応用幾何 ma・pa　　演習 14　　解答例.　　(2024.01.19)

(1) 次の定理の「ベクトル場 に関する公式」及び 「微分形式 に関する公式」を記せ.

(定理における 仮定, 記号の説明 等の記入は不要.)

(i) ストークス の 定理　　$\displaystyle\int_S \langle \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \oint_{\partial S} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x}\rangle$　　$\displaystyle\int_S d\alpha = \oint_{\partial S} \alpha$

(ii) ガウス の 発散定理　　$\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,dV = \oint_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$　　$\displaystyle\int_V d\eta = \oint_{\partial V} \eta$

(2) 次の 面積分 を Gauss の 発散定理 を用いて 求めよ.

$$\int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle \qquad V = [0,1]^3 \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z) = (x^2, y, z^3)$$

(解答例)

$$\int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,dV = \int_V (2x+1+3z^2)\,dV = 2\int_V x\,dV + \int_V dV + 3\int_V z^2\,dV$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2} + 1 + 3\cdot\frac{1}{3} = 3$$

(i) $\displaystyle\int_V x\,dV = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$

(ii) $\displaystyle\int_V dV = |V| = 1$

(iii) $\displaystyle\int_V z^2\,dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z^2 dz = 1\cdot 1\cdot \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$