応用幾何 ma・pa　演習 12　解答例. (2023.12.22)

空間曲面 $S : z = xy^2 \ \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ を考える.

(1) S の グラフとしての 標準的なパラメータ表示 を記せ.

(2) (1) のパラメータ表示に関する 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$, 外積 $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ 及び 面積素 dS を求めよ.

(3) S の点 $\boldsymbol{p} = (2, 1, 2)$ における 接平面 π を求めよ.

(解答例)

(1) $\boldsymbol{x}(x, y) = (x, y, xy^2) \ \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

(2) $\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} = {}^t(1, 0, y^2)$, $\boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} = {}^t(0, 1, 2xy)$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(1, 0, y^2) \times {}^t(0, 1, 2xy) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & y^2 \\ 0 & 1 & 2xy \end{vmatrix} = {}^t(-y^2, -2xy, 1)$$

$$dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\| \, dxdy = \sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1} \, dxdy$$

(3) 点 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}(2, 1)$ において $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(-1, -4, 1)$

接平面 π は 点 $\boldsymbol{p} = (2, 1, 2)$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = {}^t(-1, -4, 1)$ に直交する平面 だから,

その方程式は, 次で与えられる. $-1(x - 2) - 4(y - 1) + 1(z - 2) = 0$ $\quad \therefore \ x + 4y - z = 4$