応用幾何 ma・pa　課題 #8　解答例. (2023.11.21)

(1) スカラー場 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を考える.

(i) $\operatorname{grad} e^{2r}$, Δr を求めよ.

(ii) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (\cos r, \sin r, r)$ に対して $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ を求めよ.

(解答例)

(0) $r_x = \dfrac{x}{r}$, $r_y = \dfrac{y}{r}$, $r_z = \dfrac{z}{r}$

(i) (a) $\operatorname{grad} e^r = 2e^r \operatorname{grad} r = 2e^r (r_x, r_y, r_z) = 2e^r \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r} \right) = \dfrac{2e^r}{r}(x, y, z)$

(b) $r_{xx} = \dfrac{1}{r} - x\dfrac{r_x}{r^2} = \dfrac{r^2 - x^2}{r^3}$, $\quad r_{yy} = \dfrac{r^2 - y^2}{r^3}$, $\quad r_{zz} = \dfrac{r^2 - z^2}{r^3}$

$$\therefore \ \Delta r = r_{xx} + r_{yy} + r_{zz} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$$

(ii) (a)
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos r & \sin r & r \end{vmatrix} = \big(r_y - (\cos r) r_z,\ (-\sin r) r_z - r_x,\ (\cos r) r_x - (-\sin r) r_y \big)$$
$$= \frac{1}{r}\big(y - z\cos r,\ -z\sin r - x,\ x\cos r + y\sin r \big)$$

(b) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \partial_x \cos r + \partial_y \sin r + \partial_z r = (-\sin r) r_x + (\cos r) r_y + r_z = \dfrac{1}{r}\big(-x\sin r + y\cos r + z \big)$

(2) xy 平面上で ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y) = (-x, 2y)$ を考える.

(i) このベクトル場に沿う 極大流線 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ で, $t = 0$ で 点 $\boldsymbol{a} = (a, b)$ を通るものを求めよ.

(ii) (i) で求めた極大流線 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に関して, $(a, b) = (1, 1)$ の場合に パラメータ t を消去して, その軌跡の方程式を求めよ.

(iii) すべての 初期値 $\boldsymbol{a} = (a, b)$ に対して (i) で求めた極大流線 $\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡 C を求め, このベクトル場に沿う流れ の 概略図 を描け.

(流れの概略図 = 様々な点を通過する 流線の軌跡 を描き, 流れの全体の様子がわかるようにした図)

(解答例)

(i) 曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の 方程式 : $\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$

$$\therefore \ \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ 2y(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) & x(0) = a \\ \dot{y}(t) = \ 2y(t) & y(0) = b \end{cases} \qquad \therefore \ \begin{cases} x(t) = ae^{-t} \\ y(t) = be^{2t} \end{cases}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{2t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(ii) $(a, b) = (1, 1)$ のとき, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \therefore \ yx^2 = 1,\ x, y > 0 \qquad \therefore \ y = \dfrac{1}{x^2} \ \ (x > 0)$

(iii) $x(t)^2y(t) = a^2e^{-2t}be^{2t} = a^2b$ より 軌跡 C について 次の結論 を得る.

$a > 0$ のとき　$C : y = \dfrac{a^2b}{x^2}$ $(x > 0)$

$a < 0$ のとき　$C : y = \dfrac{a^2b}{x^2}$ $(x < 0)$

$a = 0$ のとき

$b > 0$ のとき　$C : x = 0,\ y > 0$

$b < 0$ のとき　$C : x = 0,\ y < 0$

$b = 0$ のとき　$C = \{\mathbf{0}\}$

これより，流れの概略図は 次のようになる.