**応用幾何 ma・pa　課題 #14　解答例.** (2024.01.19)

(1) (課題 #13 の続き) $E = [0,1] \times [0,1]$ とおく．曲面 $S_1 : z = xy \quad ((x,y) \in E)$ を考える．

次の面積分を求めよ． $\displaystyle\int_{S_1} \eta \qquad \eta = xe^{y^2}\, dy \wedge dz + (y\cos x^2)\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$

(解答例)

(i) グラフとしての 標準的パラメータ表示 $\boldsymbol{x}(x,y) = (x, y, xy) \quad ((x,y) \in E)$ を考える．

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}\right) = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = {}^t(-y, -x, 1)$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\int_{S_0} \eta &= \int_{S_0} xe^{y^2}\, dy \wedge dz + (y\cos x^2)\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \\
&= \iint_E \left(xe^{y^2} \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} + (y\cos x^2) \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} + xy \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}\right) dxdy \\
&= \iint_E \left(xe^{y^2}(-y) + (y\cos x^2)(-x) + xy \cdot 1\right) dxdy \\
&= -\int_0^1 x\, dx \int_0^1 e^{y^2} y\, dy - \int_0^1 y\, dy \int_0^1 (\cos x^2)\, x\, dx + \int_0^1 x\, dx \int_0^1 y\, dy \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{y^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin x^2\right]_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(e-1) - \frac{1}{4}\sin 1 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}(2 - e - \sin 1)
\end{aligned}$$

[2] ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (a(x+z), b(y+x), c(z+y))$ ($a, b, c$ は定数) に対して,

(1) 回転 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$ 及び 発散 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$ を求めよ．

(2) 2 つの直方体 $U_1 = [-2,2]^3$ と $U_2 = [-1,1]^3$ を考える．

境界 $\partial U_1$ と $\partial U_2$ に挟まれた部分を $V$ とおく．境界 $\partial V$ の向きは $V$ から見て 外側 を表とする．

(i) $V$ を図示せよ．

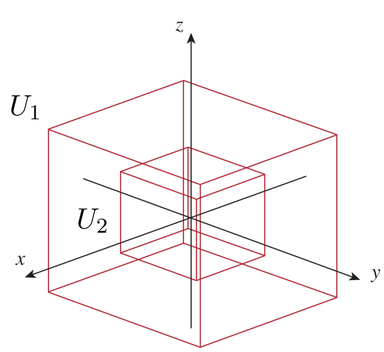
(ii) $V$ の 境界 $\partial V$ 上での 面積分 $\displaystyle\int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$ を求めよ．　(Hint: Gauss の発散定理を用いよ)

(解答例)

(1)
$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a(x+z) & b(y+x) & c(z+y) \end{vmatrix} = (c, a, b)$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_x a(x+z) + \partial_y b(y+x) + \partial_z c(z+y) = a + b + c$$

(2) (i)




(ii)
$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle &= \int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, dV = \int_V (a+b+c)\, dV \\
&= (a+b+c)|V| = (a+b+c)(|U_1| - |U_2|) \\
&= 56(a+b+c)
\end{aligned}$$