+e^{\pi/2})^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right)$$

(b) $\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t)\rangle = \langle \boldsymbol{v}(\cos t, \sin t, e^t), \boldsymbol{x}'(t)\rangle = \langle (\sin t, \cos t, e^t), (-\sin t, \cos t, e^t)\rangle$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t + e^{2t} = \cos 2t + e^{2t}$$

$$\therefore \int_{C_0} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle = \int_0^{\pi/4} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t)\rangle\,dt = \int_0^{\pi/4} (\cos 2t + e^{2t})\,dt = \frac{1}{2}\left[\sin 2t + e^{2t}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{\pi/2} - 1) = \frac{1}{2}e^{\pi/2}$$

(c) $$\int_{C_0} \alpha = \int_{C_0} (y^2dx + x^2dy - z^2dz) = \int_0^{\pi/4} \left(y^2\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt} - z^2\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left((\sin^2 t)(-\sin t) + (\cos^2 t)\cos t - e^{2t}\cdot e^t\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\cos^3 t - \sin^3 t - e^{3t}\right)dt = \frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{5\sqrt{2}-8}{12} - \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3}{4}\pi} - 1\right) = \frac{5\sqrt{2}-2}{6} - \frac{1}{3}e^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$\circ \int_0^{\pi/4} \cos^3 t\, dt = \int_0^{\pi/4} (1-\sin^2 t)\cot t\, dt = \Big[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\Big]_0^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\circ\ -\int_0^{\pi/4} \sin^3 t\, dt = \int_0^{\pi/4} (1-\cos^2 t)(-\sin t)\, dt = \Big[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi/4}$$
$$= \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{4} - \Big(1-\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3} = \frac{5\sqrt{2}-8}{12}$$

$$\circ \int_0^{\pi/4} e^{3t}\, dt = \Big[\frac{1}{3}e^{3t}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\big(e^{\frac{3}{4}\pi} - 1\big)$$

(2) 球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 及び S の 部分曲面 $S_0 := \{(x,y,z)\in S \mid z\geq 0\}$ を考える.
S は 外側を表とする. S は 次の 球面座標 による 正 の パラメータ表示 を持つ.

$$\boldsymbol{x}(\theta,\varphi) = a\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (D: 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi)$$

(i) (a) S_0 の面積 $|S_0|$ を記せ (証明不要).

(b) S の パラメータ表示 $\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)$ $((\theta,\varphi)\in D)$ の下で S_0 に対応する D の 部分領域 D_0 を記せ.

(ii) 次のスカラー場の 面積分 を求めよ: $\displaystyle\int_{S_0} f\, dS \qquad f(x,y,z) = x^2 z$

(iii) 次のベクトル場の 面積分 を求めよ: $\displaystyle\int_{S_0} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z) = (-y,x,z)$

(iv) 次の微分 2-形式の 面積分 を求めよ: $\displaystyle\int_{S_0} \eta \qquad \eta = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$

(解答例)

(i) (a) $|S_0| = \dfrac{1}{2}|S| = \dfrac{1}{2}\cdot 4\pi a^2 = 2\pi a^2$ (b) $D_0: 0\leq\theta\leq\pi/2,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$

(ii)
$$\int_{S_0} f\, dS = \iint_{D_0} f(\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\|\, d\theta d\varphi$$
$$= \iint_{D_0} \big(a\sin\theta\cos\varphi\big)^2\big(a\cos\theta\big)\cdot a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$$
$$= a^5 \iint_{D_0} \big(\sin^3\theta\cos\theta\big)\cos^2\varphi\, d\theta d\varphi = a^5\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi$$
$$= a^5\Big[\frac{1}{4}\sin^4\theta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\pi = a^5\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}a^5$$

$$\circ \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\Big[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big]_0^{2\pi} = \pi$$

(iii) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = (-y,x,z)\cdot\dfrac{1}{a}(x,y,z) = \dfrac{1}{a}\,z^2$

$$\int_{S_0}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_{S_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \;=\int_{S_0}\frac{1}{a}\,z^2\,dS \;=\; \frac{1}{a}\int_{S_0}z^2\,dS = \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi}{3}a^4 = \frac{2\pi}{3}a^3$$

$$\circ\ \int_{S_0}z^2\,dS \;=\; \iint_{D_0}(a\cos\theta)^2\,a^2\sin\theta\,d\theta d\varphi \;= a^4\iint_{D_0}(\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta d\varphi$$

$$= \; -a^4\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \;=\; -a^4\Big[\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi$$

$$= \; -a^4\frac{1}{3}(-1)\cdot 2\pi \;=\; \frac{2\pi}{3}a^4$$

(iv) $\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)},\,\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)},\,\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\right) = \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 = (a\sin\theta)\,\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)$

$$\int_{S_0}\eta \;=\; \int_{S_0}x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$$

$$= \iint_{D_0}\left(x\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} + y\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)} + z\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\right)d\theta d\varphi$$

$$= \iint_{D_0}\big\langle\boldsymbol{x}(\theta,\varphi),(a\sin\theta)\,\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)\big\rangle d\theta d\varphi \;=\; \iint_{D_0}\big\langle\boldsymbol{x}(\theta,\varphi),\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)\big\rangle\,a\sin\theta\,d\theta d\varphi$$

$$= \iint_{D_0}a^2\cdot a\sin\theta\,d\theta d\varphi \;=\; a\iint_{D_0}a^2\sin\theta\,d\theta d\varphi = a\int_{S_0}dS = a|S_0| = a\cdot 2\pi a^2 = 2\pi a^3$$

(別解答) η に対応する ベクトル場 は $\boldsymbol{w}(x,y,z) = (x,y,z)$

S_0 の各点 $\boldsymbol{x}$ において 正の単位法ベクトル は $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{a}\boldsymbol{x}$

$\therefore\ \langle\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}\rangle = \Big\langle\boldsymbol{x},\dfrac{1}{a}\boldsymbol{x}\Big\rangle = \dfrac{1}{a}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = \dfrac{1}{a}\cdot a^2 = a$

$\therefore\ \displaystyle\int_{S_0}\eta = \int_{S_0}\langle\boldsymbol{w},d\boldsymbol{S}\rangle = \int_{S_0}\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{n}\rangle\,dS = \int_{S_0}a\,dS = a|S_0| = a\cdot 2\pi a^2 = 2\pi a^3$

(3) (i) 球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$ を考える．外側を表とする．

次の 面積分 を ガウスの発散定理 を用いて求めよ: $\displaystyle\int_S\langle\boldsymbol{v},d\boldsymbol{S}\rangle$ $\qquad\boldsymbol{v}(x,y,z) = (2x,-y,3z)$

(ii) 平面 $\mathbb{R}^2$ で 微分 1 形式 $\alpha = y^2\,dx + x^2\,dy$ を考える．

C を 長方形 $D=[0,a]\times[0,b]\ \ (a,b>0)$ の境界とする．向きは 反時計回りとする．

次の 線積分 を求めよ． $\displaystyle\int_C\alpha$

(iii) 次の グリーンの公式 を考える： $\displaystyle\int_{\partial V}f\,\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS \;=\; \int_V f\,\Delta f\,dV + \int_V\|\mathrm{grad}\,f\|^2\,dV$

(a) 次の記号の定義を記せ： 1) $\boldsymbol{n}$ 2) $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$

(b) この定理を用いて，次の命題を示せ:

$(*)$ f が V の内部で調和，$f|_{\partial V}=0 \implies f|_V = 0$

(解答例)

(i) S を境界に持つ 球体 $V: x^2+y^2+z^2 \le a^2$ を考える．ストークスの定理 より

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \int_V 4\, dV = 4|V| = 4 \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{16\pi}{3} a^3$$

(ii) $d\alpha = \left(-\dfrac{\partial}{\partial y} y^2 + \dfrac{\partial}{\partial x} x^2 \right) dx \wedge dy = 2(x-y)\, dx \wedge dy$ 　　平面のグリーンの定理 より

$$\int_C \alpha = \int_D d\alpha = \iint_D 2(x-y)\, dxdy = 2 \iint_D x\, dxdy - 2 \iint_D y\, dxdy$$

$$= 2 \int_0^a x\, dx \int_0^b dy - 2 \int_0^a dx \int_0^b y\, dy = a^2 b - ab^2 = ab(a-b)$$

(iii) (a) 1) $\boldsymbol{n}: \partial V$ の 外向きの 単位法ベクトル場

2) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} : S \to \mathbb{R}$: f の $\boldsymbol{n}$ 方向の 方向微分係数 　　$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(p) = \boldsymbol{n}_p f = \langle \operatorname{grad}_p f, \boldsymbol{n}_p \rangle$

(b) V 上で 関数 $\|\operatorname{grad} f\|^2$ は 連続 で $\|\operatorname{grad} f\|^2 \ge 0$

グリーンの公式 より

$$\underbrace{\int_{\partial V} f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS}_{=0} = \underbrace{\int_V f\, \Delta f\, dV}_{=0} + \int_V \|\operatorname{grad} f\|^2\, dV \qquad \therefore \int_V \|\operatorname{grad} f\|^2\, dV = 0$$

$\therefore\ \|\operatorname{grad} f\|^2 = 0$ 　　$\therefore\ \|\operatorname{grad} f\| = 0$ 　　$\therefore\ \operatorname{grad} f = \boldsymbol{0}$

V は (弧状) 連結 だから 　$f|_V \equiv c$ (一定)

$f|_{\partial V} \equiv 0$ 　　$\therefore\ c = 0$ 　　$\therefore\ f|_V \equiv 0$