応用幾何 ma・pa　課題 #3　解答例.　(2023.10.13)

空間曲線 $C : \boldsymbol{x}(t) = (3t^2, 3t^2, 2t^3) \quad (t \in \mathbb{R})$ について, 次の問に答えよ.

(1) 速度ベクトル $\boldsymbol{x}'(t)$ 及び 速度 $\|\boldsymbol{x}'(t)\|$ を求めよ.

(解答例) $\boldsymbol{x}'(t) = (6t, 6t, 6t^2) = 6t(1, 1, t), \quad \|\boldsymbol{x}'(t)\| = 6|t|\,\|(1, 1, t)\| = 6|t|\sqrt{2+t^2}$

(2) 曲線 C の 点 $\boldsymbol{x}(2)$ における 接線 を求めよ.

(解答例) 求める接線は 点 $\boldsymbol{x}(2)$ を通り ベクトル $\boldsymbol{x}'(2)$ に平行な直線

$\boldsymbol{x}(2) = (12, 12, 16) \qquad \boldsymbol{x}'(2) = 12\,(1, 1, 2) \qquad \boldsymbol{x}'(2) \mathbin{//} (1, 1, 2)$

$\therefore$ 接線の方程式は $\dfrac{x-12}{1} = \dfrac{y-12}{1} = \dfrac{z-16}{2} \qquad \therefore\ x = y = \dfrac{z}{2} + 4$

(3) 曲線 C の $0 \le t \le 2$ に対応する部分の弧長 ℓ を求めよ.

(解答例)
$$\ell = \int_0^2 \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \int_0^2 6t\sqrt{2+t^2}\,dt = \int_0^2 3(2+t^2)^{\frac{1}{2}}\,(2+t^2)'\,dt = 2\Big[(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2$$
$$= 2\big(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\big) = 4\big(3\sqrt{6} - \sqrt{2}\big)$$

(4) 不定積分 $\displaystyle\int \boldsymbol{x}(t)\,dt$ 及び 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{x}(t)\,dt$ を求めよ.

(解答例)
$$\int \boldsymbol{x}(t)\,dt = \int (3t^2, 3t^2, 2t^3)\,dt = \Big(t^3,\ t^3\ \frac{1}{2}t^4\Big) + \boldsymbol{c} \qquad (\boldsymbol{c}：任意定ベクトル)$$
$$\int_0^1 \boldsymbol{x}(t)\,dt = \Big[\Big(t^3,\ t^3\ \frac{1}{2}t^4\Big)\Big]_0^1 = \Big(1, 1, \frac{1}{2}\Big)$$

(5) 点の運動 $\boldsymbol{x}(t) \ (0 \le t \le 1)$ において, 力の場 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (2y, z, x)$ が成す仕事
$$W = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle\,dt$$
を求めよ.

(解答例) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{F}(3t^2, 3t^2, 2t^3) = (3t^2, 2t^3, 3t^2)$
$$\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle = (6t^2, 2t^3, 3t^2) \cdot 6t(1, 1, t) = 6t(6t^2 + 2t^3 + 3t^3) = 6(6t^3 + 5t^4)$$
$$W = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t) \rangle\,dt = \int_0^1 6(6t^3 + 5t^4)\,dt = 6\Big[\frac{3}{2}t^4 + t^5\Big]_0^1 = 15$$