応用幾何 ma・pa　課題 #1　解答例. (2023.09.29)

(1) 次の 等式 を 外積の定義 及び 基本的性質 を用いて示せ.

(i) $\boldsymbol{b}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{21}\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_2 = c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2$ のとき $\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 = |C|\,(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)$

ただし，$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$,　$|C| = \det C$ (行列式)

(解答例)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 &= (c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{21}\boldsymbol{a}_2) \times (c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2) \\ &= c_{11}\boldsymbol{a}_1 \times (c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2) + c_{21}\boldsymbol{a}_2 \times (c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2) \\ &= c_{11}\boldsymbol{a}_1 \times c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{11}\boldsymbol{a}_1 \times c_{22}\boldsymbol{a}_2 + c_{21}\boldsymbol{a}_2 \times c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{21}\boldsymbol{a}_2 \times c_{22}\boldsymbol{a}_2 \\ &= c_{11}c_{12}(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1) + c_{11}c_{22}(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) + c_{21}c_{12}(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1) + c_{21}c_{22}(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_2) \\ &= c_{11}c_{22}(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) - c_{12}c_{21}(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = |C|\,(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)\end{aligned}$$

(ii) 任意の ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して　$\Omega\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$

ただし，$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$,　$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

(解答例)
$$\Omega\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ -\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix}$$
$$\parallel$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} \omega_3 & \omega_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix}$$

(2) 次のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，以下の問に答えよ.　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(ii) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で張られる 平行 6 面体 の体積 V を求めよ.

(解答例)

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $V = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = \big||\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|\big|$

$$\underset{\text{スカラー 3 重積}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = -3 \qquad \underset{\text{3 次 行列式}}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \therefore\ V = 3$$

(3) 空間の 3 点 $P(3,1,-1), Q(1,-1,-2), R(-1,2,1)$ を考える.

(i) 2 点 P, Q を通る直線 ℓ について，ℓ と平行なベクトルと ℓ の方程式を求めよ.

(ii) 3 点 P, Q, R を含む平面 π について，π と直交するベクトル と π の方程式を求めよ.

(解答例)

(i) ℓ と平行なベクトルの 1 つとして 次のベクトルが取れる :　$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

ℓ の方程式 :　$\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$　$\therefore\ x-3 = y-1 = 2z+2$

(ii) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

π の法ベクトルとして次のベクトルが取れる :　$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$

π の 方程式 :　$-3(x-3) + 8(y-1) - 10(z+1) = 0$　$\therefore\ 3x - 8y + 10z + 9 = 0$