応用幾何 ma・pa　レポート #1　解答例 (2023.12.22)

空間 $\mathbb{R}^3$ の座標は (x,y,z) または (x_1,x_2,x_3) で表す.

(1) (i) 空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ で張られる平行6面体の体積 V を求めよ. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

(ii) 写像 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(\cos(xy),\sin(yz),zx\big)$ に対して

微分行列 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 及び ヤコビ行列式 $\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|$ を求めよ.

(解答例)

(i) 行列 $A=\big(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\big)$ の 行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=-8$ $\quad\therefore\ V=\underbrace{\big||A|\big|}_{\text{絶対値}}=8$

(ii) $$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-y\sin(xy)&-x\sin(xy)&0\\0&z\cos(yz)&y\cos(yz)\\z&0&x\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|=\begin{vmatrix}-y\sin(xy)&-x\sin(xy)&0\\0&z\cos(yz)&y\cos(yz)\\z&0&x\end{vmatrix}=-\sin(xy)\cos(yz)\begin{vmatrix}y&x&0\\0&z&y\\z&0&x\end{vmatrix}=-2xyz\sin(xy)\cos(yz)$$

(2) 空間曲線 $C:\boldsymbol{x}(t)=(\cos t,\sin t,\log\cos t)\quad(t\in[0,\pi/4])$ について, 次の問に答えよ.

(i) 速度ベクトル $\boldsymbol{x}'(t)$ 及び 速度 $\|\boldsymbol{x}'(t)\|$ を求めよ.

(ii) 曲線 C の 点 $\boldsymbol{x}(\pi/6)$ における 接線 を求めよ.

(iii) 曲線 C の弧長 ℓ を求めよ.

(解答例)

(i) $\boldsymbol{x}'(t)=\big(-\sin t,\ \cos t,\ -\tan t\big)$

$$\|\boldsymbol{x}'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\tan^2 t}=\sqrt{1+\tan^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{1}{\cos t}$$

(ii) 求める接線は 点 $\boldsymbol{x}(\pi/6)$ を通り ベクトル $\boldsymbol{x}'(\pi/6)$ に平行な直線

$$\boldsymbol{x}(\pi/6)=(\cos\pi/6,\sin\pi/6,\log\cos\pi/6)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\log\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{x}'(\pi/6)=(-\sin\pi/6,\cos\pi/6,-\tan\pi/6)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad -2\sqrt{3}\,\boldsymbol{x}'(\pi/6)=(\sqrt{3},-3,2)$$

$\therefore$ 接線の方程式 は $\dfrac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{-3}=\dfrac{z-\log\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$ $\quad\therefore\ 2\sqrt{3}\,x-3=-2y+1=3z-3\log\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\|\boldsymbol{x}'(t)\|=\dfrac{1}{\cos t}=\dfrac{\cos t}{\cos^2 t}=\dfrac{\cos t}{1-\sin^2 t}\qquad s=\sin t\qquad ds=\cos t\,dt\qquad \sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\|\boldsymbol{x}'(t)\|dt=\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt=\frac{1}{1-s^2}\,ds=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right)ds$$

$$\ell = \int_0^{\pi/4} \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\Big)ds = \frac{1}{2}\Big[\log(1+s) - \log(1-s)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log\frac{1+s}{1-s}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(\sqrt{2}+1)$$

(3) $\mathbb{R}^3$ 上で スカラー場 $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$ を考える.

(i) 勾配 $\operatorname{grad} f$ 及び 外微分 df を求めよ.

(ii) 等位面 $S:\ f(x,y,z) = 2$ の 点 $\boldsymbol{p} = (1,1,1)$ における 単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ 及び 接平面 を求めよ.

(解答例)

(i) $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y, f_z) = (2x, -2y, 4z)$ $\qquad df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 2x\,dx - 2y\,dy + 4z\,dz$

(ii) $\operatorname{grad}_p f = (2,-2,4) = 2(1,-1,2)$ $\qquad \boldsymbol{v} = (1,-1,2)$ とおく.

(a) $\boldsymbol{v}$ は 点 $\boldsymbol{p}$ での S の 1つの法ベクトル $\quad \therefore\ \boldsymbol{n} = \pm\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$

(b) 接平面 : 点 $\boldsymbol{p}$ を通り $\boldsymbol{v}$ と直交するから 方程式 は

$$1(x-1) - 1(y-1) + 2(z-1) = 0 \qquad \therefore\ x - y + 2z - 2 = 0$$

(4) (i) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (\cos xy, ye^z, ze^x)$ に対して $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 及び $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(ii) $\mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上で 次の スカラー場 及び ベクトル場 を考える.

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \boldsymbol{r}(x,y,z) = (x,y,z)$$

(a) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$ を求めよ.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (2y, x, r(x,y,z))$ に対して $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 及び $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(iii) 平面 $\mathbb{R}^2$ において ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y) = (-y,x)$ を考える.

(a) $t=0$ において 点 $r(\cos\theta, \sin\theta)$ $(r \ge 0, \theta \in [0,2\pi))$ を通る $\boldsymbol{v}$ の 極大積分曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を求め, その軌道を平面上に描け.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿う流れの概形を描け.

(解答例)

(i) $$\operatorname{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos xy & ye^z & ze^x \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial ze^x}{\partial y} - \frac{\partial ye^z}{\partial z},\ \frac{\partial \cos xy}{\partial z} - \frac{\partial ze^x}{\partial x},\ \frac{\partial ye^z}{\partial x} - \frac{\partial \cos xy}{\partial y}\Big)$$

$$= (-ye^z,\ -ze^x,\ x\sin xy)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}\cos xy + \frac{\partial}{\partial y}ye^z + \frac{\partial}{\partial z}ze^x = -y\sin xy + e^z + e^x$$

(ii) $r_{x_i} = \dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = \dfrac{x_i}{r} \qquad (i=1,2,3)$

(a) $\Big(\dfrac{1}{r}\Big)_{x_i} = -\dfrac{1}{r^2}r_{x_i} = -\dfrac{x_i}{r^3} \qquad (i=1,2,3)$

$$\therefore\ \operatorname{grad}\frac{1}{r} = \Big(\Big(\frac{1}{r}\Big)_{x_i}\Big)_{i=1,2,3} = \Big(-\frac{x_1}{r^3}, -\frac{x_2}{r^3}, -\frac{x_3}{r^3}\Big) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

(b) rot $\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y & x & r \end{vmatrix} = (r_y, -r_x, -1) = \left(\frac{y}{r},\ -\frac{x}{r},\ -1\right)$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x} 2y + \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial z} r = \frac{z}{r}$$

(iii) (a) $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \boldsymbol{v}(x(t), y(t)) = (-y(t), x(t)) \qquad \therefore \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases}$

$\ddot{x}(t) = -\dot{y}(t) = -x(t) \qquad \therefore\ x(t) = r_0 \cos(t + t_0) \quad (r_0 \geq 0, t_0 \in [0, 2\pi))$

$\therefore\ y(t) = -\dot{x}(t) = -(-r_0 \sin(t + t_0)) = r_0 \sin(t + t_0)$

$(x(0), y(0)) = r_0(\cos t_0, \sin t_0) = r(\cos\theta, \sin\theta) \qquad \therefore\ r_0 = r,\ \ t_0 = \theta$

$\therefore\ (x(t), y(t)) = r(\cos(t + \theta),\ \sin(t + \theta))$

(b)