

## 応用幾何 ma・pa 演習 07 解答例.

(2023.11.17)

(1) ベクトル場  $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (xy, \cos xz, \sin yz)$  に対して  $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$  及び  $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$  を求めよ.

(解答例)

$$(i) \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & \cos xz & \sin yz \end{vmatrix} = (z \cos yz + x \sin xz, 0, -z \sin xz - x)$$

$$(ii) \operatorname{div} \boldsymbol{v} = y + 0 + y \cos yz = y + y \cos yz$$

(2)  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{rot}$  及び  $\operatorname{div}$  に関する 次の公式 において  $\square$  に適当な式を記入せよ.

(解答例)

$$(i) (a) \operatorname{div}(f \boldsymbol{v}) = \boxed{(\operatorname{grad} f) \cdot \boldsymbol{v} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v}} \quad (b) \operatorname{rot}(f \boldsymbol{v}) = \boxed{(\operatorname{grad} f) \times \boldsymbol{v} + f(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})}$$

$$(ii) (a) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \boxed{0} \quad (b) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = \boxed{0}$$

$$(iii) (a) \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \boxed{\Delta f} \quad (b) \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = \boxed{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \Delta \boldsymbol{v}}$$

$$(iv) (a) \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boxed{\boldsymbol{w} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{w})}$$

$$(b) \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boxed{(\boldsymbol{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{w} + (\operatorname{div} \boldsymbol{w}) \boldsymbol{v} - (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \boldsymbol{w}}$$