応用幾何 ma・pa　　課題 #10　　解答例.　　(2023.12.08)

(1) (外微分)

(i) $\mathbb{R}^3$ 上の 関数 $f(x,y,z) = xy + y\cos z$ の 外微分 df を 求めよ.

(ii) $\mathbb{R}^3$ 上の 微分 1-形式 $\alpha = y\,dx + xyz\,dy + yz\,dz$ の 外微分 $d\alpha$ を 求めよ.

(iii) $\mathbb{R}^3$ 上の 微分 2-形式 $\eta = x^2 dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z^3\,dx\wedge dy$ の 外微分 $d\eta$ を 求めよ.

(解答例)

(i) $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = y\,dy + (x+\cos z)\,dy - (y\sin z)\,dz$

(ii) $$\begin{aligned} d\alpha &= (\partial_y(yz) - \partial_z(xyz))\,dy\wedge dz + (\partial_z y - \partial_x(yz))\,dz\wedge dx + (\partial_x(xyz) - \partial_y y)\,dx\wedge dy \\ &= (z - xy)\,dy\wedge dz + 0dz\wedge dx + (yz-1)\,dx\wedge dy \end{aligned}$$

(iii) $d\eta = (\partial_x x^2 + \partial_y y + \partial_z z^3)\,dx\wedge dy\wedge dz = (2x+1+3z^2)\,dx\wedge dy\wedge dz$

(2) 次の等式を 微分形式の外微分の定義 に基付いて示せ.

$d(df) = 0$　　ただし, f は 空間の開集合 U 上の C^2 級 関数 (微分 0 形式)

(解答例) $$\begin{aligned} d(df) &= d(f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) \\ &= (f_{zy} - f_{yz})dy\wedge dz + (f_{xz} - f_{zx})dz\wedge dx + (f_{yx} - f_{xy})dx\wedge dy \;=\; 0 \end{aligned}$$

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (y^2\sin z, 2xy\sin z, xy^2\cos z)$ を考える.

関数 $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}\, f = \boldsymbol{v}$ を満たすものを求めよ.

[補足] この問題は次と同値：

$\mathbb{R}^3$ 上の 微分 1 形式 $\alpha = (y^2\sin z)\,dx + (2xy\sin z)\,dy + (xy^2\cos z)\,dz$ を考える.

関数 $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ で $\alpha = df$ を満たすものを求めよ.

(解答例)

$\mathrm{grad}\, f = (f_x, f_y, f_z) = (y^2\sin z, 2xy\sin z, xy^2\cos z)$

$f_x = y^2\sin z$ より $f = xy^2\sin z + g(y,z)$ と書ける.

$f_y = 2xy\sin z + g_y(y,z) = 2xy\sin z$　$\therefore\; g_y = 0$　$\therefore\, g(y,z) = h(z)$ と書ける.

$f_z = xy^2\cos z + h'(z) = xy^2\cos z$　$\therefore\; h'(z) = 0$　$\therefore\; h(z) \equiv c$ (定数)

$\therefore\; f = xy^2\sin z + c$　(c：任意定数)