1　目的

小球落下法により，高粘度の液体の粘性係数を求めること.

2　理論

算術平均の確率誤差

$$r_a = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{1}$$

$$[v^2] = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2 \tag{2}$$

$$Q = F(q_i, q_2, ...) \tag{3}$$

$Q :, q_1, q_2, \ldots$　の誤差をそれぞれ　$r : r_1, r_2, ...$　として，

$$r^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} r_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q_2} r_2\right)^2 + \ldots \tag{4}$$

q_i : 測定値, n : 測定回数, $\bar{q}$: 平均値

価値平均

確率誤差の違う測定値を平均する場合.
同一物理量を種々の方法で測定して，$X_i \pm E_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ を得た時，
その最確値 X_0 確率誤差 E_0 は次のようにして求められる.

誤差の分布は，$f(x) = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}} exp(-h^2 x^2)$ で表される．$h_i = \dfrac{1}{E_i}, x_i = X_0 - X_i$とすると

x_iの確率は，$f(x_i) = \dfrac{h_i}{\sqrt{\pi}} exp(-h_i^2 (X_0 - X_i)^2)$

したがって，これらの誤差が同時に起こる確率は，$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots f(x_n) = \dfrac{h_1 h_2 \ldots h_n}{\sqrt{\pi^n}} exp(-\sum_i^n h_i^2 (X_0 - X_i)^2)$.

これが最大となるには，$\sum_i^n h_i^2 (X_0 - X_i)^2$が最小となるので，

$$\frac{\partial \sum_i^n h_i^2 (X_0 - X_i)^2}{\partial X_0} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial (h_1^2 (X_0 - X_1)^2 + h_2^2 (X_0 - X_2)^2 + \cdots + h_n^2 (X_0 - X_n)^2)}{\partial X_0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2h_1^2 (X_0 - X_1) + 2h_2^2 (X_0 - X_2) + \cdots + 2h_n^2 (X_0 - X_n) = 0$$

$\Longleftrightarrow (h_1^2+h_2^2+\cdots+h_n^2)X_0-(h_1^2X_1+h_2^2X_2+\dots h_n^2X_n)=0$

$\therefore X_0=\dfrac{h_1^2X_1+h_2^2X_2+\dots h_n^2X_n}{h_1^2+h_2^2+\cdots+h_n^2}=\dfrac{\sum_i^n h_i^2X_i}{\sum_i^n h_i^2}$

$h_i=\dfrac{1}{E_i}$より，最確値 X_0は,

$$X_0=\frac{\sum_i^n\left(\dfrac{X_i}{E_i^2}\right)}{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)} \tag{5}$$

となる．

また，確率誤差 E_0は誤差伝播の法則を用いて

$E_0^2=\sum_i^n\left(\dfrac{\partial X_0}{\partial X_i}E_i\right)^2=\left(\dfrac{\partial X_0}{\partial X_1}E_1\right)^2+\left(\dfrac{\partial X_0}{\partial X_2}E_2\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{\partial X_0}{\partial X_n}E_n\right)^2$

$=\left(\dfrac{\left(\dfrac{1}{E_1^2}\right)}{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)}E_1\right)^2+\left(\dfrac{\left(\dfrac{1}{E_2^2}\right)}{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)}E_2\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{\left(\dfrac{1}{E_n^2}\right)}{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)}E_n\right)^2$

$=\dfrac{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)}{\left(\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)\right)^2}=\dfrac{1}{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)}$

したがって，確率誤差 E_0 は,

$$E_0=\pm\sqrt{\frac{1}{\sum_i^n\left(\dfrac{1}{E_i^2}\right)}} \tag{6}$$

粘性係数の導出

粘性係数η，密度ρなる液体中を半径 r，密度σなる球が速度νで運動する場合,

球の受ける粘性抵抗力 (上向き)f は **stokes** の式に従い，r,η,νに比例する．

即ち，$f=6\pi r\eta\nu$となる．今，液体中を球が重力によって落下するときの力 (下向き)f'は,

浮力を考慮すれば $f'=\dfrac{4}{3}\pi r^3(\sigma-\rho)g(g:$ 重力加速度$)$ となり，球が終速度で落下している時は

これらの 2 力は釣り合っている．即ち $6\pi r\eta\nu=\dfrac{4}{3}\pi r^3(\sigma-\rho)g$ となる．

したがって粘性係数ηは,

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{r^2(\sigma - \rho)}{\nu} \qquad \left[\frac{g}{cm \cdot sec}\right] \tag{7}$$

なお，正確に粘性係数を求めるためには，管壁および管端による補正を入れるべきで，管の半径を R,測定距離を H とすれば，補正後の粘性係数η'の式は以下となる．

$$\eta' = \frac{2}{9} g \frac{r^2(\sigma - \rho)}{\nu \left(1 + 2.4\frac{r}{R}\right)\left(1 + 3.3\frac{r}{H}\right)} \approx \frac{2}{9} g \frac{r^2(\sigma - \rho)}{\nu} \left(1 - 2.4\frac{r}{R} - 3.3\frac{r}{H}\right) \qquad \left[\frac{g}{cm \cdot sec}\right] \tag{8}$$

3 実験方法

1. 小球 5 個の各々の直径 D=2r を 5 回ずつシックスネスゲージで測定し，小球を区別するために番号付けをする．例えば $\mathbf{D_1 \ldots D_5}$ とする．ゲージは目分量を含むと **0.000mm** まで読める．外側の目盛板の長針が一周すると **1.000mm** となり内側の目盛板の短針が「1」を指す．例えば小球の直径 D が約 1mm の場合，零点は $\mathbf{0.{*}{*}{*}\,mm}$ となり小球を挟むと $\mathbf{1.{*}{*}{*}\,mm}$ となり，小球の直径 $\mathbf{D = 1.{*}{*}{*}\,mm - 0.{*}{*}{*}\,mm}$ となる．必ず内側の目盛板の数値を忘れずに読む．
2. 小球をピンセットで挟み，メスシリンダ内の液体試料の液面近くで放ち液中を落下させる．小球が一定速度を得る 160ml の目盛り線から 40ml の目盛り線を通過する時間をストップウォッチで測定する．
3. この小球をネットスプーンですくい上げて同じ測定を 1 つの小球に対して 5 度行う．
4. 2. と 3. を 5 個の小球につき順次行う．これは半径の異なる小球の落下速度 v が異なるためである．
5. 時間測定を行った目盛り線の間の距離をノギスで 5 回測定して，各小球の落下速度 $\nu_1 \ldots \nu_5$ を算出する．
6. 液体試料に直接 **hydrometer** を挿入して液体試料の密度 ρ を求める．この時 **hydrometer** と管壁との摩擦の影響を除くために **hydrometer** を静かに放ち液中を沈下して静止した時の液面の数値を読み，その静止した位置から僅かに **hydrometer** を押し沈めて浮上して静止した時の液面の数値とを平均する．これを 5 セット行う．
7. 測定した小球 5 個をなくさないように濾紙で拭き，5 個まとめた質量 M を電子天秤で 5 回測定する．
8. 半径から 5 個の小球の全体積 $V = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3 + r_5^3)$ を求めて，これで 7. で求めた全質量 M を割ると小球の平均密度 $\sigma = \frac{M}{V}$ が求まる．
9. 以上の測定より，液体試料の測定中の液温における粘性係数 η は式 (1) で求められる．忘れずにアルコール棒温度計で液温を測定しておくこと．
10. 各小球ごとに粘性係数 η(最確値と確率誤差) を求めて，5 つの粘性係数の η を価値平均を使って 1 つの粘性係数 η にする．

※ 小球は測定中紛失しないように細心の注意を払う．

4　データ処理・結果

表 1　$r_1(D_1)$ の測定値

n	Zero 点 Z[mm]	直径 D_1[mm]	半径 $r_1 = (D_1 - Z)/2$[mm]	v_{r_1}[mm]	$v_{r_1}^2 \times 10^4$ $[mm^2]$
1	0.001	1.153	0.5760	0.0026	0.067600
2	-0.001	1.162	0.5815	0.0081	0.656100
3	-0.001	1.150	0.5755	0.0021	0.044100
4	0.009	1.151	0.5710	-0.0024	0.057600
5	0.006	1.132	0.5630	-0.0104	1.081600
sum			2.8670	0.0000	1.9070000
ave			0.5734		

したがって，r_1の最確値は $r_1 = 0.5734[mm] = 0.05734[cm]$.

確率誤差 r_{r_1}は，理論 (1) より，$r_{r_1} = \pm 0.6745\sqrt{\dfrac{1.907000 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.002083[mm] = \pm 0.0002083[cm]$.

表 2　$r_2(D_2)$ の測定値

n	Zero 点 Z[mm]	直径 D_2[mm]	半径 $r_2 = (D_2 - Z)/2$[mm]	v_{r_2}[mm]	$v_{r_2}^2 \times 10^4$ $[mm^2]$
1	0.000	1.379	0.6895	-0.0205	4.202500
2	-0.001	1.399	0.7000	-0.0100	1.000000
3	0.001	1.471	0.7350	0.0250	6.250000
4	-0.001	1.472	0.7365	0.0265	7.022500
5	0.000	1.378	0.6890	-0.0210	4.410000
sum			3.5500	0.0000	22.885000
ave			0.7100		

したがって，r_2の最確値は $r_2 = 0.7100[mm] = 0.07100[cm]$.

確率誤差 r_{r_2}は，理論 (1) より，$r_{r_2} = \pm 0.6745\sqrt{\dfrac{22.88500 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.007215[mm] = \pm 0.0007215[cm]$.

表 3　$r_3(D_3)$ の測定値

n	Zero 点 Z[mm]	直径 D_3[mm]	半径 $r_3 = (D_3 - Z)/2$[mm]	v_{r_3}[mm]	$v_{r_3}^2 \times 10^4$ $[mm^2]$
1	0.000	1.097	0.549	0.0005	0.002500
2	-0.001	1.091	0.546	-0.0020	0.040000
3	0.003	1.094	0.546	-0.0025	0.062500
4	-0.001	1.100	0.551	0.0025	0.062500
5	-0.001	1.098	0.550	0.0015	0.022500
sum			2.7400	0.0000	0.190000
ave			0.5480		

したがって，r_3の最確値は $r_3 = 0.5480[mm] = 0.05480[cm]$.

確率誤差 r_{r_3}は，理論 (1) より，$r_{r_3} = \pm 0.6745\sqrt{\dfrac{0.190000 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.000657[mm] = \pm 0.0000657[cm]$.

表 4　$r_4(D_4)$ の測定値

n	Zero 点 Z[mm]	直径 D_4[mm]	半径 $r_4 = (D_4 - Z)/2$[mm]	v_{r_4}[mm]	$v_{r_4}^2 \times 10^4$ $[mm^2]$
1	0.001	1.159	0.5790	0.0021	0.044100
2	-0.001	1.142	0.5715	-0.0054	0.291600
3	-0.001	1.154	0.5775	0.0006	0.003600
4	0.000	1.152	0.5760	-0.0009	0.008100
5	-0.001	1.160	0.5805	0.0036	0.129600
sum			2.8845	0.0000	0.477000
ave			0.5769		

したがって，r_4の最確値は $r_4 = 0.5769[mm] = 0.05769[cm]$.

確率誤差 r_{r_4}は，理論 (1) より，$r_{r_4} = \pm 0.6745\sqrt{\dfrac{0.477000 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.001042[mm] = \pm 0.0001042[cm]$.

表 5　$r_5(D_5)$ の測定値

n	Zero 点 Z[mm]	直径 D_5[mm]	半径 $r_5 = (D_5 - Z)/2$[mm]	v_{r_5}[mm]	$v_{r_5}^2 \times 10^4$ $[mm^2]$
1	0.000	1.184	0.5920	0.0049	0.240100
2	0.000	1.171	0.5855	-0.0016	0.025600
3	0.000	1.170	0.5850	-0.0021	0.044100
4	0.000	1.183	0.5915	0.0044	0.193600
5	0.003	1.166	0.5815	-0.0056	0.313600
sum			2.9355	0.0000	0.817000
ave			0.5871		

したがって，r_5の最確値は $r_5 = 0.5871[mm] = 0.05871[cm]$.

確率誤差 r_{r_5}は，理論 (1) より，$r_{r_5} = \pm 0.6745\sqrt{\dfrac{0.817000 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.001363[mm] = \pm 0.0001363[cm]$.

表 6　$t_1 \sim t_5$ の測定値

n	$t_1[sec]$	$t_2[sec]$	$t_3[sec]$	$t_4[sec]$	$t_5[sec]$
1	14.44	9.56	15.77	14.38	13.70
2	14.47	9.53	15.80	14.67	13.60
3	14.34	9.59	15.59	14.12	13.90
4	14.39	9.50	15.70	14.22	13.69
5	14.11	9.60	15.70	14.26	13.65
sum	71.75	47.78	78.56	71.65	68.54
ave	14.35	9.56	15.71	14.33	13.71

したがって $t_1 \sim t_5$の最確値は,

$t_1 = 14.35[sec]$.

$t_2 = 9.56[sec]$.

$t_3 = 15.71[sec]$.

$t_4 = 14.33[sec]$.

$t_5 = 13.71[sec]$.

表 7　t_1〜t_5 の残差

n	$v_{t_1}[sec]$	$v_{t_2}[sec]$	$v_{t_3}[sec]$	$v_{t_4}[sec]$	$v_{t_5}[sec]$
1	0.090	0.004	0.058	0.050	-0.008
2	0.120	-0.026	0.088	0.340	-0.108
3	-0.010	0.034	-0.122	-0.210	0.192
4	0.040	-0.056	-0.012	-0.110	-0.018
5	-0.240	0.044	-0.012	-0.070	-0.058
sum	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 8　t_1〜t_5 の残差の 2 乗

n	$v_{t_1}^2[sec^2]$	$v_{t_2}^2[sec^2]$	$v_{t_3}^2[sec^2]$	$v_{t_4}^2[sec^2]$	$v_{t_5}^2[sec^2]$
1	81.000	0.160	33.640	25.000	0.640
2	144.000	6.760	77.440	1156.000	116.640
3	1.000	11.560	148.840	441.000	368.640
4	16.000	31.360	1.440	121.000	3.240
5	576.000	19.360	1.440	49.000	33.640
sum	818.000	69.20	262.80	1767.00	522.80

確率誤差 r_{t_1}〜r_{t_5}は，理論 (1) より，

$$r_{t_1} = \pm 0.6745\sqrt{\frac{818.000 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.0431[sec].$$

$$r_{t_2} = \pm 0.6745\sqrt{\frac{69.20 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.0125[sec].$$

$$r_{t_3} = \pm 0.6745\sqrt{\frac{262.80 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.0245[sec].$$

$$r_{t_4} = \pm 0.6745\sqrt{\frac{1767.00 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.0634[sec].$$

$$r_{t_5} = \pm 0.6745\sqrt{\frac{522.80 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.0345[sec].$$

表 9　距離 H の測定値

n	H[mm]	$v_H[mm]$	$v_H^2[mm^2]$
1	112.60	-0.240	576.000000
2	112.75	-0.090	81.000000
3	112.75	-0.090	81.000000
4	113.10	0.260	676.000000
5	113.00	0.160	256.000000
sum	564.20	0.000	1670.000000
ave	112.84		

したがって，H の最確値は $H = 112.84[mm] = 11.284[cm]$.

確率誤差 r_Hは，理論 (1) より，$r_H = \pm 0.6745\sqrt{\frac{1670.000000 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.061635[mm] = \pm 0.0061635[cm]$.

表 10　小球 5 個の質量 M の測定値

n	M[g]	$v_M[g]$	$v_M^2[g^2]$
1	0.01328	-0.00022	0.048400
2	0.01343	-0.00007	0.004900
3	0.01350	0.00000	0.000000
4	0.01361	0.00011	0.012100
5	0.01368	0.00018	0.032400
sum	0.06750	0.05400	0.097800
ave	0.01350		

したがって，M の最確値は $M = 0.01350[g]$.

確率誤差 r_Mは，理論 (1) より，$r_M = \pm 0.6745\sqrt{\frac{0.097800 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.00004717[g]$.

表 11　液体の密度 ρ の測定値

n	浮上時$\rho_1[g/cm^3]$	沈下時$\rho_2[g/cm^3]$	$\rho((\rho_1 + \rho_2)/2)[g/cm^3]$	$v_\rho[g/cm^3]$	$v_\rho^2[g^2/cm^6]$
1	0.8770	0.8761	0.8766	0.0002	0.000625
2	0.8769	0.8760	0.8765	0.0001	0.000225
3	0.8769	0.8760	0.8765	0.0001	0.000225
4	0.8768	0.8758	0.8763	0.0000	0.000000
5	0.8760	0.8755	0.8758	-0.0005	0.003025
sum			4.3815	0.0000	0.004100
ave			0.8763		

したがって，ρの最確値は $M = 0.8763[g/cm^3]$.

確率誤差 r_ρは，理論 (1) より，$r_\rho = \pm 0.6745\sqrt{\frac{0.004100 \times 10^{-4}}{5 \times 4}} = \pm 0.00009657370307[g/cm^3]$.

物体の密度

まず，体積 V を求める．$V = \dfrac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3 + r_5^3)$ より，

V の最確値は $V = \dfrac{4}{3}\pi(0.05734^3 + 0.07100^3 + 0.05480^3 + 0.05769^3 + 0.05871^3) = 0.004630158874[cm^3]$.

確率誤差 r_V は, $\dfrac{\partial V}{\partial r_i} = 4\pi r_i^2$ より，

$r_V^2 = \sum_{n=1}^{5}(\dfrac{\partial V}{\partial r_i}r_{r_i})^2 = 16\pi^2\sum_{n=1}^{5}(r_i^2 r_{r_i})^2$

$= 16\pi^2((0.000006847904261)^2 + (0.00003637132411)^2 + (0.000001974262396)^2 + (0.000003466787513)^2 + (0.000004698964297)^2)$

$= 0.0000002223047422[cm^6]$

$\therefore r_V = \pm 0.0004714920383[cm^3]$.

物体の密度σを求める．$\sigma = \dfrac{M}{V}$ より，

最確値σは$\sigma = \dfrac{0.01350}{0.004630158874} = 2.91566669[g/cm^3]$.

確率誤差 r_σ は, $\dfrac{\partial \sigma}{\partial M} = \dfrac{1}{V}, \dfrac{\partial \sigma}{\partial V} = -\dfrac{M}{V^2} = -\dfrac{\sigma}{V}$ より，

$r_\sigma^2 = (\dfrac{\partial \sigma}{\partial M}r_M)^2 + (\dfrac{\partial \sigma}{\partial V}r_V)^2 = (0.01018686358)^2 + (0.2969042031)^2 = 0.08825587802[g^2/cm^6]$

$\therefore r_\sigma = \pm 0.2970789087[g/cm^3]$.

落下速度

各小球の落下速度ν_1〜ν_5の最確値および確率誤差を求める．

$\nu = \dfrac{H}{t}$ より, $\dfrac{\partial \nu}{\partial H} = \dfrac{1}{t}, \dfrac{\partial \nu}{\partial t} = -\dfrac{H}{t^2} = -\dfrac{\nu}{t}$. これを用いて, ν_1〜ν_5の最確値および確率誤差を求める．

$\nu_1 = \dfrac{H}{t_1} = \dfrac{11.2840}{14.35} = 0.7863414634[cm/sec]$.

$\nu_2 = \dfrac{H}{t_2} = \dfrac{11.2840}{9.56} = 1.180828799[cm/sec]$.

$\nu_3 = \dfrac{H}{t_3} = \dfrac{11.2840}{15.71} = 0.7181771894[cm/sec]$.

$\nu_4 = \dfrac{H}{t_4} = \dfrac{11.2840}{14.33} = 0.7874389393[cm/sec]$.

$\nu_5 = \dfrac{H}{t_5} = \dfrac{11.2840}{13.71} = 0.8231689524[cm/sec]$.

$r_{\nu_1}^2 = (\dfrac{\partial \nu_1}{\partial H}r_H)^2 + (\dfrac{\partial \nu_1}{\partial t_1}r_{t_1})^2 = (0.004295100109)^2 + (0.002363757301)^2 = 0.00002403523352[(cm/sec)^2]$.

$\therefore r_{\nu_1} = 0.004902574173[cm/sec].$

$$r_{\nu_2}^2 = (\frac{\partial \nu_2}{\partial H} r_H)^2 + (\frac{\partial \nu_2}{\partial t_2} r_{t_2})^2 = (0.006449841624)^2 + (0.001550353731)^2 = 0.00004400405367[(cm/sec)^2].$$

$\therefore r_{\nu_2} = 0.00663355513[cm/sec].$

$$r_{\nu_3}^2 = (\frac{\partial \nu_3}{\partial H} r_H)^2 + (\frac{\partial \nu_3}{\partial t_3} r_{t_3})^2 = (0.003922777913)^2 + (0.001117582965)^2 = 0.00001663717823[(cm/sec)^2].$$

$\therefore r_{\nu_3} = 0.004078869725[cm/sec].$

$$r_{\nu_4}^2 = (\frac{\partial \nu_4}{\partial H} r_H)^2 + (\frac{\partial \nu_4}{\partial t_4} r_{t_4})^2 = (0.004301094666)^2 + (0.003483821761)^2 = 0.00003063642939[(cm/sec)^2].$$

$\therefore r_{\nu_4} = 0.005535018463[cm/sec].$

$$r_{\nu_5}^2 = (\frac{\partial \nu_5}{\partial H} r_H)^2 + (\frac{\partial \nu_5}{\partial t_5} r_{t_5})^2 = (0.004496256679)^2 + (0.002070854717)^2 = 0.00002450476339[(cm/sec)^2].$$

$\therefore r_{\nu_5} = 0.00495022862[cm/sec].$

粘性係数

上記のν_1〜ν_5に対して，それぞれ粘性係数η_1〜η_5の最確値および確率誤差を求める．

理論 (7) より，

$$\eta_1 = \frac{r_1^2(\sigma - \rho)}{\nu_1} = 1.856451736[g/(cm \cdot sec)].$$

$$\eta_2 = \frac{r_2^2(\sigma - \rho)}{\nu_2} = 1.895436429[g/(cm \cdot sec)].$$

$$\eta_3 = \frac{r_3^2(\sigma - \rho)}{\nu_3} = 1.856559927[g/(cm \cdot sec)].$$

$$\eta_4 = \frac{r_4^2(\sigma - \rho)}{\nu_4} = 1.876565177[g/(cm \cdot sec)].$$

$$\eta_5 = \frac{r_5^2(\sigma - \rho)}{\nu_5} = 1.859150900[g/(cm \cdot sec)].$$

また，$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{4}{9} g \frac{r(\sigma - \rho)}{\nu}, \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = -\frac{2}{9} g \frac{r^2(\sigma - \rho)}{\nu^2}, \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = \frac{2}{9} g \frac{r^2}{\nu}, \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\frac{2}{9} g \frac{r^2}{\nu}$ より，

$$r_{\eta_1}^2 = (\frac{\partial \eta_1}{\partial r_1} r_{r_1})^2 + (\frac{\partial \eta_1}{\partial \nu_1} r_{\nu_1})^2 + (\frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} r_\sigma)^2 + (\frac{\partial \eta_1}{\partial \rho} r_\rho)^2$$

$$= (0.1348646944)^2 + (0.0115743513)^2 + (0.270433296)^2 + (0.00008791181085)^2$$

$$= 0.09145662674[(g/(cm \cdot sec))^2].$$

$\therefore r_{\eta_1} = 0.302417967[g/(cm \cdot sec)].$

$$r_{\eta_2}^2 = (\frac{\partial \eta_2}{\partial r_2} r_{r_2})^2 + (\frac{\partial \eta_2}{\partial \nu_2} r_{\nu_2})^2 + (\frac{\partial \eta_2}{\partial \sigma} r_\sigma)^2 + (\frac{\partial \eta_2}{\partial \rho} r_\rho)^2$$

$$= (0.3852328243)^2 + (0.0106480144)^2 + (0.2761122796)^2 + (0.00008975792129)^2$$

$$= 0.2247557081[(g/(cm \cdot sec))^2].$$

$$\therefore r_{\eta_2} = 0.4740840729[g/(cm \cdot sec)].$$

$$r_{\eta_3}^2 = (\frac{\partial \eta_3}{\partial r_3} r_{r_3})^2 + (\frac{\partial \eta_3}{\partial \nu_3} r_{\nu_3})^2 + (\frac{\partial \eta_3}{\partial \sigma} r_\sigma)^2 + (\frac{\partial \eta_3}{\partial \rho} r_\rho)^2$$

$$= (0.04454532849)^2 + (0.01054428655)^2 + (0.2704490564)^2 + (0.00008791693418)^2$$

$$= 0.07523816809[(g/(cm \cdot sec))^2].$$

$$\therefore r_{\eta_3} = 0.2742957675[g/(cm \cdot sec)].$$

$$r_{\eta_4}^2 = (\frac{\partial \eta_4}{\partial r_4} r_{r_4})^2 + (\frac{\partial \eta_4}{\partial \nu_4} r_{\nu_4})^2 + (\frac{\partial \eta_4}{\partial \sigma} r_\sigma)^2 + (\frac{\partial \eta_4}{\partial \rho} r_\rho)^2$$

$$= (0.0677671553)^2 + (0.01319063915)^2 + (0.273363264)^2 + (0.00008886427785)^2$$

$$= 0.07949386231[(g/(cm \cdot sec))^2].$$

$$\therefore r_{\eta_4} = 0.2819465593[g/(cm \cdot sec)].$$

$$r_{\eta_5}^2 = (\frac{\partial \eta_5}{\partial r_5} r_{r_5})^2 + (\frac{\partial \eta_5}{\partial \nu_5} r_{\nu_5})^2 + (\frac{\partial \eta_5}{\partial \sigma} r_\sigma)^2 + (\frac{\partial \eta_5}{\partial \rho} r_\rho)^2$$

$$= (0.08633970111)^2 + (0.01118023459)^2 + (0.270826489)^2 + (0.00008803962908)^2$$

$$= 0.08092653653[(g/(cm \cdot sec))^2].$$

$$\therefore r_{\eta_5} = 0.284475898[g/(cm \cdot sec)].$$

η_1〜η_5の最確値および確率誤差をまとめた表が以下である.

表 12　液体の密度 ρ の測定値

n	η_i $[g/cm \cdot sec]$	r_{η_i} $[g/cm \cdot sec]$	$\omega_i = 1/r_{\eta_i}^2$ $[(g/cm \cdot sec)^{-2}]$	$\omega_i \eta_i$ $[(g/cm \cdot sec)^{-1}]$
1	1.856451736	0.302417967	10.9341448	20.2987121
2	1.895436429	0.4740840729	4.449275208	8.433318311
3	1.856559927	0.2742957675	13.29112637	24.6757726
4	1.876565177	0.2819465593	12.57958754	23.60641593
5	1.859150900	0.284475898	12.35688617	22.97331604
sum	9.344164169	1.6172	53.61102009	99.98753498

表 12 より, ηの価値平均をとる.

$$\eta = \frac{\sum \omega_i \eta_i}{\sum \omega_i} = \frac{99.98753498}{53.61102009} = 1.865055632[g/cm \cdot sec].$$

$$r_\eta = \pm\sqrt{\frac{1}{\sum \omega_i}} = \pm\sqrt{\frac{1}{53.61102009}} = \pm 0.136575552[g/cm \cdot sec].$$

$$\eta = 1.865055632 \pm 0.136575552 = 1.865 \pm 0.137[g/cm \cdot sec].$$

5　考察

表 12 のη_1〜η_5の最確値に着目すると, η_2とη_4が他に比べ大きかったが, η_2に関しては確率誤差も他に比べ大きかったため，価値平均にはあまり大きな影響がなかった．一方で, η_4は重みが他と度程度であったため，平均に影響を及ぼした．このようになった原因としては，表 8 からわかるように，t_4の計測で軽微な測定のズレ (観測者による誤差) が混じった可能性などが挙げられる．