応用幾何 ma・pa　　課題　#7　　解答例. (2023.11.17)

○ 以下の問において，偏微分の記号に関しては，$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$，$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$　等の 簡潔な記法を用いよ.

U を $\mathbb{R}^3$ の 開集合 とする.

(1) $f = f(x, y, z)$ を U 上の C^1 級 スカラー場，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ を U 上の C^1 級 ベクトル場 とする.
次の等式を証明せよ.　　$\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{v}) = f \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + (\mathrm{grad}\, f) \times \boldsymbol{v}$

(解答例)

(i) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \Big((v_3)_y - (v_2)_z, (v_1)_z - (v_3)_x, (v_2)_x - (v_1)_y\Big)$

(ii) $(\mathrm{grad}\, f) \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \Big(f_y v_3 - f_z v_2,\ f_z v_1 - f_x v_3,\ f_x v_2 - f_y v_1\Big)$

(iii) $f\boldsymbol{v} = (fv_1, fv_2, fv_3)$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{v}) &= \Big((fv_3)_y - (fv_2)_z, (fv_1)_z - (fv_3)_x, (fv_2)_x - (fv_1)_y\Big) \\ &= \Big(f(v_3)_y - f(v_2)_z, f(v_1)_z - f(v_3)_x, f(v_2)_x - f(v_1)_y\Big) \\ &\qquad + \Big(f_y v_3 - f_z v_2,\ f_z v_1 - f_x v_3,\ f_x v_2 - f_y v_1\Big) \\ &= f \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + (\mathrm{grad}\, f) \times \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

(2) f, g を U 上の C^2 級 スカラー場 とする.
次の等式を (公式を用いず) grad，div，Δ の定義のみを用いて証明せよ.

$\mathrm{div}\,(f\, \mathrm{grad}\, g) = (\mathrm{grad}\, f) \cdot (\mathrm{grad}\, g) + f\,\Delta g$

(解答例)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,(f\, \mathrm{grad}\, g) &= \mathrm{div}\, f(g_x, g_y, g_z) = \mathrm{div}(fg_x, fg_y, fg_z) = (fg_x)_x + (fg_y)_y + (fg_z)_z \\ &= (f_x g_x + f g_{xx}) + (f_y g_y + f g_{yy}) + (f_z g_z + f g_{zz}) \\ &= (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z) + f(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) \\ &= (f_x, f_y, f_z) \cdot (g_x, g_y, g_z) + f(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) \\ &= (\mathrm{grad}\, f) \cdot (\mathrm{grad}\, g) + f\,\Delta g \end{aligned}$$