応用幾何 ma・pa　　講義資料 (2023)

矢ヶ崎達彦

応用幾何

授業の目的・概要 — ベクトル解析における次の事項に関して解説する.

(1) 空間内の 曲線・曲面 に関する 基本事項

(2) 空間の 一般座標系 に関する 基本事項

(3) 力学 や 電磁気学 で基礎となる スカラー場, ベクトル場, 微分形式 の 微分 (勾配, 発散, 回転) 及び積分 (線積分, 面積分, 積分定理) に関する 基本事項 の理解を深める.

学習目標

(1) 曲線・曲面, 空間座標系 に関する 基本事項 を理解する.

(2) スカラー場・ベクトル場・微分形式 に関する 基本事項 を理解する.

(3) 線積分・面積分・積分定理 に関する 基本事項 を理解する.

(4) これらに関する 基本問題・応用問題 が正しく解ける.

受講に当たっての留意事項

(1) 授業では, 新しい 概念・用語・記号 が毎回現れるので, 必ず自筆のノートをとり復習を行うこと.

(2) 各授業の内容を理解するためには, 自主学習 として復習・演習を 2 時間 以上行う必要がある.
自ら 教科書の問題を解く等の自主的な努力が不可欠である.

(3) レポート・課題 を 毎回 課すので, 自分で解答し提出すること.

(4) 不明の点は積極的に質問すること.

参考書

「基礎と応用 ベクトル解析 [新訂版]」(ライブラリ理工新数学 = T5) (清水勇二 著, サイ エンス社)

授業項目

[1] 空間ベクトル

ベクトルの成分表示，内積・外積，3 次行列式，直線・平面の方程式，
1 変数ベクトル値関数の微分・積分，合成関数 の微分，積の微分

[2] 空間曲線

曲線 (点の運動とその軌跡)， 速度・加速度ベクトル，曲線のパラメータ表示，単位接ベクトル，
曲線の長さ，弧長パラメータ表示，曲線の曲率

[3] 多変数ベクトル値関数の微分

多変数ベクトル値関数，全微分・偏微分，微分行列，合成関数の微分，ヤコビアン，逆写像定理

[4] スカラー場

スカラー場の勾配，等位面，陰関数定理，方向微分，

[5] ベクトル場 (1)

ベクトル場，ベクトル場に沿う流れ，ベクトル場の発散・回転，諸公式

[6] ベクトル場 (2)

線形ベクトル場に沿う流れ，ベクトル場の発散・回転 の意味

[7] 微分形式

微分形式の定義，外積，外微分，スカラー場・ベクトル場との対応

[8] 曲線座標系

曲線座標系，基本ベクトル，直交曲線座標系，勾配・発散・回転の直交曲線座標系に関する表示，
例 (円柱座標・球面座標)

[9] 線積分

スカラー場・ベクトル場・微分 1 形式 の線積分，平面のグリーンの定理

[10] 空間曲面

曲面の例，曲面のパラメータ表示，基本接ベクトル，接平面，第 1 基本量，面積素，単位法ベクトル，
曲面の向き

[11] 面積分 (1)

曲面の面積，スカラー場・ベクトル場 の面積分

[12] 面積分 (2)

微分 2 形式 の面積分，流れの速度ベクトル場における面積分の意味，例題

[13] 積分定理 (1)

積分定理の概要，ガウスの発散定理，ストークスの定理，ガウス積分，例題

[14] 積分定理 (2)

流れの速度ベクトル場における ガウスの発散定理・ストークスの定理 の意味，例題

[15] ポテンシャル，グリーンの公式，調和関数

スカラーポテンシャル，保存力場，ベクトルポテンシャル
ガウスの発散定理の応用 (グリーンの公式，調和関数の性質)

授業概要

ベクトル解析 — ベクトル値関数の 微分・積分 と その 幾何・解析 への応用

項目

1. 曲線・曲面
2. 空間の一般座標系 (直交座標系・球面座標・円柱座標)
3. スカラー場・ベクトル場・微分形式
4. 線積分・面積分，領域上の積分，積分定理 (スカラー場・ベクトル場・微分形式) (解析学 I の続き)
5. 幾何・解析 への応用

空間の幾何的対象と多変数ベクトル値関数の対応 :

曲線 C	$\longleftrightarrow$	1 変数 3 次ベクトル値関数	$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
曲面 S	$\longleftrightarrow$	2 変数 3 次ベクトル値関数	$\boldsymbol{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
空間領域上において			
スカラー場 f	$\longleftrightarrow$	3 変数 スカラー値関数	$f(x,y,z)$
ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ 一般座標系	$\longleftrightarrow$	3 変数 3 次ベクトル値関数	$\boldsymbol{x}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$

積分 :

定積分	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\rightsquigarrow$	線積分	$\int_C f\,ds,$	$\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle,$	$\int_C \alpha$
2 重積分	$\iint_D f(x,y)\,dxdy$	$\rightsquigarrow$	面積分	$\int_S f\,dS,$	$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle,$	$\int_S \eta$
3 重積分	$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$			$\int_V f\,dV,$		$\int_V \omega$

積分定理 — 図形 X 上の積分 と 境界 ∂X 上の積分 の 関係 (図形 X : 曲線・曲面・空間領域)

Ch 1. 空間ベクトル

§1.1. 空間幾何ベクトル

点の座標・幾何ベクトルの成分

空間において 原点 及び 直交座標系 を固定する. $\qquad \begin{matrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_2, & \boldsymbol{e}_3 \end{matrix}$: 基本ベクトル

$$\begin{tikzcd} & \text{空間の点} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \text{空間幾何ベクトル} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{3 次実数ベクトル} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \boldsymbol{v} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \end{tikzcd}$$

(i) $P \longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$: 位置ベクトル

(ii) $P(a_1, a_2, a_3) \longleftrightarrow \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$: 座標ベクトル

(iii) $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \longleftrightarrow \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$: 成分ベクトル

○ $P(a_1, a_2, a_3), Q(b_1, b_2, b_3) \rightsquigarrow \overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

ベクトルに関する諸量

[1] ベクトルの長さ (ノルム), 2 点間の距離

(1) ベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$ の 長さ (ノルム) : $\quad \|\boldsymbol{v}\| := PQ$ (線分 PQ の長さ)

○ $\boldsymbol{v} = (a_1, a_2, a_3) \curvearrowright \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(2) 2 点 P, Q の距離 : $\quad d(P, Q) := PQ = \|\overrightarrow{PQ}\|$

○ $P(a_1, a_2, a_3), Q(b_1, b_2, b_3) \curvearrowright d(P, Q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$

[2] ベクトルの成す角 : $\quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rightsquigarrow \theta = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

定義.

(1) $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$: $\qquad$ 但し, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ or $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{\pi}{2}$ と定める.

(2) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \overset{\text{定義}}{\iff} \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{\pi}{2}$ (i.e., "$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$" or "$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$" or "$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$")

[3] 内積 : $\quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rightsquigarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$: スカラー $\qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

定義. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \qquad$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ or $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ と定める.

性質.

(1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$:

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について 線形 :

$$\langle \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle \qquad \langle c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = c\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \qquad (\boldsymbol{b} \text{ についても同様})$$

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について 対称 : $\qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$

(iii) 正定値性 : $\qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0 \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(2) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \curvearrowright \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$(\because) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{b} &= b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \qquad \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(4) (i) $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$　　(ii) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (3 角不等式)

($\because$)　(i) $|\cos\theta| \leq 1$

(ii) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2$

(5) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2\big) = \dfrac{1}{4}\big(\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2\big)$

[4] 外積

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \;\rightsquigarrow\; \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$: ベクトル

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: 1 次独立 (平行でない) 場合

大きさ　:　$\|\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$　　($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張られる 平行 4 辺形の面積)

向き　　:　$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b},$　$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かって回転するときの 右ネジの向き

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: 1 次独立でない (平行である) 場合　　　　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$: 右手系

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$

性質.

(1) $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$　　($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張られる 平行 4 辺形の面積)

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について線形 :

(a) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}$　　$(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = c\big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\big)$

(b) $\boldsymbol{b}$ についても同様

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について 交代的 :　　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a},$　　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(3) 成分表示 :

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

[5] スカラー 3 重積 と 行列式

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \;\rightsquigarrow\; (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$: スカラー

定義. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\rangle = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$　　(スカラー 3 重積)

性質.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ のとき,　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (行列式)

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm V$:　　$V :=$ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で張られる 平行 6 面体 の体積

符号 :　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:　右手系 $\curvearrowright$ $+$　　左手系 $\curvearrowright$ $-$

($\because$) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\cos\theta$

$V =$ 底面積 $\times$ 高さ $= \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \cdot \big(\pm\|\boldsymbol{c}\|\cos\theta\big) = \pm\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\cos\theta = \pm(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

○ 底面積 $= \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$　　　高さ $= \left\{\begin{matrix} \|\boldsymbol{c}\|\cos\theta \\ \|\boldsymbol{c}\|\cos(\pi - \theta) \end{matrix}\right\} = \pm\|\boldsymbol{c}\|\cos\theta$

○ $V = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$　　　(| | : 絶対値)

§1.2. 行列式

[1] 2 次 行列式.

定義. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の 行列式 :　　$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$

行列式の幾何的意味　　(A が 実行列 の場合)

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \wr & \wr \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}' \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix}$$

$|A| = \pm$「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張られる 平行四辺形 の面積」　　$+$: $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ に対して 反時計回り の方向にある
$-$: 　時計回り

$= \pm$「$\boldsymbol{a}'$ と $\boldsymbol{b}'$ で張られる 平行四辺形 の面積」　　$+$: $\boldsymbol{b}'$ が $\boldsymbol{a}'$ に対して 反時計回り の方向にある
$-$: 　時計回り

[2] 3 次 行列式・トレース :

定義. $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の 行列式 :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (\square + \square + \square) - (\square + \square + \square) \qquad \text{(サラスの公式)}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\parallel\!| \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}}{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} = \pm V$$

但し，V : 空間ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$　で張られる平行 6 面体の体積

$\pm$: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$: 右手系 (左手系)

○ $V = \big||A|\big|$　(A の 行列式 の 絶対値)　　　　($|A| < 0$ となることがあるので注意)

○ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

性質.　A, B : 3 次行列

(1) $|{}^tA| = |A|$　　(2) $|AB| = |A||B|$　　(3) $|E| = 1$

(4)　(i) $|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$,　　$|c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = c|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$　　($\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ についても同様)

(ii) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1' + \boldsymbol{a}_2' \\ \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{c}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1' \\ \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{c}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2' \\ \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{c}' \end{vmatrix}$　　($\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ についても同様)

(5)　(i) $|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = -|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$,　$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = 0$　　(ii) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$　　$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = 0$

○ 他の 行・列 の組み合わせでも成立

[3] トレース.

定義. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の トレース :　$\mathrm{tr}\, A = a+d$,　$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の トレース :　$\mathrm{tr}\, A = a_1+b_2+c_3$

性質. (1) $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$　$\mathrm{tr}\,(cA) = c\,\mathrm{tr}\, A$　(2) $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$

§1.3. 図形の方程式

$X \subset \mathbb{R}^3$: 空間図形

$\circ$ X の方程式 =「$P(x,y,z) \in X$ となる必要十分条件を与える x,y,z についての式」

例 (1) 平面の方程式

点 $P_0 = \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り ベクトル $\boldsymbol{a} = (a,b,c)$ に直交する平面 π の方程式

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

($\because$) 点 $P = \boldsymbol{x} \equiv (x,y,z)$ に対して　$\overrightarrow{P_0P} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$$\therefore\ P \in \pi \iff \boldsymbol{a} \perp \overrightarrow{P_0P} \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \iff \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = 0$$

1 次式　$ax+by+cz+d=0$　($\boldsymbol{a} \equiv (a,b,c) \neq (0,0,0)$)　について

(i) この 一次式 は ベクトル $\boldsymbol{a}$ に直交する ある平面 を表す.

(ii) 点 $P_1 = \boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ から 平面 π : $ax+by+cz+d=0$ までの距離 は, 次式で与えられる.

$$\frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1 + d|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

($\because$) 点 $P_1 = \boldsymbol{x}_1$ から 平面 π に降ろした垂線の足 を $P_2 = \boldsymbol{x}_2$ とおくと

P_2 は π 上の点だから　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_2 = -d$

$\overrightarrow{P_2P_1} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = t\boldsymbol{a}$　($t \in \mathbb{R}$)　と置ける.　$|P_2P_1| = |t|\|\boldsymbol{a}\|$

$$\therefore\ t\|\boldsymbol{a}\|^2 = t(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot (t\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1 + d$$

$$\therefore\ |t|\|\boldsymbol{a}\|^2 = |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1 + d| \qquad \therefore\ |P_2P_1| = |t|\,\|\boldsymbol{a}\| = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1 + d|}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

(2) 直線の方程式

点 $P_0 = \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り ベクトル $\boldsymbol{a} = (a,b,c) \neq \boldsymbol{0}$ に平行な直線 ℓ の方程式

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

(但し, この式で, 分母 = 0 のときは 分子 = 0 と解釈する)

($\because$) $P(\boldsymbol{x}) \in \ell \iff \overrightarrow{P_0P} /\!/ \boldsymbol{a} \iff (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) /\!/ \boldsymbol{a} \iff {}^{\exists}t \in \mathbb{R}\quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = t\boldsymbol{a}$

t を消去して 方程式 を得る.

例. (i) $a=0,\ b,c \neq 0$ の場合 :　$\dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \iff x = x_0$ かつ $\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

(ii) $a=b=0,\ c \neq 0$ の場合 :　$\dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{0} = \dfrac{z-z_0}{c} \iff x = x_0$ かつ $y = y_0$　(z : 任意)

(3) 球面の方程式

中心が 点 $P_0 = \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 半径 $r > 0$ の球面 S の方程式

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

$(\because)$ $P(\boldsymbol{x}) \in S \iff |\overrightarrow{P_0P}| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$

○ 閉球体 : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le r^2$ $(\because)$ $\|\overrightarrow{P_0P}\| \le r$

§1.4. 線形変換

[1] 平面 の 線形変換

○ 直交座標系

平面 $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ * 以下，直交座標系を 1 つ固定し，平面 と $\mathbb{R}^2$ を同一視する.

点 P 座標 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

定義. A : 実 2 次行列 $\rightsquigarrow$ $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 :$ $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

性質. (1) 線形性 : $L_A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L_A(\boldsymbol{x}) + L_A(\boldsymbol{y})$, $L_A(c\boldsymbol{x}) = cL_A(\boldsymbol{x})$

(2) 合成 : $L_A L_B = L_{AB}$ (3) 恒等変換 : $L_E = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}$

(4) 線形同型 : A : 正則 (i.e., A^{-1} が存在) $\iff$ L_A : 線型同型 (全単射) このとき $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$

$$\boldsymbol{x} \underset{L_{A^{-1}}}{\overset{L_A}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{y}$$

回転変換.

(1) 平面の極座標

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\boldsymbol{x}$ の 極座標 $= (r, \theta)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ : 偏角)

○ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

(2) 回転行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

(i) $L_{R(\theta)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: 原点の周りの (正の向きの) θ 回転 (正の向き = 反時計周り)

* $R(\theta)\left(r\begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} \cos(\tau+\theta) \\ \sin(\tau+\theta) \end{pmatrix}$

(ii) $R(\theta)R(\tau) = R(\theta+\tau)$ ($\iff$ cos, sin の加法定理)

Ch 2. 1 変数 3 次 数ベクトル値関数

§2.1. 1 変数 3 次 数ベクトル値関数

$I \subset \mathbb{R}$: 区間　　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$

例. 1 変数 3 次 数ベクトル値関数 で表される写像　　3 次元空間において直交座標系を固定する.

(1) 空間の点の運動

(i) 点 P は その座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ で表される.

(ii) I : 区間　$I \ni t \longmapsto P(t) = \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$

(2) 空間の幾何ベクトルの時間変化

(i) 空間の幾何ベクトル $\boldsymbol{v}$ は その成分 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ で表される.

(ii) $\mathbb{R} \supset \underset{\text{区間}}{I} \ni t \longmapsto \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{a}(t) = (a(t), b(t), c(t)) \in \mathbb{R}^3$

基本事項　§2.2. 極限・連続性　　§2.3. 微分　　§2.4. 積分

§2.2. 極限・連続性.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$　　$I \subset \mathbb{R}$: 区間

定義.

(1) $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)\ \ (t \to a) \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0\| \to 0\ \ (t \to a) \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} x(t) \to x_0 \\ y(t) \to y_0 \\ z(t) \to z_0 \end{array}\ \ (t \to a)$

$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$

(2) (i) $\boldsymbol{x}(t)$: 点 $t = a \in I$ で 連続 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}(a)\ \ (t \to a)$

(ii) $\boldsymbol{x}(t)$: (I 上) 連続 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}(t)$: 各点 $t \in I$ で連続

§2.3. 微分.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$　　($I \subset \mathbb{R}$: 区間)

定義.

(1) $\boldsymbol{x}(t)$: 点 $t = a \in I$ で 微分可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 極限ベクトル $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\boldsymbol{x}(a+h) - \boldsymbol{x}(a)\big)$ が存在

(i) このとき，このベクトルを $\boldsymbol{x}(t)$ の $t = a$ での 微分係数 と呼び，次の記号で表す:

$$\boldsymbol{x}'(a) = \dot{\boldsymbol{x}}(a) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(a)$$

(2) $\boldsymbol{x}(t)$: (I 上) 微分可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}(t)$: 各点 $t \in I$ で 微分可能

(i) このとき，数ベクトル値関数 $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}'(t) \end{array}$ を $\boldsymbol{x}(t)$ の 導関数 と呼び，次の記号で表す:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

(3) n 階導関数

(i) 導関数 $\boldsymbol{x}'(t)$ が I 上 微分可能 のとき,

$\boldsymbol{x}(t)$ は 2 回 微分可能と言い

$\boldsymbol{x}(t)$ の 2 階 の 導関数 $\boldsymbol{x}''(t) = \ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$ を $(\boldsymbol{x}')'(t) = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big)$ で定義する.

(ii) この操作を繰り返して，

$\boldsymbol{x}(t)$ の $n-1$ 階 の 導関数 $\boldsymbol{x}^{(n-1)}(t)$ が存在し，さらに それが I 上 微分可能 のとき，

$\boldsymbol{x}(t)$ は n 回 微分可能と言い

$\boldsymbol{x}(t)$ の n 階 の 導関数 $\boldsymbol{x}^{(n)}(t) = \dfrac{d^n \boldsymbol{x}}{dt^n}$ を $(\boldsymbol{x}^{(n-1)})'(t) = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{d^{(n-1)}\boldsymbol{x}}{dt^{(n-1)}}\Big)$ で定義する．

(4) $\boldsymbol{x}(t) : C^n$ 級 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x}(t) : n$ 回 微分可能 かつ n 階導関数 $\boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ が 連続

基本的な性質

(1) $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$: 微分可能 $\Longleftrightarrow$ 各座標関数 $x(t), y(t), z(t)$: 微分可能

このとき　$\boldsymbol{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

(2) (合成関数の微分)

次の合成関数を考える :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t(u)) : \begin{array}{ccccc} & t = t(u) & & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) & \\ J & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & t & \longmapsto & \boldsymbol{x} \end{array} \qquad (I, J \subset \mathbb{R} : \text{区間})$$

$t(u), \boldsymbol{x}(t)$: 微分可能 $\Longrightarrow$ 合成関数 $\boldsymbol{x}(t(u))$: 微分可能　$\dfrac{d}{du}\boldsymbol{x}(t(u)) = \dfrac{dt}{du}(u)\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t(u))$

(3) (積の微分)　$f(t)$: スカラー関数，$\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)$: 3 次 数ベクトル値関数

(i) $(f(t)\boldsymbol{a}(t))' = f'(t)\boldsymbol{a}(t) + f(t)\boldsymbol{a}'(t)$

(ii) $\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)\rangle' = \langle \boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{b}(t)\rangle + \langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}'(t)\rangle$　　$\langle\ ,\ \rangle$: 内積

(iii) $(\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t))' = \boldsymbol{a}'(t) \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}'(t)$

(4) $\|\boldsymbol{a}(t)\| \equiv c$ (定数) $\Longleftrightarrow$ $\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}'(t)\rangle \equiv 0$

§2.4. 積分.

[1] 不定積分　$\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{X}(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$　　$(I \subset \mathbb{R} : \text{区間})$

定義.

(1) $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{x}(t)$ のとき $\boldsymbol{X}(t)$ は $\boldsymbol{x}(t)$ の 原始関数 であると言う．

(i) $\boldsymbol{x}(t)$ の 原始関数 は 定ベクトル の差を除いて一意に定まる．

(2) $\boldsymbol{x}(t)$ の 任意の原始関数 を $\displaystyle\int \boldsymbol{x}(t)\,dt$ で表し，$\boldsymbol{x}(t)$ の 不定積分 と呼ぶ．

[2] 定積分

$$\boldsymbol{x}(t) : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array} \quad : \text{連続}$$

定義. 数ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ の定積分 $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\,dt \in \mathbb{R}^3$ が，通常の 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ と同様に，

区間 $[a,b]$ の分割を用いて定義される．(詳細略)

性質.

(1) $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt,\ \int_a^b y(t)\,dt,\ \int_a^b z(t)\,dt\right)$

(2) (i) $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{x}'(t)\,dt = \boldsymbol{x}(b) - \boldsymbol{x}(a)$　　(ii) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^t \boldsymbol{x}(s)\,ds = \boldsymbol{x}(t)$

Ch 3. 空間曲線.

§3.1. 空間曲線

空間曲線 — 2 つの意味 : (1) 関数としての曲線 (空間の点の運動)

(2) 空間図形としての曲線 (点の運動の軌跡)

- $(1\frac{1}{2})$ 関数としての曲線 の パラメータ変換 の下での 同値類
- 以下，3 次元空間 E^3 において 原点 O 及び 直交座標系 を固定する．
  - (i) 空間の点 は その座標ベクトル で表す．これにより $E^3 = \mathbb{R}^3$ と見なす．
  - (ii) 幾何ベクトル は その成分ベクトル で表す．
  - (iii) 与えられた 3 次数ベクトル が 空間の点 を表すか 幾何ベクトル を表すかは 文脈から判断する．

$$\begin{tikzcd}
\text{点 } P \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{座標}"'] & & \text{幾何ベクトル } \boldsymbol{v} \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{成分}"] \\
& \text{数ベクトル } \boldsymbol{a} = (a, b, c) &
\end{tikzcd}$$

I. 関数としての曲線 (空間の点の運動).

$I = [a, b], (a, b), (a, \infty), (-\infty, \infty)$

空間の点の運動 $I \subset \mathbb{R}$: 区間

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & E^3 \\ t & \longmapsto & P(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

座標表示 :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{(座標関数)}$$

$$t \longmapsto \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

(1) 軌跡 : $C = \{P(t) \mid t \in I\} \subset E^3$ (空間図形)

(2)

成分表示

速度ベクトル : $\boldsymbol{v}(t) := \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \overrightarrow{P(t)P(t+h)}$ (位置の変化率)

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}'(t) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

速度 : $\|\boldsymbol{v}(t)\|$

$$\|\boldsymbol{v}(t)\| = \|\boldsymbol{x}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

加速度ベクトル : $\boldsymbol{a}(t) := \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} (\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{v}(t))$ (速度ベクトルの変化率)

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{x}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

$$\|\boldsymbol{a}(t)\| = \|\boldsymbol{x}''(t)\| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2 + z''(t)^2}$$

(3) 曲線 $P(t)$ $(t \in I)$: $(P(t) = \boldsymbol{x}(t))$

- (i) C^1 級 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 座標関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ が 1 変数 3 次ベクトル値関数として C^1 級
- (ii) “滑らかな曲線” $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ C^1 級 で 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ $(t \in I)$

II. 空間図形としての曲線 (点の運動の軌跡).

(以下，自己交叉 は考えない)

空間図形としての 滑らかな曲線 C := “関数としての 滑らかな曲線” の軌跡 になっている 空間図形 (閉曲線も含む)

(1) C のパラメータ表示 : C を軌跡に持つ “関数としての 滑らかな曲線” $P(t)$ $(t \in I)$

(2) 記号 $C : P(t)$ $(t \in I)$ は，次を意味する :

C : 空間図形としての 滑らかな曲線

$P(t)$ $(t \in I)$: C の パラメータ表示

$$\left(\begin{array}{l} P(t) \ (t \in I) : \text{滑らかな点の運動} \\ C : P(t) \ (t \in I) \text{ の軌跡} \end{array} \right)$$

以下，C を 滑らかな曲線 とする．

(1) 接線　$P \in C$

(i) (接ベクトル)　C の 点 P での 接ベクトル を次により定義する．

∘ C の 任意の 滑らかなパラメータ表示 $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$ を取る．

$P = \boldsymbol{x}(t_0)$ として，速度ベクトル $\boldsymbol{x}'(t_0)$ を考える．

$\boldsymbol{x}'(t_0)$ に 平行 な 任意の ベクトル を C の 点 P での 接ベクトル と呼ぶ．

C の 点 P での 接ベクトル は

(a) C の パラメータ表示 $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$ の選び方に依らず，C 及び P のみで定まる．

(b) 点 P を始点とする位置ベクトルと見なす．

(ii) (接線) C の 点 P での 接線 ℓ_P とは

点 P を通り，点 P での C の ある 接ベクトル $\boldsymbol{v}\,(\neq \boldsymbol{0})$ に平行 な直線 のことである．
(任意の)

ℓ_P の 方程式 :

$\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$ を C の 任意の 滑らかなパラメータ表示 とし，$P = \boldsymbol{x}(t_0)$ とする．

(a) ℓ_P の パラメータ表示 :　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t_0) + s\boldsymbol{x}'(t_0) \quad (s \in \mathbb{R})$

(b) ℓ_P の 方程式 :　$\dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$

(2) 曲線の向き

(i) C の向き := C 上の点の動く方向の指定

(ii) 向き付けられた曲線 = 向き (点の動く方向) の指定された曲線

(3) C が 向き付けられた曲線 のとき

(i) C の 正 のパラメータ表示 := C の パラメータ表示で, 点の移動 が 曲線の向きと 一致する もの
(負)　(逆になっている もの)

(ii) C の正の向きの単位接ベクトル場　$\boldsymbol{t} : C \longrightarrow V^3$　が 次で定義される．

(a) 各点 $P \in C$ に対して $\boldsymbol{t}_P$ を C の 点 P での 正の向きの単位接ベクトル とする．

(b) $\boldsymbol{t} : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & V^3 \\ P & & \boldsymbol{t}_P \end{array}$

(iii) $-C$:= 曲線 C で 逆の向きを持つもの

§3.2. 曲線の長さ.

§3.2.1. 曲線の長さ

C : 2 点 P, Q を結ぶ 区分的に滑らかな空間曲線

定義. C の長さ $\ell(C)$ を次の様に定める:

(1) (C の 折れ線近似) C の分割 $\Delta : P = P_0, P_1, \cdots, P_n = Q$ を取り，次の 折れ線近似 を考える:

$$C_\Delta = \overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \cdots \overline{P_{n-1}P_n}$$

$$\ell_\Delta(C) := C_\Delta \text{ の長さ } = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$$

(2) $\ell(C) := \lim\limits_{|\Delta| \to 0} \ell_\Delta(C)$　　($|\Delta| \to 0$: 分割 Δ を無限に細かくする)

性質. $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in [a,b])$: C の (区分的に滑らかな) パラメータ表示

$$\Longrightarrow \quad \ell(C) = \int_a^b \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}\,dt$$

用語. 線素 $ds := \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt$ ($\|\boldsymbol{x}'(t)\|$: 長さの拡大率)

(考え方)

(1) $[a,b]$ の分割 $\delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$

$\rightsquigarrow$ C の分割 $\Delta : \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{x}(t_1), \cdots, \boldsymbol{x}(t_{i-1}), \boldsymbol{x}(t_i), \cdots, \boldsymbol{x}(t_n)$

$\circ$ $|\delta| \to 0$ のとき $|\Delta| \to 0$

(2) $\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1}) \doteqdot \boldsymbol{x}'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ $(\xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$ $\quad\therefore \|\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1})\| \doteqdot \|\boldsymbol{x}'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1})$

(3) C_Δ の長さ : $\ell_\Delta(C) = \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1})\| \doteqdot \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1})$

(4) $\ell(C) := \lim_{|\delta| \to 0} \ell_\Delta(C) = \lim_{|\delta| \to 0} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt$

§3.2.2. 弧長パラメータ表示

C : (区分的に) 滑らかな 曲線

定義. C の 弧長パラメータ表示 $=$ C の パラメータ表示 $\mathbf{x}(s)$ $(s \in J)$ で $\|\dot{\mathbf{x}}(s)\| \equiv 1$ を満たすもの.

性質.

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{x}(s), \quad \ddot{\mathbf{x}}(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{x}(s), \quad \dddot{\mathbf{x}}(s) = \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{x}(s)$$

[1] 弧長パラメータ表示 の 存在

(1) 幾何的な構成 :

(i) C の基点 $\mathbf{x}_0$ と 向き を指定する.

(ii) 点 $\mathbf{x} \in C$ に対して $C_{\mathbf{x}}$ を C 上の $\mathbf{x}_0$ から $\mathbf{x}$ までの 部分曲線 とし, パラメータ $s = s(\mathbf{x}) : C \to \mathbb{R}$ を

$$s(\mathbf{x}) = \begin{cases} \ell(C_{\mathbf{x}}) & (\mathbf{x} \text{ が } \mathbf{x}_0 \text{ より 正の向きにある}) \\ -\ell(C_{\mathbf{x}}) & (\mathbf{x} \text{ が } \mathbf{x}_0 \text{ より 負の向きにある}) \end{cases}$$

で定める.

(iii) $J = s(C)$ (s の 値域) と置くと, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) : J \to C$ は C の 弧長パラメータ表示 を与える.

$(\because)$ $s = (\operatorname{sgn} s)\,\ell(C_{\mathbf{x}}) = \int_0^s \|\dot{\mathbf{x}}(u)\|\,du$ $\quad\therefore \|\dot{\mathbf{x}}(s)\| = 1$ $\quad\circ$ $\operatorname{sgn} s = s$ の 符号

(2) C の 滑らかな パラメータ表示 $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$ ($\boldsymbol{x}(t) : C^1$ 級, $\boldsymbol{x}'(t) \neq \mathbf{0}$)

から 弧長パラメータ表示 $\mathbf{x}(s)$ $(s \in J)$ を構成する方法

(i) 弧長関数 $s(t) : I \to J$ を次式で定める : $t_0 \in I$: 固定

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt \quad (t \in I) \qquad J := s(I) \qquad \circ\ \frac{ds}{dt} = \|\boldsymbol{x}'(t)\| > 0$$

(ii) $t = t(s) : J \to I : s = s(t)$ の逆写像 $\quad \circ\ \dfrac{dt}{ds}(s) = \dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}(t(s))} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}'(t(s))\|}$

(iii) $\mathbf{x}(s) := \boldsymbol{x}(t(s))$ $(s \in J)$

$$\begin{array}{ccccc} & & t & & \boldsymbol{x}(t) \\ J & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C \\ s & & t(s) & & \boldsymbol{x}(t(s)) \end{array}$$

$\circ$ $\dot{\mathbf{x}}(s) = \boldsymbol{x}'(t(s))\dfrac{dt}{ds}$ $\quad\therefore \|\dot{\mathbf{x}}(s)\| = \|\boldsymbol{x}'(t(s))\|\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}'(t(s))\|} = 1$ (弧長パラメータ表示)

[2] 弧長パラメータ表示 の 定数差を除いた 一意性

(1) C が向き付けられているとき,

C の 正の 弧長パラメータ表示 は パラメータ の定数の差を除いて一意に定まる.

i.e., $\mathbf{x}(s) : J \to C,\ \ \mathbf{y}(t) : I \to C :$ C の 正の 弧長パラメータ表示

$\Longrightarrow\ \ ^{\exists}c \in \mathbb{R}$ s.t. $J = I + c$ & $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t+c)\ \ (t \in I)$

§3.3. 曲線の 曲率・捩率 と フルネ・セレーの公式.

C : 向き付けられた 滑らかな空間曲線 $\rightsquigarrow$ C の各点 $\boldsymbol{p}$ において 曲率 $\kappa(\boldsymbol{p})$, 捩率 $\tau(\boldsymbol{p})$ を定義する.

[1] C の 正の 弧長パラメータ表示 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ $(\|\dot{\mathbf{x}}(s)\| = 1)$ を 1 つ選ぶ.

このパラメータ表示を用いて, 次の量を 以下の (1) ∼ (4) により定める:

(i) $\boldsymbol{t}(s)$: 単位接線ベクトル　　$\kappa(s)$: 曲率

(ii) $\ddot{\mathbf{x}}(s) \neq \mathbf{0}\ \ (s \in J)$ のとき

$\boldsymbol{n}(s)$: 単位主法線ベクトル　　$\tau(s)$: 捩率　　$\varrho(s)$: 曲率半径

$\boldsymbol{b}(s)$: 単位従法線ベクトル　　$\mathbf{z}(s)$: 曲率の中心

(1) $\boldsymbol{t}(s) := \dot{\mathbf{x}}(s)$: 速度ベクトル　　$\boldsymbol{t}'(s) = \ddot{\mathbf{x}}(s)$: 加速度ベクトル

(i) $\|\boldsymbol{t}(s)\| = 1$　(ii) $\boldsymbol{t}(s) \perp \boldsymbol{t}'(s)$　　$(\because)$ $\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{t}(s)\rangle = \|\boldsymbol{t}(s)\|^2 = 1$　$\therefore\ \langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{t}'(s)\rangle = 0$

(2) $\kappa(s) := \|\boldsymbol{t}'(s)\| = \|\ddot{\mathbf{x}}(s)\| \geq 0$

$$\boldsymbol{t}'(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(s),\ \ \boldsymbol{n}'(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{n}(s),\ \ \boldsymbol{b}'(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s)$$

$\ddot{\mathbf{x}}(s) \neq \mathbf{0}\ \ (s \in J)$ のとき

(3) $\boldsymbol{n}(s) := \dfrac{\boldsymbol{t}'(s)}{\|\boldsymbol{t}'(s)\|}$　　$\varrho(s) := \dfrac{1}{\kappa(s)}$　　$\mathbf{z}(s) := \mathbf{x}(s) + \varrho(s)\boldsymbol{n}(s)$

(i) $\|\boldsymbol{n}(s)\| = 1,\ \ \boldsymbol{t}(s) \perp \boldsymbol{n}(s)$　(ii) $\ddot{\mathbf{x}}(s) = \boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$

(4) $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$

(i) $(\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$: ($\mathbf{x}(s)$ を始点とする) 右手系 の 正規直交基底

(ii) $\boldsymbol{b}'(s) /\!\!/ \boldsymbol{n}(s)$　　$(\because)$ (a) $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}' = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}'$　$(\boldsymbol{t}' = \kappa\boldsymbol{n}\ \ \therefore\ \boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{n} = \mathbf{0})$　$\therefore\ \boldsymbol{b}' \perp \boldsymbol{t}$

(b) $\|\boldsymbol{b}\| \equiv 1$　$\therefore\ \boldsymbol{b}' \perp \boldsymbol{b}$

(5) $\tau(s)$: $\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s)$ と一意に書ける　　(i) $\tau(s) = \dfrac{\big(\dot{\mathbf{x}}(s), \ddot{\mathbf{x}}(s), \dddot{\mathbf{x}}(s)\big)}{\kappa(s)^2}$

分子 = スカラー 3 重積
= 行列式

[2] C の 各点 $\boldsymbol{p}$ において

$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})$: ($\boldsymbol{p}$ を始点とする) 右手系 の 正規直交基底

$\kappa(\boldsymbol{p})$: 曲率, $\tau(\boldsymbol{p})$: 捩率　　$\varrho(\boldsymbol{p})$: 曲率半径, $\mathbf{z}(\boldsymbol{p})$: 曲率の中心

を 次の様に定義する.

C の 正の弧長パラメータ表示 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ を 1 つ選ぶ. [1] より $\boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{n}(s),\ \boldsymbol{b}(s),\ \kappa(s),\ \tau(s)$ が定まる.

$\boldsymbol{p} = \mathbf{x}(s_0)$ のとき, 次式により定める.

$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{t}(s_0),\ \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{n}(s_0),\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{b}(s_0)$

$\kappa(\boldsymbol{p}) = \kappa(s_0),\ \tau(\boldsymbol{p}) = \tau(s_0),\ \varrho(\boldsymbol{p}) = \varrho(s_0),\ \mathbf{z}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{z}(s_0)$

∘ これらの量は, C の 正の 弧長パラメータ表示 $\mathbf{x}(s)$ の選び方に依らず 一意に定まる.

曲率・捩率 の意味

○「立体的なハイウェー上 を走る車」や「ジェットコースターに乗っている人」

に加わる 加速度 や 捩れ (横への傾き・進む方向に対する 回転) をイメージする.

(1) 曲率 $\kappa(\boldsymbol{p})$: 曲線 C の 点 $\boldsymbol{p}$ での 曲がり方 を計る量

○ 次の量で計ることが出来る — C 上を 速度 1 で進むときの 点 $\boldsymbol{p}$ での 加速度

○ $\kappa(\boldsymbol{p})$ は 曲線 C の 向き に依らない.

○ $\kappa(\boldsymbol{p})$: 大きい $\rightsquigarrow$ 曲線 C は 点 $\boldsymbol{p}$ で 急激に曲がる

小さい $\rightsquigarrow$ 緩やかに曲がる

(2) 捩率 $\tau(\boldsymbol{p})$: 曲線 C の 点 $\boldsymbol{p}$ での 捩れ方 (進む方向に対する回転) を計る量

○ 次の量で計ることが出来る　　$\pi(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{t}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ で張られる平面　　$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \perp \pi(\boldsymbol{p})$

— C 上を 速度 1 で進むときに, 点 $\boldsymbol{p}$ を通過する際の

$\pi(\boldsymbol{p})$ の 捩れ方 $=$ $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})$ の捩れ方 $=$ $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})$ の 変化率 の (符号付きの) 大きさ $=$ $\tau(\boldsymbol{p})$ の大きさ

○ $\tau(\boldsymbol{p})$ は 曲線 C の 向き を 逆にする と -1 倍になる.

○ $|\tau(\boldsymbol{p})|$: 大きい $\rightsquigarrow$ 曲線 C の 点 $\boldsymbol{p}$ での 捩れ方 大きい

小さい $\rightsquigarrow$ 小さい

(3) 曲率半径 $\varrho(\boldsymbol{p})$:

曲率の中心 $\mathbf{z}(\boldsymbol{p})$ の周りの 半径 $\varrho(\boldsymbol{p})$ の円周 $=$ 点 $\boldsymbol{p}$ で C と接し, $\boldsymbol{p}$ で C と同じ 曲率 $\kappa(\boldsymbol{p})$ を持つ円

フルネ・セレーの公式　— $(\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ の従う (連立 線形) 微分方程式 を与える.

$$(*) \quad \begin{cases} \boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s) \end{cases} \qquad \text{(交代的)}$$

$(\because)$ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}$　　$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}' + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}$

○ $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}' = \boldsymbol{b} \times (\kappa\boldsymbol{n}) = -\kappa(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}) = -\kappa\boldsymbol{t}$

○ $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} = (-\tau\boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{t} = \tau(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}) = \tau\boldsymbol{b}$

○ $\kappa(s), \tau(s)$ が与えられたとき, $(*)$ は $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ に関する 連立 線形 微分方程式 になっている.

連立 線形 微分方程式 の「初期値 に対する 大域解 の 存在と一意性 定理」より 次の定理 が得られる.

基本定理.

向き付けられた空間曲線 は 弧長パラメータ s に関する 曲率関数 $\kappa(s)$, 捩率関数 $\tau(s)$ $(s \in I)$ によって回転と平行移動による変換 を除いて 一意に定まる.

○ 2 つの 向き付けられた空間曲線 は, 曲率関数 $\kappa(s)$, 捩率関数 $\tau(s)$ が一致すれば,
回転と平行移動による変換 で移り合う.

○ 曲線の長さ ℓ は 区間 I の幅 $|I|$ と一致する.

○ 合同変換 = 直線の回りの回転, 平面に関する鏡映, 平行移動 の 合成
向きを保つ 合同変換 = 直線の回りの回転, 平行移動 の 合成

C : 滑らかな 空間曲線

命題.

(1) $\kappa \equiv 0 \iff C$: 直線 (の一部)

(2) $\tau \equiv 0 \iff C$ が ある平面に含まれる

(3) (i) $\kappa \equiv$ 一定 $(\neq 0), \tau \equiv 0 \iff C$ は ある平面上の円周 (の一部)

(ii) $\kappa \equiv$ 一定 $(> 0), \tau \equiv$ 一定 $(\neq 0) \iff C$: 螺線 (の一部)

命題. (一般のパラメータ表示による 曲率関数 κ, 捩率関数 τ の表示)

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$: C の 一般の パラメータ表示 のとき

(1) $\kappa(t) \equiv \kappa(\boldsymbol{x}(t)) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)\|}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|^3}$ (2) $\tau(t) \equiv \tau(\boldsymbol{x}(t)) = \dfrac{(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}''(t), \boldsymbol{x}'''(t))}{\|\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)\|^2}$

§3.4. ニュートンの運動方程式 の下での 質点の運動.

(ベクトル解析の基礎・基本 (間下克哉 著, 牧野書店) §3.2 参照)

§3.4.1. 質点の運動 に関する ニュートンの運動方程式

P : 空間 E^3 の中の 質量 m の質点

$P(t)$ $(t \in I)$: P の運動

$\boldsymbol{v}(t)$ $(t \in I)$: P の 速度ベクトル

$\boldsymbol{a}(t)$ $(t \in I)$: P の 加速度ベクトル

$\boldsymbol{F}(t)$ $(t \in I)$: 時刻 t において 質点 P に働く力

ニュートンの運動方程式 :　$m\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{F}(t)$

直交座標系 に関する 座標・成分表示

E^3 の xyz 直交座標系 を固定する　$E^3 = \mathbb{R}^3$

$P(t) = \boldsymbol{x}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ $(t \in I)$

$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}'(t)$ $(t \in I)$

$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{x}''(t)$ $(t \in I)$

$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{f}(t) \equiv (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ $(t \in I)$

$m\boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{f}(t)$

§3.4.2. 力の成す仕事と運動エネルギー　(§3.2.3)

定義. 質点 P の 運動 $P(t)$ $(t \in I)$ において 力 $\boldsymbol{F}(t)$ がする仕事　$W := \int_I \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\, dt \in \mathbb{R}$

性質. ニュートンの運動方程式 の下で

$I = [a, b]$ の場合 :　$W = \frac{1}{2}m\|\boldsymbol{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\boldsymbol{v}(a)\|^2$　(運動エネルギーの増加分)

$(\because)$ $\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = m\,\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = m\,\boldsymbol{v}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = \frac{m}{2}\big(\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\big)' = \frac{m}{2}\big(\|v(t)\|^2\big)'$

$\therefore$ $W = \int_a^b \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\, dt = \frac{m}{2}\Big[\|v(t)\|^2\Big]_a^b =$ (右辺)

§3.4.3. 領域上のベクトル場

U : 空間 E^3 の領域

U 上のベクトル場

$\boldsymbol{F} : U \ni P \longmapsto \boldsymbol{F}(P)$: 幾何ベクトル
(始点を P にとる)

直交座標系 に関する 座標・成分表示

E^3 の xyz 直交座標系 を固定する

$P = \boldsymbol{x} \equiv (x, y, z)$

$\circ$ $E^3 = \mathbb{R}^3$,　$U \subset \mathbb{R}^3$: 領域　と見なされる

$\boldsymbol{F}(P) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))$

$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \supset U \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$: 3 変数 3 次ベクトル値関数

§3.4.4. 中心力場 の下での 質点の運動

空間 E^3 の 原点 O を固定する.　　直交座標系 に関する 座標・成分表示

領域 $E^3_\times \equiv E^3 - \{O\}$ の各点 Q に対して,

質点 P が 位置 Q にあるときに P に 働く力 $\boldsymbol{F}(Q)$ が定まっているとする.

$\circ$ $\boldsymbol{F} : E^3_\times \ni Q \longmapsto \boldsymbol{F}(Q)$　(力の場)　　$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3_\times \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$

質点 P が $E^3_\times$ を運動するとき ($P(t)$ $(t \in I)$)　　$\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$

ニュートンの運動方程式 :　$m\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{F}(P(t))$　　$m\boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$

定義

(a) $\boldsymbol{F}$: 中心力場　$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$　$\boldsymbol{F}(Q) \mathbin{/\!/} \overrightarrow{OQ}$　$(Q \in E^3_\times)$　　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathbin{/\!/} \boldsymbol{x}$

$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{F}(Q) = \alpha(Q)\,\overrightarrow{OQ}$　　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}$

(b) 動点 P の 面積速度 $:= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OP(t)} \times \boldsymbol{v}(t)$　　$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{x}'(t)$

命題.　ニュートンの運動方程式 の下で

(1) $\boldsymbol{F}$: 中心力場 $\Longrightarrow$ (i) P の 面積速度 = 一定

(ii) P は 原点を通るある平面上を運動する

(2) 原点 O に 質量 M の質点が固定されたときの重力場 の場合 :

(i) $\boldsymbol{F}(Q) = \dfrac{GMm}{|OQ|^2}\left(-\dfrac{\overrightarrow{OQ}}{|OQ|}\right) = -\dfrac{GMm}{|OQ|^3}\overrightarrow{OQ}$: 中心力場　　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{GMm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$

(ii) ニュートンの運動方程式の安定な解 $P(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ は ある平面上の 楕円運動 になる.

証明.

(1) (i) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$　　$m\boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \alpha(\boldsymbol{x}(t))\,\boldsymbol{x}(t)$

$$\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}(t)\times\boldsymbol{x}'(t)\right)' = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}'(t)\times\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{x}(t)\times\boldsymbol{x}''(t)\right) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}(t)\times\frac{1}{m}\,\alpha(\boldsymbol{x}(t))\,\boldsymbol{x}(t)$$
$$= \frac{\alpha(\boldsymbol{x}(t))}{2m}(\boldsymbol{x}(t)\times\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{0}$$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\,\boldsymbol{x}(t)\times\boldsymbol{x}'(t) \equiv \boldsymbol{c}$ (定ベクトル)

(ii) 原点を通り ベクトル $\boldsymbol{c}$ に直交する 平面 π を考えると　$\boldsymbol{x}(t) \perp \boldsymbol{c}$　$\therefore\ \boldsymbol{x}(t) \in \pi$

(2) (ii) (a) $\boldsymbol{F}$: 中心力場　$\therefore$ P の 面積速度 $\equiv$ $\boldsymbol{c}$ (定ベクトル)

以下 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考える ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ の場合は例外的な解を与える)

(b) $\boldsymbol{c}$ の方向を z 軸の方向 とする xyz 直交座標系 をとる.　P は xy 平面上を運動する.

xy 平面上で 極座標 (r,θ) を考える.　$\boldsymbol{x}(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t), 0)$ と書ける.

(c) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{e}_1(t) := (\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0) \\ \boldsymbol{e}_2(t) := (-\sin\theta(t), \cos\theta(t), 0) \\ \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1) \end{array}\right\}$ とおくと　$\begin{array}{l} \boldsymbol{e}_1'(t) = \theta'(t)\boldsymbol{e}_2(t) \\ \boldsymbol{e}_2'(t) = -\theta'(t)\boldsymbol{e}_1(t) \\ \boldsymbol{e}_1(t)\times\boldsymbol{e}_2(t) = \boldsymbol{e}_3 \end{array}$　$\begin{array}{l} r(t) > 0 \\ \theta(t) \in \mathbb{R} \end{array}$

(d) $\boldsymbol{x}(t) = r(t)\boldsymbol{e}_1(t)$　　$\|\boldsymbol{x}(t)\| = r(t)$

$\boldsymbol{x}' = r'\boldsymbol{e}_1 + r\theta'\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{x}'' = r''\boldsymbol{e}_1 + r'\theta'\boldsymbol{e}_2 + r'\theta'\boldsymbol{e}_2 + r\theta''\boldsymbol{e}_2 - r(\theta')^2\boldsymbol{e}_1 = (r'' - r(\theta')^2)\boldsymbol{e}_1 + (2r'\theta' + r\theta'')\boldsymbol{e}_2$

(e) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{GMm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\,\boldsymbol{x}$

$m\,\boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = -\dfrac{GMm}{r(t)^3}\,\boldsymbol{x}(t) = -\dfrac{GMm}{r(t)^2}\,\boldsymbol{e}_1(t)$　　$\therefore\ \boldsymbol{x}''(t) = -\dfrac{GM}{r(t)^2}\,\boldsymbol{e}_1(t)$

(d) より　$(*)$ $r'' - r(\theta')^2 = -\dfrac{GM}{r^2}$　　$(**)$ $2r'\theta' + r\theta'' = 0$

(f) $\boldsymbol{x}(t)\times\boldsymbol{x}'(t) \equiv 2\boldsymbol{c}$ (定ベクトル)

$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}' = r\boldsymbol{e}_1\times\left(r'\boldsymbol{e}_1 + r\theta'\boldsymbol{e}_2\right) = r\boldsymbol{e}_1\times r\theta'\boldsymbol{e}_2 = r^2\theta'(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2) = r^2\theta'\,\boldsymbol{e}_3$

$\left|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}'\right| = r^2|\theta'| = 2\|\boldsymbol{c}\|$ (定数 $\neq 0$)　　$(\theta' \neq 0$　$\therefore\ \theta'$: 定符号)

$\therefore\ r^2\theta' \equiv K\ (= \pm 2\|\boldsymbol{c}\|)$ (定数 $\neq 0$)　$(\#)$

- θ' : 定符号　$\therefore\ \theta = \theta(t)$: 狭義単調関数　$\therefore$ 逆関数 $t = t(\theta)$ 存在　$t \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} \theta$
- $(\#)$ の両辺を微分すると　$2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0$　　$\therefore\ 2r'\theta' + r\theta'' = 0$ $(**)$

(g) $R(t) = \dfrac{1}{r(t)}$ とおく

$$\theta' = \frac{K}{r^2} = KR^2 \qquad r' = \frac{dr}{d\theta}\theta' = \frac{K}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -K\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -K\frac{dR}{d\theta}$$

$$r'' = (r')' = \frac{dr'}{d\theta}\theta' = -K\frac{d^2R}{d\theta^2}KR^2 = -K^2R^2\frac{d^2R}{d\theta^2}$$

$(*)$ より　$-GMR^2 = r'' - r(\theta')^2 = -K^2R^2\dfrac{d^2R}{d\theta^2} - \dfrac{1}{R}(KR^2)^2$

$\therefore\ \dfrac{d^2R}{d\theta^2} + R = a \qquad \left(a = \dfrac{GM}{K^2} > 0\right)$

$R(\theta) = a + c_1\cos\theta + c_2\sin\theta = a + c\cos(\theta+\alpha) \qquad \left(\begin{array}{l} c = \sqrt{c_1^2+c_2^2} \geq 0 \\ \sin\alpha = \dfrac{c_1}{c},\ \ \cos\alpha = \dfrac{c_2}{c} \end{array}\right)$

$\circ\ r(\theta) > 0 \quad \therefore\ R(\theta) > 0 \quad \therefore\ a > c$

(h) $(\flat)\ \ r(\theta) = \dfrac{1}{R(\theta)} = \dfrac{1}{a + c\cos(\theta+\alpha)} = \dfrac{p}{1 + q\cos(\theta-\theta_0)} \qquad \left(p = \dfrac{1}{a},\ \ q = \dfrac{c}{a} \in [0,1)\right)$

$|q| < 1 \quad \therefore\ (\flat)$: 楕円の方程式

2 次曲線　$(\flat)\ \ r = \dfrac{p}{1 + q\cos(\theta-\theta_0)}$

(i) $(\flat)\ \ r = \dfrac{p}{1 + q\cos(\theta-\theta_0)} \quad \rightsquigarrow \quad (\natural)\ \ (1-q^2)x^2 + 2pqx + y^2 = p^2 \qquad \left\{\begin{array}{ll} |q| < 1 & \text{楕円} \\ |q| = 1 & \text{放物線} \\ |q| > 1 & \text{双曲線} \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta-\theta_0) \\ y = r\sin(\theta-\theta_0) \end{array}\right.$$

$(\because)$ (a) $r = \dfrac{p}{1 + q\cos(\theta-\theta_0)} \qquad p = r(1 + q\cos(\theta-\theta_0)) = r + qx \qquad \therefore\ r = p - qx$

(b) $x^2 + y^2 = r^2 = (p-qx)^2 = p^2 - 2pqx + q^2x^2 \quad \rightsquigarrow \quad (\natural)$

(ii) 図形 $(\flat)$ = 図形 $(\natural)$ を 原点の周りに 反時計方向に 角度 θ_0 回転した図形

補足.

(1) (1) θ は $(-\infty, \infty)$ 全体を動く.

($\because$) (i) $\boldsymbol{x}(t)$: 安定な解 $\therefore$ t は $(-\infty, \infty)$ 全体を動く $\therefore$ θ は 適当な開区間を動く

(iii) $r(t) = r(\theta) = \dfrac{p}{1 + q\cos(\theta - \theta_0)} \leq \dfrac{p}{1-q} \equiv L > 0$

$L^2|\theta'| \geq r^2|\theta'| = K \qquad \therefore |\theta'| \geq \dfrac{K}{L^2} \equiv \alpha > 0$

(iv) $\theta' > 0$ のとき : $\theta' \geq \alpha$

$$^\forall t \geq 0 \qquad \theta(t) = \int_0^t \theta'(s)\,ds + \theta(0) \geq \int_0^t \alpha\,ds + \theta(0) = \alpha t + \theta(0) \to \infty \ (t \to \infty)$$

$$^\forall t \leq 0 \qquad \theta(0) - \theta(t) = \int_t^0 \theta'(s)\,ds \geq \int_t^0 \alpha\,ds = -\alpha t \qquad \therefore \theta(t) \leq \alpha t + \theta(0) \to -\infty \ (t \to -\infty)$$

(v) $\theta' < 0$ のとき

$\theta' \leq -\alpha$

(2) $\boldsymbol{c} = 0$ の場合

(i) $\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \therefore \boldsymbol{x}'(t) = a(t)\boldsymbol{x}(t)$

(ii) $\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t)}\boldsymbol{v}$ 　　但し $A(t) := \displaystyle\int a(t)\,dt \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$

($\because$) $\left(e^{-A(t)}\boldsymbol{x}(t)\right)' = -a(t)e^{-A(t)}\boldsymbol{x}(t) + e^{-A(t)}\boldsymbol{x}'(t) = -a(t)e^{-A(t)}\boldsymbol{x}(t) + e^{-A(t)}a(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$

$e^{-A(t)}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v} \qquad \therefore \boldsymbol{x}(t) = e^{A(t)}\boldsymbol{v}$

(iii) $r(t) := e^{A(t)} > 0 \qquad \boldsymbol{x}(t) = r(t)\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{GMm}{\|\boldsymbol{x}(t)\|^3}\boldsymbol{x}(t)$

$$m\boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = -\frac{GMm}{\|\boldsymbol{x}(t)\|^3}\boldsymbol{x}(t)$$

$$mr''(t)\boldsymbol{v} = -\frac{GMm}{r(t)^3\|\boldsymbol{v}\|^3}r(t)\boldsymbol{v} = -\frac{GMm}{r(t)^2\|\boldsymbol{v}\|^3}\boldsymbol{v}$$

$$mr''(t) = -\frac{GMm}{r(t)^2\|\boldsymbol{v}\|^3} \qquad r''(t) = -\frac{GM}{r(t)^2\|\boldsymbol{v}\|^3} = -\frac{GM}{\|\boldsymbol{v}\|^3}\frac{1}{r(t)^2} = \frac{a}{r(t)^2} \qquad a = -\frac{GM}{\|\boldsymbol{v}\|^3} < 0$$

(iv) $r''(t) = \dfrac{a}{r(t)^2} \qquad r'(t)r''(t) = \dfrac{a}{r(t)^2}r'(t) \qquad \therefore \dfrac{1}{2}r'(t)^2 = b - \dfrac{a}{r(t)}$

(v) $r'(t)^2 = 2b - \dfrac{2a}{r(t)} \qquad r'(t) = \pm\left(2b - \dfrac{2a}{r(t)}\right)^{1/2} \qquad \left(2b - \dfrac{2a}{r(t)}\right)^{-1/2} r'(t) = \pm 1$

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{b - \dfrac{a}{r}}}\,dr \qquad R = \frac{1}{r} \qquad dR = -\frac{1}{r^2}dr = -R^2dr$

$$\int \frac{1}{\sqrt{b - \dfrac{a}{r}}}\,dr =$$

Ch. 4. スカラー場・ベクトル場.

§4.1. 多変数 ベクトル値 関数 の 微分.

○ 以下, 数ベクトルは, スペース節約のため 横ベクトル として表記するが計算 (特に 行列との積) では, 縦ベクトル として扱うので注意.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^t(x, y, z)$$

§4.1.1. 3 **変数 スカラー値関数.** — スカラー場 を考える際の基礎になる

$\mathbb{R}^3$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ $\quad U : \mathbb{R}^3$ の 開集合

3 変数 スカラー値関数 : $\quad f : U \to \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) : \quad y = f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$

定義 4.1. $f : C^1$ 級 とする

(1) 偏微分 : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$: 3 変数 スカラー値関数 $(i = 1, 2, 3)$

(2) 全微分 : 微分係数行列 $\quad f'(\boldsymbol{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{a})\right) \quad 1 \times 3$ 行列

$f'(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: 3 変数 3 次ベクトル値関数 $\quad$ (必要に応じて 3 次ベクトル とみなす)

(i) 1 次近似 : $\quad$ 変位ベクトル $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$: $\|\boldsymbol{h}\|$: 十分小 のとき

値の変化分 $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) \fallingdotseq f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} = \langle f'(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\, h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})\, h_2 + \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{a})\, h_3$

§4.1.2. 3 変数 3 次ベクトル値関数. — ベクトル場 や 曲線座標系 を考える際の基礎になる

$\mathbb{R}^3$ の 座標 : $(\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3))$, $(\mathbb{R}^3, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3))$

$U : (\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x})$ の 開集合

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \end{array} \text{: 3 変数 3 次ベクトル値関数} \qquad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

定義 4.2.

(1) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x_1, x_2, x_3) : C^1$ 級 $\iff$ 各 $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) : U \to \mathbb{R} : C^1$ 級

(2) 偏微分 $(i = 1, 2, 3)$

偏導関数
$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_i} \end{pmatrix} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

(3) 全微分

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} y_1 \\[2em] y_2 \\[2em] y_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \quad x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 \end{array} \end{array} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}, \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_3}\right) \quad \text{(微分係数行列)}$$

(i) 合成関数の微分 : $\quad U \subset (\mathbb{R}^3, \boldsymbol{u}), V \subset (\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x}), W \subset (\mathbb{R}^3, \boldsymbol{y})$: 開集合

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) : \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})} & V & \xrightarrow{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & W \\ \boldsymbol{u} & & \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{y} \end{array} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

(ii) 1 次近似 : $\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) : C^1$ 級 のとき

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) \fallingdotseq \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) + h_1 \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + h_2 \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + h_3 \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \text{: 十分小}$$

(4) ヤコビ行列式　(Jacobian)　$J = \dfrac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \det \dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$

(i) 点 $\boldsymbol{u} \in U$ において　$J(\boldsymbol{u}) = \pm |J(\boldsymbol{u})|$

$|J(\boldsymbol{u})| = \boldsymbol{u}$ の 周りの 微小領域 ΔU を 写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ で写したときの 面積 の 拡大率 $= \lim\limits_{\Delta U \to 0} \dfrac{|\Delta V|}{|\Delta U|}$

符号 :　$+$　$\Longleftrightarrow$　$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}), \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}), \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3}(\boldsymbol{u})$: 右手系 の 基底　　写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ が ΔU を "向きを保って写す"

$(-)$　　(左手系)　　("逆向きに写す")

逆関数定理　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) : C^1$ 級　　点 $\boldsymbol{x}_0 \in U$ において　$J(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$

$\Longrightarrow$ 点 $\boldsymbol{x}_0$ の 開近傍 U_0 in $(\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x})$ 及び $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0)$ の 開近傍 V_0 in $(\mathbb{R}^3, \boldsymbol{y})$ があって,

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は U_0 を V_0 上に 1-1 に写し, 逆写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) : V_0 \to U_0$ も C^1 級 になる.

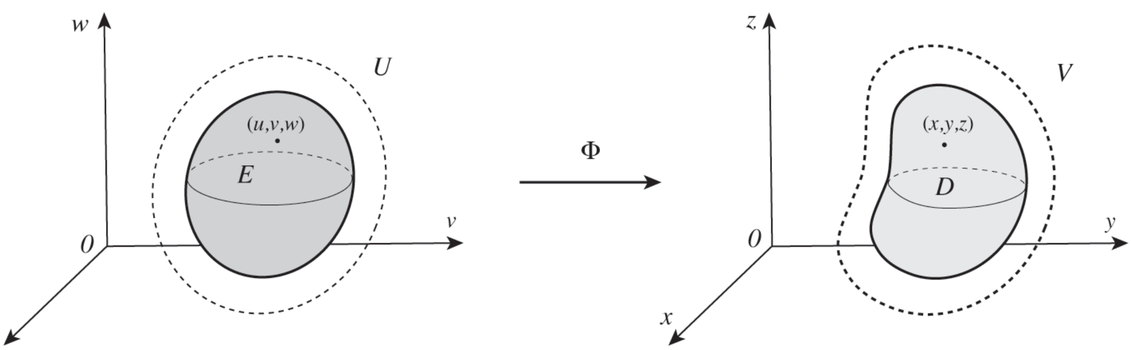
微分同相写像 (座標変換・変数変換)　$U : (\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x})$ の 開集合, $V : (\mathbb{R}^3, \boldsymbol{y})$ の 開集合

定義 4.3.　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) : U \longrightarrow V : C^1$ 級 微分同相写像 (C^1 級 座標変換・変数変換)

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) : C^1$ 級, 全単射, 逆写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) : V \longrightarrow U : C^1$ 級

$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) : C^1$ 級, 全単射, $J(\boldsymbol{x}) \neq 0$ $(\boldsymbol{x} \in U)$

$E : uvw$ 空間の閉領域　$D : xyz$ 空間の閉領域　　$\Phi : E \to D$



§4.1.3 2 変数 3 次ベクトル値関数. — 空間曲面を考える際の基礎になる

$\mathbb{R}^2$ の 座標 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) = (u, v)$, $\mathbb{R}^3$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

U : 平面 $\mathbb{R}^2$ の 開集合

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(u,v) : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{u} & \mapsto & \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) \end{array} \text{ : 2 変数 3 次ベクトル値関数} \qquad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

定義 4.4.

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v) : C^1$ 級 $\iff$ 各 $x_i = x_i(u,v) : U \to \mathbb{R} : C^1$ 級

(2) 偏微分

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u,v) \end{array} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u,v) \end{array}$$

(3) 全微分

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \right) : \ 3 \times 2 \text{ 行列値関数}$$

1 次近似 : $\quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{h}) \fallingdotseq \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) + h_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(\boldsymbol{u}) + h_2 \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \qquad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$: 十分小

(4) 2 次の ヤコビ行列式 $D_{ij} = \dfrac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u,v)} = \begin{array}{c} x_i \\ \\ x_j \end{array} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} & \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_j}{\partial u} & \dfrac{\partial x_j}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$

補足 一般の m 変数 n 次ベクトル値関数 に対しても 偏微分ベクトル や 全微分行列 が 同様に定義される．
また，合成関数 の 微分則 が 全微分行列 の 積 の形で成り立つ．

§4.1.4. 微分演算子 ∇. (∇ : ナブラ)

$\mathbb{R}^3$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

定義 4.5. $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$: 微分作用素

定義 4.6. ∇ の作用 $U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

grad f

(1) $f : U \to \mathbb{R}$: $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(\nabla f)(\boldsymbol{a}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{a})\right)$ $(\boldsymbol{a} \in U)$

(2) $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3) = \big(v_1(x_1, x_2, x_3),\ v_2(x_1, x_2, x_3),\ v_3(x_1, x_2, x_3)\big)$

(i) $\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3},\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) : U \to \mathbb{R}^3$ rot $\boldsymbol{v}$

(ii) $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \langle \nabla, \boldsymbol{v} \rangle = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ div $\boldsymbol{v}$

定義 4.7. 関連する作用素

(1) $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{v} \cdot \nabla := v_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3} = (v_1, v_2, v_3) \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$

(i) $f : U \to \mathbb{R}^3$: $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) f := v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla f) : U \longrightarrow \mathbb{R}$

(ii) $\boldsymbol{w} : U \to \mathbb{R}^3$: $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} : U \to \mathbb{R}^3$

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} := v_1 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} v_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_3} \\ v_1 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_3} \\ v_1 \dfrac{\partial w_3}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial w_3}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_1 \\ (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_2 \\ (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \cdot \nabla w_1 \\ \boldsymbol{v} \cdot \nabla w_2 \\ \boldsymbol{v} \cdot \nabla w_3 \end{pmatrix}$$

(2) $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$: ラプラシアン

(i) Δ の作用 $U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

(a) $f : U \to \mathbb{R} : C^2$ 級 関数 $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} : U \longrightarrow \mathbb{R}$: f の ラプラシアン

○ $\Delta f \equiv 0$ のとき f は 調和関数 であるという.

(b) $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3 : C^2$ 級 ベクトル値関数 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\Delta \boldsymbol{v} := \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = \big(\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3\big) : U \to \mathbb{R}^3$$

(ii) Δ と ∇ の関係 : (a) $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$ (b) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ (形式的内積)

○ (a), (b) に基づき Δ を ∇^2 と書くこともある.

(iii) $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R} : C^2$ 級 $a, b \in \mathbb{R}$

$\Delta(af + bg) = a\Delta f + b\Delta g$

$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\underbrace{(\nabla f) \cdot (\nabla g)}_{\text{内積}} + g\Delta f$ （1変数関数 $f(x), g(x)$ に対する ライプニッツ則 $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ に対応する）

○ $\Delta = \nabla \cdot \nabla$

$(\because)$ $\nabla \cdot \nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$

§4.2. スカラー場・ベクトル場.

E^3 : 3 次元ユークリッド空間　　M : E^3 の中の 図形 (曲線 C, 曲面 S, 領域 U, etc)

定義 4.8.

(1) M 上の スカラー場 $=$ M 上の スカラー量 の 分布 $f(P)\ (P \in M)$

$=$ スカラー値関数 $f : M \ni P \longmapsto f(P) \in \mathbb{R}$

○ 温度分布, 密度分布, 電位 etc.

(2) M 上の ベクトル場 $=$ $\vec{\boldsymbol{v}} : M \ni P \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}(P) \in T_P E^3$

M の 各点 P に この点を始点とする 空間ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}(P)$ を対応させる写像

○ 電場, 磁場, 重力場, 流体 の 速度ベクトル場 etc.

(3) M 上の スカラー場 f, g 及び ベクトル場 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して次の様な演算が定義される.

(i) $f + g$: $(f+g)(P) = f(P) + g(P)$　　fg : $(fg)(P) = f(P)g(P)$

(ii) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$: $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})(P) = \boldsymbol{v}(P) + \boldsymbol{w}(P)$　　$f\boldsymbol{v}$: $(f\boldsymbol{v})(P) = f(P)\boldsymbol{v}(P)$

座標・成分表示

空間 E^3 の 直交座標系 を 1 つ固定すると

(1) E^3 の 点 P は その座標 (ベクトル) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ で表される.

(i) E^3 は $\mathbb{R}^3$ と同一視される.

(ii) E^3 の中の 図形 M は $\mathbb{R}^3$ の中の 対応する図形 M' で表される.

(通常, M と M' は 区別せず, M' も M で表す.)

E^3 の 幾何ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}$ は その成分ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ で表される.

(iii) E^3 の 幾何ベクトル 全体の成すベクトル空間 V^3 は 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視される

(2) スカラー場 $\begin{array}{rcl} f : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & & f(P) \end{array}$ (or $f(P)\ (P \in M)$) は, 点 P を座標表示して, 3 変数 スカラー値関数

$$\begin{array}{rcl} f : M' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & f(\boldsymbol{x}) \end{array} \qquad y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$$ で表される.

(3) ベクトル場 $\vec{\boldsymbol{v}} : M \ni P \longrightarrow \vec{\boldsymbol{v}}(P)$ は, 点 P を 座標表示 し, 幾何ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}(P)$ を 成分表示 して,
$\boldsymbol{x}$　　$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$

3 変数 3 次ベクトル値関数

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{v} : M' & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \end{array} \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ で表される.

注意.

(1) スカラー場・ベクトル場 を表す スカラー値関数・3 次ベクトル値 関数 は,

選ばれた直交座標系に依存し, 座標系を変えればそれに伴ない変換される.

(2) 次節では, スカラー場の勾配, ベクトル場の回転・発散 を 直交座標系 による成分表示を用いて定義するが, これらは, 元の スカラー場, ベクトル場 のみで定まり, 選んだ 直交座標系 に依らない.

以後,

(1) 必要に応じて, 直交座標系を 1 つ固定し, スカラー場・ベクトル場 は 対応する スカラー値関数・3 次ベクトル値関数 で表す.

(2) 関数は必要なだけ微分可能とする.

(3) ベクトル場 は, スペースの節約のため, 横ベクトルで表記する. 計算に当たっては, 場合により, 縦ベクトルに直す必要が生じる.

§4.3. スカラー場の勾配 (gradient).

$(x_1, x_2, x_3), (x, y, z)$
3 次元空間 E^3 の 直交座標系 を固定し,
スカラー場・ベクトル場 は 座標・成分表示 する.

U : $\mathbb{R}^3$ の開集合

$f : U \to \mathbb{R} : y = f(x_1, x_2, x_3)$: スカラー場 (C^1 級)

定義 4.9. $f \rightsquigarrow \mathrm{grad}\, f$

(1) $\boldsymbol{a} \in U$: f の 点 $\boldsymbol{a}$ における 勾配 : $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}}\, f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{a})\right) \in \mathbb{R}^3$

(i) $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) = (\nabla f)(\boldsymbol{a})$

(2) f の (U 上での) 勾配ベクトル場 : $\mathrm{grad}\, f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\, f$

(i) $\mathrm{grad}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = f'(\boldsymbol{x}) = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

○ $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}}\, f$, $\mathrm{grad}\, f$ は, 3 次元ユークリッド空間の幾何ベクトルとして, 直交座標系の取り方に依らず スカラー場 f のみで定まる.

公式. $f, g : U \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\mathrm{grad}\,(f+g) = \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, g$ $\qquad \nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

$\mathrm{grad}\,(\lambda f) = \lambda\,(\mathrm{grad}\, f)$ $\qquad \nabla(\lambda f) = \lambda(\nabla f)$

(ii) $\mathrm{grad}\,(fg) = g\,\mathrm{grad}\, f + f\,\mathrm{grad}\, g$ $\qquad \nabla(fg) = g\,(\nabla f) + f\,(\nabla g)$

$g \neq 0$ のとき $\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}\left(g\,\mathrm{grad}\, f - f\,\mathrm{grad}\, g\right)$ $\qquad \nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}\left(g\,\nabla f - f\,\nabla g\right)$

(iii) $\varphi \circ f = \varphi(f) : U \xrightarrow{f} I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

$\mathrm{grad}\,(\varphi \circ f) = \left(\dfrac{d\varphi}{dt} \circ f\right)\mathrm{grad}\, f = \varphi'(f)\,\mathrm{grad}\, f$ $\qquad \nabla(\varphi \circ f) = \left(\dfrac{d\varphi}{dt} \circ f\right)\nabla f$

(iv) U が 領域 (連結) の場合

$\mathrm{grad}\, f \equiv 0 \iff f_x = f_y = f_z \equiv 0 \iff f \equiv \mathrm{const}$ $\qquad \nabla f \equiv 0 \iff f \equiv \mathrm{const}$

スカラー場の方向微分 $\quad f : U \to \mathbb{R}$: スカラー場

定義 4.10. $\boldsymbol{a} \in U, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ (点 $\boldsymbol{a}$ での 位置ベクトル)

f の 点 $\boldsymbol{a}$ での ベクトル $\boldsymbol{v}$ による 微分係数 : $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) := \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$

○ $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f)$ の意味 : 点 $\boldsymbol{a}$ を 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ で通過するときの f の値の 変化率 (増加率)

性質 4.1.

(1) $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f) = \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{v} \rangle$

($\because$) $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})v_2 + \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{a})v_3 = \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{v} \rangle$

(2) 任意の曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ s.t. $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}'(0) = \boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\boldsymbol{x}(t))$

($\because$) $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\boldsymbol{x}(t)) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\,\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{v} = \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{v} \rangle$

(3) $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ のとき $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f) = \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{v} \rangle = \|\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f\| \cos\theta$ $\qquad \theta = \angle(\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{v})$

○ $\theta = 0$ で 最大値 $\|\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f\|$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で 0, $\theta = \pi$ で 最小値 $-\|\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f\|$ をとる.

(4) ベクトル $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}}\, f$ は 次の性質で定まる :

点 $\boldsymbol{a}$ を 様々な方向に 速さ 1 で通過するときの f の値の 増加率 を考える.

$\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ $\qquad \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}(f)$

(i) 向き : f の値の増加率が最大となる方向 $\qquad$ (ii) 大きさ : f の値の 増加率 の 最大値

スカラー場の等位面 $U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合 $f : U \to \mathbb{R}$: スカラー場 $c \in \mathbb{R}$

定義 4.11. 図形 $S_c = \{\boldsymbol{x} \in U \mid f(\boldsymbol{x}) = c\} \subset U$ を スカラー場 f の レベル c の 等位面 と呼ぶ

- ∘ 記号 $S_c : f(x, y, z) = c$ で表す.
- ∘ 通常, S_c は (特異点を持つ) 曲面になる.
- ∘ c を動かすと, U は S_c 達の層に分割される. (例 4.1 参照)
- ∘ f が 平面の開集合 上の スカラー場 のときは 等高線 と呼ぶ. (例 4.2 参照)

例 4.1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$S_c = \begin{cases} \emptyset & c < 0 \\ \{\mathbf{0}\} & c = 0 \\ \text{半径 } \sqrt{c} \text{ の球面} & c > 0 \end{cases}$$

例 4.2. 等高線 : $U \subset \mathbb{R}^2$: 開集合 $z = f(x, y) : U \to \mathbb{R}$: スカラー場

$z = f(x, y)$ のグラフ と f の 等高線の概念図

命題 4.1. $f : U \to \mathbb{R} : C^1$ 級 S_c 上の 点 $\boldsymbol{a}$ において $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f \neq \mathbf{0}$ のとき

(1) S_c は 点 $\boldsymbol{a}$ の近くで滑らかな曲面になる.

(2) $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f$ は 点 $\boldsymbol{a}$ における S_c の 法線ベクトル になる.

(3) 点 $\boldsymbol{a}$ における S_c の 接平面 $\pi_{\boldsymbol{a}}$: $\boldsymbol{a}$ を通り $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f$ に直交する平面

方程式 : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})(x_2 - a_2) + \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{a})(x_3 - a_3) = 0$ $\quad \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle = 0$

証明.

(1) ある $i \in \{1, 2, 3\}$ について $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \neq 0$

x_i 方向について 陰関数定理 を適応して, S_c は 点 $\boldsymbol{a}$ の近傍で ある C^1 級関数 $x_i = \varphi(x_j, x_k)$ のグラフの形 をしている.

(2) $\forall\, \boldsymbol{v} \in \pi_{\boldsymbol{a}}$

S_c 上の 曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ で $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a},\ \dot{x}(0) = \boldsymbol{v}$ を満たすものがある.

$f(\boldsymbol{x}(t)) \equiv c \qquad \therefore\ 0 = \dfrac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t))\Big|_{t=0} = f'(\boldsymbol{a})\,\dot{x}(0) = \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f, \boldsymbol{v} \rangle \qquad \therefore\ \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f \perp \boldsymbol{v}$

$\therefore$ $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f$ は 点 $\boldsymbol{a}$ での S_c の 法線ベクトル になる. □

例 4.3. 曲面 $S : xz^2 + x^2 y - z = -1$ の点 $\boldsymbol{a} = (1, -3, 2)$ における 接平面 と 法線 を求めよ. (教科書 p 48, 例 1)

解答. $f(x, y, z) = xz^2 + x^2 y - z$ とおく. $S = [\text{等位面 } f \equiv -1]$

$\mathrm{grad}\, f = (z^2 + 2xy, x^2, 2xz - 1) \qquad \therefore\ \mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f = (-2, 1, 3) \neq \mathbf{0}$

接平面 : $\boldsymbol{a}$ を通り $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f$ と 直交 $\quad \therefore\ -2(x-1) + 1(y+3) + 3(z-2) = 0 \qquad 2x - y - 3z + 1 = 0$

法線 : $\boldsymbol{a}$ を通り $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{a}} f$ と 平行 $\quad \therefore\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ □

例 4.4. 関数 $z = g(x, y)$ $((x, y) \in U)$ の グラフ S の上向きの単位法線ベクトル場 :

$\boldsymbol{n} : S \ni \boldsymbol{p} = (x, y, g(x, y)) \longmapsto \boldsymbol{n}_p$ は，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} \left(-g_x, -g_y,\ 1 \right) \qquad \left(\text{但し}\ g_x = \frac{\partial g}{\partial x},\ g_y = \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

証明. $z = g(x, y)$ のグラフ :　$S = \{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$

スカラー場 $f(x, y, z) = z - g(x, y) : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えると

$$S = \text{等位面}\ f(x, y, z) = 0 \qquad \operatorname{grad} f = (-g_x, -g_y, 1) \qquad \boldsymbol{n}_p = \frac{\operatorname{grad}_p f}{\|\operatorname{grad}_p f\|} = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$ □

§4.4. ベクトル場 の 流線.

§4.4.1. 流れの速度ベクトル場.　　　$U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

U 上のベクトル場　$\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$

ベクトル場の重要な例として 流れの速度ベクトル場 がある．U 上の (流体の) 流れを考える．

(1) 一般に 流れ は時間と共に変化する．各時刻 t で U の 各点 $\boldsymbol{p}$ に於ける 流れの速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}, t)$ が定まる．これから 時刻 t ごとに U 上のベクトル場　$\boldsymbol{v}(\ , t) : U \to \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}, t)$　を得る．このベクトル場は時刻と共に変化し，時間に依存するベクトル場となる．

(2) 流れのパターンが変化しない 定常流 では，この 速度ベクトル場 は時刻によらず，時間に依存しないベクトル場を定める．

§4.4.1. 時間に依存しないベクトル場 (自励系).　　　$U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

$\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3$: (時間に依存しない) C^1 級 ベクトル場

定義 4.12. 曲線 $\boldsymbol{x}(t) : (a, b) \to U$ が $\boldsymbol{v}$ の 流線 (or 積分曲線) $\Longleftrightarrow$ $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t))$ $(t \in (a, b))$

∘ 可能な限り伸ばして, これ以上伸ばせなくなった 流線 を 極大流線 と呼ぶ.

定理 4.1. (極大流線 の 存在 と 一意性)

(1) 時刻 $t = t_0$ で 点 $\boldsymbol{p} \in U$ を通る ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の
極大流線 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{p})$ が 唯一存在する.

(2)　(i) 2 つの 極大流線 の 軌跡 は 一致するか 又は 交わらない.

　(ii) U は 互いに交わらない 極大流線 の 軌跡 の 和集合 になる.

定義 4.13. ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が 完備 $\Longleftrightarrow$ すべての極大流線が実数全体で定義されている
(or 任意の流線が実数全体に拡張される)

定義 4.14. 極大流線 を“ 束 ”にして 領域の運動を考えたもの を ベクトル場に沿う流れ と呼ぶ.

∘ 流れに沿う領域の移動を考えることが出来る.

正確には，次のような写像の族 φ_t として定義される.

(i) 大域的な流れ： ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が 完備 な場合， 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して 写像

$$\varphi_t : U \to U : \ \ \varphi_t(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}(t; 0, \boldsymbol{p})$$

を考え，写像の族 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿う 大域的な流れ と呼ぶ.

(ii) 局所的な流れ： 一般のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して， 各点 $\boldsymbol{p}_0 \in U$ において，$\boldsymbol{p}_0$ の 十分小さい 近傍 V と十分小さい $\varepsilon > 0$ をとれば，V の各点 $\boldsymbol{p}$ に対して $\boldsymbol{x}(t; 0, \boldsymbol{p})$ は 区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ で定義されている.

そこで， 各 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して 写像

$$\varphi_t : V \to U : \ \ \varphi_t(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}(t; 0, \boldsymbol{p})$$

を考え，写像の族 $\{\varphi_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ を 点 $\boldsymbol{p}_0$ の周りの ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿う 局所的な流れ と呼ぶ.

命題 4.2.

(1) 大域的な流れ $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は，次の条件を満たす：

$$\varphi_t(\varphi_s(\boldsymbol{p})) = \varphi_{t+s}(\boldsymbol{p}) \qquad \varphi_0(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \qquad (\boldsymbol{p} \in U,\ t, s \in \mathbb{R})$$

(2) 局所的な流れ $\{\varphi_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ は，次の条件を満たす：

($\boldsymbol{p}_0$ の 十分小さい 近傍 $W \subset V$ と 十分小さい $\delta \in (0, \varepsilon)$ に対して)

$$\varphi_t(\varphi_s(\boldsymbol{p})) = \varphi_{t+s}(\boldsymbol{p}) \qquad \varphi_0(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \qquad (\boldsymbol{p} \in W,\ t, s \in (-\delta, \delta))$$

§4.4.2. 時間に依存するベクトル場.

$U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合　　$I \subset \mathbb{R}$: 区間

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) : U \times I \to \mathbb{R}^3$

例. (流れの速度ベクトル場)

U 上の 一般の 流れ $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{p})$ を考える.

(1) 流れの速度ベクトル場 が 次で定義される： $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) =$ 時刻 t での 点 $\boldsymbol{x}$ における 流れの 速度ベクトル

∘ $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ は U 上の 時間に依存するベクトル場を定める

(2) 速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ が 時刻 t に無関係のとき，この流れを 定常流 という.

∘ 定常流 は，時間が経過しても 流れのパターン が変化しない流れ.

命題 4.3.

(1)

一般の流れ	$\overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow}$	時間に依存するベクトル場	$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$
定常流	$\longleftrightarrow$	時間に依存しない ベクトル場	$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$

(2) $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}(t; 0, \boldsymbol{p})$ とおくと，定常流 は次の条件で特徴付けられる：

$$\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{p})) = \boldsymbol{x}(s + t, \boldsymbol{p}), \ \ \boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$$

§4.4.3. 線形ベクトル場. $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \qquad \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

定義 4.15. $\mathbb{R}^3$ 上の次の形のベクトル場を 線形ベクトル場 と呼ぶ: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: (A : 実 3 次行列)

命題 4.4. (線形ベクトル場の流線) 時刻 $t=0$ で 点 $\boldsymbol{a}$ を通過する 極大流線 を $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ で表す.

(1) $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})$ は 次の 連立線形微分方程式の解 である: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)) = A\boldsymbol{x}(t) \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$

したがって, 行列の指数関数を用いて 次の形で求まる: $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{a} \quad (-\infty < t < \infty)$

(2) 線形ベクトル場 は 完備である (i.e., $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ は $-\infty < t < \infty$ で定義されている.)

例 4.5. A が 実正則行列 で 対角化可能 の場合は, 行列の指数関数 を用いなくとも, 正則変換 のみを用いて $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ が求まる.

(1) A が 対角行列 の場合 : $A \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \\ a_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$ となる.

$$(\because) \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a} \iff \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) & x_1(0) = a_1 \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) & x_2(0) = a_2 \\ \dot{x}_3(t) = \lambda_3 x_3(t) & x_3(0) = a_3 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x_1(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = a_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_3(t) = a_3 e^{\lambda_3 t} \end{array}$$

(2) A が (実数の範囲で) 対角化可能 な場合 :

A が 実正則行列 $P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ で 対角化可能 とすると $P^{-1} A P = D \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

(i) (a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: A の 固有値

(b) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$: 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の 固有ベクトル, (P : 正則 より) $\mathbb{R}^3$ の 基底 を成す.

(ii) $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3$ のとき, 流線 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ は次で与えられる :

$$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{u}_3$$

$(\because)$ $\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ とおくと $A = PDP^{-1}$, $P\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ より

$$P\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) = PDP^{-1}\boldsymbol{x}(t) = PD\boldsymbol{y}(t) \quad \therefore\ \dot{\boldsymbol{y}}(t) = D\boldsymbol{y}(t)$$

$$P\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a} = P\boldsymbol{c} \quad \therefore\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{c} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(1) より $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$ $\quad \therefore\ \boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{u}_3$

例 4.6. 点 O を通る 直線 ℓ の周りの 角速度 ω の 回転運動 を考える.

(1) 角速度ベクトル

(i) この 回転運動 は, 次で定義される 角速度ベクトル $\boldsymbol{w}$ で表すことができる :

$\boldsymbol{w}$ の向き : 直線 ℓ に平行で, 回転に対して 右ねじの方向

$\|\boldsymbol{w}\| = \omega$

(ii) この回転運動の 点 P での 速度ベクトルは $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{w} \times \overrightarrow{OP}$ となる.

(2) 点 O を原点とする 直交座標系 を固定し, 座標・成分 表示する.

(i) $P = \boldsymbol{x}$ とすると $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{x}$ となり, この回転運動の速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は, 次の形で表される :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}$$

(ii) さらに, 角速度ベクトル $\boldsymbol{w}$ の成分表示 を $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ とし, 次の 交代行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 次が成り立つ:

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$

すなわち, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は 交代行列 A から定まる 線形ベクトル場 となっている.

命題

[1] A が 実対称行列 (${}^tA = A$) の場合

(1) A は 対角化可能で, 例題 4.5 (2) の P は 回転行列 にとれ, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 右手系 正規直交基底 になる.

(2) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ \rightsquigarrow\ \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{a}) = e^{tA}\boldsymbol{a} = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{u}_3$

原点の周りの領域は, この流れにより ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の正負に基づいて) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ のそれぞれの方向に伸縮 する.

[2] A が 交代行列 (${}^tA = -A$) の場合

(1) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$: 原点を通る ある直線 ℓ の周りの 角速度一定 の 回転運動 の速度ベクトル場

$\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{a}) = e^{tA}\boldsymbol{a}$: 直線 ℓ の周りの 角速度一定 の 回転運動

(2) 原点の周りの領域は, この流れにより 直線 ℓ の周りで 角速度一定 で 回転する.

[3] A が 一般の 3 次 実 正方行列 の場合

(1) A は 次の形に一意に分解される: $A = S + T$ (S : 対称行列, T : 交代行列)

(i) $S = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$, $T = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$

(2) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ \rightsquigarrow\ \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{a}) = e^{tA}\boldsymbol{a} = e^{t(S+T)}\boldsymbol{a} \fallingdotseq e^{tS}e^{tT}\boldsymbol{a}$ ($|t| \ll 1$) (t についての 1 次の近似)

(i) $e^{tA} = e^{t(S+T)} \fallingdotseq e^{tS}e^{tT}$ ($|t| \ll 1$) (t についての 1 次の近似)

(ii) 微小時間 t での 1 次近似 において, A による流れは

S による流れ (原点を中心とする伸縮) と T による流れ (回転) の合成 で近似される.

§4.5 ベクトル場 の 発散・回転.

$\mathbb{R}^3$ の 直交座標系 $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$　　$\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

4.5.1 発散・回転 の 定義.

$\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3 : C^1$ 級 ベクトル場　　$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$

定義 4.16.

(1) $\boldsymbol{v}$ の 発散 :　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} : U \longrightarrow \mathbb{R}$: スカラー場　　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$
$\|$

(2) $\boldsymbol{v}$ の 回転 :　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: ベクトル場　　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z}, \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x}, \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \right)$

○ $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して $j, k \in \{1, 2, 3\}$ を 次の規則で定める :　$(i, j, k) : (1, 2, 3)$ の巡回置換

$\big((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\big)$

このとき 次式が成り立つ　(i) $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_i = (v_k)_{x_j} - (v_j)_{x_k}$　　(ii) $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_i = v_j w_k - v_k w_j$

4.5.2 勾配・発散・回転 に関する 公式.

$U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

命題 4.5. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} : U \to \mathbb{R}^3$: ベクトル場,　$f, g : U \to \mathbb{R}$: スカラー場,　$a, b \in \mathbb{R}$,　$\varphi(t)$: スカラー関数

(以下の各式において, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, f, g, \varphi$ は, 必要に応じて C^1 級 or C^2 級 と仮定する.)

(1) $\mathrm{grad}\,(af + bg) = a\,\mathrm{grad}\,f + b\,\mathrm{grad}\,g$　　$\nabla\,(af + bg) = a\,(\nabla f) + b\,(\nabla g)$

$\mathrm{div}\,(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + b\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}$　　$\nabla \cdot (a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + b(\nabla \cdot \boldsymbol{w})$

$\mathrm{rot}\,(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + b\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w}$　　$\nabla \times (a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a(\nabla \times \boldsymbol{v}) + b(\nabla \times \boldsymbol{w})$

(2) $\mathrm{grad}\,(fg) = g\,\mathrm{grad}\,f + f\,\mathrm{grad}\,g$　　$\nabla\,(fg) = g\,(\nabla\,f) + f\,(\nabla\,g)$

積の微分 (I)
(関数倍)

○ $g \neq 0$ のとき　$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}\big(g\,\mathrm{grad}\,f - f\,\mathrm{grad}\,g\big)$　　$\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}\big(g\,\nabla\,f - f\,\nabla\,g\big)$

$\mathrm{div}\,(f\,\boldsymbol{v}) = (\mathrm{grad}\,f) \cdot \boldsymbol{v} + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$　　$\nabla \cdot (f\,\boldsymbol{v}) = (\nabla\,f) \cdot \boldsymbol{v} + f\,\nabla \cdot \boldsymbol{v}$

$\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{v}) = (\mathrm{grad}\,f) \times \boldsymbol{v} + f\,(\mathrm{rot}\;\boldsymbol{v})$　　$\nabla \cdot (f\boldsymbol{v}) = (\nabla\,f) \times \boldsymbol{v} + f\,(\nabla \times \boldsymbol{v})$

(3) $\mathrm{grad}\,\varphi(f) = \varphi'(f)\,\mathrm{grad}\,f$　　$\nabla(\varphi(f)) = \varphi'(f)\,(\nabla f)$　　$\left(\varphi(f) = \varphi \circ f : U \xrightarrow{f} I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \right)$

(4) スカラー場 $\xrightarrow{\mathrm{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\mathrm{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\mathrm{div}}$ スカラー場

作用の合成

(i) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = 0$　　(ii) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = 0$　　$(f, \boldsymbol{v} : C^2$ 級$)$

(iii) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f) = \Delta f$　　(iv) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}) - \Delta\boldsymbol{v}$

(5) (i) $\mathrm{grad}\,f \equiv 0 \iff$ 局所的に $f \equiv \mathrm{const}$　　局所的に $\cdots$ = 各点の周りで $\cdots$

ポテンシャル

(ii) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \equiv 0 \iff$ 局所的に $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,f$ の形　　(f を $\boldsymbol{v}$ の (局所) スカラー ポテンシャル と呼ぶ)

(iii) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{w} \equiv 0 \iff$ 局所的に $\boldsymbol{w} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ の形　　($\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{w}$ の (局所) ベクトル ポテンシャル と呼ぶ)

(6) (i) $\mathrm{grad}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$

積の微分 (II)
(内積・外積)

(ii) $\mathrm{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w})$

(iii) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

(7) (i) $\mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g) = (\mathrm{grad}\,f) \cdot (\mathrm{grad}\,g) + f\,\Delta g$

公式の応用

(ii) $\mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g - g\,\mathrm{grad}\,f) = f\,\Delta g - g\Delta f$

(iii) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f \times \mathrm{grad}\,g) = 0$

Δ

(8) (i) $\Delta(af + bg) = a\Delta f + b\Delta g$

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + 2(\mathrm{grad}\,f) \cdot (\mathrm{grad}\,g) + g\Delta f$　　$\Delta(fg) = f\,\Delta g + 2\,(\nabla f) \cdot (\nabla g) + g\,\Delta f$

命題 4.5 の証明. $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \qquad f_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

(4) (i) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = \nabla \times (f_x, f_y, f_z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy}) = 0$

$(f : C^2 \ \curvearrowright\ f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i})$

(ii) $$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{3} \big((\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_i\big)_{x_i} = \big((v_3)_y - (v_2)_z\big)_x + \big((v_1)_z - (v_3)_x\big)_y + \big((v_2)_x - (v_1)_y\big)_z$$
$$= (v_3)_{yx} - (v_2)_{zx} + (v_1)_{zy} - (v_3)_{xy} + (v_2)_{xz} - (v_1)_{yz} = 0 \qquad (\boldsymbol{v} : C^2 \text{ 級})$$

(iv) $$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ (v_3)_y - (v_2)_z & (v_1)_z - (v_3)_x & (v_2)_x - (v_1)_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \big((v_2)_x - (v_1)_y\big)_y - \big((v_1)_z - (v_3)_x\big)_z \\ \big((v_3)_y - (v_2)_z\big)_z - \big((v_2)_x - (v_1)_y\big)_x \\ \big((v_1)_z - (v_3)_x\big)_x - \big((v_3)_y - (v_2)_z\big)_y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \big((v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z\big)_x - \big((v_1)_{xx} + (v_1)_{yy} + (v_1)_{zz}\big) \\ \big((v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z\big)_y - \big((v_2)_{xx} + (v_2)_{yy} + (v_2)_{zz}\big) \\ \big((v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z\big)_z - \big((v_3)_{xx} + (v_3)_{yy} + (v_3)_{zz}\big) \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}) - \Delta \boldsymbol{v}$$

(6) (i) $$\big(\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{w})\big)_i = v_j(\nabla \times \boldsymbol{w})_k - v_k(\nabla \times \boldsymbol{w})_j$$
$$= v_j((w_j)_{x_i} - (w_i)_{x_j}) - v_k((w_i)_{x_k} - (w_k)_{x_i})$$
$$= v_i(w_i)_{x_i} + v_j(w_j)_{x_i} + v_k(w_k)_{x_i} - \big(v_i(w_i)_{x_i} + v_j(w_i)_{x_j} + v_k(w_i)_{x_k}\big)$$
$$= v_1(w_1)_{x_i} + v_2(w_2)_{x_i} + v_3(w_3)_{x_i} - \big(v_1(w_i)_{x_1} + v_2(w_i)_{x_2} + v_3(w_i)_{x_3}\big)$$
$$= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_{x_i} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla w_i) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_{x_i} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_i$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_{x_i} = \big(\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{w})\big)_i + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_i \qquad \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_{x_i} = \big(\boldsymbol{w} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})\big)_i + (\boldsymbol{w} \cdot \nabla) v_i$$
$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})_{x_i} = \boldsymbol{v}_{x_i} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_{x_i} = \big(\boldsymbol{w} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})\big)_i + (\boldsymbol{w} \cdot \nabla) v_i + \big(\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{w})\big)_i + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_i$$

(ii) $$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \textstyle\sum_i \big((\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_i\big)_{x_i} = \sum_i (v_j w_k - v_k w_j)_{x_i}$$
$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)_{x_1} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)_{x_2} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)_{x_3}$$
$$= (v_2)_{x_1} w_3 - (v_3)_{x_1} w_2 + (v_3)_{x_2} w_1 - (v_1)_{x_2} w_3 + (v_1)_{x_3} w_2 - (v_2)_{x_3} w_1$$
$$\quad + v_2 (w_3)_{x_1} - v_3 (w_2)_{x_1} + v_3 (w_1)_{x_2} - v_1 (w_3)_{x_2} + v_1 (w_2)_{x_3} - v_2 (w_1)_{x_3}$$
$$= w_1((v_3)_{x_2} - (v_2)_{x_3}) + w_2((v_1)_{x_3} - (v_3)_{x_1}) + w_3((v_2)_{x_1} - (v_1)_{x_2})$$
$$\quad - \big(v_1((w_3)_{x_2} - (w_2)_{x_3}) + v_2((w_1)_{x_3} - (w_3)_{x_1}) + v_3((w_2)_{x_1} - (w_1)_{x_2})\big)$$
$$= \boldsymbol{w} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w})$$

(iii) $$\big(\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\big)_i = \big((\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_k\big)_{x_j} - \big((\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_j\big)_{x_k} = \big(v_i w_j - v_j w_i\big)_{x_j} - \big(v_k w_i - v_i w_k\big)_{x_k}$$
$$= (v_i)_{x_j} w_j - (v_j)_{x_j} w_i + v_i (w_j)_{x_j} - v_j (w_i)_{x_j} - \big((v_k)_{x_k} w_i - (v_i)_{x_k} w_k + v_k (w_i)_{x_k} - v_i (w_k)_{x_k}\big)$$
$$\big((\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}\big)_i = (\boldsymbol{w} \cdot \nabla) v_i - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\, w_i$$
$$= w_1 (v_i)_{x_1} + w_2 (v_i)_{x_2} + w_3 (v_i)_{x_3} - ((v_1)_{x_1} + (v_2)_{x_2}) + (v_3)_{x_3})) w_i$$
$$= w_i (v_i)_{x_i} + w_j (v_i)_{x_j} + w_k (v_i)_{x_k} - ((v_i)_{x_i} + (v_j)_{x_j}) + (v_k)_{x_k})) w_i$$
$$= (v_i)_{x_j} w_j - (v_j)_{x_j} w_i + (v_i)_{x_k} w_k - (v_k)_{x_k} w_i$$
$$\big((\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}\big)_i$$
$$= \big((\boldsymbol{w} \cdot \nabla) v_i - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\, w_i\big) - \big((\boldsymbol{v} \cdot \nabla) w_i - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{w})\, v_i\big)$$
$$= (v_i)_{x_j} w_j - (v_j)_{x_j} w_i + (v_i)_{x_k} w_k - (v_k)_{x_k} w_i - \big((w_i)_{x_j} v_j - (w_j)_{x_j} v_i + (w_i)_{x_k} v_k - (w_k)_{x_k} v_i\big)$$
$$= \big((v_i)_{x_j} w_j - (v_j)_{x_j} w_i + (w_j)_{x_j} v_i - (w_i)_{x_j} v_j\big) - \big((v_k)_{x_k} w_i - (v_i)_{x_k} w_k + (w_i)_{x_k} v_k - (w_k)_{x_k} v_i\big)$$
$$\big(\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\big)_i = \big((\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}\big)_i$$

(7)　(i)　$\mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot(\mathrm{grad}\,g) + f\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,g) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot(\mathrm{grad}\,g) + f\,\Delta g$

(ii)　$\mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g - g\,\mathrm{grad}\,f) = \mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g) - \mathrm{div}\,(g\,\mathrm{grad}\,f)$

$= (\mathrm{grad}\,f)\cdot(\mathrm{grad}\,g) + f\,\Delta g - ((\mathrm{grad}\,g)\cdot(\mathrm{grad}\,f) + g\,\Delta f) = f\,\Delta g - g\,\Delta f$

(iii)　$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f \times \mathrm{grad}\,g) = (\mathrm{grad}\,g)\cdot\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) - (\mathrm{grad}\,f)\cdot\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,g) = 0$

(8)　(ii)　$\Delta(fg) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,(fg) = \mathrm{div}\,(g\,\mathrm{grad}\,f + f\,\mathrm{grad}\,g)$

$= (\mathrm{grad}\,g)\cdot(\mathrm{grad}\,f) + g\,\Delta f + (\mathrm{grad}\,f)\cdot(\mathrm{grad}\,g) + f\,\Delta g = f\,\Delta g + 2(\mathrm{grad}\,f)\cdot(\mathrm{grad}\,g) + g\,\Delta f$

命題 4.6. (位置ベクトル場)　$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:　位置ベクトル場　$\boldsymbol{r}(x,y,z) = (x,y,z)$

$r(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:　スカラー場　$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

○ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ で 微分不可能

○ $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = r^2$

○ 関係する スカラー場・ベクトル場 :

$f(r) = f(r(x,y,z))$　　($f(s) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$: スカラー関数)

$r^\alpha,\ r^\alpha \boldsymbol{r}\quad (\alpha \in \mathbb{R})$　　($\alpha < 0$ のとき　$r^\alpha : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$)

(1)　$\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}\quad (i = 1,2,3)$

(2)　(i)　$\mathrm{grad}\,r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　　(ii)　$\mathrm{grad}\,f(r) = f'(r)(\mathrm{grad}\,r) = f'(r)\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$

(iii)　$\mathrm{grad}\,(r^\alpha) = \alpha r^{\alpha-2}\boldsymbol{r}\quad (\alpha \in \mathbb{R})$　　ex.　$\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\quad (\alpha = -1)$

(3)　(i)　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} = 3$　　(ii)　$\mathrm{div}\,(r^\alpha\boldsymbol{r}) = (\alpha+3)r^\alpha$　　ex.　$\mathrm{div}\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0\quad (\alpha = -3)$

(4)　(i)　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} = 0$　　(ii)　$\mathrm{rot}\,(r^\alpha\boldsymbol{r}) = 0$

(5)　(i)　$\Delta\, r^\alpha = \alpha(\alpha+1)r^{\alpha-2}$　　ex.　$\Delta\, r = \dfrac{2}{r},\quad \Delta\,\dfrac{1}{r} = 0\quad (\alpha = \pm 1)$

(ii)　$\Delta\, f(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$

命題 4.6. の 証明

(1)　$r = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$　　$\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-1/2}\cdot 2x_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = \dfrac{x_i}{r}$

(2)　$f(t) = t^\alpha$　とおくと　$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$　　$\therefore\ \mathrm{grad}\,r^\alpha = \mathrm{grad}\,f(r) = f'(r)(\mathrm{grad}\,r) = \alpha r^{\alpha-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \alpha r^{\alpha-2}\boldsymbol{r}$

(3)　(ii)　$\mathrm{div}\,(r^\alpha\boldsymbol{r}) = (\mathrm{grad}\,r^\alpha)\cdot\boldsymbol{r} + r^\alpha\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} = (\alpha r^{\alpha-2}\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r} + r^\alpha\cdot 3 = \alpha r^{\alpha-2}r^2 + 3r^\alpha = (\alpha+3)r^\alpha$

(4)　(i)　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial x_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial x_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) = 0$

(ii)　$\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{v}) = (\mathrm{grad}\,f)\times\boldsymbol{v} + f\,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})$ を適用して

$\mathrm{rot}\,(r^\alpha\boldsymbol{r}) = (\mathrm{grad}\,r^\alpha)\times\boldsymbol{r} + r^\alpha\,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{r}) = \alpha r^{\alpha-2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r} + r^\alpha\,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{r}) = 0$

(5)　$\Delta f = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f)$　及び　$\mathrm{div}\,(f\,\boldsymbol{v}) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot\boldsymbol{v} + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$　を用いて

(i)　$\Delta\, r^\alpha = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,r^\alpha = \mathrm{div}(\alpha r^{\alpha-2}\boldsymbol{r}) = \alpha\Big((\mathrm{grad}\,r^{\alpha-2})\cdot\boldsymbol{r} + r^{\alpha-2}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}\Big)$

$= \alpha\Big(\big((\alpha-2)r^{\alpha-4}\boldsymbol{r}\big)\cdot\boldsymbol{r} + 3r^{\alpha-2}\Big) = \alpha(\alpha+1)r^{\alpha-2}$

(ii)　$\Delta\, f(r) = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f(r)) = \mathrm{div}\,(f'(r)\,\mathrm{grad}\,r) = (\mathrm{grad}f'(r))\cdot(\mathrm{grad}\,r) + f'(r)\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,r)$

$= (f''(r)\,\mathrm{grad}\,r)\cdot(\mathrm{grad}\,r) + f'(r)\Delta r = f''(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} + f'(r)\dfrac{2}{r} = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$　□

証明の補足.

命題 4.5.

(6) (ii) $\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \sum_i (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_{i_{x_i}} = \sum_i (v_j w_k - v_k w_j)_{x_i}$

$$= \sum_i v_{j_{x_i}} w_k - \sum_i v_{k x_i} w_j + \sum_i v_j w_{k x_i} - \sum_i v_k w_{j_{x_i}}$$
$$= \sum_k w_k v_{j_{x_i}} - \sum_j w_j v_{k x_i} + \sum_j v_j w_{k x_i} - \sum_k v_k w_{j_{x_i}}$$
$$= \sum_i w_i v_{k x_j} - \sum_i w_i v_{j_{x_k}} + \sum_i v_i w_{j_{x_k}} - \sum_i v_i w_{k x_j}$$
$$= \sum_i w_i (v_{k x_j} - v_{j_{x_k}}) - \sum_i v_i (w_{k x_j} - w_{j_{x_k}})$$
$$= \boldsymbol{w} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$$

命題 4.6.

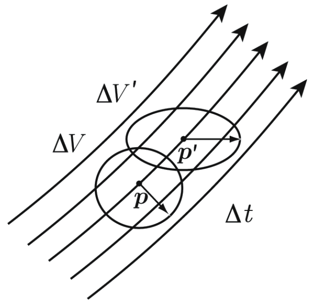
(5) (i) $r_{x_i} = \dfrac{x_i}{r}$ $\qquad \displaystyle\sum_i x_i^2 = r^2$

$$(r^\alpha)_{x_i} = \alpha r^{\alpha-1} \frac{x_i}{r} = \alpha r^{\alpha-2} x_i$$

$$(r^\alpha)_{x_i x_i} = \alpha(r^{\alpha-2} x_i)_{x_i} = \alpha((r^{\alpha-2})_{x_i} x_i + r^{\alpha-2}) = \alpha((\alpha-2) r^{\alpha-4} x_i \cdot x_i + r^{\alpha-2})$$

$$\Delta r^\alpha = \sum_i (r^\alpha)_{x_i x_i} = \sum_i \alpha((\alpha-2) r^{\alpha-4} x_i \cdot x_i + r^{\alpha-2})$$
$$= \alpha((\alpha-2) r^{\alpha-4} \sum_i x_i^2 + 3r^{\alpha-2}) = \alpha((\alpha-2) r^{\alpha-2} + 3r^{\alpha-2}) = \alpha(\alpha+1) r^{\alpha-2}$$

4.3.3 発散・回転 の 意味.



記号. (i)　空間領域 U 上で ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ (自励系) に沿う 定常流 を考える.

(ii)　$\boldsymbol{p} \in U$,　　ΔV : 点 $\boldsymbol{p}$ の周りの 微少領域,　　Δt : 微少時間

(iii)　$\boldsymbol{p}'$: 点 $\boldsymbol{p}$ が 時刻 t から Δt だけ 流れに沿って移動した点

$\Delta V'$: ΔV が 時刻 t から Δt だけ 流れに沿って移動した 微少領域

考察 I.

(1) $\Delta t \to 0,\ |\Delta V| \to 0$ の下で 一次近似　　　　$A = S + T$　　　$e^{tA} = e^{t(S+T)} \doteqdot e^{tS}e^{tT}$

(i.e., Δt, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ $(\boldsymbol{x} \in \Delta V)$ の 2 次以上の項を無視することを繰り返す粗い近似)

を行い, 流れの 線形近似 を考えると, $\Delta V'$ は ΔV から 次の変換 の 合成 で得られると考えられる.

(i) 点 $\boldsymbol{p}$ における ある正規直交基底 の 各ベクトル方向への 伸縮

(ii) 点 $\boldsymbol{p}$ の周りの 時間 Δt の 角速度ベクトル $\boldsymbol{w_p}$ での回転

(i.e., $\boldsymbol{w_p}$ を軸とする 右回りの 角速度 $\|\boldsymbol{w_p}\|$ での 回転)

(iii) 点 $\boldsymbol{p}$ を 点 $\boldsymbol{p}'$ に移す平行移動

(2) $\mathrm{div}_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{v}$ ＝ 流れによる 点 $\boldsymbol{p}$ の周りの 単位時間あたりの体積変化率 ＝ $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta V \to 0}} \frac{|\Delta V'| - |\Delta V|}{\Delta t |\Delta V|}$

＝ 変換 (i) による 点 $\boldsymbol{p}$ の周りの 体積変化率

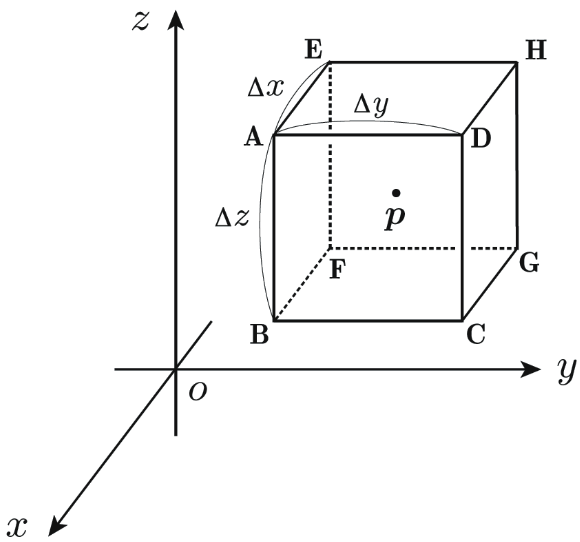
(3) $\mathrm{rot}_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{w_p}$　　(流れによる 点 $\boldsymbol{p}$ の周りの 微小領域 の 回転 を表す)

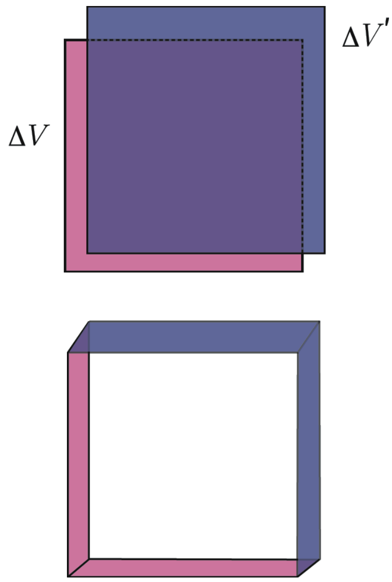
考察 II.　空間 の 直交座標系 (x, y, z) に関して $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と成分表示されるとき

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta V \to 0}} \frac{|\Delta V'| - |\Delta V|}{\Delta t |\Delta V|} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

考え方.

(1) 点 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ を中心とする 微少直方体 を考える。





(i) $|\Delta V| = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$

(ii) $|\Delta V'| - |\Delta V|$ ＝ 直方体の各面を時間 Δt の間に通過する流体の符号付き体積の和

但し, 通過する体積 は 面 を 直方体 の $\begin{array}{l} \text{外側に向かって通過するとき} + \\ \text{内側に向かって通過するとき} - \end{array}$ と符号を付ける。

(2) 各面を時間 Δt の間に通過する流体の 符号付き体積 を求める.

(i) $S_x^+ \equiv$ 面 $ABCD$ を時間 Δt の間に通過する流体の符号付体積 $\fallingdotseq$ ±斜線の平行 6 面体の体積

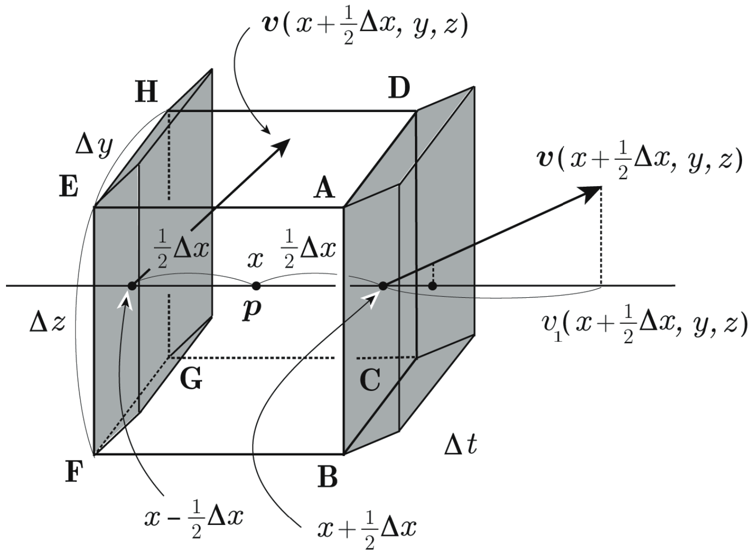
$$= \pm ABCD \text{ の面積} \times \text{高さ} = \Delta y\,\Delta z \times \Delta t\, v_1(x+\tfrac{1}{2}\Delta x, y, z)$$

$$= \Delta x \Delta y\,\Delta z \times \Delta t\,\frac{v_1(x+\frac{1}{2}\Delta x, y, z)}{\Delta x} = \frac{v_1(x+\frac{1}{2}\Delta x, y, z)}{\Delta x}\Delta t\,|\Delta V|$$

同様にして,

$$S_x^- \equiv \text{面 } EFGH \text{ を時間 } \Delta t \text{ の間に通過する流体の体積} = -\frac{v_1(x-\frac{1}{2}\Delta x, y, z)}{\Delta x}\Delta t\,|\Delta V|$$

$$\therefore\ S_x^+ + S_x^- \fallingdotseq \frac{v_1(x+\frac{1}{2}\Delta x, y, z) - v_1(x-\frac{1}{2}\Delta x, y, z)}{\Delta x}\Delta t\,|\Delta V| \fallingdotseq \frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial x}\Delta t\,|\Delta V|$$



(ii) 同様にして, $S_y^+ + S_y^- \fallingdotseq \dfrac{\partial v_2(x,y,z)}{\partial y}\Delta t|\Delta V|$, $S_z^+ + S_z^- \fallingdotseq \dfrac{\partial v_3(x,y,z)}{\partial z}\Delta t|\Delta V|$

(3) $|\Delta V'| - |\Delta V| = (S_x^+ + S_x^-) + (S_y^+ + S_y^-) + (S_z^+ + S_z^-) \fallingdotseq \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)\right)\Delta t|\Delta V|$

$$\therefore\ \frac{|\Delta V'| - |\Delta V|}{\Delta t\,|\Delta V|} \fallingdotseq \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)$$

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta V \to 0}} \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta t|\Delta V|} = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)$$

□

解説. (1)　下図の様な 直交座標系 をとる：

$\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$

$\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ とすると

$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = (-\omega y, \omega x, 0)$

$\therefore\ \mathrm{rot}_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{w}$

(2) □

例 4.7. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$

$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$

§4.4. ポテンシャル. $\boldsymbol{v}$: U 上の ベクトル場

定義 4.17. (i) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ のとき $\boldsymbol{v}$ は 渦無しである（or 層状である）という.

(ii) $\mathbf{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ のとき $\boldsymbol{v}$ は わき出し無し（or 管状である）という.

定義 4.18. (i) $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,f$ となる スカラー場 f が存在するとき, f を $\boldsymbol{v}$ の スカラー・ポテンシャル と呼ぶ.

(ii) $\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}$ となる ベクトル場 $\boldsymbol{w}$ が存在するとき, $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}$ の ベクトル・ポテンシャル と呼ぶ.

定義 4.19. 空間の領域 V が 単連結 $\iff$ V 内の任意に 閉曲線 が V 内で 連続的に変型して 一点に縮む.

性質 4.2.

(1) (i) U が領域のとき, スカラー・ポテンシャル f は 存在すれば 定数差を除いて一意に定まる.

(ii) $$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,f \quad \underset{U:\,\text{単連結 領域}}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

(2) $$\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} \quad \underset{U:\,\text{直方体}}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{v} = 0$$

例. $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$

(1) $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (0, 0, -g)$ のとき $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,f$ $f(x, y, z) = -gz$

(2) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ $r = \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r} = -\,\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$

§4.5. 微分形式. $\mathbb{R}^3$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

U : $\mathbb{R}^3$ の開集合

定義 4.20.

(0) U 上の 微分 0-形式 : $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$: 関数 (スカラー場)

(1) U 上の 微分 1-形式 :

$$\alpha = f dx + g dy + h dz \qquad (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z) : U \text{ 上の (連続) 関数})$$

(2) U 上の 微分 2-形式 :

$$\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \qquad (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z) : U \text{ 上の (連続) 関数})$$

(3) U 上の 微分 3-形式 : $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$ $(f(x,y,z) : U$ 上の (連続) 関数)

微分形式 の 外微分 (全微分)

定義 4.21. 外微分 d : 微分 r-形式 $\longrightarrow$ 微分 $r+1$-形式 $(r = 0, 1, 2)$

(1) 微分 0-形式 f

$$\longrightarrow \text{ 微分 1-形式 } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

(2) 微分 1-形式 $\alpha = f dx + g dy + h dz$

$$\longrightarrow \text{ 微分 2-形式 } d\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

(3) 微分 2-形式 $\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$

$$\longrightarrow \text{ 微分 3-形式 } d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

スカラー場・ベクトル場 との対応

$$\begin{array}{llcll}
\text{スカラー場} & f & \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} & \text{微分 0-形式} & f \\
\quad \downarrow \text{grad} & & & \quad \downarrow d & \\
\text{ベクトル場} & \boldsymbol{v} = (f, g, h) & \longleftrightarrow & \text{微分 1-形式} & \alpha = f dx + g dy + h dz \\
\quad \downarrow \text{rot} & & & \quad \downarrow d & \\
\text{ベクトル場} & \boldsymbol{w} = (f, g, h) & \longleftrightarrow & \text{微分 2-形式} & \eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \\
\quad \downarrow \text{div} & & & \quad \downarrow d & \\
\text{スカラー場} & f & \longleftrightarrow & \text{微分 3-形式} & \omega = f dx \wedge dy \wedge dz
\end{array}$$

平面上の 微分形式 $\mathbb{R}^2$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ U : $\mathbb{R}^3$ の開集合

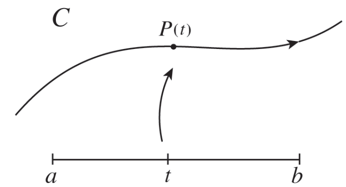
定義 4.22.

(0) U 上の 微分 0-形式 : $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$: 関数 (スカラー場)

(1) U 上の 微分 1-形式 : $\alpha = f dx + g dy$ $(f(x,y), g(x,y) : U$ 上の (連続) 関数)

(2) U 上の 微分 2-形式 : $\eta = f dx \wedge dy$ $(f(x,y) : U$ 上の (連続) 関数)

Ch. 7. 線積分.



§7.1. 空間曲線. (Ch 3 §3.1 参照)

空間曲線 空間における点の運動
点の運動の軌跡として得られる図形 の 総称

[0] 3 次元空間 E^3

3 次元空間 を E^3 で表し，空間における 幾何ベクトル 全体の成す空間 を V^3 で表す.

3 次元 実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ は次で定義される：

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \Big\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Big\}$$

E^3 において 原点 O を固定すると

(1) E^3 の点 P と，位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ が 1-1 に対応する. これにより，E^3 と V^3 は しばしば同一視される.

E^3 において 直交座標系 を 1 つ固定すると

(2) E^3 の点 $P(x_1, x_2, x_3)$ と 座標ベクトル $\boldsymbol{x} = \big(x_1, x_2, x_3\big)$ が 1-1 に対応する.

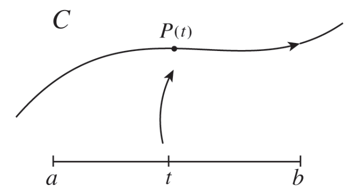
これにより，E^3 と $\mathbb{R}^3$ は しばしば同一視される.

(3) V^3 の 幾何ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ と 成分ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ が 1-1 に対応する.

これにより，V^3 と $\mathbb{R}^3$ は しばしば 同一視される.

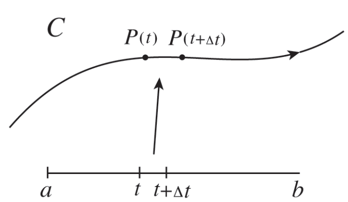
以下，必要な場合は，直交座標系を 1 つ固定し，点 や 幾何ベクトル は 対応する 3 次元 数ベクトル で表す.

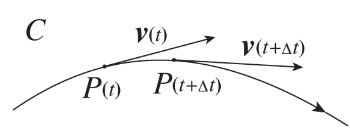
[1] 空間における点の運動 (移動) $\quad P: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E^3 \\ t & & P(t) \end{array} \quad (I \subset \mathbb{R}$: 区間)

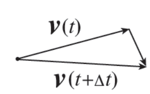


(1) 速度ベクトル $\quad \boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{P(t)P(t+\Delta t)}}{\Delta t}$ $\quad$ 速度 $\quad \|\boldsymbol{v}(t)\|$

加速度ベクトル $\quad \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$ $\quad$ 加速度 $\quad \|\boldsymbol{a}(t)\|$







(2) 空間の座標系を固定すれば，空間の点・幾何ベクトル は 座標・成分表示 される.

(i) 点 $P(t)$ は 3 次数ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ で表される. $\quad P(t) = \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

点の移動 $\quad P: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E^3 \\ t & & P(t) \end{array}$ は 1 変数 3 次数ベクトル値関数 $\quad \boldsymbol{x}: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & & \boldsymbol{x}(t) \end{array}$ で表される.

(ii) 速度・加速度ベクトル の成分

速度ベクトル	$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}'(t)$	速度	$\|\boldsymbol{v}(t)\| = \|\boldsymbol{x}'(t)\|$
加速度ベクトル	$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{x}''(t)$	加速度	$\|\boldsymbol{a}(t)\| = \|\boldsymbol{x}''(t)\|$

(iv) $P(t)$: 滑らか $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x}(t) : C^1$ 級，$\boldsymbol{x}'(t) \neq \boldsymbol{0} \quad (t \in I)$

(3) 軌跡 (軌道) $\quad C = \{P(t) \mid t \in I\} \subset E^3$: 空間図形

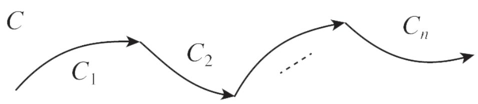
[2] 点の運動の軌跡としての空間曲線

(1) 点の運動の軌跡としての滑らかな空間曲線

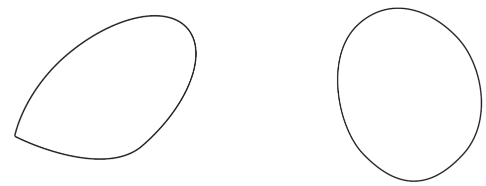
　$=$ 空間図形 (点の集まり) $C \subset E^3$ で，ある 滑らかな点の運動の軌跡 となっており，
　端点同士以外には自己交叉を持たないもの

○ 以下，「点の運動の軌跡としての 滑らかな空間曲線」を単に (滑らかな) 空間曲線 と呼ぶ.

(i) 区分的に滑らかな曲線

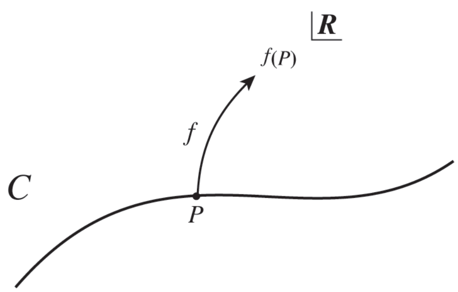


(ii) 閉曲線



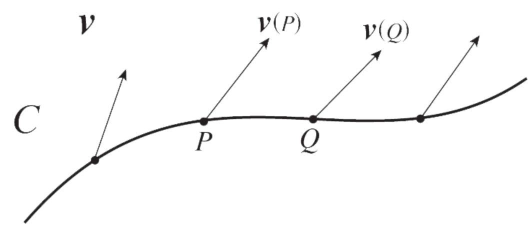
(2) (i) C 上の スカラー場

$f : C \ni P \longmapsto f(P) \in \mathbb{R}$



(ii) C 上の ベクトル場

$\boldsymbol{v} : C \ni P \longmapsto \boldsymbol{v}(P) \in V^3$



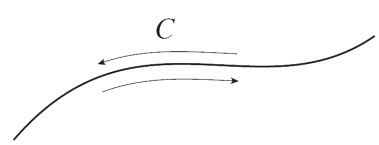
(3) C : 滑らかな 空間曲線

(i) C のパラメータ表示 $=$ C を軌跡に持つ 滑らかな 点の運動　$P = P(t)$　$(t \in I)$

記号：　$C:\ P = P(t)\ \ (t \in I)$　　　$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)\ \ (t \in I)$

(ii) C の向き $=$ C 上の点の進む方向の指定

○ 向き付けられた曲線 (有向曲線) $=$ 向きの指定された曲線



(4) C : 向き付けられた曲線

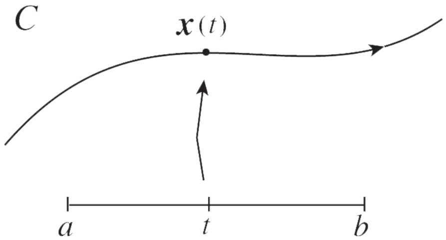
(i) C の正のパラメータ表示 $=$ C のパラメータ表示で，C の向きに沿って点が移動するもの

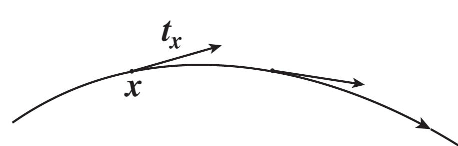
(ii) C の正の向きの単位接ベクトル場　$\boldsymbol{t} : C \longrightarrow V^3$　が 次で定義される.

(a) 各点 $P \in C$ に対して $\boldsymbol{t}_P$ を C の 点 P での 正の向きの単位接ベクトル とする.

(b) $\boldsymbol{t} : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & V^3 \\ P & & \boldsymbol{t}_P \end{array}$: (正の向きの) 単位接ベクトル場

(iii) $-C$ $:=$ 曲線 C で 逆の向きを持つもの





§7.2. 曲線の長さ. (Ch 3 §3.2 参照)

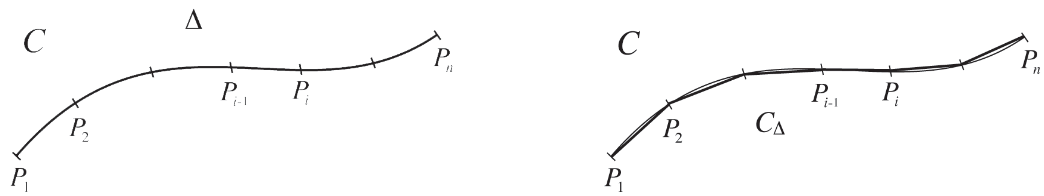
C : 区分的に滑らかな空間曲線

定義. C の長さ $\ell(C)$ を次の様に定める :

(1) (C の 折れ線近似) C の分割 $\Delta : P_0, P_1, \cdots, P_n$ を取り, 次の 折れ線近似 を考える:

$$C_\Delta = \overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \cdots \overline{P_{n-1}P_n}$$

$$\ell_\Delta(C) := C_\Delta \text{ の長さ } = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$$



(2) $\ell(C) := \lim_{|\Delta| \to 0} \ell_\Delta(C)$ $\quad$ ($|\Delta| \to 0$: 分割 Δ を無限に細かくする)

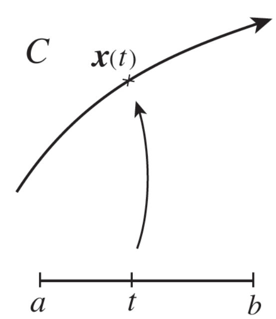
性質. C : 滑らかな空間曲線 $\quad \boldsymbol{x}(t)$ $(t \in [a,b])$: C の パラメータ表示

$$\Longrightarrow \ \ell(C) = \int_a^b \|\boldsymbol{x}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}\, dt \qquad \left(\boldsymbol{x}'(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)\right)\right)$$

○ 上記の式を $\ell(C)$ の定義とする場合もある.

用語. $C : \boldsymbol{x}(t)$ $(t \in [a,b])$: 滑らかな空間曲線

(1) 線素 $ds := \|\boldsymbol{x}'(t)\|\, dt$ (長さの拡大率)



考え方.

[1] $\ell(C) = \int_a^b \|\boldsymbol{x}'(t)\|\, dt$

(1) $[a,b]$ の分割 : $\quad \delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$

$\longmapsto$ C の分割 $\Delta_\delta : \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{x}(t_1), \cdots, \boldsymbol{x}(t_{i-1}), \boldsymbol{x}(t_i), \cdots, \boldsymbol{x}(t_n)$

○ $|\delta| \to 0 \ \rightsquigarrow \ |\Delta_\delta| \to 0$

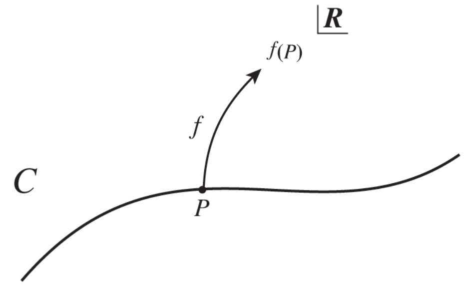
(2) $\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1}) \fallingdotseq \boldsymbol{x}'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ $\quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$ $\qquad \therefore \ \|\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1})\| \fallingdotseq \|\boldsymbol{x}'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1})$

(3) C_{Δ_δ} の長さ : $\ \ell_{\Delta_\delta}(C) = \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1})\| \fallingdotseq \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}'(t_i)\|(t_i - t_{i-1})$ $\quad$ (一様連続性を用いて評価)

(4) $\ell(C) = \lim_{|\delta| \to 0} \ell_{\Delta_\delta}(C) = \lim_{|\delta| \to 0} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|\boldsymbol{x}'(t)\|\, dt$

§7.3. スカラー場・ベクトル場・微分形式 の 線積分.

$\mathbb{R}^3$ の 座標　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$　　　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$: ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積



§7.3.1. スカラー場 の 線積分.

C : 空間の 区分的に滑らかな曲線 (の有限和) (閉曲線でも良い)

$f : C \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$: C 上の (区分的に連続な) スカラー場

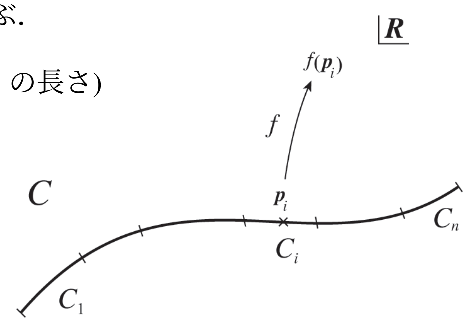
定義. f の C に沿う (線素に関する) 線積分 $\displaystyle\int_C f\,ds$ を次の様に定義する.

(i) C の分割 $\Delta = \{C_i\}_{i=1,\cdots,n}$ を考える．各部分曲線 C_i から 1 点 $\boldsymbol{p}_i$ を選ぶ.

$\displaystyle S(f, \Delta, \{\boldsymbol{p}_i\}_i) := \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{p}_i)\ell(C_i)$　と定める.　　　($\ell(C_i)$: 部分曲線 C_i の長さ)

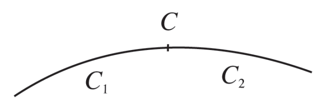
(ii) $\displaystyle\int_C f\,ds := \lim_{|\Delta|\to 0} S(f, \Delta, \{\boldsymbol{p}_i\}_i) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{p}_i)\ell(C_i)$

(分割を無限に細かくする)



性質.

(1) C の長さ　　$\ell(C) = \displaystyle\int_C 1\,ds$



(2) 公式 — $\displaystyle\int_C f\,ds$: f について線形, C について加法的

(i) $\displaystyle\int_C af + bg\,ds = a\int_C f\,ds + b\int_C g\,ds$　　　(ii) $\displaystyle\int_{C_1\cup C_2} f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$

(3) (パラメータ表示の公式)　　C : 滑らかな空間曲線　　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(a \le t \le b)$: C の任意のパラメータ表示

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt$$

○ 右辺はパラメータ変換で不変 (パラメータ表示の選び方に依らない).

(直接証明)　　$t = t(u) : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$: パラメータの変換 (1-1, C^1 級 とする)

$$C : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)\ \ (t \in [a, b]) \quad \rightsquigarrow \quad C : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t(u))\ \ (u \in [\alpha, \beta])$$

(t - パラメータ表示)　　　　　　(u - パラメータ表示)

(a) $\displaystyle\frac{d\boldsymbol{x}(t(u))}{du} = \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\Big|_{t(u)} \cdot \frac{dt(u)}{du}$　　　$\therefore \displaystyle\left|\frac{d\boldsymbol{x}(t(u))}{du}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\Big|_{t(u)}\right| \cdot \left|\frac{dt(u)}{du}\right|$

(b) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{x}(t(u)))\left|\frac{d\boldsymbol{x}(t(u))}{du}\right| du = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{x}(t(u)))\left|\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\Big|_{t(u)}\right| \cdot \left|\frac{dt(u)}{du}\right| du = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))\left|\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\right| dt$

例. (1) $f(x, y, z) = y^2 z$　　$C : \boldsymbol{x}(t) = (t, 2t, 3t)$　$(1 \le t \le 2)$:　　　　$\boldsymbol{x}'(t) = (1, 2, 3)$　　$\|\boldsymbol{x}'(t)\| = \sqrt{14}$

$$\int_C f\,ds = \int_1^2 f(\boldsymbol{x}(t))\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \int_1^2 12t^3 \cdot \sqrt{14}\,dt = 12\sqrt{14}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2 = 45\sqrt{14}$$

(2) $f(x, y, z) = x^2 + 2yz + y$　　C : 原点 O と 点 $P(1, 1, 1)$ を結ぶ線分 :

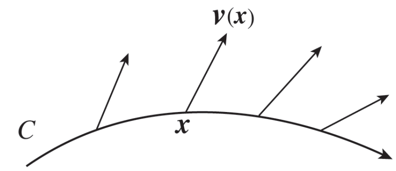
$C : \boldsymbol{x}(t) = (t, t, t)$　$(0 \le t \le 1)$:　　　$\boldsymbol{x}'(t) = (1, 1, 1)$　　$\|\boldsymbol{x}'(t)\| = \sqrt{3}$

$$\int_C f\,ds = \int_0^1 f(\boldsymbol{x}(t))\|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^2 + t) \cdot \sqrt{3}\,dt = \int_0^1 (3t^2 + t) \cdot \sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}\left[t^3 + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

§7.3.2. ベクトル場 の 線積分.

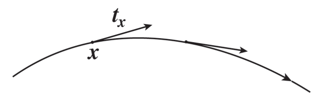
C : 空間の 向き付けられた 区分的に滑らかな曲線 (の有限和) (閉曲線でも良い)

$\boldsymbol{v} : C \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$: C 上の (連続な) ベクトル場



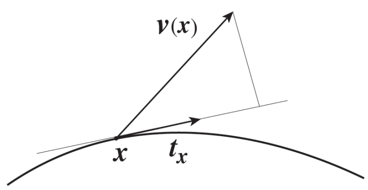
定義. $\boldsymbol{v}$ の C に沿う 線積分 $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle = \int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x}$ を次で定義する :

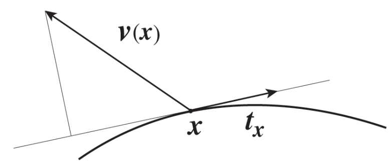
(i) C の 正の向きの 単位接ベクトル場 $\boldsymbol{t} : C \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{x}}$ が (離散点を除いて) 定まる.



(ii) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle : C \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{x}}\rangle \in \mathbb{R}$: C 上のスカラー場

○ $\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{x}}\rangle = \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\|\|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{x}}\|\cos\theta_{\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\|\cos\theta_{\boldsymbol{x}}$: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ の C に接する方向の (符号付) 成分





(iii) $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle := \int_C \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle\, ds$

○ $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle =$「$\boldsymbol{v}$ の C に接する方向の (符号付) 成分 を C 上積分したもの」

○ 線素ベクトル $d\boldsymbol{x} := \boldsymbol{t}\, ds$

○ C : 閉曲線 の場合 — 次の記号を用いることもある : $\displaystyle\oint_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$

性質.

(1) (パラメータ表示の公式) C : 滑らかな 有向曲線

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(a \le t \le b)$: C の 任意の 正のパラメータ表示

$$\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle = \int_a^b \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t)\rangle\, dt \qquad (\#)$$

$(\because)$ $\boldsymbol{x}'(t) = \|\boldsymbol{x}'(t)\|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{x}(t)}$

$$\therefore \int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle = \int_C \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle ds = \int_a^b \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle_{\boldsymbol{x}(t)}\|\boldsymbol{x}'(t)\|\, dt = \int_a^b \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{x}(t)}\rangle\|\boldsymbol{x}'(t)\|\, dt = \int_a^b \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t)\rangle\, dt$$

(i) $(\#)$ の 右辺は 正のパラメータ変換 で不変 (C の 正のパラメータ表示 の選び方に依らない)

(2) 公式 — $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$: $\boldsymbol{v}$ について線形, C について加法的

(i) $\displaystyle\int_C \langle a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2, d\boldsymbol{x}\rangle = a_1\int_C \langle \boldsymbol{v}_1, d\boldsymbol{x}\rangle + a_2\int_C \langle \boldsymbol{v}_2, d\boldsymbol{x}\rangle$

(ii) $\displaystyle\int_{C_1\cup C_2} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle = \int_{C_1} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle + \int_{C_2} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$ (iii) $\displaystyle\int_{-C} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle = -\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$

例. $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (yz, x^2, xyz)$

(1) $C_1 : \boldsymbol{x}(t) = (t, t^2, t^3) \quad (0 \le t \le 1) \qquad \boldsymbol{x}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$$\int_{C_1} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 (t^5, t^2, t^6) \cdot (1, 2t, 3t^2) \, dt = \int_0^1 (t^5 + 2t^3 + 3t^8) \, dt = 1$$

(2) $C_2 : \boldsymbol{x}(t) = (t, t, t^2) \quad (0 \le t \le 1) \qquad \boldsymbol{x}'(t) = (1, 1, 2t)$

$$\int_{C_2} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 (t^3, t^2, t^4) \cdot (1, 1, 2t) \, dt = \int_0^1 (t^3 + t^2 + 2t^5) \, dt = \frac{11}{12}$$

補足. $U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合 $\quad \boldsymbol{v} : U \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$: U 上の 接ベクトル場

$$\begin{array}{rcl} c : [a,b] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) \end{array}$$
: 区分的 C^1 級 曲線 (点の運動) (連続性は仮定しない)

定義. $\boldsymbol{v}$ の c に沿う 線積分 $\displaystyle\int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_c \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}$ を次式で定義する :

$$\int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle := \int_a^b \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle \, dt$$

性質

(1) $\displaystyle\int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$: 正のパラメータ変換の下で不変

i.e., $c : [a,b] \longrightarrow U : C^1$ 級曲線 $\quad t = t(s) : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a,b] : C^1$ 級関数, $\quad t(\alpha) = a, \ t(\beta) = b$

$$\begin{array}{cccccc} \tilde{c} : [\alpha,\beta] & \longrightarrow & [a,b] & \xrightarrow{\ c\ } & U \\ s & & t(s) & & \boldsymbol{x}(t(s)) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_{\tilde{c}} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$$

(2) C : 区分的 C^1 級 有向曲線 $\quad c : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \ (a \le t \le b)$: C の 正の 区分的 C^1 級 パラメータ表示

$$\Longrightarrow \quad \int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$$

(∵) (1)
$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle &= \int_\alpha^\beta \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t(s))), \frac{d}{ds}\boldsymbol{x}(t(s)) \right\rangle ds = \int_\alpha^\beta \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t(s))), \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\Big|_{t(s)} \frac{d}{ds}t(s) \right\rangle ds \\ &= \int_\alpha^\beta \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t(s))), \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\Big|_{t(s)} \right\rangle \frac{d}{ds}t(s) \, ds = \int_a^b \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) \right\rangle dt = \int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle \end{aligned}$$

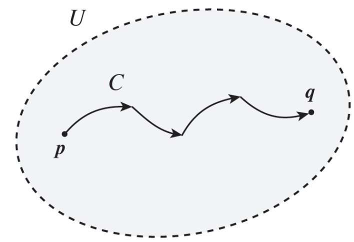
§7.3.3. 微分 1-形式 の 線積分. $\mathbb{R}^3$ (x,y,z)

$U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

$\alpha = f dx + g dy + h dz$: U 上の (連続な) 微分 1-形式

$(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}), h(\boldsymbol{x}) : U \longrightarrow \mathbb{R}$: (連続 関数)

$C \subset U$: U 内の 向き付けられた 区分的に滑らかな曲線 (の有限和)



定義. α の C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \alpha$ を次の様に定義する :

(1) C : 滑らかな曲線の場合 :

$$\int_C \alpha \equiv \int_C (f dx + g dy + h dz) := \int_a^b \left(f(\boldsymbol{x}(t)) \frac{dx(t)}{dt} + g(\boldsymbol{x}(t)) \frac{dy(t)}{dt} + h(\boldsymbol{x}(t)) \frac{dz(t)}{dt} \right) dt$$

但し, $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \le t \le b)$: C の 任意の 正のパラメータ表示

(2) C : 一般の場合 : $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ (C_i : 滑らかな曲線の場合) と書ける.

$$\int_C \alpha := \int_{C_1} \alpha + \cdots + \int_{C_n} \alpha$$

○ C : 閉曲線 の場合 — 次の記号を用いることもある : $\displaystyle\oint_C \alpha$

性質.

(1) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) := \big(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}), h(\boldsymbol{x})\big) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: α に対応する ベクトル場 $\alpha = f dx + g dy + h dz$

$$\int_C \alpha = \int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle \qquad (\because) \quad \int_C \alpha = \int_a^b \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle \, dt = \int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$$

○ $\displaystyle\int_C \alpha$ の定義は, C の 正のパラメータ表示 の選び方に依らない

(2) 公式 — $\displaystyle\int_C \alpha$: α について線形, C について加法的

(i) $\displaystyle\int_C (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = a_1 \int_C \alpha_1 + a_2 \int_C \alpha_2$ (ii) $\displaystyle\int_{C_1 \cup C_2} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha$ (iii) $\displaystyle\int_{-C} \alpha = -\int_C \alpha$

例. $\alpha = x dx + 2y dy + z^2 dz$ $C : \boldsymbol{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $(0 \le t \le \pi/2)$: $\boldsymbol{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$$\int_C \alpha = \int_C x dx + 2y dy + z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\cos t\,(-\sin t) + 2 \sin t \, \cos t + t^2 \cdot 1\big]\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin t \cos t + t^2\big)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{1}{2} \sin 2t + t^2\Big)\, dt = \Big[-\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{3} t^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi^3}{24}$$

補足. $I \subset \mathbb{R}$: 区間 $\begin{array}{rcl} c : I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) \end{array}$: 区分的 C^1 級 曲線 (点の運動) (連続性は仮定しない)

定義. α の c に沿う 線積分 $\displaystyle\int_c \alpha$ を次式で定義する : $\displaystyle\int_c \alpha := \int_I c^*\alpha = \int_I \gamma(t)\, dt$

$$c^*\alpha = \underbrace{\left(f(\boldsymbol{x}(t)) \frac{dx(t)}{dt} + g(\boldsymbol{x}(t)) \frac{dy(t)}{dt} + h(\boldsymbol{x}(t)) \frac{dz(t)}{dt} \right)}_{\substack{\shortparallel \\ \gamma(t)}} dt \qquad \begin{pmatrix} \alpha = f dx + g dy + h dz \\ \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix}$$

$$\circ\ c^*\alpha = c^*(f dx + g dy + h dz) = (c^*f)(c^*dx) + (c^*g)(c^*dy) + (c^*h)(c^*dz)$$
$$= (c^*f)d(c^*x) + (c^*g)d(c^*y) + (c^*h)d(c^*z) = f(\boldsymbol{x}(t))dx(t) + g(\boldsymbol{x}(t))dy(t) + h(\boldsymbol{x}(t))dz(t)$$
$$= f(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt + g(\boldsymbol{x}(t))\frac{dy(t)}{dt}\,dt + h(\boldsymbol{x}(t))\frac{dz(t)}{dt}\,dt$$
$$= \Big(f(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx(t)}{dt} + g(\boldsymbol{x}(t))\frac{dy(t)}{dt} + h(\boldsymbol{x}(t))\frac{dz(t)}{dt}\Big)\,dt$$

性質

(1) $\displaystyle\int_c \alpha$: 正のパラメータ変換の下で不変

i.e., $\begin{array}{ccc} c : [a,b] & \longrightarrow & U \\ t & & \boldsymbol{x}(t) \end{array}$: C^1 級曲線 $t = t(s) : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b] : C^1$ 級関数, $t(\alpha) = a,\ t(\beta) = b$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{c} : [\alpha,\beta] & \longrightarrow & [a,b] & \xrightarrow{c} & U \\ s & & t(s) & & \boldsymbol{x}(t(s)) \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \int_c \alpha = \int_{\tilde{c}} \alpha$$

(2) C : C^1 級 有向曲線 $c : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)\ (a \leq t \leq b)$: C の 正の 区分的 C^1 級 パラメータ表示

$$\Longrightarrow\quad \int_C \alpha = \int_c \alpha$$

(3) $c : [a,b] \longrightarrow U$: 区分的 C^1 級曲線 (連続性は仮定しない) $\alpha = f dx + g dy + h dz$

$\boldsymbol{v} := (f,g,h) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: α に対応する ベクトル場 $\Longrightarrow\ \displaystyle\int_c \alpha = \int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$

$(\because)$ (1) $c^*\alpha = \gamma(t)\,dt \qquad \gamma(t) \equiv f(\boldsymbol{x}(t))\dfrac{dx(t)}{dt} + g(\boldsymbol{x}(t))\dfrac{dy(t)}{dt} + h(\boldsymbol{x}(t))\dfrac{dz(t)}{dt}$

$$\tilde{c}^*\alpha = \delta(s)\,ds \qquad \delta(s) = f(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dx(t(s))}{ds} + g(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dy(t(s))}{ds} + h(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dz(t(s))}{ds}$$
$$= f(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t(s)}\frac{dt(s)}{ds} + g(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t(s)}\frac{dt(s)}{ds} + h(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t(s)}\frac{dt(s)}{ds}$$
$$= \Big(f(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t(s)} + g(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t(s)} + h(\boldsymbol{x}(t(s)))\frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t(s)}\Big)\frac{dt(s)}{ds}$$
$$= \Big(f(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx(t)}{dt} + g(\boldsymbol{x}(t))\frac{dy(t)}{dt} + h(\boldsymbol{x}(t))\frac{dz(t)}{dt}\Big)_{t(s)}\frac{dt(s)}{ds}$$
$$= \gamma(t(s))\frac{dt(s)}{ds}$$

$$\therefore\ \int_{\tilde{c}} \alpha = \int_{[\alpha,\beta]} \tilde{c}^*\alpha = \int_\alpha^\beta \delta(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \gamma(t(s))\frac{dt(s)}{ds}\,ds = \int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_{[a,b]} c^*\alpha = \int_c \alpha$$

(3) 区間 $[a,b]$ を分割することにより c は C^1 級曲線 と仮定して良い.

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^*\alpha = \int_a^b \Big(f(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx(t)}{dt} + g(\boldsymbol{x}(t))\frac{dy(t)}{dt} + h(\boldsymbol{x}(t))\frac{dz(t)}{dt}\Big)\,dt = \int_a^b \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t)\rangle\,dt = \int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$$

§7.4 スカラーポテンシャル.

$h(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : C^1$ 級

$$\int_a^b h'(x)\, dx = \Big[h(x)\Big]_a^b$$

§7.4.1 勾配ベクトル場・外微分 の線積分

$U \subset \mathbb{R}^3$: 開領域　　$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$: スカラー場　　$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in U$

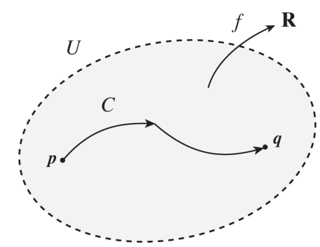
○ $c^*(df) = d(c^*f) = d(f \circ c) = d(f(\boldsymbol{x}(t))) = \left(\dfrac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t))\right) dt$

$$c^*(df) = c^*(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \left(f_x(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx(t)}{dt} + f_y(\boldsymbol{x}(t))\frac{dy(t)}{dt} + f_z(\boldsymbol{x}(t))\frac{dz(t)}{dt}\right) dt = \left(\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t))\right) dt$$

定理. (線積分とその両端に関する積分定理)

(1) $c : [a, b] \longrightarrow U$: 連続 かつ 区分的 C^1 級 曲線　　$c(a) = \boldsymbol{p},\ c(b) = \boldsymbol{q}$

$$\Longrightarrow \int_c \langle \mathrm{grad}\, f, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_c df = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p})$$



(2) C : $\boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{q}$ に到る U 内の 連続 かつ 区分的に滑らかな曲線

$$\Longrightarrow \int_C \langle \mathrm{grad}\, f, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_C df = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p})$$

($\because$) (1) $c(t) = \boldsymbol{x}(t)$ ($t \in [a, b]$) が C^1 級 曲線 の場合を考えれば良い.

$$\therefore \int_c df = \int_{[a,b]} c^*(df) = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t))\right) dt = \Big[f(\boldsymbol{x}(t))\Big]_a^b = f(\boldsymbol{x}(b)) - f(\boldsymbol{x}(a)) = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p})$$

$$\circ \int_c \langle \mathrm{grad}\, f, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_a^b \langle \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}(t)} f, \boldsymbol{x}'(t) \rangle\, dt = \int_a^b f'(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t))\, dt = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p})$$

(2) C が 滑らかな曲線 の場合 を考えれば良い.

C の 正のパラメータ表示 : $c(t) = \boldsymbol{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$) をとる.　　$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}(a), \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}(b)$ となる.

$$\therefore \int_C df = \int_c df = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p})$$

§7.4.2 保存ベクトル場・スカラーポテンシャル　　$U \subset \mathbb{R}^3$: 開領域 (連結開集合)

用語. $\boldsymbol{v}$: U 上の 連続ベクトル場

(1) $\boldsymbol{v}$: 保存ベクトル場 $\Longleftrightarrow$ $\exists f : U \longrightarrow \mathbb{R} : C^1$ 級関数 s.t. $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\, f$　(or　$\boldsymbol{v} = -\mathrm{grad}\, f$)

○ この条件を満たす関数 f を $\boldsymbol{v}$ の スカラーポテンシャル と呼ぶ.

(2) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in U$

U 内の C^1 級曲線 $c : [a, b] \longrightarrow U$ で $c(a) = \boldsymbol{p},\ c(b) = \boldsymbol{q}$ を満たすものに対して，線積分 $\displaystyle\int_c \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$ を考える．この値が 積分路 c に依らないとき，この値を $\displaystyle\int_p^q \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$ で表す.

定理. $\boldsymbol{v}$: U 上の C^1 級 ベクトル場　　次の条件は同値

(1) $\boldsymbol{v}$: 保存ベクトル場　($\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\, f$ と表される)

(2) $\boldsymbol{v}$ の 接線線積分 は 積分路の端点 で定まり 積分路の取り方 には依らない

(3) $\boldsymbol{v}$ の 任意の閉曲線 に沿う 接線線積分 $= 0$

($\because$) (2) $\Rightarrow$ (1) : $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を 次により定める : $p \in U$: 固定　　$f(q) = \displaystyle\int_p^q \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$　($q \in U$)

補足. U が 連結 かつ 単連結 のとき　　$\boldsymbol{v}$: 保存ベクトル場 $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{v}$: 渦無し　(rot $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$)

○ U : 単連結 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ U の中の 任意の連続な閉曲線は連続的に変形して 1 点に縮められる.

§7.5. 平面 の グリーンの定理 $\mathbb{R}^2 \quad (x,y)=(x_1,x_2)$

§7.5.1. 平面 の 微分形式 $U \subset \mathbb{R}^2$: 開集合

定義.

(1) U 上の 微分 0-形式 : $f : U \to \mathbb{R}$

微分 1-形式 : $\alpha = f dx + g dy \qquad (f(x,y), g(x,y) : U \to \mathbb{R})$

微分 2-形式 : $\eta = h\, dx \wedge dy \qquad (h(x,y) : U \to \mathbb{R})$

○ $\alpha : C^1$ 級 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $f, g : C^1$ 級 $\qquad \eta : C^1$ 級 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $h : C^1$ 級

(2) 微分形式 の 外微分

(i) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ (ii) $d\alpha = \Big(-\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\Big)dx \wedge dy$ (iii) $d\eta = 0$

定義. (微分形式 の積分)

(1) 微分 1-形式 の 線積分

$\alpha = f dx + g dy : U$ 上の C^1 級 微分 1-形式 $\qquad C \subset U$: 向き付けられた 曲線

α の C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \alpha$ を次で定義する

(i) $C \subset U$: 向き付けられた 滑らかな曲線 のとき

$$\int_C \alpha \equiv \int_C f dx + g dy := \int_a^b \left(f(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \right) dt$$

但し, $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \le t \le b)$: C の 任意の 正のパラメータ表示

$\boldsymbol{x}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$

(ii) $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$: 向き付けられた 区分的に滑らかな 曲線 のとき

$$\int_C \alpha := \int_{C_1} \alpha + \cdots + \int_{C_n} \alpha$$

(2) 微分 2-形式 の 領域上での積分

$\eta = h\, dx \wedge dy : U$ 上の C^1 級 微分 2-形式 $\qquad D \subset U$: 有界閉領域

$$\int_D \eta := \iint_D h(x,y)\, dxdy$$

性質.

(1) $\displaystyle\int_C \alpha + \beta = \int_C \alpha + \int_C \beta, \quad \int_C c\alpha = c\int_C \alpha$ (2) $\displaystyle\int_{C_1 \cup C_2} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha, \quad \int_{-C} \alpha = -\int_C \alpha$

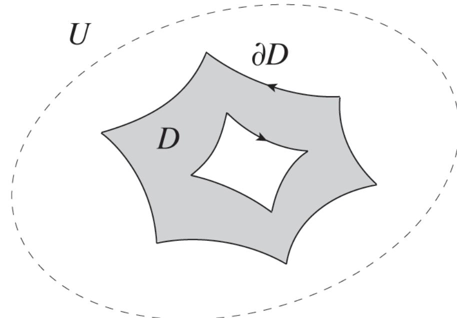
§7. 5. 2. 平面 の グリーンの定理

$D \subset \mathbb{R}^2$: 有界閉領域

D の 境界 ∂D : 区分的に滑らかな曲線 の 有限和

向き $= D$ を左手に見て進む方向

$\alpha = f dx + g dy : D$ を含む開集合上の C^1 級 微分 1-形式



定理. $\displaystyle\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha \qquad \int_{\partial D} f\, dx + g\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$

$\circ$ D 上で $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ のとき $\displaystyle\int_{\partial D} f\,dx + g\,dy = 0$

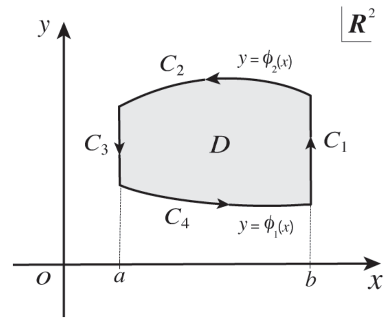
証明.

次を示せば良い.　(A) $\displaystyle\int_{\partial D} f\,dx = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy$　(B) $\displaystyle\int_{\partial D} g\,dy = \iint_D \frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy$

(A) を示す.　(B) も同様.

(1) D が x に関して 単純 な場合 :　$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$



$$\therefore \int_{\partial D} f\,dx = \int_{C_1} f\,dx + \int_{C_2} f\,dx + \int_{C_3} f\,dx + \int_{C_4} f\,dx$$

(i) $\displaystyle\int_{C_1} f\,dx = \int_{C_3} f\,dx = 0$

$(\because)$ (a) $C_1 : (x,y) = (b,y)$　$(\varphi_1(b) \le y \le \varphi_2(b))$　$\dfrac{dx}{dy} = 0$

$$\therefore \int_{C_1} f\,dx = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} f(b,y)\frac{dx}{dy}\,dy = 0$$

(b) 同様にして $\displaystyle\int_{C_3} f\,dx = 0$

(ii) (a) $\displaystyle\int_{C_4} f\,dx = \int_a^b f(x,\varphi_1(x))\,dx$　(b) $\displaystyle\int_{C_2} f\,dx = -\int_a^b f(x,\varphi_2(x))\,dx$

$(\because)$ (a) $C_4 : (x,y) = (x,\varphi_1(x))$　$(a \le x \le b)$　$\dfrac{dx}{dx} = 1$

$$\therefore \int_{C_4} f\,dx = \int_a^b f(x,\varphi_1(x))\frac{dx}{dx}\,dx = \int_a^b f(x,\varphi_1(x))\,dx$$

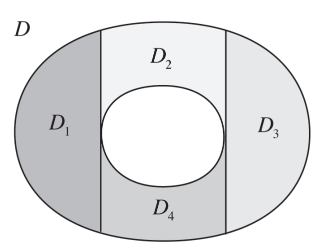
(b) 同様にして $\displaystyle\int_{-C_2} f\,dx = \int_a^b f(x,\varphi_2(x))\,dx$

$$\therefore \int_{C_2} f\,dx = -\int_{-C_2} f\,dx = -\int_a^b f(x,\varphi_2(x))\,dx$$

$$\therefore \int_{\partial D} f\,dx = \int_{C_2} f\,dx + \int_{C_4} f\,dx = -\int_a^b f(x,\varphi_2(x))\,dx + \int_a^b f(x,\varphi_1(x))\,dx$$

$$= -\int_a^b \big(f(x,\varphi_2(x)) - f(x,\varphi_1(x))\big)\,dx$$

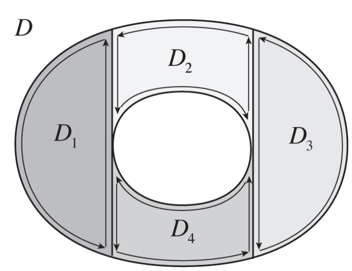
$$= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy$$



(2) D : 一般の場合

D の分割　$D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$　で

各 D_i が x について単純 となるものが存在する.



各 D_i に (1) を適応して　$\displaystyle\iint_{D_i} -\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = \int_{\partial D_i} f\,dx$

$$\therefore \iint_D -\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} -\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} f\,dx = \int_{\partial D} f\,dx$$

系. (面積の公式) $D \subset \mathbb{R}^2$: 有界閉領域, ∂D : 区分的に滑らかな曲線 の 有限和
向き $=$ D を左手に見て進む方向

$$\Longrightarrow \quad |D| = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(-y\,dx + x\,dy)$$

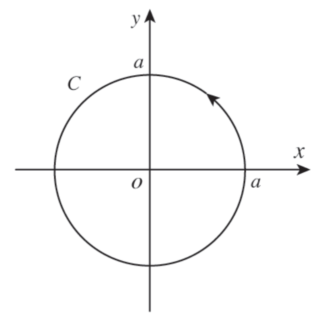
($\because$) 平面のグリーンの定理 より

$$\int_{\partial D} x\,dy = \iint_D \frac{\partial x}{\partial x}\,dxdy = \iint_D dxdy = |D|$$

$$-\int_{\partial D} y\,dx = -\iint_D \Big(-\frac{\partial y}{\partial y}\Big)\,dxdy = \iint_D dxdy = |D|$$

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D}(-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2}\Big(-\int_{\partial D} y\,dx + \int_{\partial D} x\,dy\Big) = \frac{1}{2}\,(|D| + |D|) = |D|$$

例 1.



(1) $\displaystyle\int_C ydx - xdy$ $\quad C:\ x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$ (向きは 反時計方向)

(解答) $D:\ x^2 + y^2 \le a^2$ (C で囲まれた円板領域)

$$\int_C ydx - xdy \;=\; \iint_D -\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial x}\,dxdy = -2\iint_D dxdy = -2|D| = -2\pi a^2$$

$$\Big(=\; -2\cdot\frac{1}{2}\int_C(-y\,dx + x\,dy) = -2|D| = -2\pi a^2\Big)$$

(2) 楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$ で囲まれた領域 D の面積 : $\quad |D| = \pi ab$

(解答) C には 反時計回りの向き (D を左手に見て進む向き) を入れる.
C は 次の 正のパラメータ表示 を持つ.

$$\boldsymbol{x}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta) \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \qquad \boldsymbol{x}'(\theta) = (-a\sin\theta, b\cos\theta)$$

$$\therefore\ |D| = \int_C x\,dy = \int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\cos\theta)\,d\theta = ab\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \pi ab$$

例 2. $\alpha = f(x,y)dx + g(x,y)dy = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上の 微分 1-形式

(1) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上で $\quad f_y(x,y) = g_x(x,y) \qquad \therefore\ d\alpha = \big(g_x - f_y\big)dxdy = 0$ ($\mathbb{R}^2$ 上に 0 で拡張される)

($\because$) $\quad f_y = -\dfrac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad g_x = \dfrac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

(2) $C:\ x^2 + y^2 = 1$ (向きは 反時計方向) $\quad\rightsquigarrow\quad \displaystyle\int_C \alpha = 2\pi \ \Big(\ne \int_D d\alpha = 0\Big)$

($\because$) $\quad C:\ (x,y) = (\cos t,\ \sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi) \qquad \Big(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\Big) = (-\sin t,\ \cos t)$

$$\therefore\ \int_C \alpha \;=\; \int_C f dx + g dy \;=\; \int_0^{2\pi}\Big(f(\cos t,\ \sin t)\frac{dx}{dt} + g(\cos t,\ \sin t)\frac{dy}{dt}\Big)\,dt$$

$$=\; \int_0^{2\pi}\big(-\sin t\cdot(-\sin t) + \cos t\cdot\cos t\big)dt \;=\; \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi$$

§7.6. 応用.

§7.6.1 線積分の例

(1) $C \subset \mathbb{R}^3$: 区分的 C^1 級 曲線

C 上に分布するスカラー量 $\varrho(\boldsymbol{x})$: 密度関数 $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_C \varrho(\boldsymbol{x})\,ds = C$ 上に分布する総量

(2) 力の場が行う仕事

(i) $C \subset \mathbb{R}^3$: 連続 かつ 区分的 C^1 級 有向曲線 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$: C 上の力の場 :

$W = \displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{x}\rangle$: 動点が C 上を 正の方向に動くときに 力の場 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事の総量

(ii) $U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$: U 上の力の場

$$\begin{array}{rcl} c : [a,b] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{x}(t) \end{array}$$: 連続 かつ 区分的 C^1 級 曲線 (点の運動)

$W = \displaystyle\int_c \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{x}\rangle$: 動点 が 曲線 c に沿って 動くときに 力の場 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事の総量

§7.6.2 ニュートン力学 における エネルギー保存則 $U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合

$\boldsymbol{F}$: U 上の 力の場 スカラーポテンシャル f をもつ ($\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, f$) とする.

$\boldsymbol{x}(t) \in U$ ($t \in [a,b]$) : 質量 m の 質点 の運動

$\Longrightarrow$ 質点 の 運動エネルギーと位置エネルギー の和 の 保存則 :

$$\frac{m}{2}\|\dot{\boldsymbol{x}}(b)\|^2 + f(\boldsymbol{x}(b)) = \frac{m}{2}\|\dot{\boldsymbol{x}}(a)\|^2 + f(\boldsymbol{x}(a))$$

($\because$) (i) ニュートンの運動方程式より $m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t)\,dt = m\ddot{\boldsymbol{x}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t)\,dt = \frac{m}{2}\Big(\frac{d}{dt}\big(\dot{\boldsymbol{x}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t)\big)\Big)\,dt = \frac{m}{2}\Big(\frac{d}{dt}\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^2\Big)\,dt$$

$$\therefore \int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t)\,dt = \int_a^b \frac{m}{2}\Big(\frac{d}{dt}\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^2\Big)\,dt = \frac{m}{2}\Big[\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^2\Big]_a^b = \frac{m}{2}(\|\dot{\boldsymbol{x}}(b)\|^2 - \|\dot{\boldsymbol{x}}(a)\|^2)$$

(ii) $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, f$ より $\displaystyle\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_c (-\mathrm{grad}\, f)\cdot d\boldsymbol{x} = -\big(f(\boldsymbol{x}(b)) - f(\boldsymbol{x}(a))\big)$

$$\therefore \frac{m}{2}(\|\dot{\boldsymbol{x}}(b)\|^2 - \|\dot{\boldsymbol{x}}(a)\|^2) = -\big(f(\boldsymbol{x}(b)) - f(\boldsymbol{x}(a))\big)$$

- $\displaystyle\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)) = \Big(\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\Big)\cdot\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\cdot\Big(\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t)\Big)$
- $\displaystyle\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)) = 2\Big(\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\Big)\cdot\boldsymbol{a}(t)$

Ch. 8. 面積分.

以下，空間の 直交座標系 を固定し，点 は 座標ベクトル で，幾何ベクトル は成分ベクトル で表す.

§8.1. 空間曲面　　(空間曲面 = 空間の中の “2 次元的な図形” の総称)

$S \subset \mathbb{R}^3$: (図形としての) 滑らかな空間曲面

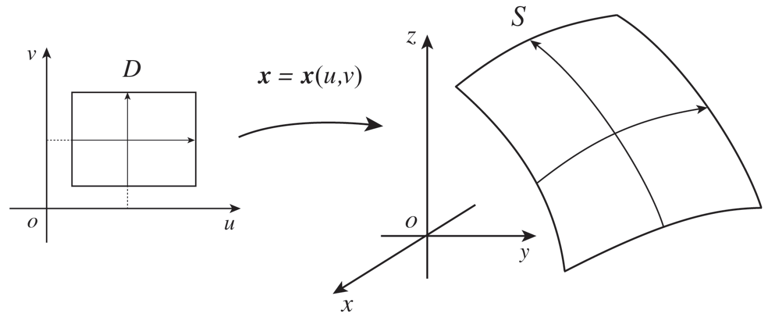
定義. S の 滑らかなパラメータ表示

$=$ 滑らかな写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v) : D \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ で S を 像 (軌跡) として持つもの

(i) $\boldsymbol{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

(2 変数 3 次ベクトル値関数)

(ii) 記号 : $S : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)\ \ ((u,v) \in D)$



パラメータ表示から導かれる諸量

$S : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)\ \ ((u,v) \in D)$

(1) u-曲線・v-曲線

(2) 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$

点 $\boldsymbol{x}(u,v) \in S$ での 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1(u,v), \boldsymbol{r}_2(u,v)$ を次で定義する.

(i) $\boldsymbol{r}_1(u,v) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u,v) = {}^t\!\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$: u 曲線 $\boldsymbol{x}(t,v)$ の速度ベクトル

(ii) $\boldsymbol{r}_2(u,v) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u,v) = {}^t\!\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$: v 曲線 $\boldsymbol{x}(u,t)$ の速度ベクトル

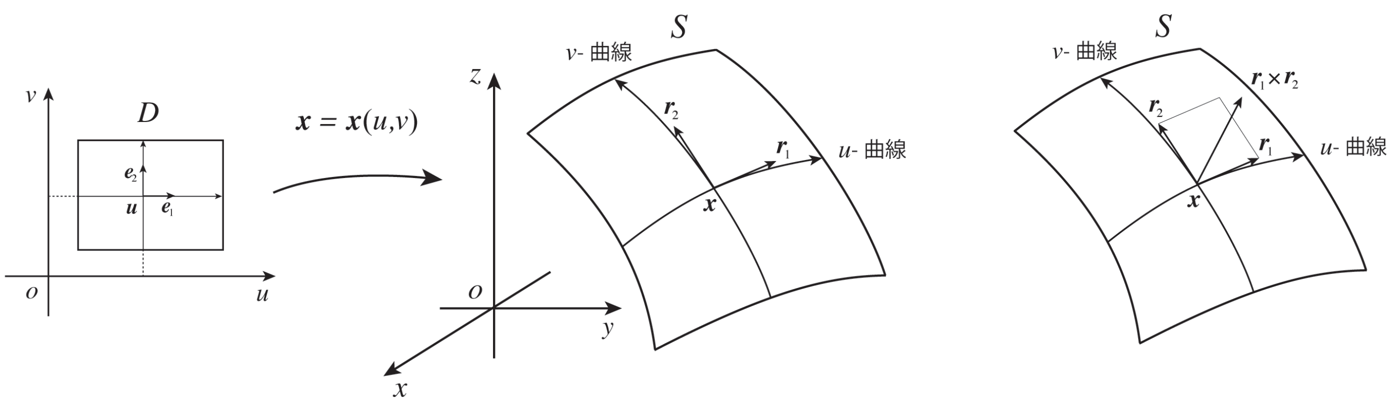
$$\boldsymbol{x}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

(3) 法線ベクトル　$\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v) = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_1 \end{array} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{array}{c} y \\ z \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} u & v \end{array} \end{array}$$

○ 単位法ベクトル場　$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|}$

(4) 面積素 $dS = \|\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\| dudv$



○ 以下では，滑らかなパラメータ表示として，C^1 級 全単射 で，基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ が 各点で 一次独立な ものを考える.

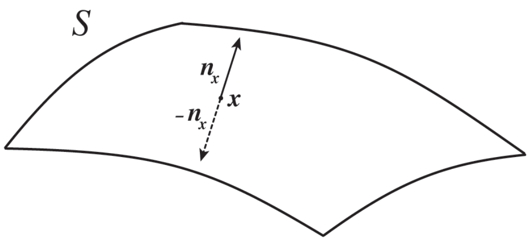
曲面の向き

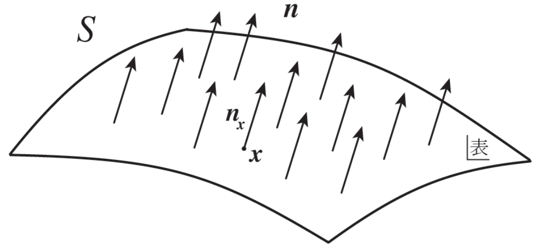
S : 滑らかな 空間曲面

定義.

(1) S : 向き付け可能 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ S 全体として 表・裏 の区別が付く

$\overset{\text{同値}}{\iff}$ S 上で 連続な 単位法ベクトル場 が存在する

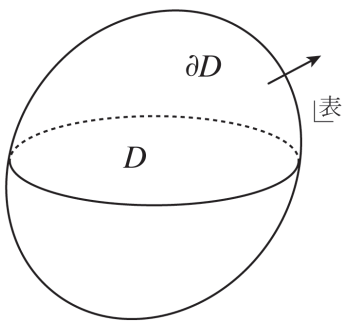




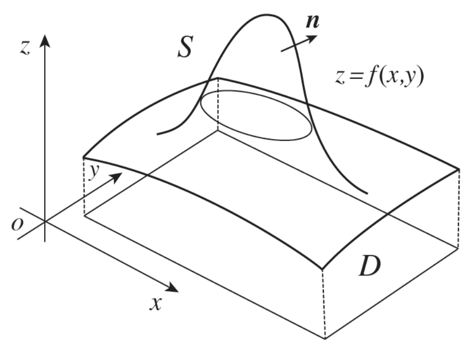
(2) 向き付けられた曲面 (有向曲面) = 表が指定された曲面

(3) (i) 向き付け 可能な曲面 の例

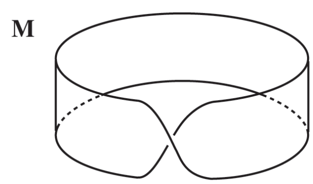
(a) 空間領域 D の境界 ∂D



(b) 関数のグラフ



(ii) 向き付け 不可能な曲面 の例 — メービウスの帯 $\mathbb{M}$



S : 向き付けられた 滑らかな曲面

定義.

(1) 表向き (正) の単位法ベクトル場 $\boldsymbol{n} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & & \boldsymbol{n}_p \end{array}$ ($\boldsymbol{n}_p$: S の 点 p での 表向きの単位法ベクトル)

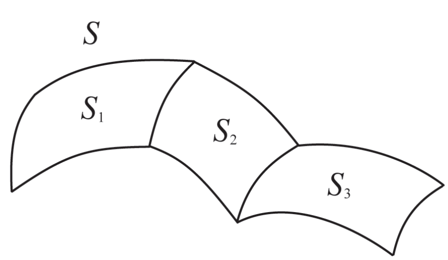
(2) 面 (積) 素ベクトル $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$

(3) S の 正のパラメータ表示 = S の パラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ $((u, v) \in D)$ で $\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)$ が S の 表向きの法線ベクトル となるもの.

(4) $-S$ = 曲面 S で 向き (表・裏) を入れ換えたもの

定義. 区分的に滑らかな 空間曲面

= いくつかの 滑らかな空間曲面 が 境界で 連続的につながってできる曲面 (の 有限和)



曲面の例.

(1) (C^1 級) 関数のグラフ　$S:\ z = f(x, y)\ \ ((x, y) \in D)$　　　　(z 軸の正の側を表とする)

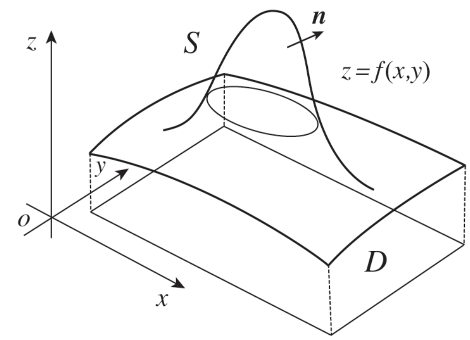
(i) 標準的な (正の) パラメータ表示 :　　$\boldsymbol{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))\ \ ((x, y) \in D)$

(ii) $\boldsymbol{r}_1(x, y) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}(x, y) = (1, 0, f_x(x, y))$

$\boldsymbol{r}_2(x, y) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y}(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$

$\boldsymbol{r}_1(x, y) \times \boldsymbol{r}_2(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$

(iii) $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\ dxdy$



(2) 球面 $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ \ (a > 0)$　　　(外側を表とする)

(0) 点 $P \in S$ における S の 表向きの 単位法ベクトル :　　$\boldsymbol{n}_P = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OP}$

(i) S の 空間極座標 (or 球面座標) による パラメータ表示

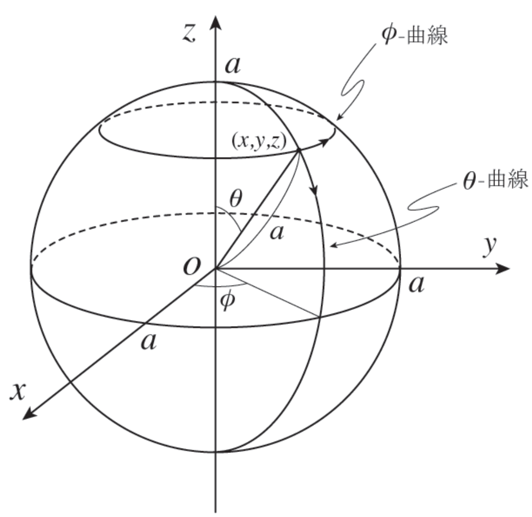
$$\boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = a \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \left(D:\ \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}\right) \qquad \text{(正のパラメータ表示)}$$

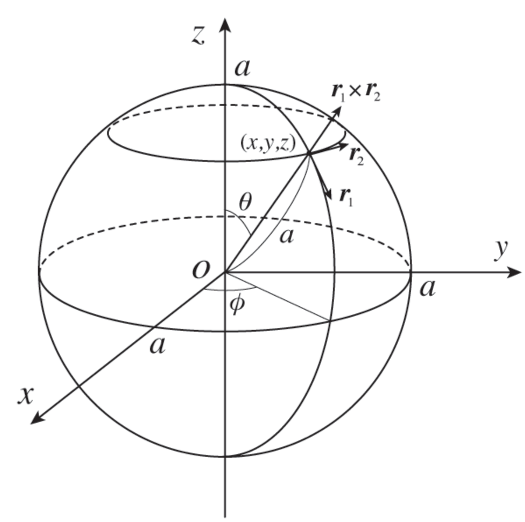
(ii) $\boldsymbol{r}_1(\theta, \varphi) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = a \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$　　　$\boldsymbol{r}_2(\theta, \varphi) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = a \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\boldsymbol{r}_1(\theta, \varphi) \times \boldsymbol{r}_2(\theta, \varphi) = (a^2 \sin\theta)\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)} = (a^2 \sin\theta)\dfrac{1}{a}\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$

- 点 $\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$ における S の 表向き 法ベクトル
- $\|\boldsymbol{r}_1(\theta, \varphi) \times \boldsymbol{r}_2(\theta, \varphi)\| = a^2 \sin\theta$

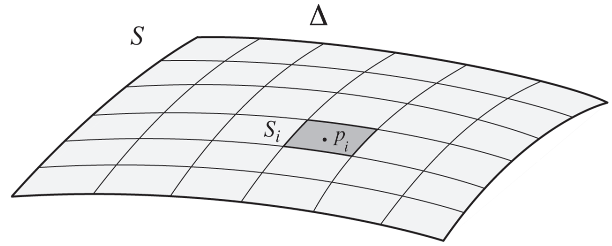
(iv) $dS = a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$





§8.2. 曲面の面積

S : 区分的に滑らかな 空間曲面



定義. S の 面積 $|S|$ を次の様に定義する.

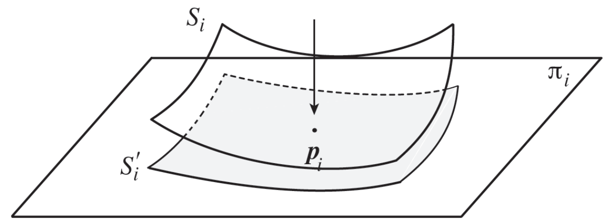
(i) S の小曲面への分割 $\Delta = \{S_i\}$ を考える.

(ii) 各小曲面 S_i から 1 点 p_i を選ぶ.
S の点 p_i での接平面 π_{p_i} への S_i の 正射影 を S_i' とおく.
平面 π_{p_i} において S_i' の面積 $|S_i'|$ が定まる.

(iii) $S(\Delta, \{p_i\}_i) := \sum_i |S_i'|$

$S := \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \{p_i\}_i)$

($|\Delta| \to 0$: 分割 Δ を限りなく細かくする)



パラメータ表示の公式

S : 滑らかな空間曲面 $\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ $((u, v) \in D)$: S の 滑らかなパラメータ表示

$$|S| = \iint_D \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| du dv \qquad\qquad \circ \ dS = \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| du dv$$

考察.

[1] $\|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\|$: 写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ で写すときの 点 $\boldsymbol{u} = (u, v)$ での 面積拡大率

(1) $\|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| =$ "$\boldsymbol{r}_1(u, v), \boldsymbol{r}_2(u, v)$ で張られる平行四辺形の面積"

(2) 点 $\boldsymbol{u} = (u, v) \in D$ において 微小領域 ΔD を取ると, その像 $\Delta S := \boldsymbol{x}(\Delta D)$ について 次の 近似式が得られる : $\quad |\Delta S| \fallingdotseq \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| |\Delta D|$

* この式は, 面積素 $dS = \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| du dv$ の 意味 を示している.

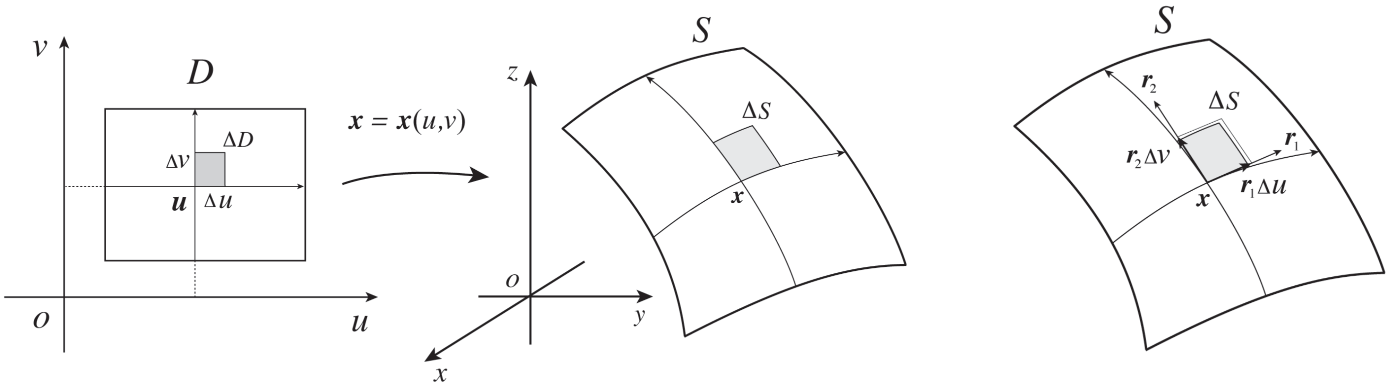
($\because$) ΔD として 微小長方形 $\Delta D = [u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v] \subset D$ の場合を考えると

(i) $\Delta S \fallingdotseq$ "$\boldsymbol{r}_1(u, v)\Delta u, \ \boldsymbol{r}_2(u, v)\Delta v$ で張られる平行四辺形"

(ii) $|\Delta S| \fallingdotseq \|\boldsymbol{r}_1(u, v)\Delta u \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\Delta v\| = \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| \Delta u \Delta v = \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| |\Delta D|$

(3) この近似は ΔD が小さくなる程 良くなる. $\qquad \|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\| = \lim_{|\Delta D| \to 0} \dfrac{|\Delta S|}{|\Delta D|}$

$\therefore$ $\|\boldsymbol{r}_1(u, v) \times \boldsymbol{r}_2(u, v)\|$: 写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ で写すときの 点 (u, v) での 面積拡大率



[2] パラメータ表示の公式

(1) D の 微小領域への分割 Δ を考える. $\quad |S| = \sum_{\Delta D \in \Delta} |\Delta S| \doteqdot \sum_{\Delta D \in \Delta} \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| |\Delta D|$

$\|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| |\Delta D|$
$= \|\boldsymbol{r}_1((u,v)) \times \boldsymbol{r}_2((u,v))\| |\Delta D|$
(１点 $(u,v) \in \Delta D$ を選ぶ)

(2) $|S| = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{\Delta D \in \Delta} \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| |\Delta D| = \iint_D \|\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\| dudv$

例.

[1] 球面の面積

S_a : 半径 $a > 0$ の球面 $\rightsquigarrow$ $|S_a| = 4\pi a^2$ $\qquad |V_a| = \frac{4}{3}\pi a^3 \qquad J = r^2 \sin\theta$

$(\because)$ 平行移動して S_a は 原点中心 として良い.

S_a の球面座標によるパラメータ表示 をとる:

$$S_a : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = \big(a \sin\theta \cos\varphi,\ a \sin\theta \sin\varphi,\ a \cos\theta\big) \qquad (D : 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

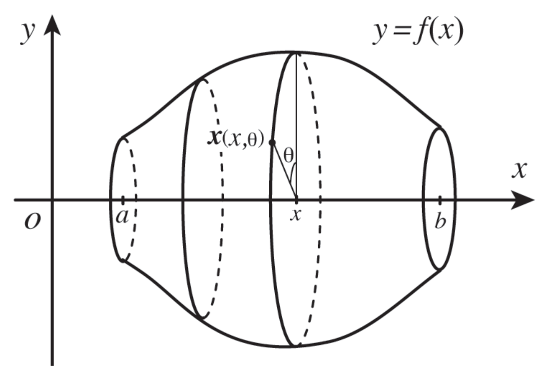
面積素 $dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| d\theta d\varphi = a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$

$$\therefore\ |S_a| = \iint_D a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = a^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = a^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi a^2$$

[2] 回転面の面積

S : 関数 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ の グラフ を x 軸の周りに回転してできる回転面

$$\rightsquigarrow\ |S| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$



$(\because)$ S の次のパラメータ表示を考える:

$$\boldsymbol{x}(x, \theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$$
$$(D : a \le x \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} = \big(1, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta\big)$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \big(0, -f(x)\sin\theta, f(x)\cos\theta\big)$$

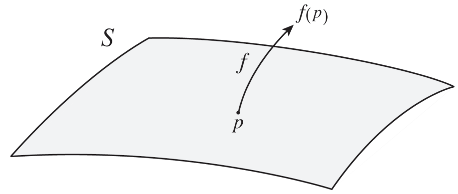
$$\therefore\quad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\sin\theta \\ 0 & -f(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix} = f(x)\big(f'(x), -\cos\theta, -\sin\theta\big)$$

$$dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| dx d\theta = |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx d\theta$$

$$|S| = \iint_D \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|\, dx d\theta = \iint_D |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx d\theta = \int_a^b |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

§8.3. スカラー場の面積分



S : 区分的に滑らかな 空間曲面

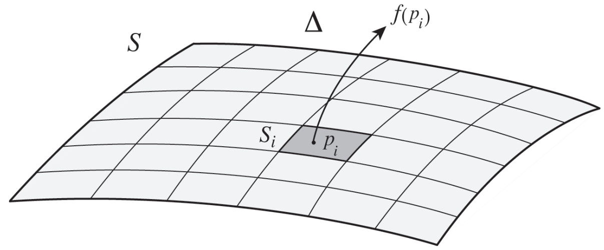
f : S 上の スカラー場 $\quad f: \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & f(p) \end{array}$: 関数

定義. S 上での f の 面積分 $\displaystyle\int_S f\,dS$ を次の様に定義する

(1) S の小曲面への分割 $\Delta = \{S_i\}$ を考える. 各小曲面 S_i において 1 点 $p_i \in S_i$ を選ぶ.

$S(f, \Delta, \{p_i\}_i) := \sum_i f(p_i)|S_i|$

(2) $\displaystyle\int_S f\,dS := \lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta, \{p_i\}_i) \equiv \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i f(p_i)|S_i|$



性質.

(1) 曲面の面積 : $\displaystyle |S| = \int_S dS$

(2) $\displaystyle\int_S f\,dS$: f について線形, S について 加法的

(i) $\displaystyle\int_S f + g\,dS = \int_S f\,dS + \int_S g\,dS \qquad \int_S af\,dS = a\int_S f\,dS \quad (a \in \mathbb{R})$

(ii) $S = S_1 \cup S_2 \qquad \displaystyle\int_S f\,dS = \int_{S_1} f\,dS + \int_{S_2} f\,dS$

(3) パラメータ表示の公式

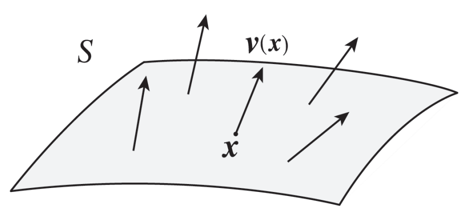
S : 滑らかな曲面 $\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)\ \ ((u, v) \in D)$: S の 滑らかなパラメータ表示

$$\int_S f\,dS = \iint_D f(\boldsymbol{x}(u, v))\|\boldsymbol{r}_1(u, v)\times\boldsymbol{r}_2(u, v)\|dudv$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u},\ \boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$$

$$dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|\,dudv$$

§8.4. ベクトル場 の 面積分



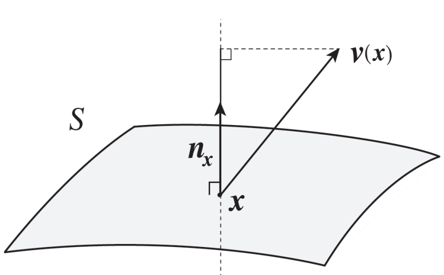
S : 向き付けられた 滑らかな曲面

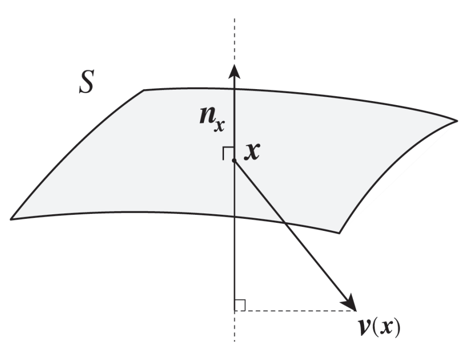
$\boldsymbol{v}$: S 上の ベクトル場

(i) $\boldsymbol{n}$: S の 正の単位法ベクトル場

(ii) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle : S \to \mathbb{R}$: スカラー場 $\qquad \langle\ ,\ \rangle$: 空間ベクトルの内積

○ $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle_{\boldsymbol{x}} \equiv \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}} \rangle$: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ の S に直交する成分





定義. $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle := \int_S \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle\,dS$ (スカラー場の面積分)

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

性質.

(1) $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$:　$\boldsymbol{v}$ について線形, S について 加法的

(i) $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, d\boldsymbol{S}\rangle = \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle + \int_S \langle \boldsymbol{w}, d\boldsymbol{S}\rangle, \qquad \int_S \langle a\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = a\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \quad (a \in \mathbb{R})$

(ii) (a) $S = S_1 \cup S_2 \qquad \displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \int_{S_1} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle + \int_{S_2} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$　　(b) $\displaystyle\int_{-S} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = -\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$

(2) パラメータ表示の公式　　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)$ $((u,v) \in D)$: S の 正のパラメータ表示 ($\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$: 表向き)

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \int_S \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS = \iint_D \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(u,v)), \boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\rangle\, dudv$$

($\because$) (i) $\displaystyle \boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v) = \|\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\| \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}(u,v)} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

(ii)
$$\begin{aligned}\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \int_S \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS &= \iint_D \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle_{\boldsymbol{x}(u,v)} \|\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\|\, dudv \\ &= \iint_D \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(u,v)), \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}(u,v)}\rangle \|\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\|\, dudv \\ &= \iint_D \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(u,v)), \boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v)\rangle\, dudv\end{aligned}$$

ベクトル場 の 面積分 の意味

$\boldsymbol{v}$ を 空間の開集合 U 上の ベクトル場 とする. S を U 内の 区分的に滑らかな有向曲面とする.
ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿う 定常流 を考える.

$\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle =$「$S$ を裏側から表側に向かって通過する流体の 単位時間あたりの 符号付き体積」

($\because$) Δt : 微小時間　　$\Delta \equiv \{S_i\}_i$: S の 微小曲面への分割

$\Delta V :=$「Δt の間に 正の向きに S を通過する流体の 符号付き体積」

$\Delta V_i :=$「Δt の間に 正の向きに S_i を通過する流体の 符号付き体積」

$\Delta V_i \fallingdotseq |S_i| \langle \boldsymbol{v}(p_i)\Delta t, \boldsymbol{n}(p_i)\rangle = \langle \boldsymbol{v}(p_i), \boldsymbol{n}(p_i)\rangle |S_i| \Delta t$

$\displaystyle \Delta V = \sum_i \Delta V_i \fallingdotseq \sum_i \langle \boldsymbol{v}(p_i), \boldsymbol{n}(p_i)\rangle |S_i| \Delta t \qquad \therefore\ \frac{\Delta V}{\Delta t} \fallingdotseq \sum_i \langle \boldsymbol{v}(p_i), \boldsymbol{n}(p_i)\rangle |S_i|$

$\displaystyle \therefore\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i \langle \boldsymbol{v}(p_i), \boldsymbol{n}(p_i)\rangle |S_i| = \int_S \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle dS = \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$

§8.5. 微分 2-形式 の面積分

S : 向き付けられた 区分的に 滑らかな曲面 $f, g, h : U$ 上の (連続) 関数

$\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$: S を含む ある 開集合 U 上の 微分 2-形式

定義. η の S に沿う 面積分 $\displaystyle\int_S \eta$ を次の様に定義する

(i) S : 滑らかな曲面 の場合

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{array}{c|cc|} y & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ z & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{u} & \multicolumn{1}{c}{v} \end{array}$$

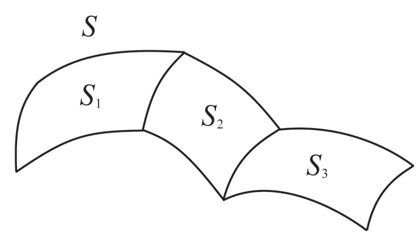
$$\int_S \eta \equiv \int_S (f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy)$$

$$:= \iint_D \left(f(\boldsymbol{x}(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + g(\boldsymbol{x}(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + h(\boldsymbol{x}(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv$$

但し, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)$ $((u,v) \in D)$ は S の 任意の 正のパラメータ表示 $\boldsymbol{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$

○ 単位法ベクトル場 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|}$ $\boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v) = \left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$

(ii) S : 区分的に滑らかな曲面 の場合 : $\displaystyle\int_S \eta := \int_{S_1} \eta + \cdots + \int_{S_m} \eta$



但し, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$: S の 滑らかな部分曲面 への分割

性質.

(1) $\displaystyle\int_S \eta$: η について 線形, S について加法的

(i) $\displaystyle\int_S \xi + \eta = \int_S \xi + \int_S \eta$ $\displaystyle\int_S a\eta = a \int_S \eta$ $(a \in \mathbb{R})$

(ii) (a) $S = S_1 \cup S_2$ $\displaystyle\int_S \eta = \int_{S_1} \eta + \int_{S_2} \eta$ (b) $\displaystyle\int_{-S} \eta = -\int_S \eta$

(2) 微分 2-形式 ベクトル場

$\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \longleftrightarrow \boldsymbol{v}(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$

(i) $\displaystyle\int_S \eta = \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$

($\because$) S の 正のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)$ $((u,v) \in D)$ を 1 つ選ぶと

$$\int_S \eta = \iint_D \left(f(\boldsymbol{x}(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + g(\boldsymbol{x}(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + h(\boldsymbol{x}(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv$$

$$= \iint_D \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(u,v)), \boldsymbol{r}_1(u,v) \times \boldsymbol{r}_2(u,v) \rangle \, dudv = \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$$

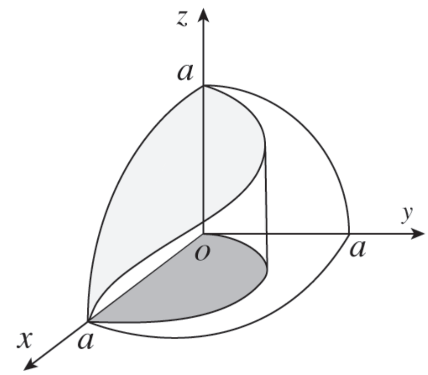
(ii) $\displaystyle\int_S \eta$ の定義は S の 正のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)$ の選び方に依らない.

§8.6. 例題.

[1] 曲面の面積

例題 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ の 円柱 $x^2+y^2\le ax$ により切り取られる部分 S の面積 を求めよ.

(解答)



(1) S の中で $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ の部分を S' と置く.
対称性により $|S|=4|S'|$

(2) xy 平面の半円板 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid x^2+y^2\le ax,\ y\ge 0\}$ を考える.
S' は 関数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ のグラフ S_0 の D 上の部分 である.

(3) S_0 の 標準パラメータ表示 に関する面素 dS を求めると

$$z_x=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{-x}{z}\qquad z_y=\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{-y}{z}$$

$$\therefore\ \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{z^2}}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

(4)
$$|S'|=\iint_D\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=a\iint_E\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,drd\theta\qquad \begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\quad J=r,\quad D\longleftrightarrow E:\ \begin{array}{l}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le a\cos\theta\end{array}$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}-\frac{1}{2}(a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2-r^2)'\,dr$$

$$=-\frac{1}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\Big[2(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{a\cos\theta}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)\,d\theta=a^2\Big[\theta+\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)$$

(5) $|S|=4|S'|=2a^2(\pi-2)$

[2] スカラー場の面積分 $\displaystyle\int_S f\,dS$

例題 $\displaystyle\int_S f\,dS:$ $\quad S: x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ (原点と反対の側を表にとる)

$f(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2$

(解答) ([1] p 69 問 2 (i))

(1) S の 球面座標によるパラメータ表示 をとる : $\quad S:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)\quad (\theta,\varphi)\in D$ (正のパラメータ表示)

$$\boldsymbol{x}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\qquad D:\ \begin{array}{l}0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\end{array}\qquad dS=\sin\theta\,d\theta d\varphi$$

○ $dS=a^2\sin\theta\,d\theta d\varphi$

$a=1$

S 上 $\quad f(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2=2(x^2+y^2+z^2)-x^2=2-x^2\quad ((x,y,z)\in S)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_S f\,dS &= \iint_D (2-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\,\sin\theta\,d\theta d\varphi = \iint_D (2\sin\theta-\sin^3\theta\cos^2\varphi)\,d\theta d\varphi\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= 2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2!!}{3!!}\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\Big(1-\frac{1}{6}\Big)=\frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

○ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{odd})\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{even})\end{cases}$$

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$

$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 1\quad (n:\text{odd})$

$\ n(n-2)(n-4)\cdots 2\quad (n:\text{even})$

[3] ベクトル場の面積分 $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$ **微分 2-形式の面積分** $\displaystyle\int_S \eta$

例題 $S : z = xy \quad ((x,y) \in D)$ (z 軸の正の方向の側を表とする) $D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$

(1) $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z) = (e^x, ze^y, z^2)$

(2) $\displaystyle\int_S \eta \qquad \eta = xe^{y^2}\, dy \wedge dz + (y \cos x^2)\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$

(解答)

(0) $S : \boldsymbol{x}(x,y) = (x, y, xy) \quad ((x,y) \in D)$: 正のパラメータ表示

(i) $\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} = {}^t(1,0,y),\ \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} = {}^t(0,1,x)$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(1,0,y) \times {}^t(0,1,x) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = {}^t(-y,-x,1) \qquad \circ\ \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = (-z_x, -z_y, 1)$$

$$dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|\, dxdy = \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy$$

(1) $\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(x,y)), \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \rangle = \langle (e^x, xye^y, x^2y^2), (-y,-x,1) \rangle = -e^x y - x^2 ye^y + x^2y^2 = -e^x y + x^2(y^2 - ye^y)$

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \iint_D \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(x,y)), \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \rangle\, dxdy = \iint_D (-e^x y + x^2(y^2 - ye^y))\, dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 dx\, (-e^x y + x^2(y^2 - ye^y)) = \int_0^1 dy \Big[-e^x y + \frac{1}{3}x^3(y^2 - ye^y) \Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_0^1 dy \Big[-(e-1)y + \frac{1}{3}(y^2 - ye^y) \Big] = \Big[-(e-1)\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}y^3 - e^y(y-1)\Big) \Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}(e-1) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{5}{18} - \frac{1}{2}e$$

$\circ\ \displaystyle\int ye^y\, dy = ye^y - \int e^y\, dy = e^y y - e^y = e^y(y-1)$

(2) $\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \right) = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(-y,-x,1)$

$$\therefore \int_S \eta = \int_S xe^{y^2}\, dy \wedge dz + (y \cos x^2)\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$$

$$= \iint_D \left(xe^{y^2} \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} + (y \cos x^2) \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} + xy \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \right) dxdy$$

$$= \iint_D \left(xe^{y^2}(-y) + (y \cos x^2)(-x) + xy \cdot 1 \right) dxdy$$

$$= -\int_0^1 x\, dx \int_0^1 e^{y^2} y\, dy - \int_0^1 y\, dy \int_0^1 (\cos x^2)\, x\, dx + \int_0^1 x\, dx \int_0^1 y\, dy$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin x^2 \right]_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(e-1) - \frac{1}{4}\sin 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(2 - e - \sin 1)$$

Ch. 9. 積分定理.

§9.1. 積分の概念の拡張と積分定理

[1] 微積分学 : 定積分 (区間上の関数) $\displaystyle\int_I f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx$

○ 微分積分学の基本定理 $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

[2] 解析学・ベクトル解析

場 : スカラー場 (関数) ・ ベクトル場 (ベクトル値関数) ・微分形式

微分 : grad, rot, div, 外微分 d

積分 :	定積分	(区間)	$\rightsquigarrow$	線積分	(空間曲線)
	2 重積分	(平面領域)	$\rightsquigarrow$	面積分	(空間曲面)
	3 重積分	(空間領域)			
	⋮				
	n 重積分				

積分定理 : 場の微分の積分 $=$ 境界での積分

微分積分学の基本定理	(直線区間)	スカラーポテンシャル	(空間曲線)
グリーンの定理	(平面領域)	ストークスの定理	(空間曲面)
ガウスの発散定理	(空間領域)		
⋮			

[3] 微分幾何 (一般化) :

	ベクトル解析		微分幾何
図形	ユークリッド空間の領域・曲線・曲面	$\rightsquigarrow$	n 次元多様体
場	スカラー場・ベクトル場・微分形式	$\rightsquigarrow$	一般の微分形式
微分	grad, rot, div, 外微分 d	$\rightsquigarrow$	一般の外微分 d
積分	定積分・重積分・線積分・面積分	$\rightsquigarrow$	微分形式の積分 ・関数の体積形式に関する積分
積分定理	グリーン・ガウス・ストークスの定理	$\rightsquigarrow$	一般 の ストークスの定理

補足. スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{div}}$ スカラー場

定義. $\mathbb{R}^3$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ $\quad U : \mathbb{R}^3$ の開集合

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$: スカラー場 $\quad \boldsymbol{v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: ベクトル場

(1) f の 勾配 : $\operatorname{grad} f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: ベクトル場 $\quad \operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

(2) $\boldsymbol{v}$ の 回転 : $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: ベクトル場 $\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z}, \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x}, \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right)$

(3) $\boldsymbol{v}$ の 発散 : $\operatorname{div} \boldsymbol{v} : U \longrightarrow \mathbb{R}$: スカラー場 $\quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}$

§9.2. 微分形式

$\mathbb{R}^3$ の 座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

U : $\mathbb{R}^3$ の開集合

定義.

(0) U 上の 微分 0-形式 : $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$: 関数 (スカラー場)

(1) U 上の 微分 1-形式 :

$$\alpha = f dx + g dy + h dz \qquad (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z) : U \text{ 上の (連続) 関数})$$

(2) U 上の 微分 2-形式 :

$$\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \qquad (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z) : U \text{ 上の (連続) 関数})$$

(3) U 上の 微分 3-形式 : $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz \qquad (f(x,y,z) : U$ 上の (連続) 関数)

微分形式 の 外微分

定義. 外微分 d : 微分 r-形式 $\longrightarrow$ 微分 $r+1$-形式 $\quad (r = 0, 1, 2)$

(1) 微分 0-形式 f

$$\longrightarrow \text{ 微分 1-形式 } \ df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

(2) 微分 1-形式 $\alpha = f dx + g dy + h dz$

$$\longrightarrow \text{ 微分 2-形式 } \ d\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

(3) 微分 2-形式 $\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$

$$\longrightarrow \text{ 微分 3-形式 } \ d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

スカラー場・ベクトル場 との対応

$$\begin{array}{llcll}
\text{スカラー場} & f & \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} & \text{微分 0-形式} & f \\
\quad \big\downarrow \text{grad} & & & \quad \big\downarrow d & \\
\text{ベクトル場} & \boldsymbol{v} = (f, g, h) & \longleftrightarrow & \text{微分 1-形式} & \alpha = f dx + g dy + h dz \\
\quad \big\downarrow \text{rot} & & & \quad \big\downarrow d & \\
\text{ベクトル場} & \boldsymbol{w} = (f, g, h) & \longleftrightarrow & \text{微分 2-形式} & \eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \\
\quad \big\downarrow \text{div} & & & \quad \big\downarrow d & \\
\text{スカラー場} & f & \longleftrightarrow & \text{微分 3-形式} & \omega = f dx \wedge dy \wedge dz
\end{array}$$

§9.3. 積分定理

[0] 微分積分学 の 基本定理 :　$\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$　(定積分 - 端点)

$f : [a, b] \to \mathbb{R} : C^1$ 級 関数

[1] スカラーポテンシャル :　$\displaystyle\int_C \langle \mathrm{grad}\, f, d\boldsymbol{x}\rangle = \int_C df = f(Q) - f(P)$　(線積分 - 端点)

$f : U \to \mathbb{R} : C^1$ 級 関数　($U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合)

$C \subset U$: 向き付けられた 区分的に滑らかな 連続曲線

始点 P, 終点 Q

[2] 平面 の グリーンの定理 :　$\displaystyle\int_D d\alpha = \oint_{\partial D} \alpha$　$\displaystyle\left(\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} f\,dx + g\,dy \right)$

$\alpha = f\,dx + g\,dy$:　U 上の C^1 級 微分 1-形式　($U \subset \mathbb{R}^2$: 開集合)　(面積分 - 線積分)

($f, g : U \to \mathbb{R} : C^1$ 級 関数)

$D \subset U$: 有界閉領域

$\partial D = C_1 \cup \cdots \cup C_m$: 有限個の 区分的に滑らかな単純閉曲線 の和

向き: D を左側に見て進む向き

[3] ストークスの 定理 :　$\displaystyle\int_S \langle \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \oint_{\partial S} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$　$\displaystyle\int_S d\alpha = \oint_{\partial S} \alpha$　(面積分 - 線積分)

$\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3 : C^1$ 級ベクトル場　($U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合)

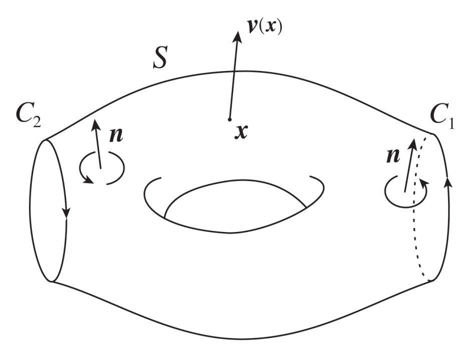
$\alpha : U$ 上の C^1 級 微分 1-形式

$S \subset U$: 向き付けられた 区分的に滑らかな曲面

$\partial S = C_1 \cup \cdots \cup C_m$:

有限個の 区分的に滑らかな単純閉曲線 の和

向き : S の表向きの法ベクトルに対して右ねじの向き



[4] ガウスの 発散定理 :　$\displaystyle\int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, dV = \oint_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$　$\displaystyle\int_V d\eta = \oint_{\partial V} \eta$　(3 重積分 - 面積分)

$\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^3 : C^1$ 級ベクトル場　($U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合)

$\eta : U$ 上の C^1 級 微分 2-形式

$V \subset U$: 有界閉領域

$\partial V = S_1 \cup \cdots \cup S_m$:　有限個の 区分的に滑らかな閉曲面 の和

向き : V の外側 を 表 とする

§9.4. ガウスの発散定理 の意味

$\boldsymbol{v}$: 領域 U 上の ベクトル場 $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{v}$ に沿う 定常流 を考える.

$V \subset U$: 有界閉領域 (∂V : 区分的に滑らか)

(1) $\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,dV$ $=$ $\boldsymbol{v}$ に沿う 流れによる V の 体積の (単位時間当りの) 変化率

(∵) (i) $\displaystyle \mathrm{div}_p\,\boldsymbol{v} \;=\; \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{|\Delta V'| - |\Delta V|}{|\Delta V|\Delta t}$ $\left(\begin{array}{l}\text{点 } p \text{ の周りでの 流れによる} \\ \text{(単位体積, 単位時間 あたりの) 体積変化率)}\end{array}\right)$

(ii) 次の記号を用いる : Δt : 微小時間

$\Delta_V = \{V_i\}_i$: V の 小領域 への分割 $\quad p_i \in V_i$

時刻 t から Δt の間に 領域 V が V' に, 小領域 V_i が V_i' に 移動したとする

(iii) $\displaystyle \mathrm{div}_{p_i}\boldsymbol{v} \;\fallingdotseq\; \frac{|V_i'| - |V_i|}{|V_i|\Delta t} \qquad \therefore\; |V_i'| - |V_i| \;\fallingdotseq\; (\mathrm{div}_{p_i}\boldsymbol{v})\,|V_i|\Delta t$

$$|V'| - |V| \;=\; \sum_i |V_i'| - \sum_i |V_i| \;=\; \sum_i (|V_i'| - |V_i|) \;\fallingdotseq\; \sum_i (\mathrm{div}_{p_i}\boldsymbol{v})|V_i|\Delta t$$

$$\therefore\; \frac{|V'| - |V|}{\Delta t} \;\fallingdotseq\; \sum_i (\mathrm{div}_{p_i}\boldsymbol{v})|V_i| \qquad \begin{pmatrix}\Delta t \to 0 \\ \Delta_V \to 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|V'| - |V|}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta_V \to 0} \sum_i (\mathrm{div}_{p_i}\,\boldsymbol{v})|V_i| \;=\; \int_V (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\,dV$$

(2) $\displaystyle\oint_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \boldsymbol{v}$ に沿う 流れにより ∂V を V の内側から外側に向かって通過する 流体 の (単位時間当りの) 符号付体積

○ $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \boldsymbol{v}$ に沿う 流れにより S を 裏側から表側に向かって通過する 流体 の (単位時間当りの) 符号付体積 $\displaystyle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta V|}{\Delta t}$

(3) ガウスの発散定理 $\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,dV \;=\; \oint_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$

(∵) (i) 次の記号を用いる : Δt : 微小時間

時刻 t から Δt の間に 領域 V が V' に移動したとする

$|\Delta V|$:= 時刻 t から Δt の間に ∂V を 表向きに通過する流体の 符号付き体積

(ii) $|V'| - |V|$ $\fallingdotseq$ Δt の間に (V から流れ出た体積) − (V に流れ込んだ体積)

$=$ Δt の間に (∂V を 外向きに通過した体積) − (∂V を 内向きに通過した体積)

$=$ $|\Delta V|$

(iii) $\displaystyle \frac{|V'| - |V|}{\Delta t} \;\fallingdotseq\; \frac{|\Delta V|}{\Delta t}$ $(\Delta t \to 0)$ $\qquad \displaystyle\therefore\; \int_V (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\,dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|V'| - |V|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta V|}{\Delta t} = \int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$

積分定理 から導かれる $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ 及び $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ に関する帰結

U : 開集合 $\boldsymbol{v} : U$ 上の ベクトル場 $\boldsymbol{p} \in U$

(1) ΔV : 点 $\boldsymbol{p}$ を含む 微小閉領域 $\Delta S := \partial(\Delta V)$: 境界面 に対して，次式が成り立つ．

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{|\Delta V|} \int_{\Delta S} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v}$$

(2) $\boldsymbol{n_p}$: 点 $\boldsymbol{p}$ を 始点とする 単位ベクトル

ΔS : 点 $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{n_p}$ を 正の単位法ベクトル として持つ 微小有向曲面

$\Delta C = \partial(\Delta S)$: 境界線 に対して 次式が成り立つ．

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{|\Delta S|} \int_{\Delta C} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \langle \operatorname{rot}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n_p} \rangle$$

○ $\displaystyle\frac{1}{|\Delta S|} \int_{\Delta C} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$: ΔS における単位面積当たり の 平均渦量

○ $\displaystyle\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{|\Delta S|} \int_{\Delta C} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$: $\boldsymbol{n_p}$ に直交する面における 単位面積 当たり の 平均渦量

○ $\boldsymbol{n_p}$ が $\operatorname{rot}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v}$ と同じ方向のとき，最大の値をとる．

(証明)

(1) Gauss の発散定理 及び 重積分に関する 平均値の定理 より

$$\int_{\Delta S} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, dV = (\operatorname{div}_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{v}) |\Delta V| \qquad (\boldsymbol{q} \text{ は } \Delta V \text{ 内の ある点})$$

$\Delta V \to 0$ のとき $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p}$ だから $\displaystyle\frac{1}{|\Delta V|} \int_{\Delta S} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \operatorname{div}_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{v} \longrightarrow \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v} \quad (\Delta V \to 0)$

(2) ストークスの定理 及び 重積分に関する 平均値の定理 より

$$\int_{\Delta C} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \int_{\Delta S} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = \int_{\Delta S} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle \, dS = \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle_{\boldsymbol{q}} \, |\Delta S| \qquad (\boldsymbol{q} \text{ は } \Delta S \text{ 内 の ある点})$$

$\Delta S \to 0$ のとき $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p}$ だから $\displaystyle\frac{1}{|\Delta S|} \int_{\Delta C} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle = \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle_{\boldsymbol{q}} \longrightarrow \langle \operatorname{rot}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n_p} \rangle \quad (\Delta S \to 0)$

§9.5. ガウスの発散定理 の応用

[1] ガウス積分 $\quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{x}}{r} : \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (r = \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2})$

$V \subset \mathbb{R}^3$: 有界閉領域 $\quad S = \partial V$: 有限個の 区分的に滑らかな閉曲面 の和 (向き : V の外側を表とする)

$$\Longrightarrow \int_S \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle = \begin{cases} 0 & (\mathbf{0} \notin V) \\ 4\pi & (\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\, V) \end{cases}$$

$(\because)$ $\quad \mathrm{div}\, \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = 0 \qquad \circ\ \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = -\mathrm{grad}\, \dfrac{1}{r} \qquad \mathrm{div}\, \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, \dfrac{1}{r} = -\Delta \dfrac{1}{r} = 0$

(1) $\mathbf{0} \notin V$ の場合 : $\quad V \subset \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上で ベクトル場 $\dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}$ にガウスの発散定理を適用して

$$\int_S \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle = \int_V \mathrm{div}\, \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\, dV = 0$$

(2) $\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\, V$ の場合 :

(i) V の内部に 原点中心, 半径 $\varrho\ (\ll 1)$ の球面 σ をとる. $\quad \sigma$ 上 $\quad \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varrho^3}, \quad \boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varrho}, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \varrho^2$

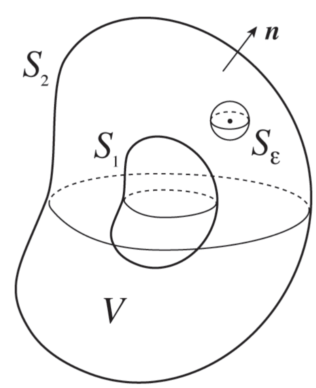
$$\therefore \int_\sigma \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle = \int_\sigma \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, \boldsymbol{n} \right\rangle dS = \int_\sigma \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{\varrho^3}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varrho} \right\rangle dS = \int_\sigma \frac{1}{\varrho^2}\, dS = \frac{1}{\varrho^2}|\sigma| = \frac{1}{\varrho^2} 4\pi\varrho^2 = 4\pi$$

(ii) σ と S に挟まれた領域 を V_0 とおく. $\quad V_0 \subset \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \quad \partial V_0 = S \cup (-\sigma)$

V_0 上で ベクトル場 $\dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}$ にガウスの発散定理を適用すると

$$0 = \int_{V_0} \mathrm{div}\, \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\, dV = \int_{S \cup (-\sigma)} \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle = \int_S \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle - \int_\sigma \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle$$

$$\therefore \int_S \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle = \int_\sigma \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle = 4\pi$$



[2] グリーンの定理　$f, g : U \to \mathbb{R} : C^2$ 級 関数　($U \subset \mathbb{R}^3$: 開集合)

$V \subset U$: 有界閉領域　$S = \partial V$: 有限個の 区分的に滑らかな 閉曲面 の和

$\boldsymbol{n}$: S の 外向きの 単位法ベクトル場　　$p \in S$

○ $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}, \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} : S \to \mathbb{R} : f, g$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の 方向微分係数　$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \langle \mathrm{grad}\, f, \boldsymbol{n} \rangle$　$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(p) = \boldsymbol{n}_p(f) = \langle\, \mathrm{grad}_p f, \boldsymbol{n}_p \rangle$

定理. (1) $$\int_S f\, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS \ = \ \int_V f\, \Delta g\, dV + \int_V \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g \rangle\, dV \qquad ((1)_{f,g})$$

(2) $$\int_S f\, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS \ = \ \int_V f\, \Delta f\, dV + \int_V \|\mathrm{grad}\, f\|^2\, dV \qquad ((2) = (1)_{f,f})$$

(3) $$\int_S \left(f\, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS \ = \ \int_V \big(f\, \Delta g - g\, \Delta f \big) dV \qquad ((3) = (1)_{f,g} - (1)_{g,f})$$

($\because$) (1) (a) $\mathrm{div}\,(f\boldsymbol{v}) = f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \langle \mathrm{grad}\, f, \boldsymbol{v} \rangle$　　$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\, g$ を代入して

$$\mathrm{div}\,(f \mathrm{grad}\, g) = f\, \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, g + \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g \rangle = f\, \Delta g + \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g \rangle$$

(b) $\langle f\, \mathrm{grad}\, g, \boldsymbol{n} \rangle = f\, \langle \mathrm{grad}\, g, \boldsymbol{n} \rangle = f\, \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}$　　on S

$$\therefore \ \int_V f\, \Delta g\, dV + \int_V \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g \rangle\, dV \ = \ \int_V \mathrm{div}\,(f \mathrm{grad}\, g)\, dV$$

$$= \ \int_S \langle f \mathrm{grad}\, g, d\boldsymbol{S} \rangle \ = \ \int_S \langle f \mathrm{grad}\, g, \boldsymbol{n} \rangle dS \ = \ \int_S f\, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS$$

系. $f, g : V$ の内部で 調和 ($\Delta f = \Delta g = 0$), $f|_S = g|_S \implies f|_V = g|_V$　　$f, g : U \longrightarrow \mathbb{R} : C^2$ 級

($\because$)　$h := f - g$:　$h : V$ の内部で 調和 (V 上 $\Delta h = 0$), $h|_S \equiv 0$

グリーンの定理 (2) より

$$\underbrace{\int_S h\, \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS}_{=0} \ = \ \underbrace{\int_V h\, \Delta h\, dV}_{=0} \ + \ \int_V \|\mathrm{grad}\, h\|^2\, dV \qquad \therefore \ \int_V \|\mathrm{grad}\, h\|^2\, dV = 0$$

V 上 $\|\mathrm{grad}\, h\|^2$: 連続, $\|\mathrm{grad}\, h\|^2 \geq 0$　$\therefore \ \|\mathrm{grad}\, h\| = 0$　$\therefore \ \mathrm{grad}\, h = \boldsymbol{0}$　$\therefore \ h|_V \equiv$ 一定

$h|_S \equiv 0$　　$\therefore \ h|_V \equiv 0$　　$\therefore \ f|_V = g|_V$

§9.6. 例題. (ガウス の 発散定理)

ガウス の 発散定理 を用いて, 次の面積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \qquad S : x^2+y^2+z^2=1$ (外側が表) $\qquad \boldsymbol{v}(x,y,z)=(ax,by,cz)$

(2) $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \qquad S=\partial V \qquad V=[-1,1]^3 \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z)=(y+z,z+x,x+y)$

(3) $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \qquad S=\partial V \qquad V : x^2+y^2\le a^2,\ \ 0\le z\le 1 \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z)=(x,y,z^2-1)$

(解答)　　○ 各問において $\boldsymbol{v}$ は $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場

(1) $S=\partial V \qquad V : x^2+y^2+z^2\le 1 \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=a+b+c$

$$\therefore\ \text{与式}=\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV=\int_V (a+b+c)\,dV=(a+b+c)|V|=\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$

(2) $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \qquad \therefore\ \text{与式}=\displaystyle\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV=0$

(3) $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=2+2z \qquad V=D\times[0,1] \qquad D : x^2+y^2\le a^2$

$$\therefore\ \text{与式}=\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV=\int_V (2+2z)\,dV \underset{\substack{\uparrow\\ \text{累次積分}\\ \text{変数分離}}}{=} \left(\iint_D dxdy\right)\left(\int_0^1 (2+2z)\,dz\right)=\pi a^2\Big[2z+z^2\Big]_0^1=3\pi a^2$$