**応用幾何 ma・pa　　課題　#2　　解答例.** (2023.10.06)

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して，以下の問に答えよ．　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(i) 行列 $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の 行列式 $|A|$ を求めよ．

(ii) スカラー 3 重積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$ を求めよ．

(iii) $C$ は 実 3 次正方行列 で $|C| = -2$ とする．
ベクトル $C\boldsymbol{a}$, $C\boldsymbol{b}$, $C\boldsymbol{c}$ で張られる 平行 6 面体 の体積 $V$ を求めよ．

(解答例)

(i) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 - (1 - 2 - 2) = 9$

(ii) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \underbrace{\big|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}\big|}_{\text{行列式}} = -\big|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\big| = -9$

(iii) $\underbrace{\big|C\boldsymbol{a}, C\boldsymbol{b}, C\boldsymbol{c}\big|}_{\text{行列式}} = \big|C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\big| = |C|\big|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\big| = -2 \cdot 9 = -18$　　$\therefore\ V = \underbrace{\Big|\big|C\boldsymbol{a}, C\boldsymbol{b}, C\boldsymbol{c}\big|\Big|}_{\text{行列式 の 絶対値}} = 18$

(2) (i) 空間曲線 $\boldsymbol{x}(t) = (\cos t, \sin t^2, e^{-2t})$ に対して，
速度ベクトル $\boldsymbol{x}'(t)$，加速度ベクトル $\boldsymbol{x}''(t)$ を求めよ．

(ii) 1 変数 3 次 数ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = (\sin t, \sin t \cos t, e^{2t})$ に対して，次の 定積分 を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{x}(t)\, dt$　　(b) $\displaystyle 2\int_0^{\pi/2} \langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t) \rangle\, dt$　　(Hint：内積の微分を考えよ.)

(解答例)

(i) $\boldsymbol{x}'(t) = (-\sin t,\ 2t\cos t^2,\ -2e^{-2t})$,　$\boldsymbol{x}''(t) = (-\cos t,\ 2\cos t^2 - 4t^2 \sin t^2,\ 4e^{-2t})$

(ii) (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{x}(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t, \sin t \cos t, e^{2t})\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\sin t, \sin 2t, 2e^{2t})\, dt$

$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(-2\cos t, -\frac{1}{2}\cos 2t, e^{2t}\Big)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\big(2, 1, e^{\pi} - 1\big)$$

(b) $\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t) \rangle' = 2\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t) \rangle$

$$\therefore\ 2\int_0^{\pi/2} \langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t) \rangle\, dt = \int_0^{\pi/2} \langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t) \rangle'\, dt = \Big[\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t) \rangle\Big]_0^{\pi/2} = \langle \boldsymbol{x}(\pi/2), \boldsymbol{x}(\pi/2) \rangle - \langle \boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(0) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, e^{\pi}), (1, 0, e^{\pi}) \rangle - \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = (1 + e^{2\imath}) - 1 = e^{2\pi}$$

(3) (微分可能な) 1 変数 3 次ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ $(t \in (a, b))$ に対して，次の等式を示せ．

$$\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{y}(t)\big) = \Big(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\Big) \times \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t) \times \Big(\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t)\Big)$$

(解答例) ここでは，成分を用いた解答を記す．(微分の定義を直接適用することもできる.)

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ とおく．以下，変数 $t$ を省略する．

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})' = \begin{pmatrix} x_2'y_3 + x_2y_3' - x_3'y_2 - x_3y_2' \\ x_3'y_1 + x_3y_1' - x_1'y_3 - x_1y_3' \\ x_1'y_2 + x_1y_2' - x_2'y_1 - x_2y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2'y_3 - x_3'y_2 \\ x_3'y_1 - x_1'y_3 \\ x_1'y_2 - x_2'y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2y_3' - x_3y_2' \\ x_3y_1' - x_1y_3' \\ x_1y_2' - x_2y_1' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}'$$