算法设计与分析第三章作业

1652270 冯舜

1. 算法分析题 4-1

1652270 冯舜

4-1 答：(1) 证明按 $l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n$ 次序考虑时，无法产生最优解：

这里举出反例。当 l_{n-1} 与 l_n 安排在不同的磁带上，且 l_n 与 l_i 安排在同一磁带上，且 $l_n - l_{n-1} > l_i$ 时，明显将 l_i 放在另一磁带时可使 $\max\{\sum_{i\in A} l_i, \sum_{i\in B} l_i\}$ 更小，故贪心算法无法给出最优解。如：

T_1 带	1	2	5	14	15	32	57	(贪心算法)
T_2 带	1	3	9	14	17	33		

T_1 带	2	5	14	15	32	57	(更优解)
T_2 带	1	1	3	9	14	17	33

(2) 证明按 $l_1 \ge l_2 \ge l_3 \ge \cdots \ge l_n$ 考虑时，无法产生最优解：

这里给出反例。当 l_i 序列为 120, 50, 50, 30, 29, 28 时，

T_1 带	120	~~50~~ 29		~~(150)~~ (149)	(贪心算法, 158)	
T_2 带	50	50	30 28 ~~29 28~~	(158)		

T_1 带	120	30		(150)	(更优解, 157)	
T_2 带	50	50	29	28	(157)	

(3) ① 回溯算法。对于每个程序 l_i，可放入 T_1，或可放入 T_2，故所有可能的放法可构成 $(n+1)$ 层二叉树。对该二叉树进行深度优先搜索，遇到叶节点时则有 $\max\{T_1, T_2\}$，看它是否更小，是则更新最优解。搜索完毕后即得最优解，因为对所有情况已进行了搜索。

② 动态规划算法。不妨令 T_1 程序总长更短，则对于 $i \in A \cup B$，令 $x_i = \begin{cases} 1, & l_i \in A \\ 0, & l_i \in B \end{cases}$，则 $\sum_A l_i = \sum_{A\cup B} x_i l_i$，$\sum_B l_i = \sum_{A\cup B}(1-x_i) l_i$，有：$\sum_{A\cup B} x_i l_i \le \sum_{A\cup B}(1-x_i) l_i$ 即 $\sum_{A\cup B} x_i l_i \le \frac{1}{2}\sum_{A\cup B} l_i$，同时使 $\sum_{A\cup B}(1-x_i) l_i$ 最小。此即 0-1 背包问题，用已有算法解决。

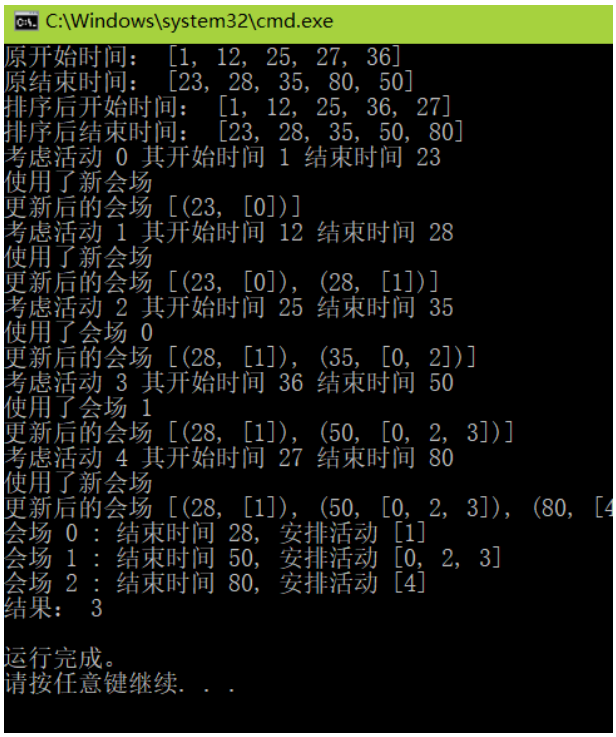
2. 算法实现题 4-1

2.1. 解法一

基本算法思想和课文中的活动安排问题一致，即对活动的完成时间进行从小到大排序，之后将会场数量设置为 0，开始遍历这些活动。若某一活动的开始时间在某会场的最晚结束时间之后，则将其安排入该会场。若没有会场满足要求，则启用一个新的会场，会场数量加一。

会场应以最晚结束时间为主键维持有序。这样，扫描符合要求的会场时只需用二分查找算法。在更新会场的最晚结束时间时，应重新用二分查找法确定该会场的位置。

具体过程可看 4-1.py。如果知道活动数为n，时间复杂度为$O(n\log n)$（排序用$O(n\log n)$，扫描n个活动，每个活动扫描、插入会场用$O(\log n)$，共$O(n\log n)$）。



2.2. 解法二

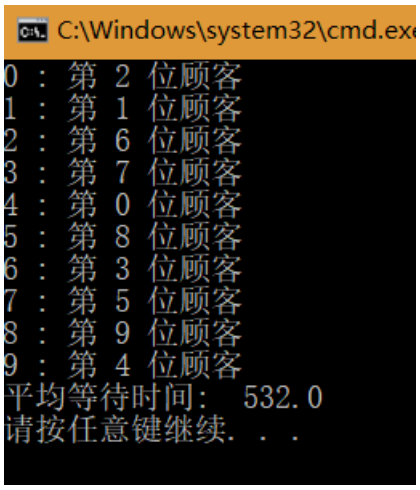
基本算法思想仍和课文中的活动安排问题一致。每次都用贪婪选择活动算法选择出可以加入的活动，此后把加入这个会场的活动剔除。之后如此循环，直到活动全部被剔除，之前用过的会场数就是可以安排所有活动的会场数。时间复杂度$O(n^2)$。

2.3. 解法三

将活动的开始时间、结束时间看作$2n$个端点，对这些断点从小到大排序。初始化一个大小为n的会场栈，并维护一个变量记录会场栈中用过的会场数。从小到大扫描这些端点。遇到开始时间端点，新会场出栈，并用该新会场举办该活动；遇到结束时间端点，该活动的会场入栈。扫描完毕后，用过的会场数即最小所需会场数，同时每个活动都有了对应的会场。时间复杂度$O(n\log n)$（排序）。

3. 算法实现题 4-6

每次挑选服务时间最小的顾客服务即可，详细过程见 4-6.py，时间复杂度$O(n\log n)$。



4. 算法实现题 4-9

每次使汽车驾驶到最远能到的加油站即可。详细过程见 4-9.py，时间复杂度$O(n)$。