応用幾何 ma・pa　演習 04　解答例.　　　　　　　　　　　　　　(2023.10.20)

(1) 次の関数を考える．$\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ \cos yz \\ \sin zx \end{pmatrix}$

　　(i) 微分行列 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}}$ を求めよ．　　　(ii) ヤコビアン $J_\Phi(\boldsymbol{x})$ を求めよ．

(解答例)

　　(i) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ 0 & -z\sin yz & -y\sin yz \\ z\cos zx & 0 & x\cos zx \end{pmatrix}$

　　(ii) $J_\Phi(\boldsymbol{x}) = \det \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{vmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ 0 & -z\sin yz & -y\sin yz \\ z\cos zx & 0 & x\cos zx \end{vmatrix} = e^{xy}(\sin yz)(\cos zx)\begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & -z & -y \\ z & 0 & x \end{vmatrix}$

　　　　$= e^{xy}(\sin yz)(\cos zx)(-xyz - xyz) = -2xyze^{xy}(\sin yz)(\cos zx)$

(2) 関数 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ に対して ∇f 及び Δf を求めよ．

　　(解答例) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z} \right) = (2xy^2 z^2,\ 2x^2 yz^2,\ 2x^2 y^2 z)$

　　　　$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y^2 z^2 + 2x^2 z^2 + 2x^2 y^2 = 2(y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2)$