応用幾何 ma・pa　課題 #5　解答例. (2023.10.27)

(1) a, b を 正の定数 とし, $c = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおく. 次の空間曲線を考える.

$$C : \mathbf{x}(s) = (a\cos cs,\ a\sin cs,\ bcs)$$

(i) $\mathbf{x}(s)$ が C の 弧長パラメータ表示 であることを示せ.

(ii) ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ を求めよ.　(iii) 曲率 $\kappa(s)$ 及び 捩率 $\tau(s)$ を求めよ.

(解答例)

(i) $\mathbf{x}'(s) = (-ac\sin cs,\ ac\cos cs,\ bc) = c(-a\sin cs,\ a\cos cs,\ b)$

$\therefore\ \|\mathbf{x}'(s)\| = |c|\sqrt{(-a\sin cs)^2 + (a\cos cs)^2 + b^2} = c\sqrt{a^2+b^2} = 1$

(ii) $\mathbf{x}'(s) = c\,(-a\sin cs,\ a\cos cs,\ b)$

$\mathbf{x}''(s) = -ac^2(\cos cs,\ \sin cs,\ 0)$　　$\|\mathbf{x}''(s)\| = ac^2$

$\therefore\ \boldsymbol{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = c\,(-a\sin cs,\ a\cos cs,\ b)$　　$\boldsymbol{n}(s) = \dfrac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|} = -(\cos cs,\ \sin cs,\ 0)$

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s) = -c\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -a\sin cs & a\cos cs & b \\ \cos cs & \sin cs & 0 \end{vmatrix} = c\,(b\sin cs,\ -b\cos cs,\ a)$$

(iii) $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\| = ac^2 = \dfrac{a}{a^2+b^2}$

$\boldsymbol{b}'(s) = c\,(bc\cos cs,\ bc\sin cs,\ 0) = -bc^2(-\cos cs,\ -\sin cs,\ 0) = -bc^2\,\boldsymbol{n}(s)$

$\therefore\ \tau(s) = bc^2 = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

(2) 次の各文章の $\boxed{(1)}$ ~ $\boxed{(5)}$ の中に適当な 式・用語 を記せ.

(i) $\mathbf{x}(s)$ を 曲線 C の 弧長パラメータ表示 とするとき, フルネ・セレーの公式 は 次式で与えられる.

$\boxed{(1)}$

(ii) 2 曲線 C_1, C_2 について　C_1 と C_2 が 向きを保つ合同変換 で写り合う $\iff$ $\boxed{(2)}$

(iii) 曲線 C について　(a) 曲率 $\kappa \equiv 0$ $\iff$ $\boxed{(3)}$　(b) 捩率 $\tau \equiv 0$ $\iff$ $\boxed{(4)}$

(iv) 曲率 κ, 捩率 τ が 共に ゼロでない定数関数 である 曲線 は $\boxed{(5)}$ である.

(解答例)

$$\boxed{(1)}\quad \begin{cases} \boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s) \end{cases}$$

$\boxed{(2)}$　C_1, C_2 が 同じ長さを持ち, C_1, C_2 が (各々の 適当な 弧長パラメータ表示 に関して) 同じ 曲率関数 $\kappa(s)$, 捩率関数 $\tau(s)$ を持つ

$\boxed{(3)}$　C が 直線 (の 一部)

$\boxed{(4)}$　C が ある平面に含まれる

$\boxed{(5)}$　螺線 (の一部)