

## 1 目的

移動顕微鏡を使ってガラス板とサファイア基板及び水の屈折率を求めること。

## 2 理論

### 算術平均の確率誤差

$$r_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \quad (1)$$

$$[v^2] = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \quad (2)$$

$$Q = F(q_1, q_2, \dots) \quad (3)$$

$Q$  :  $q_1, q_2, \dots$  の誤差をそれぞれ  $r : r_1, r_2, \dots$  として,

$$r^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} r_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q_2} r_2\right)^2 + \dots \quad (4)$$

$q_i$  : 測定値,  $n$  : 測定回数,  $\bar{q}$  : 平均値

### 最小二乗法

$y = ax + b$  の関係にある  $x$  と  $y$  の値を  $n$  回測定し、未知量  $a$  及び  $b$  の値を求めるとき、 $y$  の測定値を  $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 、 $x$  の測定値を  $x_i$ 、とすると、 $a$  と  $b$  の最確値は正規方程式を用いて、

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6)$$

と書ける。この時の  $y$  の残差  $v_i$  は

$$v_i = y_i - (ax_i + b) \quad (7)$$

であり、 $a$  及び  $b$  の公算誤差はそれぞれ、

$$E_a = 0.6745 \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum v_i^2}{n-2}} \quad (8)$$

$$E_b = 0.6745 \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum v_i^2}{n-2}} \quad (9)$$

## 屈折率の導出

顕微鏡をそのまま覗いてよんだ定規の目盛りを  $h_0[mm]$ , 試料越しで定規に焦点をあててよんだ目盛りを  $h_1[mm]$ , 試料の傷に焦点をあててよんだ目盛りを  $h_2[mm]$  とすると,

屈折率  $u$  は

$$u = \frac{h_2 - h_0}{h_2 - h_1} \quad (10)$$

と表される.

この式から,

$$h_2 = u(h_2 - h_1) + h_0 \quad (11)$$

$h_2$  を  $y$ ,  $h_2 - h_1$  を  $x$  とすると  $y = ax + b$  の一次式と考えることができる.

## 3 実験方法

(1) 接眼レンズを回転して, 十字線がはっきり見えるように焦点を合わせる.

(2) 移動顕微鏡の台面にはステンレス製の定規が貼り付けてあり, 定規の目盛りに顕微鏡の焦点を合わせて  $h_0$  を 5 回測定する.

(3) ガラス板は 10 枚あり, 1 枚だけ「十」の傷がつけてあり, 「十」の傷がつけてある面を上にして定規の上に載せて, ガラス板を通して定規の目盛りに顕微鏡の焦点を合わせて,  $h_1$  を測定する. 次にガラス板表面の「十」の傷に顕微鏡の焦点を合わせて  $h_2$  を測定する.

(4) 次に表面に「十」の傷のついたガラス板の下に別のガラス板を 1 枚から 9 枚まで順次増やしながら重ねていき, ガラス板の枚数を増やすごとに  $h_1, h_2$  を測定する. (3) での測定も含めてガラス板の枚数が 1 枚から 10 枚までの 10 組の  $h_1, h_2$  の測定値が得られる.

(5) サファイア基盤も 10 枚あり, 1 枚だけ「の」の傷がつけてあり, 「の」の傷のつけてある面を上にして定規の上に載せて, ガラス板と同様の測定を行う.

(6) 水 (水道水) に関しても同様の測定を行う.

- 定規台の上にシャーレを置き, シャーレの底の傷を  $h_0$  として 5 回測定する.
- ピーカーに水を約 50cc 入れておき, 5 回に分けて約 10cc の水をシャーレに注ぎ追加していき, シャーレに 1 回注ぐごとに水を透してシャーレの底の傷に顕微鏡の焦点を合わせて  $h_1$  を測定し, 水面にコルク細粉を浮遊させて, それに顕微鏡の焦点を合わせて  $h_2$  を測定する.
- $h_0, h_1, h_2$  の測定値はそれぞれ 5 つとなる.
- 水の測定値も必ずガラス板およびサファイア基盤同様にすぐに方眼紙にプロットする.

## 4 データ処理・結果

### 4.1 ガラス板

表 1  $h_0, h_1, h_2$  の測定値

番号	$h_0$ [mm]	$h_1$ [mm]	x $h_2 - h_1$ [mm]	y $h_2$ [mm]	$x^*x$ [mm <sup>2</sup> ]	$x^*y$ [mm <sup>2</sup> ]	$y'$ [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8$ [mm <sup>2</sup> ]
1	5.33	5.36	0.07	5.42	0.0045	0.3633	5.4668	-0.0448	200704
2	5.33	5.39	0.13	5.52	0.0177	0.7347	5.5603	-0.0363	131769
3	5.33	5.43	0.19	5.62	0.0372	1.0847	5.6453	-0.0253	64009
4	5.33	5.56	0.14	5.71	0.0207	0.8215	5.5759	0.1291	1666681
5	5.33	5.48	0.32	5.80	0.1043	1.8744	5.8295	-0.0265	70225
6	5.33	5.52	0.37	5.89	0.1347	2.1620	5.8918	-0.0008	64
7	5.33	5.55	0.44	5.99	0.1892	2.6035	5.9882	-0.0032	1024
8	5.33	5.58	0.49	6.08	0.2421	2.9889	6.0689	0.0061	3721
9	5.33	5.60	0.57	6.17	0.3226	3.5057	6.1766	-0.0046	276
10	5.33	5.64	0.62	6.26	0.3881	3.9006	6.2545	0.0065	4225
sum			3.35	58.46	1.4612	20.0392		0.0000	2142698

実験結果をプロットした結果、4 回目の測定結果が明らかに外れ値であったため、除外して計算を行う。修正した結果の表は以下の通り。

表 2  $h_0, h_1, h_2$  の測定値 (外れ値修正後)

番号	$h_0$ [mm]	$h_1$ [mm]	x $h_2 - h_1$ [mm]	y $h_2$ [mm]	$x^*x$ [mm <sup>2</sup> ]	$x^*y$ [mm <sup>2</sup> ]	$y'$ [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8$ [mm <sup>2</sup> ]
1	5.33	5.36	0.07	5.42	0.0045	0.3633	5.4264	-0.0044	1897
2	5.33	5.39	0.13	5.52	0.0177	0.7347	5.5258	-0.0018	336
3	5.33	5.43	0.19	5.62	0.0372	1.0847	5.6163	0.0037	1393
5	5.33	5.48	0.32	5.80	0.1043	1.8744	5.8122	-0.0092	8479
6	5.33	5.52	0.37	5.89	0.1347	2.1620	5.8785	0.0125	15559
7	5.33	5.55	0.44	5.99	0.1892	2.6035	5.9810	0.0040	1585
8	5.33	5.58	0.49	6.08	0.2421	2.9889	6.0669	0.0081	6511
9	5.33	5.60	0.57	6.17	0.3226	3.5057	6.1815	-0.0095	8989
10	5.33	5.64	0.62	6.26	0.3881	3.9006	6.2644	-0.0034	1142
sum			3.20	52.75	1.4405	19.2177		0.0000	45891

理論 (5),(6) より,

$$a = \frac{9 \times 19.2177 - 3.20 \times 52.75}{9 \times 1.4405 - 3.20^2} = 1.507236251$$

$$b = \frac{1.4405 \times 52.75 - 3.20 \times 19.2177}{9 \times 1.4405 - 3.20^2} = 5.325370751$$

理論 (8)(9) より,

$$E_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{9}{9 \times 1.4405 - 3.20^2} \times \frac{45891 \times 10^{-8}}{7}} = 0.00993788575$$

$$E_b = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{1.4405}{9 \times 1.4405 - 3.20^2} \frac{45891 \times 10^{-8}}{7}} = 0.003975826431$$

したがって,

$$a = 1.507236251 \pm 0.00993788575 = 1.507 \pm 0.010$$

$$b = 5.325370751 \pm 0.003975826431 = 5.325 \pm 0.004$$

したがって, スライドガラスの屈折率は

$$u = a = 1.507 \pm 0.010$$

また,

$$h_0 = b = 5.325 \pm 0.004$$

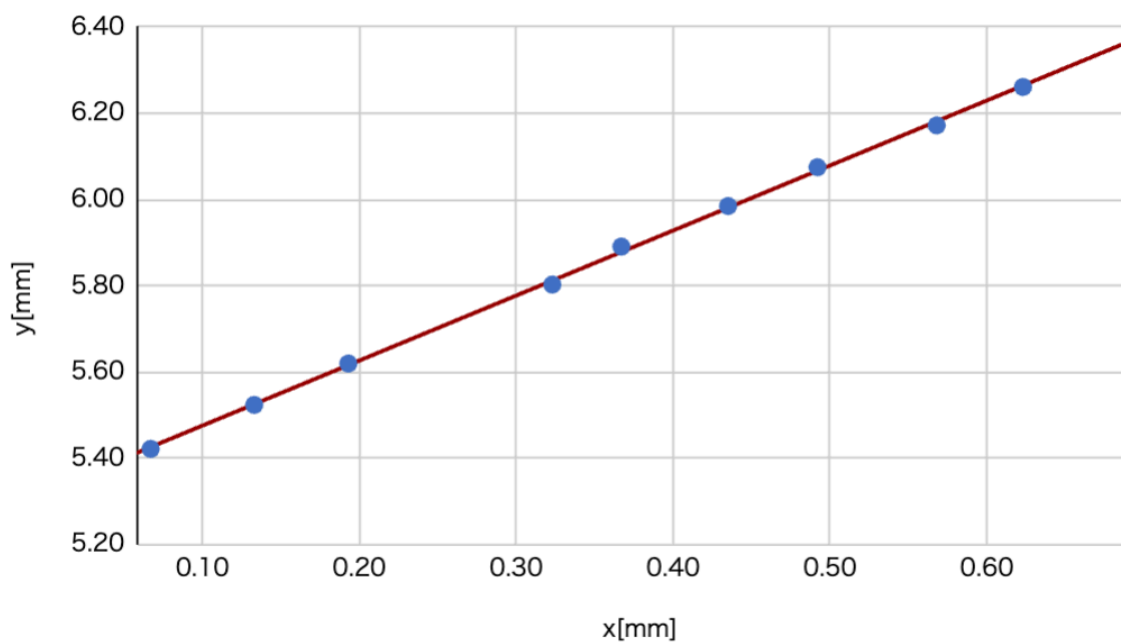


図1  $x : h_2 - h_1$ と  $y : h_2$ の関係

## 4.2 サファイア基盤

表3  $h_0, h_1, h_2$  の測定値

番号	$h_0$ [mm]	$h_1$ [mm]	x $h_2 - h_1$ [mm]	y $h_2$ [mm]	$x^*x$ [mm <sup>2</sup> ]	$x^*y$ [mm <sup>2</sup> ]	$y'$ [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8$ [mm <sup>2</sup> ]
1	5.33	5.35	0.04	5.39	0.0017	0.2210	5.391837839	-0.0008	64
2	5.33	5.35	0.07	5.43	0.0053	0.3960	5.446345125	-0.0213	45369
3	5.33	5.40	0.08	5.48	0.0067	0.4497	5.461675299	0.0223	49729
4	5.33	5.41	0.12	5.53	0.0154	0.6860	5.533216112	-0.0012	144
5	5.33	5.43	0.15	5.58	0.0240	0.8655	5.586020045	-0.0020	400
6	5.33	5.45	0.19	5.64	0.0357	1.0661	5.643934036	-0.0029	841
7	5.33	5.47	0.22	5.69	0.0462	1.2227	5.827896126	-0.1409	1985281
8	5.33	5.50	0.24	5.74	0.0566	1.3656	6.6218791	-0.8839	78127921
9	5.33	5.52	0.27	5.79	0.0724	1.5575	5.780202251	0.0098	9604
10	5.33	5.53	0.31	5.84	0.0980	1.8285	5.855149769	-0.0131	17161
sum			1.70	56.11	0.3621	9.6588		0.0000	80236514

実験結果をプロットした結果, 1 回目と 3 回目の測定結果が明らかに外れ値であったため, 除外して計算を行う.  
修正した結果の表は以下の通り.

表4  $h_0, h_1, h_2$  の測定値 (外れ値修正後)

番号	$h_0$ [mm]	$h_1$ [mm]	x $h_2 - h_1$ [mm]	y $h_2$ [mm]	$x^*x$ [mm <sup>2</sup> ]	$x^*y$ [mm <sup>2</sup> ]	$y'$ [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8$ [mm <sup>2</sup> ]
2	5.33	5.35	0.07	5.43	0.0053	0.3960	5.436661651	-0.0117	13599.40949
4	5.33	5.41	0.12	5.53	0.0154	0.6860	5.526410689	0.0056	3124.039218
5	5.33	5.43	0.15	5.58	0.0240	0.8655	5.580964027	0.0030	921.7133154
6	5.33	5.45	0.19	5.64	0.0357	1.0661	5.640796719	0.0002	4.132300472
7	5.33	5.47	0.22	5.69	0.0462	1.2227	5.686551131	0.0004	20.14830531
8	5.33	5.50	0.24	5.74	0.0566	1.3656	5.727026188	0.0110	12042.45475
9	5.33	5.52	0.27	5.79	0.0724	1.5575	5.781579525	0.0084	7090.43916
10	5.33	5.53	0.31	5.84	0.0980	1.8285	5.859010069	-0.0170	28934.24401
sum			1.58	45.24	0.3537	8.9881		0.0000	65736.58055

理論 (5),(6) より,

$$a = \frac{8 \times 8.9811 - 1.58 \times 45.24}{8 \times 0.3537 - 1.58^2} = 1.759785076$$

$$b = \frac{0.3537 \times 45.24 - 1.58 \times 8.9811}{8 \times 0.3537 - 1.58^2} = 5.30819734$$

理論 (8)(9) より,

$$E_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{8}{8 \times 0.3537 - 1.58^2} \times \frac{65736.58055 \times 10^{-8}}{6}} = 0.0339764987$$

$$E_b = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{0.3537}{8 \times 0.3537 - 1.58^2} \frac{65736.58055 \times 10^{-8}}{6}} = 0.007143654802$$

したがって,

$$a = 1.759785076 \pm 0.0339764987 = 1.760 \pm 0.034$$

$$b = 5.30819734 \pm 0.007143654802 = 5.308 \pm 0.007$$

したがって, サファイア基板の屈折率は

$$u = a = 1.760 \pm 0.034$$

また,

$$h_0 = b = 5.308 \pm 0.007$$

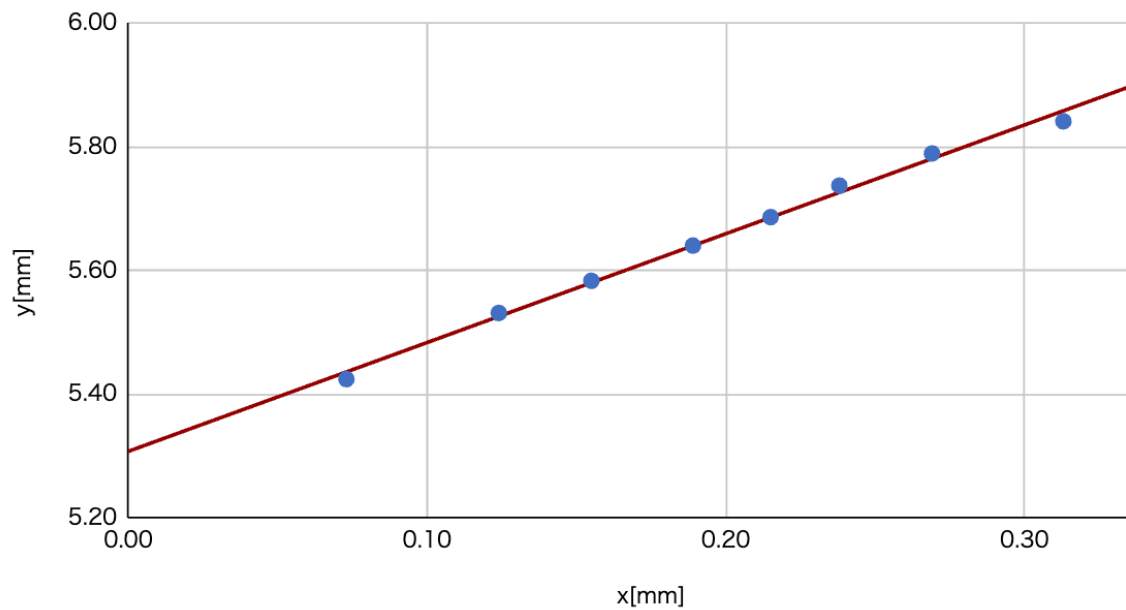


図2  $x : h_2 - h_1$  と  $y : h_2$  の関係

2 回目が測定ミスであったため、2 回目のみを除外して計算を行った。修正後の表は以下の通り

表 5  $h_0, h_1, h_2$  の測定値 (外れ値修正後)

番号	$h_0$ [mm]	$h_1$ [mm]	x $h_2 - h_1$ [mm]	y $h_2$ [mm]	$x^*x$ [mm <sup>2</sup> ]	$x^*y$ [mm <sup>2</sup> ]	$y'$ [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8$ [mm <sup>2</sup> ]
1	5.33	5.35	0.04	5.39	0.0016	0.2156	5.397753401	-0.0078	6011.522824
3	5.33	5.40	0.08	5.48	0.0064	0.4384	5.464395345	0.0156	24350.52469
4	5.33	5.41	0.12	5.53	0.0154	0.6860	5.537701484	-0.0057	3250.692028
5	5.33	5.43	0.15	5.58	0.0240	0.8655	5.589348991	-0.0053	2861.170313
6	5.33	5.45	0.19	5.64	0.0357	1.0661	5.645994643	-0.0050	2494.64635
7	5.33	5.47	0.22	5.69	0.0462	1.2227	5.689311907	-0.0023	534.4915161
8	5.33	5.50	0.24	5.74	0.0566	1.3656	5.727631025	0.0104	10751.56382
9	5.33	5.52	0.27	5.79	0.0724	1.5575	5.779278532	0.0107	11494.98756
10	5.33	5.53	0.31	5.84	0.0980	1.8285	5.852584671	-0.0106	11203.52542
sum			1.62	50.68	0.3563	9.2460		0.0000	72953.12452

理論 (5),(6) より,

$$a = \frac{9 \times 9.2460 - 1.62 \times 50.68}{9 \times 0.3563 - 1.62^2} = 1.666048607$$

$$b = \frac{0.3563 \times 50.68 - 1.62 \times 9.2460}{9 \times 0.3563 - 1.62^2} = 5.331111457$$

理論 (8)(9) より,

$$E_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{9}{9 \times 0.3563 - 1.62^2} \times \frac{72953.12452 \times 10^{-8}}{7}} = 0.02729542099$$

$$E_b = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{0.3563}{9 \times 0.3563 - 1.62^2} \frac{72953.12452 \times 10^{-8}}{7}} = 0.005431118162$$

したがって,

$$a = 1.666048607 \pm 0.02729542099 = 1.666 \pm 0.027$$

$$b = 5.331111457 \pm 0.005431118162 = 5.331 \pm 0.005$$

したがって、サファイア基板の屈折率は

$$u = a = 1.666 \pm 0.027$$

また,

$$h_0 = b = 5.331 \pm 0.005$$

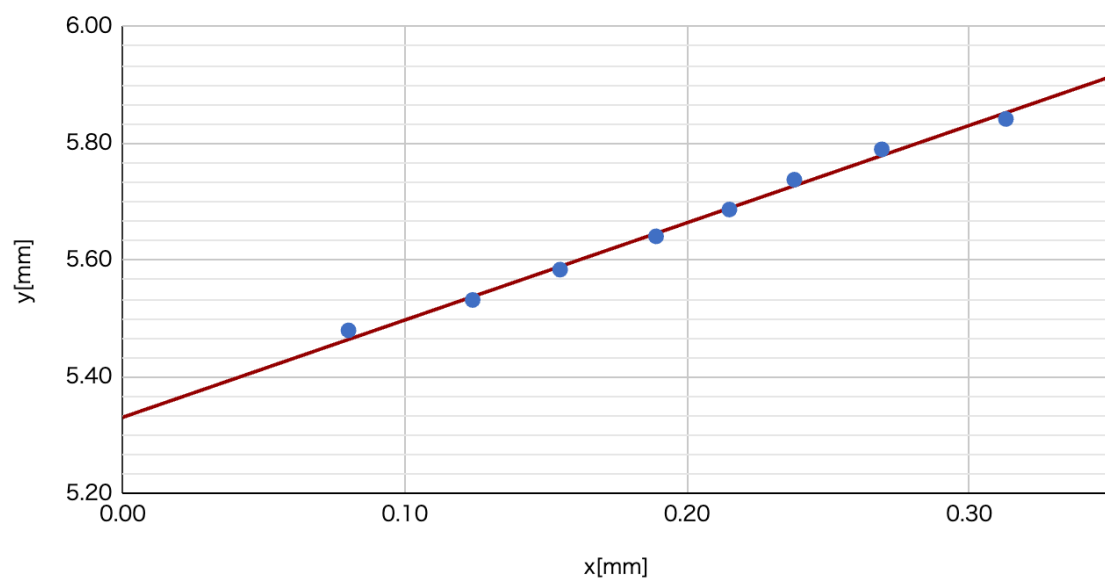


図3  $x : h_2 - h_1$ と  $y : h_2$ の関係 (修正版)



### 4.3 水

表 6  $h_0, h_1, h_2$  の測定値

番号	$h_0$ [mm]	$h_1$ [mm]	x $h_2 - h_1$ [mm]	y $h_2$ [mm]	$x^*x$ [mm <sup>2</sup> ]	$x^*y$ [mm <sup>2</sup> ]	$y'$ [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8$ [mm <sup>2</sup> ]
1	53.70	54.24	1.15	55.39	1.3225	63.6985	55.4687	-0.0787	618907.0297
2	53.70	55.67	4.96	60.63	24.6016	300.7248	60.5279	0.1021	1042440.49
3	53.70	56.48	7.62	64.10	58.0644	488.4420	64.0601	0.0399	159477.0738
4	53.70	57.41	10.73	68.14	115.1329	731.1422	68.1898	-0.0498	247780.8545
5	53.70	58.42	13.70	72.12	187.6900	988.0440	72.1336	-0.0136	18458.81048
sum			38.16	320.38	386.8114	2572.0515		0.0000	2087064.258

理論 (5),(6) より,

$$a = \frac{5 \times 2572.0515 - 38.16 \times 320.38}{5 \times 386.8114 - 38.16^2} = 1.327881727$$

$$b = \frac{386.8114 \times 320.38 - 38.16 \times 2572.0515}{5 \times 386.8114 - 38.16^2} = 53.94160666$$

理論 (8)(9) より,

$$E_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{5}{5 \times 386.8114 - 38.16^2} \times \frac{2087064.258 \times 10^{-8}}{3}} = 0.00575464741$$

$$E_b = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{386.8114}{5 \times 386.8114 - 38.16^2} \times \frac{2087064.258 \times 10^{-8}}{3}} = 0.05061547885$$

したがって,

$$a = 1.327881727 \pm 0.00575464741 = 1.328 \pm 0.006$$

$$b = 53.94160666 \pm 0.05061547885 = 53.94 \pm 0.051$$

したがって, 水の屈折率は

$$u = a = 1.328 \pm 0.006$$

また,

$$h_0 = b = 53.94 \pm 0.051$$

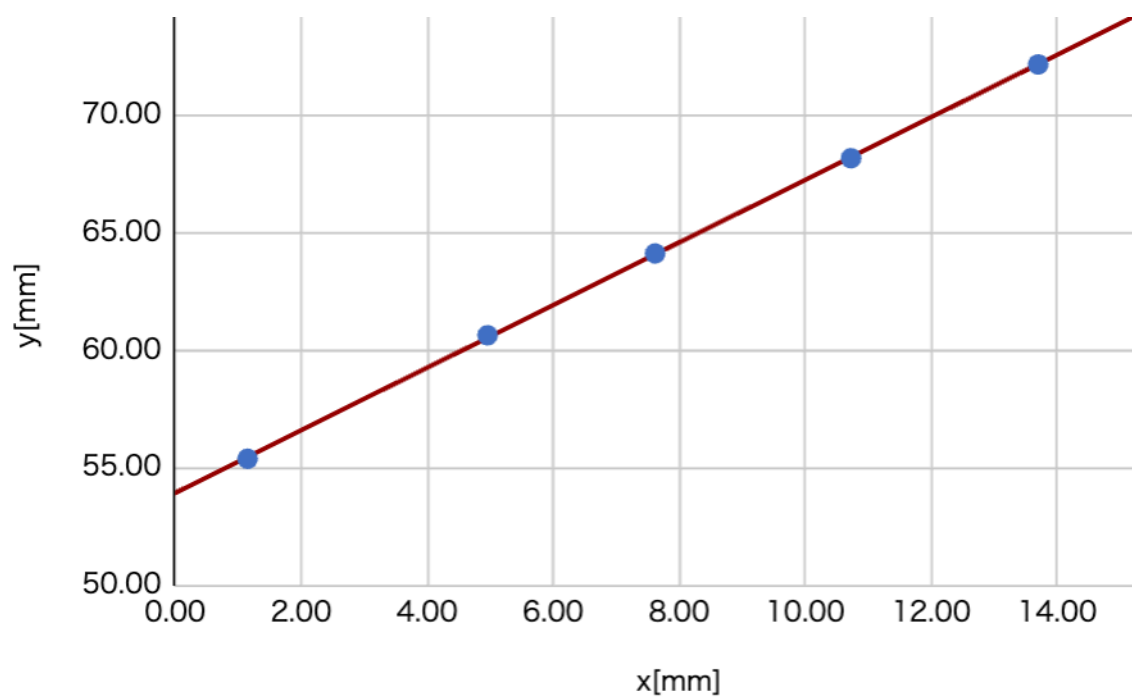


図4  $x : h_2 - h_1$ と  $y : h_2$ の関係

## 5 考察

参考文献 [1][2] より、クラウンガラス、サファイア、水の屈折率はそれぞれ、1.47～1.69,1.760,1.33 であり、3 つの実験結果から得られた値は全て、理論値と誤差の範囲で一致していた。

そのため、実験は概ねうまく行うことができたと思われるが、ガラス基板、サファイア基板の測定については、測定値のプロットの段階で見つかった明らかな外れ値については排除して計算しているため、水の屈折率の結果と比べ、確率誤差が大きくなっている。

大きな外れ値が出た理由として、「ピントがあった」と思う範囲が感覚的に広く、顕微鏡を除く役割の交代や、計測の疲れなどが誤差を生み出してしまっていると考えられる。

参考文献 [1][2] より、クラウンガラス、サファイア、水の屈折率はそれぞれ、1.47～1.69( $\lambda=589.3[\text{nm}]$ ),1.760( $\lambda=590[\text{nm}]$ ),1.33( $\lambda=589.3[\text{nm}]$ ) であり、サファイアのみ実験値と公称値の間に誤差が生じた (-3.81～6.88%)。

誤差の原因として、「ピントがあった」と思う範囲の曖昧さや計測の疲れなどの人為的な面が大きいと考えられる。