応用幾何 ma・pa　　演習 15　　解答例.　　(2024.01.23)

xyz 空間において 曲面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0)$ を考える.

(1) S の 空間極座標 (or 球面座標) による パラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta, \varphi) \ \ ((\theta, \varphi) \in D)$ を記せ.

(2) 次の量を記せ :　$\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}, \ \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi}, \quad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2, \quad dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| d\theta d\varphi$　(結果のみ記せ)

(3) パラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta, \varphi) \ \ ((\theta, \varphi) \in D)$ の下で,

S の 部分曲面 $S_+ = \{(x, y, z) \in S \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ に対応する D の 部分領域 D_+ を求めよ.

(4) 次の スカラー場 の 面積分 を求めよ.　$\displaystyle\int_S |x|\, dS$

(解答例)

(1) $\boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = a \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad ((\theta, \varphi) \in D) \qquad D = \{(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

(2) $\boldsymbol{r}_1(\theta, \varphi) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = a \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2(\theta, \varphi) = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = a \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{r}_1(\theta, \varphi) \times \boldsymbol{r}_2(\theta, \varphi) = a^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = (a^2 \sin\theta) \frac{1}{a} \boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = (a \sin\theta) \boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$$

$dS = a^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$

(3) $D_+ = \left\{(\theta, \varphi) \mid 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(4) $\displaystyle\int_S |x|\, dS = \iint_D |a \sin\theta\cos\varphi|\, a^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = a^3 \iint_D \sin^2\theta |\cos\varphi| \, d\theta d\varphi = a^3 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} |\cos\varphi| \, d\varphi$

$$= a^3 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 8a^3 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 2\pi a^3$$