

1 目的

Ewing の装置による金属角棒の Young 率を求めることおよび光の楕子の用法を理解すること.

2 理論

算術平均の確率誤差

$$r_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \quad (1)$$

$$[v^2] = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \quad (2)$$

$$Q = F(q_1, q_2, \dots) \quad (3)$$

Q の誤差をそれぞれ $r : r_1, r_2, \dots$ として,

$$r^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} r_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q_2} r_2\right)^2 + \dots \quad (4)$$

q_i : 測定値, n : 測定回数, \bar{q} : 平均値

最小二乗法

$y = ax + b$ の関係にある x と y の値を n 回測定し、未知量 a 及び b の値を求めるとき、 y の測定値を $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 、 x の測定値を x_i 、とすると、 a と b の最確値は正規方程式を用いて、

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6)$$

と書ける。この時の y の残差 v_i は

$$v_i = y_i - (ax_i + b) \quad (7)$$

であり、 a 及び b の公算誤差はそれぞれ、

$$E_a = 0.6745 \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum v_i^2}{n-2}} \quad (8)$$

$$E_b = 0.6745 \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum v_i^2}{n-2}} \quad (9)$$

Young 率の導出

顕微鏡をそのまま覗いてよんだ定規の目盛りを $h_0[mm]$, 試料越しで定規に焦点をあててよんだ目盛りを $h_1[mm]$, 試料の傷に焦点をあててよんだ目盛りを $h_2[mm]$ とすると,

与えられた試料が軽い角棒の場合には, たわみを利用して Young 率を求めることができる. 図 1. のように幅 a , 厚さ b の角棒を, その両端近くで距離 l を隔てた 2 個の並行な刃先で水平に支え, その中央に重さ Mg (M : 分銅の質量, g : 重力加速度) の荷重を集中的にかける時, 中央の最大のたわみ s を測定すれば, 棒の物質の Young 率 E は, 次の式から求められる.

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{ab^3} \frac{Mg}{s} \quad (10)$$

この実験では, 金属の微小なたわみ量 s を測定するために光の梃子を使用している. 実験書 pp. 41-42 の「§6. 光の梃子」を参照し, 金属の微小なたわみ量 s は (11) 式で与えられる.

$$s = \frac{L(c-d)}{2D} = \frac{LY}{2D} \quad (11)$$

ここで光の梃子の三脚が作る二等辺三角形の高さ L , 光の梃子の鏡とスケール間の距離 D , $c-d$ はスケールの読み取り値の変化量であり, Y は質量 M をかけたことによるスケールの読み取り値の変化量である. (10) 式に (11) 式を代入すると

$$Y = \frac{1}{2} \frac{l^3 Dg}{ab^3 LE} M \quad (12)$$

(3) 式によると, スケールの読み取りデータから得られる変化量 s はかけた分銅の質量 M に比例することがわかる. したがって, $x=M, y=Y$ とすれば, $y=Ax+B$ のように一次式で表され, その直線の傾き A は

$$A = \frac{1}{2} \frac{l^3 Dg}{ab^3 LE} \quad (13)$$

となるので, この式から Young 率 E を求めることができる. 分銅の質量 M とスケールの読み取り値 Y について最小二乗法に基づく回帰計算を行い, A, B の最確値と確率誤差 r_A, r_B を算出し, グラフに回帰直線を図示する. 分銅の増加時のデータと減少時のデータに有意な差があると判断した場合は別々に取り扱う. (13) 式から Young 率 E は

$$E = \frac{1}{2} \frac{l^3 Dg}{ab^3 LA} \quad (14)$$

と表される．(14) 式を用いて金属角棒ごとに Young 率の最確値 E および確率誤差 r_E を算出する．

3 実験方法

1. 試料棒 (金属角棒)AB および補助棒 EF(今回は銅棒) が，水平になっていることを水準器で確かめて，試料棒 AB の二つの支点 K_1, K_2 の中点に荷重台 C を吊るす．(図 3. 参照)
2. 光の梘子 G の前脚 (1 本の方) を試料棒 AB の中央に載せ，同時に後脚 (2 本の方) を補助棒 EF に載せ，鏡の面を略鉛直にする．
3. 光の梘子 G の鏡より約 1.5[m] 以上の所に Scale&Telescope を配置し，スケールは机に対して鉛直にして望遠鏡は机に対して水平にする．
4. Scale&Telescope のスケールの目盛りを読むようにする方法：
 - まず，Lamp stand のランプをつけて Scale&Telescope のスケールに光を当てる．望遠鏡内の十字線がはっきり見えるように接眼レンズリングを回転させてピントを合わせる．
 - 光の梘子 G の鏡に映ったスケールの目盛りの見える方向に望遠鏡を向ける．
 - スケールの目盛りが明瞭に見えるように望遠鏡の先についている対物レンズのついてる鏡筒を前後に動かして鏡筒の長さを調整する．(ピントは光の梘子 G の鏡に合わせるのではない．) 望遠鏡の十字線とスケールの目盛りが，明瞭に見えるように接眼レンズと鏡筒の長さを交互に調節する．
 - 他の人が見る場合は，明視の距離が人によって異なるため，望遠鏡の十字線がはっきり見えるように接眼レンズを調節する．
5. まず分銅 M を乗せないでスケールの目盛りを読み，順次分銅を 1 個ずつ乗せるたびにスケールの目盛りを 7 個まで読む．7 個乗せてスケールの目盛りを読んだ後，再度目盛りを読み，順次分銅を 1 個ずつ降ろすたびにスケールの目盛りを読む．
6. 測定値を記録すると同時に方眼紙 (横軸：分銅 M[g]，縦軸：スケール S の読み [mm]) にすぐにプロットし，荷重－歪み曲線をかく．
7. 試料棒 AB である真鍮と鉄の 2 種類のはば a と厚さ b をマイクロメータによりそれぞれ測定箇所を 5 回以上変えて測定する．なお Young 率 E を求める式より厚さ b は，3 乗で効いてくるため，より慎重に測定する．
8. 光の梘子 G とスケールとの間の距離 D，二点支点 K_1, K_2 の距離 l を各々 5 回以上測定する．なお，Young 率 E を求める式より距離 l は，3 乗で効いてくるのでより慎重に測定する．
9. 光の梘子 G の 3 本の脚に朱肉をつけて実験ノートに軽く推し写し，光の梘子 G の補助棒 EF 上の二支点を結ぶ直線と試料棒 AB 上の支点との垂直距離 L を 5 回以上測定する．

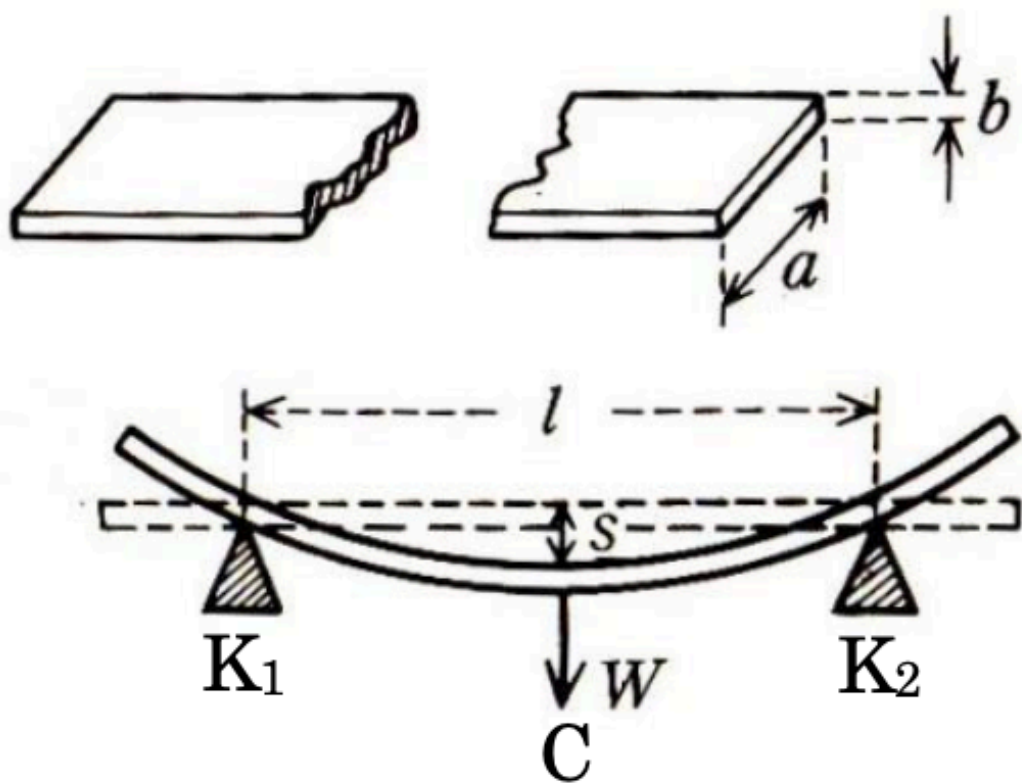
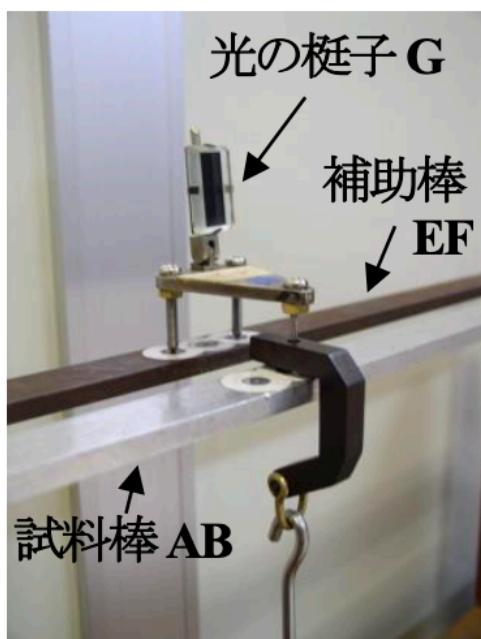
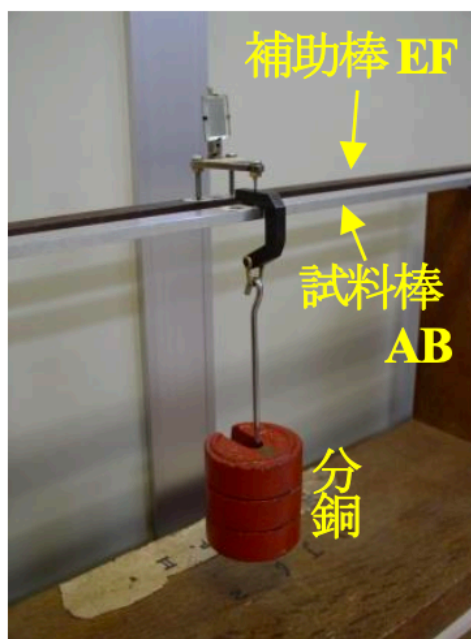


図1 棒のたわみ



(a)



(b)

図2 光の挺子，試料棒，補助棒，分銅の配置図

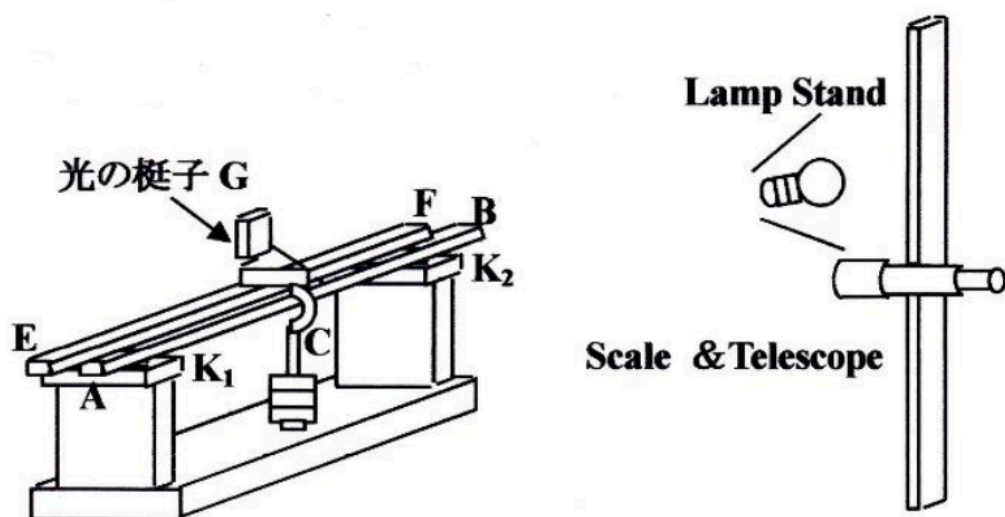


図 3 Ewing の装置配置図

4 データ処理・結果

表 1 l の測定値

num	l[mm]	r[mm]	$r^2 \times 10^4[mm^2]$
1	402.4	-0.090	81.000
2	402.5	0.010	1.000
3	402.4	-0.090	81.000
4	402.6	0.110	121.000
5	402.6	0.110	121.000
6	402.6	0.110	121.000
7	402.4	-0.090	81.000
8	402.7	0.210	441.000
9	402.4	-0.090	81.000
10	402.3	-0.190	361.000
sum	4024.9		1490.000
avg	402.49		

確率誤差 r_l は, 理論 (1) より, $r_l = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{1490.000 \times 10^{-4}}{90}} = \pm 0.02744440588[mm]$.

表 2 L の測定値

num	L[mm]	r[mm]	$r^2 \times 10^4[mm^2]$
1	30.90	-0.020	4.000
2	30.90	-0.020	4.000
3	30.90	-0.020	4.000
4	30.95	0.030	9.000
5	30.90	-0.020	4.000
6	30.95	0.030	9.000
7	30.90	-0.020	4.000
8	30.95	0.030	9.000
9	30.90	-0.020	4.000
10	30.95	0.030	9.000
sum	309.20		60.000
avg	30.92		

確率誤差 r_L は, 理論 (1) より, $r_L = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{60.000 \times 10^{-4}}{90}} = \pm 0.005507269438[mm]$.

鉄

表 3 y の測定値

num	x[g]	y[mm]	$x^2[mm^2]$	xy [g*mm]	y' [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8[mm^2]$
1	0	601.4	0	0.00	601.27	0.13	1612231.6482
2	200	609.2	40000	121840.00	608.64	0.56	30852595.5396
3	400	617.7	160000	247080.00	616.02	1.68	283561543.3673
4	600	624.8	360000	374880.00	623.39	1.41	199489075.1314
5	800	630.3	640000	504240.00	630.76	-0.46	21078799.8544
6	1000	638.2	1000000	638200.00	638.13	0.07	481093.4762
7	1200	645.5	1440000	774600.00	645.50	0.00	467.2749
8	1400	653.0	1960000	914200.00	652.87	0.13	1595567.8670
9	1200	645.6	1440000	774720.00	645.50	0.10	957234.1922
10	1000	637.8	1000000	637800.00	638.13	-0.33	10932221.2957
11	800	630.2	640000	504160.00	630.76	-0.56	31261130.6815
12	600	622.5	360000	373500.00	623.39	-0.89	78782308.2142
13	400	615.6	160000	246240.00	616.02	-0.42	17311543.3674
14	200	607.9	40000	121580.00	608.64	-0.74	55435302.3066
15	0	600.6	0	0.00	601.27	-0.67	45296442.1746
sum	9800	9380.3	9240000	6233040.00		0.00	778647556.3910

理論 (5),(6) より,

$$A = \frac{15 \times 6233040.00 - 9800 \times 9380.3}{15 \times 9240000 - 9800^2} = 0.03685761278$$

$$B = \frac{9240000 \times 9380.3 - 9800 \times 6233040.00}{15 \times 9240000 - 9800^2} = 601.2730263$$

理論 (8)(9) より,

$$E_A = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{15}{15 \times 9240000 - 9800^2} \times \frac{778647556.3910 \times 10^{-8}}{13}} = 0.00030990$$

$$E_B = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{9240000}{15 \times 9240000 - 9800^2} \times \frac{778647556.3910 \times 10^{-8}}{13}} = 0.24322931$$

したがって,

$$A = 0.03685761278 \pm 0.00030990[mm/g]$$

$$B = 601.2730263 \pm 0.24322931[mm]$$

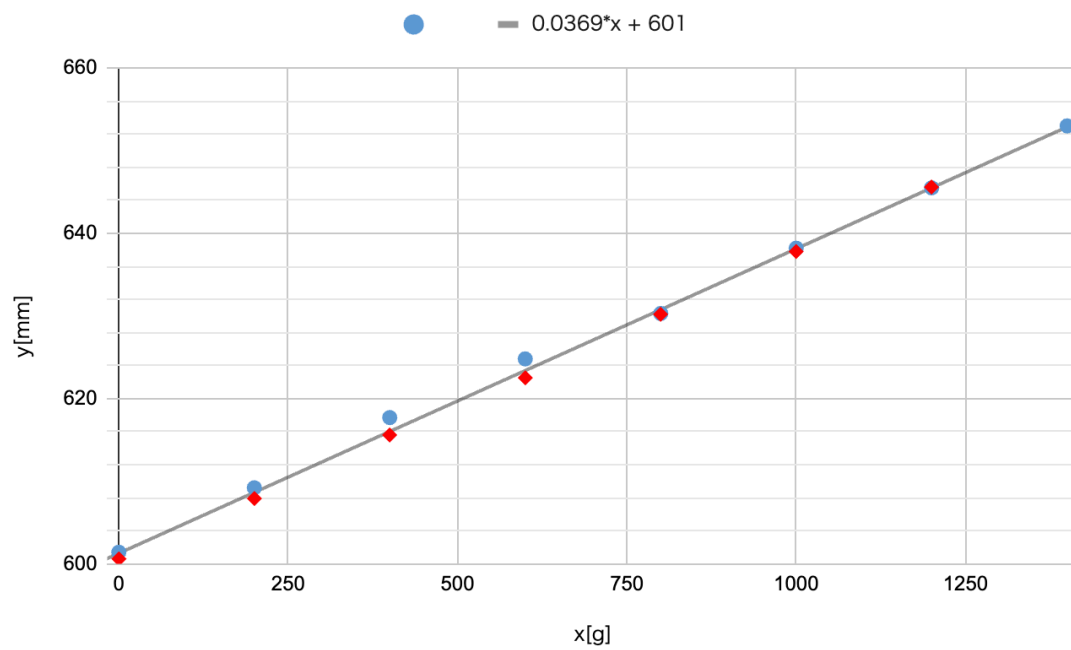


図4 x と y の関係

表 4 a の測定値

num	ゼロ点 [mm]	実測値 [mm]	幅 a[mm]	残差 r[mm]	$r^2 \times 10^8 [mm^2]$
1	-0.010	15.959	15.969	0.016	2725.000
2	0.000	15.945	15.945	-0.008	5625.000
3	0.000	15.945	15.945	-0.008	5625.000
4	-0.008	15.951	15.959	0.006	4225.000
5	0.000	15.956	15.956	0.003	1225.000
6	0.000	15.948	15.948	-0.005	2025.000
7	0.000	15.942	15.942	-0.011	11025.000
8	-0.003	15.947	15.950	-0.003	625.000
9	0.000	15.971	15.971	0.018	34225.000
10	0.000	15.940	15.940	-0.013	15625.000
sum			159.525	0.0000	43925.000
avg			15.953		

確率誤差 r_a は, 理論 (1) より, $r_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{43925.000 \times 10^{-8}}{90}} = \pm 0.001490104013 [mm]$.

表 5 b の測定値

num	ゼロ点 [mm]	実測値 [mm]	幅 b[mm]	残差 r[mm]	$r^2 \times 10^8 [mm^2]$
1	-0.008	4.952	4.960	0.001	121.000
2	-0.002	4.950	4.952	-0.007	4761.000
3	-0.001	4.958	4.959	0.000	1.000
4	-0.004	4.958	4.962	0.003	961.000
5	-0.005	4.959	4.964	0.005	2601.000
6	0.000	4.960	4.960	0.001	121.000
7	-0.002	4.959	4.961	0.002	441.000
8	0.000	4.957	4.957	-0.002	361.000
9	-0.005	4.956	4.961	0.002	441.000
10	0.000	4.953	4.953	-0.006	3481.000
sum			49.589	0.0000	8445.000
avg			4.959		

確率誤差 r_b は, 理論 (1) より, $r_b = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{8445.000 \times 10^{-8}}{90}} = \pm 0.0006533720109 [mm]$.

表 6 D の測定値

num	D[mm]	r[mm]	$r^2 \times 10^4 [mm^2]$
1	1564.800	-3.680	135424.000
2	1568.10	-0.380	1444.000
3	1569.200	0.720	5184.000
4	1568.300	-0.180	324.000
5	1568.900	0.420	1764.000
6	1566.900	-1.580	24964.000
7	1568.800	0.320	1024.000
8	1569.300	0.820	6724.000
9	1570.300	1.820	33124.000
10	1570.200	1.720	29584.000
sum	15684.800	0.000	144140.000
avg	1568.480		

確率誤差 r_D は, 理論 (1) より, $r_D = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{144140.000 \times 10^{-4}}{90}} = \pm 0.2699311209 [mm]$.

したがって, 鉄の Young 率 E は,

$$\text{最確値は } E = \frac{1}{2} \frac{l^3 Dg}{ab^3 LA} = \frac{1}{2} \times \frac{(402.49)^3 \times 1568.480 \times 9.79708}{15.953 \times (4.959)^3 \times 30.92 \times 0.03685761278 \times 10^3} = 225953.75 [N/mm^2]$$

$$\begin{aligned} \text{確率誤差 } r_E^2 &= \left(\frac{\partial E}{\partial l} r_l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L} r_L\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial A} E_A\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a} r_a\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b} r_b\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial D} r_D\right)^2 \\ &= \left(\frac{3l^2 Dg}{2ab^3 LA} r_l\right)^2 + \left(\frac{-l^3 Dg}{2ab^3 AL^2} r_L\right)^2 + \left(\frac{-l^3 Dg}{2ab^3 LA^2} E_A\right)^2 + \left(\frac{-l^3 Dg}{2a^2 b^3 AL} r_a\right)^2 + \left(\frac{-3l^3 Dg}{2ab^4 AL} r_b\right)^2 + \left(\frac{l^3 g}{2ab^3 AL} r_D\right)^2 \\ &= \left(\frac{3 \times (402.49)^2 \times 1568.48 \times 9.79708}{2 \times 15.953 \times (4.959)^3 \times 30.92 \times 0.03685761278 \times 10^3} \times 0.027444440588\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-(402.49)^3 \times 1568.48 \times 9.79708}{2 \times 15.953 \times (4.959)^3 \times 0.03685761278 \times (30.92)^2 \times 10^3} \times 0.005507269438\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-(402.49)^3 \times 1568.48 \times 9.79708}{2 \times 15.953 \times (4.959)^3 \times 30.92 \times (0.03685761278)^2 \times 10^3} \times 0.00030990\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-(402.49)^3 \times 1568.48 \times 9.79708}{2 \times (15.953)^2 \times (4.959)^3 \times 0.03685761278 \times 30.92 \times 10^3} \times 0.001490104013\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-3 \times (402.49)^3 \times 1568.48 \times 9.79708}{2 \times (15.953)^2 \times (4.959)^4 \times 0.03685761278 \times 30.92 \times 10^3} \times 0.0006533720109\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{(402.49)^3 \times 9.79708}{2 \times 15.953 \times (4.959)^3 \times 30.92 \times 0.03685761278 \times 10^3} \times 0.2699311209\right)^2 \\ &= (40.24541302)^2 + (46.22102191)^2 + (1899.826419)^2 + (21.1054088)^2 + (89.31146684)^2 + (38.88602243)^2 \\ &= 3623030.597 [N^2/mm^4] \end{aligned}$$

したがって, $r_E = \pm 1903.426016 [N/mm^2]$.

よって, $E = 225953.75 \pm 1903.426016 = (2.26 \pm 0.02) \times 10^5 [N/mm^2]$.

真鍮

表 7 y の測定値

num	x[g]	y[mm]	$x^2[mm^2]$	xy [g*mm]	y' [mm]	v [mm]	$v^2 \times 10^8[mm^2]$
1	0	365.6	0	0.00	364.78	0.82	67737231.6482
2	200	380.7	40000	76140.00	380.87	-0.17	2881059.5568
3	400	396.8	160000	158720.00	396.96	-0.16	2640625.0000
4	600	413.2	360000	247920.00	413.06	0.14	2094875.3463
5	800	429.4	640000	343520.00	429.15	0.25	6349073.7535
6	1000	445.7	1000000	445700.00	445.24	0.46	21087430.7479
7	1200	460.9	1440000	553080.00	461.33	-0.43	18796788.4349
8	1400	477.8	1960000	668920.00	477.43	0.37	13963988.9197
9	1200	461.8	1440000	554160.00	461.33	0.47	21757314.7507
10	1000	444.8	1000000	444800.00	445.24	-0.44	19429536.0111
11	800	428.8	640000	343040.00	429.15	-0.35	12112231.6482
12	600	412.6	360000	247560.00	413.06	-0.46	20726454.2936
13	400	396.5	160000	158600.00	396.96	-0.46	21390625.0000
14	200	380.7	40000	76140.00	380.87	-0.17	2881059.5568
15	0	364.9	0	0.00	364.78	0.12	1513547.4377
sum	9800	6260.2	9240000	4318300.00		0.00	235361842.1053

理論 (5),(6) より,

$$A = \frac{15 \times 4318300.00 - 9800 \times 6260.2}{15 \times 9240000 - 9800^2} = 0.08046381579$$

$$B = \frac{9240000 \times 6260.2 - 9800 \times 4318300.00}{15 \times 9240000 - 9800^2} = 364.7769737$$

理論 (8)(9) より,

$$E_A = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{15}{15 \times 9240000 - 9800^2} \times \frac{235361842.1053 \times 10^{-8}}{13}} = 0.00017038$$

$$E_B = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{9240000}{15 \times 9240000 - 9800^2} \times \frac{235361842.1053 \times 10^{-8}}{13}} = 0.13372527$$

したがって,

$$A = 0.08046381579 \pm 0.00017038[mm/g]$$

$$B = 364.7769737 \pm 0.13372527[mm]$$

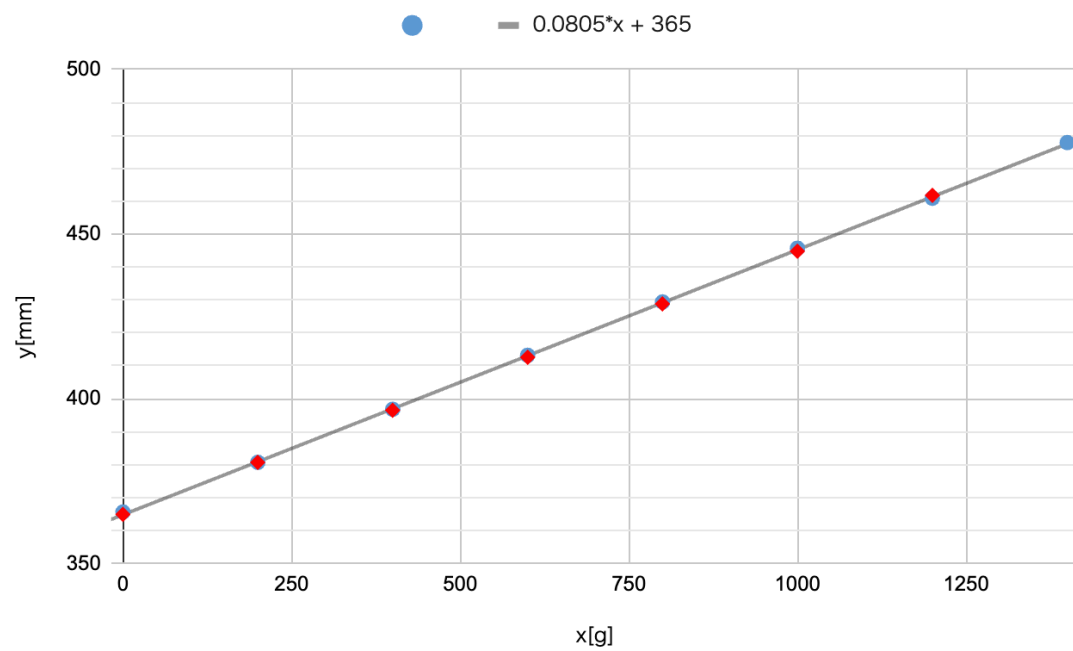


図5 x と y の関係

表 8 a の測定値

num	ゼロ点 [mm]	実測値 [mm]	幅 a[mm]	残差 r[mm]	$r^2 \times 10^8 [mm^2]$
1	-0.008	15.982	15.990	0.005	2401.000
2	-0.008	15.979	15.987	0.002	361.000
3	-0.012	15.979	15.991	0.006	3481.000
4	-0.009	15.985	15.994	0.009	7921.000
5	-0.001	15.981	15.982	-0.003	961.000
6	-0.004	15.979	15.983	-0.002	441.000
7	-0.002	15.982	15.984	-0.001	121.000
8	-0.001	15.979	15.980	-0.005	2601.000
9	-0.002	15.978	15.980	-0.005	2601.000
10	-0.001	15.979	15.980	-0.005	2601.000
sum			159.851	0.0000	15125.000
avg			15.985		

確率誤差 r_a は, 理論 (1) より, $r_a = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{15125.000 \times 10^{-8}}{90}} = \pm 0.0008743964605 [mm]$.

表 9 b の測定値

num	ゼロ点 [mm]	実測値 [mm]	幅 b[mm]	残差 r[mm]	$r^2 \times 10^8 [mm^2]$
1	-0.004	5.008	5.012	0.000	4.000
2	-0.009	5.002	5.011	-0.001	144.000
3	-0.010	5.003	5.013	0.001	64.000
4	-0.011	5.007	5.018	0.006	3364.000
5	-0.008	5.000	5.008	-0.004	1764.000
6	-0.008	5.006	5.014	0.002	324.000
7	-0.009	5.005	5.014	0.002	324.000
8	-0.006	5.009	5.015	0.003	784.000
9	-0.009	5.002	5.011	-0.001	144.000
10	-0.005	5.001	5.006	-0.006	3844.000
sum			50.122	0.0000	10760.000
avg			5.012		

確率誤差 r_b は, 理論 (1) より, $r_b = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{10760.000 \times 10^{-8}}{90}} = \pm 0.0007375081687 [mm]$.

表 10 D の測定値

num	D[mm]	r[mm]	$r^2 \times 10^2[mm^2]$
1	1564.200	10.486	10995.61960
2	1564.50	10.786	11633.77960
3	1550.800	-2.914	849.13960
4	1549.100	-4.614	2128.89960
5	1549.000	-4.714	2222.17960
6	1552.200	-1.514	229.21960
7	1550.100	-3.614	1306.09960
8	1553.100	-0.614	37.69960
9	1555.140	1.426	203.34760
10	1549.000	-4.714	2222.17960
sum	15537.140	0.000	27829.61800
avg	1553.714		

確率誤差 r_D は, 理論 (1) より, $r_D = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{27829.61800 \times 10^{-2}}{90}} = \pm 1.186080926[mm]$.

したがって, 真鍮の Young 率 E は,

$$\text{最確値は } E = \frac{1}{2} \frac{l^3 Dg}{ab^3 LA} = \frac{1}{2} \times \frac{(402.49)^3 \times 1553.714 \times 9.79708}{15.985 \times (5.012)^3 \times 30.92 \times 0.08046381579 \times 10^3} = 99139.45[N/mm^2]$$

$$\begin{aligned} \text{確率誤差 } r_E^2 &= \left(\frac{\partial E}{\partial l} r_l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L} r_L\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial A} E_A\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a} r_a\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b} r_b\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial D} r_D\right)^2 \\ &= \left(\frac{3l^2 Dg}{2ab^3 LA} r_l\right)^2 + \left(\frac{-l^3 Dg}{2ab^3 AL^2} r_L\right)^2 + \left(\frac{-l^3 Dg}{2ab^3 LA^2} E_A\right)^2 + \left(\frac{-l^3 Dg}{2a^2 b^3 AL} r_a\right)^2 + \left(\frac{-3l^3 Dg}{2ab^4 AL} r_b\right)^2 + \left(\frac{l^3 g}{2ab^3 AL} r_D\right)^2 \\ &= \left(\frac{3 \times (402.49)^2 \times 1553.714 \times 9.79708}{2 \times 15.985 \times (5.012)^3 \times 30.92 \times 0.08046381579 \times 10^3} \times 0.027444440588\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-(402.49)^3 \times 1553.714 \times 9.79708}{2 \times 15.985 \times (5.012)^3 \times 0.08046381579 \times (30.92)^2 \times 10^3} \times 0.005507269438\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-(402.49)^3 \times 1553.714 \times 9.79708}{2 \times 15.985 \times (5.012)^3 \times 30.92 \times (0.08046381579)^2 \times 10^3} \times 0.00017038\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-(402.49)^3 \times 1553.714 \times 9.79708}{2 \times (15.985)^2 \times (5.012)^3 \times 0.08046381579 \times 30.92 \times 10^3} \times 0.0008743964605\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{-3 \times (402.49)^3 \times 1553.714 \times 9.79708}{2 \times (15.985)^2 \times (5.012)^4 \times 0.08046381579 \times 30.92 \times 10^3} \times 0.0007375081687\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{(402.49)^3 \times 9.79708}{2 \times 15.985 \times (5.012)^3 \times 30.92 \times 0.08046381579 \times 10^3} \times 1.186080926\right)^2 \\ &= (17.65281314)^2 + (20.27388966)^2 + (209.8626124)^2 + (5.421417274)^2 + (43.75161736)^2 + (75.6589531)^2 \\ &= 52432.84147[N^2/mm^4] \end{aligned}$$

したがって, $r_E = \pm 228.9821859[N/mm^2]$.

よって, $E = 99139.45 \pm 228.9821859 = (9.91 \pm 0.02) \times 10^4[N/mm^2]$.

5 考察

鉄，真鍮の *Young* 率の公称値はそれぞれ， $1.9 \times 10^5 \sim 2.1 \times 10^5 [mm]$ ， $9.7 \times 10^4 \sim 1.02 \times 10^5 [mm]$ である．真鍮は実験値と公称値が一致したが，鉄は確率誤差の範囲内でも一致しない，大きい値となった（誤差は $+6.66 \sim 8.57\%$ ）．鉄の *Young* 率の実験値が大きくなってしまった理由として以下の2つが考えられる．

1. 実験手法によるもの
2. 加工硬化によるもの

1. で考えられるのは，分銅をかける位置が鉄棒の重心からズレていた，若しくは分銅を増やすごとに，分銅の位置がズレてしまい，力の作用点が変わっていた可能性がある．たとえ同じ試料でも厚みは均一でないため，これらの人為的ミスが結果に影響していることは大いにあり得る．（特に最小二乗法の計算において鉄は真鍮に比べ，各データと近似直線との誤差が大きかった）

2. は可能性は低いですが，*Young* 率が公称値より「大きい」という実験結果をふまえ考察に含めた．