応用幾何 ma・pa 演習 13 解答例. (2024.01.12)

次の ベクトル場 の 面積分 を求めよ.

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z) = (x,y,z) \qquad S: 関数\ f(x,y) \equiv x^2 + y^2\ \ ((x,y) \in D)\ の\ グラフ$$

$$D = [0,1] \times [0,1]$$

(解答例)

(1) S の 関数 $z = f(x,y)$ $((x,y) \in D)$ の グラフ としての 標準的なパラメータ表示

$\boldsymbol{x}(x,y) = (x, y, f(x,y)) = (x, y, x^2 + y^2)$ $((x,y) \in D)$ を考える.

このとき $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(-f_x, -f_y, 1) = {}^t(-2x, -2y, 1)$

(2) (i) $\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(x,y)), (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \rangle = {}^t(x, y, x^2+y^2) \cdot {}^t(-2x, -2y, 1) = -2x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2 = -(x^2+y^2)$

$$\begin{aligned}\therefore \int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle &= \iint_D \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(x,y)), (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \rangle \, dxdy = \iint_D -(x^2+y^2) \, dxdy \\ &= -\left(\int_0^1 x^2 \, dx \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \int_0^1 y^2 \, dy \right) = -\left(\frac{1}{3} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$