応用幾何 ma・pa　　課題　#9　　解答例. (2023.12.01)

(1) $\boldsymbol{v}$ を 空間の開集合 U 上の C^2 級ベクトル場 とする．次の等式が成り立つことを，∇ の定義から直接示せ．

$$(*)\qquad \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \Delta\boldsymbol{v}$$

(解答例)
$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \big((v_3)_y - (v_2)_z, (v_1)_z - (v_3)_x, (v_2)_x - (v_1)_y\big)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ (v_3)_y - (v_2)_z & (v_1)_z - (v_3)_x & (v_2)_x - (v_1)_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \big((v_2)_x - (v_1)_y\big)_y - \big((v_1)_z - (v_3)_x\big)_z \\ \big((v_3)_y - (v_2)_z\big)_z - \big((v_2)_x - (v_1)_y\big)_x \\ \big((v_1)_z - (v_3)_x\big)_x - \big((v_3)_y - (v_2)_z\big)_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big((v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z\big)_x - \big((v_1)_{xx} + (v_1)_{yy} + (v_1)_{zz}\big) \\ \big((v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z\big)_y - \big((v_2)_{xx} + (v_2)_{yy} + (v_2)_{zz}\big) \\ \big((v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z\big)_z - \big((v_3)_{xx} + (v_3)_{yy} + (v_3)_{zz}\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla\cdot\boldsymbol{v})_x \\ (\nabla\cdot\boldsymbol{v})_y \\ (\nabla\cdot\boldsymbol{v})_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \Delta\boldsymbol{v}$$

(2) 時間に依存する $\mathbb{R}^3$ の ベクトル場 $\mathbb{E}(x,y,z,t)$，$\mathbb{B}(x,y,z,t)$ が，次の 等式 (a) ∼ (d) を満たすとする．

$$\text{(a)}\ \nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t},\qquad \text{(b)}\ \nabla\times\mathbb{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t},\qquad \text{(c)}\ \nabla\cdot\mathbb{E} = 0,\qquad \text{(d)}\ \nabla\cdot\mathbb{B} = 0$$

このとき，次の等式が成り立つことを 問 (1) の公式 $(*)$ 及び 条件 (a) ∼ (d) を用いて示せ：

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2} = \Delta\mathbb{E}$$

(解答例)　公式 $(*)$ より　　$\Delta\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$　　$\boldsymbol{v} = \mathbb{E}$ として

$$\Delta\mathbb{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{E}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) \underset{\text{(c)}}{=} -\nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) \underset{\text{(a)}}{=} -\nabla\times\Big(-\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbb{B}) \underset{\text{(b)}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\varepsilon\mu\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}\Big) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2}$$

(3) 線形ベクトル場　$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$　(A：実 3 次 正方行列)　に関する 次の説明 において

$\boxed{}$ に 適当な 文章・式 を記入せよ．

(i) (a) A：実対称行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{{}^tA = A}$　　A：交代行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{{}^tA = -A}$

(b) A が 一般の 実 3 次 正方行列 の場合，A は 次の形に一意に分解される：

$A = S + T$　　(S：対称行列，T：交代行列)

上記の 行列 S, T は 次式で与えられる．　$S = \boxed{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}$, T $= \boxed{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}$.

(ii) A が 実対称行列 の場合

(a) A は ある $\boxed{\text{回転行列}}$ $P = \big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\big)$ により

$$P^{-1}AP = D \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$ の形に 対角化可能 であり，

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の $\boxed{\text{右手系 の 正規直交基底}}$ になる．

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の 極大流線 で 時刻 $t = 0$ で 点 $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3$ を通過するものは，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}) = e^{tA}\boldsymbol{a} = \boxed{c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{u}_3}$$

(c) したがって，このベクトル場に沿う流れ $\varphi_t(\boldsymbol{x}) = e^{tA}\boldsymbol{x}$ により，原点の周りの領域は，固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の 正負 に基いて，各 ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ 方向に $\boxed{\text{拡大・縮小}}$ する．

(iii) A が 交代行列 の場合

(a) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は 原点を通る ある直線 ℓ の周りの 角速度一定 の $\boxed{\text{回転運動}}$ の $\boxed{\text{速度ベクトル場}}$ となる．

(b) したがって，このベクトル場に沿う流れ $\varphi_t(\boldsymbol{x}) = e^{tA}\boldsymbol{x}$ により，原点の周りの領域は，直線 ℓ の周りを 一定の 角速度で $\boxed{\text{回転運動}}$ する．

(iv) A が 一般の 実 3 次 正方行列 の場合

(a) $A = S + T$　(S : 対称行列，T : 交代行列) と分解すると，e^{tA} は 次の形に 一次近似される．

$$e^{tA} \doteqdot \boxed{e^{tS}e^{tT}} \quad (|t| \ll 1)$$

(b) したがって，ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に沿う流れ $\varphi_t(\boldsymbol{x}) = e^{tA}\boldsymbol{x}$ は，原点の周りの微小領域 上で，微小時間 において，流れ $e^{tS}\boldsymbol{x}$ による $\boxed{\text{原点を中心とする伸縮}}$ と 流れ $e^{tT}\boldsymbol{x}$ による $\boxed{\text{原点を通る ある直線 の周りの回転}}$ の 合成 で近似される．